UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TOPICOS EN ESPACIOS DE BANACH

Trabajo de graduación previo a la opción

del título de

LICENCIADO EN MATEMATICA

presentado por

PEDRO ALFONSO TEJADA DIAZ

MANUEL DE JESUS CORTEZ ALVAREZ

JULIO DE 1979

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTROAMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR a.i.: Lic. JOSE LUIS ARGUETA ANTILLON

SECRETARIO a.i.: Lic. OSCAR ARMANDO ACEVEDO VELASQUEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO a.i.: Ing. JOSE FRANCISCO AGUIRRE TOVAR

SECRETARIO a.i.: Ing. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DPTO. Ing. GABRIEL MELENDEZ MAYORGA

TRABAJO DE GRADUACION

ASESOR: Lic. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

A mis padres,

PEDRO ALFONSO TEJADA GUINEA

LIDIA DORIS DIAZ DE TEJADA

A mi esposa,

ALBA LILA RICO PEÑA DE TEJADA

y a mi hijo,

MANUEL ALFONSO

A mis padres,

JOSE M. CORTEZ

MARIA DE LA C. DE CORTEZ

A mi esposa,

MARGARITA VELASQUEZ DE CORTEZ

A mis hijos,

JOSE MANUEL, REYNA GUADALUPE y
RICARDO ENRIQUE

y a mi suegra,

IRENE CORTEZ

I N D I C E

PAGINA

INTRODUCCION

El objetivo primordial de este trabajo es poner al alcance de los estudiantes de Licenciatura en Matemática, temas trascendentales como es el tratamiento de Espacios Normados Completos. Aunque nuestro enfoque ha sido elemental, creemos que lo hemos logrado; ya que para el estudiante poco familiarizado será de gran utilidad, puesto que la bibliografía existente respecto al tema desarrollado es escasa y a veces inaccesible.

El presente trabajo se desarrolla a través de 8 Capítulos, cuya secuencia hemos tratado que sea lo más natural posible, partiendo de casos generales, que en la mayoría de las veces se ilustran con casos particulares. Dicho desarrollo es el siguiente:

CAPITULO I: Desarrollamos lo referente a redes y conjuntos dirigidos, damos ejemplos de estos últimos, los cuales nos servirán en capítulos posteriores.

CAPITULO II: Se trata de anotaciones de espacios de Banach entre ellos el espacio de las funciones acotadas con valores complejos sobre N y otros ejemplos.

CAPITULO III: Desarrollamos el ejemplo más representativo de un espacio de Banach, tal es. el espacio de funciones contínuas que van de X hacia $\mathbb{C}$, donde X es un espacio de Hausdorff Compacto.

CAPITULO IV: Estudiamos la completitud del espacio cociente de un espacio de Banach.

CAPITULOS V y VI: Se desarrolla la teoría elemental relacionada con el espacio de transformaciones lineales acotadas $L(\mathfrak{X},Y)$, trabajando como un caso particular el espacio dual de un espacio de Banach (los tratados en el Capítulo II).

CAPITULO VII: Desarrollamos temas relacionados con las topologías débiles; tanto en un espacio, como en su dual.

CAPITULO VIII: Aquí nuestro interés es desarrollar el teorema de Hahn-Banach, cuyo tratamiento como dijimos al principio de esta introducción, es a nivel elemental.

Por otro lado, es justo hacer notar el papel trascendental que desarrolló el asesor de nuestro trabajo, para llevarlo a feliz término.

I. CONJUNTOS DIRIGIDOS Y REDES

DEFINICION 1.1:

Una relación " $\geq$ " en un conjunto A se llama orden parcial (o simplemente orden) de A, si y solo si para todo α,β,γ en A se cumple:

a) $\alpha \geq \alpha$

b) $\alpha \geq \beta$ y $\beta \geq \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$

c) $\alpha \geq \beta$ y $\beta \geq \gamma \Longrightarrow \alpha \geq \gamma$

Al par $(A, \geq)$ se le llamará conjunto parcialmente ordenado.

DEFINICION 1.2:

Se dice que un conjunto parcialmente ordenado A, está totalmente o linealmente ordenado, si para todo α,β en A se cumple que $\alpha \geq \beta$ o $\beta \geq \alpha$.

Si $\alpha \geq \beta$ en un conjunto ordenado A, se dice que α sigue a β y que β precede a α.

DEFINICION 1.3:

Se llama conjunto dirigido, al conjunto parcialmente ordenado $(A, \geq)$ con la propiedad que para cada par α,β en A, existe γ en A tal que: $\gamma \geq \alpha$ y $\gamma \geq \beta$

En este caso, se dice que la relación " $\geq$ " dirige al conjunto A.

EJEMPLOS 1.4:

a) $(\mathbb{N}, \geq)$ es un conjunto dirigido.

En efecto: $(\mathbb{N}, \geq)$ es parcialmente ordenado; además para $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$, existe $\gamma = \alpha + \beta \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma \geq \alpha$ y $\gamma \geq \beta$.

b) $(N(x), \subset)$ es un conjunto dirigido, donde:

$N(x)$: Familia de todos los vecindarios de un punto x en un espacio topológico (X, T)

$\subset$: relación de inclusión.

Es evidente que $(N(x), \subset)$ es parcialmente ordenado.

Además, si $\alpha,\beta \in N(x)$, existe $\gamma = \alpha \cap \beta \in N(x)$, tal que: $\gamma \subset \alpha$ y $\gamma \subset \beta$.

DEFINICION 1.5:

Sea X un conjunto no vacío. Se llama red en X a todo par $(S, (D,\geq))$, donde $(D,\geq)$ es un conjunto dirigido y S es una función de D en X.

NOTACION:

La red $(S, (D,\geq))$ en X la denotaremos por

$S = \{S_n, n \in D, \geq\}$ o por $S = \{S_n\}_{n\in D}$, donde $S_n = S_{(n)}$

DEFINICION 1.6:

Sean X un conjunto no vacío, $M \subset X$ y $S = \{S_n\}_{n\in D}$ una red en X.

a) Se dice que S está en M, si y solo si $S_n \in M$, para todo n.

b) Se dice que S está eventualmente en M, si y solo si, existe un elemento $m \in D$, tal que para todo $n \in D$ y $n \geq m$ entonces $S_n \in M$.

c) Se dice que S está frecuentemente en M, si y solo si, para todo $m \in D$, existe $n \in D$ tal que $n \geq m$ y $S_n \in M$.

PROPOSICION 1.7:

"Si la red $S = \{S_n\}_{n \in D}$ está frecuentemente en M, entonces el conjunto $E = \{n \in D\colon S_n \in M\}$ tiene la propiedad siguiente: para cada elemento $m \in D$, existe un elemento $p \in E$ tal que $p \geq m$".

Al conjunto E, se le llama subconjunto cofinal de D.

PRUEBA:

$E \neq \phi$, se sigue del hecho que S está frecuentemente en M, es decir, para $m \in D$, existe $n \in D$ tal que $n \geq m$ y $S_n \in M$, o sea, $n \in E$.

Además, tomando $n = p$ se cumple que, para todo $m \in D$, existe $p \in E$ tal que $p \geq m$.

PROPOSICION 1.8:

"Sea E un subconjunto cofinal de D, entonces $(E, \geq)$ es un conjunto dirigido".

PRUEBA:

Es obvio que $(E, \geq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sean $m,n \in E$. Vamos a demostrar que existe $p \in E$ tal que $p \geq m$ y $p \geq n$.

$m,n \in D$, pues $E \subset D$, luego existe $n_o \in D$ tal que $n_o \geq n$ y $n_o \geq m$. Dado que E es cofinal de D, para $n_o \in D$ existe $p \in E$ tal que $p \geq n_o$, entonces $p \geq m$ y $p \geq n$. Por consiguiente $(E, \geq)$ es un conjunto dirigido.

DEFINICION 1.9:

Sean X un conjunto no vacío y $\{S_n\}_{n\in D}$ una red en X.

Para todo $m \in D$ se le llama sección de S al conjunto $B_m = \{S_n \in X : n \geq m\}$.

PROPOSICION 1.10:

"Sean X un conjunto no vacío, $M \subset X$, $S = \{S_n\}_{n\in D}$ una red en X, entonces:

a) $\{S_n\}_{n\in D}$ está eventualmente en M $\Longrightarrow \{S_n\}_{n\in D}$ está frecuentemente en M.

b) $\{S_n\}_{n\in D}$ está eventualmente en M si y solo si existe $m_o \in D$ tal que $B_{m_o} \subset M$.

c) $\{S_n\}_{n\in D}$ está frecuentemente en M si y solo si para todo $n \in D$ se cumple que $B_n \cap M \neq \phi$".

PRUEBA:

Su verificación resulta inmediata a partir de las definiciones dadas anteriormente.

DEFINICION 1.11:

Sean (X, T) un espacio topológico y $\{S_n\}_{n \in D}$ una red en X; se dice que la red $\{S_n\}_{n \in D}$ converge a $x \in X$, si para todo $V \in N(x)$, existe $m \in D$, tal que para todo $n \in D$ y $n \geq m$ entonces $S_n \in V$.

DEFINICION 1.12:

Sean (X, T) un espacio topológico y $\{S_n\}_{n \in D}$ una red en X; se llama límite de S en (X, T) al conjunto
$\{x \in X : S$ converge a x en $(X,T)\}$ y se denota por $Lim_T S$.

OBSERVACION 1.13:

a) $x \in Lim_T S \iff S$ está eventualmente en V, para todo $V \in N(x)$.

b) $x \in Lim_T S \iff$ Para todo $V \in N(x)$, existe $m_o \in D$ tal que $B_{m_o} \subset V$.

OBSERVACION 1.14:

Si (X, T) es el espacio topológico discreto, entonces la red $\{S_n\}_{n \in D}$ converge al punto $x_o \in X$, si y solo si está eventualmente en $\{x_o\}$.

OBSERVACION 1.15:

Si (X, T) es el espacio topológico indiscreto, cada red en X converge a cualquier punto de X.

En consecuencia una red puede converger hacia varios puntos diferentes.

PROPOSICION 1.16:

"Sean (X, T) un espacio topológico y $M \subset X$. Entonces: $x \in \overline{M}$ si y solo si existe $S = \{S_n\}_{n \in D}$ una red en X con $\operatorname{Im} S \subset M$ y $x \in \operatorname{Lim}_T S$".

PRUEBA:

$\Longrightarrow$: Si $x \in \overline{M}$, se tiene que $V \cap M \neq \phi$, para todo $V \in N(x)$, entonces podemos seleccionar un punto $x \in V \cap M$.

Además, $(N(x), \subset)$ es un conjunto dirigido y

$$\begin{aligned} S : N(x) &\longrightarrow X \\ V &\longrightarrow S_V = x,\ x \in V \cap M, \text{ es una función.} \end{aligned}$$

Entonces $\{S_V\}_{V \in N(x)}$ es una red en X tal que $\operatorname{Im} S \subset M$ y $x \in \operatorname{Lim}_T S$.

En efecto:

· Para todo $V \in N(x)$, $S_V \in M$, es decir $\operatorname{Im} S \subset M$.

· Usando la definición 1.11, vamos a probar que $x \in \operatorname{Lim}_T S$:

Sea $V \in N(x)$, $V \cap M \neq \phi$.

Escojamos $m \geq V$ (Es decir $m \subset V$). Sea $m = V$.

Ahora sea $\gamma \geq m$ (es decir $\gamma \subset m$), entonces por definición de S, $S_\gamma \in \gamma \cap M$, pero como $\gamma \geq m$, entonces $S_\gamma \in m \cap M$.

Luego, $S_\gamma \in V \cap M$, es decir $S_\gamma \in V$.

$\Longleftarrow$: Si $\{S_n\}_{n \in D}$ es una red en X, con $\operatorname{Im} S \subset M$ y $x \in \operatorname{Lim}_T S$, se verifica que:

Para todo $V \in N(x)$, existe $m_o \in D$ tal que $B_{m_o} \subset V$.

Por lo tanto $S_{m_o} \in V \cap M$.

Luego $x \in \overline{M}$.

Hemos observado que, en general, en un espacio topológico, una red puede converger a varios puntos del espacio, siendo ellos distintos entre sí. Existen espacios topológicos en los cuales la convergencia es única, es decir: Si una red $S = \{S_n\}_{n \in D}$ converge al punto x y también converge al punto t, entonces $x = t$.

Lo anterior nos motiva la siguiente:

DEFINICION 1.17:

Un espacio topológico X es un espacio de Hausdorff, o espacio separado, si para todo $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen V, W vecindarios de x e y respectivamente en (X, T), tales que $V \cap W = \phi$.

PROPOSICION 1.18:

"Sea (X, T) un espacio topológico. Entonces:

(X, T) es de Hausdorff si y solo si para toda $S = \{S_n\}_{n \in D}$ red en X se cumple que: $Lim_T S = \phi$ o $Lim_T S$ consta de un solo elemento".

Dicho de otra manera: "Un espacio topológico es de Hausdorff si y solo si toda red en el espacio converge a lo sumo a un punto".

PRUEBA:

$\Longrightarrow$: Si existen $x_1, x_2 \in Lim_T S$, con $x_1 \neq x_2$, como (X, T) es un espacio de Hausdorff, existen V, W vecindarios de x_1 y x_2 respectivamente en (X, T) tales que $V \cap W = \phi$. Así existen n_1, n_2 en D tales que para todo $n \in D$, con $n \geq n_1$, $S_n \in V$ y para todo $n \in D$, con $n \geq n_2$, $S_n \in W$.

Como $(D, \geq)$ es un conjunto dirigido, para $n_1, n_2 \in D$ existe $n_o \in D$ tal que $n_o \geq n_1$ y $n_o \geq n_2$. Se tiene que: $S_{n_o} \in V \cap W$, es decir $V \cap W \neq \phi$, lo cual es un absurdo. Así $x_1 = x_2$.

$\Longleftarrow$: Supongamos que (X, T) no es de Hausdorff y que s y t son puntos diferentes de X, tal que cada T-vecindario de s intercepta a cada T-vecindario de t.

Sean N(s) la familia de T-vecindarios de s y N(t) la familia de T-vecindarios de t, entonces $(N(s), \subset)$ y $(N(t), \subset)$ son conjuntos dirigidos. Por lo tanto, podemos ordenar el producto cartesiano $N(s) \times N(t)$

al suponer que:

"$(T,U) \geq (V,W)$ si y solo si $T \subset V$ y $U \subset W$", donde $T, V \in N(s)$, $U,W \in N(t)$. Claramente el producto cartesiano $N(s) \times N(t)$ con la relación definida anteriormente es un conjunto dirigido.

Para todo $(T,U) \in N(s) \times N(t)$, $T \cap U \neq \phi$, por consiguiente podemos seleccionar el punto $s_{(T,U)}$ en $T \cap U$.

Si $(V,W) \geq (T,U)$, entonces $s_{(V,W)} \in V \cap W \subset T \cap U$, y en consecuencia la red

$$S = \{S_{(T,U)}\}_{(T,U)\in N(s)\times N(t)}$$

converge a s y a t, es decir que $Lim_T S = \{s,t\}$.

Probaremos que $s \in Lim_T S$. Para ello mostraremos que para todo $V \in N(s)$, existe $m \in N(s) \times N(t)$, tal que para todo n, $n \in N_{(s)} x N_{(t)}$ con $n \geq m$, $S_n \in V$.

Sea $V \in N(s)$.

Escojamos $m = (V,T) \in N(s) \times N(t)$

Sea ahora $n = (A,B) \geq m = (V,T)$

entonces $S_n \in A \cap B$, luego $S_n \in V \cap T$, por consiguiente tenemos que $S_n \in V$.

De manera similar se prueba que $t \in Lim_T S$.

OBSERVACION 1.19:

Si (X,T) es un espacio de Hausdorff y una red $\{S_n\}_{n\in D}$

en X converge a x_0, escribiremos $\text{Lim}_T S = x_0$. Cuando no sea posible la confusión, escribiremos $\displaystyle\text{Lim}_{n \in D} S_n = x_0$.

A continuación enunciaremos un resultado muy importante, el cual puede servir para caracterizar topologías, las cuales se han definido en términos de convergencia de redes.

PROPOSICION 1.20:

"Sean T_1 y T_2 dos topologías sobre X, entonces:

T_1 coincide con T_2 si y solo sí tienen las mismas redes convergentes".

PRUEBA:

$\Longrightarrow$: Si T_1 coincide con T_2, es claro que las redes convergentes de T_1 serán las mismas de T_2.

$\Longleftarrow$: Probaremos primero que $T_1 \subset T_2$.

Sean M un conjunto T_1-cerrado (es decir cerrado con respecto a la topología T_1) y $x \in \overline{M}_{T_2}$ (es decir que pertenece a la cerradura de M con respecto a la Topología T_2).

Entonces, dado que $x \in \overline{M}_{T_2}$, por proposición 1.16 tenemos:

Existe S, S red en X con la Topología T_2, tal que Im S $\subset$ M y $x \in \text{Lim}_{T_2} S$, entonces por hipótesis, existe S, S red en X con la topología T_1 tal que Im S $\subset$ M y $x \in \text{Lim}_{T_1} S$, entonces aplicando nuevamente la proposición 1.16, tenemos que $x \in \overline{M}_{T_1}$, donde $\overline{M}_{T_1}$

es la cerradura de M con respecto a la topología T_1; de aquí que $x \in M$, pues $M = \overline{M}_{T_1}$.

Luego se tiene que $\overline{M}_{T_2} \subset M$, y en consecuencia $M = \overline{M}_{T_2}$.

Por lo tanto M es también un conjunto T_2-cerrado. Como M era arbitrario, podemos decir que todo conjunto T_1-cerrado es tambien T_2-cerrado.

Por consiguiente $T_1 \subset T_2$.

De igual manera se prueba que $T_2 \subset T_1$, para lograr que T_1 coincida con T_2.

DEFINICION 1.21:

Una red $\{S_n\}_{n\in D}$ se llama uniformemente acotada en un conjunto T, si existe una constante $M > 0$ tal que $|S_n(x)| \leq M$, para todo $x \in T$. El número M se llama la cota uniforme, para $\{S_n\}_{n\in D}$.

PROPOSICION 1.22:

"Sean X,Y espacios topológicos, $f: X \longrightarrow Y$ una función. Entonces: f es contínua si y solamente si, para toda red convergente $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ en X se cumple que $\lim\limits_{\alpha\in A} f(x_\alpha) = f(\lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha)$".

PRUEBA:

" $\Longrightarrow$ " : Sea $x = \lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$

Sea U un vecindario de $f(x)$. Encontremos $\alpha_o \in A$ tal que

$f(x_\alpha) \in U$, para todo $\alpha \geq \alpha_o$.

Por ser f contínua, existe W vecindario de x tal que $f(W) \subset U$.

Además, como $x = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha$, existe $\alpha_o \in A$ tal que $x_\alpha \in W$ para todo $\alpha \geq \alpha_o$.

Luego, $f(x_\alpha) \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_o$.

" $\Longleftarrow$ " : Supongamos que para cualquier red convergente $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en X se cumple que $\lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha) = f(\lim_{\alpha \in A} x_\alpha)$ y además que f no es contínua.

Sea $r \in X$ un punto donde f no es contínua; entonces existe V, un vecindario de f(r) tal que para cualquier W vecindario de r se cumple que $f(W) \not\subset V$.

Ahora construyamos una red en X y verifiquemos si cumple la hipótesis asumida, suponiendo que f no es contínua.

Para ello:

$(N(r), \subset)$ es un conjunto dirigido.

$t : N(r) \longrightarrow X : t_{(W)} = x_W$, $x_W \in W$ tal que $f(x_W) \notin V$, es una función. Entonces tenemos que $\{x_W\}_{W \in N(r)}$ es una red en X.

Obviamente la red construída converge a r, es decir,

$\lim_{W \in N(r)} x_W = r$ y sin embargo, $\lim_{W \in N(r)} f(x_W) \neq f(r)$.

En efecto:

Por construcción $f(x_W) \notin V$, para todo $W \in N(r)$ o sea que, para éste $V \in N(f(r))$ no existe $\alpha_o \in A$ tal que $f(x_\alpha) \in V$ para todo $\alpha \geq \alpha_o$, donde $A = N(r)$.

Esta última aseveración es una contradicción, puesto que habíamos supuesto que la hipótesis se cumplía para cualquier red convergente en X. Por lo tanto f debe ser contínua.

II. ESPACIOS DE BANACH.

DEFINICION 2.1:

Sea E un conjunto. Se dice que una función $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una métrica o una distancia si:

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Si en E puede definirse una métrica, entonces E se llama espacio métrico.

DEFINICION 2.2:

Sea E un espacio vectorial sobre K($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) se dice que $\| \quad \| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una norma, si:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para $\lambda \in K$, $x \in E$.

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para $x,y \in E$.

Si E está dotado de una norma, E se denomina "Espacio Vectorial Normado" o "Espacio Lineal Normado".

OBSERVACION 2.3:

Todo espacio vectorial normado puede hacerse espacio métrico si se define: $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, tal que:

$$(x,y) \rightsquigarrow d(x,y) = \|x - y\|$$

la cual es una distancia.

En efecto:

1) $d(x,y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x = y$

2) $d(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\| = d(y,x)$, tomando $\lambda = -1$

3) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z) + (z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$

$\leq d(x,z) + d(z,y)$.

DEFINICION 2.4:

Decimos que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ definidas sobre el mismo espacio vectorial normado E, son equivalentes; si existen dos números positivos m,n tal que:

$\|x\|_2 \leq m\|x\|_1$ y $\|x\|_1 \leq n\|x\|_2$, para todo $x \in E$.

LEMA 2.5:

"Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre un espacio vectorial E, entonces

$(\|x\|_1 \leq 1 \Rightarrow \|x\|_2 \leq 1) \iff \|x\|_2 \leq \|x\|_1$, donde $x \in E$".

PRUEBA:

"$\Longrightarrow$" : Sea $x \in E$, $x \neq 0$. Hagamos $y = \dfrac{x}{\|x\|_1}$

y así $\|y\|_1 = 1$

de aquí tenemos que $\|y\|_2 \leq 1$ o sea $\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 \leq 1$

entonces $\frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \leq 1$, luego $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Si $x = 0$, también se cumple

" $\Longleftarrow$ " : Sea $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$, para todo $x \in E$

Supongamos además que $\|x\|_1 \leq 1$

entonces $\|x\|_2 \leq 1$.

DEFINICION 2.6:

Si E, E' son dos espacios normados con normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ respectivamente, una función $f: E \longrightarrow E'$ se llama una <u>isometría</u> si f es lineal, biyectiva y además f preserva las normas, es decir,

$\|f(x)\|_2 = \|x\|_1$, para todo $x \in E$.

DEFINICION 2.7:

Una sucesión $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos de un espacio lineal normado E, se dice que es una sucesión fundamental o sucesión de Cauchy, si dado $\varepsilon > 0$, arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m,n \geq n_0$ se tiene que $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$

DEFINICION 2.8:

Un espacio de Banach es un espacio lineal complejo $\mathfrak{X}$, con una norma que satisface las condiciones de la definición 2.2, de modo que

$\mathfrak{X}$ es completo en la métrica dada por esta norma.

PROPOSICION 2.9:

"Sea $\mathfrak{X}$ un espacio de Banach. Las funciones:

i) $a : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ definida por

$(x,y) \rightsquigarrow x + y$

ii) $S : \mathbb{C} \times \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$, definida por

$(\lambda,x) \rightsquigarrow \lambda x$

iii) $\eta : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$x \rightsquigarrow \|x\|$

son contínuas".

PRUEBA:

Para i) : Debemos probar que para toda bola abierta $B(x_0 + y_0, \varepsilon)$ existe una bola $B((x_0,y_0),\delta) = V$, tal que: $a(V) \subset B(x_0+y_0, \varepsilon)$.

Tomemos $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$, la cual es una norma en $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$.

Sea la bola abierta $B(x_0 + y_0, \varepsilon)$.

Tenemos por otro lado que la bola $B((x_0,y_0), \delta)$, es el conjunto

$$V = \{(x,y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} : \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} : \|(x-x_0, y-y_0)\| < \delta\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} : \|x-x_0\| + \|y-y_0\| < \delta\}$$

Tomando $\delta = \varepsilon$, se tiene la bola

$V = \{(x,y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} : \|x-x_0\| + \|y-y_0\| < \varepsilon\}$

de modo que para $(x,y) \in V$ se tiene:

$$\begin{aligned} \| a(x,y) - a(x_0,y_0) \| &= \|x+y - (x_0+y_0)\| \\ &\leq \|x-x_0\| + \|y-y_0\| \end{aligned}$$

pero $\|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \varepsilon$

es decir

$\|a(x,y) - a(x_0,y_0)\| < \varepsilon$

y esto implica que $a(x,y) \in B(x_0 + y_0, \varepsilon)$.

es decir $a(V) \subset B(x_0 + y_0, \varepsilon)$.

Para ii) : Debemos probar que para toda bola abierta $B(\lambda_0 x_0,\varepsilon)$ existe otra bola abierta $B((\lambda_0,x_0),\delta) = V$ de tal manera que $S(V) \subset B$.

Tomemos la norma en $\mathbb{C} \times \mathfrak{X}$ por medio de $\|(\lambda,x)\| = |\lambda| + \|x\|$

Utilizando desigualdades tenemos:

$$\begin{aligned} \| \lambda x-\lambda_0 x_0\| &= \| \lambda_0(x-x_0) + (\lambda-\lambda_0)x_0 + (\lambda-\lambda_0)(x-x_0)\| \\ &\leq \|\lambda_0(x-x_0)\| + \|(\lambda-\lambda_0)x_0\| + \|(\lambda-\lambda_0)(x-x_0)\| \\ &\leq |\lambda_0|\,\|x-x_0\| + |\lambda-\lambda_0|\,\|x_0\| + |\lambda-\lambda_0|\,\|x-x_0\| . \end{aligned}$$

Ahora bien, debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$\|(\lambda,x) - (\lambda_0,x_0)\| < \delta \Longrightarrow \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$

Así

$$\|(\lambda,x) - (\lambda_o,x_o)\| = \|(\lambda-\lambda_o,x-x_o)\|$$

$$= |\lambda-\lambda_o| + \|x-x_o\| < \delta$$

$\Longrightarrow$

$$|\lambda-\lambda_o| < \delta \quad y \quad \|x-x_o\| < \delta.$$

$$\Longrightarrow \|\lambda x-\lambda_o x_o\| < |\lambda_o|\delta + \|x_o\|\delta + \delta^2$$

$$\|\lambda x-\lambda_o x_o\| < \delta(|\lambda_o| + \|x_o\| + \delta).$$

Si ahora escogemos δ tal que $0 < \delta < 1$ y

$0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda_o| + \|x_o\| + 1}$ entonces

$$\|\lambda x-\lambda_o x_o\| < \delta(|\lambda_o| + \|x_o\| + 1) < \varepsilon$$

es decir S es contínua en (λ_o,x_o) y como este punto es arbitrario, S es contínua.

Para iii) Debemos probar que para toda bola abierta $B(\|x\|,\varepsilon)$ existe una bola abierta $V = B(x,\delta)$ tal que $\eta(V) \subset B$ o de otra forma

$$\|x-x_o\| < \delta \Longrightarrow \Big|\, \|x\| - \|x_o\| \,\Big| < \varepsilon$$

Se tiene que $\|x-x_o\| \geq \|x\| - \|x_o\|$

$$\|x_o-x\| \geq \|x_o\| - \|x\|$$

y por consiguiente:

$$\|x_o\| - \|x\| < \delta$$

$$\|x\| - \|x_o\| < \delta$$

o sea

$$-\delta < \|x\| - \|x_o\| < \delta$$

$$\big|\, \|x\| - \|x_o\| \,\big| < \delta .$$

Y si hacemos $\delta = \varepsilon$ se tiene que

$$\|x-x_o\| < \delta \Longrightarrow \big|\, \|x\| - \|x_o\| \,\big| < \varepsilon$$

DEFINICION 2.10:

Una red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ en un espacio de Banach es de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\alpha_o \in D$ tal que $\alpha_1,\alpha_2 \geq \alpha_o$ implica que

$$\|f_{\alpha_1} - f_{\alpha_2}\| < \varepsilon$$

PROPOSICION 2.11:

"En un espacio de Banach, toda red de Cauchy es convergente".

PRUEBA:

Sea la red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ de Cauchy en el espacio de Banach $\mathfrak{X}$. Escojamos α_1 tal que $\alpha \geq \alpha_1$ implique que $\|f_\alpha - f_{\alpha_1}\| < 1$; un $\alpha_2 \geq \alpha_1$ tal que $\alpha \geq \alpha_2$ implique que $\|f_\alpha - f_{\alpha_2}\| < \frac{1}{2}$ ·

Procediendo de esa manera, se forma la sucesión $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ en D y $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$, para todo n, tal que .

$\|f_\alpha - f_{\alpha_n}\| < \frac{1}{n}$, para todo $\alpha \geq \alpha_n$.

De aquí que la sucesión $\{f_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Pero además $\mathfrak{X}$ es completo en la métrica dada por la norma $\|\cdot\|$, es decir, existe $f \in \mathfrak{X}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} = f$$

Probemos a continuación que $\lim\limits_{\alpha\in D} f_\alpha = f$

Sea $\varepsilon > 0$.

Escojamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ y tal que $\|f_{\alpha_n} - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por otro lado

$$\|f_\alpha - f\| = \|f_\alpha - f_{\alpha_n} + f_{\alpha_n} - f\| \leq \|f_\alpha - f_{\alpha_n}\| + \|f_{\alpha_n} - f\|$$

pero $\alpha \geq \alpha_n$ implica que $\|f_\alpha - f_{\alpha_n}\| < \frac{1}{n}$.

Entonces

$$\|f_\alpha - f\| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Es decir, la red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ es convergente en $\mathfrak{X}$.

Definamos ahora un concepto más general de sumatoria en un espacio de Banach.

DEFINICION 2.12:

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ un conjunto de vectores en un espacio de Banach $\mathcal{X}$. Sea $\mathcal{F} = \{F \subset D : F \text{ es finito}\}$.

Convengamos en que $F_1 \leq F_2$ para $F_1 \subset F_2$, entonces tendremos que $\mathcal{F}$ es un conjunto dirigido.

Para cada $F \in \mathcal{F}$, sea $g_F = \sum\limits_{\alpha\in F} f_\alpha$.

Si la red $\{g_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ converge a algún $g \in \mathcal{X}$, entonces decimos que la sumatoria $\sum\limits_{\alpha\in D} f_\alpha$ converge y escribimos $g = \sum\limits_{\alpha\in D} f_\alpha$.

PROPOSICION 2.13:

"Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ un conjunto de vectores en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ tal que $\sum\limits_{\alpha\in D} \|f_\alpha\|$ converge en $\mathbb{R}$; entonces $\sum\limits_{\alpha\in D} f_\alpha$ converge en $\mathcal{X}$".

PRUEBA: Por la notación anterior, para probar que $\sum\limits_{\alpha\in D} f_\alpha$ es convergente en $\mathcal{X}$, necesitamos probar que la red $\{g_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ es convergente en $\mathcal{X}$.

Pero por ser $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y por la proposición 2.11 solamente necesitamos probar que la red es de Cauchy.

Por hipótesis $\sum\limits_{\alpha\in D} \|f_\alpha\|$ es convergente. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que para $F \geq F_0$ se tiene que

$$\sum_{\alpha\in F}\|f_\alpha\| - \sum_{\alpha\in F_0} \|f_\alpha\| < \varepsilon$$

Tomemos entonces $F_1, F_2 \geq F_o$. Así:

$$\|g_{F_1} - g_{F_2}\| = \|\sum_{\alpha\in F_1} f_\alpha - \sum_{\alpha\in F_2} f_\alpha\|$$

$$= \|\sum_{\alpha\in F_1-F_2} f_\alpha - \sum_{\in F_2-F_1} f_\alpha\|$$

$$\leq \sum_{\alpha\in F_1-F_2} \|f_\alpha\| + \sum_{\alpha\in F_2-F_1} \|f_\alpha\|$$

$$\leq \sum_{\alpha\in F_1\cup F_2} \|f_\alpha\| - \sum_{\alpha\in F_o} \|f_\alpha\| < \varepsilon$$

En donde $F = F_1 \cup F_2$. Por lo tanto la red $\{g_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ es de Cauchy y por consiguiente $\sum_{\alpha\in D} f_\alpha$ es convergente por definición.

A continuación estableceremos un criterio elemental, que nos dirá cuando un espacio lineal normado es un espacio de Banach.

COROLARIO 2.14:

"Un espacio lineal normado $\mathcal{H}$ es un espacio de Banach si y solo si para cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores en $\mathcal{H}$ la condición $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$".

PRUEBA:

"$\Longrightarrow$" : Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Banach

De la proposición anterior se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$ implica que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es convergente en $\mathfrak{X}$.

" $\Longleftarrow$ " : Supongamos que $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio lineal normado $\mathfrak{X}$ en el cual $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$ implica que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en $\mathfrak{X}$.

Escójase n_1 tal que para $i,j \geq n_1$ tengamos que $\|g_i - g_j\| < 1$; $n_2 > n_1$ tal que para $i,j \geq n_2$ se tenga que $\|g_i - g_j\| < \frac{1}{2}$; $n_3 > n_2$ tal que para $i,j \geq n_3$ se tenga que $\|g_i - g_j\| < \frac{1}{2^2}$ y así sucesivamente; teniendo $\{g_{n_K}\}_{K=1}^{N}$ escójase un $n_{N+1} > n_N$ tal que $i,j \geq n_{N+1}$ implique $\|g_i - g_j\| < 2^{-N}$. Si hacemos

$f_K = g_{n_K} - g_{n_{K-1}}$ para $K > 1$ y $f_1 = g_{n_1}$ entonces

$$\sum_{K=1}^{\infty} \|f_K\| < \|g_{n_1}\| + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^N} + \dots$$

pero si

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^N}$$

$$\frac{1}{2} S_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{N+1}}$$

$$\frac{1}{2} S_N = 1 - \frac{1}{2^{N+1}}; \quad \Longrightarrow S_N = 2 - \frac{1}{2^N}$$

$$\text{y} \lim_{N\to\infty} S_N = 2$$

entonces

$$\sum_{K=1}^{\infty} \|f_K\| < \|g_{n_1}\| + 2 < \infty$$

y por hipótesis tenemos que la serie $\sum_{K=1}^{\infty} f_K$ es convergente.

Supongamos que converge a g, entonces para $\varepsilon > 0$, existe el entero $N > 0$, de modo que para $m \geq N$

$\|g-g_m\| < \varepsilon$, con $g_m = \sum_{K=1}^{m} f_K$

es decir

$\|g-(f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_m)\| < \varepsilon$

Pero $\|g-(f_1 + \dots + f_m)\| = \|g-g_{n_1}-g_{n_2}+g_{n_1}-g_{n_3}+g_{n_2} - \dots -$

$-g_{n_m}+g_{n_{m-1}}\|$

$= \|g-g_{n_m}\| < \varepsilon$

Así, para $\varepsilon > 0$, existe el entero $N > 0$ tal que para $m \geq N$

$\|g-g_{n_m}\| < \varepsilon$

y esto es equivalente a afirmar que $\lim_{m\to\infty} g_{n_m} = g$ y por consiguiente la sucesión $\{g_{n_K}\}_{K=1}^{\infty}$ es convergente en $\mathcal{H}$.

Ahora, para $\varepsilon > 0$, tomemos $r > 0$ tal que $\frac{1}{r} < \frac{\varepsilon}{2}$ y que se cumpla $\|g_{n_r} - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Entonces se tendrá que para $n \geq n_r$

$$\begin{aligned}\|g_n-g\| &= \|g_n-g_{n_r} + g_{n_r} - g\| \\ &\leq \|g_n - g_{n_r}\| + \|g_{n_r} - g\| < \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

$\|g_n-g\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Esta última desigualdad quiere decir que $\lim_{n\to\infty} g_n = g$; o sea que $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en $\mathfrak{X}$, por lo tanto $\mathfrak{X}$ es completo, es decir $\mathfrak{X}$ es un espacio de Banach.

EJEMPLOS DE ESPACIOS DE BANACH.

EL ESPACIO $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$.

DEFINICION 2.15

a) Denotemos con $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$ la colección de todas las funciones complejas acotadas definidas sobre los enteros no negativos $\mathbb{N}$, es decir

$$\ell^{\infty}(\mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ es acotada}\}$$

b) Además definamos las operaciones suma (+) y producto (·) como sigue:

$$+ : \ell^{\infty}(\mathbb{N}) \times \ell^{\infty}(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^{\infty}(\mathbb{N})$$

$$(f,g) \rightsquigarrow f+g$$

de modo que $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \ell^{\infty}(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^{\infty}(\mathbb{N})$$

$$(\lambda,f) \rightsquigarrow \lambda f$$

tal que $(\lambda f)(n) = f(n)$, con $n \in \mathbb{N}$.

c) Sobre $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$ definamos la norma, así:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|$$

Dicho valor existe, puesto que f es acotada.

PROPOSICION 2.16:

"Con las operaciones definidas anteriormente se tiene que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es un espacio lineal normado".

PRUEBA:

a) $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es un espacio vectorial. En efecto:

Sean $f,g \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Si $f,g \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, entonces existen $K_1 > 0$ y $K_2 > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$|f(n)| \leq K_1 \quad \text{y} \quad |g(n)| \leq K_2 .$$

i) $|(f+g)(n)| = |f(n) + g(n)| \leq |f(n)| + |g(n)|$

$|(f+g)(n)| \leq K_1 + K_2 = K$

o sea que $f+g \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

ii) $|(\alpha f)(n)| = |\alpha f(n)| = |\alpha|\,|f(n)| \leq |\alpha| K_1 = K$. Así, $\alpha f \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Las demás propiedades son de fácil verificación.

b) Probemos que $\|f\|_\infty$ cumple con ser una norma:

i) $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$

"$\Longrightarrow$" $\|f\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |f(n)| = 0 \Longrightarrow |f(n)| = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$\Longrightarrow f(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow f = 0$

"$\Leftarrow$" $f = 0 \Longrightarrow f(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow |f(n)| = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)| = 0 \Longrightarrow \|f\|_\infty = 0$$

ii) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$ para $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(\lambda f)(n)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda f(n)|$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} (|\lambda|\,|f(n)|)$$

$$= |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|$$

$$= |\lambda| \, \|f\|_\infty$$

iii) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} (|(f+g)(n)|)$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} (|f(n)+g(n)|)$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |g(n)|$$

$$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Por consiguiente $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es un espacio lineal normado.

PROPOSICION 2.17:

"$\ell^\infty(\mathbb{N})$ es un espacio de Banach".

PRUEBA:

Por la proposición anterior, solamente nos falta probar la completitud de $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$. Para ello, sea la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores en $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < \infty .$$

Para aplicar el Corolario 2.14, debemos probar que la expresión anterior implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definamos $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \leadsto \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

con $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

Probemos que la sucesión $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y con ello estaremos probando que además es convergente, ya que los $g_n(x)$ están en $\mathbb{C}$.

Hagamos $S_n = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_{\infty}$

Tenemos así que la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, es decir que para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo $N > 0$ tal que $|S_m - S_n| < \varepsilon$ para $m,n \geq N$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Escojamos m,n de modo que $m > n \geq N$, entonces

$$|S_m - S_n| = \|f_{n+1}\|_{\infty} + \ldots + \|f_m\|_{\infty} < \varepsilon$$

Por otro lado se tiene:

$$|g_m(x) - g_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)|$$

$$\leq |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_m(x)|$$

$|g_m(x) - g_n(x)| \leq \|f_{n+1}\|_\infty + \dots + \|f_m\|_\infty < \varepsilon$, para $m,n \geq N$

y por consiguiente $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, es decir, podemos definir

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

Probemos ahora que g es acotada, es decir que existe una constante $M > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq M, \text{ para todo } x \in \mathbb{N}$$

$$|g(x)| = |\lim_{n\to\infty} g_n(x)| = |\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty = M$$

Solo resta probar que $\lim_{n\to\infty} \|g-g_n\|_\infty = 0$

Sea $\varepsilon > 0$

$$\|g-g_n\|_\infty = \|\sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k\|_\infty$$

$$= \|f_{n+1} + f_{n+2} + \dots\|_\infty = \|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\|$$

$$\| g-g_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k\|_\infty$$

Por otra lado, $S = \sum_{k=1}^{\infty} \| f_k\|_\infty < \infty$ implica que existe $N \in \mathbb{N}$

tal que $|S - S_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k\|_\infty < \varepsilon$ para $n \geq N$

es decir existe el entero $N > 0$ tal que

$\| g - g_n\| < \varepsilon$, para $n \geq N$

y así

$$\lim_{n\to\infty} \| g-g_n\|_\infty = 0$$

Por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es convergente y por consiguiente $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es un espacio de Banach.

EL ESPACIO $C_o(\mathbb{N})$

OBSERVACION 2.18:

Consideremos ahora el conjunto de todas las funciones $f \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ tales que $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$, el cual denotaremos $C_o(\mathbb{N})$.

Por propiedad de espacios métricos se tiene que todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es un subespacio completo.

Como la cerradura de un conjunto es el menor conjunto cerrado que lo contiene, entonces $C_o(\mathbb{N}) \subset \overline{C_o(\mathbb{N})}$.

Ahora, sea $g \in \overline{C_0(\mathbb{N})}$, entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $C_0(\mathbb{N})$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = g$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g(x)| - |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } n \geq N$$

$$\text{o } |g(x)| < |f_n(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } n \geq N$$

Además como $f_n \in C_0(\mathbb{N})$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } x \geq N_1$$

entonces $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ para $x \geq N_1$

es decir $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

$\Longrightarrow$ $g \in C_0(\mathbb{N})$

$\Longrightarrow$ $C_0(\mathbb{N})$ es cerrado

Por consiguiente $C_0(\mathbb{N})$ es un espacio de Banach.

EL ESPACIO $\ell^1(\mathbb{N})$

DEFINICION 2.19:

Denotemos por $\ell^1(\mathbb{N})$ a la colección de todas las funciones complejas ψ sobre $\mathbb{N}$, tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n)| < \infty$$

Definamos la suma puntual como sigue:

$$+ : \ell^1(\mathbb{N}) \times \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^1(\mathbb{N})$$

$$(\psi_1, \psi_2) \rightsquigarrow \psi_1 + \psi_2$$

tal que $(\psi_1 + \psi_2)(n) = \psi_1(n) + \psi_2(n)$

y el producto por escalar

$$\cdot : \mathbb{C} \times \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^1(\mathbb{N})$$

$$(\lambda, \psi_1) \rightsquigarrow \lambda\psi_1$$

tal que $(\lambda\psi_1)(n) = \lambda\psi_1(n)$

PROPOSICION 2.20:

"Con las operaciones definidas anteriormente, se cumple que $\ell^1(\mathbb{N})$ es un espacio vectorial".

PRUEBA:

Nos limitaremos a probar que:

i) Si $\psi_1, \psi_2 \in \ell^1(\mathbb{N})$ entonces $\psi_1 + \psi_2 \in \ell^1(\mathbb{N})$.

ii) Si $\psi_1 \in \ell^1(\mathbb{N})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $\lambda\psi_1 \in \ell^1(\mathbb{N})$.

Puesto que las demás propiedades son de fácil verificación

i) Tomemos $\psi_1, \psi_2 \in \ell^1(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\psi_1(n)| < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_2(n)| < \infty$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(\psi_1 + \psi_2)(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_1(n) + \psi_2(n)|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} (|\psi_1(n)|+|\psi_2(n)|)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_1(n)| + \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_2(n)|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(\psi_1 + \psi_2)(n)| < \infty$$

ii) Sean $\psi_1 \in \ell^1(\mathbb{N})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in N$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(\lambda\psi_1)(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda\psi_1(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda||\psi_1(n)|$$

$$= |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_1(n)| < \infty$$

DEFINICION 2.21:

Para $\psi \in \ell^1(\mathbb{N})$, definamos

$$||\psi||_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n)|$$

OBSERVACION 2.22:

Con la norma definida anteriormente se tiene que $\ell^1(\mathbb{N})$ es un espacio normado; puesto que

$||\psi||_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n)|$ cumple las propiedades de norma.

En efecto:

i) $\|\psi\|_1 = 0 \iff \psi = 0$

$$\|\psi\|_1 = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n)| = 0 \iff |\psi(n)| = 0 \text{ para todo}$$

$n \in \mathbb{N}$.

$\iff \psi(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \iff \psi = 0$

ii) $\|\lambda\psi\|_1 = |\lambda| \|\psi\|_1$ para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\psi \in \ell^1(\mathbb{N})$

$$\|\lambda\psi\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |(\lambda\psi)(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda\psi(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda| |\psi(n)|$$

$$= |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n)| = |\lambda| \|\lambda\|_1$$

iii) $\|\psi_1 + \psi_2\|_1 \leq \|\psi_1\|_1 + \|\psi_2\|_1$, para $\psi_1, \psi_2 \in \ell^1(\mathbb{N})$

$$\|\psi_1+\psi_2\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |(\psi_1+\psi_2)(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_1(n)+\psi_2(n)|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} (|\psi_1(n)|+|\psi_2(n)|) = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_1(n)| + \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_2(n)|$$

$$\leq \|\psi_1\|_1 + \|\psi_2\|_1$$

PROPOSICION 2.23:

"$\ell^1(\mathbb{N})$ es un espacio lineal normado completo"

PRUEBA:

Solamente nos falta probar que es completo.

Sea $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $\ell^1(\mathbb{N})$.

Definamos $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$$

Para que ψ sea una función bien definida, debemos probar que la sucesión $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathbb{C}$ es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces

$$|\psi_m(x) - \psi_n(x)| = |(\psi_m - \psi_n)(x)|$$

$$|\psi_m(x) - \psi_n(x)| \leq \|\psi_m - \psi_n\|_1$$

Pero por ser $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$\|\psi_m - \psi_n\|_1 < \varepsilon$, para todo $m,n \geq N$, es decir

$|\psi_m(x) - \psi_n(x)| < \varepsilon$, para todo $m,n \geq N$

y así podemos afirmar que $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{C}$. Hagamos

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$$

Veamos si ψ está en $\ell^1(\mathbb{N})$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lim_{m\to\infty} \psi_m(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} |\psi_n(m)|$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_m(n)| = \lim_{m\to\infty} \|\psi_m\|_1$$

Además $\{\|\psi_m\|_1\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

$$\left| \|\psi_m\|_1 - \|\psi_n\|_1 \right| = \left| \sum_{x=0}^{\infty} |\psi_m(x)| - \sum_{x=0}^{\infty} |\psi_n(x)| \right|$$

$$= \left| \sum_{x=0}^{\infty} (|\psi_m(x)| - |\psi_n(x)|) \right|$$

$$\leq \sum_{x=0}^{\infty} |(\psi_m - \psi n)(x)|$$

$\leq \|\psi_m - \psi_n\|_1 < \varepsilon$, para $m,n \geq N$, puesto que $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

Por lo anterior tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n)| < \infty$.

Por último, probemos que $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$

$$\|\psi_m - \psi\|_1 = \sum_{x=0}^{\infty} |(\psi_m - \psi)(x)|$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} |\psi_m(x) - \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{x=0}^{\infty} |\psi_m(x) - \psi_n(x)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \|\psi_m - \psi_n\|_1$$

Y como $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m,n \geq N$, $\|\psi_m - \psi_n\|_1 < \varepsilon$

es decir que $\|\psi_m - \psi\|_1 < \varepsilon$, para $m > N$

Por lo tanto $\ell^1(\mathbb{N})$ es un espacio completo.

Por consiguiente es un espacio de Banach.

III. EL ESPACIO C(X)

El objetivo primordial de este capítulo es dar a conocer el ejemplo más representativo de un espacio de Banach.

DEFINICION 3.1:

Sea $A \subset X$, X un espacio topológico; llamaremos recubrimiento abierto de A a una colección $(O_i)_{i \in I}$ de abiertos de X, tal que:

$$A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

DEFINICION 3.2:

Diremos que un espacio X es compacto, si de todo recubrimiento por abiertos de X, se puede extraer un sub-recubrimiento finito.

DEFINICION 3.3:

Sea X un espacio de Hausdorff compacto; denotaremos por C(X) al espacio de funciones contínuas con valores complejos sobre X. Es decir, $f \in C(X)$ ssi $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que f es contínua.

DEFINICION 3.4:

Para $f,g \in C(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos:

1.) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

2.) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

3.) $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

PROPOSICION 3.5:

"Con las operaciones (1) y (2) definidas anteriormente, afirmamos que $C(X)$ es un espacio vectorial".

PRUEBA:

Nos limitaremos a probar que:

a) Si $f,g \in C(X)$ entonces $f+g \in C(X)$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in C(X)$ entonces $\lambda f \in C(X)$.

Ya que las demás propieades son de fácil verificación.

a) Vamos a probar que para todo vecindario V de $(f+g)(x_0)$, existe W vecindario de x_0, tal que $(f+g)(W) \subset V$.

Sea $x_0 \in X$.

Además sea V un vecindario de $(f+g)(x_0)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B((f+g)(x_0),\varepsilon) \subset V$.

Como $f \in C(X)$, existe M vecindario de x_0 tal que

$\|f(x) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, para $x \in M$.

De igual manera, como $g \in C(X)$ existe N vecindario de x_0, tal que $\|g(x)-g(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, para $x \in N$

luego $\|f(x)-f(x_0)\| + \|g(x)-g(x_0)\| < \varepsilon$

pero $\|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)\| \leq \|f(x)-f(x_0)\| + \|g(x)-g(x_0)\|$

entonces

$\|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)\| < \varepsilon$, para $x \in M \cap N$

o sea que

$(f+g)_{(x)} \in B((f+g)(x_0), \varepsilon)$

Luego, tomando $W = M \cap N$ se cumple lo deseado.

Por consiguiente $(f+g)(W) \subset V$, es decir $f+g \in C(X)$.

b) Vamos a probar que dado W un vecindario de $\lambda f(x_0)$, existe V vecindario de x_0, tal que $\lambda f(V) \subset W$.

$\lambda \neq 0$, ya que si $\lambda = 0$, entonces $\lambda f = 0$, y λf es contínua.

Sea $x_0 \in X$.

Además tomemos W vecindario de $\lambda f(x_0)$, entonces existe $\varepsilon > 0$, tal que $B(\lambda f(x_0), \varepsilon) \subset W$.

$f \in C(X)$, entonces para $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$ existe V vecindario de x_0 tal que:

$\|f(x) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, para $x \in V$

de donde

$|\lambda| \, \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, para $x \in V$

luego: $\|\lambda f(x) - \lambda f(x_0)\| < \varepsilon$, para $x \in V$

es decir $\lambda f(x) \in B(\lambda f(x_0), \varepsilon)$

entonces $\lambda f(x) \in W$.

Por tanto $(\lambda f)(V) \subset W$.

Luego $\lambda f \in C(X)$.

PROPOSICION 3.6:

"Sea X un espacio de Hausdorff compacto y $f \in C(X)$. Entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$".

PRUEBA:

La haremos en base a la definición 3.2

Sea $(O_i)_{i\in I}$ una familia de abiertos de $\mathbb{C}$ que recubre a $f(X)$, es decir $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$

entonces $X \subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$

y tenemos que $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$, ya que $f^{-1}(O_i) \in X$ para cada $i \in I$.

Por ser f contínua, tenemos que $f^{-1}(O_i)$ es un abierto en X para cada $i \in I$.

Por lo que la familia $(f^{-1}(O_i))_{i\in I}$ constituye un recubrimiento abierto de X; pero como X es compacto, entonces existe un $J \subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(O_i)$.

Luego $f(X) \subset \bigcup_{i\in J} O_i$

Por lo tanto $f(X)$ es compacto.

OBSERVACION 3.7:

Cada función $f \in C(X)$ es acotada.

Su verificación se sigue teniendo en cuenta que $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}$ es un espacio métrico y dado que en un espacio métrico todo conjunto compacto es cerrado y acotado, tenemos que $f(X)$ es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que para toda $f \in C(X)$ se cumple que $|f(x)| \leq M$, $x \in X$

DEFINICION 3.8:

A la menor de las cotas superiores de $|f(x)|$ la llamaremos la norma de f y la denotaremos así:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

PROPOSICION 3.9:

"La norma definida anteriormente convierte a $C(X)$ en un espacio vectorial normado".

PRUEBA:

Verificaremos que $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ cumple con ser una norma.

1) "$\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$"

" $\Longrightarrow$ "

$\|f\|_\infty = \operatorname{Sup} |f(x)| = 0$; $\Longrightarrow |f(x)| = 0$, para todo $x \in X$

$\Longrightarrow f(x) = 0$, para todo $x \in X$; $\Longrightarrow f = 0$.

" $\Longleftarrow$ " Si $f = 0$ es evidente que $\|f\|_\infty = 0$

2) " $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\ \|f\|_\infty$, para $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in C(X)$".

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in X} |(\lambda f)(x)|$$

$$= \sup_{x\in X} |\lambda f(x)|$$

$$= \sup_{x\in X} |\lambda|\,|f(x)|$$

$$= |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)|$$

$$= |\lambda|\ \|f\|_\infty$$

3) " $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, para todo $f,g \in C(X)$"

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X} |(f+g)(x)|$$

$$= \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)|$$

entonces $\|f+g\|_\infty < \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

PROPOSICION 3.10:

"La convergencia con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ es justamente la convergencia uniforme"

PRUEBA:

a) Supongamos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en C(X), es decir $f_n \longrightarrow f$ uniformemente, o sea que para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ se cumple que $|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier $x \in X$, luego

$$\sup_{x \in X} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

es decir $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, para $n \geq N$.

De otra manera: para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $\|f_n-f\|_\infty < \varepsilon$, la cual es por definición convergencia con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$

b) Ahora supongamos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$

pero $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$

Es decir para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$ (convergencia uniforme).

OBSERVACION 3.11:

A la norma $\|\cdot\|_\infty$ se le llama norma de la convergencia uniforme.

PROPOSICION 3.12:

"Si X es un espacio de Hausdorff compacto, entonces C(X) es un espacio normado completo".

PRUEBA:

Vamos a probar que toda sucesión de Cauchy es convergente en $C(X)$.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy, entonces:

$|f_n(x)-f_m(x)| \leq \|f_n-f_m\|_\infty$ para cada $x \in X$.

Es decir que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de números complejos para cada $x \in X$.

En base a lo anterior, podemos definir:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

necesitamos probar que:

i) $f \in C(X)$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f-f_n\|_\infty = 0$

i) Sea $\varepsilon > 0$, escojamos $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que $n,m \geq N$ implique $\|f_n-f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$.

Si $f_N \in C(X)$, para $x_o \in X$ existe U vecindario de x_o, tal que $|f_N(x_o)-f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para $x \in U$. Por consiguiente:

$$|f(x_o)-f(x)| = |(f(x_o)-f_N(x_o))+(f_N(x_o)-f_N(x))+(f_N(x)-f(x))|$$

$$\leq |f(x_o)-f_N(x_o)| + |f_N(x_o)-f_N(x)| + |f_N(x)-f(x)|$$

$$|f(x_o)-f(x)| \leq |\lim_{n\to\infty} f_n(x_o)-f_N(x_o)| + |f_N(x_o)-f_N(x)| + |f_N(x)-\lim_{n\to\infty} f_n(x)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |f_n(x_o)-f_N(x_o)| + |f_N(x_o)-f_N(x)| + \lim_{n\to\infty} |f_N(x)-f_n(x)|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \|f_n-f_N\|_\infty + |f_N(x_o)-f_N(x)| + \lim_{n\to\infty} \|f_N-f_n\|_\infty$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Es decir $|f(x_o)-f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in U$.

Esta última desigualdad nos permite afirmar que f es contínua, es decir $f \in C(X)$.

ii) Para $n \geq N$ y $x \in X$ tenemos:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)|$$

$$= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)|$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$

Por consiguiente C(X) es un espacio normado completo, es decir C(X) es un espacio de Banach.

IV. EL ESPACIO COCIENTE

DEFINICION 4.1:

Sean $\mathfrak{X}$ un espacio de Banach, M un subespacio cerrado de $\mathfrak{X}$. Denotemos por $\frac{\mathfrak{X}}{M}$ al espacio lineal de clases de equivalencia $\{[x] : x \in \mathfrak{X}\}$, donde $[x] = \{x+m,\ m \in M\} = x + M$.

$\frac{\mathfrak{X}}{M}$ es llamado espacio cociente.

Sobre $\frac{\mathfrak{X}}{M}$ definamos la siguiente norma:

$$\|[x]\| = \operatorname*{Inf}_{m \in M} \|x + m\|$$

$$= \operatorname*{Inf}_{h \in [x]} \|h\|$$

PROPOSICION 4.2:

" $\frac{\mathfrak{X}}{M}$ con la norma definida anteriormente, es un espacio normado".

PRUEBA:

Debemos mostrar que la norma definida cumple las propiedades.

i) $\|[x]\| = 0$ si y solo si $[x] = [0]$.

$\Longrightarrow$: Sea $\|[x]\| = 0$, entonces por definición: $\operatorname*{Inf}_{m \in M} \|x+m\| = 0$;

pero, por propiedades del Inf tenemos que para todo $i \in N$, existe $m_i \in M$, $x + m_i \in [x]$ tal que $\|x + m_i\| < \frac{1}{i}$.

Como lo anterior sucede para todo i, entonces existe la sucesión $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en M tal que, para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $\|x + m_i\| < \frac{1}{i}$.

Tenemos que $\lim\limits_{i\in\mathbb{N}} m_i = -x$

En efecto: $\lim\limits_{i\in\mathbb{N}} \|m_i + x\| = 0$, puesto que, para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, $N > \frac{1}{\varepsilon}$ tal que para $n \geq N$ se cumple que $\|m_n + x\| < \varepsilon$.

Luego, como M es cerrado, $-x \in M$ y por ser M subespacio $x \in M$, por consiguiente $[x] = [0]$.

$\Longleftarrow$: Sea $[x] = [0]$, entonces $x \in M$, luego:

$\|[x]\| \leq \|x - x\| = 0,$

además, como $\|[x]\| \geq 0$, se tiene que $\|[x]\| = 0$.

ii) $\|\lambda[x]\| = |\lambda|\,\|[x]\|$

$$\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \operatorname*{Inf}_{t\in M} \|\lambda x + t\|$$

$$= |\lambda| \operatorname*{Inf}_{t_1\in M} \|x + t_1\|$$

$$= |\lambda|\,\|[x]\|$$

iii) $\|[x_1] + [x_2]\| \leq \|[x_1]\| + \|[x_2]\|$

$$\|[x_1] + [x_2]\| = \|[x_1+x_2]\| = \operatorname*{Inf}_{t \in M} \|x_1+x_2+t\|$$

$$= \operatorname*{Inf}_{t_1, t_2 \in M} \|x_1+t_1+x_2+t_2\|$$

$$\leq \operatorname*{Inf}_{t_1 \in M} \|x+t_1\| + \operatorname*{Inf}_{t_2 \in M} \|x_2+t_2\|$$

$$= \|[x_1]\| + \|[x_2]\| .$$

Por lo tanto, $\frac{\mathfrak{X}}{M}$ es un espacio normado.

LEMA 4.3:

" Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} [x_n] = [x]$".

PRUEBA:

Vamos a probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $\|[x_n] - [x]\| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición tenemos:

$$\|[x_n] - [x]\| = \|[x_n - x]\| = \operatorname*{Inf}_{m \in M} \|x_n - x + m\|$$

$$\leq \|x_n - x\|.$$

Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_o$ se tiene que $\|x_n - x\| < \varepsilon$

luego, tomando $N = n_o$ se cumple que $\| [x_n] - [x] \| < \varepsilon$, para $n \geq N$.

Por consiguiente, $\lim\limits_{n \to \infty} [x_n] = [x]$.

PROPOSICION 4.4:

"El espacio cociente $\frac{\mathfrak{X}}{M}$ es un espacio normado completo".

PRUEBA:

Por la proposición 4.2 solamente nos falta probar que es completo. Para ello:

Sea $\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\frac{\mathfrak{X}}{M}$, entonces, escojamos:

$n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $i \geq n_o$ se cumpla que $\| [x_i] - [x_{n_o}] \| < 1$.

$n_1 > n_o$, tal que para $i \geq n_1$ se cumpla que $\| [x_i] - [x_{n_1}] \| < \frac{1}{2}$.

$n_2 > n_1$, tal que para $i \geq n_2$ se cumpla que $\| [x_i] - [x_{n_2}] \| < \frac{1}{2^2}$

$\vdots$

$n_k > n_{k-1}$, tal que para $i \geq n_k$ se cumpla que $\| [x_i] - [x_{n_k}] \| < \frac{1}{2^k}$

Entonces tenemos:

$\| [x_{n_1}] - [x_{n_o}] \| < 1$, para $n_1 > n_o$

$\| [x_{n_2}] - [x_{n_1}] \| < \frac{1}{2}$, para $n_2 > n_1$

$\vdots$

$\| [x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}] \| < \frac{1}{2^k}$, para $n_{k+1} > n_k$

Por lo tanto, $\{[x_{n_k}]\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión tal que

$\| [x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}] \| < \frac{1}{2^k}$, luego, podemos escoger $t_k \in \left[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right]$

de tal manera que $\|t_k\| < \frac{1}{2^k}$.

Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \|t_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} = \lim_{N\to\infty} S_N$.

Pero, $S_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots . + \frac{1}{2^N}$

$$\frac{1}{2} S_N = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{N+1}}$$

y, $S_N - \frac{1}{2} S_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{N+1}}$

$$\frac{1}{2} S_N = \frac{2^N - 1}{2^{N+1}}$$

$$S_N = 1 - \frac{1}{2^N}$$

luego, $\lim_{n\to\infty} S_N = 1$

Por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} \|t_k\| < 1$, y por consiguiente la sucesión $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ es absolutamente convergente, y en base a la proposición 2.13, existe $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = t$, $t \in \mathfrak{X}$.

Dado que:

$$\left[x_{n_k} - x_{n_1}\right] = \sum_{i=1}^{k-1} \left[x_{n_{i+1}} - x_{n_i}\right] = \sum_{i=1}^{k-1} \left[t_i\right]$$

y como $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} t_i = t$, por el lema 4.3 se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} [t_i] = [t] \ ;$$

tenemos que $\lim_{k\to\infty} \left[x_{n_k} - x_{n_1} \right] = \left[t \right]$

luego $\lim_{k\to\infty} \left[x_{n_k} \right] = \left[t + x_{n_1} \right] \in \frac{\mathfrak{X}}{M}$

De este último resultado, tenemos que la subsucesión $\{[x_{n_k}]\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un elemento de $\frac{\mathfrak{X}}{M}$, por consiguiente la sucesión de Cauchy $\{[x_n]\}_{n\in N}$ converge al mismo valor, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \left[x_n \right] = \left[x_{n_1} + t \right]$$

$\therefore \ \frac{\mathfrak{X}}{M}$ es un espacio normado completo.

PROPOSICION 4.5:

"La función $\Pi : \mathfrak{X} \longrightarrow \frac{\mathfrak{X}}{M}$ tal que $\Pi(x) = [x]$, es abierta".

PRUEBA:

Debemos probar que para cualquier abierto A en $\mathfrak{X}$, se cumple que $\Pi(A)$ es un abierto en $\frac{\mathfrak{X}}{M}$.

Sea A un abierto cualquiera de $\mathfrak{X}$.

Si $A = \phi$, entonces $\Pi(A) = \phi$, el cual es un abierto en $\frac{\mathfrak{X}}{M}$

Si $A \neq \phi$, sea $x \in A$, entonces para cierto $\varepsilon > 0$, se tiene que

$x \in B_{(x,\varepsilon)} \subset A$ y $\Pi_{(x)} \in \Pi(B_{(x,\varepsilon)}) \subset \Pi(A)$.

Además $A = \bigcup_{x \in A} B_{(x,\varepsilon)}$.

"$B([x],\varepsilon) \subset \Pi(B_{(x,\varepsilon)})$"

Sea $[k] \in B([x],\varepsilon) = \{[m] \in \frac{\mathfrak{X}}{M} : \|[x]-[m]\| < \varepsilon\}$, entonces existe $k_0 \in [k]$ de tal manera que $\|x - k_0\| < \varepsilon$, es decir $k_0 \in B(x,\varepsilon)$.

$\Longrightarrow \Pi(k_0) \in \Pi(B(x,\varepsilon))$; pero $\Pi(k_0) = [k]$

$\Longrightarrow [k] \in \Pi(B(x,\varepsilon))$.

Ahora, sea $[h] \in \Pi(B_{(x,\varepsilon)}) \Longrightarrow [h] = \Pi(y)$, $y \in B_{(x,\varepsilon)}$.

Como $y \in B_{(x,\varepsilon)}$, existe $r > 0$, $r < \varepsilon$ tal que $B(y,r) \subset B(x,\varepsilon)$.

"$B([h],r) \subset B([x],\varepsilon)$".

Sea $[t] \in B([h],r) \Longrightarrow \|[t] - [h]\| < r$

$$\|[t] - [y]\| < r$$

$$\|[t - y]\| < r$$

luego, por definición de la norma en $\frac{\mathfrak{X}}{M}$, tenemos que existe $m \in M$ tal que $\|(t-y)+m\| < r$, o lo que es lo mismo $\|(t+m) - y\| < r$

$\Longrightarrow t+m \in B(y,r)$

$\Longrightarrow t+m \in B(x,\varepsilon)$

$\Longrightarrow \|(t+m)-x\| < \varepsilon$

o $\|(t-x)+m\| < \varepsilon$

$\Longrightarrow \|[t-x]\| < \varepsilon$

$\Longrightarrow \|[t] - [x]\| < \varepsilon$, $\Longrightarrow [t] \in B_{([x],\varepsilon)}$.

$\Longrightarrow B([h], r) \subset B([x], \varepsilon)$

$\Longrightarrow B([h], r) \subset \Pi(B_{(x,\varepsilon)})$

$\Longrightarrow \Pi(B_{(x,\varepsilon)})$ es abierto en $\frac{\mathfrak{X}}{M}$

Por consiguiente $\Pi(A)$ es un abierto en $\frac{\mathfrak{X}}{M}$, ya que:

$$\Pi(A) = \Pi(\bigcup_{x\in A} B(x,\varepsilon))$$

$$= \bigcup_{x\in A} \Pi(B(x,\varepsilon)) \text{ .}$$

V. EL ESPACIO L($\mathfrak{X}$, Y)

En este capítulo, consideraremos que $\mathfrak{X}$, Y son espacios de Banach.

PROPOSICION 5.1:

"Una transformación lineal T de $\mathfrak{X}$ a Y es contínua en $\mathfrak{X}$ si y solo si es contínua en algún punto de $\mathfrak{X}$".

PRUEBA:

" $\Longrightarrow$ " Esta parte es obvia.

" $\Longleftarrow$ " Supongamos que T es contínua en algún punto de $\mathfrak{X}$, por ejemplo x_0. Sean $\varepsilon > 0$, $y \in \mathfrak{X}$, entonces, como

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x) - T(y) + T(x_0) - T(x_0)\|$$

$$= \|T(x-y+x_0) - T(x_0)\|$$

y como

$$\|T(x-y+x_0) - T(x_0)| < \varepsilon$$

siempre que

$$\|x - y\| = \|(x - y + x_0) - x_0\| < \delta$$

podemos implicar que T es contínua en Y.

DEFINICION 5.2:

Se dice que una transformación lineal T de $\mathfrak{X}$ a Y es acotada, si

$$\| T \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} < \infty$$

PROPOSICION 5.3:

"Una transformación lineal T de $\mathfrak{X}$ a Y es acotada si y solo si es contínua".

PRUEBA:

" $\Longrightarrow$ " : Supongamos que T es acotada. Entonces por la definición 5.2, existe $K > 0$ tal que $\| T(x) \| \leq K \| x \|$, para todo $x \in \mathfrak{X}$.

Para la continuidad, en base a la proposición 5.1 bastará que probemos que T es contínua en cero.

Sea $\varepsilon > 0$, si hacemos $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ se tiene que $\| T(x) \| < \varepsilon$, siempre que $\| x \| < \delta$, es decir. T es contínua en cero y por consiguiente en $\mathfrak{X}$.

" $\Longleftarrow$ " : Supongamos que T es contínua en $\mathfrak{X}$. Entonces es contínua en cero, es decir, en particular para $\varepsilon = 1$, existe un $\delta > 0$, tal que $\| T(x) \| < 1$ siempre que $\| x \| < \delta$.

Consideremos ahora las funciones:

$$N_1 : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow \frac{\| x \|}{\delta}$$

y

$$N_2 : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow \| T(x) \|$$

N_1 y N_2 son norma y semi-norma respectivamente. Recuérdese que si en la definición 2.2 sustituimos la condición 1) por: 1') $x = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0$, y dejamos las condiciones 2) y 3) inalterables, tendremos la definición de semi-norma.

Entonces como $\frac{\|x\|}{\delta} < 1$ implica que $\|T(x)\| \leq 1$ utilizando el lema 2.5 tendremos que

$\|T(x)\| \leq \frac{\|x\|}{\delta}$, para $x \in \mathfrak{X}$.

Si hacemos $K = \frac{1}{\delta}$ tendremos

$$\|T(x)\| \leq K\|x\|.$$

DEFINICION 5.4:

Denotaremos con $L(\mathfrak{X},Y)$ al conjunto de las transformaciones lineales acotadas de $\mathfrak{X}$ a Y, de modo que para T,S en $L(\mathfrak{X},Y)$ la suma, $T+S$ y el producto por escalar λT en $L(\mathfrak{X},Y)$ estén definidas por

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x)$$

$$(\lambda T)(x) = \lambda(T(x) \quad \text{para } x \text{ en } \mathfrak{X}.$$

PROPOSICION 5.5:

"El espacio $L(\mathfrak{X},Y)$ es un espacio de Banach".

PRUEBA:

La linealidad es evidente.

Probemos que $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$

define una norma.

i) $\|T\| = 0 \implies \displaystyle\sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0$

$\implies \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0$ para $x \neq 0$

$\implies \|T(x)\| = 0$ para todo x, $x \in \mathfrak{X} \implies T(x) = 0$ para todo x, $x \in \mathfrak{X}$.

$\implies T = 0.$

Ahora, si:

$$T = 0 \implies T(x) = 0,\ x \text{ en } \mathfrak{X}$$

$$\implies \|T(x)\| = 0,\ \ x \text{ en } \mathfrak{X}$$

$$\implies \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0, \quad \text{con } x \neq 0$$

$$\implies \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0$$

ii) $$\|\lambda T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(\lambda T)(x)\|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda(T)(x)\|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda|\,\|T(x)\|}{\|x\|}$$

$$= |\lambda| \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

$$= |\lambda|\,\|T\|\,.$$

iii) $$\|T_1 + T_2\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(T_1 + T_2)(x)\|}{\|x\|}$$

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T_1(x) + T_2(x)\|}{\|x\|}$$

$$\|T_1 + T_2\| \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|}$$

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$$

Establezcamos la completitud de $L(\mathfrak{X},Y)$.

Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $L(\mathfrak{X},Y)$, es decir que para $\varepsilon > 0$, existe el entero $n_0 > 0$ tal que $m,n \geq n_0$ implica $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$

Aplicando aquí la norma en $L(\mathfrak{X},Y)$ dada por la definición 5.2 se tiene que si $m,n \geq n_0$

$\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \; \|x\| < \varepsilon \, \|x\|$ para todo x en $\mathfrak{X}$.

O sea que para un x fijo en $\mathfrak{X}$ la sucesión $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de Y es de Cauchy.

Como Y es completo, dicha sucesión es convergente en Y, es decir, existe T(x) en Y tal que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x) \text{ para cada } x \text{ en } \mathfrak{X}.$$

Definamos a continuación la función T por

$$T : \mathfrak{X} \longrightarrow Y$$
$$x \leadsto T(x)$$

Como la suma es contínua en $\mathfrak{X}$, entonces para x,y en $\mathfrak{X}$, tenemos

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (T_n(x) + T_n(y))$$

$$= \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y)$$

$$= T(x) + T(y)$$

y para λ en $\mathbb{C}$ y x en $\mathfrak{X}$, por la misma razón que para la suma,

$$T(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lambda T_n(x)$$

$$= \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

$$= \lambda T(x).$$

Por otra parte, como $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces para $\varepsilon = 1$ existe un entero $N > 0$ tal que $m,n \geq N$ implica que $\|T_n - T_m\| < 1$.

Por consiguiente, para x en $\mathfrak{X}$ se tiene

$$\|T(x)\| = \|T(x) - T_N(x) + T_N(x)\|$$

$$\|T(x)\| \leq \|T((x) - T_N(x)\| + \|T_N(x)\|$$

$$\|T(x)\| \leq \|\lim_{n\to\infty} T_n(x) - \lim_{n\to\infty} T_N(x)\| + \|T_N(x)\|$$

$$\|T(x)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_n(x) - T_N(x)\| + \|T_N(x)\|$$

$$\|T(x)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_n - T_N\| \|x\| + \|T_N\| \|x\|$$

$$\|T(x)\| \leq \|x\| + \|T_N\| \|x\|$$

$$\|T(x)\| \leq (1 + \|T_N\|) \|x\| \quad \text{para cada x en } \mathfrak{X},$$

es decir

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq (1 + \|T_N\|) \quad \text{para } x \neq 0$$

y así

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty$$

lo que implica la pertenencia de T a $L(\mathfrak{X},Y)$.

Como $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, se tiene que para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n \geq n_0$ implica

$$\|T_m - T_n\| < \varepsilon$$

o sea

$$\frac{\|(T_m - T_n)(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon \text{ , para } x \neq 0.$$

Además

$$\begin{aligned} \|(T-T_n)(x)\| &= \|(T-T_m+T_m-T_n)(x)\| \\ &= \|(T-T_m)(x) + (T_m-T_n)(x)\| \\ &\leq \|(T-T_m)(x)\| + \|(T_m-T_n)(x)\| . \end{aligned}$$

Entonces, para x en $\mathfrak{X}$ y $m,n \geq n_0$, se tiene que

$$\|(T-T_n)(x)\| < \|(T-T_m)(x)\| + \varepsilon\|x\|$$

y como $\lim_{m\to\infty} T_m(x) = T(x)$

concluímos que $\dfrac{\|(T-T_n)(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon$, con $x \neq 0$

y de aquí

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|(T-T_n)(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon$$

y así $\|T - T_n\| < \varepsilon$

que es equivalente a $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

Es decir, la sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en $L(\mathfrak{X},Y)$.

DEFINICION 5.6:

La Bola Unitaria de un espacio de Banach $\mathfrak{X}$ es el conjunto $\{x \in \mathfrak{X} : \|x\| \leq 1\}$, la cual la denotaremos por $(\mathfrak{X})_1$.

DEFINICION 5.7:

La Bola de Centro 0 y radio $r > 0$ de un espacio de Banach $\mathfrak{X}$ es el conjunto $\{x \in \mathfrak{X} : \|x\| \leq r\}$, la cual la denotaremos por $(\mathfrak{X})_r$.

LEMA 5.8:

"Sea $T \in L(\mathfrak{X},Y)$ entonces:

$$(Y)_1 \subset \overline{T[(\mathfrak{X})_r]} \implies (Y)_{\frac{1}{n}} \subset \overline{T[(\mathfrak{X})_{\frac{r}{n}}]} \text{ "}$$

PRUEBA: Sean $x \in (Y)_{\frac{1}{n}}$ y $\varepsilon > 0$.

Vamos a probar que $B_{(x,\varepsilon)} \cap T\left[(\mathfrak{X})_{\frac{r}{n}}\right] \neq \phi$

$\|x\| \leq \frac{1}{n}$, entonces $\|nx\| \leq 1$

$\Longrightarrow$ $nx \in (Y)_1$ y por hipótesis tenemos que $nx \in \overline{T[(\mathfrak{X})_r]}$

$\Longrightarrow$ $B(nx,n\varepsilon) \cap T[(\mathfrak{X})_r] \neq \phi$

$\Longrightarrow$ existe $y \in T[(\mathfrak{X})_r]$ tal que $\|nx-y\| < n\varepsilon$, con $y = T(x_1)$, $x_1 \in (\mathfrak{X})_r$

$\Longrightarrow$ $\|nx - T_{(x_1)}\| < n\varepsilon$

$\Longrightarrow$ $\|nx - nT(\frac{x_1}{n})\| < n\varepsilon$

$\Longrightarrow$ $\|x - T(\frac{x_1}{n})\| < \varepsilon$

Además, si

$\|x_1\| \leq r$, entonces $\left\|\frac{x_1}{n}\right\| \leq \frac{r}{n}$

$\Longrightarrow$ $\frac{x_1}{n} \in (\mathfrak{X})_{\frac{r}{n}}$

Por lo tanto, $x \in \overline{T[(\mathfrak{X})_{\frac{r}{n}}]}$.

DEFINICION 5.9:

Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Diremos que A es nunca denso en X si y solo si el interior de la cerradura de A es vacío:

$$\text{int}\ (\overline{A}) = \phi$$

DEFINICION 5.10:

Un espacio topológico X es de primera categoría si es la unión numerable de conjuntos nunca densos de X. De no ser así, se dice que X es de segunda categoría.

A continuación enunciaremos un teorema muy importante que ocuparemos más adelante.

TEOREMA 5.11: (Baire)

"Todo espacio métrico completo X es de segunda categoría".

PRUEBA:

(La omitimos por no estar en los objetivos que este trabajo persigue, solamente necesitamos el resultado).

TEOREMA 5.12:

"Si $T \in L(\mathfrak{X},Y)$ es uno a uno y sobre,, entonces T^{-1} existe y es contínua".

PRUEBA:

De la hipótesis concluimos que T^{-1} existe y está bien definida.

a) Sean $x',y' \in Y$, entonces existen $x,y \in \mathfrak{X}$ tales que

$$T^{-1}(x') = x \qquad y \qquad T^{-1}(y') = y$$

entonces

$$T^{-1}_{(x'+y')} = T^{-1}_{(T(x)+T(y)} = T^{-1}_{(T(x+y))}$$

$$= (T^{-1}\circ T)_{(x+y)} = x + y$$

$$= T^{-1}_{(x')} + T^{-1}_{(y')}$$

b) $T^{-1}_{(\lambda x')} = T^{-1}(\lambda T(x)) = T^{-1}_{(T(\lambda x))} = (T^{-1}\circ T)_{(\lambda x)}$

$$= \lambda x = \lambda T^{-1}_{(x')} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Por consiguiente T^{-1} es lineal.

Queremos probar que T^{-1} es contínua; para ello es equivalente a mostrar que T^{-1} es acotada, es decir que $T^{-1}[(Y)_1] \subset (\mathfrak{X})r$, para algún $r > 0$, que es equivalente a demostrar que

$(Y)_1 \subset T\,[(\mathfrak{X})_N]$ para algún entero N.

Como T es sobre, se tiene $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T[(\mathfrak{X})_n] = Y$.

Además, Y es un espacio métrico completo, entonces por el Teorema de Baire, afirmamos que Y no es una unión numerable de conjuntos nunca densos, es decir, existe algún entero N de tal manera que

$\text{int}\ \overline{(T[(\mathfrak{X})_N])} \neq \phi$.

$\Longrightarrow$ existe un abierto $A \neq \phi$ tal que $A \subset \overline{T[(\mathfrak{X})_N]}$

luego se tiene que $A \cap T[(\mathfrak{X})_N] \neq \phi$

entonces existe $y \in A \cap T[(\mathfrak{X})_N]$. Dado que $y \in A$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{(y,\varepsilon)} \subset A \subset \overline{T[(\mathfrak{X})_N]}$

pero $B_{(y,\varepsilon)} = y + (Y)_\varepsilon$

$$= \{x \in Y : \|x-y\| < \varepsilon\}$$

Además $y \in T[(\mathfrak{X})_N]$, entonces $y = T(h)$. para algún $h \in (\mathfrak{X})_N$.

Por tanto

$T(h) + (Y)_\varepsilon = \{s \in Y : \|s - T(h)\| < \varepsilon\} \subset \overline{T[(\mathfrak{X})_N]}$

entonces $(Y)_\varepsilon \subset - T(h) + \overline{T[(\mathfrak{X})_N]}$, y

$-T(h) + \overline{T[(\mathfrak{X})_N]} \subset \overline{T[(\mathfrak{X})_{2N}]}$

En efecto: si $t \in - T(h) + \overline{T[(\mathfrak{X})_N]}$ entonces

$t = -T(h) + z$, $z \in \overline{T[(\mathfrak{X})_N]}$, por consiguiente

$B(z,\varepsilon) \cap T[(\mathfrak{X})_N] \neq \phi$ y esto implica que existe $T(y)$, $y \in (\mathfrak{X})_N$

tal que $\|T(y) - z\| < \varepsilon$.

$\|T(y) - z\| = \|T(y) - T(h) + T(h) - z\| < \varepsilon$

es decir $\|T(y-h) - (z-T(h))\| < \varepsilon$

y esto implica que $B(t,\varepsilon) \cap T[(\mathfrak{X})_{2N}] \neq \phi$

ya que $\|y-h\| \leq \|y\| + \|h\| \leq N + N = 2N$, entonces

$y-h \in (\mathfrak{X})_{2N}$.

En consecuencia: $(Y)_\varepsilon \subset \overline{T[(\mathfrak{X})_{2N}]}$

y por consiguiente

$$(Y)_1 \subset \overline{T[(\mathfrak{X})_r]}\ , \quad \text{con } r = \frac{2N}{\varepsilon}$$

Sea $y \in (Y)_1 \subset \overline{T[(\mathfrak{X})_r]}$, entonces existe $x_1 \in (\mathfrak{X})_r$

tal que $\|y - T_{(x_1)}\| < \frac{1}{2}$;

Como $y - T_{(x_1)} \in (Y)_{\frac{1}{2}} \subset \overline{T[(\mathfrak{X})_{\frac{r}{2}}]}$ entonces existe $x_2 \in (\mathfrak{X})_{\frac{r}{2}}$

tal que $\|y - T_{(x_1)} - T_{(x_2)}\| < \frac{1}{4}$;

y como $y - T_{(x_1)} - T_{(x_2)} \in (Y)_{\frac{1}{4}} \subset \overline{T[(\mathfrak{X})_{\frac{r}{4}}]}$ entonces existe

$x_3 \in (\mathfrak{X})_{\frac{r}{4}}$ tal que $\|y - T_{(x_1)} - T_{(x_2)} - T_{(x_3)}\| < \frac{1}{8}$.

Continuando con un proceso inductivo, obtenemos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de tal manera que

$$\|x_n\| < \frac{r}{2^{n-1}}$$

$$y \quad \|y - \sum_{i=1}^{n} T_{(x_i)}\| < \frac{1}{2^n}$$

Ya que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{2^{n-1}} = r(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots.)$

$$< 2r, \qquad \text{puesto que } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots. = 2$$

Se tiene que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge a un elemento $x \in (\mathfrak{X})_{2r}$.

Más aún, $T(x) = T(\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} x_n) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} T(x_n) = y$

entonces $y \in T[(\mathfrak{X})_{2r}]$.

Por consiguiente $(Y)_1 \subset T[(\mathfrak{X})_{2r}]$

es decir T^{-1} es acotada.

COROLARIO 5.13: (Teorema de la función abierta).

"Si $\mathfrak{X}$, Y son espacios de Banach y T es un elemento de $L(\mathfrak{X},Y)$, T suryectivo, entonces T es una función abierta".

PRUEBA:

Como T es acotada, tenemos que T es contínua; entonces el conjunto:

$$M = \{x \in \mathfrak{X}: T(x) = 0\}$$

es un subespacio cerrado de $\mathfrak{X}$. En efecto:

a) Sean $x_1, x_2, \lambda x_2 \in M$, entonces

$$T(x_1 + \lambda x_2) = T(x_1) + \lambda T(x_2)$$

$$= 0 + \lambda . 0$$

y así se tiene que $x_1 + \lambda x_2 \in M$.

b) Sea $x \in \overline{M}$, entonces por la proposición 1.16 existe una red

$S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en $\mathfrak{X}$ tal que

$x = \lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ y $\operatorname{Im} S \subset M$

es decir $x_\alpha \in M$ para todo $\alpha \in A$.

Como T es contínua $T(x) = \lim_{\alpha \in A} T(x_\alpha) = 0$

entonces $x \in M$ y por consiguiente $\overline{M} \subset M$

Luego de a) y b) concluimos que M es un subespacio cerrado de $\mathfrak{X}$.

Deseamos definir una transformación S del espacio cociente $\frac{\mathfrak{X}}{M}$, hacia Y como sigue:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[dr, "T"'] & \frac{\mathfrak{X}}{M} \arrow[d, dashed, "S"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Para $[x] \in \frac{\mathfrak{X}}{M}$, hagamos $S([x]) = T(y)$, para $y \in [x]$.

"S está bien definida".

$[x] = [y] \Longrightarrow (y-x) \in M \Longrightarrow T(y-x) = 0 \Longrightarrow T(y) - T(x) = 0$

$\Longrightarrow T(x) = T(y) \Longrightarrow S([x]) = S([y])$.

"S es lineal"

Como T es lineal, S es lineal.

"S es acotada"

$$\|S([x])\| = \inf_{y \in [x]} \|T(y)\| \leq \|T\| \inf_{y \in [x]} \|y\| = \|T\| \, \|[x]\|$$

"S es inyectiva"

Sea $S([x]) = S([y]) \Longrightarrow S([x]) - S([y]) = 0$

$\Longrightarrow S([x]-[y]) = 0 \Longrightarrow S([x-y]) = 0$

$\Longrightarrow T(x-y) = 0 \Longrightarrow x-y \in M \Longrightarrow [x-y] = [0]$

por lo tanto $[x] = [y]$.

"S es sobre" .

Lo es, porque T es sobre.

Luego por el Teorema 5.12, S^{-1} existe y es acotada y por lo tanto, contínua.

De donde

$S: \frac{\mathfrak{X}}{M} \longrightarrow Y$ es un Homeomorfismo y por lo tanto es una función abierta.

Además, por la proposición 4.5 tenemos que

$\Pi : \mathfrak{X} \longrightarrow \frac{\mathfrak{X}}{M}$ es una función abierta; por consiguiente T

es una función abierta como composición de funciones abiertas, pues $T = S\Pi$.

VI. EL ESPACIO DUAL

DEFINICION 6.1:

Sea X un espacio vectorial y K su campo escalar. Se llama funcional lineal a toda función lineal de X sobre K.

DEFINICION 6.2:

Sea $\mathfrak{X}$ un espacio de Banach. Una función $\psi : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal acotada si:

1.) $\psi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \psi(x_1) + \lambda_2 \psi(x_2)$, para $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

2.) Existe $M > 0$ tal que:

$$|\psi(x)| \leq M\|x\|, \text{ para todo } x \in \mathfrak{X}.$$

PROPOSICION 6.3:

"Sea ψ una funcional lineal sobre un espacio de Banach $\mathfrak{X}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1.) ψ es acotada

(2.) ψ es contínua

(3.) ψ es contínua en cero"

PRUEBA:

(1) $\Longrightarrow$ (2): Si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una red en $\mathfrak{X}$ convergiendo a x, entonces

$$\lim_{\alpha\in A} \|x_\alpha - x\| = 0$$

De aquí tenemos:

$$\lim_{\alpha\in A} |\psi(x_\alpha) - \psi(x)| = \lim_{\alpha\in A} |\psi(x_\alpha - x)|$$

$$\leq \lim_{\alpha\in A} M\|x_\alpha - x\| = 0$$

lo que implica que la red $\{\psi_{(x_\alpha)}\}_{\alpha\in A}$ converge a $\psi(x)$, es decir, ψ es contínua.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Si ψ es contínua, es contínua en todo punto de $\mathfrak{X}$ y, en particular, será contínua en cero.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Si ψ es contínua en cero, entonces para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| < \delta \Longrightarrow |\psi(x)| < 1$.

De aquí que, para cualquier $y \neq 0$ en $\mathfrak{X}$, tenemos:

$$|\psi(y)| = \frac{2\|y\|}{\delta} \left|\psi\left(\frac{\delta}{2\|y\|}\, y\right)\right| < \frac{2}{\delta}\, \|y\|$$

y por consiguiente ψ es acotada.

DEFINICION 6.4:

Sea $\mathfrak{X}^*$ el conjunto de funcionales lineales acotadas sobre el espacio de Banach $\mathfrak{X}$.

OBSERVACION 6.5:

Dado que $\mathfrak{X}^*$ es un caso particular de $L(\mathfrak{X},Y)$ tomando $Y = \mathbb{C}$, puesto que $\mathbb{C}$ es un espacio de Banach, se tiene que $\mathfrak{X}^*$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|\psi\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|\psi(x)|}{\|x\|} \quad , \text{ para todo } \psi \in \mathcal{X}^*..$$

En el capítulo II, demostramos que $\ell^1(\mathbb{N})$, $C_0(\mathbb{N})$ y $\ell^\infty(\mathbb{N})$ con sus respectivas normas son espacios de Banach. A continuación, trataremos de identificar los espacios duales de $C_0(\mathbb{N})$ y $\ell^1(\mathbb{N})$. Antes de ello, probaremos un lema que nos será útil al identificar el espacio $C_0(\mathbb{N})^*$.

LEMA 6.5:

"a) Sea $e_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $e_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{si } m \neq n \end{cases}$

entonces $e_n \in C_0(\mathbb{N})$.

b) Si $g \in C_0(\mathbb{N})$, entonces $g = \lim_{N\to\infty} g_N$, con $g_N = \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n$".

PRUEBA:

a) Debemos probar i) $e_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

ii) $\lim_{m\to\infty} e_n(m) = 0$

i) e_n es acotada, puesto que existe $K=1$, tal que $|e_n(m)| \leq K$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

ii) Dado $\varepsilon > 0$, hay que encontrar $t \in \mathbb{N}$, tal que para todo $p \geq t$ se cumpla que $|e_n(p)| < \varepsilon$

$$\text{pero} \qquad |e_n(p)| = \begin{cases} 0, & \text{si } p = 0 \\ 0, & \text{si } p = 1 \\ \vdots & \\ 1, & \text{si } p = n \\ 0, & \text{si } p = n+1 \end{cases}$$

luego tomando $t = n+1$, se cumple que $|e_n(p)| = 0$, cuando $p \geq t$ entonces $|e_n(p)| < \varepsilon$ para $p > t$.

b) Probaremos que

$$\lim_{N\to\infty} \|g - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\|_\infty = 0$$

Dado $\varepsilon > 0$, nuestro objetivo es encontrar $M \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq M$ implique

$$\|g - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\|_\infty < \varepsilon$$

$$\text{Pero} \quad \|g - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} |(g - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n)_{(m)}|$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{N}} |g(m) - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n(m)|$$

$$\text{y} \quad |g(m) - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n(m)| = \begin{cases} 0, & \text{si } m \leq N \\ |g(m)|, & \text{si } m > N \end{cases}$$

Como $g \in C_0(\mathbb{N})$, se tiene que $\lim\limits_{m\to\infty} g(m) = 0$, es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $T \in \mathbb{N}$ tal que para $t \geq T$ se tiene que $|g(t)| < \varepsilon$.

Luego, tomando $M = T$ se cumple $|g(m)| < \varepsilon$, para $m \geq M$.

Por consiguiente:

$$\sup_{m\in N} \left|g(m) - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n(m)\right| = \sup_{\substack{m>N\\ N\geq M}} |g(m)|$$

es decir

$$\left\|g - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\right\|_\infty < \varepsilon, \text{ para } n \geq M = T$$

6.6 EL DUAL DE $C_0(\mathbb{N})$

Queremos identificar el dual de $C_0(\mathbb{N})$, para ello, vamos a encontrar una isometría entre $\ell^1(\mathbb{N})$ y $C_0(\mathbb{N})^*$.

Sea $\alpha : \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow C_0(\mathbb{N})^*$, tal que $\psi \rightsquigarrow \alpha(\psi)$, donde

$\alpha(\psi): C_0(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$\alpha(\psi)_{(f)} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(n)f(n)$$

Debemos probar:

I) α es lineal

II) α es biyectiva

III) α preserva las normas.

Antes verifiquemos que α está bien definida, es decir $\alpha(\psi) \in C_0(\mathbb{N})^*$.

i) $$|\alpha(\psi)_{(f)}| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \psi(n)f(n)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n)||f(n)|$$

pero $|f(n)| \leq \sup_{n\in N} |f(n)| = \|f\|_\infty$, entonces

$$|\alpha(\psi)_{(f)}| \leq \|f\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n)| = \|f\|_\infty \|\psi\|_1$$

luego, $\alpha(\psi)$ es contínua, es decir, es acotada.

ii) $\alpha(\psi)$ es lineal:

Sean $f,g \in C_0(\mathbb{N})$ y $\lambda_1 \in \mathbb{C}$:

$$\alpha(\psi)(\lambda_1 f+g) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{(n)}(\lambda_1 f+g)_{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{(n)}(\lambda_1 f_{(n)}+g_{(n)})$$

$$= \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{(n)} f_{(n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{(n)} g_{(n)} = \lambda_1 \alpha(\psi)_{(f)} + \alpha(\psi)_{(g)}.$$

PRUEBA:

I) α es lineal:

Debemos probar que para $\psi_1, \psi_2 \in \ell^1(\mathbb{N})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple:

$$\alpha(\psi_1 + \lambda\psi_2) = \alpha(\psi_1) + \lambda\alpha(\psi_2)$$

Sea $f \in C_0(\mathbb{N})$:

$$\alpha(\psi_1 + \lambda\psi_2)_{(f)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_1 + \lambda\psi_2)_{(n)} f_{(n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_1(n) + \lambda\psi_2(n)) f(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_1(n) f(n) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \psi_2(n) f(n)$$

$$= \alpha(\psi_1)_{(f)} + \lambda(\alpha(\psi_2)_{(f)})$$

$$= (\alpha(\psi_1) + \lambda\alpha(\psi_2))_{(f)}.$$

Por lo tanto α es lineal.

II) α es biyectiva

Para ello, definimos la función $\beta : C_0(\mathbb{N})^* \longrightarrow \ell^1(\mathbb{N})$

$$L \rightsquigarrow \beta(L)$$

donde $\beta(L) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\beta(L)(n) = L(e_n)$

y probamos que $\beta = \alpha^{-1}$, es decir que: $\alpha \circ \beta = I_{C_0(\mathbb{N})^*}$

$$\beta \circ \alpha = I_{\ell^1(\mathbb{N})}.$$

Antes de seguir desarrollando la prueba, debemos mostrar que la función β está bien definida. Para tal fin consideremos:

a) Para cada $N \in \mathbb{N}$ y para cada L, el elemento:

$$f_N = \sum_{n=0}^{N} \delta_n e_n, \text{ donde } \delta_n = \begin{cases} \dfrac{\overline{L(e_n)}}{|L(e_n)|}, & \text{si } L(e_n) \neq 0 \\ 0, & \text{si } L(e_n) = 0 \end{cases}$$

b) $f_N \in C_0(\mathbb{N})$, ya que es una combinación lineal de elementos $e_n \in C_0(\mathbb{N})$.

c) $\|f_N\|_\infty \leq 1$, en efecto:

$$\|f_N\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} |f_N(m)| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{L(e_n)}}{|L(e_n)|} e_n(m) \right|$$

pero $\left| \sum_{n=0}^{N} \dfrac{\overline{L(e_n)}}{|L(e_n)|} e_n(m) \right| \leq 1$; por lo tanto $\sup_{m\in\mathbb{N}} |f_N(m)| \leq 1$

d) $\|L\| = \sup_{f\neq 0} \frac{|L(f)|}{\|f\|}$, donde $f \in C_0(\mathbb{N})$, luego se cumple que:

$$\|L\| \geq \frac{|L(f)|}{\|f\|} \quad , \text{ para todo } f \in C_0(\mathbb{N}), \quad f \neq 0$$

de donde $\|L\| \geq \frac{|L(f_N)|}{\|f_N\|} \geq |L(f_N)|$, pero

$$|L(f_N)| = \left| \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{L(e_n)}}{|L(e_n)|} L(e_n) \right| = \left| \sum_{n=0}^{N} \frac{|L(e_n)|^2}{|L(e_n)|} \right|$$

$$= \left| \sum_{n=0}^{N} |L(e_n)| \right|$$

$$= \sum_{n=0}^{N} |L(e_n)|$$

$$= \sum_{n=0}^{N} |\beta(L)(n)|$$

es decir que $\sum_{n=0}^{N} |\beta(L)(n)| \leq \|L\|$

Luego también se cumple que $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |\beta(L)(n)| \leq \|L\|$

entonces $\|\beta(L)\|_1 \leq \|L\|$ y $\beta(L) \in \ell^1(\mathbb{N})$.

Tanto la función α como la función β están bien definidas.

Probemos que:

a) $\alpha \circ \beta = \mathbb{I}_{C_0(\mathbb{N})^*}$

b) $\beta \circ \alpha = \mathbb{I}_{\ell^1(\mathbb{N})}$.

a) Sea $L \in C_0(\mathbb{N})^*$, debemos mostrar que $(\alpha \circ \beta)(L) = L$ sea también $g \in C_0(\mathbb{N})$, entonces:

$(\alpha\circ\beta)(L)(g) = L(g)$. En efecto:

$$(\alpha\circ\beta)(L)\left(\sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\right) = (\alpha(\beta(L)))\left(\sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \beta(L)(m)\left(\sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\right)(m)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} L(e_m) \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n(m)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} L(e_m)g(n)e_n(m)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{m=0}^{\infty} L(e_m)g(n)e_n(m)\right)$$

$$= L(e_o)g(o)+L(e_1)g(1)+\dots+L(e_N)g(N).$$

$$= \sum_{n=0}^{N} L(e_n)g(n)$$

es decir:

$$(\alpha\circ\beta)_{(L)}\left(\sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\right) = L\left(\sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\right)$$

Aplicando el lema 6.5, tenemos:

$$\lim_{N\to\infty} (\alpha_o\beta)_{(L)}\left(\sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\right) = \lim_{N\to\infty} L\left(\sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\right)$$

entonces,

$$(\alpha_o\beta)(L)\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\right) = L\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\right)$$

$$(\alpha_o\beta)(L)(g) = L(g).$$

b) Sea $\psi \in \ell^1(\mathbb{N})$. Demostraremos que $(\beta_o\alpha)(\psi) = \psi$.

Sea $t \in \mathbb{N}$: $(\beta_o\alpha)(\psi)(t) = (\beta(\alpha(\psi)))(t)$

$$= (\alpha(\psi))(e_t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \psi(n)e_t(n)$$

$$= \psi(t)$$

entonces $(\beta_o\alpha)(\psi) = \psi$.

Por consiguiente, de los resultados obtenidos en a) y b), concluímos que $\beta = \alpha^{-1}$, y por consiguiente α es biyectiva.

III) α preserva las normas.

Demostraremos que $\|\psi\|_1 = \|\alpha(\psi)\|$, para todo ψ, $\psi \in \ell^1(\mathbb{N})$

Lo haremos en dos partes:

1a. Parte: $\|\psi\|_1 \leq \|\alpha(\psi)\|$

De un resultado anterior tenemos:

$\|\beta(L)\|_1 \leq \|L\|$, para todo L, $L \in C_0(\mathbb{N})^*$.

Dado que β es sobre, todo $\psi \in \ell^1(\mathbb{N})$, es de la forma

$\psi = \beta(L)$, entonces $\|\psi\|_1 = \|\beta(L)\|_1 \leq \|L\|$ y $L = (\alpha\circ\beta)(L)$

luego,

$\|L\| = \|(\alpha\circ\beta)(L)\| = \|\alpha(\beta(L))\| = \|\alpha(\psi)\|$

entonces:

$$\|\psi\|_1 \leq \|\alpha(\psi)\|$$

2a. Parte: $\|\alpha(\psi)\| \leq \|\psi\|_1$

Tenemos que $\|\alpha(\psi)\| = \sup\limits_{f\neq 0} \dfrac{|\alpha(\psi)(f)|}{\|f\|}$

pero $\dfrac{|\alpha(\psi)(f)|}{\|f\|} = \dfrac{\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi(n)f(n)\right|}{\|f\|}$

$$\leq \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\psi(n)|\,|f(n)|}{\|f\|}$$

$$\leq \|f\| \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\psi(n)|}{\|f\|}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n)| = \|\psi\|_1$$

es decir que: $\dfrac{|\alpha(\psi)(f)|}{\|f\|} \leq \|\psi\|_1$

Entonces $\sup\limits_{f\neq 0} \dfrac{|\alpha(\psi)(f)|}{\|f\|} \leq \|\psi\|_1$

Con lo cual tenemos que $\|\alpha(\psi)\| \leq \|\psi\|_1$

De I), II) y III) concluímos que α es una isometría que identifica $C_0(\mathbb{N})^*$ con $\ell^1(\mathbb{N})$.

LEMA 6.7:

" a) Si $e_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $e_n(m) = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

entonces $e_n \in \ell^1(\mathbb{N})$.

b) Si $g \in \ell^1(\mathbb{N})$ entonces $g = \lim\limits_{N\to\infty} g_N$, con $g_N = \sum\limits_{n=0}^{N} g(n)e_n$ ".

PRUEBA:

a) Debemos probar que para $n \in \mathbb{N}$, n fijo, se cumple que $\|e_n\|_1 < \infty$.

$$\|e_n\|_1 = \sum_{m=0}^{\infty} |e_n(m)| = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} |e_n(m)|$$

$$= \lim_{N\to\infty} 1, \quad \text{ya que } \sum_{m=0}^{N} |e_n(m)| = 1 \text{ para } N>n$$

$$= 1.$$

b) A probar que $\lim\limits_{N\to\infty} \|g - \sum\limits_{n=0}^{N} g(n)e_n\|_1 = 0.$

Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $M \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq M$ implique

$$\|g - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\|_1 < \varepsilon$$

pero

$$\|g - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n\|_1 = \sum_{m=0}^{\infty} |(g - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n)(m)|$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} |g(m) - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n(m)|$$

$$= \sum_{t=N+1}^{\infty} |g(t)|, \quad \text{si } m > N$$

entonces $\|g - \sum\limits_{n=0}^{N} g(n)e_n\|_1 = \sum\limits_{t=N+1}^{\infty} |g(t)|.$

Dado que: $\|g\|_1 = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} |g(n)|$ en $\mathbb{C}$, entonces podemos afirmar que: para todo $\varepsilon > 0$, existe $w \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $N > w$ se cumple que

$$\left| \sum_{n=0}^{N} |g(n)| - \sum_{n=0}^{\infty} |g(n)| \right| < \varepsilon \text{ , es decir:}$$

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} |g(n)| < \varepsilon$$

Nuestro problema es encontrar $M \in \mathbb{N}$, usando la afirmación hecha anteriormente, podemos tomar M = w, de esta manera se cumple que

$$\sum_{t=N+1}^{\infty} |g(t)| < \varepsilon$$

y por consiguiente $\| g - \sum_{n=0}^{N} g(n)e_n \|_1 < \varepsilon$, para todo $N > M$.

6.8: EL DUAL DE $\ell^1(\mathbb{N})$.

Esta parte es desarrollada en forma similar a la determinación del espacio $C_0(\mathbb{N})^*$, ya que vamos a encontrar una isometría entre $\ell^\infty(\mathbb{N})$ y $\ell^1(\mathbb{N})^*$.

Sea $p: \ell^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^1(\mathbb{N})^*$

$f \rightsquigarrow p(F)$

donde $p(f): \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $p(f)(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\psi(n)$

Debemos probar que:

I) p es lineal

II) p es biyectiva

III) p preserva las normas.

Se verifica fácilmente que $p(f) \in \ell^1(\mathbb{N})^*$, pues la prueba es similar a verificar que $\alpha(\psi) \in C_0(\mathbb{N})^*$.

PRUEBA:

I) p es lineal (Se prueba de manera similar a la linealidad de α).

II) p es biyectiva.

Para ello, definamos la función $q: \ell^1(\mathbb{N})^* \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{N})$

$L \longmapsto q(L)$

donde $q(L): \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$

tal que $q(L)(n) = L(e_n)$

y probamos que $q = p^{-1}$, es decir que:

a) $p \circ q = \mathbb{I}_{\ell^1(\mathbb{N})^*}$

b) $q \circ p = \mathbb{I}_{\ell^\infty(\mathbb{N})}$.

Antes debemos probar que $q(L) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

·Si $L = 0$, $q(L) = 0 \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

·Si $L \neq 0$. Hay que encontrar $K > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $|q(L)(n)| \leq K$.

$$|q(L)(n)| = |L(e_n)| \leq \|L\|_1 \|e_n\|_1 = \|L\|_1 \cdot 1 = \|L\|_1$$

tomando $K = \|L\|_1$, se cumple que: $|q(L)(n)| \leq K$

y además $\|q(L)\| \leq \|L\|_1$

a) $p \circ q = \mathbb{I}_{\ell^1(\mathbb{N})^*}$

Sea $L \in \ell^1(\mathbb{N})^*$ probemos que $(p \circ q)(L) = L$.

Sea además $g \in \ell^1(\mathbb{N})$

entonces $(p \circ q)(L)(g) = (p(q(L)))(g)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q(L)(n)g(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} L(e_n)g(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} L(g(n)e_n)$$

$$= L\left(\sum_{n=0}^{\infty} g(n)e_n\right)$$

$$= L(g)$$

b) $q \circ p = \mathbb{I}_{\ell^\infty(\mathbb{N})}$

Sea $f \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, probemos que $(q \circ p)_{(f)} = f$

Sea además $n \in \mathbb{N}$:

$$(q \circ p)(f)_{(n)} = (q(p(f)))(n) = p(f)(e_n)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f(m)e_n(m)$$

$$= f(n)$$

Por lo tanto, de los resultados obtenidos en a) y b), tenemos que $q = p^{-1}$, es decir, p es biyectiva.

III) p preserva las normas.

Demostraremos que $\|p(f)\| = \|f\|_\infty$.

Lo haremos en dos partes.

i) $\|p(f)\| \leq \|f\|_\infty$

tenemos que $\|p(f)\| = \operatorname*{Sup}_{\psi=0} \dfrac{|p(f)(\psi)|}{\|\psi\|}$, $\psi \in \ell^1(\mathbb{N})$

$$= \operatorname*{Sup}_{\psi\neq0} \frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\psi(n)\right|}{\|\psi\|_1}$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{\psi\neq0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)||\psi(n)|}{\|\psi\|_1}$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{\psi\neq0} \frac{\|f\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n)|}{\|\psi\|_1}$$

$$\leq \|f\|_\infty \operatorname*{Sup}_{\psi\neq0} \frac{\|\psi\|_1}{\|\psi\|_1}$$

$$= \|f\|_\infty$$

ii) $\|f\|_\infty \leq \|p(f)\|$

tenemos que $\|q(L)\| \leq \|L\|$

Además como q es sobre, todo $f \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ se puede escribir $f = q(L)$.

entonces $\|f\|_\infty = \|q(L)\| \leq \|L\|_1$

pero como $L = (p \circ q)(L)$, tenemos:

$\|L\|_1 = \|(p \circ q)(L)\| = \|p(q(L))\| = \|p(f)\|$

es decir $\|f\|_\infty \leq \|p(f)\|$.

Por consiguiente, de I, II y III podemos concluir que p es una isometría que identifica $\ell^\infty(\mathbb{N})$ con $\ell^1(\mathbb{N})^*$.

VII. W^* - TOPOLOGIA

TOPOLOGIAS DEBILES:

DEFINICION 7.1:

Sean X un conjunto, Y un espacio topológico y F una familia de funciones de X hacia Y.

La Topología Débil sobre X inducida por F es la topología más pequeña sobre X para la cual cada función de F es contínua.

PROPOSICION 7.2:

"Sean $A = \{f^{-1}(U) : f \in F, U \text{ abierto en } Y\}$.

$\mathbb{B} = \{x/x$ es una intersección finita de elementos de $A\}$.

$\tau = \{0/0$ es una unión de elementos de $\mathbb{B}\}$.

Entonces τ así definida es la topología más pequeña sobre X, para la cual cada función de F es contínua".

PRUEBA:

Demostraremos que: i) τ es topología.

ii) Si $f \in F$ entonces f es contínua.

iii) τ es la más pequeña que cumple ii).

i) τ es una topología:

a) ϕ, $X \in \tau$, pues $\phi = f^{-1}(\phi)$, $f \in F$

$$X = f^{-1}(Y),\ f \in F.$$

b) Sea $(O_i)_{i \in I}$ una familia de abiertos de τ. Entonces cada O_i es de la forma $O_i = \bigcup_{j_i \in J_i} D_{j_i}$, donde los $D_{j_i} \in \mathbb{B}$.

Entonces:

$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j_i \in J_i} D_{j_i} \right)$, es decir $\bigcup_{i \in I} O_i$ es unión de intersecciones finitas de elementos de A. Luego $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.

c) Sean $O_1, O_2 \in \tau$, $O_1 = \bigcup_{j \in J} D_j$, $O_2 = \bigcup_{k \in K} C_k$, donde D_j, $C_k \in \mathbb{B}$.

$$O_1 \cap O_2 = \left(\bigcup_{j \in J} D_j \right) \cap \left(\bigcup_{k \in K} C_k \right)$$

$$= \bigcup_{k \in K} \left(\bigcup_{j \in J} D_j \cap C_k \right)$$

$$= \bigcup_{k \in K} \left(\bigcup_{j \in J} (D_j \cap C_k) \right), \text{ donde } D_j \cap C_k \in \mathbb{B}$$

por lo tanto $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

De a), b) y c) tenemos que τ es una topología.

ii) Sea $f \in F$ y U abierto en Y; para probar que f es contínua, probamos $f^{-1}(U) \in \tau$, lo cual es obvio.

iii) τ es la más pequeña, ya que si T es una topología en la cual toda función $f : X \longrightarrow Y$ es contínua, se implica que si O es un abierto cualquiera de τ, entonces O es un abierto en $\mathbb{T}$ y se tiene que $\tau \subset \mathbb{T}$.

PROPOSICION 7.3:

"La convergencia de redes en τ queda completamente caracterizada por:

$$\lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x \iff \lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha) = f(x), \text{ para toda } f \in F".$$

PRUEBA:

" $\Longrightarrow$ " : Sean $f \in F$, $U \in \mathbb{N}(f(x))$, $x \in X$.

Como f es contínua, existe $W \in N(x)$ tal que $f(W) \subset U$.

Por hipótesis tenemos que $\lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x$, es decir, para $W \in N(x)$ existe $\alpha_0 \in A$ tal que $x_\alpha \in W$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Luego $f(x_\alpha) \in U$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Es decir que para todo vecindario U de $f(x)$, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $f(x_\alpha) \in U$, con $\alpha \geq \alpha_0$.

Por consiguiente: $\lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha) = f(x)$, para todo $f \in F$.

" $\Longleftarrow$ " : Sea $W \in \mathbb{N}(x)$. Debemos encontrar $\alpha_0 \in A$ tal que $x_\alpha \in W$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Como $W \in N(x)$, existe $O \in$ tal que $x \in O \subset W$, donde

$O = \bigcup_{i\in I} D_i$ con $D_i \in \mathbb{B}$: entonces $x \in \bigcup_{i\in I} D_i$, luego podemos afirmar que existe un $D_n \in \mathbb{B}$ de tal manera que $x \in D_n$.

Sea $D_n = f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \cap \ldots\ldots \cap f_n^{-1}(V_n)$

entonces $x \in f_1^{-1}(V_1) \cap \ldots\ldots \cap f_n^{-1}(V_n) \subset O$

entonces $x \in f_i^{-1}(V_i)$, para todo $i=1,2,\ldots,n$

luego, $f_i(x) \in V_i$, para todo $i=1,2,\ldots,n$

y se tiene que para cada V_i, $i=1,2,\ldots,n$, existe α_i tal que $f_i(x_\alpha) \in V_i$ para todo $\alpha \geq \alpha_i$.

Tomando $\alpha_o = \text{máx}\,\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, se cumple que

$f_i(x_\alpha) \in V_i$, para todo $\alpha \geq \alpha_o$ y para todo $i=1,2,\ldots,n$

entonces $x_\alpha \in f_i^{-1}(V_i)$ para todo $\alpha \geq \alpha_o$ y para todo $i=1,\ldots,n$

entonces $x_\alpha \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i)$, para todo $\alpha \geq \alpha_o$.

Por consiguiente se tiene que $x_\alpha \in W$, para todo $\alpha \geq \alpha_o$.

OBSERVACION 7.4:

A la topología τ, la llamaremos : Topología Débil o F-Topología o W-Topología.

PROPOSICION 7.5:

"Si Y es un espacio de Hausdorff y F separa los puntos de X, entonces la topología τ es de Hausdorff".

PRUEBA:

Sean $x_1, x_2 \in X$ tal que $x_1 \neq x_2$; entonces como F separa los puntos de X, existe una función $f \in F$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Como Y es de Hausdorff, existen V_1, V_2 vecindarios abiertos de $f(x_1)$, $f(x_2)$ respectivamente tal que $V_1 \cap V_2 = \phi$.

Además $f^{-1}(V_1)$, $f^{-1}(V_2) \in \tau$ y $x_1 \in F^{-}(V_1)$, $x_2 \in f^{-1}(V_2)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) &= f^{-1}(V_1 \cap V_2) \\
&= f^{-1}(\phi) \\
&= \phi
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la topología τ es de Hausdorff.

DEFINICION 7.6:

Para cada $x \in \mathfrak{X}$, denotemos por $\hat{x}$ a la función sobre $\mathfrak{X}^*$ definida así:

$$\hat{x}(\psi) = \psi(x).$$

La W^*-Topología sobre $\mathfrak{X}^*$ es la topología débil sobre $\mathfrak{X}^*$ inducida por la familia de funciones $\{\hat{x} : x \in \mathfrak{X}\}$.

PROPOSICION 7.7:

"La W^*-Topología sobre $\mathfrak{X}^*$ es de Hausdorff".

PRUEBA:

Sean $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{X}^*$ tal que $\psi_1 \neq \psi_2$, entonces existe $x \in \mathfrak{X}$ tal que $\psi_1(x) \neq \psi_2(x)$.

Por consiguiente $\hat{x}(\psi_1) \neq \hat{x}(\psi_2)$, es decir que la familia de funciones $\{\hat{x} : x \in \mathfrak{X}\}$ separa los puntos de $\mathfrak{X}^*$.

Por otro lado, $\mathbb{C}$ es de Hausdorff, y por consiguiente por la proposición 7.5 concluímos que la W*-Topología sobre $\mathfrak{X}^*$ es de Hausdorff.

PROPOSICION 7.8:

"Una red $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en $\mathfrak{X}^*$ converge a ψ en $\mathfrak{X}^*$ en la W*-Topología si y solamente si:

$$\lim_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = \psi(x), \text{ para cada } x,\ x \in \mathfrak{X}".$$

PRUEBA:

La convergencia de redes en la W*-Topología se caracteriza por:

$\lim_{\alpha \in A} \psi_\alpha = \psi$ si y solo si $\lim f(\psi_\alpha) = f(\psi)$ para toda $f \in F$

si y solo si: $\lim_{\alpha \in A} \hat{x}(\psi_\alpha) = \hat{x}(\psi)$, para todo $\hat{x} \in \{\hat{x} : x \in \mathfrak{X}\}$

si y solo si:

$$\lim_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = \psi(x) \quad \text{para todo } x,\ x \in \mathfrak{X}.$$

La siguiente proposición muestra que la W*-Topología es determinada sobre conjuntos acotados de $\mathfrak{X}^*$, por medio de un subconjunto denso de $\mathfrak{X}$.

PROPOSICION 7.9:

"Supongamos que M es un subconjunto denso de $\mathfrak{X}$ y que $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una red uniformemente acotada en $\mathfrak{X}^*$ tal que:

$\lim\limits_{\alpha\in A} \psi_\alpha(x) = \psi(x)$ para todo $x \in M$, entonces la red $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ converge a ψ en la W*-Topología".

PRUEBA:

Sean $y \in \mathfrak{X}$, W un vecindario de y, con $W = B(y,\varepsilon')$.

Sea $\varepsilon > 0$. Vamos a probar que existe $\alpha_0 \in A$ tal que $|\psi_\alpha(y) - \psi(y)| < \varepsilon$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Dado que M es denso en $\mathfrak{X}$, podemos escoger $x \in M$ tal que $x \in M \cap W$, luego $x \in W$, es decir $\|x - y\| < \varepsilon'$

Además como $\lim\limits_{\alpha\in A} \psi_\alpha(x) = \psi(x)$, $x \in M$, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $|\psi_\alpha(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Entonces se tiene que:

$$|\psi_\alpha(y) - \psi(y)| = |(\psi_\alpha(y) - \psi_\alpha(x)) + (\psi_\alpha(x) - \psi(x)) + (\psi(x) - \psi(y))|$$

$$\leq |\psi_\alpha(y) - \psi_\alpha(x)| + |\psi_\alpha(x) - \psi(x)| + |\psi(x) - \psi(y)|$$

$$\leq |\psi_\alpha(y-x)| + \frac{\varepsilon}{3} + |\psi(x-y)|$$

$$\leq \|\psi_\alpha\| \, \|x-y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|\psi\| \, \|x-y\|$$

$$< \|\psi_\alpha\| \, \varepsilon' + \frac{\varepsilon}{3} + \|\psi\| \, \varepsilon'$$

Tomando $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3K}$, donde $K = \mathrm{Sup}\,\{\|\psi\|, \|\psi_\alpha\| : \alpha \in A\}$, (K existe, ya que la red $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es uniformemente acotada en $\mathfrak{X}^*$), se tiene que:

$$|\psi_\alpha(y) - \psi(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

De donde podemos afirmar que la red $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ converge a ψ en la W*-Topología.

LEMA 7.10:

"Sean $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una red en $\mathfrak{X}^*$ y $f \in \mathfrak{X}^*$. Entonces:

Si $\lim_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = f(x)$, para todo $x \in (\mathfrak{X})_1$, entonces se cumple que

$\lim_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathfrak{X}$".

PRUEBA:

Sea $\lim_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = f(x)$, para todo $x \in (\mathfrak{X})_1$

Sea $y \in \mathfrak{X}$, $y \neq 0$: entonces $y = \lambda x$, con $\lambda = \|y\|$, $x = \frac{y}{\|y\|}$

entonces:

$$\lim_{\alpha\in A} f_\alpha(y) = \lim_{\alpha\in A} f_\alpha(\lambda x)$$

$$= \lim_{\alpha\in A} \lambda f_\alpha(x), \text{ ya que } f \text{ es lineal}$$

$$= \lambda \lim_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$$

$$= \lambda f(x), \text{ pues } \|x\| = 1$$

$$= f(\lambda x)$$

$$= f(y), \text{ para todo } y \in \mathfrak{X}.$$

DEFINICION 7.11:

Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de Conjuntos, $I \neq \phi$.
Se llama producto cartesiano de esta familia y se denota por $\prod_{i\in I} X_i$ al conjunto de todas las funciones $f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$, tal que: $f(i) \in X_i$, para todo $i \in I$.

DEFINICION 7.12:

Para cada $j \in I$, la función $p_j: \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ tal que p_j
$p_j(f) = f(j)$, se llama proyección j-ésima.

DEFINICION 7.13: (Topología Producto).

Sea $((X_i,T_i))_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Vamos a definir una topología en el conjunto $X = \prod_{i\in I} X_i$ a partir de las topologías T_i, de la siguiente manera:

Consideremos la familia de proyecciones $(p_i)_{i\in I}$ y formemos el conjunto $\mathbb{B} \subset P(X)$ así:

$$\mathbb{B} = \{A \subset X: A = p_j^{-1}(V), \text{ para algún } j \in I, V \subset X_j \text{ abierto}\}$$

$$\mathbb{L} = \{D: D \text{ es una intersección finita de elementos de } \mathbb{B}\}.$$

Llamaremos Topología producto en X a la topología generada por $\mathbb{B}$ en X. A la Topología producto la denotaremos por $T(\mathbb{B})$

OBSERVACION 7.14:

Al conjunto $\mathbb{B}$ se le llama una sub-base para $T(\mathbb{B})$ y se cumple que $\mathbb{B} \subset T(\mathbb{B})$, es decir que todo elemento de $\mathbb{B}$ es un abierto en la Topología producto.

Los abiertos $O \in T(\mathbb{B})$, son uniones arbitrarias de elementos de $\mathbb{L}$, es decir,

$$O = \bigcup_{k\in K} D_k \quad , \quad D_k \in \mathbb{L}$$

PROPOSICION 7.15:

"Sea $((X_i,T_i))_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. La topología producto en $X = \prod_{i\in I} X_i$ es la topología más pequeña para la cual las proyecciones p_i son contínuas, para todo $i \in I$".

PRUEBA: Sea $i \in I$ y $V \subset X_i$ abierto. Mostraremos que $p_i^{-1}(V)$ es un abierto en X.

Como los elementos de $\mathbb{B}$ se han definido de la siguiente manera: $A = p_i^{-1}(V)$ y además por ser $\mathbb{B}$ generador de la Topología producto, se tiene que $\mathbb{B} \subset T(\mathbb{B})$.

Por lo tanto, $A \in T(\mathbb{B})$ y p_i es una función contínua.

Por ser i y V arbitrarios, entonces, para todo $i \in I$ se tiene que p_i es una función contínua.

Ahora mostraremos que $T(\mathbb{B})$ es la topología más pequeña.

Sea T^* una topología en X tal que p_i es contínua para todo $i \in I$.

Sea O un abierto en $T(\mathbb{B})$, entonces $O = \bigcup_{k \in K} D_k$, donde los $D_k \in \mathbb{L}$.

Además sabemos que $p_i^{-1}(V) \in T^*$ para todo i, y que la intersección finita de elementos de $\mathbb{B}$ es también un abierto en T^*, por lo tanto $\bigcup_{k \in K} D_k \in T^*$, es decir O es un abierto en T^*.

Así, hemos mostrado que todo abierto en $T(\mathbb{B})$ es un abierto en T^*. Por consiguiente $T(\mathbb{B}) \subset T^*$.

OBSERVACION 7.16:

Por la proposición anterior, vemos que $T(\mathbb{B})$ es la topología más pequeña en la cual las proyecciones $(p_i)_{i \in I}$ son contínuas.

Si es el caso que $X_i = X$ para todo $i \in I$, entonces $T(\mathbb{B})$es es una W-topología, generada por

$$F = \{p_j / p_j : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X\}$$

PROPOSICION 7.17: (TEOREMA DE ALAOGLU).

"La Bola Unitaria $(\mathfrak{X}^*)_1$ del Dual de un espacio de Banach $\mathfrak{X}$ es compacta en la W*-Topología".

PRUEBA:

Básicamente consiste en identificar $(\mathfrak{X}^*)_1$ con un subconjunto cerrado de un espacio producto, cuya compacidad se sigue del Teorema de Tychonoff.

a) Para cada $x \in (\mathfrak{X})_1$ denotemos por $\mathbb{C}_1^x$ una copia del disco unitario cerrado en $\mathbb{C}$, es decir $\mathbb{C}_1^x = \{m \in \mathbb{C}: |m| \leq 1\}$, y por $\mathbb{P}$ al espacio producto $\prod_{x \in (\mathfrak{X})_1} \mathbb{C}_1^x$. Por el Teorema de Tychonoff se tiene:

que $\mathbb{P}$ es compacto, pues para cada $x \in (\mathfrak{X})_1$, $\mathbb{C}_1^x$ es compacto.

Definamos la función Λ así:

$$\begin{aligned} \Lambda : (\mathfrak{X}^*)_1 &\longrightarrow \mathbb{P} \\ \psi &\rightsquigarrow \Lambda(\psi) \end{aligned}$$

donde $\Lambda(\psi)(x) = \psi(x)$, para cada $x \in (\mathfrak{X})_1$.

De esta manera Λ está bien definida, pues $\|\psi\| \leq 1$.

b) Λ así definida es inyectiva. En efecto:

Si $\Lambda(\psi_1) = \Lambda(\psi_2)$, entonces por definición de Λ tenemos que

$\psi_1(x) = \psi_2(x)$, para todo $x \in (\mathfrak{X})_1$.

Sea $y \in \mathfrak{X}$, $y \neq 0$, $y = \lambda x$, con $\lambda = \|y\|$, $x = \dfrac{y}{\|y\|}$

entonces $\psi_1(y) = \psi_1(\lambda x)$

$= \lambda\psi_1(x)$

$= \lambda\psi_2(x)$, pues $\|x\| = 1$

$= \psi_2(\lambda x)$

$= \psi_2(y)$.

Luego $\psi_1 = \psi_2$, para todo $y \in \mathfrak{X}$.

c) Sea una red $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ en $\mathfrak{X}^*$ convergente en la W*-Topología a ψ en $\mathfrak{X}^*$.

$\lim\limits_{\alpha\in A} \psi_\alpha = \psi$ si y solo si $\lim\limits_{\alpha\in A} \psi_\alpha(x) = (x)$, para todo $x \in \mathfrak{X}$ (por proposición 7.8).

$\Longrightarrow \lim\limits_{\alpha\in A} \psi_\alpha(x) = \psi(x)$, para todo $x \in (\mathfrak{X})_1$.

$\Longrightarrow \lim\limits_{\alpha\in A} \Lambda(\psi_\alpha)(x) = \Lambda(\psi)(x)$, $x \in (\mathfrak{X})_1$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\alpha\in A} p_x(\Lambda(\psi_\alpha)) = p_x(\Lambda(\psi))$, para todo x, $x \in (\mathfrak{X})_1$

donde $p_x : \prod\limits_{x\in(\mathfrak{X})_1} \mathbb{C}_1^x \longrightarrow \mathbb{C}_1^x$, p_x contínua.

$\Longrightarrow \lim\limits_{\alpha\in A} \Lambda(\psi_\alpha) = \Lambda(\psi)$, ya que la topología producto de $\mathbf{P}$ es la más pequeña de las topologías sobre $\mathbf{P}$ que convierten a cada p_x en una función contínua. Dicho de otra manera: La Topología de $\mathbb{P}$ es una W-Topología. (Ver OBSERVACION 7.16).

$\Longrightarrow$ Λ es contínua.

d) Ahora si Λ la definimos nuevamente así:

$$\Lambda : (\mathfrak{X}^*)_1 \longrightarrow \Lambda[(\mathfrak{X}^*)_1]$$

tenemos que es una función biyectiva.

e) Λ^{-1} es contínua. En efecto:

Sea $\{\Lambda(\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una red convergente en $\Lambda[(\mathfrak{X}^*)_1]$ a $\Lambda(\psi)$.

Vamos aprobar que $\lim_{\alpha\in A} \Lambda^{-1}(\Lambda(\psi_\alpha)) = \Lambda^{-1}(\Lambda(\psi))$ (utilizando la proposición 1.22), o sea que

$$\lim_{\alpha\in A} \psi_\alpha = \psi$$

Tenemos que $\lim_{\alpha\in A} \Lambda(\psi_\alpha) = \Lambda(\psi)$

$\Longrightarrow \lim_{\alpha\in A} p_x(\Lambda(\psi_\alpha)) = p_x(\Lambda(\psi))$, para $x \in (\mathfrak{X})_1$

$\Longrightarrow \lim_{\alpha\in A} \Lambda(\psi_\alpha)(x) = \Lambda(\psi)(x)$, $x \in (\mathfrak{X})_1$

$\Longrightarrow \lim_{\alpha\in A} \psi_\alpha(x) = \psi(x)$, para todo $x \in (\mathfrak{X})_1$

$\Longrightarrow \lim_{\alpha\in A} \psi_\alpha(x) = \psi(x)$, para $x \in \mathfrak{X}$ (por LEMA 7.11)

$\Longrightarrow \lim_{\alpha\in A} \psi_\alpha = \psi$

Por todos los resultados anteriores en el desarrollo de esta prueba tenemos que:

$\Lambda : (\mathfrak{X}^*)_1 \longrightarrow \Lambda[(\mathfrak{X}^*)_1]$ es un Homeomorfismo entre la Bola Unitaria de $\mathfrak{X}^*$ y un subconjunto de $\mathbb{P}$.

Completaremos la prueba, al demostrar que $\Lambda[(\mathfrak{X}^*)_1]$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{P}$.

Sea $\{\Lambda(\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una red en $\Lambda[(\mathfrak{X}^*)_1]$ que converge en la topología producto de $\mathbb{P}$ a Ψ en $\mathbb{P}$. Si $x, y, x+y \in (\mathfrak{X})_1$, entonces:

$$\begin{aligned}\Psi(x+y) &= \lim_{\alpha\in A} \Lambda(\psi_\alpha)(x+y)\\ &= \lim_{\alpha\in A} \Lambda(\psi_\alpha)(x) + \lim_{\alpha\in A} \Lambda(\psi_\alpha)(y)\\ &= \Psi(x) + \Psi(y).\end{aligned}$$

Además, si $x, \lambda x \in (\mathfrak{X})_1$:

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda x) &= \lim_{\alpha\in A} \Lambda(\psi_\alpha)(\lambda x)\\ &= \lim_{\alpha\in A} \psi_\alpha(\lambda x)\\ &= \lim_{\alpha\in A} \lambda\psi_\alpha(x)\\ &= \lambda \lim_{\alpha\in A} \psi_\alpha(x)\\ &= \lambda \operatorname{Lim} \Lambda(\psi_\alpha)(x)\\ &= \lambda\Psi(x)\end{aligned}$$

Por consiguiente, Ψ determina un elemento $\tilde{\Psi}$ de $(\mathfrak{X}^*)_1$ por medio de la relación $\tilde{\Psi}(x) = \|x\|\Psi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$, $x \in \mathfrak{X}$.

" $\tilde{\Psi}$ es lineal ".

i) $\tilde{\Psi}(x+y) = \tilde{\Psi}(x) + \tilde{\Psi}(y)$, para $x,y \in \mathfrak{X}$.

$$\tilde{\Psi}(x+y) = \|x+y\|\Psi\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right)$$

$$= \|x+y\|\Psi\left(\frac{\|x\|\frac{x}{\|x\|}}{\|x+y\|} + \frac{\|y\|\frac{y}{\|y\|}}{\|x+y\|}\right)$$

$$= \|x+y\|\left[\Psi\left(\frac{\|x\|\frac{x}{\|x\|}}{\|x+y\|}\right) + \Psi\left(\frac{\|y\|\frac{y}{\|y\|}}{\|x+y\|}\right)\right]$$

$$= \|x+y\|\left[\frac{\|x\|}{\|x+y\|}\Psi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \frac{\|y\|}{\|x+y\|}\Psi\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right]$$

$$= \|x\|\Psi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \|y\|\Psi\left(\frac{y}{\|y\|}\right)$$

$$= \tilde{\Psi}(x) + \tilde{\Psi}(y)$$

ii) $\tilde{\Psi}(\lambda x) = \lambda\tilde{\Psi}(x)$, para $\lambda x \in \mathfrak{X}$.

$$\tilde{\Psi}(\lambda x) = \|\lambda x\|\left(\frac{\lambda x}{\|\lambda x\|}\right)$$

$$= \|\lambda x\|\Psi\left(\frac{\|x\|\frac{\lambda x}{\|x\|}}{\|\lambda x\|}\right)$$

$$= \Psi\left(\|x\|\frac{\lambda x}{\|x\|}\right)$$

$$= \Psi\left(\|x\|\frac{\lambda x}{\|x\|}\right)$$

$$= \lambda \|x\| \psi\left(\frac{x}{\|x\|} \right)$$

$$= \lambda \tilde{\psi}(x).$$

Ya que $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$, para $x \in (\mathfrak{X})_1$, tenemos:

- $\tilde{\psi} \in (\mathfrak{X}^*)_1$

- $\Lambda(\tilde{\psi}) = \psi$

En efecto:

- $\tilde{\psi} \in (\mathfrak{X}^*)_1$, ya que $\| \tilde{\psi} \| = \operatorname*{Sup}_{x \neq 0} \frac{|\tilde{\psi}(x)|}{\|x\|}$, $x \in \mathfrak{X}$

pero $|\tilde{\psi}(x)| = \|x\| \left|\psi\left(\frac{x}{\|x\|} \right)\right|$

entonces:

$$\frac{|\tilde{\psi}(x)|}{\|x\|} = \left|\psi\left(\frac{x}{\|x\|} \right)\right|$$

y $\psi : (\mathfrak{X})_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $|\psi(t)| \leq 1$, $t \in (\mathfrak{X})_1$

por tanto:

$$\left|\psi\left(\frac{x}{\|x\|} \right)\right| \leq 1$$

y por consiguiente $\|\tilde{\psi}\| \leq 1$

$$\cdot\Lambda(\tilde{\Psi})(x) = \tilde{\Psi}(x), \quad x \in (\mathfrak{X})_1$$

$$= \Psi(x), \quad x \in (\mathfrak{X})_1$$

Con lo anterior, podemos decir que $\Lambda[(\mathfrak{X}^*)_1]$ es cerrado en $\mathbb{P}$, por lo tanto es compacto en $\mathbb{P}$.

Por consiguiente $(\mathfrak{X}^*)_1$ es compacto en la W*-Topología, ya que la compacidad es un invariante topológico.

VIII. TEOREMA DE HAHN-BANACH

DEFINICION 8.1:

Sea E un espacio lineal real y p una función con valores reales definida sobre E. Se dice que p es una funcional sublineal sobre E, si:

1.) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, con $x,y \in E$

2.) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, con $x \in E$, $\lambda > 0$.

TEOREMA 8.2: (HAHN-BANACH).

"Consideremos:

a) Un subespacio M de un espacio vectorial real E.

b) Una funcional sublineal $p: E \longrightarrow \mathbb{R}$

c) Una funcional lineal $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in M$.

Entonces existe una funcional lineal $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\Phi(x) = f(x)$, para todo $x \in M$ y además $\Phi(x) \leq p(x)$, para todo $x \in M$ ".

PRUEBA:

Sea Ω el conjunto cuyos elementos son de la forma (M',f'), donde M' es un subespacio de E, $M \subset M'$, $f': M' \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal que cumple la desigualdad $f'(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M'$.

$\Omega \neq \emptyset$, ya que $(M,f) \in \Omega$ por hipótesis del teorema.

Sobre Ω definamos la relación de orden siguiente:

"$(M',f') \leq (M'',f'')$ ssi $M' \subset M''$ y $f' = f''_{|M'}$"

Probemos que Ω es un conjunto inductivo, es decir que todo subconjunto A de Ω, con A totalmente ordenado, admite una cota superior en Ω.

Para ello:

Sea $A \subset \Omega$, A totalmente ordenado, donde $A = \{(M_i,f_i)\}_{i\in I}$

Una cota superior de A es: $(\bigcup_{i\in I} M_i, \phi)$, donde $\bigcup_{i\in I} M_i$ es un subespacio de E y $\phi : \bigcup_{i\in I} M_i \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightsquigarrow \phi(x) = f_j(x), \text{ si } x \in M_j$$

" $\bigcup_{i\in I} M_i$ es un subespacio de E".

Sean $x,y \in \bigcup_{i\in I} M_i$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como $x \in \bigcup_{i\in I} M_i$, entonces existe $i_1 \in I$ tal que $x \in M_{i_1}$, además $(M_{i_1},f_{i_1}) \in A$.

También $y \in \bigcup_{i\in I} M_i$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $y \in M_{i_0}$ y $\lambda y \in M_{i_0}$, puesto que M_{i_0} es un subespacio de E, y $(M_{i_0}, f_{i_0}) \in A$.

Entonces, como A es totalmente ordenado, dos elementos cualesquiera de él son comparables. Supongamos que $(M_{i_1},f_{i_1}) \leq (M_{i_0},f_{i_0})$, de aquí se tiene que $M_{i_1} \subset M_{i_0}$.

Entonces $x \in M_{i_0}$.

Por tanto $x+\lambda y \in M_{i_0}$.

Por consiguiente $x+\lambda y \in \bigcup_{i\in I} M_i$.

" Φ está bien definida ".

Es decir que si $x \in \bigcup_{i\in I} M_i$, su imagen por medio de Φ en $\mathbb{R}$, debe ser única.

Sea $x \in \bigcup_{i\in I} M_i$, entonces podemos implicar que $\Phi(x) = f_i(x)$, si $x \in M_i$, y que $\Phi(x) = f_j(x)$ si $x \in M_j$.

Tenemos que (M_i, f_i), $(M_j, f_j) \in A$ y por ser A un subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$, podemos suponer que:

$(M_i, f_i) \leq (M_j, f_j)$

entonces: $f_i = f_j|_{M_i} = f_j$

y por lo tanto $\Phi(x) = f_i(x) = f_j(x)$.

" Φ es lineal ".

$$\begin{aligned}\Phi(x+y) &= f_i(x+y)\\ &= f_i(x) + f_i(y)\\ &= \Phi(x) + \Phi(y)\end{aligned}$$

$\Phi(\lambda x) = f_i(\lambda x)$

$= \lambda f_i(x)$

$= \lambda\Phi(x)$

Además $\Phi(x) = f_i(x) \leq p(x)$, es decir $\Phi(x) \leq p(x)$

Por lo tanto, A tiene una cota superior $(\bigcup_{i\in I} M_i , \Phi)$ en E.

Por consiguiente, Ω es un conjunto inductivo y por aplicación directa del Lema de Zorn, podemos afirmar que Ω posee un elemento maximal.

Sea (H,h) un elemento maximal de Ω.

Ahora bien, si $H \neq E$, tomemos $x_1 \in E$ tal que $x_1 \notin H$, y hagamos

$$G = \{x + \lambda x_1 \text{ tal que } x \in H, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

G es un subespacio de E tal que $H \subsetneq G$, tenemos que

$f(x) + f(y) = f(x+y)$, y por hipótesis

$$f(x+y) \leq p(x+y) = p[(x-x_1) + (x_1 + y)]$$

$$f(x+y) \leq p(x-x_1) + p(x_1+y)$$

o sea que $f(x) + f(y) \leq p(x-x_1) + p(x_1+y)$

$f(x) - p(x-x_1) \leq p(x_1+y) - f(y)$, con $x,y \in H$ (1)

Sea α la menor de las cotas superiores del conjunto:

$\{f(x) - p(x-x_1)$ tal que $x \in H\}$.

De esa forma:

$$f(x) - \alpha \leq p(x-x_1), \text{ para } x \in H \tag{2}$$

y además:

$$f(y) + \alpha \leq p(y+x_1), \text{ para } y \in H \tag{3}$$

Definamos la función g sobre G de la siguiente manera:

$$g(x+\lambda x_1) = f(x) + \lambda\alpha, \text{ con } x \in H, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Se tiene que $H \subsetneq G$, así:

$$g(z) = f(z) \quad \text{para todo } z \in H,$$

por otro lado, para $x,y \in H$, $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g[(x+\lambda_1x_1) + (y+\lambda_2x_1)] &= g[(x+y) + (\lambda_1+\lambda_2)x_1] \\ &= f(x+y) + (\lambda_1+\lambda_2)\alpha \\ &= f(x) + f(y) + \lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha \\ &= [f(x) + \lambda_1\alpha] + [f(y) + \lambda_2\alpha] \\ &= g(x+\lambda_1x_1) + g(y+\lambda_2x_1) \end{aligned}$$

y $\quad g[k(x + \lambda_1x_1)] = g[kx + (k\lambda_1)x_1]$

$$= f(kx) + (k\lambda_1)\alpha$$

$$= kf(x) + k(\lambda_1\alpha)$$

$$= k(f(x) + \lambda_1\alpha)$$

$$= kg(x+\lambda_1 x_1) \ , \quad \text{para } x \in H, \quad k,\lambda \in \mathbb{R} \ .$$

Por lo tanto g es lineal sobre G.

Tomemos $\lambda > 0$ y sustituyamos x por $\lambda^{-1}x$ en (2), y por $\lambda^{-1}y$ en (3), así:

$$f(\lambda^{-1}x) - \alpha \leq p(\lambda^{-1}x - x_1) \tag{5}$$

$$f(\lambda^{-1}y) + \alpha \leq p(\lambda^{-1}y + x_1) \tag{6}$$

Multipliquemos (5) y (6) por λ:

$$\lambda f(\lambda^{-1}x) - \lambda\alpha \leq \lambda p(\lambda^{-1}x - x_1)$$

$$\lambda f(\lambda^{-1}y) + \lambda\alpha \leq \lambda p(\lambda^{-1}y + x_1)$$

es decir

$$f(x) - \lambda\alpha \leq p(x - \lambda x_1) \qquad y$$

$$f(y) + \lambda\alpha \leq p(y + \lambda y_1).$$

Además por (4), tenemos que

$$f(x) - \lambda\alpha = g(x - \lambda x_1)$$

y $\quad f(y) + \lambda\alpha = g(y + \lambda x_1)$

o sea que

$$g(x - \lambda x_1) \leq p(x - \lambda x_1)$$

y

$$g(y + \lambda x_1) \leq p(y + \lambda x_1)$$

es decir que $g \leq p$ sobre el espacio G.

Por todo lo anterior, tenemos que $(G,g) \in \Omega$ y además que $(H,h) < (G,g)$, porque $H \subsetneq G$.

Esta última aseveración es una contradicción al hecho que

(H,h) es elemento maximal.

Por consiguiente, podemos afirmar que $H = E$ y así tenemos la extensión de f hacia E.

Una forma distinta, pero más útil del teorema anterior es la que sigue.

TEOREMA 8.3: (HAHN-BANACH).

"Sea M un subespacio del espacio de Banach $\mathfrak{X}$. Si f es una función lineal acotada sobre M, entonces existe ϕ en $\mathfrak{X}^*$ tal que:

$$\phi(x) = f(x) \text{ para } x \in M \quad \text{y} \quad \|\phi\| = \|f\|"$$

PRUEBA:

Considerando a $\mathfrak{X}$ como un subespacio lineal real $\tilde{\mathfrak{X}}$, tenemos que la norma es una funcional sublineal sobre $\tilde{\mathbb{C}}$ ya que

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

y $$\|\lambda x\| = \lambda \|x\|, \quad \text{para} \quad \lambda > 0$$

Además, la función: $$g: \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow Re f(x)$$

donde $\tilde{M}$ es un subespacio real de $\tilde{\mathfrak{X}}$, es una funcional lineal real ya que:

$$g(x+y) = Re f(x+y) = Re[f(x)+f(y)]$$

$$= Re f(x) + Re f(y) = g(x) + g(y), \text{ con } x,y \text{ en } \tilde{M}$$

y $$g(\alpha x) = Re f(\alpha x) = Re[\alpha f(x)] = \alpha Re f(x)$$
$$= \alpha g(x), \quad \text{con} \quad \alpha \text{ en } \mathbb{R} \quad y \quad x \text{ en } \tilde{M}.$$

Por otro lado:

$$\frac{|g(x)|}{\|x\|} \leq \|g\|$$

y $$\frac{|g(x)|}{\|x\|} = \frac{|Re f(x)|}{\|x\|} \leq \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|$$

entonces:

$$\|g\| \leq \|f\|$$

Haciendo $p(x) = \|f\| \, \|x\|$

tenemos que

$$g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\| \|x\| \leq \|f\| \|x\|$$

es decir

$$g(x) \leq p(x)$$

Con esto se cumplen las condiciones del teorema anterior y por consiguiente obtenemos una funcional lineal real ψ sobre $\tilde{\mathfrak{X}}$ que extiende a g y que satisface

$$\psi(x) \leq p(x) = \|f\| \|x\|$$

para $x \in \mathfrak{X}$.

Supongamos ahora que el campo escalar es $\mathbb{C}$.

Definamos una función Φ sobre $\mathfrak{X}$

$$\Phi(x) = \psi(x) - i\psi(ix).$$

Dicha función está bien definida por estarlo ψ.

Además, para x,y en $\mathfrak{X}$, α_1, α_2 en $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Phi(x + y) &= \psi(x + y) - i\psi[i(x + y)] \\ &= \psi(x) + \psi(y) - i\psi(ix) - i\psi(iy) \\ &= \Phi(x) + \Phi(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad \Phi((\alpha_1 + i\alpha_2)x) &= \Phi(\alpha_1 x + \alpha_2 ix) \\ &= \Phi(\alpha_1 x) + \Phi(i\alpha_2 x) \end{aligned}$$

$$\phi(\alpha_1 x) = \psi(\alpha_1 x) - i\psi(i(\alpha_1 x))$$

$$= \alpha_1\psi(x) - i\alpha_1\psi(ix)$$

$$= \alpha_1[\psi(x) - i\psi(ix)]$$

$$= \alpha_1\, \phi(x)$$

$$\phi(i\alpha_2 x) = \psi(i\alpha_2 x) - i\,\psi(i^2\alpha_2 x)$$

$$= \alpha_2[\psi(ix) + i\,\psi(x)]$$

$$= \frac{i\alpha_2}{i^2}[i\,\psi(ix) - \psi(x)]$$

$$= i\alpha_2[\psi(x) - i\,\psi(ix)]$$

$$= i\alpha_2\, \phi(x)$$

o sea

$$\phi((\alpha_1 + i\alpha_2)x) = (\alpha_1 + i\alpha_2)\phi(x)$$

y así hemos probado que ϕ es una funcional lineal compleja sobre $\mathfrak{X}$.

Ahora tomemos un elemento $x \in M$, entonces

$$\phi(x) = \psi(x) - i\,\psi(ix)$$

$$= g(x) - i\,g(ix) = \mathcal{R}e f(x) - i\,\mathcal{R}e f(ix)\,.$$

Como $f(x) \in \mathbb{C}$, entonces

$f(x) = u + iv$ para algunos u, v en $\mathbb{R}$; así

$Re[if(x)] = Re[i(u + iv)$

$$Re[if(x)] = Re[\ v + iu] = -v$$

$$= -Imf(x)$$

o sea que

$$\Phi(x) = Ref(x) + i\ Imf(x)$$

$$= f(x) \quad \text{para x en M.}$$

Para $x \in M$ hagamos

$$\Phi(x) = re^{i\theta}\ , \text{ entonces:}$$

$$|\Phi(x)| = r = re^{i\theta - i\theta} = e^{-i\theta}\ \Phi(x)$$

$$= \Phi(e^{-i\theta}x)$$

$$= \psi(e^{-i\theta}x) - i\,\psi\,(ie^{-i\theta}x)$$

$$= \psi(e^{-i\theta}x) \quad \text{ya que} \quad \psi(ie^{-i\theta}x) = 0$$

$$\leq |\psi(e^{-i\theta}x)|$$

$$\leq \ ||\psi||\ ||\ e^{-i\theta}x|| = ||\psi||\ ||x\,||$$

o sea que

$$\frac{|\Phi(x)|}{||x||} \leq ||\psi\,||$$

pero como

$$||\,\Phi|| = \operatorname*{Sup}_{x \neq 0} \frac{|\Phi(x)|}{||x||}$$

entonces $\|\Phi\| \leq \|\psi\|$

Además, como

$$\|\psi\| = \|g\| \leq \|f\|$$

y Φ es una extensión de f, tenemos que

$$\|\Phi\| = \|f\|$$

COROLARIO 8.4:

"Si x es un elemento de un espacio de Banach $\mathfrak{X}$, entonces existe $f \in \mathfrak{X}^*$ de norma unitaria tal que

$$f(x) = \|x\|".$$

PRUEBA:

Supongamos $x \neq 0$.

Hagamos

$$M = \{\lambda x : \lambda \text{ en } \mathbb{C}\} ,$$

es decir el espacio unidimensional generado por x.

Definamos una función g sobre M por

$$g(\lambda x) = \lambda \| x \|$$

que indudablemente está bien definida.

Además, si $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ están en $\mathbb{C}$,

$$g(\lambda_1 x + \lambda_2 x) = (\lambda_1 + \lambda_2) \| x \|$$

$$= \lambda_1 \|x\| + \lambda_2 \|x\|$$

$$= g(\lambda_1 x) + g(\lambda_2 x)$$

y $$g[\alpha(\lambda_1 x)] = g[(\alpha\lambda_1)x]$$

$$= (\alpha\lambda_1) \|x\|$$

$$= \alpha(\lambda_1 \|x\|)$$

$$= \alpha g(\lambda_1 x)$$

y como

$$|g(\lambda x)| = \|x\| \, |\lambda|$$

entonces g es acotada, y como

$$\|g\| = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|g(\lambda x)|}{\|\lambda x\|}$$

$$= \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|\lambda| \, \|x\|}{|\lambda| \, \|x\|}$$

$$= 1$$

es decir

$$\|g\| = 1$$

el teorema anterior nos proporciona una extensión $f \in \mathfrak{X}^*$ de g a $\mathfrak{X}$ tal que

$$f(u) = g(u) \quad \text{para} \quad u \text{ en } M$$

y como x está en M, entonces

$$f(x) = g(x) = g(1.x)$$

$$= 1.\|x\| = \|x\|$$

que es lo que queríamos probar.

COROLARIO 8.5:

"Si $f(x) = 0$ para toda f en $\mathfrak{X}^*$, entonces $x = 0$".

PRUEBA:

Sea x tal que $f(x) = 0$ para toda f, $f \in \mathfrak{X}^*$. Supongamos que $x \neq 0$. Entonces por el corolario anterior, como x está en $\mathfrak{X}$, existe f en $\mathfrak{X}^*$ tal que

$$f(x) = \|x\| = 1 \neq 0$$

lo cual contradice la hipótesis.

DEFINICION 8.6:

Sean E y E' espacios lineales normados. Un isomorfismo isométrico de E en E' es una transformación lineal T uno a uno de E en E' tal que

$$\|T(x)\| = \|x\|$$

para cada $x \in E$.

Se dice que E es isomórfico isométricamente a E' si existe un isomorfismo isométrico de E sobre E'.

TEOREMA 8.7: (BANACH).

"Todo espacio de Banach $\mathfrak{X}$ es isomórfico isométricamente a un subespacio cerrado de C(X) para algún espacio de Hausdorff Compacto X".

PRUEBA:

Tenemos que $(\mathfrak{X}^*)_1 = \{f \in \mathfrak{X}^* : \|f\| \leq 1\}$ es compacto en la W*-topología. (Ver el Teorema de Alaoglu).

Por consiguiente, podemos considerar que X es $(\mathfrak{X}^*)_1$, es decir

$$X = (\mathfrak{X}^*)_1$$

y definamos la función h por

$$\begin{aligned} h : \mathfrak{X} &\longrightarrow C(X) \\ x &\rightsquigarrow h_x \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} h_x : X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longrightarrow f(x). \end{aligned}$$

h está bien definida por estarlo las h_x

Además, si $x,y \in \mathfrak{X}$ y $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$h(\lambda_1 x + \lambda_2 y)(f) = h_{\lambda_1 x + \lambda_2 y}(f)$$

$$= f(\lambda_1 x + \lambda_2 y)$$

$$= \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)$$

$$= \lambda_1 h_x(f) + \lambda_2 h_y(f), \text{ para } f \in X$$

$$= \lambda_1 h(x)(f) + \lambda_2 h(y)(f), \text{ para } f \in X$$

Por otro lado, para $x \in \mathfrak{X}$, se tiene

$$\|h_x\|_\infty = \sup_{f \in (\mathfrak{X}^*)_1} |h_x(f)|$$

$$= \sup_{f \in (\mathfrak{X}^*)_1} |f(x)|$$

pero como todo $f \in C(X)$ es acotada, entonces

$$\sup_{f \in (\mathfrak{X}^*)_1} |f(x)| \leq \sup_{f \in (\mathfrak{X}^*)_1} \|f\| \, \|x\|$$

$$\leq \sup_{f \in (\mathfrak{X}^*)_1} \|x\|$$

ya que $\|f\| \leq 1$.

Así $\|h_x\|_\infty \leq \|x\|$

Por otro lado, el COROLARIO 8.4 establece, para $x \in \mathfrak{X}$, la existencia de $f \in (\mathfrak{X}^*)_1$, tal que:

$$\|x\| = f(x)$$

es decir

$$\|x\| = |f(x)| \leq \sup_{f \in (\mathfrak{X}^*)_1} |f(x)| = \|h_x\|_\infty$$

y por consiguiente

$$\|h_x\|_\infty = \|x\| .$$

BIBLIOGRAFIA

COTLAR, Mischa y CIGNOLI, Roberto. "Nociones de Espacios Normados". Editorial Universitaria, Buenos Aires, 1967.

DIEUDONNE, J. "Fundamentos de Análisis Moderno". Editorial Reverté, S.A. Barcelona, 1966.

DOUGLAS, Ronald G. "Banach Algebra Techniques in Operator Theory". Academic Press, New York, 1972.

GARCIA MARRERO, M. "Topología". Editorial Alhambra, Madrid, 1975.

KELLEY, John L. "General Topology". Van Nostrand Reinhold, Princeton, New Jersey, 1955.

RUDIN, Walter. "Functional Analysis". McGraw - Hill. Book Company, New York, 1973.