Universidad de El Salvador
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Matemática

Teorema de Representación de Riesz

Trabajo de Graduación presentado por:

Pedro José Geoffroy Carletti

Marcelino Mejía González

Previo a la opción del título de:

Licenciado en Matemática

Noviembre - 1988

SAN SALVADOR. EL SALVADOR. CENTRO AMERICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : LIC. JOSE LUIS ARGUETA ANTILLON

SECRETARIO GENERAL : ING. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO : ING. ROBERTO BRAN GIRALT

SECRETARIO : ING. MARIO ARNOLDO MOLINA ARGUETA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE : LIC. ROLANDO LEMUS GOMEZ

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR : ING. JOSE FRANCISCO MARROQUIN

ASESOR : LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

INTRODUCCION

El propósito fundamental de este trabajo es abordar el análisis de teoremas de representación para funcionales lineales definidos en espacios particulares de funciones.

Involucramos para ello elementos de teoría de medida, algunos conceptos básicos de Análisis Funcional y ciertas estructuras topológicas que complementan el estudio.

El trabajo ha sido diseñado en tres etapas. Los dos primeros capítulos presupone el conocimiento de la teoría básica de integración de Lebesgue, en base a ésta se construye el espacio de funciones L^p, se describen sus características y propiedades y culminamos con el primer teorema de representación de Riesz previa introducción al concepto de funcional lineal. En el tercer capítulo generalizamos el tratamiento anterior, analizamos los elementos básicos de teoría de integración con respecto a medidas (finitas y σ-finitas) arbitrarias, para luego seguir el esquema de construcción del espacio L^p de funciones y su respectivo teorema de representación para funcionales lineales acotados. Finalmente, en el cuarto capítulo abordamos la relación entre teoría de medida y topología, trabajamos con espacios de funciones definidas en espacios localmente compactos e introducimos el estudio de la medida de Baire para desarrollar el tercer teorema de representación. Hemos añadido un Apéndice en Análisis Real que provee de resultados importantes para el tratamiento y estudio de los dos primeros capítulos.

El esquema anterior responde a un abordaje metodológico que parte de una teoría de integración con respecto a una medida particular, en nuestro caso la medida de Lebesgue, estudiada en cursos básicos de teoría de medida, para luego Generalizar sus resultados y plantear el análisis a nivel de medidas arbitrarias. Este formato a su vez, es el seguido por numerosos textos, particularmente por aquel que ha servido de base al presente trabajo: Real Analysis de H.L. Royden (ver bibliografía).

Consideremos que nuestro trabajo aporta elementos de base para el desarrollo de cursos avanzados en teoría de medida, la relación estrecha de ésta con algunos conceptos topológicos y fundamentalmente provee conceptos básicos para el estudio serio y detenido de la teoría de la probabilidad.

Queremos finalmente dejar constancia de nuestro agradecimiento al Ing. Francisco Marroquín y al Lic. Javier Rivera Lazo por sus numerosos aportes y su entera disponibilidad a colaborar con nosotros que siempre fue más allá de la sola resposabilidad que se les asignó de asesorar nuestro trabajo.

I N D I C E

Página

CAPITULO I

ESPACIOS L^p DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Damos inicio a este capítulo con el estudio de determinados espacios de funciones y sus características distintivas. Específicamente, abordaremos el análisis de ciertos espacios de funciones de variable real.

DEFINICION 1.1

Sea p un valor tal que $1 \leq p < \infty$, una función medible f definida en $[0,1]$ se dice que pertenece al espacio L^p si:

$$\int_0^1 |f|^p < \infty$$

Más precisamente, decimos que pertenece al espacio L^p de funciones medibles definidas en $[0,1]$, denotamos

$$L^p \simeq L^p[0,1]$$

Por ejemplo, el espacio L^1 es el constituido por todas aquellas funciones integrables según Lebesgue en el intervalo $[0,1]$.

A manera de recordatorio, presentamos la siguiente:

DEFINICION 1.2

Un espacio X de funciones de variable real se denomina espacio lineal (sobre el campo real) si tiene la propiedad de *que para cada par de funciones f y g pertenecientes a X y para cada par de escalares α y β se tiene que:*

$$\alpha f + \beta g \text{ pertenece a } X$$

LEMA 1.3

Sean f y g funciones pertenecientes al espacio L^p, entonces:

$$|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

PRUEBA:

Para los casos en los cuales $f = 0$ ó $g = 0$ y aquellos en los que $f = g$ la desigualdad anterior es fácilmente verificable.

Analicemos entonces las siguientes posibilidades:

i) $|f| > |g|$

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p = \left[|f|\left(1 + \frac{|g|}{|f|}\right)\right]^p$$

$$= |f|^p\left(1 + \frac{|g|}{|f|}\right)^p$$

$$\leq 2^p|f|^p \text{ ya que } p \geq 1 \text{ y } \frac{|g|}{|f|} < 1$$

ii) $|g| > |f|$

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p = |g|^p(1 + \frac{|f|}{|g|})^p \leq 2^p|g|^p$$

en cualquier caso de los planteados

$$|f+g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p) \quad \blacktriangle$$

A partir entonces, de las definiciones y resultados previos, encontramos la primer propiedad de los espacios L^p.

PROPOSICION 1.4

Los espacios L^p son espacios lineales

PRUEBA:

En primer lugar, sea $\alpha \in IR$ y una función cualquiera del espacio L^p.

$$\int_0^1 |\alpha f|^p = \int_0^1 (|\alpha||f|)^p = \int_0^1 |\alpha|^p|f|^p = |\alpha|^p \int_0^1 |f|^p < \infty$$

ya que $f \in L^p$; de donde $\alpha f \in L^p$.

Sean ahora $f, g \in L^p$,

$$\int_0^1 |f+g|^p \leq \int_0^1 2^p(|f|^p + |g|^p) \quad \text{(en base al lema 1.3)}$$

$$\int_0^1 |f+g|^p \leq 2^p[\int_0^1 |f|^p + \int_0^1 |g|^p] < \infty$$

resulta entonces que $f + g \in L^p$ y por lo tanto L^p es un espacio lineal $\triangle$

DEFINICION 1.5

Para los elementos de un espacio L^p, definimos la función:

$$\| \ \|_p : L^p \longrightarrow \mathbb{R}_o^+$$
$$f \rightsquigarrow \|f\|_p = \{\int_0^1 |f|^p\}^{1/p}$$

A efecto de comprobar que la función anterior satisface los requerimientos asociados a una semi-norma, puntualizamos la siguiente:

PROPOSICION 1.6

Si α es una constante, entonces

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p \quad con \ f \in L^p$$

PRUEBA:

$$\|\alpha f\|_p = \{\int_0^1 |\alpha f|^p\}^{1/p} = \{\int_0^1 |\alpha|^p |f|^p\}^{1/p}$$
$$= \{|\alpha|^p \int_0^1 |f|^p\}^{1/p} = |\alpha| \{\int_0^1 |f|^p\}^{1/p}$$
$$= |\alpha| \cdot \|f\|_p \ \blacktriangle$$

PROPOSICION 1.7

Sea $f \in L^p$, $\|f\|_p = 0$ si y sólo si $f = 0$ casi por doquier.

PRUEBA:

=>) Asumamos que $\|f\|_p = 0$, es decir

$$\{\int_0^1 |f|^p\}^{1/p} = 0, \text{ de donde } \int_0^1 |f|^p = 0,$$

esto implica que $|f|^p = 0$ casi por doquier

y deducimos entonces que $f = 0$ casi por doquier

<=) El recíproco es evidente, ya que si $f = 0$ casi por doquier, entonces $|f|^p = 0$ casi por doquier, y luego

$$\int_0^1 |f|^p = 0, \text{ por lo que}$$

$$\|f\|_p = \{\int_0^1 |f|^p\}^{1/p} = 0 \qquad \blacktriangle$$

Nuestro interés es, no obstante, contar con un espacio normado. El resultado anterior presupone un problema a nuestros propósitos. Desafortunadamente, la función $(\| \ \|_p)$ definida en L^p no satisface uno de los requisitos para ser considerada como una norma, el cual es

$$\|f\|_p = 0 <=> f \equiv 0$$

solamente podemos concluir

$$\|f\|_p = 0 <=> f = 0 \text{ casi por doquier},$$

para superar tal dificultad, consideremos la siguiente:

DEFINICION 1.8

Decimos que dos funciones medibles son equivalentes si y sólo si son iguales casi por doquier.

En términos rigurosos, resulta que los elementos que constituyen el espacio L^p no son funciones, sino clases de equivalencia de funciones. No hay problema en cuanto a la definición de la función ($\| \|_p$) pues el integral de funciones iguales casi por doquier es el mismo.

Superando el problema planteado, nos resta únicamente comprobar que la función definida en L^p goza de la propiedad que para clases (de funciones) $f,g \in L^p$ se tiene que:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p$$

Estableceremos algunos resultados previos que viabilizen su comprobación:

DEFINICION 1.9

Una función ψ definida en un intervalo abierto (a,b) se dice que es convexa si y sólo si para cada $x,y \in (a,b)$ y cada λ con $0 < \lambda < 1$ se cumple que:

$$\psi(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda\psi(x)+(1-\lambda)\psi(y)$$

LEMA 1.10

Si una función g tiene una segunda derivada no negativa en *un intervalo abierto (a,b), entonces g es convexa en (a,b).*

PRUEBA

Sean $x,y \in (a,b)$, λ con $0 < \lambda < 1$.

Asumamos que $x < y$.

$g(\lambda x+(1-\lambda)y) - \lambda g(x)-(1-\lambda)g(y) =$

$\lambda[g(\lambda x+(1-\lambda)y) - g(x)]+(1-\lambda)[g(\lambda x+(1-\lambda)y)-g(y)] =$

$\lambda(1-\lambda)(y-x)g'(u) - \lambda(1-\lambda)(y-x)g'(v)$

con $x \leq u \leq \lambda x+(1-\lambda)y$, $\lambda x+(1-\lambda)y \leq v \leq y$,

entonces:

$g(\lambda x+(1-\lambda)y)-\lambda g(x)-(1-\lambda)g(y) = \lambda(1-\lambda)(y-x)(g'(u)-g'(v))$,

pero $g'(u)-g'(v) \leq 0$ pues g' es creciente en (a,b), resulta que:

$g(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$

de donde g es convexa ▲

LEMA 1.11

Sean α y β números reales no-negativos, y supongamos que $0 < \lambda < 1$, entonces

$$\alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha+(1-\lambda)\beta$$

con la igualdad satisfecha sólo si $\alpha = \beta$

PRUEBA

Observemos primero que la función

$$-\ln(x)$$

es convexa pues tiene segunda derivada no-negativa en su dominio de definición.

Luego,

$-\ell n(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta) \leq \lambda(-\ell n(\alpha)) + (1-\lambda)(-\ell n(\beta))$

en los casos en que $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$ el lema es trivial.

Siguiendo la desigualdad:

$-\ell n(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta) \leq -\ell n(\alpha^{\lambda}) - \ell n(\beta^{1-\lambda})$

$-\ell n(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta) \leq -\ell n(\alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda})$

$\ell n(\alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda}) \leq \ell n(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)$

y entonces

$$\alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$$

▲

1.12 DESIGUALDAD DE HOLDER

Sean $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p$ y $g \in L^q$ entonces $f \cdot g \in L^1$ y $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. La igualdad se satisface si y sólo si para algunas constantes no nulas a y b tenemos que $a|f|^p = b|g|^q$ casi por doquier.

PRUEBA

En primer lugar, la desigualdad es inmediata si $\|f\|_p = 0$ ó $\|g\|_q = 0$. Supongamos entonces que:

$$\|f\|_p = \|g\|_q = 1, \ \alpha = |f(t)|^p, \ \beta = |g(t)|^q,$$

$$\text{además } \lambda = \frac{1}{p}, \ 1 - \lambda = \frac{1}{q},$$

en base al lema anterior:

$$|f(t).g(t)| \leq \frac{1}{p}|f(t)|^p + \frac{1}{q}|g(t)|^q,$$

(en este caso la igualdad es satisfecha si $|f(t)|^p = |g(t)|^q$)
integrando ambos miembros de la desigualdad:

$$\int |f.g| \leq \frac{1}{p}\int |f|^p + \frac{1}{q}\int |g|^q$$

como $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ resulta que $\int |f|^p = \int |g|^q = 1$,
por tanto $\|f.g\|_1 = \int |f.g| \leq 1 = \|f\|_p . \|g\|_q$ (1)
(en este caso la igualdad se verifica si $|f(t)|^p = |g(t)|^q$cxd).

Sean ahora f y g elementos de L^p y L^q con $\|f\|_p \neq 0$ y
$\|g\|_q \neq 0$.

Entonces $\dfrac{f}{\|f\|_p}$ y $\dfrac{g}{\|g\|_q}$ tienen ambos norma igual a 1, sustituyendo en (1) se tiene:

$$\int \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} = \frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int |f.g| \leq 1$$

$$\int |f.g| \leq \|f\|_p . \|g\|_q$$

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p . \|g\|_q$$

La igualdad se satisface si:

$\dfrac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \dfrac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$ cxd, es decir $\|g\|_q^q |f|^p = \|f\|_p^p |g|^q$cxd. ▲

1.13 DESIGUALDAD DE MINKOWSKI

Si $f,g \in L^p$, entonces

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

PRUEBA

Para $p = 1$,

$\|f+g\|_1 = \int |f+g| \leq \int |f| + \int |g|$

$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

Asumamos ahora que $1 < p < \infty$,

elegimos q de tal manera que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g|$

$\leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$

integrando en ambos miembros:

$$\int |f+g|^p \leq \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \qquad (1).$$

Veamos ahora que $|f+g|^{p-1} \in L^q$,

para ello nótese que $(p-1)q = \frac{p-1}{1/q} = \frac{p-1}{1-\frac{1}{p}} = p$,

así entonces:

$$\int |f+g|^{(p-1)q} = \int |f+g|^p < \infty (\text{porque } f+g \in L^p).$$

Por tanto, por la desigualdad de Hölder:

$$\int |f+g|^{p-1}|f| \leq \|f\|_p \, \| |f+g|^{p-1}\|_q$$

$$\int |f+g|^{p-1}|g| \leq \|g\|_p \, \| |f+g|^{p-1}\|_q,$$

además $\| |f+g|^{p-1}\|_q = \{\int |f+g|^{(p-1)q}\}^{1/q}$

$$= \{\int |f+g|^p\}^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión (1)

$$\int |f+g|^p = \|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \, \|f+g\|_p^{p/q} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p/q}$$

$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$ ya que $\frac{p}{q} = p-1$,

y entonces:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

▲

Por la desigualdad de Minkowski y los hechos que:

$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$,

$\|f\|_p \iff f = 0$ (en el sentido de clases de equivalencia),

afirmamos que $L^p (1 \leq p < \infty)$ es un espacio lineal normado.

Nos resta plantear el caso de los espacios L^p para $p = \infty$.

DEFINICION 1.14

Sea f una función real medible, el supremo esencial de la función f se define:

$$\sup \operatorname{esc} f = \inf\{M/\mu\{t/f(t) > M\} = 0\},$$

es decir, el valor M más pequeño de manera que

$$f(t) \leq M \text{ casi por doquier.}$$

DEFINICION 1.15

Si f es una función real medible, se define

$$\|f\|_{\infty} = \sup \text{esc} \, |f| \quad y$$

el espacio L^{∞} es el conjunto de todas aquellas funciones (más precisamente clases) tales que:

$$\|f\|_{\infty} < \infty$$

En otros términos, el espacio L^{∞} es aquel constituido por todas aquellas clases de funciones medibles acotadas en el intervalo $[0,1]$, o más bien por todas aquellas funciones medibles que están acotadas excepto en un subconjunto de medida cero (identificando funciones equivalentes).

LEMA 1.16

L^{∞} es un espacio lineal normado

PRUEBA

i) Sean f y g clases de funciones en L^{∞},
observemos que:
$|f+g| \leq |f|+|g| \leq \|f\|_{\infty}+\|g\|_{\infty}$ casi por doquier,
y entonces:
$\|f+g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}+\|g\|_{\infty}$ por definición de $\|f+g\|_{\infty}$,

por tanto $f+g \in L^{\infty}$.

ii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in L^{\infty}$

$$\|\alpha f\|_{\infty} = \text{sup esc } |\alpha f|$$

$$= \inf\{M/\mu\{t/|(\alpha f)(t)| > M\} = 0\}$$

$$= \inf\{M/\mu\{t/|f(t)| > \frac{M}{|\alpha|}\} = 0\}$$

Sea $L = \dfrac{M}{|\alpha|}$, entonces:

$$\|\alpha f\|_{\infty} = \inf\{|\alpha|L/\mu\{t/|f(t)| > L\} = 0\}$$

$$= |\alpha| \inf\{L/\mu\{t/|f(t)| > L\} = 0\}$$

$$= |\alpha| \text{ sup esc} |f|$$

$$= |\alpha| \|f\|_{\infty}$$

iii) Sea $f \in L^{\infty}$,

$\|f\|_{\infty} = 0 \Rightarrow |f| = 0$ casi por doquier

$\Rightarrow f = 0$ casi por doquier,

el recíproco es evidente:

$$f = 0 \Rightarrow \|f\|_{\infty} = 0$$

▲

Para completar este primer análisis del espacio L^{∞}, establecemos las siguientes proposiciones que involucran a los espacios L^p en general $(1 \leq p \leq \infty)$.

PROPOSICION 1.17

Si $f \in L^1$ y $g \in L^{\infty}$, entonces

$$\int |f \cdot g| \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

PRUEBA

Sea un valor M tal que $|g(t)| \leq M$ casi por doquier,

$|f.g| = |f|.|g| \leq M|f|$ casi por doquier,

integrando: $\int |f.g| \leq M \int |f|$.

de donde

$$\int |f.g| \leq \inf\{M / |g(t)| \leq M \text{ cxd}\}. \int |f|$$

$$\int |f.g| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

▲

PROPOSICION 1.18

Sea f una función medible acotada en el intervalo $[0,1]$.
Entonces $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

PRUEBA

Sabemos que $|f|^p \leq \|f\|_\infty^p$ casi por doquier,

$$\int_0^1 |f|^p \leq \|f\|_\infty^p,$$

y entonces:

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \qquad (1).$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$, $A = \{t \in [0,1] / |f(t)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$,

luego:

$$\int_0^1 |f|^p \geq \int_A |f|^p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p . \mu(A),$$

$$\underline{\mathrm{Lim}}_{p\to\infty} \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \cdot \mathrm{Lim}_{p\to\infty} (\mu(A)^{1/p}),$$

como $\mu(A) > 0$ por definición de $\|f\|_\infty$ y la desigualdad se verifica para todo $\varepsilon > 0$, entonces

$$\underline{\mathrm{Lim}}_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty \quad (2)$$

De (1) y (2), $\mathrm{Lim}_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

▲

CONVERGENCIA Y COMPLETITUD EN LOS ESPACIOS L^p

DEFINICION 1.19

Una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ *en un espacio lineal normado se dice que converge a un elemento* f *en el espacio si, dado* $\varepsilon > 0$, *existe un entero positivo* N *tal que para todo* $n > N$ *tenemos* $\|f-f_n\| < \varepsilon$. *Si* f_n *converge a* f *escribimos*

$$\mathrm{Lim}_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{ó} \quad f_n \to f.$$

Una manera alternativa de formular la convergencia de f_n a f deriva del hecho que $f_n \to f$ si $\|f_n - f\| \to 0$. Por tanto, esta última expresión es también indicativa de la convergencia de f_n a f.

En nuestro caso particular, la convergencia en el espacio L^p, $1 \leq p < \infty$, es a menudo referida como "convergencia en media" de orden p. Entonces tendremos que una sucesión de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ se dice que converge en media de orden p a f si $f \in L^p$ y $\|f-f_n\|_p \to 0$.

Restaría ahora analizar el tipo particular de convergencia que se sucede en el espacio L^∞; a tal efecto, establecemos la siguiente proposición que evidencia que la convergencia en L^∞ es casi convergencia uniforme.

PROPOSICION 1.20

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones en L^∞, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en L^∞ si y sólo si existe un conjunto A de medida cero tal que f_n converge uniformemente a f en A^c.

PRUEBA

=>) Supongamos $f_n \to f$ en L^∞, es decir $\|f_n-f\|_\infty \to 0$, es decir que dado m, existe N, con m, $N \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$n > N \Rightarrow \|f_n-f\|_\infty < \frac{1}{m},$$

entonces $|f_n(t) - f(t)| < \frac{1}{m}$ casi por doquier, para $n > N$, o bien $|f_n(t)-f(t)| < \frac{1}{m}$, con $t \in A_m^c$, $\mu(Am) = 0$.

Sea ahora $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} Am$, $\mu(A) = 0$,

Y por tanto $|f_n(t)-f(t)| < \frac{1}{m}$ para todo m,

con $t \in A^c$ y $n > N$,

de donde $f_n \to f$ uniformemente en A^c.

<=) Sea un conjunto A, con $\mu(A) = 0$, y

$f_n \to f$ uniformemente en A^c,

es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$n > N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ con $t \in A^c$,

o sea $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ casi por doquier,

luego $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \; \forall n > N$,

entonces $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

▲

Con el objeto de abordar el problema de la completitud en los espacios L^p, recordamos las siguientes definiciones.

DEFINICION 1.21

Una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ en un espacio lineal normado es una sucesión de Cauchy si, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que para todo $n \geq N$ y $m \geq N$ tenemos que:

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

Igualmente, una definición análoga a la anterior se establece en los términos de que $\|f_n - f_m\| \to 0$ con $n \geq N$ y $m \geq N$. Se verifica fácilmente que cada sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

DEFINICION 1.22

Un espacio lineal normado es llamado completo si cada sucesión de Cauchy converge en el espacio, esto es, si para cada sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\geq 1}$ en el espacio, existe f en el *espacio tal que $f_n \to f$. Un espacio lineal normado completo es llamado espacio de Banach.*

DEFINICION 1.23

Una serie $< (f_n)_{n\geq 1}, (S_n)_{n\geq 1} >$ en un espacio lineal normado se dice que es sumable a la suma S si S está en el espacio y la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\geq 1}$ converge a S, es decir $\| S - \sum_{i=1}^{n} f_i \| \to 0$,

en este caso escribimos $S = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$.

A su vez, la serie $< (f_n)_{n\geq 1}, (S_n)_{n\geq 1} >$ es absolutamente sumable si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| f_i \| < \infty$$

En el caso de una serie de números reales se sabe que sumabilidad absoluta implica que la serie es sumable. Esto no es cierto en general para una serie de elementos en un espacio lineal normado, la siguiente proposición muestra que la implicación se satisface si el espacio es completo.

PROPOSICION 1.24

Un espacio lineal normado X es completo si y sólo si cada serie absolutamente sumable es sumable.

PRUEBA

=>) Sea X completo y $< (f_n)_{n\geq 1}, (S_n)_{n\geq 1} >$ una serie absolu tamente sumable de elementos de X.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| = M < \infty$, se deduce que la serie de números reales < $(\|f_n\|)_{n\geq 1}$, $(S_n^*)_{n\geq 1}$ > es convergente, y por lo tanto de Cauchy.

Sea ahora $\varepsilon > 0$, para $n \geq m \geq N$, tenemos

$$\|S_n - S_m\| = \|\sum_{i=1}^{n} f_i - \sum_{i=1}^{m} f_i\| = \|\sum_{i=m+1}^{n} f_i\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|f_i\|,$$

$\|S_n - S_m\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\| - \sum_{i=1}^{m} \|f_i\| = S_n^* - S_m^* < \varepsilon$ (por ser de Cauchy)

Entonces la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy y debe por lo tanto converger a un elemento S en X dado que X es completo; la serie es por lo tanto sumable a S.

<=) Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X.
Para cada entero k existe un entero n_k tal que para todo $n \geq n_k$ y $m \geq n_k$ tenemos que

$$\|f_n - f_m\| < 2^{-k}$$

Escojamos los n_k de tal forma que $n_{k+1} > n_k$, entonces $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ es una subsucesión de $(f_n)_{n\geq 1}$; sea ahora

$$g_1 = f_{n_1}$$
$$g_2 = f_{n_2} - f_{n_1}$$
$$\vdots$$
$$g_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}, \text{ para } k > 1,$$

obtenemos entonces la serie $< (g_k)_{k\geq 1}, (S_k^*)_{k\geq 1} >$

donde $S_k^* = f_{n_k}$,

Además: $\|g_k\| = \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\| < 2^{-k+1}$ para $k > 1$,

por tanto $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| < \|g_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k+1} = \|g_1\| + 1$

Entonces la serie $< (g_k)_{k\geq 1}, (S_k^*)_{k\geq 1} >$ es absolutamente sumable, y por hipótesis existe $f \in X$ al cual converge la sucesión de sumas parciales, esto es $S_k^* \to f$,
como $S_k^* = f_{n_k}$, la subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge a f.

Nos resta probar que la sucesión original $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f. Como es una sucesión de Cauchy tenemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe N, tal que para todo $n \geq N$ y $m \geq N$ se tiene

$$\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

como $f_{n_k} \to f$, existe K, tal que para todo $k \geq K$ tenemos

$$\|f_{n_k} - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tomemos $k > K$ y $n_k \geq N$, entonces

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall_n \geq N.$$

Luego, para todo $n > N$ se tiene

$\|f_n - f\| < \varepsilon$ y por tanto $f_n \to f$,

de donde el espacio X es completo ▲

1.25 TEOREMA DE RIESZ - FISCHER

Los espacios L^p son completos

PRUEBA

Asumamos en primer lugar $1 \leq p < \infty$.

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en L^p con

$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| = M < \infty$, es decir que la serie

$< (f_n)_{n\geq 1}, (S_n)_{n\geq 1} >$ es absolutamente sumable.

Definamos ahora funciones g_n, así

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$$

Por la desigualdad de Minkowski, observamos:

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq M$$

es decir $\int_0^1 (g_n)^p \leq M^p$.

Para cada x, $(g_n(x))_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de valores reales extendidos y debe por lo tanto converger a un real extendido $g(x)$.

La función g así definida es medible, como g_n es medible y no negativa, también g_n^p es medible y $g_n^p \geq 0$, además

$$g_n^p(x) \to g^p(x),$$

por el lema de Fatou:

$$\int_0^1 g^p \leq \underline{\mathrm{Lim}} \int_0^1 g_n^p, \text{ o bien}$$

$$\int_0^1 g^p \leq M^p,$$

entonces g^p es integrable y por tanto $g(x)$ es finita casi por doquier.

Para aquellos x tal que $g(x)$ es finito, o sea

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty.$$

la serie $< (f_k(x))_{k\geq 1}, (S_k(x))_{k\geq 1} >$ es absolutamente sumable,

como esta es una serie de números reales, debe entonces ser sumable a un número real $S(x)$.

Si hacemos $S(x) = 0$ para aquellos x donde $g(x) = \infty$, tenemos definida una función S tal que $S_n(x) \to S(x)$ casi por doquier,

$$\text{con } S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Por tanto, la función S es medible,

además $|S_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leq g(x)$,

de donde $|S(x)| \leq g(x)$ y

$$|S(x)|^p \leq g^p(x)$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 |S|^p \leq \int_0^1 g^p \leq M^p.$$

Por consiguiente, S pertenece a L^p y tenemos que

$$|S_n(x) - S(x)|^p \leq 2^p[|S_n(x)|^p + |S(x)|^p]$$

$$|S_n(x) - S(x)|^p \leq 2^{p+1}[g(x)]^p,$$

como $2^{p+1}g^p$ es integrable y $|S_n(x) - S(x)|^p \to 0$ casi por doquier, tenemos por el teorema de convergencia de Lebesgue que:

$$\text{Lim} \int_0^1 |S_n - S|^p = 0, \quad \text{es decir,}$$

$$\int_0^1 |S_n - S|^p \to 0.$$

Entonces $\|S_n - S\|_p^p \to 0$, lo que a su vez implica que

$$\|S_n - S\|_p \to 0.$$

Por tanto, la serie $< (f_n)_{n\geq 1}, (S_n)_{n\geq 1} >$ es sumable a la suma $S \in L^p$.

En virtud de la proposición anterior (1.24), $L^p (1 \leq p < \infty)$

es completo.

Para probar que L^∞ es completo, sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en L^∞, es decir, para todo $n \geq N$ y $m \geq N$.

$$\|f_n - f_m\|_\infty \to 0,$$

por definición de $\| \ \|_\infty$ se tiene que:

$|f_n(t) - f_m(t)| \to 0$ uniformemente en A^c, con $\mu(A) = 0$, como en los reales cada sucesión de Cauchy es convergente entonces $(f_n(t))$ converge a un límite $f(t)$ y la convergencia es uniforme en A^c.

Si definimos $f(t) = 0$ para $t \in A$, entonces $f \in L^\infty$ y por definición de convergencia en L^∞:

$$(f_n)_{n\geq 1} \text{ converge a } f \text{ en } L^\infty,$$

por consiguiente L^∞ es completo. ▲

CAPITULO II

FUNCIONALES LINEALES ACOTADOS EN LOS ESPACIOS L^p

En el presente capítulo, abordaremos el estudio de funciones definidas sobre espacios lineales normados y sus propiedades. Particularmente estaremos interesados en los espacios lineales estudiados en el capítulo precedente: los espacios L^p de funciones de variable real.

En nuestro desarrollo, estableceremos algunas definiciones preliminares y resultados intermedios que nos conducirán a lo que hemos denominado por cuestión de orden "Primer Teorema de Representación de Riesz".

DEFINICION 2.1

Se denomina funcional lineal en un espacio lineal normado X a una función

$F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $F(\alpha f+\beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$
para todo par $f, g \in X$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

DEFINICION 2.2

Decimos que el funcional lineal F es acotado, si existe una *constante* M *tal que*

$$|F(f)| \leq M\|f\|, \text{ para todo } f \in X.$$

La más pequeña de éstas constantes M *para la cual es satisfecha la desigualdad anterior es llamada la norma de* F*, así:*

$$\|F\| = \operatorname{Sup} \frac{|F(f)|}{\|f\|},$$

donde f *varía sobre todos los valores distintos de cero en* X.

Habría que destacar que la función anterior ($\| \ \|$) satisface los requisitos asociados a la tradicional noción de norma en espacios lineales (normados).

Antes de conocer el primer resultado importante que involucra funcionales lineales establecemos el siguiente lema que nos será de utilidad en el caso de funciones en L^1 y L^∞.

LEMA 2.3

Sea g *una función integrable en el intervalo* $[0,1]$*, entonces existe una función medible acotada* f *tal que* $\|f\|_\infty \neq 0$ *y*

$$\int_0^1 fg = \|g\|_1 \, \|f\|_\infty$$

PRUEBA

Sea la función $f = \operatorname{sgn}(g)$,

$$\text{es decir } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } g(x) > 0 \\ 0, & \text{si } g(x) = 0 \\ -1, & \text{si } g(x) < 0, \end{cases}$$

f es medible y acotada, además

$$\|f\|_\infty = \text{Sup esc}\,|f| = 1,$$

entonces:

$$\int_0^1 f.g = \int_0^1 g.\operatorname{sgn}(g) = \int_0^1 |g| = \|g\|_1 . 1$$
$$= \|f\|_\infty . \|g\|_1 \qquad \blacktriangle$$

LEMA 2.4

Sea g una función medible acotada, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función integrable f tal que:

$$\int_0^1 f.g \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon)\|f\|_1$$

PRUEBA

Sea el conjunto $E = \{x \varepsilon [0,1] / g(x) \geq \|g\|_\infty - \varepsilon\}$

y hacemos $f = \chi_E$,

claramente f es integrable ya que $\int_0^1 |f| = m(E)$.

$$y \int_0^1 f.g = \int_0^1 g.\chi_E = \int_E g \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon)\, m(E)$$

$$\text{entonces} \quad \int_0^1 f.g \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon).\|f\|_1 \qquad \blacktriangle$$

PROPOSICION 2.5

Cada función g en L^q define un funcional lineal acotado F en L^p así:

$$F(f) = \int_0^1 f.g,$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, además tenemos que $\|F\| = \|g\|_q$

PRUEBA

Sea $g \in L^q$, verifiquemos que $F(f) = \int_0^1 f.g$ define un funcional lineal sobre el espacio L^p.

Sean $f, h \in L^p$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$F(\alpha f + \beta h) = \int_0^1 (\alpha f + \beta h).g = \int_0^1 (\alpha fg + \beta hg)$$

$$= \int_0^1 \alpha fg + \int_0^1 \beta hg = \alpha \int_0^1 fg + \beta \int_0^1 hg$$

$$= \alpha F(f) + \beta F(h),$$

así F es lineal.

Sabemos por la desigualdad de Hölder que:

$$\left|\int_0^1 fg\right| \leq \int_0^1 |f.g| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

$$|F(f)| \leq \|g\|_q . \|f\|_p \;,$$

tenemos que F es acotado y que

$$\|F\| \leq \|g\|_q . \quad (1)$$

Probemos ahora que $\|F\| = \|g\|_q$ en primer término para $1 < p < \infty$.

Hacemos $f = |g|^{q/p}Sgn(g)$, entonces $|f| = |g|^{q/p}$, es decir $|f|^p = |g|^q$ y además

$$f.g = |g|^{q/p}Sgn(g).g = |g|^{q/p}.|g| = |g|^{\frac{q}{p}+1},$$

pero $\frac{q}{p} + 1 = q(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) = q.$

Así $f.g = |g|^q = |f|^p$,

$$F(f) = \int f.g = \int |g|^q = (\|g\|_q)^q,$$

también $\int |f|^p = \int |g|^q$,

por tanto $(\|f\|_p)^p = (\|g\|_q)^q$,

$$\|f\|_p = (\|g\|_q)^{q/p}.$$

Así:

$$\|g\|_q \cdot \|f\|_p = \|g\|_q (\|g\|_q)^{q/p} = (\|g\|_q)^{1+\frac{q}{p}} = (\|g\|_q)^q,$$

luego $F(f) = (\|g\|_q)^q = \|g\|_q \cdot \|f\|_p,$

$$|F(f)| = \|g\|_q \cdot \|f\|_p.$$

Si ahora $\|f\|_p \neq 0$ entonces $\dfrac{|F(f)|}{\|f\|_p} = \|g\|_q,$

lo anterior es cierto para nuestra función f particular, debe tenerse entonces que

$$\|F\| \geq \|g\|_q,$$

que juntamente con el resultado (1) se sigue la conclusión deseada.

Nos resta evaluar el caso de los espacios L^1 y L^∞, para ello sea $g \in L^1$,

en base al lema 2.3 existe $f \in L^\infty$ tal que

$$\int_0^1 f.g = \|g\|_1 . \|f\|_\infty$$

$$|F(f)| = \|g\|_1 . \|f\|_\infty$$

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|_\infty} = \|g\|_1$$

y entonces $\|F\| \geq \|g\|_1$, la desigualdad de Hölder completa el hecho que $\|F\| = \|g\|_1$.

Si por otro lado tenemos $g \in L^\infty$, por lema 2.4 sabemos que pa ra cada $\varepsilon > 0$ existe una función $f \in L^1$ tal que:

$$\int_0^1 f.g \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon).\|f\|_1,$$

es decir $|F(f)| \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon)\|f\|_1$

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|_1} \geq \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Quiere decir que para cada $\varepsilon > 0$: $\|F\| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$, de donde $\|F\| \geq \|g\|_\infty$ y de nuevo recurriendo a Holder $\|F\| = \|g\|_\infty$. ▲

Nuestro propósito es ahora el establecer el recíproco de la proposición anterior, es decir, obtener cada funcional lineal acotado en L^p en términos de la representación formulada. Para ello veamos el siguiente lema:

LEMA 2.6

Sea g una función integrable en $[0,1]$ y supongamos que exista una constante M tal que

$$\left|\int_0^1 f.g\right| \leq M.\|f\|_p$$

para toda función medible acotada f,
entonces g está en L^q y $\|g\|_q \leq M$.

PRUEBA

Asumanos primero que $1 < p < \infty$,

definimos una sucesión de funciones medibles acotadas de la siguiente manera:

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } |g(x)| \leq n \\ 0, & \text{si } |g(x)| > n \end{cases}$$

hacemos además $f_n = |g_n|^{q/p}.\mathrm{Sgn}(g_n)$,

ahora $|f_n| = |g_n|^{q/p}$, de donde

$$|f_n|^p = |g_n|^q = f_n \cdot g_n = f_n \cdot g,$$

además $\|f_n\|_p = (\|g_n\|_q)^{q/p}$, por lo tanto

$$(\|g_n\|_q)^q = \int_0^1 |f_n|^p = \int_0^1 f_n \cdot g \leq M\|f_n\|_p = M(\|g_n\|_q)^{q/p}.$$

Así $(\|g_n\|_q)^{q-\frac{q}{p}} \leq M$ y dado que $q - \frac{q}{p} = q(1-\frac{1}{p}) = q.\frac{1}{q} = 1$,

tenemos $\|g_n\|_q \leq M$ y

$$\int_0^1 |g_n|^q < M^q.$$

Notemos que $|g_n|^q$ converge a $|g|^q$ casi por doquier,

luego por el lema de Fatou:

$$\int_0^1 |g|^q \leq \underline{\mathrm{Lim}} \int_0^1 |g_n|^q \leq M^q .$$

Luego $g \in L^q$ y $\|g\|_q \leq M$.

Para el caso p = 1, sea el conjunto

$$E = \{x / |g(x)| \geq M + \varepsilon\}, \text{ con } \varepsilon > 0$$

y hagamos $f = \mathrm{Sng}(g).\chi_E$, entonces

$$\|f\|_1 = m(E) \quad y \quad M.m(E) = M.\|f\|_1 \geq \left|\int_0^1 f.g\right|$$

pero $f.g = |g|.\chi_E$, entonces

$$\int_0^1 f.g \geq (M+\varepsilon)m(E),$$

de donde $M.m(E) \geq (M+\varepsilon).m(E)$,

esto es cierto sólo si $m(E) = 0$

por tanto $\|g\|_\infty \leq M$ ▲

Procedemos a formular una serie de hechos y resultados que intervendrán en el desarrollo del teorema de representación.

PROPOSICION 2.7

Sea f una función medible no-negativa. Entonces, existe una sucesión (Φ_n) de funciones simples medibles con $\Phi_{n+1} \geq \Phi_n$, tal que $f = \mathrm{Lim}\, \Phi_n$ en cada punto de X.

PRUEBA

Para cada n, $E_{nk} = \{x : (k-1)/2^n < f(x) \leq k/2^n\}$, $k = 1,2,\ldots,n2^n$

y $F_n = \{x : f(x) > n\}$.

Hacemos $\Phi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + n\chi_{F_n}$,

nótese Φ_n es simple y medible ya que los conjuntos $E_{n,k}$ y F_n son medibles.

También, puesto que la disección del rango de f que nos da Φ_{n+1} es un refinamiento del que nos da Φ_n, es por tanto fácilmente observable que $\Phi_{n+1}(x) \geq \Phi_n(x)$ para cada x.

Si f(x) es finito $x \in C F_n$ para algún n suficientemente grande y entonces:

$$|f(x) - \Phi_n(x)| \leq 2^{-n},$$

de donde $\Phi_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Si $f(x) = \infty$, entonces $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$,

luego $\Phi_n(x) = n$ para todo n,

por tanto $\Phi_n(x) \to f(x)$ ▲

PROPOSICION 2.8

Si $f_1, f_2, \ldots, f, g$ son funciones medibles, $|f_n| \leq g$ para todo n, donde $|g|^p$ es integrable y $f_n \to f$ cxd, entonces $|f|^p$ es integrable y

$$\int_0^1 |f_n - f|^p \to 0.$$

PRUEBA

Tenemos que $|f_n|^p \leq |g|^p$ para todo n,

por consiguiente $|f|^p \leq |g|^p$ y así $|f|^p$ es integrable.

También $|f_n - f|^p \leq (|f_n|+|f|)^p \leq (2|g|)^p$,

esta última función también integrable.

A su vez $|f_n - f|^p \to 0$ cxd,

ahora, en base al teorema de convergencia dominada:

$$\int_0^1 |f_n - f|^p \to 0 \qquad \blacktriangle$$

LEMA 2.9

Dada una función simple Φ *definida en* $[a,b]$, *existe una función escalón* g *en* $[a,b]$ *tal que* $g(x) = \Phi(x)$ *excepto en un conjunto de medida menor que* ε.

PRUEBA

Φ es una función simple,

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$$

$$\text{con} \quad \bigcup_{i=1}^{n} E_i = [a,b].$$

Para cada uno de los conjuntos medibles E_i existen intervalos abiertos $I_1,\dots,I_k$ tales que si $G_i = \bigcup_{r=1}^{k} Ir$ entonces

$$m(E_i \,\Delta\, G_i) < \frac{\varepsilon}{n} \quad (\text{prop. } 3.15(1)).$$

Tenemos que x_{G_i} es una función escalón

$$i = 1,2,\dots,n.$$

Hacemos $g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{G_i}(x)$,

se tiene

$$\Phi(x) - g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_{E_i} - x_{G_i})(x)$$

$\Phi(x) - g(x) = 0$ excepto en el conjunto

$$A = \{x \mid x \in (E_i \,\Delta\, G_i) \text{ para algún } i\},$$

con $m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i \,\Delta\, G_i) < \varepsilon$

y además g es una función escalón ▲

TEOREMA 2.10

Sea $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ existe una función simple $g \in L^p$ tal que $\|f-g\|p < \varepsilon$

PRUEBA

Asumanos que $f \geq 0$ (en cualquier caso trabajamos con

$(f^+ \;\; y \;\; f^-)$.

Por proposición 2.7 existe una sucesión creciente de funciones simples no negativas $(\phi_n)_{n\geq 1}$ tal que $\phi_n \to f$ en cada punto.

Sabemos entonces que $|\phi_n| \leq f$ para todo n;
además $|f|^p$ es integrable,
en base a la proposición 2.8:

$$\int_0^1 |\Phi_n - f|^p \to 0,$$

por tanto para el ε dado, existe N tal que

$$\int_0^1 |\Phi_N - f|^p < \varepsilon^p,$$

$$\|\Phi_N - f\|_p < \varepsilon \quad \text{con } \Phi_N \in L^p \text{ pues}$$

$$|\Phi_N|^p \leq |f|^p \qquad \blacktriangle$$

COROLARIO 2.11

Sea $f \in L^p$, dado $\varepsilon > 0$ existe una función escalón $h \in L^p$ tal que $\|f-h\|_p < \varepsilon$.

TEOREMA 2.12

Sea $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ existe una función conti-

nua $t \in L^p$ tal que $\|f-t\|_p < \varepsilon$.

PRUEBA

Por teorema 2.10 es suficiente probar que cualquier función característica x_A con A medible perteneciente a L^p puede ser aproximada por una función contínua de valor absoluto a lo sumo 1.

Sabemos que si $x_A \in L^p$ entonces $m(A) < \infty$, por proposición 3.15 (Royden) existe un conjunto cerrado $C \subset A$ y un conjunto abierto $V \supset A$ tal que:

$$m(A) < m(C) + \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}}$$

$$m(V) < m(A) + \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}} \,,$$

es decir:

$$m(V-C) = m(V)-m(C) < m(A) + \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}} - m(A) + \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}}$$

$$m(V-C) < e^p.2^{-p}.$$

Sea g una función continua

$$g: X \longrightarrow [0,1]$$

con $g = 1$ en C y $g = 0$ en V^c,

g existe por el lema de Urysohn (prop. A4.2 (2)).

Entonces

$$\int_0^1 |x_A - g|^p = \int_{\{x_A \neq g\}} |x_A - g|^p,$$

pero $\{x_A \neq g\} \subset V-C$

y $|x_A - g| \leq 2.$

Luego $\|x_A - g\|_p^p = \int_0^1 |x_A - g|^p$

$$= \int_{\{x_A \neq g\}} |x_A-g|^p \leq 2^p m(V-C) < \varepsilon^p.$$

De donde $\|x_A-g\|_p < \varepsilon$,

además como $g = (g-x_A)+x_A$

concluimos que $g \varepsilon L^p$. ▲

Después de haber precisado que los conjuntos de funciones (clases) simples, escalón y continua son densos en los espacios L^p, tenemos los elementos necesarios para abordar el:

2.13 PRIMER TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ

Sea F un funcional lineal acotado en L^p, $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una función g en L^q tal que:

$$F(f) = \int f \cdot g$$

$$y \quad \|F\| = \|g\|_q .$$

PRUEBA

Sea x_s la función característica del intervalo $[o,s]$ $(o < s \leq 1)$.

Para cada s el valor $F(x_s)$ es un número real $\phi(s)$, y éste define una función ϕ en $[0,1]$.

Probemos ahora que ϕ así definida es absolutamente continua. Sea $\{(s_i, s_i')\}$ cualquier colección de intervalos disjuntos de longitud total menor que δ.

Entonces $\sum_i |\phi(s_i') - \phi(s_i)| = F(f)$, donde

$$f = \sum_i (x_{s_i'} - x_{s_i}).\mathrm{sgn}(\phi(s_i') - \phi(s_i)).$$

Así $|f|^p = \sum_i (x_{s_i'} - x_{s_i})$, además

$$\int_0^1 |f|^p \leq \int_0^1 (\sum_i (x_{s_i'} - x_{s_i})) = \sum_i (\int_0^1 (x_{s_i'} - x_{s_i})$$

$$= \sum \ell(s_i, s_i') < \delta.$$

entonces $(\|f\|_p)^p < \delta$.

Tenemos ahora que:

$$\sum_i |\phi(s_i') - \phi(s_i)| = F(f) \leq \|F\| . \|f\|_p$$
$$< \|F\| . \delta^{1/p},$$

si tomamos $\delta = (\frac{\varepsilon}{\|F\|})^p$ tendríamos que:

$$\sum_i |\phi(s_i') - \phi(s_i)| < \varepsilon.$$

así ϕ es absolutamente continua.

Por teorema A4.5 existe una función g integrable en $[0,1]$ tal que $\phi(s) = \int_0^s g$, es decir

$$F(x_s) = \int_0^s g = \int_0^1 g . x_s .$$

Dado que cualquier función escalón ψ en $[0,1]$ es (excepto en un número finito de puntos) una combinación lineal apropiada

$$\sum_i c_i x_{s_i} .$$

Debemos tener entonces

$F(\psi) = \int_0^1 g\psi$ para cada función escalón ψ por la linealidad de F y del integral,

en efecto:

$$F(\psi) = F(\sum c_i x_{s_i}) = \sum c_i F(x_{s_i}) = \sum (c_i \int_0^1 x_{s_i} \cdot g)$$

$$= \sum \int c_i x_{s_i} \cdot g = \int \sum (c_i x_{s_i} \cdot g)$$

$$= \int (\sum c_i x_{s_i}) \cdot g = \int \psi \cdot g$$

Sea ahora f una función medible acotada definida en $[0,1]$. Por corolario 2.11 existe una sucesión $(\psi_n)_{n\geq 1}$ de funciones escalón que converge casi por doquier a f.

Como la sucesión $(|f-\psi_n|^p)$ es uniformemente acotada y tiende a cero casi por doquier, el teorema de convergencia acotada implica que $\|f-\psi_n\|_p \to 0$.

Dado que F es acotado y

$$|F(f) - F(\psi_n)| = |F(f-\psi_n)| \leq \|F\| \|f-\psi_n\|_p$$

concluimos que $\operatorname{Lim} F(\psi_n) = F(f)$.

Como $g\psi_n$ es siempre menor que $|g|$ veces la cota uniforme de la sucesión (ψ_n) tenemos

$\int_0^1 f.g = \operatorname{Lim} \int_0^1 g.\psi_n$ en base al teorema de convergencia de Lebesgue.

Consecuentemente, debemos tener

$\int_0^1 f.g = F(f)$ para cada función f medible y acotada.

Dado que $|F(f)| \leq \|F\| \|f\|_p$. se sigue por lema 2.6 que $g \in L^q$ y $\|g\|_q \leq \|F\|$.

Nos resta mostrar que $F(f) = \int_0^1 f.g$ para cada $f \in L^p$.

Sea f una función arbitraria en L^p, por corolario 2.11 existe para cada $\varepsilon > 0$ una función escalón ψ tal que

$$\|f - \psi\|_p < \varepsilon,$$

como ψ es acotada tenemos

$$F(\psi) = \int_0^1 \psi.g.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left|F(f) - \int_0^1 f.g\right| &= \left|F(f) - F(\psi) + \int_0^1 \psi.g - \int_0^1 f.g\right| \\
&\leq |F(f) - F(\psi)| + \left|\int_0^1 \psi g - \int_0^1 f.g\right| \\
&\leq |F(f - \psi)| + \left|\int_0^1 (\psi - f).g\right| \\
&\leq \|F\| \|f - \psi\|_p + \|g\|_q \|f - \psi\|_p \\
&\leq (\|F\| + \|g\|_q).\varepsilon
\end{aligned}$$

Como ε es un número arbitrario, debemos tener

$$F(f) = \int_0^1 f.g$$

y $\|F\| = \|g\|_q$ por proposición 2.5 ▲

C A P I T U L O I I I

ESPACIOS L^P DE FUNCIONES MEDIBLES DEFINIDAS EN ESPACIOS DE MEDIDA ARBITRARIA

En los dos capítulos estudiados hemos aplicado las propiedades de la medida y la integral de Lebesgue a un espacio particular de funciones, construido precisamente a partir de aquellas.

Nuestro propósito ahora es apoyarnos en una teoría de integración que satisfaga las propiedades fundamentales de la medida e integral de Lebesgue y que sea aplicable a cualquier sistema que verifique los axiomas dados.

Para ello, procedemos a desarrollar esta teoría, que fundamente luego la construcción de un espacio completo.

Omitimos algunas pruebas por considerar que siguen el mismo esquema que las desarrolladas en los capítulos anteriores y en la Bibliografía señalada al final, para el caso de la teoría de integración de Lebesgue. Para ello basta remitirse a estas pruebas previas y observar que simplemente se hace uso de las propiedades básicas que requerimos de una función de conjuntos para ser considerada como medida.

1. ESPACIOS DE MEDIDA

DEFINICION 3.1.1

Entenderemos por un espacio medible a un par $(X, \mathcal{B})$, el cual consiste de un conjunto X y una σ-álgebra $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X. Un subconjunto A de X es llamado medible (o medible respecto a $\mathcal{B}$) si $A \in \mathcal{B}$

DEFINICION 3.1.2

Entenderemos por una medida μ en un espacio medible $(X, \mathcal{B})$ una función de conjuntos no-negativa definida para todos los conjuntos de $\mathcal{B}$ y que satisface: $\mu(\phi) = 0$ y

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

para cualquier sucesión (E_i) de conjuntos medibles disjuntos. Por un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, entenderemos un espacio medible $(X, \mathcal{B})$ junto con una medida μ definida en $\mathcal{B}$.

La segunda propiedad es referido como que μ es contablemente aditiva. A partir de esta se sigue que μ es finitamente aditiva, esto es:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i),$$

para conjuntos disjuntos E_i pertenecientes a $\mathcal{B}$, pues basta considerar $E_i = \phi$ para $i > N$.

PROPOSICION 3.1.3

a) *Si* $A \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$, *y* $A \subset B$ *entonces*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

b) *Si* $E_i \in \mathcal{B}$, $\mu(E_1) < \infty$ *y* $E_i \supset E_{i+1}$, *entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

c) *Si* $E_i \in \mathcal{B}$, *entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

DEFINICION 3.1.4

Una medida μ *es llamada finita si* $\mu(X) < \infty$. *Es denominada* σ-*finita si existe una sucesión* (X_n) *de conjuntos en* $\mathcal{B}$ *tal que* $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

DEFINICION 3.1.5

Un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *se dice que es completo si* $\mathcal{B}$ *contiene todos los subconjuntos de conjuntos de medida ce-*

ro, esto es, si $B \in \mathcal{B}$, $\mu(B) = 0$, *y* $A \subset B$ *entonces* $A \in \mathcal{B}$.

2. FUNCIONES MEDIBLES

DEFINICION 3.2.1

Sea f *una función de valores reales extendidos definida en* X. *Entonces se dice que* f *es medible si* $\forall_\alpha$,

$$\{x : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$$

Es de hacer notar que el hecho de que una función es medible parecería lógico asociarla con la existencia de una medida, sin embargo, sólo el espacio y la σ-álgebra están involucrados en su caracterización. Veamos el siguiente ejemplo.

PROPOSICION 3.2.2

Sea $(X, \mathcal{B})$ *un espacio medible y* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ *donde, para cada* n, $X_n \in \mathcal{B}$ *y* $X_n \cap X_m = \phi$ *para* $n \neq m$. *Escribimos*

$\mathcal{B}_n = \{B \cap X_n : B \in \mathcal{B}\}$. *Entonces* f *es medible con respecto a* $(X, \mathcal{B})$ *si y sólo si sus restricciones* f_n *a* X_n *son medibles con respecto a* $(X_n, \mathcal{B}_n)$.

PRUEBA

Para cada α, $\{x:f_n(x) > \alpha\} = \{x: f(x) > \alpha\} \cap X_n$, por la construcción de B_n es evidente que f_n es medible con respecto al espacio medible (X_n, B_n).

El converso se sigue si definimos $f(x) = f_n(x)$ si $x \in X_n$, luego $\{x:f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x) > \alpha\}$ y f es medible con respecto a (X,B) ▲

PROPOSICION 3.2.3

El hecho de que una función sea medible es equivalente a

i) $\forall_\alpha$, $\{x:f(x) \geq \alpha\} \in B$

ii) $\forall_\alpha$, $\{x:f(x) < \alpha\} \in B$

iii) $\forall_\alpha$, $\{x:f(x) \leq \alpha\} \in B$

TEOREMA 3.2.4

Si c es un número real y f,g funciones medibles, entonces $f+c$, cf, $f+g$, $g-f$ y $f.g$ son también funciones medibles. Si además f_i es medible, $i = 1,2,\ldots$, entonces Sup f_i, inf. f_i, $\overline{\text{Lim}}\, f_i$ y $\underline{\text{Lim}}\, f_i$ son todas medibles

DEFINICION 3.2.5

Si una propiedad se satisface excepto en un conjunto medible E tal que $\mu(E) = 0$, decimos que se verifica casi por doquier con respecto a μ y escribimos cxd(μ).

PROPOSICION 3.2.6

Sea f una función medible no-negativa. Entonces existe una sucesión (ψ_n) de funciones simples con $\psi_{n+1} \geq \psi_n$ tal que $f = \lim \psi_n$ en cada punto de X; donde por una función simple entendemos una combinación lineal finita

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$$

de funciones características de conjuntos medibles E_i.

PROPOSICION 3.2.7

Sea $f=g$ cxd(μ), donde μ es una medida completa. Entonces si f es medible también lo es g.

PRUEBA

Hacemos $E = \{x : g(x) > \alpha\}$, $E_1 = \{x : f(x) > \alpha\}$ y

$E_2 = \{x : f(x) \neq g(x)\}$.

Entonces E_2 y E_1 son medibles y como μ es completa también es medible $E \cap E_2$.

Luego $E = (E_1 - E_2) \cup (E \cap E_2)$ y por tanto

E es medible ▲

LEMA 3.2.8

Supongamos que para cada α *en un conjunto contable* D *de números reales le hacemos corresponder un conjunto* $B_\alpha \in \mathcal{B}$, *con la condición de que* $B_\alpha \subset B_\beta$ *para* $\alpha < \beta$. *Entonces existe una función* f *en* X, *medible y de valores reales extendidos tal que:*

$$f \leq \alpha \text{ en } B_\alpha \quad y \quad f \geq \alpha \text{ en } X - B_\alpha.$$

PRUEBA

Para cada $x \in X$, $f(x) = \inf\{\alpha : x \in B_\alpha\}$, donde $\inf \phi = \infty$.
Si $x \in B_\alpha$ entonces $f(x) \leq \alpha$,
si $x \notin B_\alpha$ entonces $x \notin B_\beta$ para cada $\beta < \alpha$ y por tanto $f(x) \geq \alpha$.

Resta probar que f es medible,
para cualquier real α tenemos que:

$$\{x : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta$$

ya que si $f(x) < \alpha$ entonces $x \in B_\beta$ para algún $\beta < \alpha$

y además si $x \in B_\beta$ para algún $\beta < \alpha$, entonces $f(x) \leq \beta < \alpha$.

Luego, f es medible ℓ

LEMA 3.2.9

Supongamos que a cada valor α en un conjunto contable D de números reales le hacemos corresponder un conjunto $B_\alpha \in \mathcal{B}$ con la condición de que $\mu(B_\alpha - B_\beta) = 0$ para $\alpha < \beta$. Entonces existe una función medible f tal que $f \leq \alpha$ cxd(μ) en B_α y $f \geq \alpha$ cxd(μ) en $X - B_\alpha$.

PRUEBA

Sea $C = \bigcup_{\alpha<\beta} (B_\alpha - B_\beta)$, entonces $\mu(C) = 0$.

Sea ahora $B'_\alpha = B_\alpha \cup C$,

si $\alpha < \beta$, tenemos
$$\begin{aligned} B'_\alpha - B'_\beta &= (B_\alpha \cup C) - (B_\beta \cup C) \\ &= (B_\alpha \cup C) \cap (B_\beta \cup C)^c \\ &= (B_\alpha \cup C) \cap (B_\beta^c \cap C^c) \\ &= B_\alpha \cap B_\beta^c \cap C^c \\ &= (B_\alpha - B_\beta) - C \\ &= \phi \end{aligned}$$

entonces $B'_\alpha \subset B'_\beta$,

por el lema anterior existe una función medible f tal que $f \leq \alpha$ en B'_α y $f \geq \alpha$ en $X-B'_\alpha$. Entonces $f \leq \alpha$ en B_α y $f \geq \alpha$ en $X-B_\alpha$ excepto para $x \in C$. ▲

3. INTEGRACION CON RESPECTO A UNA MEDIDA

Procedemos ahora a generalizar las definiciones y resultados de la teoría de integración de Lebesgue. Nuevamente reafirmamos que el hecho de omitir las pruebas obedece al hecho de que sus respectivos desarrollos en el sentido de Lebesgue puede ser considerado con ligeras variantes para el caso de un espacio de medida general. Para conocer en detalle su desarrollo, vease el capítulo 11 del libro "Real Analysis" de H.L. Royden y el capítulo 5 de "Introduction to Measure and Integration" de M.E. Munroe (observar bibliografía al final del presente trabajo).

DEFINICION 3.3.1

Si E es un conjunto medible y ψ una función simple no-negativa, definimos:

$$\int_E \psi d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i \cap E) \quad \textit{donde } \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x).$$

DEFINICION 3.3.2

Sea f *una función medible,* $f\colon X \to [0,+\infty]$*. Entonces el integral de* f *es:*

$$\int f d\mu = Sup\{\int \psi d\mu : 0 \leq \psi \leq f,\ \psi \text{ una función simple medible}\}.$$

DEFINICION 3.3.3

Sea $E \in B$*, y sea* f *una función medible* $f\colon E \to [0,+\infty]$*; entonces el integral de* f *sobre* E *es*

$$\int_E f d\mu = \int f . \chi_E . d\mu .$$

TEOREMA 3.3.4 (Lema de Fatou)

Sea (f_n) *una sucesión de funciones medibles no-negativas que converge casi por doquier en un conjunto* E *a una función* f*.*

Entonces

$$\int_E f \leq \underline{Lim} \int_E f_n$$

TEOREMA 3.3.5 (Teorema de Convergencia Monótona)

Sea (f_n) *una sucesión de funciones medibles no-negativas* que converge casi por doquier a una función f y supongamos que $f_n \leq f$ para todo n. Entonces

$$\int f = \text{Lim} \int f_n$$

PROPOSICION 3.3.6

Sea f una función medible, $f\colon X \to [0,\infty]$. Entonces existe una sucesión creciente (ψ_n) de funciones simples que converge a f, esto es $\psi_n(x) \to f(x)$.

PROPOSICION 3.3.7

Si f y g son funciones medibles no-negativas y a, b constantes no-negativas, entonces

$$\int (af + bg)\,d\mu = a\int f\,d\mu + b\int g\,d\mu.$$

Además $\int f\,d\mu \geq 0$, con la igualdad satisfecha sólo si $f = 0$ cxd(μ).

PROPOSICION 3.3.8

Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles, $f_n\colon X \to [0,\infty]$, entonces $\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\mu$.

PRUEBA

Por inducción sobre la suma de n funciones,

si $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$, entonces $\int s_n d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int f_i d\mu$,

también $s_n \to f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$, además $s_n \leq f$ para todo n.

En base al teorema de convergencia monótona:

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} f_i d\mu = \text{Lim} \int \Big(\sum_{i=1}^{n} f_i \Big) d\mu = \text{Lim} \Big(\sum_{i=1}^{n} \int f_i d\mu \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i d\mu \qquad \blacktriangle$$

PROPOSICION 3.3.9

Sea (X, B, μ) *un espacio de medida y* f *una función medible no-negativa. Entonces* $\nu(E) = \int_E f d\mu$ *es una medida en el espacio medible* (X, B)*. Si además,* $\int f d\mu < \infty$ *entonces* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ *tal que, si* $A \in B$ *y* $\mu(A) < \delta$*, entonces* $\nu(A) < \varepsilon$.

PRUEBA

La función ν es contablemente aditiva, pues si (E_n) es una sucesión de conjuntos disjuntos de B, tenemos

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \int \chi_{\cup E_n} . f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{E_n} . f d\mu \quad \text{(proposición 3.3.8)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

También $\nu(\phi) = 0$ y además está definida $\forall E$ con $E \in \mathcal{B}$, luego ν es una medida en $(X,\mathcal{B})$.

Hagamos $f_n = \min(f,n)$, f_n es medible, $f_n \to f$ casi por doquier y $f_n \leq f$ para todo n, por el teorema de convergencia Monótona concluimos que:

$$\int f d\mu = \operatorname{Lim} \int f_n . d\mu .$$

Por tanto, si $\int f d\mu < \infty$, entonces $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que

$$\int f d\mu < \int f_N d\mu + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Si $A \in \mathcal{B}$ y $\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2N}$ tenemos

$$\int_A f_N d\mu < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Luego tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ para obtener

$$\int_A f d\mu = \int_A (f - f_N) d\mu + \int_A f_N d\mu$$

$$\leq \int (f - f_N) d\mu + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon,$$

de donde $\nu(A) < \varepsilon$ ▲

DEFINICION 3,3,10

Una función no-negativa f es llamada integrable (sobre un conjunto medible E con respecto a μ) si es medible y

$$\int_E f d\mu < \infty.$$

Una función arbitraria f se dice que es integrable si tanto f^+ como f^- son integrables. En este caso definimos:

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

PROPOSICION 3.3.11

Si f y g son funciones integrables y E es un conjunto medible, entonces:

i) $\displaystyle\int_E (c_1 f + c_2 g) d\mu = c_1 \int_E f d\mu + c_2 \int_E g d\mu;$

ii) *Si* $|h| \leq |f|$ *y h es medible, entonces h es integrable;*

iii) *Si* $f \geq g$ cxd(μ), *entonces* $\int f d\mu \geq \int g d\mu$.

TEOREMA 3.3.12 (Teorema de Convergencia de Lebesgue).

Sea g una función integrable sobre E, y supongamos que (f_n) es una sucesión de funciones medibles tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ en } E,$$

y $f_n(x) \to f(x)$ *casi por doquier en* E.

Entonces

$$\int_E f = \text{Lim} \int_E f_n.$$

4. MEDIDAS CON SIGNO

Consideremos que si μ_1 y μ_2 son dos medidas definidas en el mismo espacio medible (X,B), podemos entonces definir una nueva medida μ_3 en (X,B) así:

$$\mu_3(E) = c_1\mu_1(E) + c_2\mu_2(E) \quad c_1, c_2 \geq 0.$$

Si intentamos por otro lado definir una medida por:

$$\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E),$$

resulta en primer lugar que ν no es siempre no-negativa, y esto nos conduce a la posibilidad de contar con medidas que puedan tomar tanto valores positivos como negativos.

Otra dificultad deriva del hecho de que ν no está definida cuando $\mu_1(E) = \mu_2(E) = \infty$. Deberíamos por tanto requerir que μ_1 ó μ_2 sea finita.

Con estas condiciones, establecemos la siguiente:

DEFINICION 3.4.1

Una medida con signo en el espacio medible (X,B) *es una fun* ción v de valores reales extendidos definida para los conjuntos de B y que satisface las siguientes condiciones:

i) v asume a lo mas uno de los valores $+\infty$, $-\infty$

ii) $v(\emptyset) = 0$

iii) $v(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} v(E_i)$ para cualquier sucesión (E_i) de conjuntos medibles disjuntos,

donde la igualdad significa que la serie en el miembro derecho converge absolutamente si $v(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ es finito y que diverge en caso contrario.

Obsérvese que una medida es un caso particular de una medida con signo.

DEFINICION 3.4.2

Decimos que un conjunto A es un conjunto positivo con respecto a una medida con signo v si A es medible y para cada subconjunto medible E de A tenemos $v(E) \geq 0$.

DEFINICION 3.4.3

Un conjunto B es denominado conjunto negativo si es medible y cada subconjunto medible de B tiene medida con signo no positiva. Un conjunto que es tanto positivo como negativo con respecto a una medida con signo es llamado conjunto nulo.

Habría que destacar algunas características de un conjunto nulo que se desprenden de su definición, presentamos el siguiente resultado cuya prueba es trivial.

PROPOSICION 3.4.4

Un conjunto medible es nulo si y sólo si cada subconjunto medible de él tiene medida con signo cero.

Obsérvese la diferencia entre un conjunto nulo y un conjunto de medida (con signo) cero, mientras cada conjunto nulo debe tener medida cero, un conjunto de medida cero puede ser la unión de dos conjuntos cuyas medidas no sean cero, sino ambas opuestas una de la otra.

LEMA 3.4.5

Cada subconjunto medible de un conjunto positivo es él mismo positivo. La unión de una colección contable de conjuntos positivos es positivo.

PRUEBA

Resulta evidente en base a la definición de conjunto positivo el primer enunciado.

Sea A la unión de una colección contable (A_n) de conjuntos positivos; si E es un subconjunto medible de A hacemos:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E \cap A_1 \\
E_2 &= E \cap A_2 \cap A_1^c \\
&\ \vdots \\
E_n &= E \cap A_n \cap A_{n-1}^c \cap \dots \cap A_1^c,
\end{aligned}
$$

entonces E_n es subconjunto medible de A_n y por tanto:

$$\nu(E_n) \geq 0.$$

Como los E_n son disjuntos y $E = \cup E_n$, tenemos

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \geq 0,$$

de donde A es un conjunto positivo ▲

Es claro que el lema anterior se verifica también para conjuntos negativos.

LEMA 3.4.6

Sea E un conjunto medible tal que $0 < \nu(E) < \infty$. Entonces existe un conjunto positivo A contenido en E con $\nu(A) > 0$.

PRUEBA

Tenemos dos alternativas, E es él mismo un conjunto positivo o contiene conjuntos de medida negativa.

En este segundo caso, sea n_1 el más pequeño entero positivo tal que exista un conjunto medible $E_1 \subset E$ con

$$\nu(E_1) < -\frac{1}{n_1}.$$

Procediendo inductivamente, sea n_k el más pequeño entero positivo de tal manera que existe un conjunto medible E_k con

$$E_k \subset E - \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \quad y \quad \nu(E_k) < -\frac{1}{n_k}.$$

Si hacemos $A = E - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, entonces $E = A \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$,

como la unión anterior es disjunta, tenemos

$$\nu(E) = \nu(A) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k),$$

como la serie en el miembro derecho es absolutamente convergente, es decir

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{n_k} \text{ converge y por tanto } n_k \to \infty.$$

Como $\nu(E_k) < 0$ y $\nu(E) > 0$ debemos concluir que $\nu(A) > 0$.

Para probar que A es positivo sea $\varepsilon > 0$,

como $n_k \to \infty$, podemos escoger k tan grande de modo que

$$\frac{1}{n_k - 1} < \varepsilon.$$

Sabemos que $A \subset E - \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$, A no puede contener conjuntos medibles con medida menor que $-\frac{1}{n_k-1}$ (por la forma en la que escogimos los n_k).

$$\text{además } -\frac{1}{n_k-1} > -\varepsilon.$$

Entonces, A no contiene conjuntos medibles de medida menor que ε. Como ε es un número positivo arbitrario, se sigue que A no contiene conjuntos de medida negativa, y debe por lo tanto ser conjunto positivo. ▲

PROPOSICION 3.4.7 (Teorema de Descomposición de Hahn)

Sea ν una medida con signo en el espacio medible (X,B). Entonces existe un conjunto positivo A y un conjunto negativo B tal que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$.

PRUEBA

Asumamos en primer término que $+\infty$ es el valor que nunca toma ν. Sea λ el supremo de $\nu(A)$ con $A \in C$ y $C = \{A/A$ es positivo respecto a $\nu\}$.

Como el conjunto vacío es positivo, obtenemos en primer término que $\lambda \geq 0$.

Sea ahora (A_i) una sucesión de conjuntos positivos tal que:

$$\lim_{i\to\infty} \nu(A_i) = \lambda$$

y hacemos $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Por el lema 3.4.5 A es un conjunto positivo, y por tanto

$$\lambda \geq \nu(A).$$

Pero $A - A_i \subset A$, luego $\nu(A-A_i) \geq 0$ (por ser subconjunto de un conjunto positivo),

entonces $\nu(A) = \nu(A_i) + \nu(A-A_i) \geq \nu(A_i)$,

aplicando límite tenemos $\nu(A) \geq \lambda$ y por tanto $\nu(A) = \lambda < \infty$.

Sea $B = A^c$, y supongamos que E es un subconjunto positivo de B. Entonces E y A son disjuntos y $E \cup A$ es un conjunto positivo. Luego:

$$\lambda \geq \nu(E \cup A) = \nu(E) + \nu(A) = \nu(E) + \lambda,$$

de donde $\nu(E) = 0$,

ya que $0 \leq \lambda < \infty$.

Resulta que B no contiene subconjuntos positivos de medida positiva y por tanto no contiene subconjuntos de medida positiva (lema anterior).

Por consiguiente B debe ser un conjunto negativo ▲

La descomposición de X en dos conjuntos disjuntos A y B con A positivo y B negativo respecto a ν es denominada una descomposición de Hahn para ν.

La proposición anterior establece la existencia de una descomposición de Hahn para cada medida con signo. Sin embargo esta descomposición no es necesariamente única ya que en el caso de conjuntos nulos cualquier subconjunto del mismo y su respectivo complemento constituyen una descomposición de Hahn.

DEFINICION 3.4.8

Si $\{A,B\}$ es una descomposición de Hahn para ν, entonces definimos las medidas ν^+ y ν^- de la siguiente manera:

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) \quad y$$

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap B) \, ,$$

$$con \ \nu = \nu^+ - \nu^-$$

DEFINICION 3.4.9

Dos medidas ν_1 y ν_2 en $(X,\mathcal{B})$ se dice que son mutuamente singulares (denotamos $\nu_1 \perp \nu_2$) si existen conjuntos medibles disjuntos A y B con $X = A \cup B$ tal que:

$$\nu_1(A) = \nu_2(B) = 0.$$

Notemos entonces que ν^+ y ν^- son mutuamente singulares ya que

$$\nu^+(B) = \nu(B \cap A) = 0,$$

$$\nu^-(A) = -\nu(A \cap B) = 0.$$

Resumimos los resultados anteriores en la siguiente proposi sición.

PROPOSICION 3.4.10

Sea ν una medida con signo en el espacio medible (X,B). Entonces existen dos medidas mutuamente singulares ν^+ y ν^- en (X,B) tal que $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

La descomposición de ν dada por la proposición es llamada la descomposición de Jordan de ν. Las medidas ν^+ y ν^- son denominadas la parte (o variación) positiva y negativa de ν. Como ν asume a lo sumo uno de los valores $+\infty$ y $-\infty$, entonces ν^+ ó ν^- debe ser finita. Si ambas son finitas, ν es llamada una medida con signo finita.

DEFINICION 3.4.11

La medida $|\nu|$ definida por:

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E)$$

es denominada el valor absoluto o la variación total de ν.

PROPOSICION 3.4.12

Un conjunto E es positivo con respecto a ν si $\nu^-(E) = 0$.

PRUEBA

Sea E' un subconjunto medible de E y $\{A,B\}$ una descomposición de Hahn para ν, luego

$$\nu(E') = \nu^+(E') - \nu^-(E'),$$

pero $E = E' \cup (E-E')$ y $\nu^-(E) = \nu^-(E') + \nu^-(E-E')$,

como $\nu^-(E) = 0$ entonces $\nu^-(E') = -\nu^-(E-E')$,

por tanto $\nu(E') = \nu^+(E') + \nu^-(E-E') \geq 0$,

de donde E es positivo dado que todo subconjunto medible de E tiene medida con signo no-negativa ▲

PROPOSICION 3.4.13

Un conjunto E es nulo con respecto a ν si $|\nu|(E) = 0$.

PRUEBA

Sea E' un subconjunto medible E y $\{A,B\}$ una descomposición de Hahn para ν.

Como $|\nu|(E) = 0$ entonces $\nu^+(E) = 0$ y $\nu^-(E) = 0$.

Sabemos entonces que $\nu(E') \geq 0$ (porque $\nu^-(E) = 0$),
además $\nu^+(E) = \nu^+(E') + \nu^+(E-E')$.

$$\nu^+(E') = -\nu^+(E-E').$$

luego $\nu(E') = \nu^+(E') - \nu^-(E') = -\nu^+(E-E') - \nu^-(E') \leq 0$,
concluimos que $\nu(E') = 0$ y por consiguiente E es nulo ▲

5. EL TEOREMA DE RADON-NIKODYM

DEFINICION 3.5.1

Sea (X,B) un espacio medible. Si u y v son dos medidas definidas en (X,B), decimos que u y v son nutuamente singulares (denotamos $u \perp v$) si existen conjuntos disjuntos A y B en B tal que $X = A \cup B$ y $v(A) = u(B) = 0$.

DEFINICION 3.5.2

Una medida v se dice que es absolutamente continua con respecto a una medida u (escribimos $v << u$) si $v(A) = 0$ para cada A con $u(A) = 0$.

PROPOSICION 3.5.3

Sea μ una medida y f una función medible no-negativa en X. Para E en B, sea

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu,$$

entonces ν es una medida.

PRUEBA

En primer lugar ν es una función de conjuntos no-negativa definida para todos los conjuntos de B, además es claro que satisface $\nu(\phi) = 0$.

Asimismo se sigue de la proposición 3.3.8 que ν es contablemente aditiva y es por tanto una medida. ▲

Habría que agregar con respecto a la medida ν anteriormente definida que ésta será finita si y sólo si f es integrable. Además como el integral sobre un conjunto de medida μ cero es cero, tenemos que ν es absolutamente continua con respecto a μ. Probaremos a continuación que si requerimos una medida μ σ-finita, entonces cada medida ν absolutamente continua con respecto a μ puede ser obtenida en la forma expuesta en la proposición próxima anterior.

TEOREMA 3.5.4 (Radon-Nikodym)

Sea (X,B,μ) una espacio de medida σ-finita, y sea ν una medida definida en B la cual es absolutamente continua con *respecto a μ. Entonces existe una función medible no-negativa f tal que para cada conjunto E en B tenemos:*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

La función f es única en el sentido que si g es cualquier función medible con la propiedad anterior entonces $g = f$ cxd(μ).

PRUEBA

Asumamos en primer término que μ es finita y luego procedemos a la extensión. Tenemos que $\nu-\alpha\mu$ es una medida con signo para cada número racional α.

Sea $\{A_\alpha, B_\alpha\}$ una descomposición de Hahn para $\nu-\alpha\mu$, y tomemos $A_0 = X$, $B_0 = \phi$.

Ahora $B_\alpha - B_\beta = B_\alpha \cap A_\beta$,

luego $(\nu - \alpha\mu)(B_\alpha - B_\beta) \leq 0$ y $(\nu - \beta\mu)(B_\alpha - B_\beta) \geq 0$,

es decir $\beta\mu(B_\alpha - B_\beta) \leq \nu(B_\alpha - B_\beta) \leq \alpha\mu(B_\alpha - B_\beta)$,

si $\beta > \alpha$ entonces $\mu(B_\alpha - B_\beta) = 0$.

Por lema 3.2.9 existe una función medible f tal que para cada racional α tenemos

$f \geq \alpha$ cxd(μ) en A_α y $f \leq \alpha$ cxd(μ) en B_α.

Dado que $B_0 = \phi$ tomemos f no-negativa.

Sea E un conjunto arbitrario en $\mathcal{B}$ y hagamos:

$$E_k = E \cap \left[B_{\frac{k+1}{N}} - \left(\bigcup_{i=0}^{k} B_{\frac{i}{N}}\right)\right], \quad E_\infty = E - \cup B_{\frac{k}{N}}.$$

Entonces $E = E_\infty \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\right)$ y esta es una unión disnjunta,

por tanto $\nu(E) = \nu(E_\infty) + \sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k)$.

Como $E_k \subset B_{\frac{k+1}{N}} \cap A_{\frac{k}{N}}$, tenemos:

$\frac{k}{N} \leq f \leq \frac{k+1}{N}$ en E_k, y así

$$\frac{k}{N}\mu(E_k) \leq \int_{E_k} f d\mu \leq \frac{k+1}{N}\mu(E_k). \quad (1)$$

Dado que $(\nu - \frac{k}{N}\mu)(E_k) \geq 0$ y $(\nu - \frac{k+1}{N}\mu)(E_k) \leq 0$

tenemos: $\frac{k}{N}\mu(E_k) \leq \nu(E_k) \leq \frac{k+1}{N}\mu(E_k)$ (2).

De (1) y (2) obtenemos:

$$\left|\int_{E_k} f d\mu - \nu(E_k)\right| \leq \frac{1}{N}\mu(E_k),$$

$$\nu(E_k) - \frac{1}{N}\mu(E_k) \leq \int_{E_k} f d\mu \leq \nu(E_k) + \frac{1}{N}\mu(E_k) \ . \quad (3)$$

Como $E_\infty = E - (\cup B_{\frac{k}{N}})$, se tiene $f = \infty$ cxd en E_∞.

Si $\mu(E_\infty) > 0$, de (2) concluimos que $\nu(E_\infty) = \infty$, si $\mu(E_\infty) = 0$, debemos tener $\nu(E_\infty) = 0$ por que $\nu << \mu$.

En ambos casos $\nu(E_\infty) = \int_{E_\infty} f d\mu$. (4)

Sumando en k en la ecuación (3) obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k} f d\mu \leq \sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k) + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k),$$

añadiendo esta desigualdad al resultado (4):

$$\nu(E) - \frac{1}{N}\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq \nu(E) + \frac{1}{N}\mu(E).$$

Como N es arbitrario y $\mu(E)$ es finita tenemos:

$$\mu(E) = \int_E f d\mu.$$

Sea ahora μ una medida σ-finita, tenemos que:

$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$ y $\mu(A_i) < \infty$ $\forall i$. $i = 1,2,...$

Existe por tanto una función g_i medible y no negativa en cada espacio de medida (A_i, B_{A_i}, μ) tal que

$$\nu(A \cap A_i) = \int_{A \cap A_i} g_i d\mu$$

para cualquier $A \in B$.

Hagamos $\nu(A \cap A_i) = \int_A h_i d\mu$, con $h_i(w) = \begin{cases} g_i(w), & w \in A_i \\ 0, & w \notin A_i, \end{cases}$

Así: $\nu(A) = \nu(A \cap \bigcup_{i \geq 1} A_i) = \nu(\bigcup_{i \geq 1} (A \cap A_i))$

$$= \sum_{i \geq 1} \nu(A \cap A_i) = \sum_{i \geq 1} \int_A h_i d\mu$$

$$= \int_A \sum_{i \geq 1} h_i d\mu$$ ya que h_i $i=1,2,\ldots$ es medible y no negativa.

Si hacemos $g = \sum_{i \geq 1} h_i$, entonces

$$\nu(A) = \int_A g d\mu,$$

además g es medible y no-negativa ▲

6. ESPACIOS L^P

DEFINICION 3.6.1

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, denotamos por $L^p(\mu)$ el espacio de todas las funciones medibles para las cuales $\int |f|^p d\mu < \infty$, considerando que dos funciones en L^p son equivalentes si son iguales casi por doquier.

Al igual que en el capítulo I, definimos:

DEFINICION 3.6.2

Sea $(X,\mathcal{E},\mu)$ un espacio de medida, definimos $L^{\infty}(\mu)$ como el espacio de funciones medibles acotadas. Para $1 \leq p < \infty$ establecemos:

$$\|f\|_p = \{\int |f|^p d\mu\}^{1/p},$$

y para $p = \infty$:

$$\|f\|_\infty = \text{Sup esc}\,|f|.$$

Habría que observar que el espacio $L^{\infty}(\mu)$ depende de la escogencia de μ para determinar la norma y las clases de equivalencias de funciones, pero esto sólo requiere conocer cuales son los conjuntos de medida cero.

Tanto las desigualdades de Hölder y Minkowski como el Teorema de Riesz-Fischer se satisfacen en espacios $L^p(\mu)$, veánse para ello sus respectivos desarrollos en el primer capítulo. Compendiamos esos resultados en el teorema siguiente:

TEOREMA 3.6.3

Para $1 \leq p \leq \infty$ los espacios $L^p(\mu)$ son espacios de Banach, y si $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$f \cdot g \in L^1(\mu)$ y

$\int |f \cdot g| d\mu \leq \|f\|_p . \|g\|_q$

Es importante considerar la siguiente:

PROPOSICION 3.6.4

Cada función g en $L^q(\mu)$ define un funcional lineal acotado F en $L^p(\mu)$ así:

$$F(f) = \int f \cdot g d\mu,$$

en donde $\|F\| = \|g\|_q$.

PRUEBA

No existe mayor dificultad en precisar la definición y la linealidad del funcional, veamos entonces la segunda parte de la proposición:

Construimos una sucesión de funciones así:

$$f_n(t) = \begin{cases} |g(t)|^{q-1} . \mathrm{sgn}(g(t)) & \text{para } |g(t)|^{q-1} \leq n \\ n . \mathrm{sgn}(g(t)) & \text{para } |g(t)|^{q-1} > n. \end{cases}$$

Cada f_n es medible y acotada, de donde $f_n \in L^p$, tenemos que a partir de que

$$\|F\| = \mathrm{Sup} \frac{|F(f)|}{\|f\|_p} , \; f \neq 0$$

concluimos que para cada n:

$$\left|\int f_n . g d\mu\right| = |F(f_n)| \leq \|F\| . \|f_n\|_p = \|F\| \left(\int |f_n|^p d\mu\right)^{1/p},$$

sin embargo:

$$f_n . g = |f_n| . |g| \geq |f_n| |f_n|^{\frac{1}{q-1}} = |f_n|^p,$$

por tanto $\int |f_n|^p d\mu \leq \|F\| \left(\int |f_n|^p d\mu\right)^{1/p}$

y $\left(\int |f_n|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\int |f_n|^p\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|F\|.$

Además en base a la construcción de la sucesión (f_n) tenemos:

$$|f_n|^p \to |g|^q \text{ cxd pues } (q-1)p = p(\tfrac{q}{p}) = q.$$

como la sucesión $(|f_n|^p)_{n\geq 1}$ es no-decreciente se sigue por el teorema de convergencia monótona que

$$\operatorname{Lim}\left(\int |f_n|^p d\mu\right)^{1/q} = \left(\int |g|^q d\mu\right)^{1/q},$$

por cuanto $\|g\|_q \leq \|F\|$,

de Hölder obtenemos $\|F\| \leq \|g\|_q$,

de donde $\|F\| = \|g\|_q$ ▲

Puntualizamos el siguiente teorema cuya prueba es análoga a la efectuada en el capítulo precedente y que evidencia que el conjunto de funciones simples es denso en el espacio $L^p(\mu)$.

TEOREMA 3.6.5

Sea $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe una función simple Φ la cual se anula fuera de un conjunto de medida finita, tal que $\|f - \Phi\|_p < \varepsilon$.

Como en el capítulo II, nuestro interés radica en establecer el recíproco de la proposición 3.6.4, es decir, que cada funcional lineal en $L^p(\mu)$ se puede representar en la forma descrita en la mencionada proposición.

LEMA 3.6.6

Sea $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espacio de medida finita y g una función integrable tal que para alguna constante M,

$$\left|\int g.\Phi d\mu\right| \leq M\|\Phi\|_p$$

para todas las funciones simples Φ,

entonces $g \in L^q$.

PRUEBA

Asumamos primero que $p > 1$, y sea (ψ_n) una sucesión creciente de funciones simples no-negativas que convergen a $|g|^q$.

Hacemos:

$$\Phi_n = (\psi_n)^{1/p}\operatorname{sgn}(g),$$

entonces Φ_n es una función simple, y

$$\|\Phi_n\|_p = \{\int \psi_n d\mu\}^{1/p}.$$

Como $\Phi_n . g \geq |\Phi_n| . |\psi_n|^{1/q} = |\psi_n|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = \psi_n$

tenemos $\int \psi_n d\mu \leq \int \Phi_n . g d\mu$

$$\leq M . \|\Phi_n\|_p$$

$$\leq M . \{\int \psi_n d\mu\}^{1/p}.$$

Asimismo $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, luego

$$\{\int \psi_n d\mu\}^{\frac{1}{q}} \leq M,$$

$$\int \psi_n d\mu \leq M^q,$$

y por el teorema de convergencia monótona:

$$\int |g|^q d\mu \leq M^q,$$

de donde $g \varepsilon L^q$.

Para el caso $p = 1$, sea $E = \{x: |g(x)| \geq M+\varepsilon\}$,

sea $\Phi = \chi_E . (sgn(g))$,

entonces $\|\Phi\|_1 = \mu(E)$ y

$M . \mu(E) = M . \|\Phi\|_1 \geq |\int \Phi . g d\mu| \geq (M+\varepsilon)\mu(E)$,

por tanto $\mu(E) = 0$ y $\|g\|_\infty \leq M$,

de donde $g \varepsilon L^\infty$ ▲

LEMA 3.6.7

Sea (E_n) una sucesión de conjuntos medibles disjuntos, y para cada n sea f_n una función en L^p que se anula fuera de E_n. Sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, entonces $f \in L^p$ si $\sum \|f_n\|^p < \infty$.

PRUEBA

Observemos las series

$\langle (\|f_n\|), (S'_n) \rangle$, $\langle (\|f_n\|^p), (S''_n) \rangle$,

tenemos que $S'_n \leq S''_n$ (pues $p \geq 1$),

entonces $\sum \|f_n\| < \infty$,

por tanto la serie $\langle (f_n), (S_n) \rangle$ es absolutamente convergente.

Como el espacio $L^p(\mu)$ es completo se sigue que la sucesión (f_n) es sumable a f y

$$f \in L^p(\mu) \qquad \blacktriangle$$

3.6.8 SEGUNDO TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ

Sea F un funcional lineal acotado en $L^p(\mu)$ y μ una medida σ-finita. Entonces existe un único elemento g en L^q, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que

$$F(f) = \int f\cdot g\,d\mu$$

y también $\|F\| = \|g\|_q$.

PRUEBA

Consideremos primero el caso de una medida finita μ. Luego, cada función medible acotada está en $L^p(\mu)$.

Definamos una función de conjuntos ν en los conjuntos medibles así: $\nu(E) = F(x_E)$.

Si E es la unión de una sucesión (E_n) de conjuntos medibles disjuntos sea:

$$\alpha_n = \operatorname{sgn} F(X_{E_n}), \text{ y hagamos}$$

$$f = \sum \alpha_n X_{E_n},$$

notemos además que: $\alpha_n X_{E_n} \varepsilon L^p(\mu)$ y

$\sum(\int |\alpha_n x_{E_n}|^p) = \sum(\int x_{E_n}) = \sum\mu(E_n) = \mu(E) < \infty$,

entonces por lema 3.6.7. $f \varepsilon L^p(\mu)$.

También $F(f) = F(\sum\alpha_n x_{E_n}) = \sum\alpha_n F(x_{E_n}) = \sum|F(x_{E_n})| = \sum|\nu(E_n)|$

de donde $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)| < \infty$ por el acotamiento de F

y $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \sum F(x_{E_n}) = F(\sum x_{E_n}) = F(x_E) = \nu(E)$.

Por tanto ν es una medida con signo, y por el teorema de Radon - Nikodym existe una función medible tal que para cada conjunto medible E se tiene

$$\nu(E) = \int_E g d\mu,$$

como ν es siempre finita, g es integrable.

Si Φ es una función simple, entonces

$$F(\Phi) = F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}\right) \quad \text{con } \Phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i F(\chi_{E_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \nu(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \int_{E_i} g d\mu\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{E_i} a_i g d\mu\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\int a_i \chi_{E_i} g d\mu\right) = \int \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}\right).g d\mu$$

$$= \int \Phi . g d\mu .$$

Dado que $|F(\Phi)| \leq \|F\| . \|\Phi\|_p$, se tiene $\left|\int \Phi . g d\mu\right| \leq \|F\| \|\Phi\|_p$ y por el lema 3.6.6 concluimos que $g \varepsilon L^q$.

Sea G el funcional lineal acotado definido en L^p por:

$$G(f) = \int f . g d\mu,$$

entonces G - F es un funcional lineal acotado que se anula en el subespacio de funciones simples.

Por teorema 3.6.5 las funciones simples son densas en L^p y así para $f \in L^p$ y Φ simple tenemos:

$(G - F)(f - \Phi) \leq \|G - F\| \|f - \Phi\|_p \leq \|G - F\|.\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$

luego $(G - F)(f - \Phi) = 0$,

$$(G - F)(f) = (G - F)(\Phi) = 0,$$

y por tanto $G(f) = F(f) = \int f.g d\mu$,

es fácil verificar que $\|F\| = \|G\| = \|g\|_q$.

La función g determina un único elemento de L^q, ya que si g_1 y g_2 determinan el mismo funcional F, entonces $g_1 - g_2$ reproduce el funcional cero, y por tanto

$$\|g_1 - g_2\|_q = 0, \text{ de donde } g_1 = g_2 \text{ cxd.}$$

Para extender el teorema al caso de una medida σ-finita, sea (X_n) una sucesión creciente de conjuntos medibles de medida finita cuya unión es X.

El teorema para espacios de medida finita implica que para cada n existe una función $g_n \in L^q$ que se anula fuera de X_n tal que

$$F(f) = \int f.g_n d\mu \quad \text{para toda } f \in L^p(\mu)$$

el cual se anula fuera de X_n, además

$$\|g_n\|_q \leq \|F\|.$$

Como cada función g_n con esta propiedad es única en X_n

excepto por cambios en conjuntos de medida cero y como g_{n+1} también tiene esta propiedad en X_n podemos asumir que $g_n = g_{n+1}$ en X_n.

Para $x \in X_n$ definimos $g(x) = g_n(x)$. Entonces g es una función medible bien definida y $(|g_n|)$ crece puntualmente a $|g|$.

Por el teorema de convergencia monótona:

$$\int |g|^q d\mu = \operatorname{Lim}\int |g_n|^q d\mu$$

$$\leq \|F\|^q$$

y por tanto $g \in L^q$.

Si $f \in L^p$, sea $f_n = f$ en X_n y $f_n = 0$ en otro punto, entonces $f_n \to f$ puntualmente en L^p.

Dado que $|f.g|$ es integrable (por la desigualdad de Hölder)

y $|f_n.g| \leq |f.g|$,

el teorema de convergencia de Lebesgue implica:

$$\int f.g d\mu = \operatorname{Lim}\int f_n.g d\mu$$

$$= \operatorname{Lim}\int f_n g_n d\mu$$

$$= \operatorname{Lim} F(f_n) = F(f) \quad \blacktriangle$$

CAPITULO IV

TEORIA DE MEDIDA EN ESPACIOS HAUSDORFF LOCALMENTE COMPACTOS

Podemos establecer una relación entre teoría de medida y topología mediante la construcción de una σ-álgebra de conjuntos en términos de propiedades topológicas. Esa relación será objeto de estudio en este capítulo, trabajando con un espacio medible topológico y a considerar las condiciones en que la medida esté vinculada con la estructura topológica.

Los resultados en las primeras cuatro secciones no son topológicos, pero serán básicos en el posterior desarrollo. Iniciamos considerando algunas de las maneras en las que una medida puede ser definida en una σ-álgebra.

1- MEDIDA EXTERIOR Y CONJUNTOS MEDIBLES

DEFINICION 4.1.1

Se entiende por medida exterior μ^* una función de conjuntos de valores reales extendidos definida en todos los subconjuntos de un espacio X y que tiene las siguientes propiedades:

i) $\mu^*(\phi) = 0$

ii) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii) $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$,

La segunda propiedad es llamada "monotonía" y la tercera es denominada "subaditividad contable". Además la medida exterior μ^* es llamada finita si $\mu^*(X) < \infty$.

DEFINICION 4.1.2

Un conjunto E se dice medible con respecto a μ^* si para cada conjunto A tenemos:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Realmente, como μ^* es subaditiva, basta mostrar que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ para cada conjunto A,

para probar el hecho de que el conjunto E es medible. La anterior desigualdad es trivialmente verdadera cuando $\mu^*(A) = \infty$, y por tanto necesitamos sólo verificarla para el caso de conjuntos A con $\mu^*(A)$ finita.

TEOREMA 4.1.3

La clase B de conjuntos μ^*-medibles es una σ-álgebra. Si $\bar{\mu}$ es la restricción de μ^* a B, entonces $\bar{\mu}$ es una medida completa en B.

PRUEBA

Es evidente que el conjunto vacío es medible, además por la simetría de la definición E^c es medible cuando E lo es.

Sean E_1 y E_2 conjuntos medibles, luego:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_2^c) \quad y$$
$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_2^c \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c).$$

Como
$$\begin{aligned}(A \cap E_2) \cup (A \cap E_1 \cap E_2^c) &= [(A \cap E_2) \cup (A \cap E_1)] \cap [(A \cap E_2) \cup E_2^c] \\ &= [A \cap (E_1 \cup E_2)] \cap (A \cup E_2^c) \\ &= A \cap (E_1 \cup E_2),\end{aligned}$$

tenemos:

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) \leq \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_2^c \cap E_1)$$

y por tanto

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1^c \cap E_2^c))$$

de donde $E_1 \cup E_2$ es medible.

Inductivamente se establece que la unión de cualquier número finito de conjuntos medibles es medible, y se deduce que $\mathcal{B}$ es un álgebra.

Sea entonces:

$E = \bigcup_{i \geq 1} E_i$, donde (E_i) es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos. y hagamos

$G_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$,

G_n es medible y

$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap G_n^c) \geq \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap E^c)$ ya que $E^c \subset G_n^c$.

Notemos que $G_n \cap E_n = E_n$ y $G_n \cap E_n^c = G_{n-1}$,

luego $\mu^*(A \cap G_n) = \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap G_{n-1})$ por ser E_n medible.

Por inducción se tiene $\mu^*(A \cap G_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$,

por tanto $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E^c) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$,

como esto se verifica para cualquier n, obtenemos:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E^c) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i)$$

$$\geq \mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \cap E) \text{ pues } A \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap E_i).$$

Luego E es medible. Como la unión de cualquier sucesión de conjuntos en un álgebra puede ser reemplazada por una unión disjunta de conjuntos en el álgebra, se sigue que $\mathcal{B}$ es un σ - álgebra.

Probaremos a continuación la aditividad finita de $\bar{\mu}$, sean para ello E_1 y E_2 conjuntos medibles disjuntos, veamos que:

$$\bar{\mu}(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1 \cup E_2)$$
$$= \mu^*([E_1 \cup E_2] \cap E_2) + \mu^*([E_1 \cup E_2] \cap E_2^c)$$
$$= \mu^*(E_2) + \mu^*(E_1)$$
$$= \bar{\mu}(E_1) + \bar{\mu}(E_2),$$

aditividad finita se sigue por inducción.

Si E es la unión disjunta de conjuntos medibles (E_i), entonces

$$\bar{\mu}(E) \geq \bar{\mu}(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(E_i),$$

$$\bar{\mu}(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_i),$$

por otro lado se sabe $\bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_i)$,

concluimos que $\bar{\mu}$ es contablemente aditiva y es una medida dado que es no-negativa y $\bar{\mu}(\phi) = \mu^*(\phi) = 0$.

Resta entonces verificar el hecho que $\bar{\mu}$ es una medida completa en $\mathcal{B}$,

sea B un conjunto μ^*-medible con $\mu^*(B) = 0$ y $C \subset B$,

en primer término $\mu^*(C) = 0$,

para cualquier conjunto A: $A \cap C \subset C$ y $A \cap C^c \subset A$,

por tanto $\mu^*(A \cap C) \leq \mu^*(C)$ y $\mu^*(A \cap C^c) \leq \mu^*(A)$,

además $\mu^*(A \cap C) = 0$ y

$$\mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \cap C^c) \leq \mu^*(A),$$

observamos que C es medible y por lo tanto $\bar{\mu}$ es completa en $\mathcal{B}$. ▲

2- EL TEOREMA DE EXTENSION

DEFINICION 4.2.1

Por una medida en un álgebra entenderemos una función μ *no-negativa de conjuntos, de valores reales extendidos, definida en una álgebra* A *de conjunto tal que*

i) $\mu(\phi) = 0;$

ii) Si (A_i) *es una sucesión de conjuntos disjuntos en* A *cuya unión está en* A*, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Obsérvese que una medida en un álgebra A es una medida si y sólo si A es una σ-álgebra.

Pretendemos mostrar ahora que si iniciamos con una medida en un álgebra A de conjuntos, podemos extenderla a una medida definida en una σ-álgebra B que contiene a A.

Utilizaremos entonces la medida en el álgebra para construir una medida exterior μ^* y mostraremos luego que la medida $\bar{\mu}$ inducida por μ^* es precisamente la extensión de μ.

DEFINICION 4.2.2

Definimos:

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

donde (A_i) *varía sobre todas las sucesiones de* A *tal que* $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

LEMA 4.2.3

Si $A \in A$ *y si* (A_i) *es cualquier sucesión de conjuntos en* A *tal que* $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, *entonces* $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

PRUEBA

Sea $B_n = A \cap A_n \cap A_{n-1}^c \cap \ldots \cap A_1^c$,

$B_n \in A$ y $B_n \subset A_n$. Pero A es la unión disjunta de la sucesión B_n, es decir

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad y \quad \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

▲

COROLARIO 4.2.4

Si $A \in A$ *entonces* $\mu^*(A) = \mu(A)$.

LEMA 4.2.5

La función de conjuntos μ^* es una medida exterior.

PRUEBA

Primero, μ^* es claramente una función de conjuntos monótona y no-negativa definida para todos los conjuntos y $\mu^*(\phi) = \mu(\phi) = 0$.

Sea entonces $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$,

si $\mu^*(E_i) = \infty$ para algún i, tenemos:

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i \geq 1} \mu^*(E_i) = \infty.$$

De lo contrario, dado $\varepsilon > 0$, existe para cada i una sucesión $(A_{ij})_{j \geq 1}$ de conjuntos en A tal que:

$$E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} \quad y$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{ij}) < \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Entonces $\mu^*(E) \leq \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \mu(A_{ij}) < \sum_{i \geq 1} \mu^*(E_i) + \varepsilon$,

como ε es un positivo arbitrario, se tiene:

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) \quad y$$

μ^* es una medida exterior. ▲

LEMA 4,2.6

Si $A \in \mathcal{A}$ *entonces* A *es medible con respecto a* μ^*.

PRUEBA

Sea E un conjunto arbitrario de medida exterior finita y ε un número positivo, entonces existe una sucesión (A_i) de $\mathcal{A}$ con $E \subseteq \bigcup_{i \geq 1} A_i$ tal que:

$$\sum_{i \geq 1} \mu(A_i) < \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Por la aditividad de μ en $\mathcal{A}$ tenemos:

$$\mu(A_i) = \mu(A_i \cap A) + \mu(A_i \cap A^c),$$

luego:

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap A^c)$$

$$> \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

ya que $E \cap A \subset \bigcup (A_i \cap A)$ y

$E \cap A^c \subset \bigcup (A_i \cap A^c)$.

Como ε es arbitrario,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

y por tanto A es medible ▲

La medida exterior μ^* definida anteriormente es llamada la medida exterior inducida por μ.

Para un álgebra A dada de conjuntos, denotamos por A_σ aquellos conjuntos que son uniones contables de conjuntos de A y por $A_{\sigma\delta}$ los conjuntos que son intersecciones contables de conjuntos en A_σ.

PROPOSICION 4.2.7

Sea μ una medida en un álgebra A, μ^* la medida exterior inducida por μ, y E cualquier conjunto. Entonces para $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $A \varepsilon A_\sigma$ con $E \subset A$ y $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$.

Existe también un conjunto $B \varepsilon A_{\sigma\delta}$ con $E \subset B$ y $\mu^*(E) = \mu^*(B)$.

PRUEBA

En base a la definición de μ^* existe una sucesión (A_i) de A tal que $E \subset \bigcup A_i$ y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Sea $A = \bigcup_{i \geq 1} A_i$, entonces $\mu^*(A) \leq \sum_{i \geq 1} \mu^*(A_i) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$,

y $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$, con $A \varepsilon A_\sigma$ y $E \subset A$.

Notemos además que para cada entero positivo n, existe un conjunto $A_n \varepsilon A_\sigma$ tal que $E \subset A_n$ y

$$\mu^*(A_n) < \mu^*(E) + \frac{1}{n},$$

Sea entonces $B = \bigcap_{n\geq 1} A_n$, $B \in A_{\sigma\delta}$ y $E \subset B$,

como $B \subset A_n$: $\mu^*(B_n) \leq \mu^*(A_n) < \mu^*(E) + \frac{1}{n}$.

Como n es arbitraririo $\mu^*(B) \leq \mu^*(E)$,

pero $E \subset B$ y por consiguiente $\mu^*(B) \geq \mu^*(E)$,

se deduce que $u^*(E) = \mu^*(B)$ ▲

TEOREMA 4.2.8 (Carathéodory)

Sea μ una medida en un álgebra A, y μ^* la medida exterior inducida por μ. Entonces la restricción $\bar{\mu}$ de μ^* a los conjuntos μ^*-medibles es una extensión de μ a una σ-álgebra que contiene a A. Si μ es finita (o σ-finita) también lo es $\bar{\mu}$. Si μ es σ-finita, entonces $\bar{\mu}$ es la única medida en la más pequeña σ-álgebra que contiene a A la cual es una extensión de μ.

PRUEBA

El hecho de que $\bar{\mu}$ es una extensión de μ en A a una medida en una σ-álgebra que contiene a A se deduce del colorario 4.2.4, lema 4.2.6 y el teorema 4.1.3.

Es claro además que $\bar{\mu}$ es finita (o σ-finita) cuando μ lo es.

Para mostrar la unicidad de $\bar{\mu}$ cuando μ es σ-finita, consideremos $\mathcal{B}$ la más pequeña σ-álgebra que contiene a A y $\tilde{\mu}$ alguna medida en $\mathcal{B}$ que coincide con μ en A.

Como cada conjunto en A_σ puede ser expresado como una unión contable disjunta de conjuntos en A, la medida $\tilde{\mu}$ debe coincidir con $\bar{\mu}$ en A_σ.

Sea B cualquier conjunto en $\mathcal{B}$ con medida exterior finita, entonces por proposición 4.2.7 existe A en A_σ con $B \subset A$ y

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Como $B \subset A$:

$$\tilde{\mu}(B) \leq \tilde{\mu}(A) = \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon;$$

dado que ε es un positivo arbitrario concluimos

$$\tilde{\mu}(B) \leq \mu^*(B) \text{ para cada } B \in \mathcal{B}.$$

Como la clase de conjuntos medibles con respecto a μ^* es una σ-álgebra que contiene a A, cada B en $\mathcal{B}$ debe ser medible (ya que $\mathcal{B}$ es la más pequeña σ-álgebra que contiene a A).

Si B es medible y A está en A_σ con $B \subset A$

$$y \ \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon, \text{ entonces}$$

$$\mu^*(A) = \mu^*(B) + \mu^*(A-B) \text{ (por ser B medible)},$$

y por tanto:

$$\mu^*(A-B) \leq \varepsilon \quad \text{si } \mu^*(B) < \infty,$$

Luego

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$$

$$= \tilde{\mu}(B) + \tilde{\mu}(A-B)$$

$$\leq \tilde{\mu}(B) + \varepsilon,$$

y de nuevo como ε es arbitrario

$$\mu^*(B) \leq \tilde{\mu}(B)$$

de donde $\mu^*(B) = \tilde{\mu}(B)$.

Si μ es una medida σ finita, sea (X_i) una colección contable de conjuntos disjuntos en A con

$$X = \cup X_i \quad y \quad \mu(X_i) < \infty .$$

Si B es cualquier conjunto en $\mathcal{B}$, tenemos:

$$B = \bigcup_{i \geq 1} (X_i \cap B)$$

y esta es una unión contable de conjuntos disjuntos en $\mathcal{B}$, por lo tanto

$$\tilde{\mu}(B) = \sum \tilde{\mu}(X_i \cap B)$$

y

$$\overline{\mu}(B) = \sum \overline{\mu}(X_i \cap B),$$

como $\mu^*(X_i \cap B) < \infty$ se deduce que

$$\overline{\mu}(X_i \cap B) = \tilde{\mu}(X_i \cap B)$$

y de lo anterior

$$\tilde{\mu}(B) = \overline{\mu}(B),$$

se advierte entonces que $\tilde{\mu}$ es única en B ▲

Es a menudo conveniente iniciar con una función de conjuntos definida en una colección C de conjuntos que tenga una estructura más débil que un álgebra. Observemos para ello la siguiente definición.

DEFINICION 4.2.9

Decimos que una colección C de subconjuntos de X es una semiálgebra de conjuntos si la intersección de dos conjuntos cualesquiera en C está de nuevo en C y el complemento de cualquier conjunto en C es unión finita de conjuntos disjuntos de C.

Resulta claro que si C es cualquier semiálgebra de conjuntos, entonces la colección A que consiste del conjunto vacío y todas las uniones finitas de conjuntos disjuntos de C es una álgebra de conjuntos, la cual es llamada el "álgebra generada por C", y tiene la propiedad de ser la menor álgebra que contiene a los conjuntos de la colección C.

Si μ es una función de conjuntos definida en una semiálgebra C, parece natural intentar definir una función de conjuntos finitamente aditiva en el álgebra A Generada por C así:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) ,$$

donde $A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \cap E_j = \phi$ para $i \neq j$, $E_i \in C$ $\forall_i$.

Ahora bien, como un conjunto A de $\mathcal{A}$ puede ser representado de varias maneras como unión finita de conjuntos disjuntos de C, debemos asegurarnos que el valor de $\mu(A)$ es único, independiente de su representación. Observemos por tanto la siguiente proposición.

PROPOSICION 4.2.10

Sea C una semiálgebra de conjuntos y μ una función no-negativa de conjuntos definida en C con $\mu(\phi) = 0$ (si $\phi \in C$), entonces μ tiene una única extensión a una medida en el álgebra $\mathcal{A}$ Generada por C si las siguientes condiciones son satisfechas:

i) *Si un conjunto C en C es la unión disjunta de una colección finita (C_i) de conjuntos en C entonces*

$$\mu(C) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i)$$

ii) *Si un conjunto C en C es la unión disjunta de una colección contable $(C_i)_{i \geq 1}$ de conjuntos en C, entonces*

$$\mu(C) \leq \sum_{i \geq 1} \mu(C_i).$$

PRUEBA

Supongamos en primer lugar que un conjunto A en $\mathcal{A}$ es la unión disjunta de la colección finita (C_i) de conjuntos de $\mathcal{C}$ y a su vez es la unión disjunta de la colección finita (D_j) con $D_j \in \mathcal{C}$ para toda j.

Nótese que $C_i = \bigcup_j (C_i \cap D_j)$,

por condición *i*) se tiene $\mu(C_i) = \sum_j \mu(C_i \cap D_j)$,

sumando ahora sobre i: $\sum \mu(C_i) = \sum_i \sum_j \mu(C_i \cap D_j)$

$$= \sum_j \sum_i \mu(C_i \cap D_j)$$

$$= \sum_j \mu(D_j),$$

luego μ está bien definida en $\mathcal{A}$.

Sea ahora (A_i) una sucesión disjunta de conjuntos en $\mathcal{A}$ cuya unión está también en $\mathcal{A}$.

Cada A_i es la unión disjunta de una colección finita de conjuntos en $\mathcal{C}$, es decir

$$A_i = \bigcup_j C_{ij} \ , \ C_{ij} \in \mathcal{C},$$

Luego $\bigcup_{i \geq 1} A_i = \bigcup_i \bigcup_j C_{ij}$, como $\bigcup_{i\geq 1} A_i \in A$, $\bigcup_{i\geq 1} A_i$ es también la unión disjunta de una colección finita de conjuntos de C, o sea

$$\bigcup_{i\geq 1} A_i = \bigcup_k D_k \quad \text{con } D_k \in C \text{ para todo } k.$$

Podemos expresar $D_k = \bigcup_i \bigcup_j (D_k \cap C_{ij})$. y

por proposición *ii*):

$$\mu(D_k) \leq \sum_{ij}\sum \mu(D_k \cap C_{ij})$$

$$\Rightarrow \quad \sum_k \mu(D_k) \leq \sum_i \sum_j \sum_k \mu(D_k \cap C_{ij})$$

$$\Rightarrow \quad \mu(\bigcup_{i\geq 1} A_i) \leq \sum_i \sum_j \mu(C_{ij})$$

$$\Rightarrow \quad \mu(\bigcup_{i\geq 1} A_i) \leq \sum_i \mu(A_i). \quad (1)$$

Además, se observa claramente que μ es monótona y finitamente aditiva, luego si $A = \bigcup_{i\geq 1} A_i$, entonces

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \mu(A),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A),$$

por tanto $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i) \leq \mu(\bigcup_{i\geq 1} A_i)$ (2),

de (1) y (2) μ es contablemente aditiva y es entonces una medida en A ▲

3- FUNCIONALES LINEALES DEFINIDOS EN UNA RED VECTORIAL

Es a menudo conveniente introducir integración sin hacer uso del concepto de medida. Esto puede hacerse cuando tenemos un integral elemental I definida en alguna clase L de funciones elementales y mediante ciertos procedimientos agrandamos la clase L y extendemos I de tal manera que posea todas las propiedades de la integral de Lebesgue, incluyendo los teoremas de convergencia.

Describiremos entonces este procedimiento de extensión formulado y desarrollado por Daniell y generalizado por Stone. Mostraremos también su relación con teoría de medida.

DEFINICION 4.3.1

Sea L una familia de funciones de valores reales definidas en algún conjunto X. Decimos que L es una red vectorial si para cualesquiera funciones f,g en L entonces $\alpha f + \beta g$, $f \vee g$ y $f \wedge g$ también están en L, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, donde

$$(f \vee g)(x) = \text{máx}(f(x), g(x)),$$
$$(f \wedge g)(x) = \text{mín}(f(x), g(x)).$$

Se desprende de la anterior definición que un espacio vectorial L de funciones es una red vectorial si para cada función h en L se tiene que $h \vee 0 \in L$ ya que

$$f \wedge g = f + g - (f \vee g) \quad y \quad f \vee g = (f-g) \vee 0 + g.$$

DEFINICION 4.3.2

Sea L una familia de funciones de valores reales extendidos definidas en algún conjunto X. Decimos que L es una red vectorial si para $f, g \in L$ se tiene que las funciones $f \vee g$, $f \wedge g$ y αf están en L así como la función h tal que $h(x) = f(x) + g(x)$ siempre que el miembro derecho esté definido.

DEFINICION 4.3.3

Sea L una red vectorial, decimos que I es un funcional lineal en L si I es una función de L en IR tal que:

$I(\alpha f) = \alpha I(f)$ *y* $I(h) = I(f) + I(g)$ *cuando* $h = f + g$.

DEFINICION 4.3.4

Un funcional lineal I en una red vectorial L es llamado positivo si $I(\phi) \geq 0$ para cada función no negativa ϕ en L.

Nótese que si un funcional lineal es poritivo y $\phi \leq \psi$, entonces $I(\phi) \leq I(\psi)$.

DEFINICION 4.3.5

Un funcional lineal positivo I en L es denominado integral de Daniell si satisface la condición siguiente (denotada por D):

D. Si (ϕ_n) es una sucesión de funciones en L que decrece a cero en cada punto, entonces

$$Lim\ I(\phi_n) = 0.$$

A efecto de contar con alternativas para precisar si un funcional lineal positivo es un integral de Daniell, establecemos proposiciones equivalentes a D.

LEMA 4.3.6

La condición D es equivalente a cada una de las siguientes condiciones:

D'. Si (ϕ_n) es una sucesión creciente de funciones en L, y si ϕ es una función en L tal que $\phi \leq Lim\ \phi_n$, entonces

$$I(\phi) \leq Lim\ I(\phi_n).$$

D". Si (u_n) es una sucesión de funciones no-negativas en L, y si ϕ es una función en L tal que $\phi \leq \sum u_n$, entonces

$$I(\phi) \leq \sum I(u_n).$$

PRUEBA

$D \Rightarrow D'$:

Sea (ϕ_n) una sucesión creciente de funciones en L y sea ϕ una función en L tal que $\phi \leq \mathrm{Lim}\, \phi_n$,

$(\phi_n \wedge \phi)$ es una sucesión creciente que converge a ϕ,
$(\phi - \phi_n \wedge \phi)$ es una sucesión de funciones en L que decrece a cero en cada punto,

entonces por D:

$$\mathrm{Lim}\, I(\phi - \phi_n \wedge \phi) = 0$$
$$\Rightarrow \mathrm{Lim}\, (I(\phi) - I(\phi_n \wedge \phi)) = 0$$
$$\Rightarrow I(\phi) = \mathrm{Lim}\, I(\phi_n \wedge \phi),$$

pero $\phi_n \wedge \phi \leq \phi_n$, entonces $I(\phi_n \wedge \phi) \leq I(\phi_n)$,
y así $\mathrm{Lim}\, I(\phi_n \wedge \phi) \leq \mathrm{Lim}\, I(\phi_n)$,
por tanto $I(\phi) \leq \mathrm{Lim}\, I(\phi_n)$.

$D' \Rightarrow D''$:

Sea (u_n) una sucesión de funciones no-negativas en L, y ϕ una función en L tal que $\phi \leq \sum u_n$.

Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$, así (S_n) es una sucesión creciente de funciones en L y además $\phi \leq \mathrm{Lim}\, S_n$,
por D' tenemos que:

$$I(\phi) \leq \text{Lim } I(S_n)$$

$$I(\phi) \leq \text{Lim } I(\sum_{i=1}^{n} u_i)$$

$$\leq \text{Lim } \sum_{i=1}^{n} I(u_i),$$

de donde $I(\phi) \leq \sum I(u_i)$.

D" => D:

Sea (ϕ_n) una sucesión de funciones en L que decrece a cero en cada punto,

sea $u_n = \phi_n - \phi_{n+1}$, entonces (u_n) es una sucesión de funciones no-negativas en L y además:

$$\sum u_n = \phi_1 - \text{Lim } \phi_n = \phi_1;$$

como $\phi_1 \leq \sum u_n$, por D" tenemos

$$I(\phi_1) \leq \sum I(u_n) = \text{Lim } \sum_{i=1}^{n} I(u_i),$$

$$I(\phi_1) \leq \text{Lim } \sum_{i=1}^{n} (I(\phi_i) - I(\phi_{i+1})) = \text{Lim}(I(\phi_1)-I(\phi_{n+1})),$$

$$I(\phi_1) \leq I(\phi_1) - \text{Lim } I(\phi_n)$$

$$\Rightarrow \text{Lim } I(\phi_n) \leq 0.$$

Por otro lado $\phi_n \geq 0$ para todo n,

como I es positivo se tiene que $I(\phi_n) \geq 0$,

luego $\text{Lim } I(\phi_n) \geq 0$ y concluimos que:

$$\text{Lim } I(\phi_n) = 0,$$

por consiguiente D,D' y D" son equivalentes ▲

En general los límites de funciones en L no pertenecen a L, procedemos entonces a extender I a una clase L_1 que contenga a L y que sea cerrado bajo ciertas operaciones que involucren límites. Análizamos este procedimiento a continuación.

4- EL TEOREMA DE EXTENSION PARA FUNCIONALES LINEALES POSITIVOS DEFINIDOS EN UNA RED VECTORIAL

DEFINICION 4.4.1

Denotamos por L_u el conjunto de todas las funciones de valores reales extendidos definidas en un conjunto X, cada una de las cuales es el límite de una sucesión creciente de funciones en L.

Resulta claro que si f y g pertenecen a L_u, entonces $\alpha f + \beta g \in L_u$ donde α y β son constantes no-negativas.

También si (ϕ_n) es una sucesión creciente de funciones en L, entonces $(I(\phi_n))$ es una sucesión creciente de números reales y debe por tanto tener límite (eventualmente puede ser ∞). De nuevo parece natural intentar definir $\text{Lim } I(\phi_n)$ como el valor de I para la función f, la cual es el límite puntual dé la sucesión (ϕ_n). Necesitamos entonces asegurarnos que el valor de I(f) depende sólo de la función f y no de la es cogencia de la sucesión creciente (ϕ_n) cuyo Límite es f.

Garantizamos lo anterior en el siguiente lema.

LEMA 4.4.2

Si (ϕ_n) y (ψ_n) son sucesiones crecientes de funciones en L y si $Lim\ \phi_n \leq Lim\ \psi_m$, entonces

$$Lim\ I(\phi_n) \leq Lim\ I(\psi_m).$$

PRUEBA

Para un n fijo tenemos:

$$\phi_n \leq \text{Lim}\ \phi_n \leq \text{Lim}\ \psi_m,$$

por D' obtenemos $I(\phi_n) \leq \text{Lim}\ I(\psi_m)$,

por tanto $\text{Lim}\ I(\phi_n) \leq \text{Lim}\ I(\psi_m)$ ▲

El lema anterior nos garantiza que si tenemos dos sucesiones de funciones crecientes en L (ϕ_n) y (ψ_n) que tienen igual Límite f, entonces $I(f) = \text{Lim}\ I(\phi_n) = \text{Lim}\ I(\psi_n)$. Así el valor de I(f) depende sólo de la función f y no de la escogencia de la sucesión creciente a f.

Habría que clarificar el hecho que L_u es una red vectorial, observemos para ello que si $f, g \in L_u$ entonces existen sucesiones crecientes (f_n) y (g_n) en L tales que

$$f_n \to g \quad y \quad g_n \to g.$$

entonces la sucesión $(\alpha f_n + \beta g_n)$ con α y β constantes none-gativas es creciente y converge a $\alpha f + \beta g$,
por tanto $\alpha f + \beta g \in L_u$.

Además las sucesiones
$(f_n \wedge g_n)$ y $(f_n \vee g_n)$ son crecientes en L y convergen a $f \wedge g$ y $f \vee g$ respectivamentes. Así $f \wedge g$ y $f \vee g$ pertenecen a L_u.

Podemos, por consiguiente, extender el funcional I a un funcional de valores reales extendidos definido en L_u, con la propiedad de $I(f) \leq I(g)$ para $f \leq g$ y
$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ con $f, g \in L_u$ y α, β constantes no-negativas.

LEMA 4.4.3

Una función no-negativa f pertenece a L_u si y sólo si existe una sucesión (ψ_k) de funciones no-negativas en L tal que $f = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k$. En este caso $I(f) = \sum_{k=1}^{\infty} I(\psi_k)$.

PRUEBA

Es evidente que si existe una sucesión (ψ_k) de funciones no-negativas en L tal que $f = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k$ entonces $f \varepsilon L_u$ ya que la sucesión de sumas parciales crece a f.

Veamos la otra implicación:

sea f no-negativa, como $f \varepsilon L_u$ existe una sucesión creciente (ϕ_n) de funciones en L cuyo límite es f.

Reemplazando ϕ_n por $\phi_n \vee 0$ podemos asumir cada ϕ_n no-negati_ va,

hagamos $\psi_1 = \phi_1$, $\psi_n = \phi_n - \phi_{n-1}$ para $n > 1$.

Entonces $f = \text{Lim}\ \phi_n = \text{Lim} \sum_{k=1}^{n} \psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k$ y

$$I(f) = \text{Lim}\ I(\phi_n)$$
$$= \text{Lim}\ I(\sum_{k=1}^{n} \psi_k)$$
$$= \text{Lim} \sum_{k=1}^{n} I(\psi_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} I(\psi_k) \qquad \blacktriangle$$

LEMA 4.4.4

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones no-negativas en L_u. En-

tonces la función $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *está en* L_u *y*

$$I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n).$$

PRUEBA

Para cada f_n por el lema anterior existe una sucesión $(\psi_{n,k})$ de funciones no-negativas en L tal que $f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{n,k}$, por lo tanto $f = \sum_{n,k} \psi_{n,k}$.

Dado que el conjunto de pares de enteros es contable, f es la suma de una sucesión de funciones no-negativas en L, y así f debe estar en L_u.

Asimismo

$$I(f) = \sum_{n,k} I(\psi_{n,k})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n) \quad \blacktriangle$$

DEFINICION 4.4.5

Sea f *una función arbitraria definida en un conjunto* X, *definamos el integral superior* $\bar{I}(f)$ *así:*

$$\bar{I}(f) = \inf_{\substack{g \geq f \\ g \in L_u}} I(g),$$

donde adoptamos la convención que el ínfimo del conjunto vacío es $+\infty$; definimos el integral inferior $\underline{I}(f)$ como

$$\underline{I}(f) = -\overline{I}(-f).$$

Precisamos a continuación las propiedades elementales del integral superior e inferior.

LEMA 4.4.6

Sea $h = f + g$. Entonces $\overline{I}(h) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g)$ siempre que el miembro derecho esté definido. Si $c \geq 0$, $\overline{I}(cf) = c\overline{I}(f)$.

Si $f \leq g$, entonces $\overline{I}(f) \leq \overline{I}(g)$ y $\underline{I}(f) \leq \underline{I}(g)$.

PRUEBA

Sean funciones $t, \ell \in L_u$ tales que $t \geq f$ y $\ell \geq g$, entonces

$$t + \ell \geq h \quad \text{y}$$

$$\overline{I}(h) \leq I(t) + I(\ell)$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{I}(h) \leq \inf_{\substack{t \geq f \\ t \in L_u}} I(t) + \inf_{\substack{\ell \geq g \\ \ell \in L_u}} I(\ell)$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{I}(h) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g).$$

Si $c = 0$, entonces $\overline{I}(cf) = 0 = c\overline{I}(f)$,

si $c > 0$, entonces:

$$c\overline{I}(f) = c.\inf_{\substack{g\geq f\\ g\in L_u}} I(g) = \inf_{\substack{g\geq f\\ g\in L_u}} I(cg) = \inf_{\substack{h\geq cf\\ h\in L_u}} I(h) = \overline{I}(cf).$$

Sea por otro lado $h\in L_u$ y $f \leq g \leq h$, luego

$$\overline{I}(f) \leq I(h) \Rightarrow \overline{I}(f) \leq \inf_{\substack{h\geq g\\ h\in L_u}} I(h)$$

$$\Rightarrow \overline{I}(f) \leq \overline{I}(g);$$

además como $f \leq g$ entonces $-g \leq -f$,

esto implica $\overline{I}(-g) \leq \overline{I}(-f)$

$$\Rightarrow -\overline{I}(-f) \leq -\overline{I}(-g)$$

$$\Rightarrow \underline{I}(f) \leq \underline{I}(g) \qquad \blacktriangle$$

LEMA 4.4.7

Para una función f cualquiera se tiene que $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$. Si $f\in L_u$, entonces $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I(f)$.

PRUEBA

Tenemos que $0 = I(0) = I(f - f) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(-f)$,

por tanto $-\overline{I}(-f) \leq \overline{I}(f)$ y

$$\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f).$$

Notemos que si $f \varepsilon L_u$ entonces $\overline{I}(f) \leq I(f)$ (por definición de $\overline{I}$).

Si $g \varepsilon L_u$ y $f \leq g$, entonces $I(f) \leq I(g)$, obtenemos además:

$$I(f) \leq \inf_{\substack{g \geq f \\ g \varepsilon L_u}} I(g), \text{ así } I(f) \leq \overline{I}(f),$$

por consiguiente $I(f) = \overline{I}(f)$.

Si $\phi \varepsilon L$, entonces $-\phi \varepsilon L c L_u$ y así

$$\overline{I}(-\phi) = I(-\phi) = -I(\phi),$$

concluimos que $\underline{I}(\phi) = I(\phi)$.

Pero cada $f \varepsilon L_u$ es el límite de una sucesión creciente (ϕ_n) de funciones en L. Dado que $f \geq \phi_n$ tenemos:

$$\underline{I}(f) \geq \underline{I}(\phi_n) = I(\phi_n), \text{ por tanto}$$

$$\underline{I}(f) \geq \operatorname{Lim} I(\phi_n) = I(f),$$

como además $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) = I(f)$ concluimos que:

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I(f) \quad \blacktriangle$$

LEMA 4.4.8

Sea (f_k) *una sucesión de funciones no-negativas, y* $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

Entonces $\overline{I}(f) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{I}(f_k)$.

PRUEBA

Si $\overline{I}(f_k) = \infty$ para algún k, es evidente que

$$\overline{I}(f) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{I}(f_k).$$

De lo contrario, dado $\varepsilon > 0$ existe una función $g_k \in L_u$ tal que $f_k \leq g_k$ y $I(g_k) \leq \overline{I}(f_k) + \varepsilon . 2^{-k}$.

Dado que cada g_k es no-negativa, por el lema 4.4.4 tenemos que:

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \in L_u \quad y \quad I(g) = \sum_{k=1}^{\infty} I(g_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{I}(f_k) + \varepsilon .$$

Como $g \geq f$ tenemos $\overline{I}(f) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{I}(f_k) + \varepsilon$,

a partir de que ε es un número positivo arbitrario

concluimos que $\overline{I}(f) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{I}(f_k)$ ▲

DEFINICION 4.4.9

Decimos que una función f definida en un conjunto X es integrable con respecto a I (o I-integrable) si $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ y además este valor es finito. Denotamos la clase de funciones integrables con respecto a I por L_1.

Para f en L_1 escribiremos ahora $I(f)$ en sustitución de $\overline{I}(f)$. Tenemos ahora una extensión de nuestro funcional lineal positivo original I a la clase de funciones L_1. Observemos a continuación las propiedades de L_1 y del funcional extendido.

PROPOSICION 4.4.10

El conjunto L_1 es una red vectorial de funciones que contiene a L, e I es un funcional lineal positivo en L_1, el cual extiende el funcional I en L.

PRUEBA

Sea f en L_1,

para $c \geq 0$: $\overline{I}(cf) = c\overline{I}(f) = c\underline{I}(f) = \underline{I}(cf)$ y

para $c \leq 0$: $\overline{I}(cf) = c\underline{I}(f) = c\overline{I}(f) = \underline{I}(cf)$,

así $cf \in L_1$.

Sean $f,g \in L_1$, entonces:

$$\overline{I}(f+g) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g) = I(f) + I(g)\ldots \quad (1)$$

$$y \quad -\underline{I}(f+g) = \overline{I}(-f-g) \leq -I(f) - I(g)$$

$$\Longrightarrow \underline{I}(f+g) \geq I(f) + I(g)\ldots \quad (2),$$

de (1) y (2) tenemos que

$$\overline{I}(f+g) \leq \underline{I}(f+g),$$

de donde $\overline{I}(f+g) = \underline{I}(f+g) = I(f) + I(g)$

y así $f + g \in L_1$.

Por consiguiente L_1 es un espacio lineal, e I es un funcional lineal en L_1.

Como $L \subset L_u$ y $I(f) < \infty$ para toda $f \in L$, tenemos por el lema 4.4.7 que $L \subset L_1$ y que nuestra definición de I en L_1 nos brinda un funcional lineal positivo que coincide con el original I en L_1.

Para probar que L_1 es una red basta mostrar que si f está en L_1, entonces $f^+ \in L_1$.

Sea entonces f en L_1, por tanto para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones g y h en L_u tal que $-h \leq f \leq g$, mientras que

$$I(g) \leq I(f) + \varepsilon < \infty \text{ y } I(h) \leq -I(f)+\varepsilon < \infty;$$

dado que $g = (g \vee 0) + (g \wedge 0)$ y $(g \wedge 0) \in L_u$, tenemos que $I(g \wedge 0) > -\infty$ y $I(g \vee 0) \leq I(g) - I(g \wedge 0) < \infty$.

Por tanto la función $g_1 = g \vee 0$ está en L_u y $I(g_1) < \infty$.

Sea $h_1 = h \wedge 0$, entonces $h \in L_u$ y como

$$-h \leq f \leq g \quad \text{entonces } (-h \vee 0) \leq f \vee 0 \leq g \vee 0,$$

$$\text{es decir } -(h \wedge 0) \leq f \vee 0 \leq g \vee 0$$

$$\Rightarrow -h_1 \leq f^+ \leq g_1;$$

dado que $g \geq -h$ tenemos $g \wedge 0 \geq (-h \wedge 0)$, o sea $g \wedge 0 \geq -(h \vee 0)$,

$\Rightarrow (g \wedge 0) + (h \vee 0) \geq 0$,

expresemos $g + h$ así:

$g + h = g_1 + (g \wedge 0) + h_1 + (h \vee 0) = g_1 + h_1 + (g \wedge 0) + (h \vee 0)$,

obtenemos $g + h \geq g_1 + h_1$.

Consecuentemente $I(g_1) + I(h_1) \leq I(g) + I(h) < 2\varepsilon$;

como $-I(h_1) \leq \underline{I}(f^+) \leq \overline{I}(f^+) \leq I(g_1)$ entonces

$$\overline{I}(f^+) - \underline{I}(f^+) < 2\varepsilon \quad y$$

como ε es arbitrario concluimos que $\overline{I}(f^+) = \underline{I}(f^+)$.

Además $0 \leq \overline{I}(f^+) \leq I(g_1) < \infty$,

asi $f^+ \varepsilon L_1$ y L_1 es por tanto una red vectorial ▲

Desarrollamos a continuación una proposición análoga para L_1 del teorema de convergencia monótona. Muestra también que L_1 e I satisface la condición D' y por tanto D.

PROPOSICION 4.4.11

Sea (f_n) una sucesión creciente de funciones en L_1, y sea $f = \operatorname{Lim} f_n$. Entonces $f \varepsilon L_1$ si y sólo si $\operatorname{Lim} I(f_n) < \infty$. En este caso $I(f) = \operatorname{Lim} I(f_n)$.

PRUEBA

$\Rightarrow$) Dado que $f \geq f_n$, se tiene $\overline{I}(f) \geq I(f_n)$, si $\text{Lim}\, I(f_n) = \infty$ entonces $\overline{I}(f) \geq \text{Lim}\, I(f_n) = \infty$,

así $\overline{I}(f) = \infty$ y $f \notin L_1$.

<=) Supongamos que $\text{Lim}\, I(f_n) < \infty$;

Sea $g = f - f_1$, entonces $g \geq 0$ y $g = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)$

Por lema 4.4.8:

$$\overline{I}(g) \leq \sum_{n=1}^{\infty} I(f_{n+1}-f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (I(f_{n+1})-I(f_n))$$

$$= \text{Lim}\, I(f_n) - I(f_1).$$

Como $f = f_1+g$, se tiene $\overline{I}(f) = \overline{I}(f_1+g)$

$$\leq I(f_1)+\overline{I}(g) \leq \text{Lim}\, I(f_n),$$

así $\overline{I}(f) \leq \text{Lim}\, I(f_n) \ldots (1)$.

Dado que $f_n \leq f$ tenemos $I(f_n) \leq \underline{I}(f)$,

luego $\text{Lim}\, I(f_n) \leq \underline{I}(f) \ldots (2)$

De (1) y (2) concluimos que:

$$\overline{I}(f) \leq \text{Lim}\, I(f_n) \leq \underline{I}(f),$$

de donde $\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = \text{Lim}\, I(f_n)$ ▲

COROLARIO 4.4.12

El funcional I es un integral de Daniell en la red vectorial L_1.

PRUEBA

Sea (ϕ_n) una sucesión creciente de funciones en L_1 y ϕ una función en L_1 tal que $\phi \leq \mathrm{Lim}\ \phi_n$, entonces:

$(\phi_n \wedge \phi)$ es una sucesión creciente de funciones en L_1 tal que $\mathrm{Lim}\ (\phi_n \wedge \phi) = \phi$.

Además $\phi_n \geq \phi_n \wedge \phi$, entonces $I(\phi_n) \geq I(\phi_n \wedge \phi)$,

así $\mathrm{Lim}\ I(\phi_n) \geq \mathrm{Lim}\ I(\phi_n \wedge \phi)$,

sabemos que $\mathrm{Lim}\ (\phi_n \wedge \phi) = \phi \in L_1$,

por proposición anterior $I(\phi) = \mathrm{Lim}\ I(\phi_n \wedge \phi)$,

por tanto $I(\phi) \leq \mathrm{Lim}\ I(\phi_n)$,

de donde el funcional I es un integral de Daniell en L_1 ▲

Las siguientes dos proposiciones son los análogos para el integral I del lema de Fatou y del teorema de convergencia de Lebesgue.

PROPOSICION 4.4.13

Sea (f_k) una sucesión de funciones no negativas en L_1. Entonces la función $\inf f_k$ está en L_1, y la función $\underline{\mathrm{Lim}}\ f_k$ está en L_1 si $\underline{\mathrm{Lim}}\ I(f_k) < \infty$. En este caso:

$$I(\underline{\mathrm{Lim}}\ f_k) \leq \underline{\mathrm{Lim}}\ I(f_k)$$

PRUEBA

Sea $g_n = f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n$, entonces (g_n) es una sucesión de funciones no negativas en L_1 que decrece a $g = \inf f_k$.

Luego $(-g_n)$ crece a $-g$ y como $I(-g_n) \leq 0$

se tiene que $\operatorname{Lim} I(-g_n) \leq 0$,

y así por porposición 4.4.11 $-g \varepsilon L_1$ y por consiguiente $g = \inf f_k \varepsilon L_1$.

Sea $h_n = \inf f_k$, entonces (h_n) es una sucesión de funciones no-negativas en L_1 que crece a $\underline{\operatorname{Lim}}\, f_k$.

Dado que $h_n \leq f_k$, para $n \leq k$, tenemos:

$I(h_n) \leq I(f_k)$ para $n \leq k$, luego

$\operatorname{Lim} I(h_n) \leq \underline{\operatorname{Lim}}\, I(f_k) < \infty$.

Por consiguiente $\operatorname{Lim} h_n \varepsilon L_1$, es decir $\underline{\operatorname{Lim}}\, f_k \varepsilon L_1$ y también $I(\underline{\operatorname{Lim}}\, f_k) = \operatorname{Lim} I(h_n)$ por proposición 4.4.11, de donde $I(\underline{\operatorname{Lim}}\, f_k) \leq \underline{\operatorname{Lim}}\, I(f_k)$ ▲

PROPOSICION 4.4.14

Sea (f_n) una sucesión de funciones en L_1 y supongamos que existe una función g en L_1 tal que para todo n se tiene que $|f_n| \leq g$. Entonces si $f = \operatorname{Lim} f_n$, tenemos

$$I(f) = \operatorname{Lim} I(f_n).$$

PRUEBA

Las funciones $f_n + g$ son no-negativas, y

$$I(f_n + g) \leq 2I(g), \text{ entonces}$$
$$\underline{\text{Lim}}\, I(f_n + g) \leq 2I(g) < \infty.$$

Por proposición anterior $\underline{\text{Lim}}\,(f_n + g) = f + g \in L_1$ y

$$I(f + g) \leq \underline{\text{Lim}}\, I(f_n + g) = I(g) + \underline{\text{Lim}}\, I(f_n),$$

se deduce que $I(f) \leq \underline{\text{Lim}}\, I(f_n)$. (1)

Asimismo, las funciones $g - f_n$ son no negativas, así tenemos

$$I(g - f) \leq \underline{\text{Lim}}\, I(g-f_n) = I(g) - \overline{\text{Lim}}\, I(f_n),$$

es decir $\overline{\text{Lim}}\, I(f_n) \leq I(f)$... (2).

De (1) y (2): $\overline{\text{Lim}}\, I(f_n) = \underline{\text{Lim}}\, I(f_n) = I(f)$,

de donde $\text{Lim}\, I(f_n)$ existe y es igual a $I(f)$ ▲

Mostraremos ahora que la extensión a L_1 de un integral de Daniell I en L es única.

DEFINICION 4.4.15

Denotamos por L_{ul} la clase de aquellas funciones en X que son límite de una sucesión decreciente (f_n) de funciones en L_u con $I(f_n) < \infty$ y $\text{Lim}\, I(f_n) > -\infty$.

Nótese que si aplicamos la proposición 4.4.11 a la sucesión $(-f_n)$ deducimos que $L_{u\ell} \subset L_1$.

LEMA 4.4.16

Si f es cualquier función en X con $\overline{I}(f)$ finito, entonces existe $g \in L_{u\ell}$ tal que $f \leq g$ y $\overline{I}(f) = I(g)$.

PRUEBA

Como $\overline{I}(f)$ es finito, dado n podemos encontrar $h_n \in L_u$ tal que $f \leq h_n$ y $I(h_n) \leq \overline{I}(f) + \frac{1}{n}$.

Haciendo $g_n = h_1 \wedge h_2 \wedge \ldots \wedge h_n$, tenemos $f \leq g_n \leq h_n$, por tanto (g_n) es una sucesión decreciente de funciones en L_u con $\overline{I}(f) \leq I(g_n) \leq \overline{I}(f) + \frac{1}{n}$.

Así tenemos $I(g_n) < \infty$ y $\operatorname{Lim} I(g_n) > -\infty$, entonces la función $g = \operatorname{Lim} g_n$ está en $L_{u\ell}$, mientras que

$$f \leq g \text{ y } \overline{I}(f) = I(g) \qquad \blacktriangle$$

DEFINICION 4.4.17

Una función f definida en X es llamada función nula si $f \in L_1$ y $I(|f|) = 0$.

PROPOSICION 4.4.18

a) *Una función f en X está en L_1 si y sólo si f es la diferencia $g - h$ de una función g en $L_{u\ell}$ y una función nula no-negativa h.*

b) *Una función h es una función nula si y sólo si existe una función nula k en $L_{u\ell}$ tal que $|h| \leq k$.*

PRUEBA

a) =>) Si $f \in L_1$ entonces el lema 4.4.16 asegura la existencia de $g \in L_{u\ell}$ tal que $f \leq g$ y $I(f) = I(g)$, de ahí que $h = g - f$ es una función no negativa y $I(h) = 0$, así $f = g - h$ con $g \in L_{u\ell}$ y h nula no-negativa.

<=) Si $f = g - h$, entonces f es la diferencia de dos funciones en L_1 y por tanto f debe ser de L_1.

b) =>) Si h es una función nula, entonces por el lema 4.4.16 existe $k \in L_{u\ell}$ con $|h| \leq k$ y

$$I(k) = I(|h|) = 0,$$

así k es nula.

<=) Si $|h| \leq k$ con k nula, entonces

$$0 \leq \underline{I}(|h|) \leq \overline{I}(|h|) \leq I(k) = 0,$$

de donde $h \in L_1$, $I(|h|) = 0$ y así h es nula ▲

PROPOSICION 4.4.19

Sea I un integral de Daniell en una red vectorial L de funciones en X y sea J un integral de Daniell en una red vectorial $M \supset L$. Si $I(f) = J(f)$ para toda $f \in L$, entonces $M_1 \supset L_1$ y $I(f) = J(f)$ para toda $f \in L_1$.

PRUEBA

Sea $f \in L_{u\ell}$, entonces f es límite de una sucesión decreciente (f_n) de funciones en L_u con $I(f_n) < \infty$ y $\operatorname{Lim} I(f_n) > -\infty$.

Como $f_n \in L_u$ para toda n, f_n es el límite de una sucesión creciente (f_{n_k}) de funciones en L.

Como $f_{n_k} \leq f_n$ se tiene que $I(f_{n_k}) \leq I(f_n)$,

es decir $J(f_{n_k}) \leq I(f_n)$ y

$$\operatorname{Lim}_k J(f_{n_k}) \leq I(f_n) < \infty.$$

Por proposición 4.4.11 $f_n \in M_1$ y

$$J(f_n) = \operatorname{Lim}_k J(f_{n_k}) = \operatorname{Lim}_k I(f_{n_k}) = I(f_n),$$

entonces $J(f_n) = I(f_n)$, $\forall n$.

Luego $(-f_n)$ es una sucesión creciente de funciones en M_1 con $\text{Lim}\, J(-f_n) < \infty$, entonces de nuevo por proposición 4.4.11 tenemos que $-f \in M_1$ y

$$J(-f) = \text{Lim}\, J(-f_n),$$

por tanto $f \in M_1$ y

$$J(f) = \text{Lim}\, J(f_n) = \text{Lim}\, I(f_n) = I(f).$$

Luego $L_{u\ell} \subset M_1$ y $J(f) = I(f)$ para todo $f \in L_{u\ell}$.

Por la parte b) de la proposición 4.4.18 cada función que es nula respecto a I debe también ser nula respecto a J, y como por la primera parte de la proposición 4.4.18 cualquier función $f \in L_1$ es la diferencia:

$$f = g - h, \text{ con } g \in L_{u\ell} \text{ y } h \text{ nula con respecto a } I,$$

entonces f es la diferencia de funciones en M_1 y por tanto

$f \in M_1$ y

$$I(f) = I(g) - I(h) = J(g) - J(h) = J(f) \quad \blacktriangle$$

Observemos ahora la relación existente entre el procedimiento de extensión y la teoría de la medida.

DEFINICION 4.4.20

Decimos que una función no negativa f en X es medible (con respecto a I) si $g \wedge f \in L_1$ para cada $g \in L_1$.

LEMA 4.4.21

i) *Si f y g son funciones medibles no negativas, entonces $f \wedge g$ y $f \vee g$ son medibles.*

ii) *Si (f_n) es una sucesión de funciones medibles no negativas que converge puntualmente a una función f, entonces f es medible.*

PRUEBA

Sean f y g funciones medibles no negativas y $h \in L_1$, entonces: $h \wedge (f \wedge g) = (h \wedge f) \wedge (h \wedge g)$ y

$h \wedge (f \vee g) = (h \wedge f) \vee (h \wedge g)$.

Como f y g son medibles $h \wedge f \in L_1$ y $h \wedge g \in L_1$, L_1 es una red y por tanto $h \wedge (f \wedge g) \in L_1$ y $h \wedge (f \vee g) \in L_1$, entonces $f \wedge g$ y $f \vee g$ son medibles.

Sea ahora (f_n) una sucesión de funciones medibles no-negativas que converge puntualmente a f y g una función en L_1, entonces $(g \wedge f_n)$ es una sucesión de funciones en L_1 que converge a $g \wedge f$.

Dado que $|f_n \wedge g| \leq |g|$, $|g| \in L_1$, tenemos:

$f \wedge g \in L_1$ por proposición 4.4.14 y

así f es medible ▲

LEMA 4.4.22

Una función no negativa f en X es medible con respecto a I si $\phi \wedge f \in L$ para cada $\phi \in L$.

PRUEBA

Si $\phi \in L$ entonces $\phi \wedge f \in L_1$ para f no-negativa en X.

Sea $g \in L_u$ con $I(g) < \infty$, entonces g es el límite de una sucesión creciente (g_n) de funciones en L,

así $(g_n \wedge f)$ con f no-negativa es una sucesión creciente de funciones en L_1, como $g_n \wedge f \leq g$ entonces $I(g_n \wedge f) \leq I(g) < \infty$,

es decir $\text{Lim}\, I(g_n \wedge f) < \infty$,

por proposición 4.4.11 $g \wedge f \in L_1$,

así $g \wedge f \in L_1$ para $g \in L_u$ con $I(g) < \infty$.

Ahora sea $h \in L_{u\ell}$, entonces h es el límite de una sucesión de creciente (h_n) de funciones en L_u con $I(h_n) < \infty$ y $\text{Lim}\, I(h_n) > -\infty$. Entonces $(h_n \wedge f)$ es una sucesión en L_1 que converge a $h \wedge g$, dado que $|h_n \wedge f| \leq |h_1 \wedge f|$ para todo n con $|h_1 \wedge f| \in L_1$, entonces por proposición 4.4.14 obtenemos

$$I(h \wedge f) = \text{Lim}\, I(h_n \wedge f) \leq I(h_1 \wedge f) < \infty$$

por tanto $h \wedge f \in L_1$ para toda $h \in L_{u\ell}$.

Si ℓ es cualquier función en L_1, la proposición 4.4.18 dice que ℓ es la diferencia $\ell = g - k$ donde $g \in L_{u\ell}$ y k es una función nula no-negativa.

Dado que $0 \leq (g \wedge f) - (\ell \wedge f) \leq k$,. la función $\ell \wedge f$ difiere de la función integrable $g \wedge f$ por una función nula.

Asi $\ell \wedge f$ es integrable, probando que f es medible ▲

DEFINICION 4.4.23

Decimos que un conjunto $A \subseteq X$ *es medible con respecto a* I *si su función característica* x_A *es medible. Decimos que* A *es integrable si* x_A *es integrable.*

LEMA 4.4.24

i) *Si* A *y* B *son conjuntos medibles, entonces los conjuntos* $A \cup B$, $A \cap B$ *y* $A - B$ *son medibles.*

ii) *Si* (A_n) *es una sucesión de conjuntos medibles, entonces los conjuntos* $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ *y* $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ *son medibles.*

iii) *Si la función* 1 *es medible, entonces la clase* A *de conjuntos medibles es una* σ*-álgebra.*

PRUEBA

i) Sean A y B medibles,

dado que $x_{A \cap B} = x_A \wedge x_B$ y $x_{A \cup B} = x_A \vee x_B$, resulta que $A \cap B$ y $A \cup B$ son medibles;

para g en L_1 tenemos:

$$g \wedge \chi_{A-B} = (g \wedge \chi_A) - (g \wedge \chi_{A \cap B}) + (g \wedge 0)$$

y ya que A y $A \cap B$ son medibles concluimos que A - B es medible.

ii) Si $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, entonces $\chi_A = \text{Lim}\,(\chi_{A_1} \vee \ldots \vee \chi_{A_n})$, por literal i) $(\chi_{A_1} \vee \ldots \vee \chi_{A_n})$ es una sucesión de funciones medibles y por lema 4.4.21 χ_A es medible, por tanto A es medible.

Si $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$, entonces $\chi_A = \text{Lim}(\chi_{A_1} \wedge \chi_{A_2} \wedge \ldots \wedge \chi_{A_n})$, y asimismo por lema 4.4.21 χ_A es medible.

iii) Si 1 es medible, entonces el conjunto X es medible y por tanto el complemento de un conjunto medible es medible, junto a i) y ii) concluimos que la clase de conjuntos medibles es una σ-álgebra ▲

LEMA 4.4.25

Si 1 es una función medible y f una función integrable no-negativa, entonces para cada número real α el conjunto

$$E = \{x: f(x) > \alpha\} \quad \textit{es medible.}$$

PRUEBA

Si α es megativo, $E = X$ y E es medible dado que $x_E = 1$ y 1 es medible.

Asumamos que $\alpha \geq 0$,

$$\text{definimos} \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } \alpha = 0 \\ (\alpha^{-1}f(x)) - [(\alpha^{-1}f)(x) \wedge 1], & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

Como g es la diferencia de dos funciones en L_1 se sigue que $g \varepsilon L_1$.

En cualquier caso $g(x) > 0$ para $x \varepsilon E$ y

$$g(x) = 0 \text{ para } x \varepsilon E^c.$$

Sea $\phi_n = 1 \wedge (ng)$, entonces $\phi_n \varepsilon L_1$ y la sucesión (ϕ_n) es creciente y converge a x_E, como (ϕ_n) es una sucesión de funciones medibles se tiene que x_E es medible y así E es medible. ▲

LEMA 4.4.26

Sea la función 1 medible, y definamos una función de conjuntos μ en la clase A de conjuntos medibles así:

$$\mu(E) = I(x_E) \text{ si } x_E \text{ es integrable y}$$

$$\mu(E) = \infty \text{ de otro modo,}$$

entonces μ es una medida.

PRUEBA

Tenemos en primer lugar $\mu(\phi) = I(0) = 0$.

Si A y B son conjuntos integrables con $A \subset B$, tenemos $x_A \leq x_B$ y por tanto $\mu(A) \leq \mu(B)$. Así μ es monótona para conjuntos integrables y consecuentemente para conjuntos medibles.

Sea (E_i) una sucesión disjunta de conjuntos medibles y

$$\text{sea } E = \bigcup_{i\geq 1} E_i.$$

Si uno de los E_i no es integrable entonces E no es integrable y $\mu(E) = \infty = \sum\limits_{i\geq 1} \mu(E_i)$.

Si cada E_i es integrable, entonces x_{E_i} es integrable, así $(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{E_i})$ es una sucesión creciente de funciones en L_1 y $x_E = \operatorname{Lim} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_{E_i})$,

E será medible si y sólo si

$$\operatorname{Lim} I(\sum_{i=1}^{n} x_{E_i}) = \operatorname{Lim} \sum_{i=1}^{n} I(x_{E_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} I(x_{E_i}) < \infty,$$

$$\text{es decir } \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty.$$

En ambos casos $\mu(E) = \sum\limits_{i\geq 1} \mu(E_i)$,

y la medida μ es contablemente aditiva. ▲

El siguiente teorema evidencia que el integral de Daniell I en L_1 es equivalente al integral con respecto a esta medida μ.

TEOREMA 4.4.27 (Stone)

Sea L una red vectorial de funciones en X con la propiedad que si $f \in L$ entonces $1 \wedge f \in L$, y sea I un integral de Daniell en L. Entonces existe una σ-álgebra de subconjuntos de X y una medida μ en la σ-álgebra A tal que cada función f en X es integrable con respecto a I si y sólo si es integrable con respecto a μ. Además

$$I(f) = \int f d\mu.$$

PRUEBA

Sea A la clase de conjuntos que son medibles con respecto a I. Se sigue del lema 4.4.22 que la función 1 es medible. A partir de ello el lema 4.4.24 estalbece que A es una σ-álgebra, y el lema 4.4.25 asegura que cada función I-integrable no-negativa es medible con respecto a A.

Como cada función I-integrable es la diferencia de dos funciones I-integrables no negativas, cada función I-integrable debe ser medible con respecto a A.

Sea μ la medida dada en el lema anterior (4.4.26), y sea f una función no negativa, la cual es integrable con respecto a I.

Para cada par (k,n) de enteros positivos hacemos:

$$E_{k,n} = \{x: f(x) > k2^{-n}\},$$

entonces $E_{k,n}$ es medible, y dado que

$$\chi_{E_{k,n}} = \chi_{E_{k,n}} \wedge (k^{-1}2^n f),$$

tenemos que $\chi_{E_{k,n}} \in L_1$, y $\mu(E_{k,n}) = I(\chi_{E_{n,k}}) < \infty$.

Sea $\phi_n = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} \chi_{E_{k,n}}$,

entonces $\phi_n \in L_1$ y (ϕ_n) es una sucesión creciente de funciones que converge a f.

Por tanto $I(f) = \operatorname{Lim} I(\phi_n)$, pero

$$I(\phi_n) = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} I(\chi_{E_{n,k}})$$

$$= 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} \mu(\chi_{E_{n,k}})$$

$$= \int \phi_n d\mu.$$

Como por el teorema de convergencia monónotona sabemos

$$\int f d\mu = \operatorname{Lim} \int \phi_n d\mu,$$

tenemos entonces $I(f) = \text{Lim } I(\phi_n) = \text{Lim} \int \phi_n d\mu = \int f d\mu$,

$$\text{es decir } I(f) = \int f d\mu,$$

y f es integrable con respecto a μ.

Dado que una función f arbitraria I-integrable es la diferencia de dos funciones no-negativas I-integrables, concluimos que tal función f debe también ser integrable con respecto a μ y $I(f) = \int f d\mu$.

Si f es una función no negativa en X, la cual es integrable con respecto a μ, construimos $E_{k,n}$ y ϕ_n como anteriormente. Como $\int f d\mu < \infty$, cada $E_{k,n}$ tiene medida finita y así:

$$\chi_{E_{k,n}} \text{ y por tanto } \phi_n \text{ pertenecen a } L_1.$$

Como $\phi_n \uparrow f$ y $\text{Lim } I(\phi_n) = \int f d\mu < \infty$, tenemos que $f \in L_1$ por proposición 4.4.11.

Así, cada función integrable con respecto a μ es también integrable con respecto a I. ▲

5- MEDIDA Y TOPOLOGIA

DEFINICION 4.5.1

Un espacio topológico X es llamado localmente compacto si para cada $x \in X$ existe un conjunto abierto O que contiene a *x tal que $\bar{O}$ es compacto.*

PROPOSICION 4.5.2

Sea K un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff localmente compacto X. Entonces existe un conjunto abierto O que contiene a K con $\bar{O}$ compacto. Dado un conjunto O así, existe una función continua no-negativa f en X, la cual se anula fuera de O y es idénticamente 1 en K. Si K es también un G_δ, podemos tomar $f < 1$ en K^c.

PRUEBA

Como X es localmente compacto, para cada punto $x \in K$ existe un abierto O_x que contiene a x con $\bar{O}_x$ compacto,

se tiene que $\{O_x : x \in K\}$ es una cubierta abierta de K, como K es compacto existe una sub-colección finita

$\{Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n\}$ que cubre a K.

Hacemos $O = \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$; claramente O es abierto, $K \subset O$ y $\bar{O}$ es compacto.

Como X es Hausdorff, K es cerrado. Con O abierto dado como anteriormente se tiene por el lema de Urysohn que existe una función f continua de valores reales tal que $0 \leq f \leq 1$ en X, $f \equiv 1$ en K y $f \equiv 0$ en O^c.

Si K es un G_δ , entonces

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \text{ con } O_n \text{ abierto;}$$

por el lema de Urysohn existen funciones continuas:

$$f_n: X \longrightarrow [0,1],$$

$$\text{con } f_n \equiv 1 \text{ en } K \text{ y } f_n = 0 \text{ en } O_n^c,$$

hacemos $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n 2^{-n}$,

f es continua y $0 \leq f \leq 1$,

además $f^{-1}\{1\} = K$, de donde $f < 1$ en K^c ▲

Procedemos a establecer y precisar las relaciones entre las estructuras topológicas y teoría de medida.

DEFINICION 4.5.3

Si f es una función de valores reales, definimos el "soporte" de f como la cerradura del conjunto

$$\{x: f(x) \neq 0\}.$$

DEFINICION 4.5.4

Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto, denotamos por $C_c(X)$ la familia de funciones reales continuas definidas en X, las cuales se anulan fuera de un subconjunto compacto de X.

Por tanto $C_c(X)$ es la clase de todas las funciones reales continuas en X con soporte compacto.

DEFINICION 4.5.5

La clase de conjuntos de Baire se define como la más pequeña σ-álgebra B de subconjuntos de X tal que cada función en $C_c(X)$ *es medible con respecto a B. Es decir que B es la σ-álgebra generada por los conjuntos*

$$\{x: f(x) \geq \alpha\} \text{ con } f \in C_c(X).$$

PROPOSICION 4.5.6

La clase de conjuntos de Baire es la σ-álgebra generada por los G_δ *compactos.*

PRUEBA

Los conjuntos $\{x: f(x) \geq \alpha\}$ con $f \in C_c(X)$ y $\alpha > 0$ son G_δ compactos ya que f es continua y

$$\{x: f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}.$$

Observemos además que si $\alpha < 0$, entonces

$$\begin{aligned}\{x: f(x) \geq \alpha\} &= \{x: -f(x) \leq -\alpha\} \\ &= X - \{x: -f(x) > -\alpha\} \\ &= X - \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: -f(x) \geq -\alpha + \frac{1}{n}\},\end{aligned}$$

por tanto la σ-álgebra generada por los G_δ compactos incluye a B.

Por otro lado sea H un conjunto G_δ compacto, es decir

$$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n, \quad \mathcal{O}_n \text{ abierto},$$

por proposición 4.5.2 sabemos que existe una función f continua con soporte compacto que es idénticamente 1 en H y $f < 1$ en H^C,

notemos por tanto que

$$H = \{x: f(x) \geq 1\} ,$$

y así B incluye a la σ-álgebra generada por los G_δ compactos. ▲

DEFINICION 4.5.7

Si X ex un espacio topológico, la más pequeña σ-álgebra que contiene los conjuntos cerrados es denominada la clase de conjuntos de Borel.

DEFINICION 4.5.8

Un conjunto es llamado σ-compacto si es la unión de una colección contable de conjuntos compactos. Un conjunto contenido en un compacto es llamado acotado, y aquel contenido en un σ-compacto se dice σ-acotado.

LEMA 4.5.9

Si B es un conjunto de Baire, entonces B o bien B^c es σ-acotado.

PRUEBA

Sea el conjunto $E = \{B: B$ ó B^c es σ-acotado$\}$, a probar que E es una σ-álgebra.

i) por la construcción de la clase: $B^c \in E$ si $B \in E$.

ii) Sea (B_i) una colección numerable en E;

si B_i es σ-acotado para todo i entonces $\bigcup_{i \geq 1} B_i$ es σ-acotado,

si B_i^c es σ-acotado para todo i entonces $(\bigcup_{i \geq 1} B_i)^c$ es σ-acotado,

si A es σ-acotado y B^c σ-acotado entonces

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset B^c,$$

así $(A \cup B)^c$ es σ-acotado y por tanto $(A \cup B) \in E$, de donde E es una σ-álgebra.

Como esta σ-álgebra contiene todos los conjuntos compactos, debe incluir todos los conjuntos de Baire ▲

DEFINICION 4.5.10

Una medida μ definida en la σ-álgebra de conjuntos de Baire es llamada medida de Baire si es finita para cada conjunto de Baire compacto.

En lo que resta del presente trabajo mostraremos que cada funcional lineal positivo es dado mediante integración con respecto a una medida de Baire apropiada y que para espacios compactos X cada funcional lineal acotado en C(X) (espacio de funciones reales continuas en X) es dado mediante integración con respecto a una medida finita con signo de Baire.

Con respecto a esto último, definimos a continuación integración con respecto a una medida con signo.

DEFINICION 4.5.11

Sea ν una medida con signo, definimos integración con respecto a ν así: $\int f d\nu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^-$.

6- FUNCIONALES LINEALES POSITIVOS Y MEDIDAS DE BAIRE

LEMA 4.6.1

Si K es un compacto G_δ, existe una sucesión (ϕ_n) de funcio-

nes en $C_c(X)$ *tal que* $\phi_n \downarrow \chi_K$.

PRUEBA

Por proposición 4.5.2 existe una función no-negativa $\phi \in C_c(X)$ con $\phi \equiv 1$ en K y $0 \leq \phi < 1$ en K^c.

Sea $\phi_n = \phi^n$,

es evidente que $\phi_{n+1}(x) \leq \phi_n(x)$ para todo x y la sucesión (ϕ_n) converge a χ_K ▲

LEMA 4.6.2

Sean μ_1 *y* μ_2 *medidas de Baire en un espacio Hausdorff compacto* X. *Si* $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ *cuando* K *es un conjunto* G_δ *compacto, entonces* $\mu_1 = \mu_2$.

PRUEBA

Sea E la colección de conjuntos de la forma

$C = K_1 \cap K_2^c$ donde K_1 y K_2 son G_δ compactos con $K_2 \subset K_1$.

Nótese que si K es un G_δ compacta, entonces

$K = K \cap \phi^c$ y $K^c = X \cap K^c$,

es decir tanto K como K^c pertenecen a E.

Sean ahora C_1 y C_2 en E,

$$C_1 = K_1 \cap K_2^c \ , \ K_1, K_2 \ G_\delta \text{ compactos con } K_2 \subset K_1$$

$$C_2 = K_3 \cap K_4^c \ , \ K_3, K_4 \ G_\delta \text{ compactos con } K_4 \subset K_3,$$

$C_1 \cap C_2 = (K_1 \cap K_3) \cap [(K_1 \cap K_4) \cup (K_2 \cap K_3)]^c$

$K_1 \cap K_3$ y $(K_1 \cap K_4) \cup (K_2 \cap K_3)$ G_δ compactos y

$(K_1 \cap K_4) \cup (K_2 \cap K_3) \subset K_1 \cap K_3$,

esto significa que la intersección de dos conjuntos en E está de nuevo en E.

También $C_1^c = K_1^c \cup K_2$, o sea que el complemento de cualquier conjunto en E es la unión finita disjunta de conjuntos de E;

de lo anterior concluimos que E es una semi-álgebra que incluye la semi-álgebra generada por los G_δ compactos.

Como $\mu_i(C) = \mu_i(K_1) - \mu_i(K_2)$, observamos que μ_1 y μ_2 coinciden en la semi-álgebra generada por los G_δ compactos.

Las proposiciones 4.2.9 y 4.2.8 implican que sus extensiones a la menor σ-álgebra que contiene a la semi-álgebra generada por los G_δ compactos son idénticos ya que

$$\mu_1(X) = \mu_2(X) < \infty \qquad \blacktriangle$$

COROLARIO 4.6.3

Sean μ_1 y μ_2 medidas de Baire en un espacio Hausdorff localmente compacto tal que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ para cada G_δ compacto K. Entonces $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ para cada conjunto σ-acotado de Baire.

TEOREMA 4.6.4

Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto e I un funcional lineal positivo en $C_c(X)$. Entonces existe una medida de Baire μ tal que para cada f en $C_c(X)$ tenemos

$$I(f) = \int f d\mu.$$

Si X es compacto, la medida μ es única. En general μ está unívocamente determinada en los conjuntos de Baire σ-acotados.

PRUEBA

El espacio $C_c(X)$ es una red vectorial, además si $f \in C_c(X)$ entonces $1 \wedge f \in C_c(X)$, I será un integral de Daniell si satisfacen la condición de Daniell D.

Sea (ϕ_n) una sucesión de funciones en $C_c(X)$ que decrece a cero y sea K el soporte de ϕ_1.

También sea ψ una función no negativa en $C_c(X)$, la cual es positiva en K (por proposición 4.5.2);
entonces para un $\varepsilon > 0$ dado, los conjuntos

$$F_n = \{x: \phi_n(x) \geq \varepsilon\psi(x)\}$$

son una familia decreciente de subconjuntos cerrados de K cuya intersección es vacía.

Como K es compacto, para algún N se tiene $F_N = \phi$ y $\phi_n < \varepsilon\,\psi$ para $n \geq N$ y por tanto

$$I(\phi_n) \leq \varepsilon I(\psi) \quad \text{para } n \geq N,$$

de donde $I(\phi_n) \to 0$ ya que ε es arbitrario.

Por el teorema de Stone existe una σ-álgebra A de subconjuntos de X y una medida μ definida en A,
además para $f \in C_c(X)$, f es I-integrable y por consiguiente es integrable con respecto a μ y

$$I(f) = \int f d\mu,$$

como los conjuntos $\{x: f(x) \geq \alpha\}$ son medibles respecto a A se sigue que A incluye a los conjuntos de Baire y que por tanto μ está definida para los conjuntos de Baire.

Si B es un conjunto de Baire compacto:

$$\mu(B) = I(x_B) < \infty \quad \text{ya que } x_B \in C_c(X),$$

se concluye que μ es una medida de Baire.

Para ver la unicidad de μ notemos que si K es un compacto G_δ entonces χ_K es el límite de una sucesión decreciente de funciones (ϕ_n) en $C_c(X)$. Como ϕ_1 es integrable, tenemos por el teorema de convergencia de Lebesgue que

$$\mu(K) = \operatorname{Lim} \int \phi_n d\mu = \operatorname{Lim} I(\phi_n).$$

Entonces $\mu(K)$ es únicamente determinada por I. Por corolario 4.6.3 μ está univocamente determinada en los conjuntos de Baire σ-acotados y por tanto en todos los conjuntos de Baire si X es compacto. ▲

7- FUNCIONALES LINEALES ACOTADOS EN C(X)

Denotemos en primer término por C(X) el espacio de funciones reales contínuas definidas en un espacio Hausdorff compacto X.

DEFINICION 4.7.1

Sea L una red vectorial de funciones reales acotadas en un conjunto X, definimos

$$\|f\| = Sup|f(x)|.$$

Claramente la función así definida en L satisface los requerimientos asociados a una norma y L es por tanto un espacio lineal normado.

DEFINICION 4.7.2

Un funcional lineal F es acotado si existe M tal que

$$|F(f)| \leq M\|f\|$$

y definimos $\|F\| = \sup_{\|f\| \leq 1} F(f)$.

PROPOSICION 4.7.3

Sea F un funcional lineal positivo en C(X), *si* $|f| \leq 1$ *entonces*

$$\|F\| = F(1).$$

PRUEBA

Tenemos $-|f| \leq f \leq |f|$, como F es positivo:

$$-F(|f|) \leq F(f) \leq F(|f|) \quad \text{y por tanto}$$

$$|F(f)| \leq F(|f|).$$

Además $F(|f|) \leq F(1)$, luego $|F(f)| \leq F(1)$,

de donde $\|F\| \leq F(1)$;

pero $1 \in C(X)$ y así $F(1) \leq \|F\|$ por definición de $\|F\|$,

entonces $\|F\| = F(1)$ ▲

PROPOSICION 4.7.4

Sea L una red vectorial de funciones acotadas en un conjunto X, y supongamos que $1 \in L$. Entonces para cada funcional lineal acotado F en L, existen dos funcionales lineales positivos

$$F_+ \text{ y } F_- \text{ tal que } F = F_+ - F_- \quad \text{y} \quad \|F\| = F_+(1) + F_-(1).$$

PRUEBA

Para cada función no-negativa f en L definimos:

$$F_+(f) = \sup_{0 \leq \phi \leq f} F(\phi),$$

entonces $F_+(f) \geq 0$ y $F_+(f) \geq F(f)$,

también $F_+(cf) = cF_+(f)$ para $c \geq 0$.

Sean f y g funciones no negativas en L,

si $0 \leq \phi \leq f$ y $0 \leq \psi \leq g$ entonces:

$0 \leq \phi + \psi \leq f + g$ y por tanto

$F_+(f+g) \geq F(\phi) + F(\psi)$.

Tomando el supremo sobre todas las funciones ϕ y ψ obtenemos:

$$F_+(f+g) \geq F_+(f) + F_+(g).$$

Por otro lado, si $0 \leq \psi \leq f + g$ entonces $0 \leq \psi \wedge f \leq f$

y $0 \leq \psi - (\psi \wedge f) \leq g$,

luego $F(\psi) = F(\psi \wedge f) + F(\psi - [\psi \wedge f])$

$\leq F_+(f) + F_+(g)$,

tomando el supremo sobre las funciones ψ se tiene

$$F_+(f+g) \leq F_+(f) + F_+(g),$$

por consiguiente $F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g)$.

Sea ahora f una función arbitraria en L, y sean M y N constantes no negativas tal que f + M y f + N son funciones no negativas. Entonces

$$F_+(f+M+N) = F_+(f+M) + F_+(N)$$
$$= F_+(f+N) + F_+(M),$$

luego $F_+(f+M) - F_+(M) = F_+(f+N) - F_+(N)$.

Por tanto el valor de $F_+(f+M) - F_+(M)$ es independiente de la escogencia de M, y definimos $F_+(f)$ como este valor. Tenemos ahora el funcional definido en todo L y claramente:

$$F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g) \quad y$$
$$F_+(cf) = cF_+(f) \text{ para } c \geq 0.$$

Como $F_+(-f) + F_+(f) = F_+(0) = 0$, se deduce que

$$-F_+(f) = F_+(-f)$$

y así F_+ es un funcional lineal en L.

Dado que $0 \leq F_+(f)$ y $F(f) \leq F_+(f)$ para $f \geq 0$, tanto F_+ como el funcional lineal $F_- = F_+ - F$ son funcionales lineales positivos, y

$$F = F_+ - F_-.$$

Por la desigualdad triangular $\|F\| \leq \|F_+\| + \|F_-\|$,

es decir $\|F\| \leq F_+(1) + F_-(1)$.

Sea la función $\phi \in L$ con $0 \leq \phi \leq 1$,

entonces $|2\phi - 1| \leq 1$ y

$\|F\| \geq F(2\phi - 1) = 2F(\phi) - F(1)$,

tomando el supremo sobre ϕ:

$\|F\| \geq 2F_+(1) - F(1)$

$\|F\| \geq F_+(1) + F_-(1)$,

de donde $\|F\| = F_+(1) + F_-(1)$. ▲

4.7.5 TERCER TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ

Sea X *un espacio Hausdorff compacto y* C(X) *el espacio de funciones continuas de valores reales en* X. *Entonces a cada funcional lineal acotado* F *en* C(X) *le corresponde una única medida finita con signo de Baire* ν *en* X *tal que*

$$F(f) = \int f d\nu$$

para cada f *en* C(X); *además* $\|F\| = |\nu|(X)$.

PRUEBA

Sea $F = F_+ - F_-$ como en la proposición anterior. Entonces por el teorema 4.6.4 existen medidas finitas de Baire μ_1 y μ_2 tales que

$$F_+(f) = \int f d\mu_1 \quad y \quad F_-(f) = \int f d\mu_2 .$$

Si hacemos $\nu = \mu_1 - \mu_2$, entonces ν es una medida finita con signo de Baire y

$$F(f) = F_+(f) - F_-(f) = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2 = \int f d\nu .$$

Ahora

$$|F(f)| = \left|\int f d\nu\right| = \left|\int f d\mu_1 - \int f d\mu_2\right|$$

$$\Rightarrow |F(f)| \leq \left|\int f d\mu_1\right| + \left|\int f d\mu_2\right|$$

$$\leq \int |f| d\mu_1 + \int |f| d\mu_2 = \int |f| d|\nu| ,$$

como $|f| \leq \|f\|$ se tiene que

$$|F(f)| \leq \int \|f\| d|\nu| = \|f\| \int d|\nu| = \|f\| . |\nu|(X).$$

Así $\|F\| \leq |\nu|(X).(1)$,

por otro lado

$$|\nu|(X) = \nu^+(X) + \nu^-(X);$$

si $\{A,B\}$ es una descomposición de Hahn para ν se tiene

$$\nu^+(X) = \nu(X \cap A) = \nu(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$$

$$\nu^-(X) = -\nu(X \cap B) = -\nu(B) = -\mu_1(B) + \mu_2(B),$$

$$|\nu|(X) = \mu_1(A) - \mu_2(A) - \mu_1(B) + \mu_2(B),$$

luego $|\nu|(X) \leq \mu_1(A) + \mu_2(B)$,

o bien $|\nu|(X) \leq \mu_1(X) + \mu_2(X)$

$$\leq F_+(1) + F_-(1) = \|F\| \ (2),$$

De (1) y (2) $\|F\| = |\nu|(X)$.

Para mostrar la unicidad de ν, notemos que si ν_1 y ν_2 son ambas medidas finitas con signo de Baire tal que

$$\int f d\nu_1 = F(f) = \int f d\nu_2 \quad \text{con } f \in C(X),$$

entonces $\lambda = \nu_1 - \nu_2$ sería una medida finita con signo de Baire tal que

$$\int f d\lambda = \int f d\nu_1 - \int f d\nu_2 = 0$$

para toda $f \in C(X)$.

Sea $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ la descomposición de Jordan de λ. Entonces integración con respecto a λ^+ reproduce el mismo funcional lineal positivo que el dado por λ^-, por el teorema 4.6.4 debemos tener $\lambda^+ = \lambda^-$.

Entonces $\lambda = 0$ y $\nu_1 = \nu_2$ ▲

APENDICE A

1. DEFINICION DE FUNCIONES MONOTONAS

DEFINICION A1.1

Sea $\mathcal{T}$ una colección de intervalos. Decimos que $\mathcal{T}$ cubre un conjunto E en el sentido de Vitali, si para cada $\varepsilon > 0$ y $x \varepsilon E$ existe un intervalo $I \varepsilon \mathcal{T}$ tal que $x \varepsilon I$ y $\ell(I) < \varepsilon$.

LEMA A1.2 (Vitali)

Sea E un conjunto de medida exterior finita e $\mathcal{T}$ una colección de intervalos que cubren a E en el sentido de Vitali. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe una colección finita de intervalos $\{I_1, \ldots, I_N\}$ disjuntos das a dos en $\mathcal{T}$ tal que

$$m^*\left[E - \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right] < \varepsilon$$

PRUEBA

Probaremos el lema en el caso de que cada intervalo de $\mathcal{T}$ es cerrado, para verificar el caso general reemplazamos cada intervalo por su cerradura y observamos que el conjunto de puntos extremos de $I_1, \ldots, I_N$ tiene medida cero.

Sea entonces $\mathcal{O}$ un conjunto abierto de medida finita, con $E \subset \mathcal{O}$. Como $\mathcal{T}$ es una cubierta de Vitali de E podemos asumir que cada I de $\mathcal{T}$ está contenido en $\mathcal{O}$.

Procedemos a escoger una sucesión (I_n) de intervalos disjuntos de $\mathcal{T}$ inductivamente:

Sea I_1 cualquier intervalo de $\mathcal{T}$,
y supongamos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ han sido ya escogidos,
observemos ahora el conjunto

$$A = \{I \in \mathcal{T} / I \cap \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \phi\}.$$

Si $A = \phi$ entonces $\{E \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i\}$ y el resultado se sigue.

De otro modo, sea

$$\delta_n = \sup_{I \in A} \ell(I).$$

Podemos entonces escoger I_{n+1} tal que

$$\ell(I_{n+1}) > \frac{1}{2}\delta_n \text{ y } I_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \phi.$$

Tenemos por tanto una sucesión (I_n) de intervalos disjuntos de $\mathcal{T}$, y como

$\bigcup I_n \subset \mathcal{O}$, resulta que $\Sigma\ell(I) \leq m(\mathcal{O}) < \infty$.

Podemos luego encontrar un entero N tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \ell(I_n) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Sea $T = E - \bigcup_{n=1}^{N} I_n$.

Sea también x un punto cualquiera de T, como $\bigcup_{n=1}^{N} I_n$ es cerrado y $x \notin \bigcup_{n=1}^{N} I_n$ podemos encontrar $I \in \mathcal{T}$ con $x \in I$ y cuya longitud sea tan pequeña que:

$$I \cap \bigcup_{n=1}^{N} I_n = \phi \text{ (por ser } \mathcal{T} \text{ de Vitali)},$$

Si ahora

$$I \cap I_i = \phi \text{ para } i \leq n$$

tenemos que $\ell(I) \leq \delta_n < 2\ell(I_{n+1})$,

como $\operatorname{Lim} \ell(I_n) = 0$, I debe interceptar al menos uno de los intervalos I_n porque de otro modo $\ell(I) = 0$.

Sea n el más pequeño entero tal que $I \cap I_n \neq \phi$, es claro que $n > N$ y $\ell(I) \leq \delta_{n-1} \leq 2\ell(I_n)$.

Como $x \in I$ e I tiene un punto en común con I_n, observamos que $|x - i_n| \leq \frac{1}{2}\ell(I_n) + \ell(I)$ con i_n: punto medio del intervalo I_n, se tiene luego:

$$|x - i_n| \leq \frac{5}{2}\ell(I_n).$$

Resulta entonces que x pertenece al intervalo J_n, con i_n el punto medio de J_n y además $\ell(J_n) = 5\ell(I_n)$.

Hemos mostrado que

$$T \subset \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n,$$

Luego

$$m^*(T) \leq \sum_{N+1}^{\infty} \ell(J_n) = 5 \sum_{N+1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$$

▲

Para introducir el estudio de las derivadas de una función f, definimos primero cuatro cantidades denominadas las derivadas de f en x así:

$$D^{+}f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^{+}}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D^{-}f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^{+}}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$D_{+}f(x) = \underline{\lim}_{h\to 0^{+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D_{-}f(x) = \underline{\lim}_{h\to 0^{+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Deducimos de lo anterior que:

$$D^{+}f(x) \geq D_{+}f(x) \quad y$$

$$D^{-}f(x) \geq D_{-}f(x)$$

DEFINICION A1.3

Sea f una función real. Decimos que f es diferenciable en x si $D^{+}f(x) = D_{+}f(x) = D^{-}f(x) = D_{-}f(x) \neq \pm\infty$ y denotamos $f'(x)$ el valor común de las derivadas en x.

TEOREMA A1.4

Sea f una función real creciente en el intervalo $[a,b]$. Entonces f es diferenciable casi por doquier. La derivada f' es medible, y

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b) - f(a).$$

PRUEBA

A mostrar que los conjuntos donde cualquier par de derivadas son diferentes tienen medida cero.

Consideremos el conjunto E donde

$D^{+}f(x) > D_{-}f(x)$ (Los conjuntos que surgen a partir de las demás combinaciones de las derivadas siguen un tratamiento similar al expuesto aquí).

E es la unión de los conjuntos:

$E_{u,v} = \{x: D^{+}f(x) > u > v > D_{-}f(x)$, u y v racionales$\}$

Sea $s = m^{*}(E_{u,v})$, seleccionemos $\varepsilon > 0$ y ϑ un conjunto abierto, con $E_{u,v} \subset \vartheta$ tal que $m(\vartheta) < s + \varepsilon$.

Para cada $x \in E_{u,v}$ existe un intervalo arbitrariamente pequeño

$$[x-h,x] \subset \vartheta \text{ tal que}$$

$$f(x) - f(x-h) < vh$$

Por el lema A1.2 podemos escoger una colección finita $\{I_1,...,I_N\}$ de los intervalos dados, cuyos interiores cubren un subconjunto A de $E_{u,v}$ de medida exterior mayor que $s-\varepsilon$.

Efectivamente, si $B = \bigcup_{n=1}^{N} \overset{o}{I}_n$, entonces

$$E_{u,v} = (E_{u,v} \cap B) \cup (E_{u,v} \cap B^{c})$$

$$m^{*}(E_{u,v}) = m^{*}(E_{u,v} \cap B) + m^{*}(E_{u,v} \cap B^{c})$$

$$m^{*}(E_{u,v} \cap B) > s-\varepsilon.$$

Sumando ahora sobre los intervalos,

$$\sum_{n=1}^{N}[f(x_n) - f(x_n-h_n)] < v\cdot\sum_{n=1}^{N} h_n$$

$$< v.m(\mathcal{O}) \text{ (porque } I_n \subset \mathcal{O} \text{ para cada } n)$$

$$< v(s+\varepsilon).$$

Ahora, cada punto $y \in A$ es tal que existe un intervalo arbitrariamente pequeño

$[y,y+k) \subset I_n$ para algún n, y

$f(y+k) - f(y) > uk$

Usando de nuevo el lema A1.2 escojemos una colección finita $\{J_1, J_2, \ldots, J_M\}$ de tales intervalos tal que su unión contiene un subconjunto de A de medida exterior mayor que $s - 2\varepsilon$.

Sumando también sobre estos intervalos:

$$\sum_{i=1}^{M}[f(y_i+k_i) - f(y_i)] > u\sum_{i=1}^{M} k_i$$

$$> u(s-2\varepsilon).$$

Hemos advertido que cada J_i está contenido en algún intervalo I_n, si sumamos sobre aquellos i para los cuales $J_i \subset I_n$, obtenemos

$\Sigma[f(y_i+k_i) - f(y_i)] \leq f(x_n) - f(x_n-h_n)$

puesto que f es creciente.

Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(x_n-h_n) \geq \sum_{i=1}^{M} f(y_i+k_i) - f(y_i)$$

$$v(s+\varepsilon) > u(s-2\varepsilon)$$

Como lo anterior se satisface para cada ε positivo, tenemos

$vs \geq us$,

pero $u > v$, necesariamente $s = 0$

y concluimos que $m(E) = 0$,

esto muestra que

$$g(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

está definida casi por doquier y que f es diferenciable donde g es finita.

Definamos a continuación:

$$g_n(x) = n\left[f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right]$$

y hacemos $f(x) = f(b)$ para $x \geq b$,

entonces $g_n(x) \to g(x)$ para casi todo x,

por tanto g es medible (g_n es medible por ser f medible a raíz de que es monótona creciente),

además $g_n \geq 0$,

Dadas estas condiciones, por el lema de Fatou:

$$\int_a^b g \leq \underline{\mathrm{Lim}} \int_a^b g_n = \underline{\mathrm{Lim}}\; n\int_a^b \left[f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right]dx$$

$$= \underline{\mathrm{Lim}}\; n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f - \int_a^b f\right]$$

$$= \underline{\mathrm{Lim}}\left[n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f\right]$$

$$= \underline{\mathrm{Lim}}\left[f(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f\right] \quad (\text{porque } f(x)=f(b), \text{ para } x \geq b)$$

$$\leq f(b) - f(a) \quad (\text{porque } f(a) \leq f(x), \text{ para } x \geq a),$$

luego, g es integrable y por consiguiente finita casi por doquier,

concluimos que f es diferenciable casi por doquier

y $g = f'$ casi por doquier. ▲

2. FUNCIONES DE VARIACION ACOTADA

A manera de introducción para precisar el concepto de función de variación acotada introducimos los siguientes valores asociados a una función.

Sea f una función real definida en $[a,b]$, y

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ una partición de $[a,b]$,

definimos: $p = \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+$

$$n = \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-$$

$$t = n+p = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

donde usamos

$$r^+ = \begin{cases} r, & \text{si } r \geq 0 \\ 0, & \text{si } r < 0 \end{cases} \quad \text{y}$$

$$r^- = \begin{cases} 0, & \text{si } r \geq 0 \\ -r, & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

a partir de lo anterior:

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = p-n,$$

sean:

$$P = \sup_{\pi \in \mathcal{P}[a,b]} p$$

$$N = \sup_{\pi \in \mathcal{P}[a,b]} n$$

$$T = \sup_{\pi \in \mathcal{P}[a,b]} t$$

donde $\mathcal{P}[a,b] = \{\pi / \pi$ es una partición de $[a,b]\}$.

Llamamos a P, N y T las variaciones positiva, negativa y to_ tal de f sobre $[a,b]$, a menudo se denota T_a^b para especificar el intervalo.

Claramente $P \leq T \leq P + N$

DEFINICION A2.1

Sea f una función real definida en el intervalo $[a,b]$, decimos que f es de variación acotada sobre $[a,b]$ si su variación total es finita, es decir $T_a^b < \infty$

LEMA A2.2

Si f es de variación acotada en $[a,b]$ entonces

$$T_a^b = P_a^b + N_a^b \quad y$$
$$f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b$$

PRUEBA

Para $\pi \in P([a,b])$

$$p = n + f(b) - f(a),$$
$$p \leq N + f(b) - f(a)$$

de donde, tomando el supremo sobre todas las posibles subdivisiones de $[a,b]$, obtenemos

$$P \leq N + f(b) - f(a)$$

como $N \leq T < \infty$, entonces

$$P - N \leq f(b) - f(a),$$

por un procedimiento análogo, obtenemos:

$$N - P \leq f(a) - f(b)$$

y por tanto

$$P - N = f(b) - f(a),$$

tenemos por otro lado que:

$$T \geq p + n = p + p - (f(b) - f(a))$$
$$= 2p + N - P$$

y resulta que:

$$T \geq 2P + N - P = P + N.$$

como además

$$T \leq P + N,$$

verificamos que

$$T = P + N \qquad \blacktriangle$$

TEOREMA A2.3

Una función f es de variación acotada en [a,b] si y sólo si f es la diferencia de dos funciones reales monótonas en [a,b].

PRUEBA

$\Rightarrow$) Sea f de variación acotada en $[a,b]$, y sean

$$g(x) = P_a^x \quad y \quad h(x) = N_a^x$$

luego g y h son funciones crecientes, y además de valores reales pues:

$0 \leq P_a^x \leq T_a^x \leq T_a^b < \infty$ y $0 \leq N_a^x \leq T_a^x \leq T_a^b < \infty$,

sabemos también:

$f(x) = g(x) - h(x) + f(a)$ (por lema A2.2).

como $h - f(a)$ es una función monótona:

$$f = g - (h - f(a)).$$

tenemos f expresada como la diferencia de dos funciones monótonas.

<=) Si $f = g - h$ en $[a,b]$ con g y h crecientes (cualquier otra combinación de funciones monótonas sirve igualmente a nuestros propósitos).

Para cualquier subdivisión de $[a,b]$, tenemos:

$$\begin{aligned}\Sigma|f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leq \Sigma[g(x_i)-g(x_{i-1})] + \Sigma[h(x_i)-h(x_{i-1})] \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a)\end{aligned}$$

entonces:

$$T_a^b \leq g(b) + h(b) - g(a) - h(a),$$

f es de variación acotada en $[a,b]$ ▲

COROLARIO A2.4

Si f es de variación acotada en $[a,b]$, entonces $f'(x)$ existe para casi todo $x \varepsilon [a,b]$.

PRUEBA

Por teorema A2.3 f se puede expresar como la diferencia de dos funciones crecientes g y h.

Por teorema A1.4 g y h son diferenciables casi por doquier y por lo tanto lo es f. ▲

3. DIFERENCIACION DE UN INTEGRAL

Nos proponemos ahora mostrar que la derivada de la integral indefinida de una función integrable es igual al integrando casi por doquier. A tal efecto, establecemos los siguientes lemas:

LEMA A3.1

Si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces la función F definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

es una función contínua de variación acotada en $[a,b]$.

PRUEBA

En primer lugar, observemos la continuidad,

sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $y \in [a,b]$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow \int_y^x f^+ < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \int_y^x f^- < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(Prop. 4.13(1))}$$

$$\Rightarrow \int_y^x |f| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\int_y^x f\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |F(x) - F(y)| < \varepsilon$$

de donde F es continua;

sea ahora $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$

una partición de $[a,b]$, entonces

$$\sum_{i=1}^{k} |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|dt$$

$$= \int_a^b |f(t)|dt$$

luego: $T_a^b(F) \leq \int_a^b |f(t)|dt < \infty$ (por ser f integrable),

F es de variación acotada ▲

LEMA A3.2

Si f es integrable sobre $[a,b]$ y $\int_a^x f(t)dt = 0$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $f(t) = 0$ casi por doquier en $[a,b]$.

PRUEBA

Supongamos $f(x) > 0$ en un conjunto E de medida positiva, existe entonces un conjunto cerrado $F \subset E$ con $m(F) > 0$ (Prop. 3.15(1)).

Sea $\mathcal{O} = (a,b) - F$, entonces

ó bien $\int_a^b f \neq 0$ ó bien $0 = \int_a^b f = \int_F f + \int_{\mathcal{O}} f$

y observemos además que

$$\int_{\mathcal{O}} f = - \int_F f \neq 0 \text{ (porque } m(F) > 0),$$

pero $\mathcal{O}$ lo podemos expresar como la unión de una colección contable de intervalos abiertos disjuntos $\{(a_n,b_n)\}$, luego

$$\int_{G} f = \Sigma \int_{a_n}^{b_n} f \quad (\text{prop. } 4.11(1));$$

para algún n, tenemos

$$\int_{a_n}^{b_n} f \neq 0$$

y por tanto $\int_{a}^{a_n} f \neq 0$ ó $\int_{a}^{b_n} f \neq 0$,

en cualquier caso observamos que si $f(x) > 0$ en un conjunto de medida positiva, entonces para algún $x \in [a,b]$,

$$\int_{a}^{x} f \neq 0,$$

similar conclusión obtendríamos al considerar $f(x) < 0$ en un conjunto de medida positiva; y el lema está probado

▲

LEMA A3.3

Si f es una función medible y acotada en [a,b] y

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt + F(a)$$

entonces $F'(x) = f(x)$ *para casi todo* $x \in [a,b]$.

PRUEBA

Como f es acotada se sigue que f es integrable y por lema A3.1 F es de variación acotada (y contínua). Asimismo por colorario A2.4 $F'(x)$ existe para casi todo $x \in [a,b]$.

Sea $|f| \leq K$, luego haciendo

$$f_n(x) = n[F(x + \frac{1}{n}) - F(x)]$$

tenemos

$$f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

de donde $|f_n| \leq K$.

Si hacemos $F(x) = F(b)$ para $x \geq b$, entonces

$$f_n(x) \to F'(x) \quad \text{casi por doquier,}$$

ahora por el teorema de convergencia acotada

$$\int_a^c F'(x)dx = \text{Lim} \int_a^c f_n(x)dx = \text{Lim}\, n \int_a^c (F(x + \frac{1}{n}) - F(x))dx$$

$$= \text{Lim}[n \int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx],$$

observemos por otro lado que si

$g(t) = \int_a^t F(x)dx$ entonces sabemos que

$g'(t) = F(t)$ por ser F contínua,

es decir $F(t) = \text{Lim}\, n[g(t + \frac{1}{n}) - g(t)]$,

entonces $n \int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)dx = n[\int_a^{c+\frac{1}{n}} F(x)dx - \int_a^c F(x)dx]$

$$= n[g(c+\frac{1}{n}) - g(c)]$$

de donde:

$$\text{Lim } n \int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)dx = F(c) = g'(c).$$

Retomando ahora el resultado que obtuvimos a partir del teorema de convergencia acotada, tenemos:

$$\int_a^c F'(x)dx = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

por consiguiente:

$$\int_a^c (F'(x) - f(x))dx = 0 \quad \text{para todo } c \in [a,b], \text{ y}$$

$$F'(x) = f(x) \text{ casi por doquier}$$

$$\text{en } [a,b] \text{ (por lema A3.2)} \qquad \blacktriangle$$

TEOREMA A3.4

Sea f una función integrable en $[a,b]$ y supongamos que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a),$$

entonces $F'(x) = f(x)$ para casi todo x en $[a,b]$.

PRUEBA

Asumamos sin pérdida de generalidad que $f \geq 0$ (en cualquier caso trabajamos con f^+ y f^- y luego combinamos los resultados).

Sea f_n tal que:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \leq n \\ n, & \text{si } f(x) > n, \end{cases}$$

deducimos que $f - f_n \geq 0$, y por tanto

$$G_n(x) = \int_a^x (f - f_n) \qquad (1)$$

es una función creciente en x.

por el teorema A1.4 podemos asegurar que G_n tiene una derivada casi por doquier, y esta derivada es no-negativa.

Como f_n es medible y acotada,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f_n = f_n(x) \quad \text{casi por doquier (por lema A3.3).}$$

De (1) tenemos:

$$G_n(x) = \int_a^x f - \int_a^x f_n$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}G_n + \frac{d}{dx}\int_a^x f_n$$

$$F'(x) \geq f_n(x) \quad \text{casi por doquier.}$$

Como n es arbitrario,

$$F'(x) \geq f(x) \text{ casi por doquier (porque } f_n(x) \to f(x))$$

Por consiguiente:

$$\int_a^b F'(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

También, como $f \geq 0$, F es creciente y por el teorema A1.4

$$\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a)$$

Conjugando los resultados anteriores:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

y luego,

$$\int_a^b (F'(x) - f(x))dx = 0\ ,$$

como $F'(x) - f(x) \geq 0$, se deduce que

$$F'(x) - f(x) = 0 \quad \text{casi por doquier,}$$

y por tanto $F'(x) = f(x)$ casi por doquier ▲

4. CONTINUIDAD ABSOLUTA

Introducimos a continuación el concepto de función absolutamente continua.

DEFINICION A4.1

Una función real f definida en el intervalo $[a,b]$ se dice que es absolutamente contínua en $[a,b]$ si, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon$$

para cada colección finita $\{(x_i, x_i')\}$ de intervalos no trasla-

pados con

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$$

Observamos que una función absolutamente continua es contínua como producto de la definición anterior.

Precisamos ahora las vinculaciones que existen entre la propiedad de absolutamente continua y los conceptos que hemos analizado anteriormente.

LEMA A4.2

Si f es absolutamente contínua en $[a,b]$, entonces es de variación acotada en $[a,b]$.

PRUEBA

Dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ t.q.

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < 1 \quad \text{siempre que} \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$$

Sea también $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ una subdivisión π del intervalo $[a,b]$.

Podemos dividir π (añadiendo puntos si es necesario) en K conjuntos (colecciones) de intervalos, cada una de las cuales tiene longitud total menor que δ, donde K es el mayor entero menor que $1 + \frac{(b-a)}{\delta}$, entonces, como $\sum_{i=1}^{k_r} |x_i - x_{i-1}| < \delta$.

se tiene que $\sum_{i=1}^{k_r} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < 1$ con $r = 1,2,\ldots,K$

luego:

$$t = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{r=1}^{K} \sum_{i=1}^{k_r} |f(x_i) - f(x_{i=1})|$$

$$< \sum_{r=1}^{K} 1 = K$$

es claro entonces que $T \leq K$,

de donde f es de variación acotada. ▲

A partir del lema anterior y del colorario A2.4 establecemos el siguiente:

COROLARIO A4.3

Si f es absolutamente continua, entonces f tiene una derivada casi por doquier.

LEMA A4.4

Si f es absolutamente continua en $[a,b]$ y $f'(x) = 0$ casi por doquier, entonces f es constante.

PRUEBA

Sea $c \in [a,b]$ y el conjunto $E \subset (a,c)$ de medida $c - a$ en donde

$f'(x) = 0$, sean también ε y η números positivos arbitrarios.

Para cada $x \in E$ existe un intervalo arbitrariamente pequeño $[x, x+h] \subset [a, c]$ de manera que

$$|f(x+h) - f(x)| < \eta h$$

Tenemos entonces una cubierta de E en el sentido de Vitali, por el lema A1.2 podemos encontrar una colección finita $\{[x_k, y_k]\}$ de intervalos no traslapados que cubren a E excepto para un conjunto de medida menor que δ, donde δ es el número positivo correspondiente a ε en la definición de absolutamente continua.

Si ordenamos los x_k tal que $x_k \leq x_{k=1}$, tenemos

$$y_0 = a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < \ldots \leq y_n \leq c = x_{n+1}$$

y

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{k+1} - y_k| < \delta.$$

Ahora bien,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \eta \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)$$
$$< \eta(c - a)$$

debido a la manera en que los intervalos $\{[x_k, y_k]\}$ fueron construidos;

además $\sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(y_k)| < \varepsilon$

por ser f absolutamente continua;

luego:

$$|f(c) - f(a)| = |\sum_{k=0}^{n}[f(x_{k+1}) - f(y_k)] + \sum_{k=1}^{n}[f(y_k) - f(x_k)]|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}|f(x_{k+1}) - f(y_k)| + \sum_{k=1}^{n}|f(y_k) - f(x_k)|$$

$$\leq \varepsilon + \eta(c-a)$$

Como ε y η son números positivos arbitrarios, se concluye que

$|f(c) - f(a)| = 0$ y

$f(c) = f(a)$ para todo $c \varepsilon [a,b]$,

f es constante. ▲

TEOREMA A4.5

Una función F es una integral indefinida si y sólo si es absolutamente continua.

=>) Sea F una integral indefinida,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $\{(x_i, x_i')\}$ una colección finita de intervalos no traslapados con

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i' - x_i| < \delta$$

donde δ es el valor correspondiente al ε dado en la proposición 4.13(1).

Tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i') - F(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{x_i}^{x_i'} f(t)dt\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_i'} |f(t)|dt$$

$$\leq \int_{\bigcup_{i=1}^{n}(x_i,x_i')} |f(t)dt < \varepsilon \text{ (prop. 4.13(1))}$$

de donde F es absolutamente continua.

<=) Supongamos ahora que F es absolutamente continua. Luego, F es de variación acotada (lema A4.2), y podemos expresar

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

donde F_1 y F_2 son funciones crecientes (teorema A2.3), además $F'(x)$ existe casi por doquier por ser de variación acotada.

Resulta luego que:

$$|F'(x)| \leq F_1'(x) + F_2'(x)$$

entonces como F_1 y F_2 son crecientes:

$\int |F'(x)|dx \leq F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a)$ (por teorema A1.4)

deducimos entonces que $F'(x)$ es integrable.

Sea ahora

$$G(x) = \int_a^x F'(t)dt \quad .$$

G es entonces absolutamente continua y vemos que también lo es la función

$f = F - G$ (la diferencia de funciones absolutamente continuas conserva esta propiedad)

Además por ser F integrable

$$G'(x) = F'(x) \text{ casi por doquier (teorema A3.4)}$$

entonces

$$f'(x) = F'(x) - G'(x) = 0 \text{ casi por doquier,}$$

en base al lema A4.4 afirmamos que f es constante.

Por tanto, como

$$F(x) = G(x) + f(x)$$

entonces

$$F(x) = \int_a^x F'(t)dt + F(a)$$

$\therefore$ F es un integral indefinida

Como consecuencia lógica surge el siguiente

COROLARIO A4.6

Cada función absolutamente continua es la integral indefinida de su derivada.