UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TRABAJO DE GRADUACION

Aplicaciones de Variable Compleja en Teoría Electromagnética y Mecánica de Fluidos

PRESENTADO POR

LUIS FERNANDO CHACON PLATERO

PREVIO A LA OPCION DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

OCTUBRE DE 1985

SAN SALVADOR - EL SALVADOR - CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR: DR. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO GENERAL: DRA. ANA GLORIA CASTANEDA PADILLA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO: ING. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

SECRETARIO: ING. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

DIRECTOR : LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

ORGANIZACION DEL TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR: ING. CARLOS MAURICIO CANJURA LINARES

ASESORES:

ING. CARLOS MAURICIO CANJURA LINARES

LIC. JOSE FRANCISCO MELGAR BRIZUELA

P R O L O G O

El conocimiento se considera un problema cuando ocurren los procesos mentales en que el análisis separe y aisle lo que viene dado como un hecho, en este sentido, nace la idea de realizar el presente trabajo de investigación Bibliográfica, que obedece, a una iniciativa, de crear nuevas condiciones propicias, para correlacionar el pensamiento matemático con el pensamiento físico brindando así una fuete de conocimientos, recopilados de diferente naturaleza, para que de alguna manera, aporte, en una pequeña parte, ideas contribuyendo así al proceso de cambio de la realidad, y el medio en el cual nos encontramos.

Una descripción global del contenido del trabajo, se presenta de la siguiente manera:

En primer lugar, se proporciona una información básica sobre la teoría de la Variable Compleja; dicha teroía está enmarcada en SEIS CAPITULOS. En los capítulos I y II se presenta la Estructura de los Números Complejos, su Geometría y algunas propiedades, como también en el capítulo II, las funciones elementales con sus propiedades. Además estos conocimientos servirán en la solución de algunos problemas en los restantes capítulos.

Aún sin embargo, para dejar garantía, se presentan los restantes capítulos III, IV, V, VI; Integración de Funciones Complejas, Series, Residuos, Evaluación de Integrales Reales y la presentación de la importante y poderosa Transformación Con forme.

En segundo lugar, se presenta la parte de aplicaciones de la variable compleja; en primera instancia, se hace un tratamiento de la transformación conforme a la Mecánica de Fluidos, aquí se hace uso de la teoría matemática expuesta en los capítulos anteriores, con investigación en textos de Mecánica de Fluidos y la solución de algunos problemas en Flujo de Fluidos con uso de la transformación conforme.

En segunda instancia, y por último se presenta también las aplicaciones de la transformación conforme en algunos elementos de teoría Electromagnética donde se formula el Potencial Electrostático y la solución de algunos problemas.

El proceso de formación del presente trabajo, está basado en la bibliografía que se menciona al final, no dejando así de mencionar que en la parte de matemática, me fué muy útil y de gran poder matemático, el libro INTRODUCTORY COMPLEX ANALYSIS, de Richard A Silverman.

Asi también deseo manifestar mis profundos agradecimientos; al Ingeniero Carlos Mauricio Canjura y al Licenciado Francisco Melgar, por haber estado conmigo en ésta jornada laboriosa, dándome su tan valiosa asesoría; quiero al mismo tiempo expresar mi sencero y franco agradecimiento a la Señora Miriam de Yánez por la paciencia y amabilidad de mecanografiarme el presente documento. También deseo manifestar con mucho amor, pro-

fundos agradecimientos a mi Señora Isaura Orbelina Vásquez, - por haberme proporcionado sus finas atenciones en las noches de trabajo para poder continuar hasta terminar el presente documento.

I N D I C E

PAGINA

CAPITULO I

CAPITULO III

CAPITULO IV

CAPITULO VII

APLICACIONES DE LA TRANSFORMACION CONFORME EN MECANICA DE FLUIDOS

CAPITULO VIII

APLICACIONES DE LA TRANSFORMACION CONFORME EN TEORIA ELECTROMAGNETICA

CAPITULO I

LOS NÚMEROS COMPLEJOS

En el contexto del presente capítulo, se dará por conocidas las propiedades de los números reales, por lo que sigue se enfocará la estructura básica de los números complejos.

1.0 ESTRUCTURA DEL SISTEMA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1.1 Operaciones en $\mathbb{C}$

DEFINICION 1.1.1

Sea $\mathbb{C} = \{(x,y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ un conjunto si $(x,y) \in \mathbb{C}$, $(x',y') \in \mathbb{C}$, entonces en $\mathbb{C}$ se definen las operaciones.

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$((x,y),(x',y')) \rightsquigarrow (x,y) + (x',y') = (x+x',y+y')$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$((x,y),(x',y')) \rightsquigarrow (x,y).(x',y') = (x.x' - yy', xy' + yx').$$

Se define además la igualdad: $(x,y) = (x',y') \iff x = x';\ y = y'$

1.2 El cuerpo de los números complejos

Recordemos que un cuerpo k es una estructura algebraica

$$(k,+,.)$$

que satisface:

C1) $(Z_1 + Z_2) \in k$

C2) $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$

C3) $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$

C4) Existe un elemento en K tal que $Z_1 + 0 = Z_1$; $(\forall Z_1 \in K)$

C5) Existe un elemento $-Z_1 \in K$ tal que $Z_1 + (-Z_1) = 0$

C6) $Z_1 . Z_2 \in K$

C7) $Z_1(Z_2 . Z_3) = (Z_1 . Z_2) . Z_3$

C8) $Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1Z_2 + Z_1Z_3$; $(Z_2 + Z_3) Z_1 = Z_2Z_1 + Z_3Z_1$

C9) Existe un elemento 1 e K tal que $Z_1 . 1 = 1 . Z_1 = Z_1$, $(\forall Z_1 \in K)$

C10) $\forall Z_1 \neq 0$, $\exists Z_2 \in K$ tal que $Z_1 . Z_2 = 1 =$ A Z_2 se le denota por Z_1^{-1}

Se verifica que $(\mathbb{C},+,.)$ posee la estructura de cuerpo.

El neutro aditivo resulta ser el complejo $(0,0)$; el opuesto del complejo $Z = (x,y)$, es $-Z = (-x,-y)$; el elemento neutro del producto es el elemento $(1,0)$ y el inverso de (x,y) es:

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2} \quad \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

Los complejos de la forma $(x,0)$ se comportan como números reales:

$$(x,0) + (y,0) = (x+y,0)$$

$$(x,0) . (y,0) = (xy,0)$$

Además se tiene que $(x,0) . (1,0) = (x,0)$ y podemos identificar los complejos $(x,0)$ simplemente con el número real x. Así, denotemos

$$(x,0) \text{ por } x$$

Además los complejos de la forma $(0,y)$ pueden ser escritos en la forma:

$$(0,y) = (y,0) . (0,1)$$

Al complejo (0,1) se le denomina unidad imaginaria. Se deduce entonces, por la identificación anterior que

$$(0,y) = (y,0)(0,1) = y . (0,1)$$

la unidad imaginaria (0,1) se denota por i, es decir i = (0,1) y tiene la propiedad básica siguiente:

$$i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

Así, i es un número complejo cuyo cuadrado es -1.

Con todo lo anterior, resulta que

$$(x,y) = (x,0) + (0,y)$$

$$(x,y) = x + iy$$

1.3 Representación Geométrica de un número complejo

Representación Cartesiana

Sea (x',y') un número complejo, se asocia el número $Z \in \mathbb{C}$ con un punto en el plano x - y complejo, cuyas coordenadas sean rectangulares, es decir, a cada complejo Z corresponde uno y solo un punto del plano cartesiano. En este caso dirémos que el número complejo Z tiene una representación cartesiana.

Geométricamente podemos imaginar el número Z = x' + iy' como un segmento de recta dirigido a partir del orígen (0,0) hasta el punto (x',y')

En el plano complejo; dirémos que en el eje "x" solo pueden representarse números reales y lo llamarémos eje real. (Figura 1).

En el eje "y" solo pueden representarse números imaginarios y lo llamarémos eje imaginario.

En referencia al número $Z = (x',y')$ a x' le llamarémos parte real de Z y lo denotaremos

$$R_e(Z) = x'$$

a y' le llamarémos parte imaginaria de Z y lo denotarémos $Im(Z) = y'$

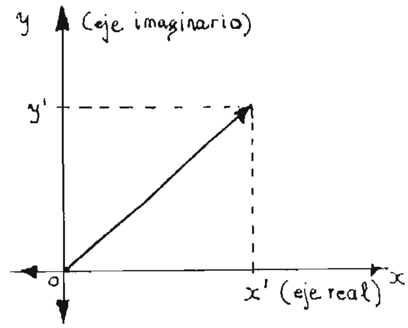


FIGURA 1

A los puntos Z de la forma $Z = (x',0)$ ubicados sobre el eje "x" se le llaman números reales puros y a los puntos de la forma $(0,y')$ ubicados sobre ele eje "y" se le llaman números imaginarios puros.

1.4 <u>Conjugado de un número complejo y valor absoluto de un número complejo</u>.

DEFINICION 1.4.1

Sea $Z = (x,y)$ un número complejo, se define el conjugado de Z como el número complejo $\bar{Z} = (x,-y)$ donde x,y con números reales.

Geométricamente, $\bar{Z}$ puede interpretarse como el complejo simétrico a Z. Respecto al eje real.

DEFINICION 1.4.2

Sea $Z \varepsilon \mathbb{C}$ se define como valor absoluto del número complejo Z, al número real de la forma $|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

El valor absoluto de Z representa la longitud del vector dirigido, en este caso del origen hacia el número $Z = (x,y)$.

PROPIEDADES DE $\bar{Z}$:

DEFINICION 1.4.3

Sea T la aplicación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$; $T . \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$Z \rightsquigarrow TZ = \bar{Z}$$

T posee las propiedades siguientes:

C1) $\overline{Z_1 \pm Z_2} = \bar{Z}_1 \pm \bar{Z}_2, \quad Z_1, Z_2 \varepsilon \mathbb{C}.$

C2) $\overline{Z_1 . Z_2} = \bar{Z}_1 . \bar{Z}_2$

C3) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \quad Z_2 \ , \ Z_2 \neq (0,0) \varepsilon \mathbb{C}$

C4) $Z . \bar{Z} = |Z|^2$

C5) $\mathrm{Re}(Z) = \frac{Z + \bar{Z}}{2} \quad , \quad \mathrm{Im}(Z) = \frac{Z - \bar{Z}}{2i}$

2.0 $\mathbb{C}$ COMO ESPACIO METRICO

2.1 <u>$\mathbb{C}$ es un espacio normado</u>

DEFINICION 2.1.1

Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo K, se dice que $\mathbb{E}$ es normado si puede definirse la aplicación $\|\ \| : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

N1) $\|v\| \geq 0.$ N3) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$

(1.4)

N2) $\|v\| = 0$ si y solo si $v = (0,0)$ N4) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$

DEFINICION 2.1.2

Sea $Z \varepsilon \mathbb{C}$, $Z = (x,y)$ la aplicación $\|\ \| \ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$Z \rightsquigarrow \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

define el módulo del número complejo Z y le llamaremos, valor -

absoluto del complejo Z.

Es de notar que en el caso de $\mathbb{E} = \mathbb{C}$ en las propiedades (N1),..., N4 y tomando

$$||Z|| = |Z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (1.5)$$

En este caso diremos que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial normado.

2.2 $\mathbb{C}$ es un espacio métrico - propiedades

DEFINICION 2.2.1

Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial normado, sea $d: \mathbb{E}\times\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$. Tal que $d: \mathbb{E}\times\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}: (Z_1,Z_2) \rightsquigarrow ||Z_1-Z_2||$. Se dice que $\mathbb{E}$ es un espacio métrico si cumple.

M1) $d(Z_1,Z_2) \geq 0$

M2) $d(Z_1,Z_2) = 0 \iff Z_1 = Z_2$

M3) $d(Z_1,Z_2) = d(Z_2,Z_1)$

M4) $d(Z_1,Z_2) = d(Z_1,Z) + d(Z,Z_2)$.

El par $(\mathbb{C},d)$ constituido por el conjunto $\mathbb{C}$ y la métrica definida en (1.5) posee la estructura de espacio métrico.

Propiedades adicionales

M5) $d(\alpha Z_1,\alpha Z_2) = |\alpha| d(Z_1,Z_2)$

M6) $d(Z_1+Z_0,Z_2+Z_0) = d(Z_1,Z_2)$ (1.6)

3.0 FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

DEFINICION 3.0.1

Sea $Z = (x,y) \in \mathbb{C}$. Llamaremos argumento del complejo $Z \neq 0$ al ángulo que forma el vector Z, con el eje real, y se define median te

$$\theta = \text{Arctan}\,(y/x)\,, \qquad \theta = \text{Arg}\,(Z) \qquad (1.7)$$

3.01 <u>La forma polar de un número complejo</u>

Sea $Z = (x,y) \in \mathbb{C}$. $Z \neq (0,0)$, podemos pensar en una representación de este número, por medio de coordenadas polares. $(\|Z\|, \theta)$; en efecto, de la <u>figura</u> 2 se obtiene:

$$\text{Cos}\,(\theta) = \frac{x}{\|Z\|} \Rightarrow x = \|Z\|\,\text{Cos}\,(\theta)$$

$$\text{Sen}\,(\theta) = \frac{y}{\|Z\|} \Rightarrow y = \|Z\|\,\text{Sen}\,(\theta)$$

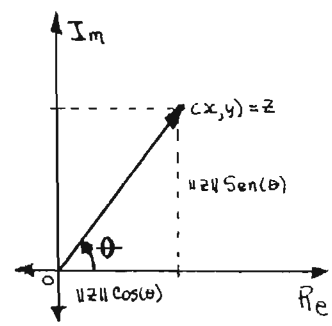


FIGURA 2

el número

$Z = x + iy$ queda expresado

$$Z = \|Z\|\;\text{Cos}\,(\theta) + i\,\|Z\|\;\text{Sen}\,(\theta)$$

$$Z = \|Z\|\,[\text{Cos}\,(\theta) + i\;\text{Sen}\,(\theta)]$$

Luego el complejo $Z = x + iy$ en coordenadas rectangulares, queda expresado en coordenadas polares y toma la forma:

$Z = \|Z\|\,[\text{Cos}\,(\theta) + i\;\text{Sen}\,(\theta)]$, y puede denotarse mediante

$$Z = \|Z\|\,\text{Cis}\,(\theta), \quad \text{donde } \theta = \text{Arctan}\,(y/x) \qquad (1.8)$$
$$\text{Cis}\,(\theta) = \text{Cos}\,(\theta) + i\;\text{Sen}\,(\theta)$$

la relación (1.8) tambien puede expresarse mediante

$$Z = \|Z\|\;\text{Cis}\,(\theta + 2\pi k) \quad k \in \mathbb{Z} \qquad (1.9)$$

con el valor principal para $\theta \in (-\pi, \pi]$

<u>Propiedades de Cis (θ)</u>

Si $Z = \text{Cis}\,(\theta)$, $Z_1 = \text{Cis}\,(\theta_1)$, $Z_2 = \text{Cis}\,(\theta_2)$, entonces

$$\text{C1)}\quad Z_1 . Z_2 = \text{Cis}\,(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\text{C2)}\quad [\text{Cis}\,(\theta)]^{-1} = \text{Cis}\,(-\theta) \qquad \text{Cis}\,\theta \neq (0,0) \tag{1.10}$$

$$\text{C3)}\quad \frac{\text{Cis}\,(\theta_1)}{\text{Cis}\,(\theta_2)} = \text{Cis}\,(\theta_1 - \theta_2)$$

3.02 Interpretación geométrica de las propiedades C1 - C3

Consideremos los complejos: $Z_1 = ||Z_1||\text{Cis}\,(\theta_1)$, $Z_2 = ||Z_2||\text{Cis}\,(\theta_2)$
Interpretemos el producto definido por $Z_1.Z_2 = ||Z_1||.||Z_2||\text{Cis}\,(\theta_1+\theta_2)$ de la figura 3.

Sean $\theta_1 = \text{Arg}\,(Z_1)$, $\theta_2 = \text{Arg}\,(Z_2)$

$Z_1.Z_2 = ||Z_1||\cdot||Z_2||\text{Cis}\,(\theta_1+\theta_2)$

$||Z_1||\cdot||Z_2|| = ||Z_1\cdot Z_2||$

$\text{Arg}\,(Z_1.Z_2) = \theta_1 + \theta_2$

$\text{Arg}\,(Z_1.Z_2) = \text{Arg}\,(Z_1) + \text{Arg}\,(Z_2)$

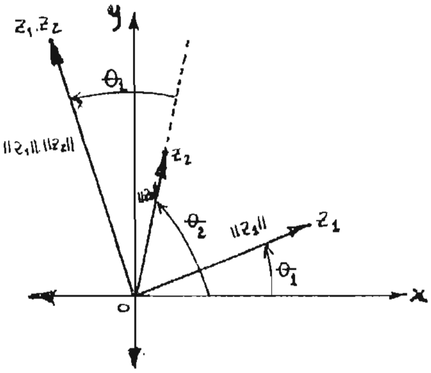


FIGURA 3

Es decir el producto de dos números complejos está representado por un vector de módulo igual al producto de los módulos de los factores; y su argumento es la suma de los argumentos.

En particular:

Se puede hacer girar un vector con ángulo θ sin más que multiplicar dicho vector por Cis (θ).

La multiplicación por i lo hace girar $\theta = \pi/2$ (E1)

La multiplicación por -1, lo hace girar $\theta = \pi$ (E2)

La multiplicación por $-i$, lo hace girar $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (E3)

Es decir (E1) puede escribirse $Zi = ||Z||\text{Cis}\,(\theta+\pi/2)$

(E2) como $-Z = ||Z||\text{Cis}\,(\theta+\pi)$

E3) como $-iZ = \|Z\| \text{Cis}\,(\theta+3\pi/2)$.

ILUSTRACION 3.01

Sean $Z_1 = 1 + i$, $Z_2 = \sqrt{3} - i$ si llevamos éstos complejos sobre un diagrama de Argand (Figura 4), las representaciones polares son:

$$Z_1 = \sqrt{2}\ \text{Cis}\,(\pi/4)\ ,\quad Z_2 = 2\ \text{Cis}\,(-\pi/6)$$

$$Z_1 . Z_2 = 2\sqrt{2}\ \text{Cis}\,(\pi/4+(-\pi/6)]$$

$$Z_1 . Z_2 = 2\sqrt{2}\ \text{Cis}\,(\pi/4 - \pi/6)$$

$$= 2\sqrt{2}\ [\text{Cos}\,(\pi/12) + i\,\text{Sen}\,(\pi/12)]$$

$$Z_1 Z_2 \simeq 2.73 + 0.73\, i\ .$$

$$Z_1 . Z_2 \simeq (1 + \sqrt{3}) + 0.73\, i$$

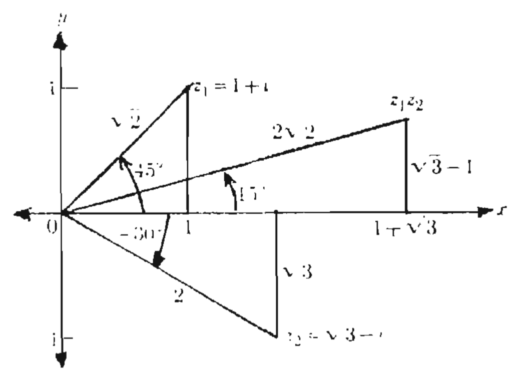


FIGURA 4

COCIENTE:

Supongamos $\|Z_2\| \neq 0$ entonces

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\|Z_1\| \text{Cis}\,(\theta_1)}{\|Z_2\| \text{Cis}\,(\theta_2)}$$

$$= \frac{\|Z_1\|}{\|Z_2\|} . \text{Cis}\,(\theta_1 - \theta_2)\ ;$$

Se concluye que. Para dividir complejos dividimos los módulos y restamos los argumentos.

ILUSTRACION 3.02

$$\frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{\sqrt{2}\ \text{Cis}\,(\pi/4)}{2\ \text{Cis}\,(-\pi/6)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{Cis}\,(\pi/4 + \frac{\pi}{6})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{Cis}\,(5\pi/12)\ .$$

4.0 FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

4.01 Forma $Z = \|Z\| e^{i\theta}$

TEOREMA 4.01

Para todo complejo $Z \neq (0,0)$, Z puede expresarse de la forma -

$$Z = \|Z\| e^{i\theta}.$$

DEMOSTRACION

Aplicando los desarrollos de Maclaurin en $\mathbb{R}$, de las funciones Sen (θ) y Cos (θ), e^{θ}, se tiene:

$$\text{Cos}(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^2}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \cdot \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \qquad (1.11)$$

$$\text{Sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (1.12)$$

de las ecuaciones 1.11 y 1.12 el complejo $Z = \|Z\| [\cos\theta + i\,\text{Sen}(\theta)]$ puede escribirse.

$$Z = \|Z\| \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1) \cdot \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \cdot \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

$$= \|Z\| \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots + i \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots \right) \right]$$

$$= \|Z\| \left(1 + \frac{i\theta}{!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots \right]$$

$$= \|Z\| \left[1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots \right]$$

$$= \|Z\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

luego

$$Z = \|Z\| \; e^{i\theta}. \qquad (1.13)$$

4.02 Propiedades de la forma exponencial - fórmula de Demoivre

La forma exponencial de un número complejo $Z \neq (0,0)$, cumple con las mismas propiedades de la exponencial de los números reales.

DEFINICION 4.02

Sean $Z_1 = ||Z_1||e^{i\theta_1}$, $Z_2 = ||Z_2||e^{i\theta_2}$, $Z_1 \neq (0,0)$, $Z_2 \neq (0,0)$, entonces

e1) $Z_1 . Z_2 = ||Z_1|| . ||Z_2|| \; e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

e2) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{||Z_1||}{||Z_2||} \; \theta^{i(\theta_1-\theta_2)}$ (1.15)

e3) $\dfrac{1}{Z_1} = \dfrac{1}{||Z_1||} \; e^{-i\theta_1}$; $(e^{i\theta})^n = \theta^{in\theta}$, $\forall n$.

Además, relaciona la forma trigonométrica con la exponencial

e4) $\text{Cos}\,(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

(1.16)

e5) $\text{Sen}\,(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

De la propiedad (e1). Para un complejo Z no nulo y argumento θ se tiene:

$$\underbrace{Z.Z.Z\ldots Z}_{n\text{-veces}} = \left[\underbrace{||Z||.||Z||.||Z||\ldots||Z||}_{n\text{-veces}}\right] . \; e^{i(\overbrace{\theta+\theta+\theta\ldots\theta}^{n\text{-veces}})}$$

$$= (||Z||e^{i\theta})^n$$

$$Z^n = ||Z||^n . e^{in\theta}, \; n \in \mathbb{Z}^+ \qquad (1.17)$$

Además, se puede añadir al ángulo θ un múltiplo de 2π; así -- (1.17) puede escribirse.

$$Z^n = ||Z||^n e^{i(n\theta+2\pi K)}, \quad k \varepsilon \mathbb{Z} \tag{1.18}$$

En particular si $||Z|| = 1$ se obtiene

$$Z^n = e^{i(n\theta+2\theta K)} \qquad k \varepsilon \mathbb{Z} \tag{1.19}$$

conocida como fórmula de Demoivre

4.03 <u>Raices n-simas de un número complejo</u>

DEFINICION 4.03

Sea $W = ||W||\text{Cis}\ (\theta)$ un número complejo, entonces si $Z^n = W$ decimos que Z es la raiz n - sima de W.

<u>Cálculo de las raices n-simas</u>

Supongamos el complejo $W = ||W||\text{Cis}\ (\theta)$ y $Z = ||Z||\text{Cis}\ \alpha$, entonces

$$Z^n = W \iff ||Z||^n\ \text{Cis}\ (n\alpha) = ||W||\ \text{Cis}\ (\theta)$$

$$\iff ||Z||^n\ [\text{Cos}\ (n\alpha) + i\,\text{Sen}\ (n\alpha)] = ||W||\ [\text{Cos}\ (\theta) + i\,\text{Sen}\ (\theta)]. \tag{1.20}$$

Estos complejos son iguales si la parte real es igual a la parte imaginaria respectivamente, de donde, de (1.20) se tiene:

$$||Z||^n\text{Cos}\ (n\alpha) = ||Z||\text{Cos}\ (\theta)$$

$$||Z||^n\text{Sen}\ (n\alpha) = ||W||\text{Sen}\ (\theta)\text{, de donde,}$$

$$\frac{||Z||^n\text{Cos}\ (n\alpha)}{||Z||^n\text{Sen}\ (n\alpha)} = \frac{||W||\text{Cos}\ (\theta)}{||W||\text{Sen}\ (\theta)} \quad \text{así} \quad \text{Cot}\ (n\alpha) = \text{Cot}\ (\theta) \quad \text{y} \quad ||Z||^n = ||W||$$

esto es posible si

$$\begin{aligned} n\alpha &= \theta + 2\pi k, \quad k \varepsilon \mathbb{Z} \\ \alpha &= \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \end{aligned} \tag{1.21}$$

luego

$$Z = W^{1/n} = ||W||^{1/n} \text{ Cis } \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)$$ y W tiene exactamente n - raices distintas.

5.0 REGIONES EN EL PLANO COMPLEJO

Consideremos a $\mathbb{C}$ como espacio métrico y Z un punto arbitrario - de $\mathbb{C}$.

5.01 Definiciones básicas

DEFINICION 5.01

Sea $r > 0$ lamaremos BOLA ABIERTA con centro en Z_0 y radio r, al conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $d(Z,Z_0) < r$ y se denota por - $B(Z_0,r)$, de la forma siguiente

$$B(Z_0,r) = \{Z \in \mathbb{C} \ / \ d(Z,Z_0) < r, \ r > 0\}, \tag{1.22}$$

Por relación (1.6) propiedad M6. (1.22) puede escribirse.

$$Z_0 + B(0,r) = \{Z \in \mathbb{C} \ / \ Z = Z_0 + B(0,r)\}.$$

DEFINICION 5.02

Sea $r > 0$ llamaremos Bola Cerrada de Centro en Z_o y radio r - al conjunto de puntos $Z \in \mathbb{C}$ tales que $d(Z,Z_0) \leq r$, la denotaremos por $\bar{B}(Z,r)$ de la forma siguiente:

$$\bar{B}(Z_0,r) = \{Z \in \mathbb{C} \ / \ d(Z,Z_0) \leq r, \ r > 0\}$$

DEFINICION 5.03

Sea $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$, $Z \in \mathbb{A}$ se dice que Z es interior a $\mathbb{A}$ si existe $r > 0$ - tal que $B(Z,r) \subset \mathbb{A}$

DEFINICION 5.04

Sea $Z \in \mathbb{C}$. Z es exterior a $\mathbb{A}$ si exíste $r > 0$ tal que $B(Z,r) \subset \complement_{\mathbb{C}} \mathbb{A}$

DEFINICION 5.05

Sea $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$, $Z \in \mathbb{A}$ se dice que Z es punto frontera si paratodo $r > 0$ se cumple.

i) $B(Z,r) \cap \mathbb{A} \neq \phi$

ii) $B(Z,r) \cap \complement_{\mathbb{C}} \mathbb{A} \neq \phi$

DEFINICION 5.06

$\mathbb{A}$ es abierto si todos sus puntos son interiores.

DEFINICION 5.07

Sea $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ llamaremos clausura de $\mathbb{A}$ y se denota por $\bar{A}$ al menor - conjunto cerrado que contiene a $\mathbb{A}$.

DEFINICION 5.08

$\mathbb{A}$ es cerrado si $\complement_{\mathbb{C}} A$ es abierto

DEFINICION 5.09

$\mathbb{A}$ es acotado si existe $r > 0$ tal que $\mathbb{A} \subset B(0,r)$

DEFINICION 5.010

Sea Z_0, $Z_1 \in \mathbb{C}$ llamaremos segmento de extremos Z_0 y Z_1 al conjunto:

$$[Z_0, Z_1] = \{Z \in \mathbb{C} \ / \ Z - Z_0 = \alpha(Z_1 - Z_0), \ \alpha \in [0,1]\}$$

DEFINICION 5.011

Sea $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ se dice que es conexo si no existen abiertos A_1, A_2 -

tales que

$$\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 = \phi \quad y \quad \mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}$$

DEFINICION 5.012

Se dice que $\mathbb{A}$ es conexo por arcos, si para Z_1, Z_2 cualesquiera de A existe una poligonal que les une que está totalmente contenida en A.

DEFINICION 5.013

Sea $\mathbf{A} \subset \mathbb{C}$ se dice que es convexo si para todo par Z_1, Z_2 de elementos de $\mathbb{A}$ el segmento $[Z_1, Z_2] \subset \mathbb{A}$.

DEFINICION 5.014

$\mathbb{A}$ es un Dominio si $\mathbb{A}$ es abierto y conexo

DEFINICION 5.015

Se dice que $\mathbb{A}$ es una región si $\mathbb{A}$ es conexo

5.02 <u>Transformaciones generales</u>

En el capítulo II se tratará con más información el estudio de las Funciones Complejas, de variable Compleja. Una Función Compleja es una correspondencia univoca de cada complejo Z, hacia algún número complejo W.

DEFINICION 5.0.1

Sea $a \in \mathbb{R}$, llamaremos Homotecia a la transformación definida por la ecuación

$$W = a Z \quad , \quad Z \in \mathbb{C}.$$

Esta tranformación, figuras del plano Z dilatan (ó contraen) en dirección de Z, a figuras en el plano W. Si $a > 1$, las figuras se hacen más grandes; si $a \in (0,1)$, las figuras se hacen más pequeñas.

ILUSTRACION 5.0.1

Consideremos la transformación $W = 3Z$, ilustremos el efecto de ésta transformación considerando la región R definida mediante las rectas $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, tal como se indica en la Figura 5

$$W = 3Z$$

$$W = 3x + i3y$$

de donde $U = 3x$, $V = 3y$

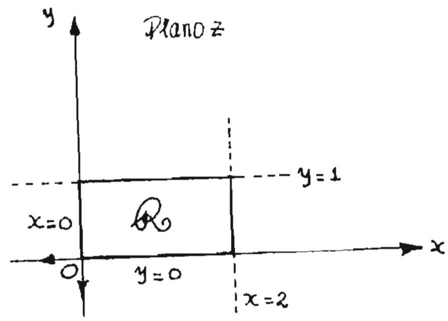


FIGURA 5

las rectas, $\begin{cases} x = 0 & \text{se aplica } U = 0 \\ y = 0 & \text{"} \quad \text{"} \quad V = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 & \text{se aplica } U = 6 \\ y = 1 & \text{"} \quad \text{"} \quad V = 3 \end{cases}$

tal como se ilustra en la Figura 6

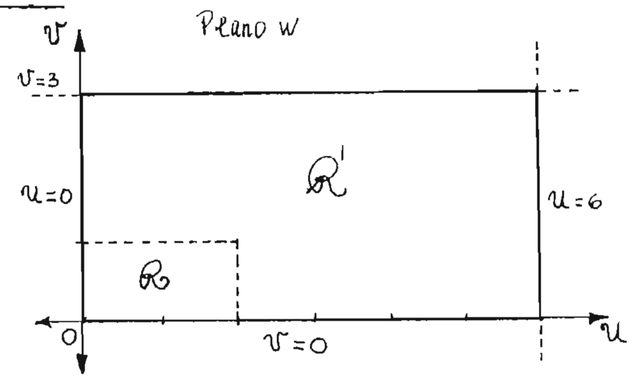


FIGURA 6

DEFINICION 5.0.2

Sea β una Constante Compleja, llamarémos traslación a la transformación definida mediante la ecuación

$$W = Z + \beta$$

Con ésta transformación figuras del plano Z se trasladan en la dirección del vector β, en el plano W.

ILUSTRACION 5.0.2

Sea R la región en el plano Z definida mediante las rectas.
$x = 0$, $y = 0$; $x = 1$, $y = 1$; (como se indica en la figura 7,) -- sea $\beta = 1 + i$. Mostrar que la transoformación definida mediante $W = Z + \beta$ es una traslación, y traslada la región R del plano Z al plano W, en la dirección del vector $\beta = (1,1)$.

Sea $\beta = (1,1)$

$$W = Z + \beta$$

$$W = (x,y) + (1,1)$$

$W = (x + 1, y + 1)$, de donde, $U = x + 1$, $V = y + 1$.

las rectas.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ se aplica $\begin{matrix} U = 1 \\ V = 1 \end{matrix}$

las rectas

$\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$ $\begin{cases} \text{se aplica} \\ U = 2 \\ V = 2 \end{cases}$

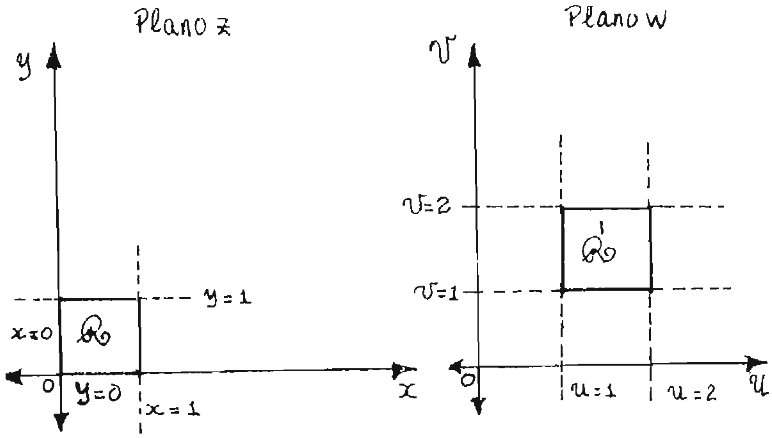


FIGURA 7

DEFINICION 5.0.3

Sea θ_0 una constante, $Z \neq 0$. Se llama rotación a la transformación definida por la ecuación

$$W = Z\, e^{i\theta_0}$$

Con ésta transformación las figuras del plano Z se rotan un ángulo θ_0 sobre el plano W.

ILUSTRACION 5.0.3

Consideremos la región R definida mediante las rectas.

$x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ (tal como se indica en la figura 8)

Sea $Z_0 = e^{i\pi/4}$ mostrar que la transformación definida mediante $W = Ze^{i\pi/4}$ es una rotación, y rota la región R del plano Z, un ángulo $\theta_0 = \pi/4$, en el plano W.

Sea $Z = |Z|e^{i\theta}$ un punto arbitrario de la región R del palno Z.

Entonces:

$$U + iV = Z.e^{i\pi/4}$$

$$= |Z|e^{i\theta}.e^{i\pi/4} = |Z|e^{i(\theta+\pi/4)}$$

De donde:

$$U = |Z| \operatorname{Cos} \theta . \operatorname{Cos} (\pi/4) - |Z| \operatorname{Sen} \theta . \operatorname{Sen}(\pi/4)$$

$$V = |Z| \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} (\pi/4) + |Z| \operatorname{Cos} \theta . \operatorname{Sen}(\pi/4)$$

tanbien U y V pueden expresarse, de la siguiente forma:

$$U = x \operatorname{Cos} (\pi/4) - y \operatorname{Sen} (\pi/4) \quad ; \quad U = \frac{\sqrt{2}}{2} . x - \frac{\sqrt{2}}{2} . y$$

$$V = y \operatorname{Sen} (\pi/4) + x \operatorname{Cos} (\pi/4) \quad ; \quad V = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} . y$$

las rectas

$x = 0$, se aplica $U = -y$; $V = y \Rightarrow V = -U$

$y = 0$, se aplica $U = x$; $V = x \Rightarrow V = U$

las rectas

$x = 1$, se aplica $U = 1 - y$, $V = 1 + y \Rightarrow V = \sqrt{2} - U$

$y = 1$, se aplica $U = x + 1$, $V = x + 1 \Rightarrow V = \sqrt{2} + U$

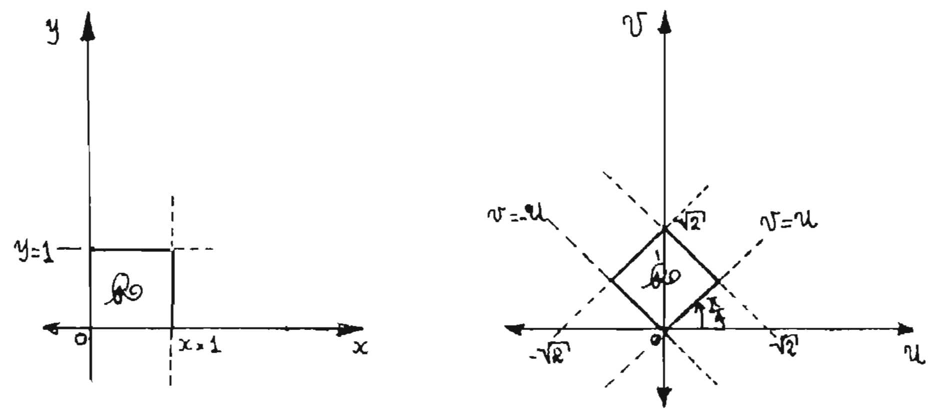


FIGURA 3

DEFINICION 5.0.4

Sea $Z \neq 0$. Llamarémos inversión a la transformación definida - mediante la ecuación

$$W = \frac{1}{Z}$$

ILUSTRACION 5.0.4

Mostrar que la región definida en el plano Z, mediante la Figura 9 sufre una inversión $W = \frac{1}{Z}$ en el plano W, tal como se muestra en la Figura 10 en el plano W.

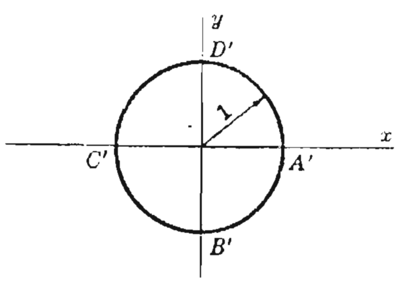


FIGURA 9

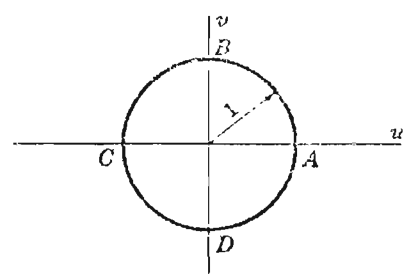


FIGURA 10

SOLUCION

Sea $Z = |Z|e^{i\theta}$ y $W = \rho e^{i\phi}$, entonces $W = \frac{1}{Z}$ se convierte en

$$\rho e^{i\phi} = \frac{1}{|Z|e^{i\theta}} = \frac{1}{|Z|}\, e^{-i\theta}$$

de la cual

$$\rho = \frac{1}{|Z|} \quad \text{y} \quad \phi = -\theta$$

El círculo ABCD, $\rho = 1$ en el plano W se aplica en el círculo -

A'B'C'D', con $|Z| = 1$ del plano Z.

Cualquier punto exterior al círculo ABCD con $\rho > 1$ se aplica de manera única en un punto interior del círculo A'B'C'D' con $|Z| < 1$.

DEFINICION 5.0.6

Sea α, β, γ, δ números complejos. Llamaremos transformación bilineal a la transformación definida por

$$W = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

TEOREMA 5.0.1

Toda transformación bilineal puede descomponerse en rotaciones, homotecia, traslaciones e inversiones.

PRUEBA

1º Caso $\quad \gamma = 0, \quad \delta \neq 0.$

Se tiene entonces que:

$$W = \frac{\alpha Z + \beta}{\delta}$$

$$W = \frac{\alpha}{\delta} \cdot Z + \frac{\beta}{\delta}, \; W = \frac{\alpha}{\delta} Z + \beta', \text{ con } \beta' = \frac{\beta}{\delta}$$

que oviamente es una descomposición en las transformaciones anteriores

2º Caso $\gamma \neq 0$ dividiendo el numerador y denominador por γ, resulta que Z tiene coeficiente 1

$$W = \frac{\alpha Z + \beta}{Z + \delta'} \quad ; \quad \delta' = \frac{\delta}{\gamma}$$

y se puede expresar como

$$W = \alpha + \frac{\beta - \alpha\delta'}{Z + \delta'} \quad , \quad \beta - \alpha\delta' \neq 0$$

Haciendo la secuencia de transformaciones

$$W_1 = Z + \delta' \quad , \quad W_2 = \frac{1}{W_1} \quad ,$$

$$W_3 = (\beta - \alpha\delta').W_2$$

$$W = \alpha + W_3$$

que son las transformaciones, traslación, inversión homotecia y rotación, en ese orden, proporciona la transformación bilineal.

CAPITULO II

FUNCIONES ANALITICAS Y

FUNCIONES ELEMENTALES

2.0 FUNCIONES ANALITICAS

2.0.1 Componente de una función compleja

DEFINICION 2.0.1.1

Sea $f\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función

$$(x,y) \rightsquigarrow f(x,y) = (U,V) = W$$

llamaremos funciones componentes de f al par (U,V) de funcio-- nes reales de variable real, y los identificaremos de la si--- guiente manera.

$$Z\ \mathbb{C}\ ,\ f(Z) = U(x,y) + iV(x,y) \qquad (2.1)$$

las funciones U, y V suelen denotarse de la siguiente manera.

$$U = Re(W) = \Psi(x,y) \qquad V = Im(W) = \psi(x,y) \qquad (2.2)$$

ILUSTRACION 2.0.1.1

Consideremos la función compleja.

$f\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}:\ Z \rightsquigarrow e^Z = W$ tiene como funciones componentes

$$f(Z) = e^Z = e^{x+iy} = e^x\ .\ e^{iy} = e^x[\mathrm{Cos}\ (y) + i\,\mathrm{Sen}\ (y)]$$

$$U(x,y) = e^x\mathrm{Cos}\ (y)\ ,\ V(x,y) = e^x\mathrm{Sen}\ (y)\ , \qquad (2.3)$$

que son funciones reales de variable real

2.0.2 Límite de una funcion compleja

En el contexto de ésta sección daremos por conocido los conceptos enunciados en la sección 5.0 del capítulo I.

DEFINICION 2.0.2.1

Sea f una función compleja definida en todos los puntos de un vecindario de Z_o, excepto posiblemente en Z_o. Se dice que el límite de f es $L \in \mathbb{C}$ cuando Z se aproxima a Z_o y se escribe

$$\lim_{Z \to Z_o} f(Z) = L \qquad (2.4)$$

si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\|f(Z) - L\| < \varepsilon$ siempre que $0 < \|Z - Z_o\| < \delta$ se prueba facilmente, por medio del cálculo de variable real, el siguiente teorema.

TEOREMA 2.0.2.1

Sea $f.\ \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}:\ Z \rightsquigarrow f(Z) = U(x,y) + iV(x,y)$

entonces

$$\lim_{Z \to Z_o} f(Z) = L = \ell_1 + i\ell_2 \iff \lim_{Z \to Z_o} U(x,y) = \ell_1;\ \lim_{Z \to Z_o} V(x,y) = \ell_2$$

OBSERVACION 2.0.2.1

El algebra de limites, para funciones de variable compleja, se mantiene de igual forma que en las funciones de variable real.

Si $f: \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$; $g: \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ son funciones complejas, si L_1 y L_2 son límites de f y g respectivamente. Se tiene que

i) $\lim\limits_{Z \to Z_o} [f \pm g]_{(Z)} = \lim\limits_{Z \to Z_o} f(Z) \pm \lim\limits_{Z \to Z_o} g(Z) = L_1 \pm L_2$

ii) $\lim_{Z\to Z_o} [f.g]_{(Z)} = \lim_{Z\to Z_o} f(Z) \;.\; \lim_{Z\to Z_o} g(Z) = L_1 \;.\; L_2$ (2.5)

iii) $\lim_{Z\to Z_o} \left[\frac{f}{g}\right]_{(Z)} = \lim_{Z\to Z_o} \frac{f(Z)}{g(Z)} = \frac{\lim_{Z\to Z_o} f(Z)}{\lim_{Z\to Z_o} g(Z)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$

2.0.3 Continuidad de una función compleja

DEFINICION 2.0.3.1

Sea $f: \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es continua en Z_o, si $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\|f(Z) - f(Z_o)\| < \varepsilon \text{ siempre que } \|Z - Z_o\| < \delta \quad (2.6)$$

DEFINICION 2.0.3.2

Sea $f: \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, R una región definida sobre $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$. Se dice que f es continua en R, si es continua en cada punto de R.

DEFINICION 2.0.3.3

Sea $f: \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, Z_o un punto interior a $\mathbb{A}$ f es continua en Z_o si y solo si sus funciones componentes U y V son continuas en $Z = Z_o$

TEOREMA 2.0.3.1

Sea $f: \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{C}$, $g: \mathbb{B} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, funciones, si f es continua en $Z_o \in \mathbb{A}$ y g es contínua en $f(Z_o) \in \mathbb{B}$. Entonces la función $h = g \circ f: \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en Z_o

DEMOSTRACION

Sea $W = f(Z)$. Entonces g es contínua en $W = W_o$. Luego, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|g(W) - g(W_o)\| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \|W - W_o\| < \delta_1 \qquad (2.7)$$

pero f es contínua en $Z = Z_o$. Por consiguiente, existe un δ - que depende de δ_1 tal que

$$\|f(Z) - f(Z_o)\| = \|W - W_o\| < \delta_1 \text{ siempre que } \|Z - Z_o\| < \delta \qquad (2.8)$$

pero la relación (2.8) significa que

$$\|g(f(Z)) - g(f(Z_o)\| < \varepsilon \text{ siempre que } \|Z - Z_o\| < \delta$$

por tanto, $g \circ f$ es contínua en $Z = Z_o$.

OBSERVACION 2.0.3.1

La continuidad de funciones complejas, para el algebra de funciones contínuas, se mantiene de igual manera que de las funciones de variable real.

2.0.4 Derivada de una función compleja

DEFINICION 2.0.4.1

Sea $f: \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{A}$ un conjunto abierto de $\mathbb{C}$, sea $Z_o \varepsilon \mathbb{A}$. Se dice que f posee derivada $f'(Z_o)$ en Z_o si el límite

$$\lim_{Z \to Z_o} \frac{f(Z) - f(Z_o)}{Z - Z_o} = f'(Z_o) \qquad (2.9)$$

existe

Consideraciones. Al igual que en variable real se tiene:

i) La existencia de $f'(Z_o)$ implica la continuidad de f en Z_o

ii) Si dos funciones f y g son derivables en Z_o, su suma, diferencia producto y cociente admiten también derivadas en Z_o y vienen dadas por las fórmulas usuales mostradas en las relaciones (2.5), (2.6), (2.8).

iii) Es válida la regla de la cadena

$$(g \circ f)'(Z_o) = g'(f(Z_o) - f'(Z_o)$$

si el dominio de g contiene un vecindario de $f(Z_o)$ y si - existen $f'(Z_o)$ y $g'(f(Z_o))$.

2.0.4.1 Las ecuaciones de Cauchy - Riemann

Esta sección muestra las condiciones necesarias para la existencia de la derivada de f en Z_o, por medio de sus funciones componente U, y V.

TEOREMA 2.0.4.1

Sea $f'\mathbb{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$; $Z \rightsquigarrow f(Z) = U(xy) + iV(x,y)$, $Z_o \in \mathbb{A}$. Si f es diferenciable en Z_o, entonces las funciones U y V tienen derivadas parciales en $Z = Z_o$ y

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{Z=Z_o} = \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{Z=Z_o}$$
$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{Z=Z_o} = - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{Z=Z_o} \qquad (2.10)$$

PRUEBA

Por hipótesis f es diferenciable, entonces existe el límite;

$$f'(Z_o) = \lim_{Z\to 0} \frac{f(Z + Z_o) - f(Z_o)}{Z}$$

$$= \lim_{Z\to 0} \frac{U(Z + Z_o) + iV(Z + Z_o) - [U(Z_o) + iV(Z_o)]}{Z}$$

$$= \lim_{Z\to 0} \frac{U(Z + Z_o) - U(Z_o) + iV(Z + Z_o) - iV(Z_o)}{Z}$$

$$f'(Z_o) = \lim_{Z\to 0} \frac{U(Z + Z_o) - U(Z_o)}{Z} + i \lim_{Z\to Z_o} \frac{V(Z + Z_o) - V(Z_o)}{Z} \qquad (2.11)$$

De la relación (2.11) se puede considerar dos casos.

$Z \in \mathbb{R}$

Sea $Z_o = (x_o, y_o)$

$$f'(Z_o) = \lim_{Z\to 0} \frac{U(x_o + Z, y_o) - U(x_o, y_o)}{Z} + i \lim_{Z\to 0} \frac{U(x_o+z, y_o) - V(x_o, y_o)}{Z}$$

$f'(Z_o) = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{Z=Z_o} + i \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{Z=Z_o}$; luego U y V son diferencialbes en $Z = Z_o$, además como Z_o es arbitrario e interior a $\mathbb{A}$, por definición 2.0.3.3 $\frac{\partial U}{\partial x}$; $\frac{\partial V}{\partial x}$ son contínuas. (2.12)

Z es imaginario

Sea $Z = x + iy$, si $x \to 0$ entonces $Z = it$, luego

$$f'(Z_o) = \lim_{Z\to 0} \frac{U(Z_o + Z) - U(Z_o)}{Z} + i \lim_{Z\to 0} \frac{V(Z_o + Z) - U(Z_o)}{Z}$$, puede - expresarse como:

$$f'(Z_o) = \lim_{t\to 0} \frac{U[(x_o, y_o) + (0,t)] - U(x_o, y_o)}{it} + \lim_{t\to 0} \frac{V[(x_o, y_o) + (0,t)] - V(x_o, y_o)}{it}$$

$$f'(Z_o) = \lim_{t\to 0} \frac{U(x_o, y_o+t) - U(x_o, y_o)}{it} + i \lim_{t\to 0} \frac{V(x_o, y_o+t) - V(x_o, y_o)}{it}$$

Luego $f'(Z_o) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial y}\right)$

comparando con la relación (2.12) se tiene

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$-i\left(\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) = i\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} \quad \frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}\right) \qquad (2.13)$$

La relación (2.13) se cumple si y solo si

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{2.14}$$

Las relaciones (2.14) son llamadas ecuaciones de Cauchy - Rieman, que constituyen la condición necesaria para la diferencialidad de una función.

La condición de suficiencia se muestra en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.0.4.2

Sea $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}: Z \rightsquigarrow f(Z) = U(x,y) + iV(x,y) . Z_0 \varepsilon \mathbb{C}$, si U y V tienen derivadas parciales contínuas en un vecindario de Z_0, - si esas derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cau-- chy - Riemann en Z_0, entonces f es diferenciable en Z_0. Además, $f'(Z_0)$ puede calcularse de las formas siguientes:

$$f'(Z_0) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i\,\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} - i\,\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + i\,\frac{\partial V}{\partial x} \tag{2.15}$$

donde todas las derivadas parciales están definida en Z_0.

DEMOSTRACION

Supongamos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \, ,$$

estan definidas en $Z_0 = (x_0, y_0)$, considerémos los incrementos.

$$\begin{aligned} \Delta Z = \quad & Z - Z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) \\ & = \Delta x + i\Delta y. \\ \Delta f(Z) = f(Z) - f(Z_0) & = U(x,y) + iV(x,y) - [U(x_0,y_0) - iV(x_0,y_0)] \\ & = U(x,y) - U(x_0,y_0) + i[V(x,y) - V(x_0,y_0)] \\ & = \Delta U + i\,\Delta V \end{aligned} \tag{2.16}$$

por cálculo de variable real se tiene que

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + (\alpha_1,\alpha_2).(\Delta x,\Delta y)$$

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$$; en forma análoga también

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y \qquad (2.17)$$

donde α_1,α_2, $\beta_1,\beta_2 \to 0$ como Δx, $\Delta y \to 0$,

introduciendo la notación

$$a = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad b = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad (2.18)$$

luego, sustituyendo (2.17) en (2.16) se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta f(Z) &= \Delta U + i\,\Delta V \\
&= a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y + i\,(b\Delta x + a\Delta y + \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y) \\
&= a(\Delta x + i\Delta y) + ib(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y \\
\Delta f(Z) &= (a + i\,b)\,\Delta Z + (\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y
\end{aligned}$$

por consiguiente

$$\lim_{\Delta Z\to 0}\frac{\Delta f(Z)}{\Delta Z} = \lim_{\Delta Z\to 0}\frac{(a+ib)\Delta Z}{\Delta Z} + \lim_{\Delta Z\to 0}\frac{(\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x}{\Delta Z} + \lim_{\Delta Z\to 0}\frac{(\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y}{\Delta Z} \qquad (2.19)$$

dado que $\alpha_1;\alpha_2$, $\beta_1;\beta_2 \to 0$ como Δx; $\Delta y \to 0$

(2.19) puede escribirse.

$$\lim_{\Delta Z\to 0}\frac{f(Z)}{\Delta Z} = f'(Z) = (a + ib) + \lim_{\Delta x\to 0}(\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + \lim_{\Delta y\to 0}(\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y.$$

Se concluye entonces que

$$f'(Z_o) = a + i\,b. \qquad (2.20)$$

Las diferentes formas de representar $f'(Z_o)$, se encuentran - reemplazando (2.18) en (2.20).

DEFINICION 2.0.4.2

Sea $f: \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $Z_o \in \mathbb{A} \subset \mathbb{C}$, una función diferenciable sobre el dominio $\mathbb{A}$, se dice que f es analítica en $\mathbb{A}$ si para todo - $Z_o \in \mathbb{A}$ existe un vecindario $N(Z_o)$ tal que f es diferenciable en todo $N(Z_o)$.

En referencia al término "analítica", se conocen otros nombres tales como:

Holomorfica, regular.

DEFINICION 2.0.4.2

Si una función f es analítica en un vecindario de Z_o, $N(Z_o)$, entonces se dice que f es analítica en $Z = Z_o$.

ILUSTRACION 2.0.4.1

En referencia a la ilustración 2.0.1.1 $f(Z) = e^Z$, tiene como - funciones reales.

$$U(x,y) = e^x \text{Cos } (y) \qquad V(x,y) = e^x \text{Sen } (y)$$

tiene como derivadas parciales contínuas

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x \text{Cos } (y) = \frac{\partial V}{\partial y} = e^x \text{Cos } (y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -e^x \text{ Sen } (y) = -\frac{\partial V}{\partial y} = -e^x \text{ Sen } (y) \qquad (2.21)$$

Son satisfechas las ecuaciones de Cauchy - Riemann, f es analítica en todo el plano, y tiene como derivada $f'(Z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x}$

$$f'(Z) = e^x \text{Cos } (y) + i\, e^x \text{ sen } (y)$$
$$= e^x [\text{Cos } (y) + i \text{ Sen } (y)]$$
$$= e^x . e^{iy} = e^{x+iy}$$
$$f'(Z) = e^Z \qquad (2.22)$$

2.1 FUNCIONES ELEMENTALES

2.1.1 Función Polinómica

DEFINICION 2.1.1

Sean a , a_o, ..., a_n elementos de $\mathbb{Z}$. Llamarémos función Polinómica en $Z \varepsilon \mathbb{C}$ a toda función de la forma

$$P: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}: Z \rightsquigarrow P(Z) = a_o + a_1 Z + \dots + a_n Z^n \quad (2.23)$$

Al conjunto de todos los polinomios en Z lo denotarémos por

$$\mathbb{C}(Z).$$

y lo escribirémos de la forma

$$\mathbb{C}(Z) = \{Z \varepsilon \mathbb{C} \ / \ P_i(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^K, \text{ para cada } i,K \varepsilon \mathbb{Z}\}$$

DEFINICION 2.1.2

Sean p(Z); q(Z) elementos de $\mathbb{C}(Z)$, tal que:

$p(Z) = a_o + a_1 Z + \dots + a\, Z^n$; $q(Z) = b_o + b_1 Z + \dots + b_n Z^n$, entonces $p(Z) = q(Z)$ si y solo sí para todo entero $j \geq 0$ $a_j = b_j$

DEFINICION 2.1.3

Si $p(Z) = \sum_{j=0}^{n} a_j Z^j$, $q(Z) = \sum_{j=0}^{n} b_j Z^j$. Se definen en $\mathbb{C}(Z)$ las siguientes operaciones (2.24)

$+: \mathbb{C}(Z) \times \mathbb{C}(Z) \longrightarrow \mathbb{C}(Z): (p(Z),q(Z)) \rightsquigarrow +(p(Z),q(Z)) = C_o + C_1 Z + \dots + C_n Z^n$

para cada j $C_j = a_j + b_j$.

$\cdot: \mathbb{C}(Z) \times \mathbb{C}(Z) \longrightarrow \mathbb{C}(Z): (p(Z),q(Z) \rightsquigarrow \cdot(p(Z),q(Z) = C_o + C_1 Z + \dots + C_k Z^k$

donde $C_t = a_t b_o + a_{t-1} b_1 + a_{t-2} b_2 + \dots + a_o b_t$ (2.25)

Se verifica que $\mathbb{C}(Z)$ con las operaciones así definidas es un -

anillo conmutativo.

2.1.1.1 Límite de una función polinómica

La definición de límite de una función polinómica, puede ser referida a la sección 2.0.2, puesto que una función polinómica es una función compleja de variable compleja. Además se conservan las propiedades sobre límites.

Se verifica que:

i) $\lim_{Z\to Z_0} aZ + b = aZ_0 + b$, a,b son contínuas

ii) $\lim_{Z\to Z_0} Z^k = Z_0^k$

iii) si $P(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$, entonces

$$\lim_{Z\to Z_0} P(Z) = a_0 + a_1 Z_0 + \ldots + a_n Z_0^n \qquad (2.26)$$

iv) si p(Z) y q(Z) son polinomicas y $q(Z_0) \neq 0$ entonces

$$\lim_{Z\to Z_0} \frac{p(Z)}{q(Z)} = \frac{p(Z_0)}{q(Z_0)}$$

RESULTADOS RELATIVOS A POLINOMIOS

Puesto que una función polinómica, es una combinación lineal de funciones complejas, y utilizando el hecho de que los teoremas sobre límites conducen a formular resultados análogos a la continuidad, entonces es posible pensar en los resultados siguientes:

R1) Sea P(Z) un polinomio

$$P(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$$

$$f(Z) = \frac{P(Z)}{Z^n} = \frac{a_0}{Z^n} + \frac{a_1}{Z^{n-1}} + \ldots + a_n$$

Entonces $\lim\limits_{Z\to\infty} f(Z) = a_n$, definiendo $f(\infty) = a_n$ y f contínua en ∞.

como

$$g(\xi) = f(\frac{1}{\xi}) = a_o\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \ldots + a_n$$

R2) Si P(Z) es un polinomio complejo no constante, la ecuación

P(Z) = 0 tiene una raiz compleja

NOTA 1

No se demuestra este resultado, puesto que se verificará en lo posterior cuando se cuente con una técnica más apropiada.

R3) Si P(Z) es un polinomio complejo de grado $n \geq 1$, entonces P(Z) puede expresarse de la forma.

$$P(Z) = C(Z - Z_1)(Z - Z_2) \ldots (Z - Z_n)$$

donde C y Z_k; (k = 1,2, ... n) son constantes.

2.1.1.2 Continuidad de funciones polinómicas

DEFINICION 2.1.1.2.1

Sea $P: \mathbb{C}(Z) \longrightarrow \mathbb{C}(Z)$; una función polinómica de variable compleja, Z_o un punto interior a $\mathbb{C}(Z)$. Se dice que P es contínua en Z_o si

$$\lim_{Z\to Z_o} P(Z) = P(Z_o) \qquad (2.28)$$

DEFINICION 2.1.1.2.2

Sea P una función polinómica, R una región simplemente conexa de $\mathbb{C}$, diremos que P es contínua en R si existe un vecindario - $N(Z_o) \subset R$ tal que P es contínua en todo $N(Z_o)$. (2.29)

Afirmación 1 la función polinómica usual es contínua en todo $\mathbb{C}$.

2.1.1.3 Derivada de una función polinómica

TEOREMA 2.1.1.3

Sea R una región simplemente conexa de $\mathbb{C}$, $Z_o \in R$, arbitrario, si $P: \mathbb{C}(Z) \longrightarrow \mathbb{C}(Z): Z \rightsquigarrow P(Z) = a_o + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$ es - una función polinómica contínua definida en R, entonces P, posee derivada $P'(Z_o)$ en Z_o y

$$P'(Z_o) = \lim_{Z \to Z_o} \frac{P(Z) - P(Z_o)}{Z - Z_o} = \sum_{j=0}^{n} a\, Z_o^{j-1} \qquad (2.30)$$

DEMOSTRACION

Sea $P(Z) = a_o + a_1 Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + \ldots + a_n Z^n$, sabemos que P. es - contínua en Z_o,

Para encontrar la derivada de la función polinómica P, en $Z = Z_o$ es necesario verificar la relación (2.30).

En efecto; como P es contínua en Z_o, se tiene que $\lim_{Z \to Z_o} P(Z) = P(Z_o)$,

luego,

$$P'(Z_o) = \lim_{Z \to Z_o} \frac{P(Z) - P(Z_o)}{Z - Z_o}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lim_{Z \to Z_o} a_j \frac{(Z^j - Z_o^j)}{(Z - Z_o)}$$

$$= a_1 + a_j \sum_{j=2}^{n} \lim_{Z \to Z_o} (Z^{j-1} + Z^{j-2} Z_o + \ldots + Z_o^{j-1})$$

$$P'(Z_o) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 Z_o + na_n Z^{n-1}$$

$$P'(Z_o) = \sum_{j=0}^{n} ja_j Z_o^{j-1}$$

En general, si P es una función polinómica,

con $P(Z) = a_0 + a_1 Z + \dots + a_n Z^n$

entonces P'(Z) tiene la forma

$$P'(Z) = \sum_{j=0}^{n} j a_j Z^{j-1} \quad , \quad \forall Z \in R$$

ILUSTRACION 2.1.1.3

Sea P: $\mathbb{C}(Z) \longrightarrow \mathbb{C}(Z)$: $Z \rightsquigarrow P(Z) = 4Z^5 - 5Z^4 - 4Z^3 - 1$

verificar, por medio de la fórmula encontrada en la relación - (2.31), la derivada del polinómio $P(Z) = 4Z^5 - 5Z^4 + 4Z^3 - 1$.

por (2.31) se tiene

$$P'(Z) = 20Z^4 - 20Z^3 + 12Z^2$$

2.1.2 Función exponencial base e

Querémos definir una función f, de una variable compleja tal - que posea las propiedades.

1. $f'(Z) = f(Z)$, 2. $f(Z_1 + Z_2) = f(Z_1).f(Z_2)$, 3. $f(0) = 1$.

Sabemos que la función exponencial real tiene esas propiedades. Verémos si es posible extender esa función en el plano complejo, con la condición de que f sea analítica. Es decir deseamos una función analítica en el plano complejo que tenga como restricción en los reales la función e^x.

Referente a la sección 4.01 del capítulo anterior, se definió, la exponencial, por medio de la serie de Maclaurin. Que haciendo una sustitución de U por iy, $y \in \mathbb{R}$., se tiene

$$e^{iy} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{j!}$$

$$= \frac{(iy)^0}{0!} + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \ldots$$

$$= 1 + iy + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \ldots$$

$$= (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots) + (iy + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^5y^5}{5!} + \ldots)$$

$$= (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots) + i(y + \frac{i^2y^3}{3!} + \frac{i^4y^5}{5!} + \ldots)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{2K!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2K+1)!}$$

$$e^{iy} = \operatorname{Cos}(y) + i \operatorname{Sen}(y)$$

Consideremos $Z = x + iy$, y tendrémos

$$e^Z = e^x . e^{iy}$$

$$e^Z = e^x(\operatorname{Cos}(y) + i \operatorname{Sen}(y))$$

Define una función exponencial de base e.

DEFINICION 2.1.2

Sea f una función de variable compleja

$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}: Z \leadsto f(Z) = e^Z$, se define la función exponen--- cial, base e como

$$f(Z) = e^x(\operatorname{Cos}(y) + i \operatorname{Sen}(y)) \qquad (2.32)$$

La función $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}: Z \leadsto e^Z$. Es analítica en todo $\mathbb{C}$ de - acuerdo a la ilustración 2.0.4.1.

<u>Propiedades de la función exponencial</u>

1. $f(Z + Z') = e^{(Z+Z')} = e^Z . e^{Z'}$
2. $f(Z.Z') = e^{Z.Z'} = (e^Z)^{Z'} \quad Z; Z' \in \mathbb{C}$ (2.33)

TEOREMA 2.1.2

Sea $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : Z \rightsquigarrow f(Z) = e^Z$, f es periódica y su período - fundamental es $2\pi i$.

PRUEBA

$$\begin{aligned} f(Z + 2\pi i) &= e^{Z+2\pi i} \\ &= e^Z[\text{Cos } (2\pi) + i \text{ Sen } (2\pi)] \\ &= e^Z . 1 \\ f(Z + 2\pi i) &= e^Z . \end{aligned}$$

2.1.3 Función logaritmo natural

DEFINICION 2.1.3.1

Sea $W \neq 0 \in \mathbb{C}$. Todo número Z, solución de la ecuación

$$W = e^Z \tag{2.34}$$

Se llama logaritmo de W y tiene por solución

$$Z = \ln|W| + i(\theta + 2\pi k), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

La solución especial, para $k = 0$

$$Z_o = \ln|W_o| + i\theta \ , \quad \theta \in (-\pi,\pi], \ \theta = \text{Arg } (W)$$

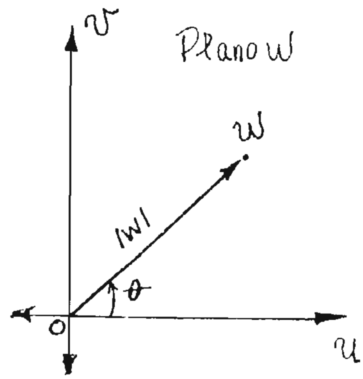
Se llama valor principal de logaritmo de W, y se denota por - log(W)

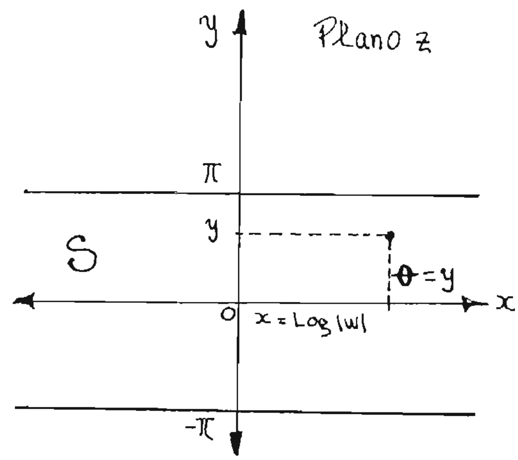
Representación Grafica. (figuras 11)

Sea $W = U + iV, \quad W = |W|e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \ln(W) &= \ln|W| + i\theta \\ \ln W &= x + iy \end{aligned}$$

$$X = \ln|W| \ , \quad y = \theta = \text{Arg}(Z)$$





FIGURAS 11

Observe que $Z_o = \mathrm{Ln}|W| + i\theta$ es la única solución de la ecuación $W = e^Z$ en la banda S, donde

$$S = \{Z \; / \; Z = x + iy, \; y \in (-\pi, \pi]\},$$

ILUSTRACION 2.1.3.1

La función $W = \mathrm{Ln}(Z)$ es analítica en el plano, menos en 0.

$\mathrm{Arg}(Z) \in (-\pi, \pi)$ la función está definida

Sea $Z = x + iy$.

$$\mathrm{Ln}(Z) = \mathrm{Ln}(|Z|) + i \arctan(y/x).$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2+y^2) + i \arctan(y/x)$$

las funciones reales son:

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2+y^2), \quad V(x,y) = \mathrm{Arctan}(y/x) \qquad (2.35)$$

que satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann, y son contí--
nuas y tiene como derivada

$$f'(Z) = W' = \frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{(-y)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}\ , \quad |Z| \neq 0$$

$$f'(Z) = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} \qquad |Z| \neq 0.\ \ \theta_o < \mathrm{Arg}\ (Z) < \theta_o + 2\pi$$

$$= \frac{\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = \frac{1}{Z}$$

PROPIEDADES

1) $\mathrm{Ln}(Z_1.Z_2) = \mathrm{Ln}|Z_1.Z_2| + i\ \mathrm{Arg}(Z_1.Z_2)$

$$= \mathrm{Ln}|Z| + \mathrm{Ln}|Z_2| + i[\arg(Z_1) + \mathrm{Arg}(Z_2)]$$

$$\mathrm{Ln}(Z_1.Z_2) = \mathrm{Ln}|Z_1| + \mathrm{Ln}|Z_2| \tag{2.36}$$

2) $\mathrm{Ln}(Z_1/Z_2) = \mathrm{Ln}|Z_1/Z_2| + i\ \arg(Z_1/Z_2)$

$$= \mathrm{Ln}|Z_1| - \mathrm{Ln}|Z_2| + i[\arg(Z_1) - \arg(Z_2)]$$

$$\mathrm{Ln}(Z_1/Z_2) = \mathrm{Ln}|Z_1| - \mathrm{Ln}|Z_2|$$

2.1.4 Función exponencial base arbitraria y función potencial Z^α

DEFINICION 2.1.4.1

Sea $a \neq 0$ un número complejo arbitrario α un número real. Entonces la exponencial a^α se define mediante

$$a^\alpha = |a|^\alpha[\mathrm{Cos}\ (\alpha \arg(a)) + i\,\mathrm{Sen}\ (\alpha \arg(a))] \tag{2.36'}$$

la relación (2.36') puede escribirse de la forma

$$a^\alpha = \exp(\alpha\ \mathrm{Ln}(a)) \tag{2.37}$$

Propiedades de la exponencial

Por aplicación de la definición 2.1.4.1 se sigue que:

i) $a^{\alpha}a^{\beta} = \exp(\alpha\,\mathrm{Ln}(a)).\ \exp(\beta\,\mathrm{Ln}(a)),\ \beta \in \mathbb{R}$

$= \exp(\alpha\,\mathrm{Ln}(a) + \beta\,\mathrm{Ln}(a))$

$a^{\alpha}a^{\beta} = \exp[(\alpha+\beta)\mathrm{Ln}(a) + 2\pi i\,(k\alpha + \ell\beta)]$

$a^{\alpha}a^{\beta} = a^{(\alpha+\beta)}$, donde k, ℓ son enteros. (2.38)

ii) $(a^{\alpha})^{\beta} = [\exp(\alpha\,\mathrm{Ln}(a)]^{\beta} = \exp[\beta(\alpha\,\mathrm{Ln}(a) + 2\pi i\ell)]$

$= \exp[\alpha\beta\mathrm{Ln}(a) + 2\pi i\beta(k\alpha+\ell)]$

$= \exp[\alpha\beta\mathrm{Ln}(a) + 2\pi i\beta m\alpha]$

$= a^{\alpha\beta}$

$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$ (2.39)

ILUSTRACION 2.1.4.1

$1^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\ \mathrm{Ln}(1));$ donde $\ln(1) = w$

$= \exp(\sqrt{2}.2\pi ik)$ $1 = e^{w}$

$= \mathrm{Cos}\,(\sqrt{2}\,(2\pi k)) + i\mathrm{Sen}\,(\sqrt{2}\,(2\pi k))$ $e^{2\pi ik} = e^{w} \Rightarrow w = 2\pi ik$

$= e^{2\sqrt{2}\pi k}$; $k = 1$

ILUSTRACION 2.1.4.2

$e^{Z} = \exp(Z\ln(e))$

$= \exp[(Z)(1+2\pi ki)]$

$e^{Z} = \exp(Z).\exp(2\pi kiZ)$, $(k = 0 \pm 1, \pm \ldots)$

ILUSTRACION 2.1.4.3

$a^{Z} = \exp(Z\ln(a) + 2\pi ki)$

$a^{Z} = e^{Z\ln a + 2\pi ki}$ $k = 0, \pm 1 \pm, \ldots$ (2.40)

<u>Función potencial Z^{α}</u>

DEFINICION 2.1.4.2

Sea $Z \in \mathbb{C}$, α número arbitrario, se define la función potencial de la siguiente manera.

$$Z^{\alpha} = \exp(\alpha \ln(Z)) \qquad (2.41)$$

La relación (2.41) puede escribirse

$$Z^{\alpha} = e^{\alpha \ln|Z| + 2\pi ki}, \quad (k = 0 \pm 1, \pm, \ldots) \qquad (2.42)$$

La derivada de $f(Z) = Z^{\alpha}$ se obtiene tomando log (Z) en la -- igualdad $Z^{\alpha} = \exp(\alpha \log(Z))$, sus otras ramas se obtienen considerando las restantes de log (Z) . Se verifica entonces que

$$\frac{d}{dZ}(Z\alpha) = \alpha Z \frac{1}{Z}$$

tomando en los dos miembros de esta expresión la misma rama de Z^{α} el segundo miembro puede ponerse en la forma $\alpha Z^{\alpha-1}$. Por la regla de la cadena

$$(Z^{\alpha})' = e^{\alpha \log(Z)} . (\alpha \log(Z))'$$

y puesto que log (Z) = log (Z) + constante, entonces

$$\frac{d}{dZ}(Z^{\alpha}) = e^{\alpha \log(Z)} . \alpha \frac{1}{Z}$$

$$\frac{d}{dZ}(Z^{\alpha}) = \alpha Z^{\alpha} . \frac{1}{Z} \qquad (2.43)$$

2.1.5 Funciones; trigonométricas, hiperbólicas y funciones trigonométricas hiperbólicas inversas.

Para y real, resolvamos el siguiente par de ecuaciones en cos y y sen y:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \qquad e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$$

encontramos que $\cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2i}$ y $\operatorname{sen} y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$

esto nos conduce a formular la siguiente definición:

DEFINICION 2.1.5.1

Para cada número complejo Z.

$$\operatorname{sen}(Z) = \frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{2i} \qquad \cos(Z) = \frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2i} \tag{2.44}$$

$$\tan(Z) = \frac{\operatorname{sen}(Z)}{\cos(Z)}, \qquad \csc(Z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(Z)},$$

$$\sec(Z) = \frac{1}{\cos(Z)}, \quad \cot(Z) = \frac{1}{\tan(Z)}$$

siempre y cuando los denominadores no sean cero.

Estas definiciones producen las <u>funciones trigonométricas</u> de - de valores reales cuando Z es real, además, la derivada de cada una de las seis funciones así definidas se mantienen al -- igual que en variable real.

Para $Z = x + iy$ se tiene:

$$e^{iZ} = e^{i(x+iy)} = e^{-y}e^{ix}$$

$$e^{-iZ} = e^{y}e^{-ix}; \text{ entonces}$$

$$\operatorname{sen}(Z) = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2i}$$

$$\operatorname{sen}(Z) = \frac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x\ i \operatorname{sen} x)}{2i}$$

luego:

$$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cos hx + i \cos x \operatorname{sen} hy \tag{2.45}$$

De la misma manera:

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos hy - i \operatorname{sen} x \operatorname{sen} hy \tag{2.46}$$

De (2.45) y (2.46) se deduce

$$\operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{sen} hy \ ; \ \cos(iy) = \cos hy \ , \ y \in \mathbb{R} \qquad (2.47)$$

$$\operatorname{sen}(\bar{Z}) = \overline{\operatorname{sen}(Z)} \ ; \ \cos(\bar{Z}) = \overline{\cos(Z)} \ .$$

Además las identidades ya conocidas en trigonometría se mantienen. Por ejemplo:

$$\operatorname{sen}^2(Z) + \cos^2(Z) = 1$$

$$\operatorname{sen}(-Z) = -\operatorname{sen}(Z) \ , \ \cos(-Z) = \cos(Z)$$

$$\operatorname{sen}(Z_1 + Z_2) = \operatorname{sen}(Z_1)\cos(Z_2) + \cos(Z_1)\operatorname{sen}(Z_2)$$

$$\cos(Z_1 + Z_2) = \cos(Z_1)\cos(Z_2) - \operatorname{sen}(Z_1)\operatorname{sen} Z_2)$$

(2.48)

OBSERVACION 2.1.5.1

Si Z no es real, ya no podemos suponer que

$$|\operatorname{sen}(Z)| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\cos(Z)| \leq 1, \text{ pues}$$

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} Z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x \cos h^2 y + \cos^2 x \operatorname{sen} h^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x (1 + \operatorname{sen} h^2 y) + \cos^2 x \operatorname{sen} h^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} h^2 y + \cos^2 x \operatorname{sen} h^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x + (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \operatorname{sen} h^2 y \\ |\operatorname{sen}(Z)|^2 &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} h^2 y \ . \end{aligned}$$

De igual manera

$$|\cos(Z)| = \cos^2 x + \operatorname{sen} h^2 y$$

puesto que sen hy no es acotada superiormente, ni inferiormente, así podemos obtener valores de $|\operatorname{sen}(Z)|$ ó $|\cos(Z)|$ tan - grandes como querramos.

Si seguimos la pauta anterior, mediante la cual obtuvimos funciones trigonométricas, definimos las funciones hiperbolicas - de variable compleja Z de la siguiente manera:

DEFINICION 2.1.5.2

Para cada complejo Z

$$\operatorname{sen} h(Z) = \frac{e^{Z} - e^{-iZ}}{2}, \quad \cos h(Z) = \frac{e^{Z} + e^{-iZ}}{2}$$

$$\tan h(Z) = \frac{\operatorname{sen} h(Z)}{\cos h(Z)} \qquad \csc h(Z) = \frac{1}{\operatorname{sen} h(Z)} \qquad (2.49)$$

$$\sec h(Z) = \frac{1}{\cos h(Z)} \qquad \cot h(Z) = \frac{1}{\tan h(Z)}$$

siempre que los denominadores no sean cero.

Para $Z = x + iy$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} h(Z) &= \operatorname{sen} h(x + iy)\\ &= \frac{\exp(x + iy) - \exp(-x - iy)}{2}\\ &= \frac{\left[(e^{x} - e^{-x}) \cos y + i\,(e^{x} + e^{-x}) \operatorname{sen} y\right]}{2}\end{aligned}$$

de modo que

$$\operatorname{sen} h(x + iy) = \operatorname{sen} hx \cos y + i \cos h x \operatorname{sen} y \qquad (2.50)$$

De igual forma.

$$\cos h(x + iy) = \cos h x \cos y - i \operatorname{sen} h x \operatorname{sen} y \qquad (2.51)$$

De las ecuaciones (2.50) y (2.51) se deduce que

$$\operatorname{sen} h(iy) = i \operatorname{sen} y \quad ; \quad \cos h(iy) = \cos y$$

$$|\operatorname{sen} h(Z)|^{2} = \operatorname{sen} h^{2}x + \operatorname{sen}^{2}y \; ; \; |\cos h(Z)|^{2} = \operatorname{sen} h^{2}x + \cos^{2}y \qquad (2.52)$$

$$\operatorname{sen} h(Z_1+Z_2) = \operatorname{sen} h(Z_1) \cos h(Z_2) + \cos h(Z_1) \operatorname{sen} h(Z_2)$$

Las derivadas de las funciones hiperbólicas, que existen en to dos los puntos en que dichas funciones están definidas, sean, como se verifican facilmente.

$$(\operatorname{sen} h(Z))' = \cos h(Z), \quad (\cos h(Z)) = \operatorname{sen} h(Z)$$

$$(\tan h(Z))' = \sec h^2(Z), \quad (\cot h(Z)) = -\csc h^2(Z) \qquad (2.53)$$

$$(\csc h(Z))' = -\csc h(Z) \,.\, \cot h(Z)), \quad (\sec h(Z))' = -\sec h(Z) \tan h(Z)$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS E HIPERBOLICAS INVERSAS

Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas pueden reducirse a los logaritmos, y de aquí, en última instancia, a la función exponencial.

DEFINICION 2.1.5.1.1

Se define arc sen (Z) como la función inversa de la función seno, y se escribe

$$W = \operatorname{arc\,sen}(Z) \quad \text{si y solo si} \quad Z = \operatorname{sen}(W) \qquad (2.54)$$

Las relaciones (2.54) son completamente equivalentes, ya que ambas tienen el mismo significado.

La ecuación Z = sen (W) es equivalente a:

$$Z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow 2iZ = e^{iw} - \frac{1}{e^{iw}}$$

de donde

$$e^{2iw} - 2iZ\, e^{iw} - 1 = 0$$ es una ecuación de segundo - grado.

Resolviendo

$$e = \frac{2iZ \pm \sqrt{4-4Z^2}}{2} = iZ \pm \sqrt{1-Z^2} \qquad (2.55)$$

tomando la raiz principal de (2.55), tenemos

$$e^{i(w)} = e^{i(w-2\pi k)}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \quad ...)$$

así que

$$e^{i(w-2\pi k)} = i\,Z + \sqrt{1-Z^2}$$

$$\ln\left[e^{i(w-2\pi k)}\right] = \ln\left[iZ + \sqrt{1-Z^2}\right.$$

$$i(w-2\pi k) = \ln\left[iZ + \sqrt{1-Z^2}\right]$$

$$W = \frac{1}{i}\left[\ln\, iZ + \sqrt{1-Z^2}\right] + 2\pi k, \quad (k = \pm\, 0, \pm 1 \pm ...)$$

(2.56)

la rama principal se obtiene cuando $k = 0$

y obtenemos

$$W = \frac{1}{i}\ln\left[iZ + \sqrt{1-Z^2}\right]$$

por tanto:

$$W = \text{arc sen}\,(Z) = \frac{1}{i}\ln\left[iZ \pm \sqrt{1-Z^2}\right] + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

con un procedimiento análogo, se obtienen las siguientes fun-- ciones trigonométricas inversas.

i) $Z = \cos(w) \longrightarrow W = \text{arc cos}\,(W) = -\,i\log\left(iZ \pm \sqrt{Z^2-1}\right) + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

ii) $Z = \tan(W) \longrightarrow W = \text{arc tan}\,(Z) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iZ}{1-iZ}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

(2.57)

Las derivadas de estas funciones pueden verificarse facilmente, por medio de las reglas usuales de diferenciación.

i') $\frac{d}{dZ}\,\text{sen}^{-1}(Z) = \frac{1}{(1-Z^2)^{1/2}}$, ii') $\frac{d}{dZ}\cos^{-1}(Z) = -\frac{1}{(1-Z^2)^{1/2}}$

(2.58)

iii') $\frac{d}{dZ}\tan^{-1}(Z) = \frac{1}{1+Z^2}$

Funciones hiperbólicas inversas

Las funciones hiperbólicas inversas se pueden tratar de manera análoga. Resulta entonces

$$\operatorname{sen} h^{-1}(Z) = \log\left[Z + (Z^2+1)^{1/2}\right] \; ; \; \cos h^{-1}(Z) = \log\left[Z+(Z^2-1)^{1/2}\right] \qquad (2.59)$$

$$\tan h^{-1}(Z) = \log\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) \; ; \qquad \cot h^{-1}(Z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right)$$

$$\sec h^{-1}(Z) = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-Z^2}}{Z}\right) \; ; \qquad \csc h^{-1}(Z) = \log\left(\frac{1+\sqrt{Z^2+1}}{Z}\right) .$$

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas, se verifican facilmente por medio de las reglas usuales de diferenciación.

ILUSTRACION 2.1.5.1.2

Mostrar que $\frac{d}{dZ} \tan h^{-1}(Z) = \frac{1}{1-Z^2}$

tenemos que considerar la rama principal.

Por definición de la función $\tan h^{-1}$. Se tiene

$$\tan h^{-1}(Z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$$

puede expresarse de la menera

$$\tan h^{-1}(Z) = \frac{1}{2} \log (1+Z) - \frac{1}{2} \log (1-Z)$$

Derivando en ambos miembros

$$\frac{d}{dZ}\left[\tan h^{-1}(Z)\right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dZ} \left[\log(1+Z)\right] - \frac{1}{2} \frac{d}{dZ} \left[\log(1-Z)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+Z}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-Z}\right)$$

$$= \frac{1}{1-Z^2} \qquad (2,60)$$

Observese que la derivada no existe en los puntos $Z = \pm 1$

CAPITULO III

INTEGRACION DE FUNCIONES COMPLEJAS

3.0 INTEGRACION

3.1 INTEGRACION A LO LARGO DE UN CAMINO

3.1.1 Aplicaciones locales continuamente diferenciables

DEFINICION 3.1.1.1

Sea $\mathbb{U}$ un conjunto abierto, $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$. $\mathbb{V}$ un conjunto abierto $\mathbb{V} \subset \mathbb{C}$ $f: \mathbb{C} \supset \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, una función compleja de variable compleja, -- llamaremos aplicación local de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ a toda aplicación

$$f: \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}, \quad Z \rightsquigarrow f(Z) = W$$

tal que $\mathbb{U}$ y $\mathbb{V}$ son abiertos en $\mathbb{C}$.

La aplicación f local, definida en el abierto $\mathbb{U}$, posee coordenadas (x,y), mientras que $W = f(Z) \in \mathbb{V}$ posee coordenadas (U,V), la aplicación f, da pues lugar a dos funciones componentes de variables reales, definidas por f en $\mathbb{U}$ con valores reales -- $W = (U,V)$.

DEFINICION 3.1.1.2

Sea f una función compleja. Se dice que f es una aplicación - continuamente diferenciable en $\mathbb{U}$ si f posee derivada contínua en $\mathbb{U}$.

Una función compleja f es continuamente diferenciable si y solo si las funciones componentes U,V son funciones continuamente diferenciables.

En general, se dice que la aplicación f es n-veces continuamente diferenciable si lo son las funciones componentes.

En lo que sigue, entenderemos de close C^n; <<C^n>>, en vez de n-veces continuamente diferenciable.

DEFINICION 3.1.1.4

Si $f \varepsilon$ <<C^n>>, $n > 0$, entonces las funciones componentes U,V son analíticas.

En este caso diremos que la aplicación f es analítica y de clase <<C^k>> donde k varia en el conjunto totalmente ordenado $0 < 1 < 2 \ldots < k < \infty$.

<u>Comentario</u>. Así, una aplicación de clase C^n también es de clase C^s cuando $s \leq n$.

DEFINICION 3.1.1.5

Sea $f: \mathbb{U} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{V} \subset \mathbb{C}$, una aplicación, se dice que f es un Homeomorfismo si f y f^{-1} son aplicaciones continuas.

3.1.2 <u>Trayectorias</u>

DEFINICION 3.1.2.1

$$\text{Sea } \gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \rightsquigarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

una función, se dice que γ, es un camino si $\gamma \varepsilon$ <<C^1>>.

Al punto $\gamma(a)$ lo denominaremos orígen del camino y $\gamma(b)$ el extremo.

Si γ es una función diferenciable por tramos, es decir si exis te una partición $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots t \ = b$ del intervalo $[a,b]$, tal que γ' es contínua en cada sub intervalo abierto (t_i, t_i+1), entonces dirémos que el conjunto $\gamma([a,b])$ es una curva diferenciable por tramos. (Diferenciable con continuidad por tramos).

DEFINICION 3.1.2.2

Sea $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino, llamarémos lazo a γ si

$$\gamma(a) = \gamma(b).$$

DEFINICION 3.1.2.3

Sea $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino, llamarémos camino opuesto a γ, y lo denotaremos por $\bar{\gamma}^{\circ}$, a la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^{\circ}\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightsquigarrow \gamma(a+b-t) \end{aligned}$$

DEFINICION 3.1.2.4

Sea $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino, se dice que γ es un camino simple si γ es inyectiva.

DEFINICION 3.1.2.5

Sea $\gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\gamma_2\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ dos caminos; se dice que γ_1 y γ_2 son caminos equivalentes si existe un Homeomorfismo creciente $\Psi\colon \begin{matrix} [a,b] & \longrightarrow & [c,d] \\ t & \rightsquigarrow & \Psi(t) \end{matrix}$ tal que:

$$\gamma_1(t) = \gamma_2[\Psi(t)], \quad \forall t \in [a,b]$$

DEFINICION 3.1.2.6

Dados los caminos $\gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ con ori--

gen de γ_2 coincidente con el extremo de γ_1. Definimos la yuxtaposición de γ_2 y γ_1 por el camino que será denotado $\gamma_1 \vee \gamma_2$ y definido como sigue

$$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 : [a,b+d-c] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \rightsquigarrow \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{si } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t-b+c), & \text{si } t \in [a,b+d-c] \end{cases}$$

3.1.3 Integrales curvilineas

DEFINICION 3.1.3.1

Consideremos $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$
$$t \rightsquigarrow (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

las funciones γ_1 y γ_2 se denominan funciones componentes, donde γ_1 se llana componente real y γ_2 la componente imaginaria de la función vectorial de variable real γ.

El conjunto imagen en $\mathbb{C}$ de toda función $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\,\gamma_2(t)$ con $t \in [a,b]$, puede representarse de la forma siguiente

$\gamma = \{Z \in \mathbb{C} \; / \; Z = Z(t),\ t \in [a,b]\}$ el cual define el lugar geométrico de los puntos $Z = (x,y)$, tales que

$$X = X(t) \quad , \quad y = y(t), \quad t \in [a,b] \tag{3.1}$$

las relaciones (3.1) se llaman Ecuaciones Paramétricas de γ.

DEFINICION 3.1.3.2

Sea f una función definida para valores de γ en donde $\gamma \in \langle\langle C' \rangle\rangle$, si f es contínua en $\gamma[a,b]$ entonces la función $f(Z(t))$, es contínua en $[a,b]$.

DEFINICION 3.1.3.3

Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ y γ un camino contenido en D; $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$, --

tal que $\gamma(I) \subset D$. Definimos

$$\int_{\gamma} f(Z)\, dZ = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \qquad (3.2)$$

ILUSTRACION 3.1.3.1

Sea $Z = Z_o + re^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$ r es la circumferencia con centro en Z_o y radio $r > 0$. Demostrar que si $n \in \mathbb{Z}$ entonces,

$$\int_{|Z-Z_o|=r} (Z-Z_o)^n dZ = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = -1 \\ o & \text{si } n \neq 1 \end{cases} \qquad (3.3)$$

DEMOSTRACION

Sean $Z \in \mathbb{C}$, $Z_o \in \mathbb{C}$

si $Z - Z_o = r\,e^{i\theta}$ entonces $Z = Z_o$, $r\,e^{i\theta}$ con $\theta \in [0,2\pi]$

en efecto de la definición 3.1.3.3 se tiene

$(Z - Z_o)^n = f(Z(\theta)) = (r\,e^{i\theta})$ y $Z'(\theta) = i\,r\,e^{i\theta}d\theta$, $\theta \in [0,2\pi]$

luego,

$$\int_{|Z-Z_o|=r} (Z-Z_o)^n dZ = \int_0^{2\pi} f(Z(\theta))Z'(\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta}.i\,r\,e^{\theta}\ d\theta$$

$$= i\,r^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\theta}d\theta$$

$$\int_{|Z-Z_o|=r} (Z-Z_o)^n dZ = i\,r^{n+1}\left[\int_0^{2\pi} \cos\,(n+1)\,\theta\,d\theta + i\int_0^{2\pi} \text{sen}\,(n+1)\,\theta\,d\theta\right.$$

Para $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \cos (n+1)\, \theta\, d\theta = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} (n+1)\, \theta d\theta$$

para $n = -1$ se obtiene

$$\int_{|Z-Z_o|=r} (Z-Z_o)^n dZ = i \int_0^{2\pi} d\theta = e\pi i$$

Es de observar que, las relaciones (3.3) muestran que el valor de la integral curvilinea $\int_{|Z-Z_o|=r} (Z-Z_o)^n dZ$, no depende ni del punto Z_o, ni del valor del radio r de la circunferencia, si no solamente del valor de n si es iqua o nó al valor de -1.

TEOREMA 3.1.3.1

Sean Z_o y Z_1 dos puntos cualesquiera del plano complejo, y sea γ el camino, dirigido de Z_o hasta Z_1 descrito mediante:

$Z(t)$: $t \in [a,b]$, si $f(Z) = f_1(x,y) + i\, f_2(x,y)$.

es una función contínua en todo punto de γ, entonces la integral de $f(Z)$ de Z_o a Z_1 a lo largo de γ se calcula como sugue:

$$\int_{\gamma\, Z_o}^{Z_1} f(Z)\, dZ = \int_{\gamma\, (x_o,y_o)}^{(x_1,y_1)} \left[f_1(x,y)\, dx - f_2(x,y)\, dy\right] + i \int_{\gamma\, (x_o,y_o)}^{(x_1,y_1)} \left[f_2(x,y)\, dx + f_1(x,y)\, dy\right] \tag{3.4}$$

DEMOSTRACION

Sea $Z = X + iy$, $f(Z) = f_1(x,y) + i\, f_2(x,y)$ dá los valores en γ efectivamente.

$$\int_{\gamma\, Z_o}^{Z_1} f(Z)\,dZ = \int_{\gamma\,(x_o,y_o)}^{(x_1,y_1)} \left[f_1(x,y),\ f_2(x,y)\right].(dx,dy).$$

$$= \int_{\gamma\,(x_o,y_o)}^{(x_1,y_1)} f_1(x,y).(dx,dy) + i\,f_2(x,y).\,(dx,dy)$$

$$\int_{\gamma\, Z_o}^{Z_1} f(Z)\,dZ = \int_{\gamma\,(x_o,y_o)}^{(x_1,y_1)} f_1(x,y)\,dx + i\,f_1(x,y)\,dy + i\,f_2(x,y)\,dx - f_2(x,y)\,dy$$

Separando parte real e imaginaria tenemos:

$$\int_{\gamma\, Z_o}^{Z_1} f(Z)\,dz = \int_{\gamma\,(x_o,y_o)}^{(x_1,y_1)} f_1(x,y)\,dx - f\ (x,y)\,dy + i\int_{\gamma\,(x_o,y_o)}^{(x_1,y_1)} f_2(x,y)\,dx + f_1(x,y)\,dy$$

lo cual prueba el teorema.

Comentario del teorema 3.1.3.1

Utilizando (3.1), $Z = Z(t)$, $Z(t) = x(t) + iy(t)$, con $t \varepsilon [a,b]$ por definición 3.1.3.3 se tiene

$$\int_{\gamma\, Z_o}^{Z} f(Z)\,dz = \int_a^b \{f_1[x(t),y(t)]x'(t) - f_2[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$$

$$+\ i\int_a^b \{f_2[x(t),y(t)]x'(t) + f_1[x(t),y(t)]y'(t)\}dt \qquad (3.5)$$

la relación (3.5) expresa la conexión entre la integral real y la integral compleja a lo largo de un camino γ.

3.1.3.1 Propiedades de las integrales

Supongamos que $f(Z)$, $g(Z)$ son dos integrales a lo largo de un camino γ, entonces.

1. $$\int_{\gamma} \{f(Z) + g(Z)\}\, dZ = \int_{\gamma} f(Z)\, dZ + \int_{\gamma} g(Z)\, dZ$$

2. $$\int_{\gamma} kf(Z)\, dZ = k \int_{\gamma} f(Z)\, dZ, \quad k.\ \text{cte.}$$

3. Si $\bar{\gamma}^{\circ}$ es el camino opuesto al camino γ, entonces:

$$\int_{\substack{Z_1 \\ \bar{\gamma}^{\circ}}}^{Z_o} f(Z)\, dZ = - \int_{\substack{Z_o \\ \gamma}}^{Z_1} f(Z)\, dZ.$$

4. Si M es cota superior de $|f(Z)|$ y L es la longitud de la - curva γ entonces

$$\left| \int f(Z)\, dZ \right| \leq ML$$

5. $$R_e \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b R_e[f(t)]\, dt$$

TEOREMA 3.1.3.2

Sea $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f_1(t)\, dt + i \int_a^b f_2(t)\, dt$, si f es contínua por tramos, entonces.

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt \qquad (3.6)$$

DEMOSTRACION

Supongamos que Z_o es el módulo y θ_o es el argumento de $\int_a^b f(t)\, dt$.

entonces

$$r_o e^{i\theta_o} = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Por la propiedad 2. Sección 3.1.3.1 se tiene

$$r_o = \int_a^b e^{-i\theta_o} f(t)\, dt \tag{3.7}$$

en ambos miembros de (3.7) tenemos números reales, entonces.

$$r_o = \int_a^b R_e(e^{-i\theta_o}\ f(t))dt \qquad (\text{propiedad 5, sec. } 3.1.3.1)$$

pero $R_e(e^{-i\theta_o} f(t) \leq |e^{-i\theta_o} f(t)|$

$R_e(e^{-i\theta_o} f(t)) \leq |e^{-i\theta_o}| . |f(t)|$, luego.

$R_e(e^{-i\theta_o} f(t)) \leq |f(t)|$

Por consiguiente

$$r_o \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

$$\therefore \quad \left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

TEOREMA 3.1.3.3

Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función contínua en la curva $\gamma(I)$, donde $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{C}$ es un camino y γ_1 es un camino equivalente a γ, entonces:

$$\int_\gamma f(z)\, dZ = \int_{\gamma_1} f(Z)\, dZ.$$

DEMOSTRACION

como γ_1 es equivalente a γ, entonces existe una biyección $\Psi: I_1 \longrightarrow I$ creciente, contínua y diferenciable, con continuidad por tramos, tal que:

$$\gamma_1(t) = \gamma(\Psi(t)), \quad \forall t \in I_1.$$

luego, por definición 3.1.3.3 se tiene:

$$\int_{\gamma_1} f(Z)\, dZ = \int_c^d f(\gamma_1(t)).\gamma_1'(t)\, dt, \quad I_1 = [c,d] \ ; \ I = [a,b].$$

$$= \int_c^d f(\gamma(\Psi(t))).\gamma'(\Psi(t)).\Psi'(t)\, dt.$$

haciendo el cambio

$$U = \Psi(t) \ , \ dU = \Psi'(t)\, dt, \text{ se obtiene}$$

$$\int_{\gamma_1} f(Z)\, dZ = \int_a^b f(\gamma(U))\gamma'(U).dU = \int_{\gamma} f(Z)\, dZ. \quad \text{(por def. 3.1.3.3)}$$

TEOREMA 3.1.3.4

Sean γ_1 y γ_2 dos caminos tales que exista $\gamma_1 \vee \gamma_2$, si f es contínua en $\gamma_1 \vee \gamma_2$ entonces

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(Z)\, dZ = \int_{\gamma_1} f(Z)\, dZ + \int_{\gamma_2} f(Z)\, dZ.$$

DEMOSTRACION

Por definición 3.1.2.6 y definición 3.1.3.3 se deduce que.

$$\int_{\gamma_1 v \gamma_2} f(Z)\, dZ = \int_a^{b+d-c} f((\gamma_1 v \gamma_2)(t)).(\gamma_1 v \gamma_2)'(t).dt$$

$$= \int_a^{b} f((\gamma_1 v \gamma_2)(t)).(\gamma_1 v \gamma_2)'(t).dt + \int_b^{b+d-c} f((\gamma_1 v \gamma_2)(t)).(\gamma_1 v \gamma_2)'(t)dt$$

$$= \int_a^{b} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) + \int_b^{b+d-c} f(\gamma_2(t-b+c)).\gamma_2'(t-b+c)dt$$

haciendo el cambio $U = t - b + c$ resulta.

$$\int_{\gamma_1 v \gamma_2} f(Z)\, dZ = \int_a^{b} f(\gamma_1(t)).\gamma_1'(t)\, dt + \int_c^{d} f(\gamma_2(U))\gamma_2'(U)\, dU$$

$$\int_{\gamma_1 v \gamma_2} f(Z)\, dZ = \int_{\gamma_1} f(Z)\, dZ + \int_{\gamma_2} f(Z)\, dZ.$$

ILUSTRACION 3.1.3.2

Calcular el valor de $\int_{\gamma} \bar{Z}\, dZ$, desde $Z_1 = 0$ a $Z_2 = 4 + 2i$, a lo - largo del camino $\gamma(t): t^2 + it$, utilizando

a) La definición 3.1.3.3 b) el teorema 3.1.3.1

SOLUCION

a) Por la definición 3.1.3.3.

Sea $\gamma: [0,2] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \rightsquigarrow \gamma(t) = (t^2, t)$

$$\int_{\gamma\, Z_1}^{Z_2} f(Z)\, dZ = \int_0^2 \bar{\gamma}(t).\gamma'(t)\, dt = \int_0^2 (t^2 - it).(2t+i)\, dt$$

$$= \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t)\, dt = 10 - \frac{8}{3} i$$

$$\int_{\gamma\, Z_1}^{Z_2} f(Z)\, dZ = \int_{\gamma\, Z_1}^{Z_2} \bar{Z}\, dZ = 10 - \frac{8}{3} i$$

b) Por teorema 3.1.3.1

Las ecuaciones paramétricas son

$x = t^2$, $y = t$, de $t = 0$ a $t = 2$

Luego la integral dada es igual a.

$$\int_\gamma (x - iy)(dx + idy) = \int_\gamma xdx + ydy + i \int_\gamma xdy - ydx$$

$$\int_{t=0}^{t=2} t^2 (2t\, dt) + tdt + i \int_{t=0}^{t=2} t^2 dt - t(2t\, dt)$$

$$\int_{t=0}^{t=2} (2t^3 + t)\, dt + i \int_{t=0}^{t=2} (-t^2)\, dt = 10 - \frac{8}{3} i$$

así

$$\int_{\gamma\, Z_1}^{Z_2} \bar{Z}\, dZ = 10 - \frac{8}{3} i$$

3.2 CONDICIONES DE ANALITICIDAD

3.2.1 (Teorema de Cauchy - Goursat)

TEOREMA 3.2.1.1

Sea $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, una función analítica en D, D es conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$, R un rectángulo contenido en D, entonces si Γ es el borde

$$\int_\Gamma f(Z)\, dZ = 0$$

DEMOSTRACION

Dividamos R en cuatro rectángulos R_i; i = 1,2,...4 y sea γ_i, i = 1,2,...4 sus respectivos bordes. (FIGURA 12)

se tiene entonces que

$$\int_{\Gamma} f(Z)\, dZ = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} f(Z)\, dZ$$

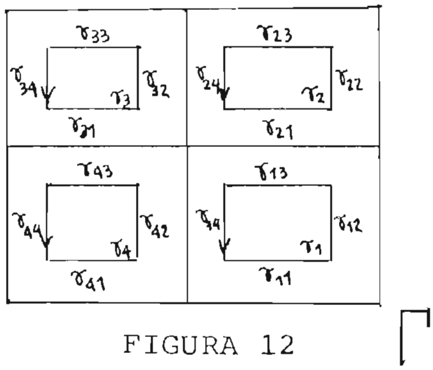


FIGURA 12

Si $\gamma^{(1)}$ es el caso en el cual

$$\left|\int_{\gamma^{(1)}} f(Z)\, dZ\right| \geq \left|\int_{\gamma_i} f(Z)\, dZ\right|$$ se tiene entonces que:

$$\left|\int_{\Gamma} f(Z)\, dZ\right| = \left|\sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} f(Z)\, dZ\right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left|\int_{\gamma_i} f(Z)\, dZ\right| \leq 4 \left|\int_{\gamma^{(1)}} f(Z)\, dZ\right|$$

dividiendo nuevamente, ahora el rectángulo cuyo borde es $\gamma^{(1)}$ en cuatro rectángulos: (FIGURA 13)

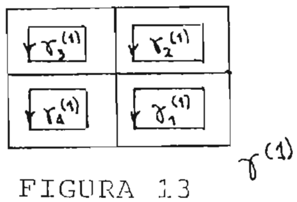


FIGURA 13

Se tendra.

$$\int_{\gamma^{(1)}} f(Z)\, dZ = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i^{(1)}} f(Z)\, dZ$$

Sea entonces $\gamma^{(2)}$ el lazo para el cual

$$\left|\int_{\gamma^{(2)}} f(Z)\, dZ\right| \geq \left|\int_{\gamma_i^{(i)}} f(Z)\, dZ\right|; i = 1,2,...4$$

acotando tendremos

$$\left|\int_{\Gamma} f(Z)\,dZ\right| \leq 4\left|\int_{\gamma^{(1)}} f(Z)\,dZ\right| \leq 4.4\left|\int_{\gamma^{(2)}} f(Z)\,dZ\right| = 4^2\left|\int_{\gamma^{(2)}} f(Z)\,dZ\right|$$

continuando este proceso se tiene: Por el n-ésimo lazo.

$$\left|\int_{\Gamma} f(Z)\,dZ\right| \leq 4^k\left|\int_{\gamma^{(k)}} f(Z)\,dZ\right|,$$ se tiene entonces

$R \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_k$ ... donde R_k es el rectángulo n-ésimo del proceso, existe entonces $Z_o \varepsilon \mathbb{R}$, único, donde $Z_o \varepsilon \bigcap_{i \geq 1} R_i$, luego como f es analítica en D y diferenciable en Z_o,

se tiene que:

$$f'(Z_o) = \lim_{Z \to Z_o} \frac{f(Z) - f(Z_o)}{Z - Z_o}$$

Definamos entonces

$$\Psi(Z) = \begin{cases} o & \text{si } Z = Z_o \\ \dfrac{f(Z) - f(Z_o)}{Z - Z_o} - f'(Z_o), & \text{si } Z \neq Z_o \end{cases} \qquad \text{Def } *$$

$\Psi(Z)$ es contínua en Z_o; en particular, para $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal - que:

$$|Z - Z_o| < \delta \Rightarrow |\Psi(Z)| < \varepsilon$$

Sea k tal que todo $Z \varepsilon \gamma^{(k)}$, $|Z - Z_o| < \delta$, de esta manera se tendrá:

$$\left|\int_{\gamma(k)} f(Z)\,dZ\right| = \left|\int_{\gamma(k)} |\Psi(Z)(Z-Z_o) + f'(Z_o)(Z-Z_o) + f(Z)\,dZ\right|, \quad \text{por def.}\star$$

$$\leq \int_{\gamma(k)} |\Psi(Z)|\cdot|Z-Z_o|\,dZ + \int_{\gamma(k)} |f'(Z_o)|\,|Z-Z_o|\,dZ + \int_{\gamma(k)} |f(Z)|\,dZ$$

$$\leq \varepsilon \int_{\gamma(k)} |Z-Z_o|\,dZ + \int_{\gamma(k)} |f'(Z_o)|\,|Z-Z_o|\,dZ + \int_{\gamma(k)} |f(Z)|\,dZ$$

$$\leq \varepsilon \int_{\gamma(k)} |Z-Z_o|\,dZ + |f'(Z_o)|\left|\int_{\gamma(k)} |Z-Z_o|\,dZ + |f(Z_o)|\right|\int_{\gamma(k)} dZ$$

Luego por Teorema 3.2.1.1 las funciones $h_1(Z) = |Z - Z_o|$, $h_2 = 1$ son integrables y con valor nulo, para todo lazo contenido en $\mathbb{C}$, en particular para $\gamma^{(k)}$ también son nulas.

Sea P_k el perímetro del rectángulo R_k, entonces

$$|Z - Z_o| < P_k, \quad \text{luego}$$

$$\left|\int_{\gamma(k)} f(Z)\,dZ\right| \leq \varepsilon\cdot P_k \int_{\gamma(k)} |dZ| = P_k . P_k \varepsilon \leq P_k^2$$

luego

$$\left|\int_{\Gamma} f(Z)\,dZ\right| \leq 4^k \left|\int_{\gamma(k)} f(Z)\,dZ\right| \leq P_k^2$$

de donde

$$\left|\int_{\gamma(k)} f(Z)\,dZ\right| \leq \varepsilon\,\frac{P^2}{4^k}$$

$$\leq 4^k\cdot\varepsilon\,\frac{P^2}{4^k} = \varepsilon P^2$$

Como ε es arbitrario, se concluye entonces que

$$\int_{\Gamma} f(Z)\, dZ = 0$$

3.2.2 Teorema de Cauchy

TEOREMA 3.2.2.1

Sean f: $D \subset \mathbb{C}$ una función analítica en D, D abierto y conexo de $\mathbb{C}$ si γ es un camino cerrado en D entonces.

$$\int_{\gamma} f(Z)\, dZ = 0$$

DEMOSTRACION

Supongamos que f' es contínua en D y γ es un camino cerrado si $f(Z) = U(x,y) + iV(x,y)$ entonces

$$f'(Z) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$$

Por las ecuaciones de Cauchy Riemann se tiene

$$f'(Z) = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} - i\, \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$$

Como f' es contínua en D entonces $\frac{\partial U}{\partial x}$; $\frac{\partial V}{\partial x}$; $\frac{\partial U}{\partial y}$; $\frac{\partial V}{\partial y}$ son tam-- bien contínuas en D.

Para el camino γ obtenemos:

$$\int_{\gamma} f(Z)\, dZ = \int_{\gamma} \left[U(x,y) + i\, V(x,y)\right](dx + idy)$$

$$\int_{\gamma} f(Z)\, dZ = \int_{\gamma} (U\, dx - V\, dy) + i \int_{\gamma} (V\, dx + U\, dy) \tag{3.8}$$

Como γ' es un camino contenido en γ, γ' arbitrario; por aplicación directa del Teorema de Green en el plano se obtiene de la relación (3.8)

$$\int_{\gamma} f(Z)\,dZ = \int_{\gamma'} f(Z)\,dZ = \iint_{\gamma'} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy + i \iint_{\gamma'} \left[\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\right] dx\,dy \qquad (3.9)$$

Utilizando las ecuaciones de Cauchy Riemann en el miembro derecho de la relación (3.9) se obtiene

$$\int_{\gamma'} f(Z)\,dZ = \int\int_{\gamma'} \left[\frac{-\partial V}{\partial x} - \left(\frac{-\partial V}{\partial x}\right)\right] dx\,dy + i \int\int_{\gamma'} \left[\frac{\partial U}{\partial x} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right] dx\,dy \qquad (3.10)$$

$$\int_{\gamma'} f(Z)\,dZ = 0$$

de (3.9) y (3.10) se consigue $\int_{\gamma} f(Z)\,dZ = 0$

3.2.3 Dominios simple y multiplemente conexo

DEFINICION 3.2.3.1

Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Decimos que D es simplemente conexo, si para todo lazo γ: $[a,b] \longrightarrow D$, con $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, para $t_1 \neq t_2$, se tiene que el interior de las regiones determinadas por $\gamma(I)$ está totalmente contenida en D.

Comentario 3.2.3 Una región R. es simplemente conexa, si cualquier curva simple cerrada contenida en R puede contraerse a un punto sin salir de R

ILUSTRACION 3.2.3

Sea la región definida por $|Z - Z_0| < 2$, que se muestra en la -

figura (14), si Γ es cualquier curva simple cerrada contenida en $R = \{Z \in \mathbb{C} \mid |Z - Z_0| < 2\}$, cuyos puntos están en R, podemos ver que ella puede deformarse a un punto de sin salirse de R, de modo que R es simplemente conexa.

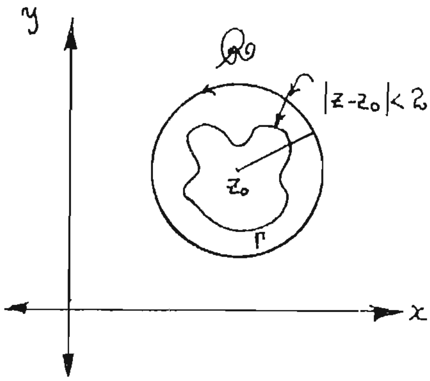


FIGURA 14

DEFINICION 3.2.3.2

Una región R que no es simplemente conexa se dice que es una región multiplemente conexa.

TEOREMA 3.2.3.1

Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en D. Siendo D un conjunto simplemente conexo de $\mathbb{C}$. Entonces para todo lazo Γ contenido en D.

$$\int_{\Gamma} f(Z)\, dZ = 0$$

DEMOSTRACION

Se sigue de la definición (3.1.2.2) y teorema 3.2.1.1

3.2.4 Integrales indefinidas

Proposición 3.2.4.1. Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, una función analítica en D. Siendo D un conjunto simplemente conexo de $\mathbb{C}$. Entonces la función f admite primitiva en D si y solamente si para todo lazo γ contenido en D, se tiene:

$$\int_{\gamma} f(Z)\, dZ = 0$$

Además todas las primitivas de f son de la forma:

$$F(Z) = G + \int_{\alpha_Z} f(U)\, dU .$$

donde α_Z es un camino con orígen $Z_o \in D$ y extremo Z

DEMOSTRACION

" => "

Sea F una primitiva de f en D, es decir,

$$\frac{dF(Z)}{dZ} = f(Z) \quad , \qquad \forall Z \in D.$$

En particular si γ es un camino contenido en D

$$\frac{dF(\gamma(t))}{dt} = \frac{dF(Z)}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dt}.$$

$$= f(Z) \cdot \frac{dZ}{dt} = f(\gamma(t)). \frac{d\gamma(t)}{dt}$$

$$\frac{dF(\gamma(t))}{dt} = f(\gamma(t)).\gamma'(t) ; \quad \forall t \in [a,b]$$

luego:

$$\int_\gamma f(Z)\,dZ = \int_a^b f(\gamma(t)).\gamma'(t)\,ft$$

$$\int_\gamma f(Z)\,dZ = \int_a^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt} =$$

$$\int_\gamma f(Z)\,dZ = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Por tanto:

$$\int_\gamma f(Z)\,dZ = F(Z_1) - F(Z_o);$$ Z_1 el extremo de γ y

Z_o el origen.

Comentario 3.2.4.1. Lo anteric muestra que el valor de la integral no depende de más si no de los extremos Z_o y Z_1.

Además si γ es un lazo, $\gamma(a) = \gamma(b) = Z_o = Z_1$, se deduce que -

$$\int_\gamma f(Z)\,dZ = 0.$$

" $\Leftarrow$ "

Supongamos que $\int_\gamma f(Z)\,dZ = 0$, para todo lazo contenido en D. Entonces una primitiva de f, puede expresarse

$$F(Z) = C + \int_{\alpha_Z} f(U)\,dU\,,\quad \text{analítica.}$$

Sea β_Z otro camino de origen Z_o y extremo Z, entonces el camino $\alpha_Z \vee \beta_Z^o$ es un lazo de origen Z_o, luego por hipótesis se tiene:

$$\int_{\alpha_Z \vee \beta^{\circ}_Z} f(U)\, dU = 0$$

es decir

$$\int_{\alpha_Z} f(U)\, dU + \int_{\beta^{\circ}_Z} f(U)\, dU = 0, \text{ Por Teorema 3.1.3.4}$$

$$\int_{\alpha_Z} f(U)\, dU - \int_{\beta_Z} f(U)\, dU = 0 \quad \text{(por propiedad 3.1.3.1-3)}$$

luego

$$\int_{\alpha_Z} f(U)\, dU = \int_{\beta_Z} f(U)\, dU$$

$$\therefore \qquad F(Z) = G + \int_{\alpha_Z} f(U)\, dU$$

ILUSTRACION 3.2.4.1

Sea $f: \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}: Z \rightsquigarrow f(Z) = \frac{1}{Z}$; $\mathbb{C} - \{0\}$ es conexo, abierto, f es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$, entonces f no admite primitiva en $\mathbb{C} - \{0\}$

PRUEBA

Sea $\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}: t \rightsquigarrow e^{2\pi i t}$, entonces

$$\int_{\gamma} f(Z)\, dZ = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t)\, dt$$

$$\int_0^1 \frac{2\pi i e^{2\pi i t}}{e^{2\pi i t}}\, dt = \int_0^1 2\pi i\, dt = 2\pi i$$

$$\int_{\gamma} f(Z)\, dZ = 2\pi i$$

como $2\pi i \neq 0$, por teorema 3.2.3.1 se concluye que f no admite primitiva.

3.2.5 Teorema de la integral de Cauchy

TEOREMA 3.2.5.1 (Fórmula integral de Cauchy)

Sea f una función; analítica con un dominio G si G contiene una curva cerrada y continua L, si Z_o es un punto interior de L, entonces.

$$f(Z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)} dZ$$

DEMOSTRACION

Sea Z_o un punto cualquiera en el interior de la curva L (FIGURA 15)

entonces la función

$$g(Z) = \frac{f(Z)}{Z-Z_o},$$ luego por teorema de Cauchy

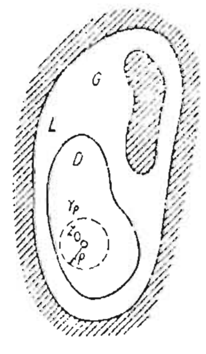


FIGURA 15

g es analitica y está definida sobre el dominio $G - \{Z_o\}$. Sea ρ el radio tan pequeño en el interior de la curva L donde γ_ρ es el círculo $|Z - Z_o| = \rho$ en dirección positiva, luego por Teorema 3.2.1.1

$$\int_{L} g(Z)\, dZ = \int_{\gamma_\rho} g(Z)\, dZ .$$

o bien

$$\int_L \frac{f(Z)\,dZ}{Z - Z_o} = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)\,dZ}{Z - Z_o}$$

luego si $\rho \to 0$. Se tiene

$$\int_L \frac{f(Z)}{Z-Z_o}\,dZ = \lim_{\rho\to 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)\,dZ}{Z - Z_o}$$

por consiguiente, necesitamos probar que

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{z-z_o}\,dZ = 2\pi i\; f(Z_o).$$

en efecto.

Sea $\varepsilon > 0$. entonces $\exists\,\delta > 0$ tal que:

$$\left|\int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{Z-Z_o}\,dZ - 2\pi i\; f(Z_o)\right| < \varepsilon \tag{3.11}$$

donde $\rho < \delta$, luego, por aplicación de la <u>ilustración 3.1.3.1</u> se tiene que

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{dZ}{Z-Z_o} = 2\pi i$$

luego (3.8) la podemos escribir de la forma

$$\left|\int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{Z-Z_o}\,dZ - 2\pi i\; f(Z_o)\right| = \left|\int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{Z-Z_o}\,dZ - f(Z_o)\int_{\gamma_\rho} \frac{dZ}{Z-Z_o}\right|$$

$$= \left|\int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z) - f(Z_o)}{Z - Z_o}\,dZ\right|$$

$$= \int_{\gamma_\rho} \frac{|f(Z) - f(Z_o)|}{|Z - Z_o|}\,dZ$$

Luego por continuidad uniforme de f se tiene que para $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|f(Z) - f(Z_o)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

siempre que $|Z - Z_o| < \delta = \rho$

Por consiguiente

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{Z-Z_o}\, dZ - 2\pi i\ f(Z_o) \right| < \frac{\varepsilon/2\pi}{\rho}\ .2\pi\rho = \varepsilon \text{ siempre que } \rho < \delta$$

por lo tanto, se prueba (3.8) y en consecuencia,

$$f(Z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(Z)}{Z-Z_o}\, dZ.$$

COROLARIO 3.2.5.1

Si f es analítica en un dominio G y si G contiene un círculo: γ_ρ: $|Z - Z_o| = \rho$ interior, entonces

$$f(Z_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Z_o + e^{i\theta})\, d\theta \qquad (3.12)$$

PRUEBA

Sea $Z_o \in$ interior de la curva γ_ρ.

La ecuación del círculo puede escribirse,

$$Z = Z_o + \rho e^{i\theta}. \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Por Teorema 3.2.5.1 se tiene

$$f(Z_o) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{f(Z_o + \rho e^{\theta})}{\rho e^{i\theta}}\, i\rho e^{i\theta} d\theta. \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$f(Z_o) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^{2\pi} f(Z_o + \rho e^{i\theta})\, d\theta$$

lo cual se prueba (3.12).

3.2.6 <u>Derivada de funciones Analíticas</u>

TEOREMA 3.2.6.1

Sea f una función analítica en un dominio D. Entonces f posee derivada de todos los ordenes y para $Z_o \in D$

$$f^{(n)}(Z_o) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{n+1}}\, dZ; \quad (n = 0,1,2,\ldots) \qquad (3.13)$$

Donde L es una curva cerrada y contínua en el dominio D, y Z_o pertenece al interior de la región limitada por L.

DEMOSTRACION

Por inducción

Para n = 0 se tiene el <u>teorema 3.2.5.1</u>; asumanos (3.13) es válido para un entero no negativo (n-1) y probemos que (3.13) es cierto para n.

en efecto,

por definición se tiene

$$f^{(n)}(Z_o) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(Z - Z_o) - f^{(n-1)}(Z_o)}{h}$$

como Z_o es interior a la región limitada por L y $Z_o \in D$, luego por <u>teorema 3.2.2.1</u> (<u>de Cauchy Goursat</u>) se tiene

$$f^{(n)}(Z_o) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{n+1}}\, dZ \tag{3.14}$$

donde γ_ρ: $|Z-Z_o| = \rho$ es el círculo inscrito en el interior de L.,

consecuentemente, tendrémos

$$\frac{f^{(n-1)}(Z_o+h) - f^{(n-1)}(Z_o)}{h} = \frac{(n-1)!}{h(2\pi i)}\int_{\gamma_\rho} f(Z)\left[\frac{1}{(Z-(Z_o+h))^n} - \frac{1}{(Z-Z_o)^n}\right] dZ$$

$$= \frac{(n-1)!}{h(2\pi i)}\int_{\gamma_\rho} f(Z)\left[\frac{(Z-Z_o)^n - (Z-Z_o-h)^n}{(Z-Z_o-h)^n(Z-Z_o)^n}\right] dZ$$

considerando $|h| < \rho$, y haciendo el cambio $U = Z-Z_o$ y $Z-Z_o-h = U-h$ y utilizando la integral algebraica $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$ encontramos que

$$\frac{f^{(n-1)}(Z_o+h) - f^{(n-1)}(Z_o)}{h} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)}\int_{\gamma_\rho} \frac{U^{n-1}+U^{n-2}(U-h)+\ldots+(U-h)^{n-1}}{U^n(U-h)^n} f(Z)\, dZ \tag{3.15}$$

Por otra parte, expresando (3.10), con el cambio $U = Z - Z_o$ queda:

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{U^{n+1}}\, dZ \tag{3.16}$$

Se sigue de (8.12) y (8.13) que

$$\frac{f^{(n-1)}(Z-Z_o) - f^{(n-1)}(Z_o)}{h} - \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{U^{n+1}}\, dZ =$$

$$= \left[\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{U^{n-1}+U^{n-2}(U-h)+\ldots+(U-h)^{n-1}}{U^n(U-h)^n} - \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{1}{U^{n+1}}\right] f(Z)\,dZ$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\left[\frac{(n-1)!(U^{n-1}+U^{n-2}(U-h)+\ldots+(U-h^{n-1})}{U^n(U-h)^n} - \frac{n!}{U^{n+1}}\right] f(Z)\,dZ$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\left[\frac{(n-1)!U^n+U^{n-1}(U-h)+\ldots+U(U-h)^{n-1}-n!(U-h)^n}{U^{n+1}.(U-h)^n}\right] f(Z)\,dZ$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\left[\frac{(n-1)!U^n+U^{n-1}(U-h)+\ldots+U(U-h)^{n-1}-n(n-1)!(U-h)^n}{U^{n+1}.(U-h)^n}\right] f(Z)\,dZ$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\left(\frac{U^n+U^{n-1}(U-h)+\ldots+U(U-h)^{n-1}-n(U-h)^n}{U^{n+1}.(U-h)^n}\right) f(Z)\,dZ$$

Utilizando la propiedad 4 de la sección 3.1.3.1 se tiene que

$$\left|\frac{f^{(n-1)}(Z_o+h) - f^{(n-1)}(Z_o)}{h} - \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(Z)}{U^{n+1}}\,dZ\right| \tag{3.17}$$

$$\leq \quad (n-1)\rho M(\rho).\frac{\rho^n+\rho^{n-1}(\rho-|h|)+\ldots+\rho(\rho-|h|)^{n-1}-n(\rho-|h|)^n}{\rho^{n+1}(\rho-|h|)^n} \tag{3.18}$$

donde

$$M(\rho) = \max_{Z\varepsilon\gamma_\rho}|f(Z)|$$

Pero el miembro derecho de (3.18) se aproxima a cero como $h \to 0$, y en consecuencia, en (3.17)

$$f^{(n)}(Z_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(Z_o + h) - f^{(n-1)}(Z_o)}{h} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z_o)}{U^{n+1}} dZ$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{n+1}} dZ$$

Por tanto

$$f^{(n)}(Z_o) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{n+1}} dZ \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

COROLARIO 3.2.6.1

Si f es analítica sobre un dominio G, entonces todas las derivadas

$$f^{(n)}(Z) = \frac{d^n f(Z)}{d\, Z^n}, \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{3.19}$$

Son analíticas sobre G.

PRUEBA

Se sigue que si f es analítica en Z_o, entonces $f^{(n)}(Z_o)$ son analíticas y por lo tanto contínuas en ese punto, se deduce que las derivadas parciales de todas las órdenes, de U y V son funciones contínuas en cualquier punto donde f sea analítica.

3.2.6.1 TEOREMA DE MORERA

Sea f una función contínua en un dominio G conexo, y supongamos que

$$\int_L f(Z)\, dZ = 0 \tag{3.20}$$

Para toda curva cerrada L contenida en G. Entonces f es analítica en todo G.

PRUEBA

Sean Z_0, Z dos puntos arbitrarios de G. Entonces se sigue de - (3.20) y proposición 3.2.4.1 que la integral

$$F(Z) = \int_{Z_0}^{Z_0} f(\xi)\, d\xi$$

es independiente de la trayectoria, si no de los extremos Z_0;Z y por corolario 3.2.6.1 f es analítica sobre G.

TEOREMA 3.2.6.2 (Principio del módulo máximo).

Si $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene la propiedad (3.12), $f(Z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} f(Z_0+\rho e^{i\theta})d\theta$, D abierto y conexo y $|f|$ alcanza un máximo relativo en D en un disco D' de D, entonces f es constante.

PRUEBA

Consideremos la figura 16

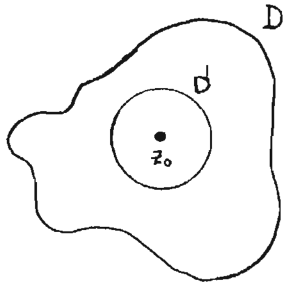


FIGURA 16

Supongamos que $|f|$ alcanza un máximo relativo en Z_0. Es decir supongamos que xiste

$D' = \{Z \in \mathbb{C} \;/\; |Z-Z_0| < R\}$

tal que $|f(Z_0)| \geq |f(Z)|$, $\forall Z \in D'$

Supongamos que $f(Z_0)$ es real y mayor o igual que cero.

$$f(Z_0) = |f(Z_0)|e^{i\theta}$$

$$e^{-i\theta}f(Z_0) = |f(Z_0)|$$

Definimos

$$M(r) = \sup |f(Z_o + re^{i\theta})|$$

Por un lado tenemos $|f(Z_o + re^{i\theta})| \leq f(Z_o)$

así

$$M(r) = \sup |f(Z_o + re^{i\theta})| \leq f(Z_o) \tag{3.21}$$

como f tiene la propiedad (3.12) entonces

$$f(Z_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Z_o + re^{i\theta})\, d\theta$$

luego

$$f(Z_o) = |f(Z_o)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(Z_o + re^{i\theta})||d\theta|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} M(r)\,|d\theta| = M(r)$$

en consecuencia

$$f(Z_o) \leq M(r) \tag{3.22}$$

de (3.21) y (3.22) se concluye que

$$f(Z_o) = \sup |f(Z_o + re^{i\theta}| = M(r)$$

Sea $g(Z_o) = Re(f(Z_o) - f(Z))$, g tiene la propiedad (3.12)

$$g(Z_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} Re\left[f(Z_o) - f(Z_o + re^{i\theta})\right] d\theta = 0 \tag{3.23}$$

$$g(Z_o) = Re\left[f(Z_o) - f(Z_o)\right] = 0$$

como g es positiva

$$g(Z) = \text{Re}\,(f(Z_o) - f(Z)) = \text{Re}\left[f(Z_o)\right] - \text{Re}\left[f(Z)\right]$$

$$= f(Z_o) - \text{Re}\left[f(Z)\right]$$

$$\geq f(Z_o) - |f(Z)| \geq 0 \qquad (3.24)$$

de (3.23) y (3.24); $g(Z) = 0$

así

$$g(Z) = \text{Re}\left[f(Z_o) - f(Z)\right] = 0 \iff \text{Re}\left[f(Z_o)\right] = \text{Re}\left[f(Z)\right]$$

$$|f(Z)| \leq f(Z_o) = \text{Re}\left[f(Z)\right] \leq |f(Z)|$$

por consiguiente

$f(Z_o) = |f(Z)|, \quad \forall_Z \in C_1$, donde C_1 está contenido en D'

Por tanto cuando $r \to 0$ tenemos que

$$f(Z_o) = |f(Z)| \quad \forall_Z \in D'$$

y f es constante.

TEOREMA 3.2.6.3 (teorema de Louville).

Si f es analítica en todo $\mathbb{C}$, si f es acotada, entonces f es constante.

DEMOSTRACION

Sea $Z_o \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$f(Z_o) = f(0) \qquad (3.26)$$

Sea γ el círculo: γ: $|Z-Z_o| < R$, si consideramos el centro en 0 de tal forma que Z_o cae dentro de γ, se tiene entonces por la fórmula de Cauchy

$$f(Z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(Z)}{Z-Z_o}\,dZ, \qquad f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(Z)}{Z}\,dZ.$$

por consiguiente

$$f(Z_o) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(Z)\left[\frac{1}{Z-Z_o} - \frac{1}{Z}\right] dZ$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{Z_o f(Z)}{Z(Z-Z_o)}\,dZ$$

En consecuencia

$$|f(Z_o)-f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|Z_o|\;|f(Z)|}{|Z|\;|Z-Z_o|}$$

como f es acotada, $\exists M > 0$ tal que $|f(Z)| < M$

así

$$|f(Z_o)-f(0)| < \frac{1}{2\pi}\,|Z_o|\,M\int_\gamma \frac{dZ}{|Z|\,|Z-Z_o|}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{|Z_o|M}{R(R-|Z_o|)}\,(2\pi R) \tag{3.27}$$

Por el hecho de que

$$|Z| = |Z + Z_o - Z_o| \leq |Z + Z_o| + |Z_o|$$

$$|Z - Z_o| \geq |Z| - |Z_o| = R - |Z_o|$$

se tiene que

$$|f(Z_o) - f(0)| = \frac{M|Z_o|}{R-|Z_o|} \tag{3.28}$$

si $R \to \infty$ entonces el miembro derecho de (3.28), puede hacerse menor que cualquier número positivo, y el lado izquierdo de - (3.28) debe ser igual a cero, por consiguiente

$$f(Z) = f(0)$$

TEOREMA 3.2.6.4 (Teorema fundamental del Algebra).

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene por lo menos una raiz (cero)

PRUEBA

Supongamos el polinomio de la forma

$$f(Z) = a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + \ldots, a_n, \quad a_0 \neq 0 \quad n \geq 1 \qquad (3.29)$$

supongamos que $f(Z)$ no tiene cero. Entonces $\frac{1}{f(Z)}$ es analítica en todo $\mathbb{C}$, así

$$\frac{1}{f(Z)} = \frac{1}{Z^n(a_0 + a_1/Z + \ldots + a_n/Z^n)}$$

tambien

$$\lim_{Z \to \infty} (a_0 + a_1/Z + \ldots + a_n/Z_1) = a_0 \neq 0$$

luego existe un R tal que

$$|a_0 + a_1/Z + \ldots + a_n/Z^n| \geq \frac{|a_0|}{2}, \text{ cuando } \frac{1}{|Z|} < \frac{1}{R}$$

por lo tanto para $|Z| > R$ se tiene

$$\left|\frac{1}{f(Z)}\right| = \left|\frac{1}{Z^n(a_0 + a_1/Z + \ldots + a_n/Z^n)}\right|$$

$$< \frac{1}{R^n} \cdot \frac{1}{|a_0 + a_1/Z + \ldots + a_n/Z|} \text{ ya que } |Z| > R$$

$$< \frac{1}{R^n} - \frac{2}{|a_0|}, \text{ ya que } 1/R < 1$$

Como f es contínua en una región cerrada, entonces

$$\left|\frac{1}{f(Z)}\right| < N \quad \text{cuando} \quad |Z| \leq R$$

si tomamos

$$M = \max\left(\frac{1}{R} \cdot \frac{2}{|a_o|}\ ,\quad N\right)$$

se tiene entonces que

$$\left|\frac{1}{f(Z)}\right| < M, \quad \forall_Z \in \mathbb{C}$$

luego por teorema (3.2.6.3) teorema de Louville, aplicado a -

$\frac{1}{f(Z)}$ es constante y en consecuencia f(Z) es constante, contradiciendo la hipótesis que el grado de f es mayor o igual a 1.

CAPITULO IV

SERIES

4.0 SERIES

En el capítulo III, se presentó un estudio sobre las condiciones de analíticidad de una función compleja y se hicieron planteamientos sobre funciones analíticas conforme al proces de integración de una función a lo largo de una trayectoria; existe otra manera de tratar el problema de analiticidad, el cual se presenta, tomando como instrumento básico las series de potencia, así mediante esta técnica se puede lograr una mejor apreciación y claridad del problema de analiticidad de una función compleja de variable compleja.

En lo que sigue del presente capítulo, se dará por conocido los diferentes criterios de convergencia de series infinitas de números reales, así también, para las series de funciones reales, y las sucesiones.

4.1 SERIES DE NUMEROS COMPLEJOS

DEFINICION 4.1.1

Consideremos la sucesión de números complejos

$$W_1 = Z_1 \ , \quad W_2 = Z_1 + Z_2 , \ \ldots , \quad W_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j \qquad (4.1)$$

La sucesión dada en (4.1), por (W_n), se llama una serie cuyo n-simo término es Z_n. Los números W_n se llaman sumas parciales de la serie.

Se dice que una serie es convergente si la sucesión de sumas parciales es convergente, es decir, tiene límite finito, en caso contrario dirémos que la serie es divergente.

Si una serie $\sum\limits_{n\geq 1} Z_n$ converge a L entonces escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n = L; \quad L \in \mathbb{R} \quad ó \quad L \in \mathbb{C}$$

DEFINICION 4.1.2

Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ una serie de números complejos, se dice que la serie converge al valor de L, si existe, $L \in \mathbb{C}$, tal que $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_o \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} Z_n - L \right| < \varepsilon \ , \quad \forall_n, \ n > n_o$$

DEFINICION 4.1.3

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ se dice que, converge absolutamente si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Z_n| \quad \text{es convergente.}$$

Es decir, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ converge absolutamente, si converge la serie de módulos.

Si una serie converge pero no absolutamente, dirémos que la serie converge en forma condicional, dicho esto de otra manera, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ converge, pero $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |Z_n|$ diverge, entonces se dice que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ converge condicionalmente.

TEOREMA 4.1.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n = L \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(Z_n) = \mathrm{Re}(L) \qquad (4.2)$$

$$\text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(Z_n) = \mathrm{Im}(L)$$

PRUEBA

Se deberá mostrar que la sucesión de sumas parciales converge.

Sea $(Z_n) = (x_n) + i(Y_n)$. Entonces (Z_n) converge si y solo sí - (x_n) y (Y_n) ambas convergen, en efecto.

Supongamos que $Z_n \to \zeta$ y que $\zeta = \alpha + i\beta$, entonces para cual--- quier $\varepsilon > 0$, existe un $N_o(\varepsilon)$ tal que

$$|x_n + iY_n - \alpha - i\beta| < \varepsilon \quad , \quad n > n_o$$

o sea

$$|x_n - \alpha + i(Y_n - \beta| < \varepsilon \quad , \quad n > n_o$$

dado que

$$|x_n - \alpha| \leq |Z_n - \zeta|$$

entonces para $n > n_o$ implica que $|x_n - \zeta| < \varepsilon$

y esto significa que $x_n \to \zeta$. Por otra parte

$$|Y_n - \beta| \leq |Z_n - \zeta|, \quad \text{entonces}$$

$n > n_o \implies |Y_n - \beta| < \varepsilon$

es decir $Y_n \longrightarrow \beta$

Conversamente

Si $x_n \to \alpha$, $Y_n \to \beta$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un N_o

tal que

$$n > n_o \Rightarrow \begin{cases} |X - \alpha| < \varepsilon/2 \\ |Y - \beta| < \varepsilon/2 \end{cases}$$

pero $|Z_n - \zeta| = |Z_n - \alpha - i\beta| = |(x_n) + i(Y_n) - \alpha - i\beta|$

$$= |(x_n - \alpha) + i(Y_n - \beta)|$$

$$\leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| < \varepsilon$$

luego $Z_n \longrightarrow \zeta$

TEOREMA 4.1.2 (Criterio de convergencia de Cauchy).

Sea (Z_n) una sucesión de números complejos. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ converte si y solo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un N_o tal que $|Z_n + Z_{n+1} + \ldots + Z_{n+p}| < \varepsilon, \quad n > n_o, \forall p \geq 0$ (4.3)

La prueba se verifica por aplicación directa del criterio de - convergencia de Cauchy, para sucesiones, de manera análoga que en variable real.

TEOREMA 4.1.3

Si $R < 1$ y $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|Z_n|} = r$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ converge absolutamente, si $R > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ diverge (4.4)

PRUEBA

Sea $\varepsilon > 0$. Si $R < 1$ y $\varepsilon < 1 - R$.

si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|Z_n|} = r$, entonces de un N en adelante

$$\sqrt[n]{|Z_n|} < r + \varepsilon = k < 1, \text{ esto significa que}$$

de un N en adelante

$$|Z_n| < K^n. \text{ por la prueba de comparación}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Z_n| \text{ converge, ya que } \sum_{n=1}^{\infty} K^n < 1 \text{ converge,}$$

ILUSTRACION 4.1.1

Verificar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

usando la prueba de la raíz se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e} < 1$$

4.2 CONVERGENCIA UNIFORME DE SERIES COMPLEJAS

DEFINICION 4.2.1

Sea $\mathbb{E}$ un espacio métrico, se dice que una serie de funciones complejas de variable compleja definida en $\mathbb{E}$, es uniformemente convergente si la sucesión de sumas parciales

$$S_n = f_1(Z) + f_2(Z) + \dots + f_n(Z) \tag{4.5}$$

converge uniformemente en $\mathbb{E}$ hacia una función f, a f se le llama suma de la serie de funciones, y se denota de la forma siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(Z) = f(Z)$$

DEFINICION 4.2.2

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(Z)$ una serie de funciones complejas de variable compleja, se dice que la serie converge una función f, conpleja - de variable compleja, tal que

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \text{t.q:} \left| \sum_{n=1}^{k} f_n(Z) - f(Z) \right| < \varepsilon, \quad \forall K > N,\ Z \in \mathbb{E} \subset \mathbb{C}$$

Comentario 4.2.1

Una condición necesaria y suficiente para que (4.5) converja - uniformemente a la función f, en $\mathbb{E}$ es que exista $N \in \mathbb{N}$, $N(\varepsilon)$ tal que

$$|S_{n+p}(Z) - S_n(Z)| < \varepsilon \quad , \quad \forall n > N(\varepsilon),\ \forall p > 0,\ Z \in \mathbb{E} \quad (4.6)$$

Basta con aplicar el criterio de Cauchy

TEOREMA 4.2.1 (Teorema de Weierstrass M - test).

Sea la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} Mn$ cuyos términos son constantes no negativos,

supongamos las f_n funciones, es tal que

$$|f_n(Z)| < M_n \quad (4.7)$$

Para todo $Z \in \mathbb{E}$, y para todo n mayor que cierto número entero N, $N > 0$.

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(Z) \text{ converge uniformemente a f sobre } \mathbb{E}$$

DEMOSTRACION

Dado que la serie $\sum_{n \geq 1} M_n$ converge, sea $\varepsilon > 0$, existe

$N_1 \in \mathbb{Z}$, $N_1\ (\varepsilon) > 0$ tal que:

$$M_{n+1} + \dots + M_{n+p} < \varepsilon \ , \quad \forall n > N_1(\varepsilon),\ p > 0$$

si $N_2(\varepsilon) = \text{Max}\,(N_1(\varepsilon), N)$ entonces de acuerdo a (4.7) se tiene

$$|S_{n+p}(Z) - S_n(Z)| = |f_{n+1}(Z) + \dots + f_{n+p}(Z)|$$

$$\leq |f_{n+1}(Z)| + \dots + |f_{n+p}(Z)|$$

$$\leq M_{n+1} + \dots + M_{n+p} < \varepsilon,\ \forall n \quad N_2,\ p > 0, Z \in \mathbb{E}$$

como ε es arbitrario, entonces

$$\sum f_n(Z) \longrightarrow f \quad \text{sobre } \mathbb{E}$$

luego para cualquier complejo Z se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(Z) = f(Z)\ \forall Z \in \mathbb{E}$

TEOREMA 4.2.2

Si la serie $\sum_{n \geq 1} f_n(Z)$ converge uniformemente a f en $\mathbb{E}$ que tiene como punto límite $Z_0 \in \mathbb{E}$ y si f_n es contínua, para todo -- $n \in \mathbb{N}$, en $Z_0 \in \mathbb{E}$. Entonces f es contínua en Z_0.

DEMOSTRACION

Sea $Z \neq Z_0$ un punto de $\mathbb{E}$, entonces

$$|f(Z) - f(Z_0)| = |[f(Z) - S_n(Z)] + [S_n(Z) - S_n(Z_0)] + [S_n(Z_0) - f(Z_0)]|$$

$$\leq |S_n(Z) - f(Z)| + |S_n(Z) - S_n(Z_0)| + |S_n(Z_0) - f(Z_0)|$$

dado que $\sum_{n \geq 1} f_n(Z)$ converge uniformemente a f sobre $\mathbb{E}$, entonces.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S_n(Z) - f(Z)| < \frac{\varepsilon}{3} \ , \quad \forall n > N(\varepsilon), Z \in \mathbb{E}$$

en particular

$$|S_n(Z_o) - f(Z_o)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

si $n >> N(\varepsilon)$, podemos escoger $n = n_o$ y asî tendrémos que

$$|f(Z) - f(Z_o)| < |S_{n_o}(Z) - S_{n_o}(Z_o)| + \frac{2\varepsilon}{3} \qquad (4.8')$$

dado que S_{n_o} es contînua en $Z_o \in \mathbb{E}$, se puede escoger $\delta(\varepsilon)$ de tal forma que

$|S_n(Z) - S_{n_o}(Z_o)| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $|Z - Z_o| < \delta$ y en consecuencia de acuerdo a (4.8') se tiene

$$|f(Z) - f(Z_o)| < \varepsilon \text{ siempre que } |Z - Z_o| < \delta$$

luego f es contînua en Z_o.

TEOREMA 4.2.3

Sea γ un camino, $\sum_{n=1}^{\infty} f(Z)$ converge uniformemente a f sobre γ si todo têrmio de $f(Z)$ $\forall Z$, es contînua sobre γ entonces -- $\sum_{n\geq 1} f_n(Z)$ puede integrarse têrmino a têrmino a lo largo de γ - idênticamente

$$\sum_{n\geq 1} \int_\gamma f_n(Z)\, dZ = \int_\gamma f(Z)\, dZ \qquad (4.8)$$

DEMOSTRACION

Por teoréma 4.2.2 f es contînua, y en consecuencia, puede ser integrable sobre γ; por hipôtesis $\sum_{n\geq 1} f(Z) \to f$, uniformemente - sobre γ

asî. Sea $\varepsilon > 0$, existe un entero $N(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|Sn(Z) - f(Z)| < \frac{\varepsilon}{\ell}, \text{ donde } \ell \text{ es la longitud de } \gamma$$

luego $\forall n > N(\varepsilon)$, $Z \in \gamma$ se deduce que

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_k(Z)\, dZ - \int_{\gamma} f(Z)\, dZ \right| = \left| \int_{\gamma} [Sn(Z) - f(Z)]\, dZ \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{\ell} \cdot \ell = \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, la prueba es completa.

4.3 SERIES DE POTENCIA

DEFINICION 4.3.1

Sea (an) una sucesión de números complejos. La serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \qquad (4.9)$$

es llamada una serie de potenci s la series de la forma (4.9) - también son conocidas con el nombre de serie entera en Z.

A veces se considera una serie de potencia de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - Z_o)^n \qquad (4.10)$$

Pero si consideramos el complejo $\rho = Z - Z_o$, la serie (4.10) toma la forma de la serie (4.9), por lo que será de mucha utilidad en lo posterior.

TEOREMA 4.3.1

Si existe $Z_o \neq 0$ tal que $|a_n Z_o^n| < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces la serie de potencias definida en (4.9) converge, para todo Z, tal que --

$$|Z| < |Z_o|$$

PRUEBA

$$|anZ_o^n| = |an||Z|^n = |an|.|Z|^n \frac{|Z_o|^n}{|Z_o|^n}$$

$$= |an|.|Z_o|^n. \frac{|Z|^n}{|Z_o|^n}$$

$$= |anZ_o^n|. \frac{|Z|^n}{|Z_o|^n}$$

$$< M. \frac{|Z|^n}{|Z_o|^n}$$

Como la serie Geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{|Z|^n}{|Z_o|^n}$ Converge con razón menor-- que 1 luego por criterio de comparación la serie definida en - (4.9) converge absolutamente, para $|Z| < |Z_o|$, $\forall Z \in \mathbb{C}$.

<u>Consideraciones</u> sobre el disco de Convergencia en $\mathbb{C}$, en cuanto a las series de potencia. (4.11)

i) El disco $|Z| < R$, se le llama disco de Convergencia, si la tiene Converge con todos los puntos de $|Z| < R$

ii) El exterior del disco de Convergencia: $|Z| > R$, en este caso la serie no Converge si no sus términos no están acotados.

iii) El anillo $|Z| = R$, en cuales la Serie puede o no Converger

TEOREMA 4.3.2 (Cauchy - Hadamard).

Sea la serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} an(Z - Z_o)^n \qquad (4.12)$$

Sea a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|an|} = L$, $R = \frac{1}{L}$, donde $\overline{\lim}$ denota el lim superior de la sucesión an.

Sea γ el círculo $|Z - Z_o| = R$, con interior $I(\gamma)$, exterior - $E(\gamma)$. Entonces

1. Si $R = 0$, la Serie (4.12) diverge, para $Z \neq Z_o$

2. Si $R \in (0,\infty)$, la Serie Converge absolutamente, para todo Z - en $I(\gamma)$ y diverge, para todo Z en $E(\gamma)$.

3. Si $R = \infty$, la Serie Converge absolutamente, para cualquier - complejo Z.

PRUEBA (Se deja al lector)

TEOREMA 4.3.3

Sea γ: $|Z - Z_o| = R$ el círculo de Convergencia de la Serie de potencia (4.12), entonces la serie Converge uniformemente en - un subconjunto compacto de $I(\gamma)$.

DEMOSTRACION

Sea $F \subset I(\gamma)$ un Conjunto Compacto, contenido en algún disco Cerrado

$$|Z - Z_o| \leq r < R$$

si r es lo suficientemente próximo a R, entonces a probar que la Serie (4.12) converge uniformemente sobre el disco

$$|Z - Z_o| \leq r < R.$$

Sea ζ un punto del disco

$$R < |\zeta - Z_o| < \rho = R$$

Como la Serie (4.12) Converge absolutamente para todo $\zeta = Z$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |an||\zeta - Z_o|^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} |an|\ \rho^n \quad \text{converge}$$

luego por Teorema 4.2.1 (M-test) la Serie (4.12) converge uni-- formemente sobre el disco $|Z - Z_o| \leq r$, luego

$$|an(Z - Z_o)^n| = |an||Z - Z_o|^n < |an|\rho^n, \ \forall Z \ \varepsilon \ |Z - Z_o| \leq r$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} an(Z - Z_o)^n \quad \text{converge absolutamente sobre } I(\gamma)$$

4.4 SERIES DE FUNCIONES ANALITICAS

LEMA 4.4.1

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} fn(Z)$ converge en un dominio G; es convergente uniformemente en todo subconjunto compacto de G si y solo si, dado Z_o ε G, existe un vecindario $N(Z_o) \subset G$ en la cual $\sum_{n=1}^{\infty} fn(Z)$ converge univormemente.

DEMOSTRACION

Sea Z_o ε G, entonces la Serie dada Converge uniformemente en algún vecindario cerrado $\overline{N}(Z_o)$: $|Z - Z_o| < \rho$ y en consecuencia - converge en $N(Z_o)$.

A probar la condición suficiente.

Supongamos que existe un Conjunto Compacto $F \subset G$, tal que la serie no Converge uniformemente, si bien la condición del Teorema se satisface entonces existe $\varepsilon > 0$, una Sucesión $\{Zn\}$ de puntos en F, y una Sucesión $\{K_n\}$ de enteros positivos donde -

$k_1 < \ldots < k_n < \ldots$, tal que

$$|S_{k_n}(Z_n) - f(Z_n)| \geq \varepsilon \; , \; \forall n, \; n = 1,2,\ldots \qquad (4.13)$$

(esto es la negación de que la serie converge uniformemente sobre F).

En efecto, la sucesión $\{Z_n\}$ tiene límite y como punto límite ζ y además contiene una subsucesión $\{Z_n'\}$ convergente al valor ζ.

Dado que F es cerrado, $\zeta \in F \subset G$ y en convergencia, por hipótesis, existe un vecindario $N(Z_o) \subset G$ para el cual la serie converge unidormemente, es decir:

$|Sn(Z) - f(Z)| < \varepsilon$, para n suficientemente grande, $Z \in N(\zeta)$, dicho de otra manera; para n suficientemente grande, $N(\zeta)$ contiene puntos, (de hecho todos los puntos de $\{Z_n'\}$ enpiezan desde un cierto valor de n), satisfaciendo lo contrario a (4.13). Esta contradicción completa la prueba.

TEOREMA 4.4.1 (Teorema de Weirstrass sobre convergencia uniforme de Series de funciones analíticas). Si la Serie

$$\sum_{n \geq 1} f_n(Z) = f(Z) \qquad (4.14)$$

Converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto de un dominio G, y si todo térmio f son funciones analíticas sobre G, entonces la suma f(Z) de la Serie (4.14) es también analítica sobre G. Además la serie (4.14), puede diferenciarse término a término,

$$\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}(Z) = f^{(k)}(Z) \quad ; \quad (k = 1,2,\ldots) \; \forall Z \in G \qquad (4.15)$$

Cada serie diferenciada converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto de G.

DEMOSTRACION

Sea $Z_\circ \varepsilon G$ un punto arbitrario, seleccionemos $\rho > 0$ tal que G contenga el círculo γ_ρ: $|Z - Z_\circ| = \rho$ y su interior $I(\gamma)$; por hipotesis (4.14) converge uniformemente sobre γ_ρ y su interior, además por teorema (4.2.1) existe una serie convergente cuyos términos son constantes no negativos, de manera tal que (4.14) converge uniformemente a f, y en consecuencia en (4.14) se obtiene

$$\frac{k!}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \frac{f_n(Z)}{(Z - Z_\circ)^{k+1}} = \frac{k!}{2\pi i} \cdot \frac{f(Z)}{(Z - Z_\circ)^{k+1}}, \quad (k = 0,1,2,\ldots) \tag{4.16}$$

de donde

$$\left|\frac{k!}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(Z - Z_\circ)^{k+1}}\right| = \frac{k!}{2\pi i}\left| \frac{1}{(Z - Z_\circ)^{k+1}} \right|$$

$$= \frac{k!}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\rho^{k+1}}, \quad \forall Z \varepsilon \gamma_\rho .$$

Por teorema (4.2.3) podemos integrar término a término (4.16), a lo largo de γ_ρ, obteniendo

$$\frac{k!}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \int_{\gamma_\rho} \frac{f_n(Z)}{(Z - Z_\circ)^{k+1}} dZ = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{(Z - Z_\circ)^{k+1}} dZ \tag{4.17}$$

obteniendo así la fórmula de Cahuchy, si k = 0 en (4.17) se reduce a

$$f(Z_\circ) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \int_{\gamma_\rho} \frac{f_n(Z)}{(Z - Z_\circ)} dZ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{(Z - Z_\circ)} dZ \tag{4.18}$$

Como todas las f_n son analíticas sobre $\overline{I(\gamma_\rho)}$. En consecuencia f puede representarse por la integral de Cauchy tomando la forma

$$f(Z_\circ) = \sum_{n\geq 1} f_n(Z_\circ) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{Z - Z_\circ}\, dZ \quad , \forall Z_\circ \in G. \tag{4.19}$$

recordando la prueba de la integral de Cauchy, se utilizó la analiticidad para f usando n = 0, y en consecuencia si satisface (4.19), se deduce que f puede tener derivada de todos los órdenes sobre G. En particular si f es analítica sobre G, para $k > 0$, así (4.17) se reduce a (4.15), con el reemplazamiento de Z por $Z_\circ$, donde podemos utilizar la fórmula de Cauchy y de hecho f es analítica como las f_n también lo son sobre $\overline{I(\gamma_\rho)}$.

Finalmente, probar que cada serie diferenciada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(Z) = \frac{k!}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\gamma_\rho} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - Z)^{k+1}}\, d\zeta = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - Z}\, d\zeta = f^{(k)}(Z) \tag{4.20}$$

Converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto de G.

Por lema 4.4.1, existe un vecindario $N(Z_\circ)$ del disco abierto

$$|Z - Z_\circ| < \frac{1}{2}\cdot\rho$$

dado que la serie en (4.14) converge uniformemente sobre γ_ρ existe un entero $N(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|Sn(Z) - f(Z)| < \varepsilon, \quad \forall n,\ n > N(\varepsilon), \quad Z \in \gamma_\rho \tag{4.21}$$

donde Sn(Z) denota la n-suma parcial, de (4.14); de (4.21).

Se sigue que:

$$\left| \frac{k!}{2\pi i} \sum_{j=1} \int_{\gamma_\rho} \frac{f_j(\zeta)}{(\zeta - Z)^{k+1}} d\zeta - \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - Z)^{k+1}} d\zeta \right|$$

$$= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{S_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - Z)^{k+1}} d\zeta \right| < \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{(\rho/2)^{k+1}} (2\pi\rho), \ \forall n > N(\varepsilon), \ Z \in N(Z_o)$$

(4.22)

El miembro derecho de (4.22) tiende a cero, con el mismo ε. Además (4.20) converge uniformemente en $N(Z_o)$, y la prueba se completa.

4.5 SERIE DE TAYLOR Y SERIE DE LAURENT

4.5.1 Serie de Taylor

Según teorema 4.3.3 la serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z - Z_o)^n = f(Z) \qquad (4.22')$$

tiene radio de convergencia R; según el Teorema 4.4.1 la relación (4.22) f es analítica y puede diferenciarse término a término,

luego:

$$f^{(k)}(Z) = k!a_k + (k+1)!a_{k+1}(Z - Z_o) + \ldots + \frac{n!a_n}{(n-k)!} (Z - Z_o)^{n-k} + \ldots \qquad (4.23)$$

La serie (4.23) converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto $\mathbb{K}$,

$\mathbb{K}$: $|Z - Z_o| < R$, reemplazando Z por Z_o en (4.23),

$$f^{(k)}(Z_o) = K!a_K, \ (K = 0,1,2,\ldots)$$

donde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(Z_o)}{k!} \tag{4.24}$$

sustituyendo (4.24) en (4.22) se tiene que

$$f(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (Z - Z_o)^k$$

$$f(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(Z_o)}{k!} (Z - Z_o)^k \tag{4.25}$$

La relación (4.25) es llamada desarrollo de Taylor de la función f en el punto $Z = Z_o$.

y podemos decir

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - Z_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(Z_o)}{k!} (Z - Z_o)^n$$

TEOREMA 4.5.1

Sea f analítica en un dominio G, sea Z_o un punto finito arbitrario de G. Sea $\Delta = \Delta(Z_o)$ la distancia entre Z_o y la frontera de G. Entonces, existe una serie de potencia

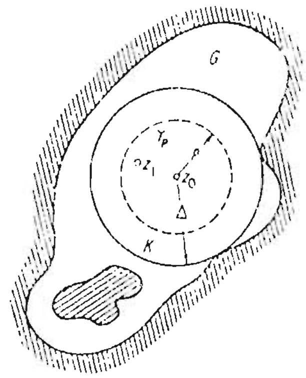


FIGURA 17

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - Z_o)^n \tag{4.26}$$

que converge a f, sobre el disco

k: $|Z - Z_o| < \Delta$.

DEMOSTRACION

Sea Z_1 un punto arbitrario de k y sea γ_ρ, un círculo con centro Z_o y radio ρ $(0 < \rho < \Delta)$, tal que $Z_1 \in I(\gamma_\rho)$; (ver fig. 17) entonces, de acuerdo a la integral de Cauchy

$$f(Z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{(Z - Z_1)}\, dZ$$

el integrando de esta relación es necesario convertirla en una serie de potencia, de la forma (4.26). En efecto,

sea $g(Z) = \frac{1}{Z - Z_1}$ lo cual podemos representar como la suma de una serie Geométrica con radio

$$\frac{Z_1 - Z_o}{Z - Z_o}$$

donde

$$\frac{|Z_1 - Z_o|}{|Z - Z_o|} = \frac{|Z_1 - Z_o|}{\rho} < 1$$

$$\frac{1}{(Z - Z_1)} = \frac{1}{(Z - Z_o) - (Z_1 - Z_o)} = \frac{1}{(Z-Z_o)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{Z_1-Z_o}{Z - Z_o}}$$

desarrollando $\left(1 - \frac{Z_1 - Z_o}{Z - Z_o}\right)^{-1}$ se tiene:

$$1 + \frac{Z_1 - Z_o}{Z - Z_o} + \frac{(Z_1 - Z_o)^2}{(Z - Z_o)^2} + \frac{(Z_1 - Z_o)^3}{(Z - Z_o)^3} + \dots + \tag{4.27}$$

luego $\frac{1}{Z-Z_1} = \frac{1}{Z-Z_o} \cdot \frac{1}{1 - \frac{Z_1-Z_o}{Z-Z_o}}$ queda

$$\frac{1}{Z-Z_1} = \frac{1}{Z-Z_o} \cdot \left(1 + \frac{Z_1-Z_o}{Z-Z_o} + \frac{(Z_1-Z_o)^2}{(Z-Z_o)^2} + \frac{(Z_1-Z_o)^3}{(Z-Z_o)^3} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{Z-Z_1} = \frac{1}{Z-Z_o} + \frac{Z_1-Z_o}{(Z-Z_o)^2} + \frac{(Z_1-Z_o)^2}{(Z-Z_o)^3} + \frac{(Z_1-Z_o)^3}{(Z-Z_o)^4} + \dots \tag{4.28}$$

$$\frac{1}{Z-Z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z_1-Z_o)^n}{(Z-Z_o)^{n+1}}$$

entonces multiplicando (4.28) por la función

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot f(Z)$$

obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} f(Z) \frac{1}{Z-Z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} f(Z) \frac{(Z_1-Z_o)^n}{(Z-Z_o)^{n+1}}$$

si $Z \varepsilon \gamma_\rho$, entonces

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{n+1}} \cdot (Z-Z_o)^n\right| = \frac{1}{2\pi} \left|\frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{n+1}}\right| \cdot \left|(Z-Z_o)^n\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{|f(Z)|}{|Z-Z_o|^{n+1}} \cdot |Z-Z_o|^n$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho} \cdot \frac{|Z-Z_o|^n}{\rho}, \text{ donde,}$$

$$M(\rho) = \text{Max } (|f(Z)|), Z \varepsilon \gamma_\rho$$

Se utiliza el hecho de que en el miembro derecho de (4.28) converge uniformemente sobre γ_ρ , por el teorema de Weierstrass' M-test y por el teorema 4.2.3 podemos integrar término a término a lo largo de γ_ρ y resulta

$$f(Z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{Z-Z_1} dZ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z_1-Z_o)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{n+1}} dZ = \frac{f^{(n)}(Z_o)}{n!} \; ; \; (n = 0,1,2,...)$$

dado que el punto $Z_1 \varepsilon K$ es arbitrario, entonces $f(Z)$ puede escribirse como $f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z-Z_o)^n$, el cual es claro que con--

verge a f, sobre el disco K: $|Z - Z_o| < \Delta$.

OBSERVACION 4.6.1

De acuerdo al teorema (4.5.1) la serie de Taylor la podemos re presentar de la forma siguiente

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - Z_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(Z)}{n!} (Z - Z_o)^n \tag{4.29}$$

el cual dice que f es desarrollable en un vecindario del punto Z_o, tal que f converge uniformemente sobre el disco $|Z-Z_o| < \Delta$

Si el radio de convergencia R de la serie puede ser tan peque- ño como Δ, se tiene que $R \geq \Delta$, así

$$\frac{1}{R} \leq \frac{1}{\Delta}$$

y por el teorema 4.32 se tiene, en (4.29) que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^n(Z_o)|}{n!}} \leq \frac{1}{\Delta} \tag{4.30}$$

la expresión (4.30) es llamada INECUACION DE <u>CAUCHY HADAMARD</u>

4.5.2 <u>Serie de Laurent</u>

DEFINICION 4.5.2.1

Sean γ_1 y γ_2 dos caminos tal que γ_1 está contenido en γ_2, de notemos por $I(\gamma_1)$ el interior de γ_1, $E(\gamma_2)$ el exterior de γ_2. Entonces se llama dominio anular a la región formada por todos los puntos $Z \in \mathbb{C}$ tal que

$$\overset{\circ}{\overline{I(\gamma_2)}} \cap \overset{\circ}{\overline{E(\gamma_1)}}. \tag{4.31}$$

En particular

$$\mathcal{R} = \{Z \in \mathbb{C} \ / \ r < |Z - Z_o| < R\}$$

TEOREMA 4.5.1

Sea la serie de potencias $A_o + A_1(Z - Z_o)^{-1} + \ldots + A_n(Z - Z_o)^{-n} + \ldots$

$$(4.32)$$

consideremos $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|}$

Sea γ el círculo $|Z - Z_o| = r$ cuyo interior lo denotaremos por $I(\gamma)$ y su exterior por $E(\gamma)$, entonces existen tres posibilidades

1. Si $r = 0$ entonces la serie (4.32) converge absolutamente, - $\forall Z \in \mathbb{C}$ excepto para $Z = Z_o$

2. Si $r \in (0, \infty)$ entonces (4.32) converge absolutamente $\forall Z \in E(\gamma)$ y (4.32) diverg $\forall Z \in I(\gamma)$

3. Si $r = \infty$ entonces (4.32) diverge, $\forall Z$, Z finito

DEMOSTRACION

Por medio de la sutitución

$$Z = \frac{1}{Z - Z_o}$$

convierte a (4.32) en

$$A_o + A_1 Z + A_2 Z^2 + \ldots + A_n Z^n$$

con radio de convergencia

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|}}$$

luego por aplicación directa del teorema (4.3.3) y el teorema - (4.3.2) transforma los puntos $Z = Z_o$, $Z = \infty$ en los puntos $Z = \infty$,

$Z = 0$ la cual completa la prueba.

OBSERVACION 4.5.2.1

Es obvio que el comportamiento de la serie (4.32), para los -- puntos $r = 0$, $r = \infty$ puden considerarse como la cubierta límite apropiada para el comportamiento de (4.32) en $r \varepsilon (0, \infty)$, así - (4.32) converge sobre el dominio, es decir, para el exterior - de γ: $|Z-Z_o| = r$

OBSERVACION 4.5.2.2

Es calro que todo subconjunto compacto de $E(\gamma)$, es proyectado dentro del subconjunto compacto de $I(\gamma)$, por medio de la transformación

$$Z = Z_o + \frac{1}{Z}$$

la cual es la inversa de la transformación

$$Z = \frac{1}{Z - Z_o}$$

de acuerdo al teorema (4.3.3) la serie (4.32) converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto de $E(\Upsilon)$ asi se sigue - del teorema de Weiersrtrass, para la convergencia de series de las funciones analíticas, que (4.32) representa una función la cual es analítica en todo punto finito de $E(\gamma)$.

OBSERVACION 4.5.2.3

La función $f(Z)$ es también analítica en $Z = \infty$, en efecto:

Sea $f^*(\gamma) = f(\frac{1}{\zeta})$, y sea $r < |Z - Z_o| < \infty$, $f^*(0) = A_o$, $Z \neq Z_o$

considerando la serie $f^*(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{\zeta}{1-\zeta Z_o}\right)^n$ y $|\zeta| < \min \left(r, \frac{1}{|Z_o|}\right)$

entonces

$$f^*(\zeta) = A_o + A_1\left(\frac{\zeta}{1-\zeta Z_o}\right) + A_2\left(\frac{\zeta}{1-\zeta Z_o}\right)^2 + \ldots = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$f^*(0) = A_o = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

así $\lim_{Z\to\infty} f(Z) = A_o$

Ahora introduciremos la serie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (Z - Z_o)^n \qquad (4.33)$$

El cual podemos expresarla como la suma de dos series

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z - Z_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z - Z_o)^n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(Z - Z_o)^{-m} \qquad (4.34)$$

la serie (4.34) es conocida con el nombre de <u>Series de Laurent</u> de donde la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z - Z_o)^n$ converge si y solamente si las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z - Z_o)^n$ y $\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(Z - Z_o)^{-m}$ son convergentes; es - decir

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{n=0}^{\lambda} a_n(Z - Z_o)^n + \lim_{\mu\to\infty} \sum_{m=1}^{\mu} a_{-m}(Z - Z_o)^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z - Z_o)^n \qquad (4.35)$$

donde λ y μ tienen acercamiento independiente hacia el infinito

Justamente (4.35) también puede expresarse como sigue:

DEFINICION 4.5.2.2

Las series de Laurent convergen uniformemente si

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{Z}$, $N(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z - Z_o)^n - \sum_{n=-\mu}^{\lambda} a_n(Z - Z_o)^n\right| < \varepsilon$$ siempre que $\mu > N(\varepsilon)$ y - $\lambda > N(\varepsilon)$.

De acuerdo a ésta definición el comportamiento de la serie de Laurent depende del comportamiento correspondiente a cada una de las series en (4.35).

COMENTARIO (4,5,2,1)

Sean los círculos Γ: $|Z-Z_o| = R$ γ: $|Z-Z_o| = r$ donde

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \quad y \quad \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_{-m}|}$$

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z-Z_o)^n$ converge absolutamente y uni-- formemente sobre todo subconjunto compacto de $I(\Gamma)$ y diverge sobre $E(\Gamma)$.

Mientras que la serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(Z-Z_o)^{-m}$ converge absolutamente uni formemente sobre todo subconjunto compacto de $E(\gamma)$ y diverge - sobre $I(\gamma)$. Donde los dominios $I(\gamma)$ y $E(\gamma)$ tienen una intersec ción novacía si y solo si $r < R$ de esta manera $D = I(\Gamma) \cap E(\Gamma)$ define una región anular o bien llamado Dominio anular, que -- en todos los puntos $Z \in \mathbb{C}$ tal que

$$r < |Z-Z_o| < R$$

Es claro que ambas series convergen absolutamente y uniformemente sobre todo subconjunto compacto del dominio D, de igual manera para la serie,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z-Z_o)^n$$

Se sigue entonces que por el Teorema (4.4.1) que la función f con desarrollo

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z-Z_o)^n \; ; \quad (r < |Z-Z_o| < R) \qquad (4.36)$$

es analítica sobre D.

Además dado que una de las series (4.34) divergen en el exterior de D no así la serie (4.36).

En lo que sigue al presentar las series de Laurent, supondremos que $r < R$ satisface la condición de que la serie converge en un dominio anular.

TEOREMA 4.5.2.2

Los coeficientes de la serie de Laurent se obtienen mediante la relación

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{k+1}} dZ; \quad (k = 0 \pm 1, \pm 2, \pm \ldots) \qquad (4.37)$$

Donde γ_ρ es algún círculo $|Z-Z_o| = \rho$, $r < \rho < R$

DEMOSTRACION

Dado que la serie (4.36) converge uniformemente sobre γ_ρ, entonces, multiplicando (4.36) por

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(Z-Z_o)^{k+1}} \text{, k es entero arbitrario.}$$

luego por teorema (4.2.3) se obtiene:

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z-Z_o)^n$$

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \frac{(Z-Z_o)^n}{(Z-Z_o)^{k+1}}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{k+1}} dZ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} (Z-Z_o)^{n-k-1} dZ. \qquad (4.38)$$

expresando el miembro derecho de la relación (4.38) en forma - exponencial obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{(z-Z_o)^{k+1}} dZ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \rho^{n-k} e^{i(n-k)\theta} d\theta = a_k \qquad (4.39)$$

Donde se usa el caso en que el miembro derecho la integral es nula si $n \neq k$ y es igual a $2\pi i$ para $n = k$.

TEOREMA 4.5.2.3 (Teorema de Laurent).

Sea f una función analítica en un Dominio anular $D: r < |Z-Z_o| < R$. Entonces existe una serie de Laurent.

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (Z-Z_o)^n \qquad (4.40)$$

que converge a f sobre D.

DEMOSTRACION

Sea $Z_1 \in D$ un punto arbitrario.

Escogiendo valores de r' y R' que satisfagan la inecuación

$$r < r' < |Z_1-Z_o| < R' < R$$

Entonces el anular.

$D': r' < |Z-Z_o| < R'$, está contenido en D y contiene al punto Z_1

Sea γ_ρ el círculo $|Z-Z_o| = \rho$; $r < \rho < R$ y sea Γ el círculo con centro en Z_1 tal que $\Gamma \subset D'$ (ver figura 18)

Dado que la función

$$\Psi(Z) = \frac{f(Z)}{Z-Z_1}$$

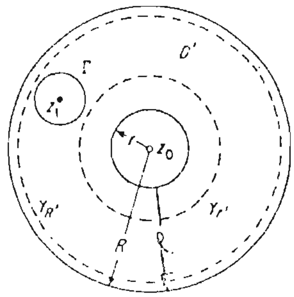


FIGURA 18

es anlítica en $D - \{Z_1\}$, se sigue entonces por el Teorema de integral de contorno de Cauchy (ver cap. III Teorema 3.2.1.1)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(Z)}{(Z-Z_1)}dZ = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(Z)}{(Z-Z_1)}\,dZ + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(Z)}{(Z-Z_1)}\,dZ \qquad (4.41)$$

Pero $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)}\,dZ = f(Z_1)$

Luego

$$f(Z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(Z)}{(Z-Z_1)}\,dZ - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(Z)}{Z-Z_1}\,dZ$$

o bien

$$f(Z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(Z)}{(Z-Z_1)}\,dZ + \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(Z)}{(Z_1-Z)}\,dZ \qquad (4.42)$$

A mostrar entonces que $\displaystyle\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(Z)}{(Z-Z_1)}\,dZ$, conduce a una serie de potencias no negativa de $Z-Z_o$, en la serie de Laurent, (4.40), - mientras que $\displaystyle\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(Z)}{(z\ -Z)}\,dZ$, conduce a potencias negativas de - $Z-Z_o$.

en efecto.

Sea $Z \in \gamma_{R'}$;

Expresando el factor.

$$\frac{1}{Z-Z_1}$$

en la primera integral en (4.42) como una serie geométrica con radio

$$\frac{Z_1 - Z_o}{Z - Z_o}$$

donde

$$\left|\frac{Z_1 - Z_o}{Z - Z_o}\right| = \frac{|Z_1 - Z_o|}{|Z - Z_o|} = \frac{|Z_1 - Z_o|}{R'} = \theta < 1$$

Resulta entonces

$$\frac{1}{Z-Z_1} = \frac{1}{(Z-Z_o) - (Z_1-Z_o)} = \frac{1}{(Z-Z_o)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{Z_1-Z_o}{Z-Z_o}} =$$

$$\frac{1}{Z-Z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z_1-Z_o)^n}{(Z-Z_o)^{n+1}} \; . \qquad (4.43)$$

Donde ésta serie converge uniformemente sobre $\gamma_{R'}$,

dado que

$$\left|\frac{(Z_1-Z_o)^n}{(Z-Z_o)^{n+1}}\right| = \frac{|Z_1-Z_o|^n}{|Z-Z_o|^{n+1}} \quad \frac{\theta^n}{R'} \,, \quad \theta \in (0,1)$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(Z)}{Z-Z_1} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{n+1}} \cdot (Z - Z_o)^n \qquad (4.44)$$

converge uniformemente sobre $\gamma_{R'}$

integrando término a término, (4.44) se obtiene.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(Z)}{(Z-Z_1)} \, dZ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z-Z_o)^n \qquad (4.45)$$

Donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{n+1}}\, dZ, \quad (n = 0,1,2,\ldots) \qquad (4.46)$$

la siguiente etapa de la prueba consiste en expresar,

$$\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(Z)}{(Z_1-Z)} \,.\, dZ,$$

como una serie de Laurent, con potencias negativas de $Z-Z_o$.

Sea $Z \varepsilon \gamma_{r'}$

identicamente, a lo anterior

el factor $\frac{1}{Z_1-Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z-Z_o)^n}{(Z_1-Z_o)^{n+1}}$; con $\frac{|Z-Z_o|}{|Z_1-Z_o|} = \frac{r'}{|Z_1-Z_o|} < \alpha < 1$

la serie converge uniformemente sobre $\gamma_{r'}$

asi $\frac{|Z-Z_o|}{|Z-Z_o|^{n+1}} = r'\alpha^n$, $\alpha \varepsilon (0,1)$

por tanto.

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(Z)}{Z_1-Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{-n}} \cdot (Z_1-Z_o)^{-n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{-n+1}} \cdot (Z-Z_o)^{-n}$$

Integrando término a término sobre $\gamma_{r'}$ se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(Z)}{Z_1-Z}\, dZ = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(Z_1-Z_o)^{-n} \qquad (4.47)$$

donde

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{-n+1}}\, dZ \qquad (4.48)$$

finalmente. Sustituyendo (4.45) y (4.47) en (4.42) y considerando que Z_1 es arbitrario, podemos reemplazar Z_1 por Z. y obtenemos

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z-Z_o)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(Z-Z_o)^{-n}$$

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z-Z_o)^n.$$ Es la serie de Lauren buscada.

Además, en combinación de (4.46) con (4.48), y haciendo uso de la integral de contorno de Cauchy. a reemplazo de;

γ_r, y γ_R, por γ_ρ $(r < \rho < R)$. Se consigue

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(Z)}{(Z-Z_o)^{n+1}}\, dZ \qquad (n = 0 \pm 1, \pm 2, \pm \dots)$$

Conocidas como coeficientes de la serie de Laurent

4.6 SINGULARIDADES

DEFINICION 4.6.1

Sea $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en algunos puntos y no analítica en otros, llamarémos a los puntos donde f, no es analítica, puntos singulares de f.

DEFINICION 4.6.2

Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, $Z_o \in D$. Decimos que f tiene una singularidad aislada si $\exists r > 0$ tal que f es analítica en el disco $|Z-Z_o| < r$, excepto posiblemente en $Z = Z_o$

CLASIFICACION DE LAS SINGULARIDADES AISLADAS

Con el auxilio de la serie de Laurent, podemos clasificar los puntos singulares aislados de funciones, que por lo demás son analíticas, en tres clases. Si revisamos la información proporcionada en la sección procedente 4.5 podremos encontrar diferencias notables, en cada caso de singularidades aisladas. Esta información servirá más adelante como ayuda para identificar las singularidades aisladas sin tener que recurrir a la serie de Laurent.

DEFINICION 4.6.3

Sea f una función analítica en el disco $|Z-Z_0| < r$.
Pero que carecemos de información sobre f en $Z = Z_0$. Si,

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (Z-Z_0)^n$$

Para $0 < |Z-Z_0| < r$, entonces llamaremos a $P(f,Z_0)$. Parte principal de f en $Z = Z_0$ y se escribe

$$P(f,Z_0) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (Z-Z_0)^n = \ldots + a_{-n}(Z-Z_0)^{-n} + a_{-n+1}(Z-Z_0)^{-n+1} + \ldots a_{-1}(Z-Z_0)^{-1} \tag{4.49}$$

De modo que

$$f(Z) = P(f,Z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z-Z_0)^n \tag{4.50}$$

Es decir

$$f(Z) - P(f,Z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z-Z_0)^n$$

es una serie de Taylor.

Podemos decir entonces que, a partir del teorema de Laurent, $f(Z) - P(f,Z_0)$ es analítica en $|Z-Z_0| < r$, así $P(f,Z_0)$ puede darnos información sobre el comportamiento "no analítico" de -

f en $Z = Z_o$.

<u>Caso I</u> Si $P(f,Z_o) = 0$

Aquí, el desarrollo de Laurent para f, en la región,

$$R = \{Z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < |Z-Z_o| < r\}$$

es, de hecho, un desarrollo de Taylor para $f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z-Z_o)^n$

si $f(Z_o) = a_o$ entonces f es analítica en $|Z-Z_o| < r$ incluyendo el punto $Z = Z_o$, entonces diremos que en $Z = Z_o$ cuando $P(f,Z_o)=0$, $Z = Z_o$ es una <u>singularidad evitable</u>, con $f(Z_o)$ definida como - a_o.

DEFINICION 4.6.4

Sea $Z_o \in D \subset \mathbb{C}$. En Z_o se dice que la singularidad es evitable si existe una función $g(Z)$ analítica entodo el disco $|Z-Z_o| < r$, tal que

$$(Z-Z_o)\ f(Z) = g(Z)$$

ILUSTRACION 4.6.1

$f(Z) = \dfrac{\text{sen } Z}{Z}$ es analítica para $|Z| > 0$, pero

$$f(Z) = \frac{\text{sen } Z}{Z} = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{Z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{Z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{Z^2}{3!} + \frac{Z^3}{5!} + \ldots +$$

cuando $|Z| > 0$ y $P\left[\dfrac{\text{sen }(Z)}{Z}, 0\right] = 0$ entonces $Z = 0$ es una singularidad remobible de $\dfrac{\text{sen } Z}{Z}$, donde definimos $f(0) = \left[\dfrac{\text{sen }(Z)}{Z}\right]_{Z=0} = 1$

<u>Caso II</u>

$P(f,Z_o)$ tiene un número finito de términos

DEFINICION 4.6.5

Se dice que f tiene un polo de orden m, $m \geq 1$ si su serie de Laurent es de la forma

$$f(Z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (Z-Z_o)^n \qquad (4.51)$$

Además $P(f,Z_o) = \sum_{n=-m}^{-1} a_n (Z-Z_o)^n$, donde $a_{-m} \neq 0$ y $a_n = 0$; si $n < -m$, es decir:

$$f(Z) = \frac{a_{-m}}{(Z-Z_o)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(Z-Z_o)^{m+1}} + \ldots \frac{a_{-1}}{(Z-Z_o)}$$

En este caso llamamos a $Z = Z_o$ polo de órden "m" para f(Z).

DEFINICION 4.6.6

Se dice que un polo de órden "uno" es un polo simple.

ILUSTRACION 4.6.1

Sea $f(Z) = \frac{e^Z}{Z^3}$, mostrar que f(Z) tiene un polo de órden tres en $Z = 0$

SOLUCION

Como $e^Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{n!}$ $\forall Z$, Z finito, mientras que $\frac{1}{Z^3}$ es analítica para $|Z| > 0$, luego la serie de Laurent de f(Z) es válida en la región $R = \{Z \,/\, 0 < |Z| < r, r > 0\}$,

en efecto

$$f(Z) = \frac{e^Z}{Z^3} = \sum_{n=-}^{\infty} \frac{Z^{n-3}}{n!} = \frac{1}{Z^3} + \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{2Z} + \frac{1}{3!} + \frac{Z}{4!} + \frac{Z^2}{5!} + \ldots$$

$$f(Z) = \frac{e^Z}{Z^3} = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{Z^n}{(n+3)!} \quad , \text{ para } |Z| > 0$$

por tanto

$P(f,Z_o) = P\left[\frac{e^Z}{Z^3},\ 0\right] = \frac{1}{Z^3} + \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{2Z}$, y $\frac{e^Z}{Z^3}$ tiene un polo de orden tres en $Z = 0$

Caso III

$P(f,Z_o)$ tiene infinitos términos.

En este caso diremos que $Z = Z_o$ es un punto singular esencial de $f(Z)$.

ILUSTRACION 4.6.2

Mostrar que $f(Z) = e^{1/Z}$ tiene un punto singular esencial en $Z = 0$

SOLUCION

$$f(Z) = e^{1/Z} = \sum_{n=-\infty} \frac{Z^n}{(-n)!} =$$

En este caso por la relación (4.49) se tiene

$$e^{1/Z} = P\left[e^{1/Z},0\right] + 1 \Rightarrow P(e^{1/Z},0) = e^{1/Z}+1,$$ tiene infinitos términos, por tanto $f(Z) = e^{1/Z}$ tiene un punto singular esencial en $Z = 0$.

Cada uno de los tres casos anteriores, puede verse en términos del comportamiento de f cuando Z se aproxima a Z_o.

Caso I

Vemos que cuando $P(f,Z_o) = 0$, $\lim\limits_{Z\to Z_o} f(Z)$ tendrá un valor finito a_o, conversamente, si $\lim\limits_{Z-Z_o} f(Z)$ existe; se verifica entonces que $P(f,Z_o) = 0$.

Caso II

Supongamos que $f(Z)$ tiene un polo de orden m, en $Z = Z_o$ entonces para $0 < |Z-Z_o| < r$, se tiene

$$f(Z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (Z-Z_o)^n$$

$$= (Z-Z_o)^{-m} \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (Z-Z_o)^{n+m}$$

$$= (Z-Z_o)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (Z-Z_o)^k \qquad (4.52)$$

$$f(Z) = (Z-Z_o)^{-m} g(Z)$$

Donde $g(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m}(Z-Z_o)^k$ es analítica en $0 < |Z-Z_o| < r$, y - $f(Z_o) \neq 0 = a_{-m}$.

Es decir; podemos formular esta conclusión como sigue

DEFINICION 4.6.7

Sea $f(Z)$ analítica en R: $|Z \;/\; 0 < |Z-Z_o| < r,\; r > 0\}$ entonces f tiene un polo de orden "m" en $Z = Z_o$ si y solo si $f(Z) = g(Z).(Z-Z_o)^{-m}$, donde $g(Z)$ es analítica en $Z = Z_o$ y --- $g(Z_o) \neq 0$.

COMPORTAMIENTO DE LAS SINGULARIDADES ESENCIALES

DEFINICION 4.6.8

Si Z_o es un punto singular esencial de $f(Z)$, entonces dado un número complejo A (finito o infinito), existe una sucesión de puntos $\{Z_n\}$ convergente a Z_o tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(Z_n) = A$$

DEFINICION 4.6.9

Sea Z_0 un punto singular esencial de $f(Z)$ y sea E_δ el conjunto de valores tomados por $f(Z)$ en el vecindario $0 < |Z-Z_0| < \delta$. Entonces la cerradura de E_δ consiste en el conjunto E_δ y todos los puntos límites de E_δ, coincide con el plano complejo - extendido.

ILUSTRACION 4.6.3

La función $f(Z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{Z}\right)$, tiene como un punto singular escencial el origen.

Cuando $Z \to 0$, entonces $f(Z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{Z}\right)$ se acerca sin límite - (finito o infinito), considerando valores reales de Z.

Si $A = \infty$ entonces la sucesión $\{Z_n\} = \{i/n\}$ satisface.

$f(Z\ ) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{Z_n}\right) = \operatorname{sen}(-in) = -i \operatorname{sen} h(n);$

luego $\lim\limits_{n\to\infty} f(Z_n) = \infty$

Si $A \neq \infty$, entonces resolver la ecuación

$$\operatorname{Sen}\left(\frac{1}{Z}\right) = A$$

es decir:

$$\frac{1}{Z} = \operatorname{arc\,sen}(A) = \frac{1}{i}\ln\left(iA + \sqrt{1-A^2}\right),$$

$$Z = \frac{i}{\ln(iA + \sqrt{1-A^2}) + 2\pi k i}$$

estableciendo

$$Z_n = \frac{i}{\ln(iA + \sqrt{1-A^2}) + 2\pi k i}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Se obtiene entonces, la sucesión $\{Z_n\}$ el cual converge a cero, además satisface la definición 4.6.8.

Ahora entonces regresando a la ilustración 4.6.2, veremos el - comportamiento de la función $f(Z) = e^{1/Z}$.

en efecto

$f(Z)$ no tiene límite cuando $Z \to 0$.

Si $A = \infty$, la sucesión $\{Z_n\} = \frac{1}{n}$ satisface la definición 4.6.8

aquí $f(Z_n) = e^n \to \infty$ cuando $n \to \infty$

si $A = 0$ la sucesión $\{Z_n\} = \{-1/n\}$ es la sucesión requerida, - dado entonces

$$f(Z_n) = e^{-n} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

si $A \neq 0$, $A \neq \infty$, entonces, resolviendo la ecuación

$$e^{1/Z} = A.$$

así

$$\frac{1}{Z} = \ln (A)$$

el cual implica

$$Z_n = \frac{1}{\ln (A)} = \frac{1}{\ln (A) + 2\pi k i}$$

se establece que

$$Z = \frac{1}{\ln (A) + 2\pi k i} \qquad (k = 1,2,...)$$

obtenemos así la sucesión convergente a cero que satisface la condición 4.6.8.

CAPITULO V

RESIDUOS Y EVALUACION DE INTEGRALES REALES

5.0 RESIDUOS Y EVALUACIÓN DE INTEGRALES REALES

5.1 RESIDUOS, DEFINICIONES BASICAS, EJEMPLOS

Si aprovechamos una cadena de resultados, derivados del Teorema de la integral de Cauchy y de la calsificación de las singularidades aisladas que se basa en el Teorema de Laurent, resulta una colección extremadamente rica de mucho interés, para poder así descubrir una técnica para la evaluación de integrales reales, de línea e integrales indefinidas impropias.

Si L es una trayectoria cerrada y f es una función analítica - en todos los puntos de la trayectoria y en su interior, con - salvedad de singularidades aisladas, entonces

$\int_L f(Z)\, dZ$, es un número que solo depende del número y de la naturaleza de esas singularidades de f(Z), contenidas en L ó - en su interior. Se piensa entonces en primer lugar en examinar las singularidades aisladas como medio para la evaluación de - las integrales definidas sobre trayectorias Cerradas.

DEFINICION 5.1.1

Supongamos que f es una función analítica en la región R, defi nida como sigue

$$R = \{Z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < |Z-Z_o| < r, \ r > 0\}$$

y que tiene desarrollo de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z-Z_o)^n = f(Z)$, en R. - entonces,

Para todo vecindario $N(Z_o)$, de un punto singular aislado Z_o de R, se define el residuo de f en $Z = Z_o$ y lo denotarémos por

$$\text{Res}(f,Z_o) \quad ; \quad \underset{Z=Z_o}{\text{Res}}(f(Z))$$

al coeficiente a_{-1} en la expansión de Laurent

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z-Z_o)^n, \quad Z \in N(Z_o) \qquad (5.1')$$

A demás por teorema 4.7.2, haciendo $K = -1$, se obtiene

$$2\pi i \ a_{-1} = \int_L f(Z) \ dZ$$

ILUSTRACION 5.1.1

Sean $f(Z) = \dfrac{e^Z}{(Z-2)^2}$, L la trayectoria Cerrada definida mediante $Z = 2 + e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$. Calcular el resíduo, mediante el - uso de la Serie.

La función posee un polo de orden dos; en $Z = 2$, hallar a_{-1}.

Sea $Z - 2 = U$. Entonces $Z = 2 + U$, así

$$f(Z) = \frac{e^Z}{(Z-2)^2} = \frac{e^{2+U}}{U^2} = \frac{e^2.e^U}{U^2} = \frac{e^2}{U^2} \cdot e^U$$

Luego $$f(Z) = \frac{e^2}{(Z-2)^2} \cdot e^U = (Z-2)^{-2}.e^2.e^{U}$$

que tendrá como desarrollo.

$$f(Z) = (Z-2)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} e^2 \frac{(Z-2)^n}{n!} \tag{5.2'}$$

la relación (5.2') puede escribirse como

$$f(Z) = (Z-2)^{-2}\left[e^2 + e^2(Z-2) + e^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(Z-2)^{n-2}}{n!}\right]$$

$$f(Z) = \frac{e^2}{(Z-2)^2} + \frac{e^2}{(Z-2)} + e^2 \sum_{n\geq 2} \frac{(Z-2)^{n-2}}{n!}$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(Z)\, dZ = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^Z}{(Z-2)^2}\, dZ = \frac{e^2}{2\pi i}\left[\int_L \frac{dZ}{(Z-2)^2} + \sum_{n\geq 2}\int_L \frac{(Z-2)^{n-2}}{n!}\, dZ\right]$$

para $Z - 2 = e^{i\theta}$, $\theta \varepsilon [0,2\pi]$ se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(Z)\, dZ = \frac{e^2}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{id\theta}{e^{i\theta}} + \frac{e^2}{2\pi i}\frac{i}{n!}\sum_{n\geq 2}\int_0^{2\pi} e^{i(3-n)\theta} d\theta$$

$$= \frac{e^2}{2\pi i}\, i(2\pi) + \frac{e^2}{2\pi i}\frac{i}{n!}\sum_{n\geq 2}\int_0^{\pi} e^{i(3-n)\theta} d\theta \tag{5.3'}$$

Resolviendo la integral última en (5.3') de o a 2π, resulta tener valor cero.

Luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(Z)\, dZ = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^Z}{(Z-2)}\, dZ = e^2 = a_{-1}$$

$$a_{-1} = e^2$$

5.2 TEOREMA DE CAUCHY PARA CALCULO DE RESIDUOS

TEOREMA 5.2.1

Sea L una curva Cerrada, si f(Z) es analítica en el interior I(L) y analítica en la clausura de I(L), $\overline{I(L)}$, excepto para los puntos singulares aislados $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ de I(L); entonces

$$\int_L f(Z)\,dZ = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, Z_k); \quad (k = 1,2,\ldots,n) \qquad (5.1)$$

DEMOSTRACION

Alrededor de cada punto Z_k; $(k = 1,2,\ldots,n)$ (de la figura 20); Sea γ_k: $|Z - Z_k| = \rho_k$ Escogiendo el radio ρ_k "de manera tal que γ_k encierre sólo una singularidad

1. I(L). contine todos los círculos γ_k
2. $E(\gamma_k)$ contine otros círculos γ_j; $j \neq k$.

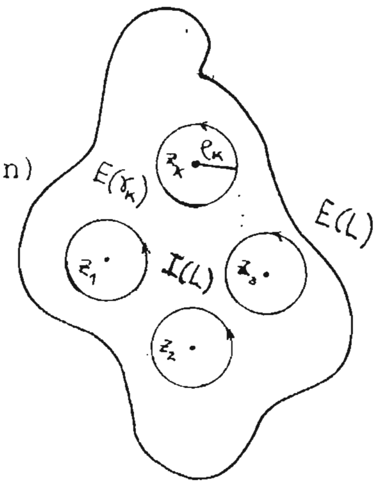


FIGURA 20

luego, por teorema de la integral de Cauchy, para un sistema de contornos, se tiene

$$\int_L f(Z)\,dZ = \int_{\gamma_1} f(Z)\,dZ + \int_{\gamma_2} f(Z)\,dZ + \ldots + \int_{\gamma_n} f(Z)\,dZ$$

Supongamos entonces, la expansión de Laurent de f(Z), para $k = 1,2, \ldots, n$ definida por

$$f(Z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(k)} (Z - Z_k)^m \qquad (5.2)$$

en efecto

$$\text{en}\quad \gamma_1:\quad f(Z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(1)} (Z-Z_1)^m$$

$$\text{en}\quad \gamma_2:\quad f(Z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(2)} (Z-Z_2)^m$$

$$\vdots$$

$$\text{en}\quad \gamma_n:\quad f(Z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(n)} (Z-Z_n)^m$$

así $\int_L f(Z)\, dZ$ queda expresado.

$$\int_L f(Z)\, dZ = \int_{\gamma_1} \sum_{\infty}^{\infty} a_m^{(1)} (Z-Z_1)^m dZ + \int_{\gamma_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(2)} (Z-Z_2)^m dZ + \ldots + \int_{\gamma_n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{n} (Z-Z_n)^m dZ$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int_{\gamma_1} (Z-Z_1)^m dZ + \ldots + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(n)} \int_{\gamma_n} (Z-Z_n)^m dZ$$

$$\int_L f(Z)\, dZ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(k)} \int_{\gamma_k} (Z-Z_k)^m dZ; \quad (k = 1,2,\ldots, n) \tag{5.3}$$

Haciendo el cambio, para el k-ésimo círculo,

$$Z - Z_k = \rho_k e^{i\theta} \text{ entonces } dZ = i\rho_k e^{i\theta} d\theta$$

en la relación (5.3), la integral, puede expresarse

$$\int_L f(Z)\, dZ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(k)} \int_{\gamma_k} \rho_k^m . e^{im\theta} . i\rho_k e^{i\theta} d\theta$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(k)} \int_{\gamma_k} i\rho_k^{m+1} . e^{(m+1)i\theta}\, d\theta \tag{5.4}$$

luego por aplicación del resultado obtenido en la ilustración 3.1.3.1 relación (3.3); la integral del miembro derecho de la ecuación en (5.4) obtenemos:

$$i\rho_k^{m+1} \int_{\gamma_k} e^{(m+1)i\theta}\, d\theta = \begin{cases} 2\pi i \ , & \text{si } m = -1 \\ 0 \ , & \text{si } m \neq -1 \end{cases}$$

luego, la relación (5.4) queda

$$\int_L f(Z)\, dZ = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-1}^{(k)} \, (2\pi i) \tag{5.5}$$

comparando (5.2) con (5.5) se obtiene:

$$\int_L f(Z)\, dZ = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(Z)\, dZ = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} a_{-1}^{(k)}$$

se concluye que

$$\int_L f(Z)\, dZ = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res } (f, Z_k).$$

Antes de aplicar e Teorema 5.2.1,. Estableceremos una técnica para el cálculo de residuos.

TEOREMA 5.2.2

Sea L una curva cerrada, si f es analítica en $\overline{I(L)}$. Excepto para Z_o un polo de orden k en I(L) entonces:

$$a_{-1} = \text{Res } (f, Z_o) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{Z \to Z_o} \frac{d^{k-1}}{dZ^{k-1}} \left[(Z-Z_o)^k . f(Z) \right] \tag{5.6}$$

DEMOSTRACION

a) Sea Z_o un polo simple de f(Z), asi que:

$$f(Z) = \frac{a-1}{(Z-Z_o)} + a_o + a_1(Z-Z_o) + a_2(Z-Z_o)^2 + \ldots + = \sum_{m=-1}^{\infty} a_m (Z-Z_o)^m$$

En un entorno a Z_o tendremos

$$f(Z)(Z-Z_o) = a_{-1} + a_o(Z-Z_o) + a_1(Z-Z_o)^2 + a_2(Z-Z_o)^3 + \ldots$$

luego

$$\lim_{Z \to Z_o} \left[f(Z)(Z-Z_o) \right] = \operatorname{Res}(f,Z_o) = a_{-1} \tag{5.7}$$

b) Si Z_o es un polo de orden $k > 1$ de $f(Z)$

por expansión de Laurent, de $f(Z)$ en Z_o, tendremos

$$f(Z) = \frac{a_{-k}}{(Z-Z_o)^k} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(Z-Z_o)} + a_o + a\ (Z-Z_o) + \ldots \tag{5.8}$$

entorno de Z_o se tiene

$$f(Z)(Z-Z_o)^k = a_{-k} + \ldots + a_{-1}(Z-Z_o)^{k-1} + a_o(Z-Z_o)^k + a_1(Z-Z_o)^{k+1} + \ldots \tag{5.9}$$

Diferenciando (5.9), (k-1) veces, se obtiene

$$\frac{d^{(k-1)}}{dZ^{k-1}} \left[(Z-Z_o)^k f(Z) \right] = (k-1)!a_{-1} + k!a_o(Z-Z_o) + \frac{(k+1)!}{2!} a_1(Z-Z_o)^2$$

$+\ldots$, así

$$\lim_{Z \to Z_o} \frac{d^{(k-1)}}{dZ^{k-1}} \left[(Z-Z_o)^k f(Z) \right] = (k-1)!a_{-1}$$

de donde

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f,Z_o) = \frac{1}{(k-1)!} \lim \frac{d^{(k-1)}}{dZ^{k-1}} \left[(Z-Z_o)^k f(Z) \right]$$

Supongamos que f es integrable a lo largo de γ_ρ: $|Z| = \rho$, $\rho > R$, escogiendo la convención de recorrido en dirección positiva de γ_ρ, así la dirección de recorrido de un camino circundante en $|Z| > \rho$, se tiene:

$$\int_{\gamma_\rho} f(Z)\, dZ = \int_{\gamma_\rho} \frac{a_{-1}}{Z}\, dZ = ia_{-1} \int_0^{-2\pi} d\theta = -\,2\pi i\; a_{-1} \qquad (5.10)$$

la relación (5.10) define $-a_{-1}$ como el residuo de f(Z) al infinito, sonservandose así el teorema del residuo y

$$\int_{\gamma_\rho} f(Z)\, dZ = 2\pi i \operatorname*{Res}_{Z=\infty} f(Z).$$

5.3 CALCULO DE RESIDUOS APLICACIONES INMEDIATAS

a) En una singularidad evitable, como la parte principal, falta por completo, $a_{-1} = 0$, así el residuo es igual a cero

b) El caso más simple ocurre cuando f(Z) tiene un polo de primer orden en $Z = Z_o$. La serie de Laurent toma la forma

$$f(Z) = \frac{a_{-1}}{Z-Z_o} + a_o + a_1(Z-Z_o) + \ldots$$

Luego por Teorema 5.2.2, relación (5.6), para k = 1, se obtiene

$$a_{-1} = \lim_{Z\ Z_o} (Z-Z_o)\, f(Z)$$

ILUSTRACION 5.3.1

Encontrar el residuo de $f(Z) = \frac{1}{1+Z^2}$, sobre un semicírculo del plano superior de radio $r > 1$ con centro en el origen.

Se observa que $Z = i$ es la única singularidad de f(Z) en el interior del contorno.

en efecto

$$f(Z) = \frac{1}{(Z-i)(Z+i)}$$

de donde

$$(Z-i)f(Z) = \frac{1}{Z+i}\ , \quad \text{es analítica en } Z = i$$

sin tener que escribir toda la serie de Laurent, encontramos

$$\text{Res}\left[\frac{1}{1+Z^2}\ ,\ i\right] = a_{-1} = \lim_{Z\to i} (Z-i)f(Z)$$

$$\text{Res } f(Z) = \lim_{Z\to i} \frac{1}{(Z+i)} = \frac{1}{2i}$$

luego

$$a_{-1} = \frac{1}{2i}\ .$$

c) <u>Residuos en polos de orden superior</u>

Aquí se utilizará el resultado obtenido en el Teorema 5.2.2 relación (5.6)

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{Z\to Z_o} \frac{d^{k-1}}{dZ^{k-1}} \left[(Z-Z_o)^k.f(Z)\right]$$

ILUSTRACION 5.3.2

Encontrar el residuo del ejemplo mostrado en la ilustración -- 5.1.1

aquí $f(Z) = \dfrac{e^Z}{(Z-2)^2}$ tiene un polo de orden dos en $Z = 2$, $(k=2)$.

así

$$a_{-1} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{Z\to 2} \frac{d}{dZ} \left[(Z-2)^2 . \frac{e^Z}{\cancel{(Z-2)^2}}\right]$$

$$\lim_{Z\to 2} e^2 = e^2$$

$$\therefore\ a_{-1} = e^2 \quad \text{como era de esperarse}$$

d) Residuos en singularidades esenciales

No existe una fórmula sencilla, como en los casos anterio-- res; es frecuente utilizar las series de Laurent en su for- ma completa.

ILUSTRACION 5.3.3

Sea $f: \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}: Z \rightsquigarrow f(Z) = e^{(Z+\frac{1}{Z})}$ Mostrar que f(Z) - tiene un resíduo en $Z_o = 0$

Solución

$$f(Z) = e^{(Z+\frac{1}{Z})} = e^Z e^{1/Z}$$

Por expansión de Laurent se tiene

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!Z^m}, \quad (0 < |Z| < \infty)$$

Luego por ilustración 4.8.3 $e^{1/Z}$ tiene infinitos términos de - modo que el coeficiente a_{-1} de 1/Z se obtiene de cada uno de - los términos

$$\frac{Z^n}{n!}, \quad \frac{1}{m!Z^m}$$

con m = n + 1; luego el Resíduo de f(Z) en $Z = Z_o = 0$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

5.4 INTEGRALES SOBRE EL EJE REAL

I. forma $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx$

DEFINICION 5.4.1

Sea $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, entonces

1. $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx$ converge si $\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha}^{R} F(x)\, dx + \lim_{S\to -\infty} \int_{S}^{\alpha} F(x)\, dx$

2. Llamaremos valor principal de $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx$, denotado por:

   $V.P \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx$, existe si el $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} F(x)\, dx$ existe y

$$V.P \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} F(x)\, dx \qquad (5.11)$$

En lo que sigue supondrémos que son conocidos los criterios de convergencia para las integrales impropias, además si posee ó no un valor principal. El método en el cual interviene la integración por residuos puede ayudarnos a conseguir los valores de muchas integrales impropias, cuya convergencia ya se ha establecido.

ORIENTACION DEL METODO

Supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx$ converge, $x \in \mathbb{R}$, y tratemos de encontrar una función de valores complejos $F = F(Z)$, $Z \in \mathbb{C}$ y una trayectoria cerrada $C(R)$ que contenga un segmento del eje real; $-R \leq x \leq R$ tal que

i) $\int_{C(R)} F(Z)\, dZ$ es evaluable mediante el Teorema del residuo

ii) $\lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} F(Z)\, dZ = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx.$

La eficacia del método reside en la escogencia de F y de C(R) para alcanzar i); ii).

LEMA 5.4.1

Sea F una función contínua en un arco circular C(R): $|Z| = R$ si F es analítica en el semiplano superior excepto en $Z = Z_o$. Entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} F(Z)\, dZ = 0$$

DEMOSTRACION

Sea $R > |Z_o|$

tomando C(R): $\{Z \in \mathbb{C} \ / \ -R \leq Z \leq R\}$ y los puntos:

$$\{Z \in \mathbb{C} \,|\, |Z| = \operatorname{Im}(Z) \geq 0\}$$

aquí F es analítica en el semiplano superior, excepto en $Z = Z_o$

Además, para $x \in \mathbb{R}$, $F = F(x)$.

En efecto. (FIGURA 21)

Por Teorema 5.2.1 se tiene

$$\int_{C(R)} f(Z)\, dZ = 2\pi i \operatorname{Res}(F, Z_o), \quad R > |Z_o|$$

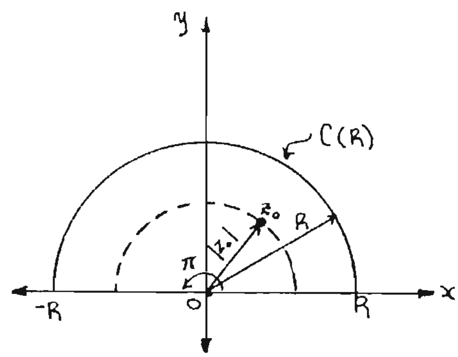


FIGURA 21

Sea $Z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$, así

$$\int_{C(R)} F(Z)\, dZ = \int_0^{\pi} F(Re^{i\theta})\, d(Re^{i\theta}) + \int_{-R}^{R} F(x)\, dx$$

Aunque el valor de cada integral del miembro puede modificarse cuando R crece, la suma permanece constante, luego podemos escribir

$$\left|\int_{}^{\pi} F(Re^{i\theta})d\ (Re^{i\theta})\right| = \left|\int_{0}^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+|Z_o|}\right|$$

la expresión

$$|R^2e^{2i\theta}+Z_o| \geq |\ R^2-Z_o|\ \text{por la propiedad}$$

$$|Z_1 + Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2|;\ \forall Z_1,\ Z_2\ \varepsilon\ \mathbb{C}$$

luego

$$\left|\int_0^{\pi} F(Re^{i\theta})d(Re^{i\theta})\right| \leq \int_0^{\pi}\frac{R}{|R^2e^{2i\theta}+Z_o|}\,d\theta = \frac{\pi R}{R^2-|Z_o|}\ ,\ R > |Z_o|$$

Por consiguiente

$$0 \leq \lim_{R\to\infty}\left|\int^{\pi} F(Re^{i\theta})\ d(Re^{i\theta})\right| \leq \lim_{R\to\infty}\left(\frac{\pi R}{R^2-|Z_o|}\right) = 0$$

o bien

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{\pi} F(Re^{i\theta})d(Re^{i\theta})\right| = 0$$

por tanto

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C(R)} f(Z)\ dZ = 0$$

ILUSTRACION 5.4.1

Verificar por técnica del residuo que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}\ \text{converge al valor de}\ \pi/2$$

Sea $F(Z) = \dfrac{1}{Z^2+4}$; es analítica en el plano complejo finito, -

excepto en $Z = \pm 2i$, además $F(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Si $R > 2$, y $C(R) = \{Z \in \mathbb{C} \;/\; -R \leq Z \leq R\}$; $Im(Z) > 0$, F es analítica, exepto en $Z = 2i$; (de orden dos).

Así

$$a_{-1} = \int_{C(R)} F(Z)\, dZ = 2\pi i \lim_{Z\to 2i} \left\langle (Z-2i) \frac{1}{(Z-2i)(Z+2i)} \right\rangle$$

$$= 2\pi i \lim_{Z\to 2i} \left\langle \frac{1}{Z+2i} \right\rangle$$

$$a_{-1} = \int_{C(R)} F(Z)\, dZ = 2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}$$

luego

$$\int_{C(R)} F(Z)\, dZ = \frac{\pi}{2}\text{ , para cualquier } R > 2.$$

Además por Lema 5.4.1, si $Z = Re^{i\theta}$, se tiene

$$0 \leq \lim_{R\to\infty} \left| \int^{\pi} F(Re^{i\theta})\, d\,(Re^{i\theta}) \right| \leq \lim_{R\to\infty} \left(\frac{\pi R}{R^2-4} \right) = 0$$

de donde

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} F(Re^{i\theta})\, d(Re^{i\theta}) = 0$$

vemos entonces que

$$\lim_{R\to\infty} \int F(Z)\, dZ = \frac{\pi}{2}$$

así

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} F(Re^{i\theta})d(Re^{i\theta}) + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+4}$$

$$\frac{\pi}{2} = 0 + V.P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$$

pues ésta última integral converge, es decir

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(x)\ dx = V.P \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{2}$$

II INTEGRALES DE LA FORMA $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta,\ \text{sen}\,\theta)\ d\theta$

TEOREMA 5.4.1

Sea R $(\cos\theta,\ \text{sen}\,\theta)$ una función racional, entonces la integral de la forma

$$\int_0^{\pi} R(\cos\theta,\ \text{sen}\,\theta)\ d\theta \qquad (5.13)$$

puede expresarse de la forma

$$\int_{|Z|=1} F(Z)\ dZ \quad y\ f(Z) = \frac{1}{iZ}\, R\left(\frac{Z^2+1}{2Z},\quad \frac{Z^2-1}{2iZ}\right)$$

donde $Z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$, Z recorre la circumferencia en sentido antihorario.

PRUEBA

Sea $Z = e^{i\theta}$

considerando

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right) = \frac{Z^2+1}{2Z} \qquad (5.14)$$

y

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(Z - \frac{1}{Z}\right) = \frac{Z^2-1}{2iZ} \qquad (5.15)$$

$$dZ = ie^{i\theta}d\theta, \text{ tenemos} \qquad d\theta = \frac{dZ}{iZ}$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \int_{|Z|=1} F\left(\frac{Z^2+1}{2Z},\ \frac{Z^2-1}{2iZ}\right)\frac{dZ}{iZ} \qquad (5.16)$$

$$\int_0^{\pi} R(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \int_{|Z|=1} f(Z)\,dZ;$$ $Z = 0$ es un polo -- simple

ILUSTRACION 5.4.2

Calcular $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$, $a > 1$

Sea $Z = e^{i\theta}$:, $dZ = ie^{i\theta}d\theta$, $d\theta = \frac{dZ}{iZ}$, $\cos\theta = \frac{Z^2+1}{2Z}$

luego

$$I = \int_C \frac{1}{a + \frac{Z^2+1}{2Z}}\frac{dZ}{iZ} = \int_C \frac{dZ}{\left(a + \frac{Z^2+1}{2Z}\right)iZ} = \frac{1}{1}\int \frac{2dZ}{Z^2+2aZ+1} \qquad (5.17)$$

El denominador $Z^2 + 2aZ + 1$ se anula en $Z = -a \pm \sqrt{a^2-1}$

donde $Z_1 = -a - \sqrt{a^2-1}$, $Z_2 = -a + \sqrt{a^2-1}$ son las raices así como $a > 1$ entonces $Z_1 < -1$ y por consiguiente es exterior a - $|Z| = 1$ como $Z_1 . Z_2 = 1$ entonces Z_2 es interior a la circunfe-- rencia. En virtud del Teorema 5.2.2, se tiene que el resudio - en $Z = Z_2$ es el valor

$$a_{-1} = \frac{2}{2Z_2+2a} \qquad \frac{1}{Z_2+a}$$

luego

$$a_{-1} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-1}}, \text{ sustituyendo en (5.17) se obtiene}$$

$$I = \frac{1}{i} \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

por tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

III INTEGRALES ACOTADAS A LO LARGO DE C_R

Se presenta a continuación dos desigualdades que resultan de gran utilidad para acotar la integral a lo largo de C_R

LEMA 5.4.2

Sea f una función racional, tal que el grado de su denominador sea d-unidades mayor que el grado de su numerador. Entonces existen constantes M y R_o tales que

$$|f(Z)| \leq \frac{M}{R^d}, \text{ para } |Z| = R \geq R_o$$

DEMOSTRACION

Escribamos f(Z) de la forma

$$f(Z) = \frac{Z^n}{Z^m} \frac{(a_n + a_{n-1}Z^{-1} + a_{n-2}Z^{n-2} + \ldots + a_1 Z^{1-n} + a_o Z^{-n})}{(b_n + b_{m-1}Z^{-1} + b_{m-2}Z^{m-2} + \ldots + b_1 Z^{1-m} + b_o Z^{-m})}$$

donde $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$

Así

$$\lim_{|Z|\to\infty} \frac{|a_n + a_{n-1}Z^{-1} + \ldots + a_o Z^{-n}|}{|b_m + b_{m-1}Z^{-1} + \ldots + b_o Z^{-m}|} \leq \frac{|a_n|}{|b_m|} \tag{5.18}$$

Se observa facilmente que (5.18) es acotada para valores grandez de $|Z|$ así que el lema 5.4.2 queda mostrado, tomando la - constante $M > \frac{|a_n|}{|b_m|}$ así

$$|f(Z)| \leq \frac{|Z|^n}{|Z|^m} \cdot M$$

por consiguiente

$$|f(Z)| \leq \frac{M}{R^d} \quad , \quad \text{con } |Z| = R \geq R_o$$

LEMA 5.4.3 (Lema de Jordan).

Si C_R es el contorno $Z = Re^{i\theta}$

si F es contínua en C_R: $|Z| = R$ tal que $\lim_{R\to\infty} \max_{Z\varepsilon C_R} |F(Z)| = 0$

y $|F(Z)| \leq \frac{M}{R^d}$, $d > 0$, M son constantes entonces (5.19)

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\lambda Z} F(Z)\, dZ = 0, \ \lambda > 0$$

PRUEBA

Sea $Z = Re^{i\theta}$, entonces

$$\int_{C_R} e^{i\lambda Z} F(Z)\, dZ = \int_0^{\pi} e^{i\lambda Re^{i\theta}} F(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$$

entonces

$$\left|\int_0^{\pi} e^{i\lambda Re^{i\theta}} F(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta} d\theta\right| \leq \int_0^{\pi} \left|e^{i\lambda Re^{i\theta}} F(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\right| d\theta \qquad (5.20)$$

pero

$$\left|e^{i\lambda Re^{i\theta}} F(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\right| = \left|e^{i\lambda Re^{i\theta}}\right| . \left|F(Re^{i\theta})\right| \left|e^{i\theta}\right| \left|R\right|$$

$$= \left|e^{i\lambda R(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}\right| . \left|F(Re^{i\theta})\right| R$$

$$= \left|e^{i\lambda R \operatorname{Cos}\theta - R \operatorname{sen}\theta}\right| \left|F(Re^{i\theta})\right| R$$

$$= \left|e^{i\lambda R \cos\theta}\, e^{- R \operatorname{sen}\theta}\right| . \left|F(Re^{i\theta})\right| R$$

$$= \left|e^{i\lambda R \cos\theta}\right| \left|e^{-\lambda R \operatorname{sen}\theta}\right| \left|F(Re^{i\theta})\right| R$$

$$= e^{-\lambda R \operatorname{sen}\theta} \left|e^{i\lambda R \cos\theta}\right| \left|F(Re^{i\theta})\right| R$$

Si $U = \lambda R \cos\theta$ entonces $\left|e^{i\lambda R \cos\theta}\right| = \sqrt{\cos^2(U) + \operatorname{sen}^2(U)} = 1$

queda entonces (5.20)

$$\int_0^{\pi} \left|e^{i\lambda Re^{i\theta}} F(Re^{\theta})\, iRe^{i\theta}\right| d\theta = \int_0^{\pi} e^{-\lambda R \operatorname{sen}\theta} \left|F(Re^{i\theta})\right| R d\theta \qquad (5.21)$$

Luego por Lema 5.4.2 se tien que $|F(Re^{i\theta}| \leq \frac{M}{R^d}$, así (5.21) queda.

$$\int_0^{\pi} \left|e^{i\lambda Re^{i\theta}} F(Re^{i\theta})\ iRe^{i\theta}\right| d\theta \leq \frac{M}{R^{d-1}} \int_0^{\pi} e^{- R\operatorname{sen}\theta} d = \frac{2M}{R^{d-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

(5.22)

Se observa entonces, según gráfica del Sen θ , para

$$\theta \in [0, \pi/2], \quad \text{que}$$

Sen $\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, luego, la última integral $\frac{2M}{R^{d-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \operatorname{sen} \theta} d\theta$ queda

$$\frac{2M}{R^{d-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \operatorname{sen} \theta} d\theta \leq \frac{2M}{R^{d-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R (\theta/\pi)} d\theta = \frac{2M}{R^{d-1}} \left[1 - \frac{1}{e^{\lambda R}}\right]$$

si $R \to \infty$ entonces $\frac{2M}{R^{d-1}} \left(1 - \frac{1}{e^{\lambda \pi}}\right) \to 0$

Por tanto

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} e^{i\lambda R Z} F(Z)\, dZ = 0 \quad ; \lambda > 0$$

ILUSTRACION 5.4.3

Evaluar la integral $F = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\ x)}{x^2 + a^2}$ $a > 0,\ \lambda > 0$

SOLUCION

Sea la función

$$f(Z) = \frac{e^{i\lambda Z}}{Z^2 + a^2}$$

Considerando el segmento AB: $-R \leq x \leq R$ De la Figura del eje real y el arco circular C_R de radio R.

Por Teorema 5.2.1 se tiene que

$$\left[\int_{AB} + \int_{C_R}\right] \frac{e^{i\lambda Z} dZ}{Z^2 + a^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{Z=ai} \left(\frac{e^{i\lambda Z}}{Z^2 + a^2}\right) = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{a}$$

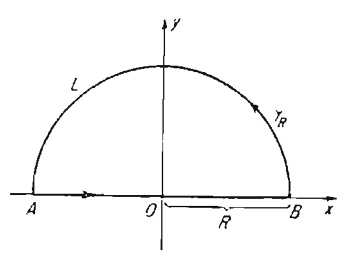


Figura 22

con la condición que $R > a$. Pero si $Z \varepsilon C_R$ entonces

Sea $Z = Re^{i\theta}$

$$\left|\frac{1}{R^2 e^{2i\theta} + a^2}\right| \qquad \frac{1}{|R^2 e^{2i\theta} + a^2|} \leq \frac{1}{R^2 - a^2}$$

así.

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^2 - a^2} = 0$$

y aqui la integral a lo largo de C_R se anula, cuando $R \to \infty$

se sigue entonces que

$$\lim_{R\to\infty} \left[\int_{A_B} \frac{e^{i\lambda Z}}{Z^2 + a^2} dZ + \int_{C_R} \frac{e^{i\lambda Z}}{Z + a} dZ\right] = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{a}$$

así por Definición 5.4.1 relación (5.11), se sigue que.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{a}, \tag{5.23}$$

tomando la parte real en (5.23) y usando el hecho de que cos (λx) es una función uniforme, obtenemos, la integral buscada

$$F = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x^2 + a^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{2a}, \quad (a > 0;\ \lambda > 0)$$

ILUSTRACION 5.4.4

Hallar el valor de la integral $F = \int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx$. $a \varepsilon (0,1)$

SOLUCION

En este caso, consideraremos

$$f(Z) = \frac{e^{aZ}}{1+e^{Z}}$$

y el contorno C_R mostrado en la figura 23 consistiendo en los segmentos de línea C_{R_i} ,$(i = 1,\ldots,4)$

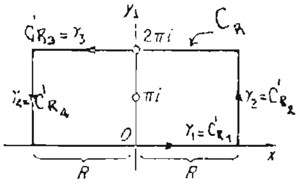


FIGURA 23

Por teorema 5.2.1

$$\sum_{k=1}^{4} \int_{C'_{R_k}} f(Z)\, dZ = 2\pi i \operatorname*{Res}_{Z=\pi i} \left[\frac{e^{aZ}}{1+e^{Z}}\right] = -\, 2\pi i e^{a\pi i} \tag{5.24}$$

así

$$\int_{C'_{R_1}} f(Z)\, dZ = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\, dx$$

$$\int_{C'_{R_3}} f(Z)\, dZ = \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\, dx$$

$$= e^{2a\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\, dx$$

Para $Z \in C'_{R_2}$ tenemos.

$$|f(Z)| = \left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| = \frac{|e^{aR}.e^{aiy}|}{|1+e^{R+iy}|} = \frac{|e^{aR}|\,|e^{aiy}|}{|1+e^{R}.e^{iy}|} \leq \frac{e^{aR}}{e^{R}-1}$$

Transformando la expresión $\dfrac{e^{aR}}{e^{R}-1}$ o la forma siguiente:

$$\frac{e^{aR}}{e^{R}-1} = \frac{1}{e^{-aR}(e^{R}-1)} = \frac{1}{e^{R(1-a)}-e^{-aR}} = \frac{1}{e^{R(1-a)}\left[1-e^{-R}\right]}$$

de donde

$$\frac{e^{aR}}{e^{R}-1} = \frac{e^{R(a-1)}}{1-e^{-R}}$$

luego

$$|f(Z)| = \left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \leq \frac{e^{R(a-1)}}{1-e^{-R}} \quad ; \; Z \in C_{R_2}$$

Para $Z \in C'_{R_4}$

$$|f(Z)| = \left|\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\right| \leq \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}$$

así cuando $R \to \infty$ la integral de lo largo de C'_{R_2} y C'_{R_4} se anu-- lan ya que $a \in (0,1)$.

Se sigue entonces que

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{k-1}^{4} \int_{C'_k} f(Z)\, dZ = \int_{C'_1} f(Z)\, dZ + \int_{C'_3} f(Z)\, dZ$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\, dx + e^{2a\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\, dx$$

$$= \int_{-R}^{R} (1-e^{2a\pi i}) \frac{e^{ax}}{1-e^{x}}\, dx = (1-e^{2a\pi i}) . \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\, dx =$$

luego por la relacion (5.14)

$$(1-e^{2a\pi i}) \int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\, dx = -2\pi i e^{a\pi i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}} = \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1-e^{2a\pi i}} \qquad (5.25)$$

finalmente, dividiendo (5.15) por $2ie^{a\pi i}$ y cambiando signo obte nemos

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}} = \frac{\pi}{\text{sen }(a\pi)} , \quad (0 < a < 1).$$

CAPITULO VI

TRANSFORMACION CONFORME

6.0 TRANSFORMACION CONFORME

6.1 FUNDAMENTOS DEL MAPEO CONFORME

6.1.1 A- Puntos y Ceros

DEFINICION 6.1.1

Sea f una función compleja de variable compleja entonces un A-punto de la función f, significa la raíz de la ecuación $f(Z) = A$, donde A es un número complejo arbitrario finito. Así si $Z_0 \varepsilon G$, G es un dominio, es un A-punto de f, entonces $f(Z_0) = A$, y en consecuencia, la expansión de la serie de Laurent de f en algún vecindario de Z_0, es de la forma.

$$f(Z) = f(Z_0) + f'(Z_0)(Z - Z_0) + f''(Z_0)^2 + \ldots$$

o bien

$$f(Z) - A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(Z_0)}{k!} (Z - Z_0)^k. \qquad (6.1)$$

si f no es constante y Z_0 G, arbitrario entonces en (6.1) los coeficientes de $f'(Z_0)$, $f\ (Z_0)$ no son todos ceros. Sea $(Z-Z_0)^k$, la menor potencia de $(Z-Z_0)$ con coeficiente no cero entonces -

en (6.1) queda

$$f(Z) - A = (Z-Z_o)^k \left[\frac{f^{(k)}(Z_o)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(Z_o)}{(k+1)!} (Z-Z_o)+\ldots \right] \tag{6.2}$$

donde $f^{(k)}(Z_o) \neq 0$. El entero $k \geq 1$ es llamado el orden del A-punto Z_o y Z_o es llamado un A-punto simple si $k = 1$ y A-punto múltiple si $k > 1$. Se sigue de (6.2) y de ésta definición que $f(Z_o) = A$, $f'(Z_o) \neq 0$ si Z_o es un A-punto simple, mientras que $f(Z_o) = A$, $f'(Z_o) = 0$, ..., $f^{(k-1)}(Z_o) = 0$, $f^{(k)}(Z_o) \neq 0$ si Z_o es un A-punto de orden k. (6.3)

Desde aquí en adelante, en la determinación de el número A-puntos en un subconjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ compacto, contaremos cada A-punto un número de veces igual a el orden.

TEOREMA 6.1.1

Sea f analítica en Z_o, entonces f tiene un A-punto de orden k en Z_o si y solamente si la función

$$\Psi(Z) = \frac{f(Z) - A}{(Z-Z_o)^k} \tag{6.4}$$

es analítica en Z_o y

$$\Psi(Z_o) = \lim_{Z \to Z_o} \Psi(Z) \neq 0$$

PRUEBA

Sea Z_o un A-punto de orden k, entonces de acuerdo (6.2) y -- (6.4), $\Psi(Z)$ tiene expansión

$$\Psi(Z) = \frac{f^{(k)}(Z_o)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(Z_o)}{(k+1)!} (Z-Z_o) + \ldots \tag{6.5}$$

en un entorno a Z_0, donde

$$\lim_{Z \to Z_0} \Psi(Z) = \frac{f^{(k)}(Z_0)}{k!} \neq 0$$

conversamente.

Sea $\Psi(Z)$ analítica en Z_0, y como $\lim\limits_{Z \to Z_0} \Psi(Z) \neq 0$, se tiene en-- tonces que en (6.5)

$$\Psi(Z) = a_k + a_{K+1} (Z-Z_0) + \ldots +$$

luego sustituyendo en (6.4) se obtiene

$$a_k + a_{k+1} (Z-Z_0) + \ldots = \frac{f(Z) - Z}{(Z-Z_0)^k}$$

$$f(Z) - A = (Z-Z_0)^k \left[a_k + a_{k+1} (Z-Z_0) + \ldots\right]$$

$$f(Z) = A + a_k (Z-Z_0)^k + a_{k+1}(Z-Z_0)^{k+1} + \ldots \tag{6.6}$$

luego por definición 6.1.1 f, tiene en A-punto de orden k en - $Z = Z_0$. Todo lo dicho acerca de A-punto implica igualmente el caso especial donde $A = 0$ y lo llamaremos puntos - ceros y son llamados ceros de f en $Z = Z_0$.

TEOREMA 6.1.2

Si Z_0 es un punto regular de g y un A-punto o polo de f donde $A \neq 0$, entonces Z_0 es un polo simple de la función

$$g(Z) \cdot \frac{d}{dZ} \ln\left[f(Z) - A\right] = g(Z) \frac{f'(Z)}{f(Z)-A} \tag{6.7}$$

De hecho, la expansión de Laurent de (6.7) tiene la forma

$$\frac{\alpha g(Z_0)}{Z-Z_0} \tag{6.8}$$

en todos los puntos de orden α de f' la forma

$$-\frac{\beta g(Z_o)}{Z-Z_o} + \ldots$$

en todo polo de orden β de f

PRUEBA

Sea Z_o un A-punto de orden α de f. Entonces en un vecindario de Z_o tendremos por teorema 6.1.1 relación (6.6) que

$$g(Z) = g(Z_o) + \ldots$$

y

$$f(Z) - A = a(Z-Z_o)^{\alpha} + \ldots$$

$$f'(Z) = a\alpha(Z-Z_o)^{\alpha-1} + \ldots$$

así en la relación (6.7) denotemos la función por F(Z) y encontramos que

$$F(Z_o) = \left[g(Z_o) + \ldots\right]\left[\frac{a\alpha(Z-Z_o)^{\alpha} + \ldots}{a(Z-Z_o)^{\alpha} + \ldots}\right]$$

$$F(Z_o) = \left[g(Z_o) + \ldots\right]\left(\frac{\alpha}{(Z-Z_o)}\right)\left(\frac{1 + \ldots}{1 + \ldots}\right)$$

$F(Z_o) = \frac{\alpha}{(Z-Z_o)}\left[g(Z_o) + \ldots\right]\frac{1 + \ldots}{1 + \ldots} = \frac{\alpha g(Z_o)}{(Z-Z_o)} + \ldots$ Como se esperaba ser de la forma (6.8)

Supongamos que Z_o es un polo de orden β de f. Entonces Z_o también un polo de orden β de $f(Z) - A$ en algún vecindario reducido de Z_o, en efecto:

$$f(Z) - A = b(Z-Z_o)^{-\beta} + \ldots$$

$$f'(Z) = -\beta\, b(Z-Z_o)^{-\beta-1} - \ldots$$

En particular si Z_o es un polo de orden $\beta + 1$ de $f'(Z)$, se sigue que

$$f(Z_o) = \left[g(Z_o) + \ldots\right] \frac{-\beta b(Z-Z_o)^{-(\beta+1)} - \ldots}{b(Z-Z_o)^{-\beta}}$$

de donde

$$F(Z_o) = -\frac{\beta g(Z_o)}{Z-Z_o}$$

y se completa la prueba.

TEOREMA 6.1.3

Sea L una curva de Jordan, cerrada, supongamos que g es función analítica sobre $\overline{I(L)}$, mientras f es una función analítica sobre $\overline{I(L)}$ excepto para los polos en I(L) en $b_1, \ldots, b_n$. Además supongamos que f tiene los A-puntos; $a_1, \ldots, a_m$ en I(L), pero ninguno sobre L. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L g(Z) \cdot \frac{f'(Z)}{f(Z)-A}\, dZ = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k g(ak) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k g(bk) \qquad (6.8)$$

donde α_k es el orden de a_k y β_k es el orden de b_k

PRUEBA

Sea $\Sigma\alpha_k\ g(a_k)$

la suma de los valores de g en los A-puntos, $a_1, \ldots, a_k$ de f, donde cada valor es repetido un número de veces igual a el orden de los A-puntos.

Si suponemos que cada uno de los puntos $a_1, \ldots, a_k$ de f, son -

calculados un número de veces igual a este orden, además

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k g(a_k)$$

puede ser considerada como la suma de g en los puntos A de f.

Similarmente la suma

$\sum_{k=1}^{n} \beta_k g(b\ )$, luego, por Teorema 6.1.2, se sigue (6.8)

así los valores de g a los polos de f si cada polo de f es calculado un número de veces igual de este orden.

COROLARIO 6.1.3

Sea L una curva de Jordan, sea g una función analítica sobre - I(L), mientras f es analítica sobre $\overline{I(L)}$ exepto para los polos en I(L) y no tiene los puntos A: a , ..., a sobre L. Entonces la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L g(Z) \ \frac{f'(Z)}{f(Z) - A} \, dZ \tag{6.9}$$

es igual a la suma de los valores de g en los puntos A de f menos la suma de los valores de g en los polos de f.

EJEMPLO 6.1

Si g(Z) = Z entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{Zf'(Z)}{f(Z)-A} \, dZ = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k a_k - \sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k$$

así la integral (6.2) es justamente la suma de los puntos A de f interioes a L menos la suma de los polos de f interiores a L.

Supongamos ahora que f tiene Z ceros y P polos interiores a L, donde cada cero y polos calculados un número de veces igual al orden de cada polo entonces si A = 0 y g(Z) = 1, en la relación (6.1) puede verse que

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(Z)}{f(Z)} = Z - P \tag{6.10}$$

es decir si $W = f(Z)$ entonces

$$dW = f'(Z)\,dZ \text{ luego}$$

$$\frac{dW}{f(Z)} = \frac{f'(Z)dZ}{f(Z)}$$

$$\frac{dW}{W} = \frac{f'(Z)dZ}{f(Z)}$$

luego (6.10) puede escribirse

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dW}{W} = \int_L \frac{f'(Z)}{f(Z)}\,dZ = Z - P \tag{6.11}$$

DEFINICION 6.1.2

Si f tiene Z ceros y P polos interiores a L entonces llamaremos Residuo Logaritmico de f en relación al contorno L a la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d}{dZ}\ln\left[f(Z)\right]dZ = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(Z)}{f(Z)}\,dZ = Z - P \tag{6.12}$$

OBSERVACION 6.1

El residuo logaritmico de f con relación al camino L tiene una interpretación geométrica.

Sea $Z_o \in L$ un punto inicial y final de la trayectoria de integración, si hacemos la trayectoria en sentido contrario a las manecilla del reloj en L. Entonces ln $[f(Z)]$ varia continuamente y en general regresa a Z_o con diferentes valores al original - valor en Z_o en efecto,

dado que

$$\ln [f(Z)] = \ln |f(Z)| + i \text{ Arg } f(Z), \text{ entonces,}$$

el cambio en ln f(Z) es debido al cambio en Arg f(Z). Haciendo θ_o el valor original del valor de Arg $f(Z_o)$ y θ_1 el valor - en la vuelta a travéz de L, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d}{dZ} \ln [f(Z)] dZ = \frac{1}{2\pi i} [\ln |f(Z_o)| + i\theta_1] - [\ln |f(Z_o)| + i\theta_o]$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\theta_1 - \theta_o] \qquad (6.13)$$

comparando (6.12) con (613) se obtiene

$$Z - P = \frac{\theta_1 - \theta_o}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \Delta_L \text{ Arg } f(Z)$$

donde Δ_L Arg f(Z) indica el cambio en Arg f(Z) cuando Z reco-- rre la curva L

TEOREMA 6.1.4 (Argumento principal)

Sea L una curva de Jordan en un dominio simple conexo si f, es analítica, en $\overline{I(L)}$ exepto en los polos en I(L) y no tiene A-puntos; $a_1, \ldots, a_m$ sobre L entonces el número de puntos A de f - interiores en L menos el número de polos de f en L es igual al número de vueltas alrededor de puntos W = A, por medio de - W = f(Z) como los puntos Z reccorren la curva L en dirección - positiva

PRUEBA

Si a es un cero de orden k de f entonces,

$f(Z) = (Z-a)^k f_o(Z)$; con f_o analítica en $N(\varepsilon)$ de a; $f_o(Z) \neq 0$

así:

$$f'(Z) = k(Z-a)^{k-1} f_o(Z) + (Z-a)^k f_o'(Z).$$

luego

$$\frac{f'(Z)}{f(Z)} = \frac{k(Z-a)^{k-1} f_o(Z)}{(Z-a)^k f_o(Z)} + \frac{(Z-a)^k f_o'(Z)}{(Z-a)^k f_o(Z)}$$

$$\frac{f'(Z)}{f(Z)} = \frac{k}{Z-a} + \frac{f_o'(Z)}{f_o(Z)}$$

dado que $\frac{f'}{f_o}$, es analítica en $N(\varepsilon)$ de a entonces $\frac{f'}{f}$ posee un - polo de orden 1 con residuo k en Z = a, es decir, si a es un - polo de orden h de f entonces

$f(Z) = (Z-a)^{-h} f_o(Z)$, con $f_o(Z) \neq 0$ y analítica en $N(\ )$ de a - así

$\frac{f'(Z)}{f(Z)} = \frac{-h}{Z-a} + \frac{f_o'(Z)}{f_o(Z)}$, tiene un polo de orden 1 y residuos - (-h) en Z = a,

luego por el teorema del residuo

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(Z)}{f(Z)}\, dZ = Z - P \qquad (6.14)$$

donde Z es la suma de todos los Ceros de orden k de f y P es la suma de todos los polos de orden h de f, respecto a L.

TEOREMA 6.1.5 (Teorema de Rouché's)

Sea L una curva de Jordan Cerrada, sea f y g dos funciones analíticas sobre $\overline{I(L)}$, supongamos que

$$|f(Z)| > |g(Z)| \tag{6.15}$$

Para todo punto de L. Entonces f, f + g tienen el mismo número de ceros en el interior de L, $\forall Z \varepsilon I)L)$.

DEMOSTRACION

Como $|g(Z)| < |f(Z)|$ en L, entonces ni f, f + g pueden ser cero en un punto de L.

Sea Z el número de ceros de f + g, $\forall Z \varepsilon I(L)$ y sea Q el número de ceros de f, $\forall Z \varepsilon I(L)$, entonces podemos utilizar teorema - 6.1 para escribir,

$$Z - Q = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(Z) + g'(Z)}{f(Z) + G(Z)}\, dZ - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(Z)}{f(Z)}\, dZ$$

Haciendo la diferencia

$$Z - Q = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(Z)\left[f'(Z) + g(Z)\right] - f'(Z)\left[f(Z) + g(Z)\right]}{f(Z)\left[f(Z) + g(Z)\right]}\, dZ$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(Z)g'(Z) - f'(Z)g(Z)}{\left[f(Z)\right]^2 + f(Z)g(Z)}\, dZ$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(Z)g'(Z) - f'(Z)g(Z)}{|f(Z)|^2\left[1 + \frac{g(Z)}{f(Z)}\right]}\, dZ$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(Z)g'(Z) - f'(Z)g(Z)}{[f(Z)]^2} \frac{1}{1 + \frac{g(Z)}{f(Z)}} dZ$$

luego se obtiene

$$Z - Q = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{g(Z)}{f(Z)}\right]' . \frac{1}{1 + \frac{g(Z)}{f(Z)}} - dZ$$

Sea $F(Z) = 1 + \frac{g(Z)}{f(Z)}$; $f'(Z) \neq 0$ en L (6.16)

así

$$Z - Q = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F'(Z)}{F(Z)} dZ$$

luego tenemos por hipótesis que $|f(Z)| > |g(Z)|$ entonces

$$\frac{|f(Z)|}{|g(Z)|} > 1 \text{ es decir } \frac{|g(Z)|}{|f(Z)|} < 1$$

Por consiguiente en (6.16) tendremos

$$|F(Z) - 1| = \frac{|g(Z)|}{|f(Z)|} < 1 \; ; \quad W - 1 = \frac{|g(Z)|}{|f(Z)|} < 1$$

Esto significa que la curva cerrada descrita por

$$W = F(Z)$$

cuando Z recorre L, no puede rodear el punto W = 0, luego

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F'(Z)}{F(Z)} = 0 \quad y \quad Z = Q$$

por tanto

f + g tienen el mismo número de ceros en el interior - de L.

TEOREMA 6.1.6

Sea $f;\ D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en el punto -
$Z_o \rightsquigarrow f(Z_o) = W_o$

$Z = Z_o$, donde este tiene un cero simple W_o. Entonces existe un vecindario $N(Z_o)$ (en el plano Z) un correspondiente vecindario $N(W_o)$ (en el plano W) tal que todo punto en $N(W_o)$ tiene imagen inversa en (Z_o)

PRUEBA

Sea

$$\gamma : |Z - Z_o| = \rho$$

un círculo tal que f no tenga un W_o cero en $\overline{I(\gamma)}$, excepto en - $Z = Z_o$, entonces en tal círculo debe existir un vecindario - $N(Z_o)$; puesto que de otra manera Z_o podría ser un punto límite de $W_o$así $f'(Z_o) \neq 0$, que es contrario a la hipotesis de que Z_o es un cero simple de W_o, por tanto existe $N(Z_o)$ en el plano Z.

Escogiendo el vecindario $N(Z_o)$ de $I(\gamma)$.

Sea

$$\Gamma = f(\gamma)$$

la imagen de γ bajo el mapeo $W = f$, sea δ la distancia entre - W_o y Γ, así $N(W_o)$ es el disco

$$|W - W_o| < \delta.$$

Entonces si W es un punto arbitrario de $N(W_o)$, se tiene que

$$|f(Z) - W_o| \geq \delta > |W - W_o|, \quad \forall Z \in \gamma$$

luego, por teorema de Rauché's se tiene que

$$f(Z) - W_o \quad y \quad f(Z) - W = f(Z) - W_o + (W_o - W)$$

tienen el mismo número de ceros en el interior de γ, pero - $f(Z) - W_o$ tiene solamente un cero en el interior de γ. por --- construcción, identicamente.

$$f(Z) - W$$

Por tanto, W tiene una imagen inversa en $N(Z_o)$ (6.17)

COROLARIO 6.1.4

Sea f una función analítica en $Z = Z_o$, donde f tiene un cero - simple W_o. Entonces la función inversa $f^{-1}(W)$ existe y es va-- luada en un vecindario de el punto $W = W_o$.

PRUEBA

Por aplicación del Teorema 6.1.6 relación (6.17)

TEOREMA 6.1.7

Sea f una función analítica en el punto $Z = Z_o$ donde f tiene - W_o ceros de orden $k \geq 1$. Entonces existe un vecindario $N(Z_o)$ y un correspondiente vecindario $N(W_o)$ tal que todo punto en - $N(W_o)$ tiene a menos 1 y a lo sumo k imágenes inversas diferentes en $N(Z_o)$

PRUEBA

Sean γ, $N(Z_o)$, Γ y $N(W_o)$ los mismos como en la prueba del Teorema (6.1.6). Entonces puesto que $f(Z) - W_0$ tiene k ceros interiores en γ es decir, $f^{(k)}(Z_0) \neq 0$, lo mismo es cierto para - $f(Z) - W$. Sin embargo f podría tener multiples W - ceros en - puntos de $N(Z_0)$ o bien en $Z = Z_0$ así podemos solamente asegurar que todo $W \in N(W_0)$ tien al menos 1 pero no más que k distintas imágenes inversa en $N(Z_0)$ (6.18)

COROLARIO 6.1.4.1

Sea f una función analítica en $Z = Z_0$, f tiene W_0 cero de orden $k \geq 1$. Entonces existe un vecindario $N(Z_0)$ y un correspondiente vecindario $N(W_0)$ tal que todo punto en (W_0) excepto W_0 tiene precisamente k imágenes inversas distintas en $N(Z_0)$.

PRUEBA

Sea γ muy pequeño $(\rho \to 0)$ y en la prueba del Teorema (6.1.7), relación (6.18) $f(Z) - W_0$ y $f'(Z)$ no se anulen, en ningún punto interior a γ además del punto $Z = Z_0$.

COROLARIO 6.1.4.2

Sea f una función analítica en $Z = Z_0$, f tiene W_0 cero de orden $k \geq 1$. Entonces la función inversa $f^{-1}(W)$ existe y es k-valuada en un vecindario del punto $W = W_0$.

Por la relación (6.11) Teorema 6.1.4. Se prueba.

TEOREMA 6.1.8

Si f no es constante y es analítica en un dominio $\mathbb{D}$, entonces $f(\mathbb{D})$ es también un dominio.

PRUEBA

i) $f(\mathbb{D}) \neq \phi$ ya que $f(\mathbb{D})$ es conexo.

ii) A probar que $f(\mathbb{D})$ es abierto.

Sean W_0 un punto arbitrario de $f(\mathbb{D})$, $Z_0 \in \mathbb{D}$ imágen inversa de W_0 así Z_0 es W_0 cero de orden k de f, $k \in \mathbb{Z}^+$, luego por teorema 6.1.4 existe un vecindario $N(W_0)$, y $N(Z_0) \subset \mathbb{D}$ tal que todo punto en $N(W_0)$ es la imagen de un punto en $N(Z_0)$, pero esto implica que $N(W_0) \subset f[N(Z_0)] \subset f(\mathbb{D})$ y en consecuencia W_0 es un punto interior de $f(\mathbb{D})$. Así $f(\mathbb{D})$ consiste enteramente de puntos interiores.

LEMA 6.1.1 (Lema de Schwarz's

Sea f una función analítica en el disco $\mathbb{K}: |Z| < R$, $f(0) = 0$, supongamos que

$$|f(Z)| \leq M < \infty, \; \forall Z \in \mathbb{K}. \text{ Entonces}$$

$$|f(Z)| \leq \frac{M}{R} |Z| \;, \quad \forall Z \in \mathbb{K}, \text{ y además} \tag{6.19}$$

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R} \tag{6.20}$$

La igualdad en (6.19) es verificada si y solamente si

$$f(Z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha} Z, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

PRUEBA

Por expansión de la serie de Taylor

$$f(Z) = f'(0)Z + \frac{f''(0)}{2!} Z^2 + \dots \;; \quad (Z \in \mathbb{K})$$

pero $f(0) = 0$ (por hipótesis), es claro que la función

$$\Psi(Z) = \frac{f(Z)}{Z} \quad f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} Z^2 + \ldots$$

es analítica sobre $|Z| < 1$, tomando $f'(0)$ en $Z = 0$.

Sea γ_ρ el círculo $|Z| =$, donde $0 < \rho > R$. Dada la inecuación

$$|\Psi(Z)| = \frac{|f(Z)|}{|Z|} \leq \frac{M}{\rho}, \quad \forall Z \in \gamma_\rho$$

por teorema del módulo máximo, resulta

$$|\Psi(Z)| \leq \frac{M}{\rho}, \qquad \forall Z \in I(\gamma_\rho)$$

si $\rho \longrightarrow R$ se tiene que

$$|\Psi(Z)| \leq \frac{M}{R}, \qquad \forall Z \in \mathbb{K} \tag{6.21}$$

Si $Z \neq 0$ y sustituimos por $\Psi(Z)$ en (6.21), obtenemos

$$|f(Z)| \leq \frac{M}{R} |Z|.$$

si $Z = 0$ entonces $\Psi(0) = f'(0)$ y en consecuencia (6.21) adquiere la forma

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}.$$

Además, la igualdad es posible de acuerdo al teorema del módulo máximo, si $\Psi(Z)$ es constante sobre $\mathbb{K}$, debido a esto es poble representar a $\Psi(Z)$ de la manera

$$\Psi(Z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha}, \quad \text{o bien}$$

$$f(Z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha}.$$

6.2 PRINCIPIOS GENERALES DEL MAPEO CONFORME

6.2.1 INTERPRETACION GEOMETRICA de Arg $f'(Z)$, $|f(Z)|$ y MAPEO CONFORME.

Sea γ un camino con ecuaciones $Z = \lambda(t)$, $t \in [a,b]$ y supongamos $\lambda(t)$ diferenciable en $t_o \in [a,b]$. Sea t una sucesión arbitraria de puntos en $[a,b]$, convergente a t_o, $(t_n \neq t_o)$; Consideremos el cociente de diferencias

$$\alpha_n = \frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_o)}{t_n - t_o} \tag{6.22}$$

entonces $\alpha_n \longrightarrow \alpha_o = \lambda'(t_o)$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

DEFINICION 6.2.1.1

La curva γ se dice que es tangente en el punto $Z_o = \lambda(t_o)$ si el límite

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg} \alpha_n \tag{6.23}$$

existe. Es decir, si para $\varepsilon > 0$ existe un entero $N(\varepsilon) > 0$ y una sucesión $\{\theta_n\}$ donde cada θ_n es valuada en arg α_n tal que $|\theta_n - \theta| < \varepsilon$, $\forall n$, $n > N(\varepsilon)$.

OBSERVACION

θ se define solamente dentro de un multiplo de 2π y el ángulo θ siempre será medido desde el eje real positivo a la tangente τ.

Geométricamente la tangente a γ en Z_o es representada por el rayo τ emanado desde Z_o cual forma el ángulo θ, si $\lambda'(t_o) \neq 0$, entonces γ tiene una tangente en Z_o, dado que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg} \alpha_n = \theta = \operatorname{Arg} \alpha_o = \lambda'(t_o)$$

TEOREMA 6.2.1.1

Sea D un dominio, f una función contínua, de una variable compleja, definida sobre D. Supongamos que f tiene derivada -

$$f' \neq 0 \text{ en } Z = Z_o \text{ y}$$

sea γ una curva el cual pasa atravéz de Z_o y tiene una tangente τ en $Z = Z_o$. Entonces $W = f$ mapea γ dentro una curva L en - el plano W el cual pasa atravéz de los puntos $W_o = f(Z_o)$ y tiene una tangente T en W_o. Además la inclinación de T sobrepasa la inclinación de τ por el ángulo Arg $f'(Z_o)$.

DEMOSTRACION

Sea $Z = \lambda(t)$, $t \varepsilon [a,b]$, la ecuación de γ y sea $Z_o = \lambda(t_o)$ por hipótesis

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \arg \alpha_n \text{ existe, donde } \alpha_n \text{ es dado por (6.22)}$$

Así

$$W = f[\lambda(t)] = \eta(t) \qquad t \varepsilon [a,b] \tag{6.24}$$

donde $W_o = f(Z_o) = f[\lambda(t_o)] = \eta(t_o)$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión de puntos en $[a,b]$ convergente a t_o y sea

$$Rn = \frac{\eta(t_{\ }) - \eta(t_o)}{t_n - t_o} \tag{6.25}$$

así, la tangente a L en W_o tiene la inclinación

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg} R_n \tag{6.26}$$

Previniendo la existencia del límite podemos expresar (6.25) de la forma.

$$Rn = \frac{\eta(t_n) - \eta(t_o)}{t_n - t_o} \cdot \frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_o)}{\lambda(t_n) - \lambda(t_o)}$$

$$Rn = \frac{\eta(t_n) - \eta(t_o)}{\lambda(t_n) - \lambda(t_o)} \cdot \frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_o)}{t_n - t_o} ,$$

Para $\lambda(t_n) \neq \lambda(t_o)$ si $t_n \longrightarrow t_o$ y se supone además que γ tie_ne una tangente en Z_o

por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} \text{Arg } R_n = \lim_{n\to\infty} \text{Arg } \frac{\eta(t_n) - \eta(t_o)}{\lambda(t_n) - \lambda(t_o)} \cdot \frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_o)}{t_n - t_o} = \phi$$

$$= \lim_{n\to\infty} \text{Arg } \frac{\eta(t_n) - \eta(t_o)}{\lambda(t_n) - \lambda(t_o)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_o)}{t_n - t_o} = \phi$$

sea $W_n = \eta(t_n)$, $\lambda(t_n) = Z_n$,

$$\lim_{n\to\infty} \text{Arg}\left(\frac{W_n - W_o}{Z_n - Z_o} \cdot \alpha_n\right) = \phi$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{Arg } R_n = \lim_{n\to\infty} \text{Arg } \frac{W_n - W_o}{Z_n - Z_o} + \lim \text{Arg } \alpha_n = \phi$$

$$\phi = \lim_{n\to\infty} \text{Arg } \frac{W_n - W_o}{Z_n - Z_o} + \phi \qquad \text{(por 6.13)}$$

$$\phi = \text{Arg } \lim_{n\to\infty} \frac{W_n - W_o}{Z_n - Z_o} + \theta$$, θ: inclinación de τ en Z_o

$$\phi = \text{Arg } f'(Z_o) + \theta$$

Por consiguiente

$$\text{Arg } f'(Z_o) = \phi - \theta$$

o bién

si $\lambda'(t_o) \neq 0$. Entonces $t_o \in [a,b]$

$\phi = \text{Arg } \eta'(t_o) = \text{Arg}[f'(Z_o).\lambda'(t_o)]$.

$\phi = \text{Arg } f'(Z_o) + \text{Arg } \lambda'(t_o)$,

$\phi = \text{Arg } f'(Z_o) + \theta$

OBSERVACION 6.2.1.1

Ahora sea γ_1 y γ_2 dos curvas con punto común $Z = Z_o$, inicial, tal que tienen como tangentes τ_1 y τ_2 respectivamente, y supongamos que el ángulo entre τ_1 y τ_2 es medido desde τ_1 a τ_2. Supongamos γ_1 y γ_2 tiene imágenes L_1 y L_2 bajo f para $Z \in \mathbb{D}$. Entonces, de acuerdo al Teorema 6.2.1.1, si $f'(Z_o) \neq 0$, L_1 y L_2 tienen tangentes T_1 y T_2 en el punto $W_o = f(Z_o)$, donde T_1 y T_2 se obtienen rotando τ_1 y τ_2 atravéz de Arg $f'(Z_o)$. En consecuencia el ángulo entre L_1 y L_2 es igual al ángulo entre γ_1 y γ_2 y es medido en la misma dirección, por igual desde L_1 y L_2. En otras palabras, una función contínua $f = W$ que posee derivada $f' = 0$ en $Z = Z_o$ mapea toda curva del plano Z al plano W por medio de $W = f$, en Z_o y tiene tangente en W_o además preserva los ángulos entre curvas.

DEFINICION 6.2.1.2

Sea $\mathbb{D}$ un dominio $f: \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en $Z = Z_o \in \mathbb{D}$ tal que $f'(Z_o) = 0$. Se dice que f es un mapeo conforme o que f es una transformación conforme en $Z = Z_o$ si preserva los ángulos entre las curvas definidas en $\mathbb{D}$.

COMENTARIO 6.2.1.1

i) El mapeo conforme que preserva las direcciones es llamado mapeo conforme de primera clase.

ii) El mapeo conforme que invierte las direcciones es llamado mapeo conforme de segunda clase.

DEFINICION 6.2.1.3

Sea $\mathbb{D}$ un dominio y f una función analítica sobre $\mathbb{D}$. Entonces se dice que f es un mapeo conforme en todo $\mathbb{D}$ si es conforme en cada punto $Z_o \in \mathbb{D}$ y $f'(Z) \neq 0$, $\forall Z \in \mathbb{D}$.

ILUSTRACION 6.2.1.1

En un punto donde la derivada se anula, puede o no preservarse los ángulos, como puede verse por comparación de los mapeos siguientes:

Sea $f_1: \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}: f_1(Z) \rightsquigarrow rZ$, $f_2: \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}: f_2(Z) \rightsquigarrow Z^2$ en $Z = Z_o$

Sea $Z = re^{i\theta}$; $f_1(Z) = r^2(\text{Cos}\,\phi + i\,\text{sen}\,\phi)$, $f_2(Z) = r^2(\cos 2\phi + i\,\text{sen}\,2\phi)$

Sea Arg $f'(Z_o)$ la rotación que causa a la curva γ en el punto $Z = Z_o \in \gamma$ cuando transformando a la nueva curva $L = f(\gamma)$ y el nuevo punto $W_o = f(Z_o)$. En particular, si $f'(Z_o) \neq 0$ es real positivo, las tangentes γ en $Z = Z_o$ y L en $W = W_o$ son paralelas en la misma dirección así en

$$|f'(Z_o)| = \lim_{Z\to Z_o} \frac{|f(Z) - f(Z_o)|}{|Z - Z_o|}$$

los números $|Z - Z_o|$ y $|f(Z) - f(Z_o)|$ son las distancias entre los puntos Z y Z_0 en el plano Z y las distancias entre las imágenes $f(Z)$ y $f(Z_0)$ en el plano W respectivamente. Así interpretando.

$\frac{|f(Z) - f(Z_0)|}{|Z - Z_0|}$ como la magnificación del vector $Z-Z_0$ bajo el mapeo $W = f$. Podemos considerar entonces que $|f'(Z_0)|$ como la magnificación en el punto $Z = Z_0$ bajo $W = f$, puede verse entonces que, el tamaño de la magnificación en el punto $Z = Z_0$ no depende de la escogencia del vector finito $Z - Z_0$ trazado desde Z_0, puesto que $|f'(Z_0)|$ no es la magnificación de cualquier vector semejante, mas bien queda limitada la magnificación cuando $Z \to Z_0$.

DEFINICION 6.2.1.4

Sea $\mathbb{D}$ y $\mathbb{G}$ dos dominios en el plano complejo, sea $W = f$ una función inyectiva y analítica mapeando $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{G}$. Entonces $W = f$ es llamada mapeo conforme de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{G}$, además $\mathbb{G}$ es llamada imagén conforme de $\mathbb{D}$, $\forall Z \in \mathbb{D}$

TEOREMA 6.2.1.2

Si $\mathbb{G}$ es una imágen conforme de un dominio $\mathbb{D}$. Entonces $\mathbb{D}$ es imágen conforme de $\mathbb{G}$.

DEMOSTRACION

Sea $W = f$ una función $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{G} \\ Z & \leadsto & f(Z)=W \end{array}$, definida sobre $\mathbb{G}$, inyectiva y supongamos que $Z = f^{-1}(W) = \Psi(W)$; $\forall Z \in \mathbb{G}$ es contínua sobre $\mathbb{D}$, entonces si f es diferenciable en $Z = Z_0 \in \mathbb{D}$ y si

$f'_{\mathbb{D}}(Z_o) \neq 0$, la función $Z = f^{-1}(W) = \Psi(W)$, $\forall W \in G$ es diferencia ble en $W_o = f(Z_o) \in \mathbb{G}$, y

$$\Psi'_{\mathbb{G}}(W_o) = \frac{1}{f'_{\mathbb{D}}(Z_o)}$$

en efecto

Dado que $W = f$ es inyectiva, si $W \neq W_o$ entonces

$f^{-1}(W) \neq f^{-1}(W_o) = Z \neq Z_o$ y por consiguiente

$$\frac{\Psi(W) - \Psi(W_o)}{W - W_o} = \frac{Z - Z_o}{W - W_o} = \frac{1}{\dfrac{W - W_o}{Z - Z_o}}$$

Además, dado que Ψ es contínua sobre G entonces $\Psi(W) \to \Psi(W_o)$ como $W \to W_o$ consecuentemente $Z \to Z_o$ como $W \to W_o$ Por consiguiente

$$\Psi'_{\mathbb{D}}(W_o) = \lim_{W \to W_o} \frac{\Psi(W) - \Psi(W_o)}{W - W_o} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{Z \to Z_o} \frac{W - W_o}{Z - Z_o}} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{Z \to Z_o} \frac{f(Z) - f(Z_o)}{Z - Z_o}} = \frac{1}{f'_{\mathbb{D}}(Z_o)}$$

con $f'_{\mathbb{D}}(Z_o) \neq 0$

luego $f = W$ es una función contínua y analítica en $Z = Z_o$ y $\Psi^{-1}_{\mathbb{D}}(W_o)$ tambien lo es. Por definición 6.2.1.3 $\Psi'_{\mathbb{D}} \neq 0$ por lo que se sigue que $Z = f^{-1} = \Psi(W)$, $\forall W \in \mathbb{G}$ es conforme y $\mathbb{D}$ es imágen conforme de $\mathbb{G}$.

TEOREMA 6.2.1.3

Si $\mathbb{G}$ es imágen conforme de un dominio $\mathbb{D}$ y si $\mathbb{G}^*$ es imágen conforme de un dominio $\mathbb{G}$. Entonces $\mathbb{G}^*$ es imágen conforme de un dominio $\mathbb{D}$.

PRUEBA

Se sigue de la diferenciación de composición de funciones.

TEOREMA 6.2.1.4 (Teorema de la transformación de Riemann)

Sea $\mathbb{D}$ un dominio simplemente conexo de $\mathbb{C}$, $Z_o \in \mathbb{D}$. Entonces - existe una función $W = f$ inyectiva que mapea $\mathbb{D}$ conformemente sobre $|W| < 1$ que satisface la condición $f(Z_o) = 0$, $f'(Z_o) > 0$

PRUEBA

Supongamos $W = g(Z)$ otra función que satisface la misma condición que $W = f(Z)$, $\forall Z \in \mathbb{D}$. Entonces por teorema 6.2.1.2

$\Psi(W) = f|g^{-1}(W)|$ es analítica, sobre el disco unitario, satisface la condición

$$\Psi(0) = f[g^{-1}(0)] = f(Z_o) = 0, \quad \Psi'(0) = \frac{1}{g'(Z_o)} f'(Z_o) > 0$$

y mapea conformemente el disco unitario, sobre si mismo, luego por lema de Schwarz's se tiene que

$$|\Psi(W)| \leq |W|$$

$$|f(Z)| \leq |g(Z)| \quad , \forall Z \in \mathbb{D} \qquad (6.27)$$

intercambiando f y g

$$|g(Z)| \leq |f(Z)| \qquad (6.28)$$

de (6.27) y (6.28) se obtiene

$$|f(Z)| = |g(Z)|$$

que es equivalente a

$$|\Psi(W)| = |W| < 1 \qquad (6.29)$$

aplicando nuevamente el lema de Schwarz's se obtiene

$$\Psi(W) = W\, e^{i\alpha}$$

pero $\Psi'(0) > 0$ y en consecuencia $e^{i\alpha} = 1$, es decir,

$$\Psi(W) = W$$

por tanto $g(Z) = f(Z)$, $\forall Z \in \mathbb{D}$, se infiere entonces que $W = f$ es un mapeo conforme en un dominio $\mathbb{D}$ sobre $f(\mathbb{D})$ (por teorema 6.2.1.2).

6.3 ALGUNAS TRANSFORMACIONES CONFORMES

En el contexto del capítulo I se presentó el estudio de la transformación bilineal, deduciendose así una secuencia de transformaciones, así, se deduce entonces; por los fundamentos del mapeo conforme que la transformación bilineal es una transformación conforme. Utilizaremos estos conceptos, para poder determinar así otras transformaciones conformes, de mucha utilidad, para resolver problemas matemáticos y físicos, mediante una técnica más apropiada.

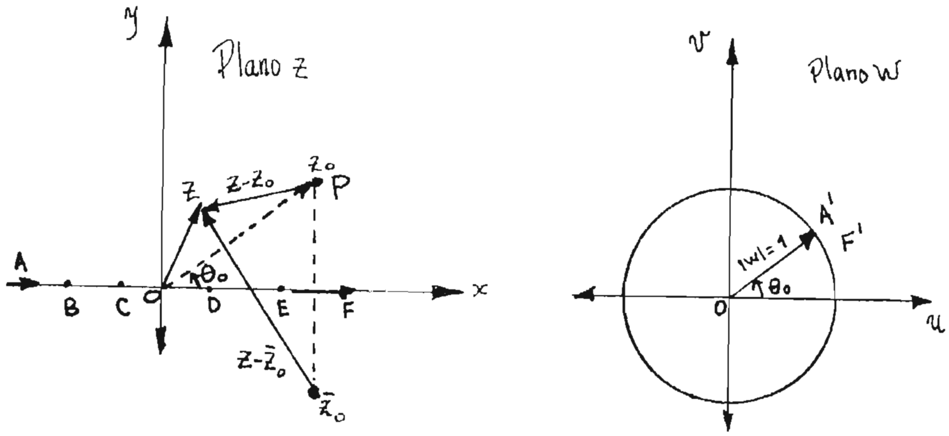
TEOREMA 6.3.1

Sea Z_0, cualquier punto P en semi plano superior del plano Z, entonces la. transoformación

$W = e^{i\theta_0}\left(\dfrac{Z-Z_0}{\bar{Z}-Z_0}\right)$ aplica conformemente sobre el interior del círculo unitario $|W| = 1$ del plano W.

PRUEBA

De la figura 24



F I G U R A S 2 4

consideremos la rotación

$$W = e^{i\theta_o}.Z$$

el punto Z del plano Z puede expresarse como $Z = \dfrac{Z - Z_o}{Z - \bar{Z}_o}$

luego, $W = e^{i\theta_o}\left(\dfrac{Z - Z_o}{Z - \bar{Z}_o}\right)$ es la transformación

de la figura en el plano W.

$$|W| = \left|e^{i\theta_o}\left(\frac{Z-Z_o}{Z-\bar{Z}_o}\right)\right| = |e^{i\theta_o}|\left|\frac{Z-Z_o}{Z-\bar{Z}_o}\right| = \frac{|Z-Z_o|}{|Z-\bar{Z}_o|}$$

del recorrido en $\overrightarrow{A;F}$ se tiene que $y = 0$, $x = -\infty, +\infty$, (eje - real)

$$|W| = \frac{|x+iy - (x_o+iy_o)|}{|x+iy - (x_o-iy_o)|} = \frac{|x-x_o|}{|x-x_o|} = 1$$ recorre la frontera del círculo.

corresponden a A' y F'

Además si Z está en el plano superior se tiene que $|W| < 1$ en efecto

$|Z - Z_o| \leq |Z_o - \bar{Z}_o|$, como puede verse en la Figura del plano Z.

y la igualdad se consigue con la frontera

$$|W| = 1 \Rightarrow |Z-Z_o| = |Z-\bar{Z}_o|$$

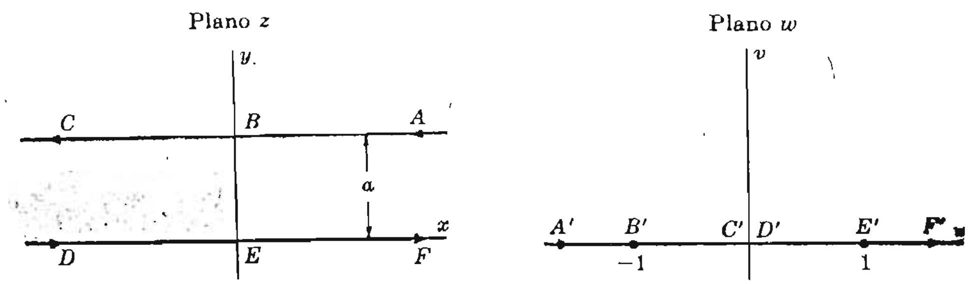
Por tanto todo punto Z_o del semiplano superior del plano Z aplica conformemente sobre el interior del círculo unitario.

ILUSTRACION 6.3.1

Verificar que la banda infinita de ancho "a" definida en el plano Z, aplica al semiplano superior, por medio de la transformación $W = e^{\pi Z/a}$.

SOLUCION

Consideremos las Figuras y los puntos definidos como sigue:



F I G U R A S 2 5

Sea $Z = x + iy$, entonces $W = U + iV = e^{\pi(x+iy)/a}$

en efecto:

$$W = e^{\pi(x+iy)/a} = e^{\frac{\pi}{a}x} . e^{i\frac{\pi}{a}y}$$

$$= e^{\frac{\pi}{a}x} . \cos\left[(\frac{\pi y}{a}) + i \text{ sen } (\frac{\pi y}{a})\right]$$

de donde

$$U = e^{\frac{\pi}{a}x} \cos (\frac{\pi y}{a}), \quad V = e^{\frac{\pi}{a}x} \text{ sen } (\frac{\pi y}{a}) \qquad (6.30)$$

Siguiendo la trayectoria de los puntos $\overrightarrow{\text{D E F}}$ en el eje real x, se tiene que y = 0 en el plano Z.

Así en (6.9) se tiene.

$U = e^{\frac{\pi}{a}.x}$ V = 0, el eje real positivo en el plano W

señalados por los puntos en la trayectoria $\overrightarrow{\text{D'E'F'}}$

Si Z = 0 entonces, W = 1 señalado con E'.

Para la trayectoria señalada en D (eje real), ($y = 0$, $x = \infty$); y en F, ($y = 0$, $x = + \infty$) se obtiene

$$W = U + iV = e^{\frac{\pi}{a}x} \cos(\frac{\pi y}{a}) = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{\pi}{a}x} = 0.$$

y obtenemos W = 0, (D' en el plano W)

<u>en F</u>. $y = 0$, $x = + \infty$, se obtiene $W = \infty$, (F' en el plano W)

Siguiendo la trayectoria $\overleftarrow{\text{A B C}}$: la rectoa y = a, (plano Z) en (6.30) se obtiene:

$$U = e^{\frac{\pi}{a}x} \cos(\pi) \quad , \quad V = e^{\frac{\pi}{a}x} .\text{sen}(\pi)$$

$$U = e^{\frac{\pi}{a}x} \quad , \quad V = 0.$$ eje real negativo en el plano W. (6.31)

señalada por los puntos A'B'C'.

Para la trayectoria señalada en A, se observa que $x = +\infty$, $y = a$ y en C: $x = -\infty$, $y = a$, aquí se observa que $W = -\infty$ en A' y en C', $W = 0$

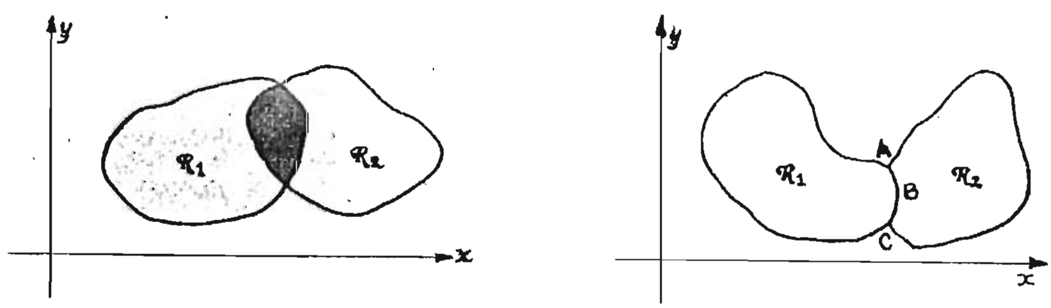
Para los puntos $y \in (0,a)$, $x \in (-\infty, \infty)$, se aplican los puntos únicos en el plano W, de coordenadas U,V, con $U > 0$.

DEFINICION 6.3.1

Sea F_1 una función analítica en una región R_1 (Figura 26).

Supongamos que podemos hallar una función F_2 analítica en R_2 tal que $F_1 = F_2$, $\forall Z$, $Z \in R_1 \cap R_2$ entonces dirémos que F_2 es una prolongación analítica de F_1. Esto significa que existe una función F analítica en la unión de las regiones R_1 y R_2 tal que.

$F(Z) = F_1(Z)$ en R_1. y $F(Z) = F_2(Z)$ en R_2. Realmente para ello basta que R_1 y R_2 tengan solamente un pequeño arco en común tal como A B C en la Figura 26



F I G U R A S 2 6

DEFINICION 6.3.2

Sea F_1 y F_2 dos funciones definida en el plano complejo Z, supongamos que F_1 es analítica en la región R_1 (Figura 27) tal - que F_1 toma valores reales sobre A B C del eje real. Entonces la prolongación analítica de F_1 en la región R_2 se expresa mediante:

$F_2(Z) = \overline{F_1(\bar{Z})}$ ó bien

si $F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} an(Z-x_o)^n$ entonces,

$\overline{F(Z)} = \sum_{n=0}^{\infty} an(\bar{Z}-x_o)^n = F(\bar{Z})$

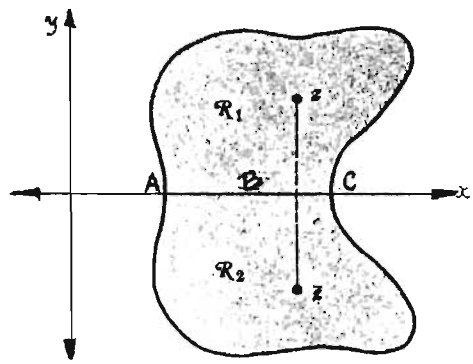


FIGURA 27

OBSERVACION:

El resultado se puede extender a casos donde A B C es una curva en lugar de un segmento de recta, además la - prolongación analítica puede extenderse an F_n funciones para R_n regiones.

La definición 6.3.2 es conocida como principio de reflexión - de Schwarz.

ILUSTRACION 6.3.2

Probar que $F_1(Z) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-Zt} dt$ es analítica en todos los puntos Z. Para los cuales $Re(Z) > 0$ y encontrar una función que es la prolongación analítica de F_1, en el semiplano $Re(Z) < 0$

SOLUCION

Resolviendo la integral $F_1(Z) = \int^{\infty} t^3 e^{-Zt} dt$, por partes, tenemos

$$\int_0^{\infty} t^3 e^{-Zt} dt = \lim_{M\to\infty} \left\{ \frac{-e^{-Zt}}{Z} t^3 - (3t^2) \frac{e^{-Zt}}{Z^2} + (6t) \frac{-e^{-Zt}}{Z^3} - (6) \left(\frac{e^{-Zt}}{Z^4}\right) \right\} \Bigg|_0^M$$

$$= \left\{ \lim_{M\to\infty} \frac{6}{Z^4} - \frac{1}{Z} M^3 . \frac{1}{e^{MZ}} - \frac{3M}{Z^2} \frac{1}{e^{MZ}} - \frac{6M}{Z^3 e^{MZ}} + \frac{6}{Z^4 e^{MZ}} \right\}$$

$$= \frac{6}{Z^4} \quad \text{si } Re(Z) > 0$$

Para $Re(Z) > 0$ se tiene que $F_2(Z) = \frac{6}{Z^4}$ es analítca $\forall Z \neq 0$, - puesto que $F_1(Z) = F_2(Z)$ para $Re(Z) > 0$, vemos que $F_2(Z) = \frac{6}{Z^4}$ debe ser la prolongación buscada.

TEOREMA 6.3.2 (Transofrmación de Schwarz - Christoffel).

Sea Γ un polígono cualquiera definido en el semiplano superior, del plano W, tal que Γ tenga W_i ; $(i = 1,2,...,n)$ vertices; - con región de imágens definidas en el plano Z, por medio de la transformación con forma W = f. Entonces, la transformación - que mapea todo punto interior y su frontera del polígono, so-- bre el semiplano superior del plano Z está dada por:

$$W = C \int^{Z_o} \prod_{i=1}^{n} (Z-x_k)^{(\alpha_k/\pi)-1} dZ + D \tag{6.33}$$

DEMOSTRACION

Sea Γ el polígono cualquiera de n lados, definido en el semipla no superior del plano W, tal que tenga W_i $(i = 1,2,\ldots n)$ vertices, y los n lados no se intersectan entre sí.

Sea $W = f$ la tranformación biyectiva, desconocida, que mapea la región imágen en el semiplano superior Z.

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$, los puntos imágenes que corresponden a los vértices $w_1, w_2, \ldots, w_n$, definidos en el eje real (ver figura 28).

así cada lado del polígono, por ejemplo el lado w_1, w_2 se transforma sobre un segmento del eje real, en éste caso, en x_1, x_2, tenemos $w = f$ trasforma un segmento de recta para g real.

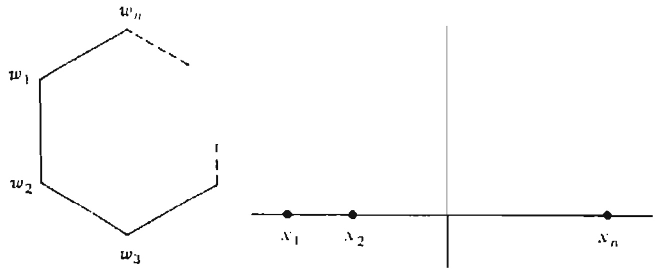


FIGURA 28

en efecto:

Si $\operatorname{Arg}(w_1 - w_2) = \beta$, entonces $(w - w_1)e^{-i\beta}$ es real

luego por el principio de reflección de Schwarz, se tiene que $w = f$ puede extenderse analíticamente a todo el semiplano inferior. (La reflexión del semiplano superior con respecto al segmento x_1, x_2 del eje real)

Así también se conocen los valores de esta extensión en función de los valores $f(Z)$ del semiplano superior: $(w-w_1)e^{-i\beta}$ toma los valores conjugados en los puntos conjugados.

Continuando este proceso para el lado w_2, w_3 y el segmento -

real x_2, x_3, tendrémos

$(w-w_2)e^{i\beta} = (w-w_2)e^{iArg(w_3-w_2)}$ toma valores conjugados en los puntos conjugados, ordenando este proceso tendremos:

LADO	ARGUMENTO	VALOR REAL	PLANO Z
(w_2-w_1)	$Arg(w_2-w_1)=\beta_1$	$(W-W_1)e^{-i\beta_1} = (w-w_1)e^{-iArg(w_2-w_1)}$	x_1, x_2
(w_3-w_2)	$Arg(W_3-W_2)=\beta_2$	$(W-W_2)e^{-i\beta_2} = (w-w_2)e^{-iArg(w_3-w_2)}$	x_2, x_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(W_{k+1}-W_k)$	$Arg(W_{k+1}-W_i)=\beta_k$	$(W-W_i)e^{-i\beta_k} = (w-w_k)e^{-iArg(w_{k+1}-w_k)}$	x_i, x_{k+1}

Sea w un punto interior a Γ y sea w^* la transformación definida por

$w^* = \alpha w + \beta$; α y β son etes complejos, tal que $|\alpha| = 1$ y α, β dependerán del lado el cual se hará la reflexión.

así

$$\frac{dw^*}{dZ} = \alpha \frac{dw}{dZ}$$

y

$$\frac{d^2w^*}{dZ^2} = \alpha \frac{d^2w}{dZ^2}$$

entonces

$$\frac{d^2w^*}{dZ} \Big/ \frac{dw^*}{dZ} = \frac{d^2w}{dZ} \Big/ \frac{dw}{dZ} .$$

pongamos

$$\frac{w''}{w'} = \frac{f''(z)}{f'(Z)} = g(Z) \qquad (6.34)$$

g es analítica, para los puntos Z, para los cuales f" y f' son analíticas, excepto para los puntos donde $f'(Z)=0$ así, f es analítica en el semiplano superior, también lo son - f" y f', además f puede extenderse analíticamente sobre el plano inferior así:

g es analítica $Im(Z) > 0$, $Im(Z) < 0$, excepto donde $f'(Z) = 0$ como se requiere que la transformación sea conforme en

$$Im(Z) > 0,$$

entonces $f'(Z) \neq 0$ para $Im(Z) > 0$ luego por el principio de reflexión también lo es en $Im(Z) < 0$, por consiguiente el único lugar posible de los puntos singulares de g es el eje real.

Si g es analítica en todos los puntos del eje real con la posible excepción de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces:

Sea x_o un punto interior de uno de los segmentos (x_i, x_{i+1}) y - W_o su imagen en el lado del pológono (w_k, w_{k+1}).

Sea $\beta_i = \text{Arg}\,(w_{k+1} - w_k)$, tal que $(w - w_o)e^{-i\beta_k}$ sea real, para Z real y en el intervalo (x_k, x_{k+1}). Entonces:

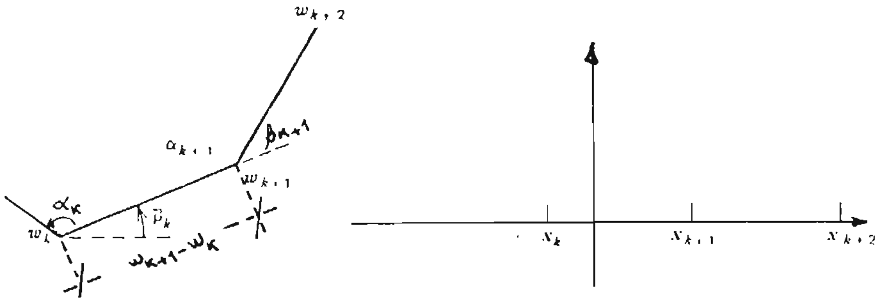
$$(w-w_o)e^{-i\beta_k} = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (Z-x_o)^n, \text{ para } |Z - x_o| \text{ muy pequeño,}$$

y los coeficientes a_p, a_{p+1}, ... son reales. Puesto que la - transformación cerca de x_o lleva una línea recta (con ángulo - π) sobre una línea recta (ángulo π) entonces $p = 1$ y $a_1 \neq 0$, - es decir $f'(Z) \neq 0$ en $Z = x_o$.

En consecuencia g es analítica en los puntos $Z \neq x_1, x_2, \ldots x_n$

. Sea α_k el ángulo interno del polígono en el vértice W_k y -- $\text{Arg}\,(W_{k+1} - W_k) = \beta_k$

(ver fig. 29)



F I G U R A S 29

Entonces

$$\text{Arg}(W_{k+1} - W_k)e^{-i\beta_k} = 0 \text{ , para el segmento } (x_k, x_{k+1})$$

y $\text{Arg}(\alpha_{k+1})$ para el segmento (x_{k+1}, x_{k+2})

De aquí que

$$\left[W_{k+1} - W)e^{-i\beta_k}\right]^{\pi/\alpha_{k+1}} \quad \text{sea real y contínua para Z en}$$

el segmento (x_k, x_{k+2}) y analítica para $\text{Im}(Z) > 0$

Por aplicación de la <u>definición 6.3.5</u> se tiene:

$$\left[(W_{k+1} - W)e^{-i\beta_k}\right]^{\pi/\alpha_{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (Z - x_{k+1})^n, \; c_n \in \mathbb{R}, \; c_1 \neq 0 \tag{6.35}$$

Resolviendo para $W = W(Z)$. Se tiene en (6.35) que:

$$\left[(W(Z) - W_{k+1})e^{-i\beta_k}\right]^{\pi/\alpha_{k+1}} = (Z - x_{k+1}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n (Z - x_{k+1})^{n-1}$$

de donde

$$W(Z) - W_{k+1} = e^{i\beta_k}(Z-x_{k+1})^{\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}} \left[\sum_{n=1} c_n (Z-x_{k+1})^{n-1}\right]^{\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}}$$

$$W(Z) = W_{k+1} + e^{i\beta_k}(Z-x_{k+1})^{\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n (Z-x_{k+1})^{n-1}\right]^{\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}} \tag{6.36}$$

lo cual es de la forma

$$W(Z) = W_{k+1} + e^{i\beta_k}(Z - x_{k+1})^{\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}}$$ es analítica y distinta de cero en $Z = x_{k+1}$.

Por consiguiente

$$W'(Z) = e^{i\beta_k}(Z - x_{k+1})^{\alpha_{k+1}/\pi - 1}$$ es analítica y distinta de cero en $Z = x_{k+1}$, así por relación (6.34)

$$g(Z) = \frac{W''(Z)}{W'(Z)} = \frac{\frac{\alpha_{k+1}}{\pi} - 1}{Z - x_{k+1}} + (\text{analítica en } x_{k+1}),$$

es analítica excepto en el polo de primer orden en cada punto imágen de vértice, de los puntos $x_1, \ldots, x_n$, el resíduo en -- $Z = x_k$ es $\frac{\alpha_k}{\pi} - 1$

Así por definición 4.6.5 podemos escribir

$$g(Z) = \sum_{k=1} \frac{\frac{\alpha_k}{\pi} - 1}{Z-x_k}$$

ó bien

$$g(Z) = \frac{W''(Z)}{W'(Z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\alpha_k}{\pi} - 1}{Z-x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1\right) \frac{1}{Z-x_k}$$

luego

$$\log\left[\frac{W''(Z)}{W'(Z)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1\right) \cdot \frac{1}{Z-x_k}$$

$$\log W''(Z) - \log W'(Z) = \sum_{k=1}^{n}\left[\log\left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1\right) + \log\left(\frac{1}{Z-x_k}\right)\right]$$

$$\log W''(Z) - \log W'(Z) = \sum_{k=1}^{n}\left[\log\left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1\right) + \log(1) - \log(Z-x_k)\right]$$

de donde

$$\log W'(Z) = \log\left(\frac{\alpha_{k+1}}{\pi} - 1\right) - \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1\right) + \sum_{k=1}^{n} \log(Z-x_k)$$

como $\frac{\alpha_{k+1}}{\pi} - 1$, es un número real positovo, luego

sea $C = \log\left(\frac{\alpha_{k+1}}{\pi} - 1\right)$, y por propiedad de logaritmos se tiene que:

$$\log W'(Z) = \sum_{k=1}^{n} \log\left[\left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1\right)(Z - x_k)\right] + \log C$$

$$\log W'(Z) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1\right) \log (Z - x_k) + \log C$$

$$\log W'(Z) = \sum_{k=1}^{n} \log (Z - x_k)^{\left(\frac{\alpha_k}{\pi}\right) - 1} + \log C$$

así

$$W'(Z) = \sum_{k=1}^{n} e^{\log(Z-x_k)^{\left(\frac{\alpha_k}{\pi}\right)-1}} \cdot e^{\log(C)} = C \sum_{k=1}^{n} (Z-x_k)^{\left(\frac{\alpha_k}{\pi}\right)-1}$$

$$\log W'(Z) = \sum_{k=1}^{n} C \log (Z - x_k)^{\left(\frac{\alpha_k}{\pi}\right)-1}$$

$$\log W'(Z) = C\left[\log(Z-x_1)^{(\frac{\alpha_1}{\pi})-1} + \log(Z-x_2)^{(\frac{\alpha_2}{\pi})-1} + \ldots + \log(Z-x_n)^{(\frac{\alpha_n}{\pi})-1}\right]$$

$$\log W'(Z) = C \log\left[(Z-x_1)^{(\frac{\alpha_1}{\pi})-1} \cdot (Z-x_2)^{(\frac{\alpha_2}{\pi})-1} \ldots (Z-x_n)^{(\frac{\alpha_n}{\pi})-1}\right],$$

$$W'(Z) = C \prod_{k=1}^{n} (Z - x_k)^{(\frac{\alpha_k}{\pi})-1}$$

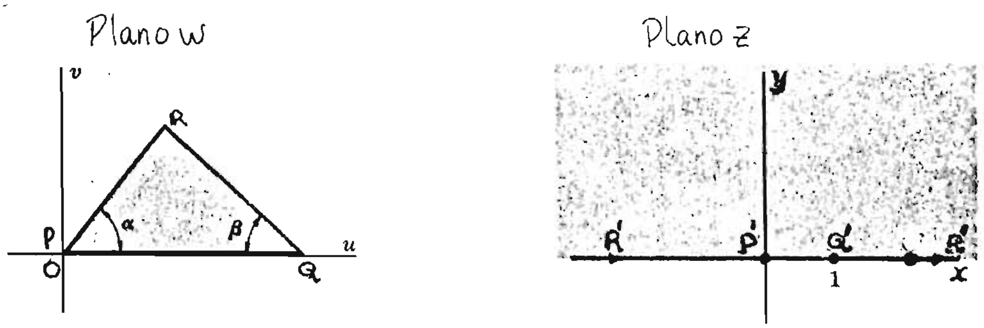
Por tanto

$$W(Z) = C \int^{Z_o} \prod_{k=1}^{n} (Z-x_k)^{(\frac{\alpha_k}{\pi})-1} dZ + D \qquad (6.37)$$

La relación (6.37) es la fórmula de Schwarz Christoffel para -- la transformación conforme de un polígono sobre el semiplano superior.

ILUSTRACION 6.3.3

Encontrar una función la cual aplica el interior de un triángulo en el plano W sobre el semiplano superior del plano Z, según se indica en la figura 30



F I G U R A S 3 0

SOLUCION

Sea P(W = 0), Q(W = 1) los vértices del triángulo que se aplican a los puntos P'(Z = 0) y Q'(Z = 1) sobre el plano Z y el vértice R se aplica en el punto R'(Z = ∞); observese que todos los puntos del segmento $\overline{PQ}$ solamente los traslada al plano Z, formando el segmento $\overline{P'Q'}$ en el eje real del plano Z, y al rotar el segmento $\overline{QR}$ un ángulo $(\pi - \beta)$, se obtienen los puntos del segmento $\overline{Q'R'}$ sobre el eje real del plano Z, pude usarse, cualquier sentido de rotación.

Los puntos interiores del polígono, por el principio de relección de Schwarz, los manda al plano superior del plano Z.

Por aplicación de (6.11) se obtine.

$$W = C\int_0^1 (Z-0)^{(\alpha/\pi)-1}(Z-1)^{(\beta/\pi)-1}dZ + D$$

$$W = C\int_0^1 Z^{(\alpha/\pi)-1}(Z-1)^{(\beta/\pi)-1}dZ + D \qquad (6.38)$$

si W = 0 cuando Z = 0, así en (6.38) se obtiene D = 0

si W = 1 cuando Z = 1 entonces, sea ζ un punto interior al triángulo PQR

luego,

$$1 = C\int_0^1 \zeta^{(\alpha/\pi)-1}(\zeta-1)^{(\beta/\pi)-1}d\zeta \Rightarrow \frac{1}{C} = \int_0^1 \zeta^{(\alpha/\pi)-1}(\zeta-1)^{(\beta/\pi)-1}d\zeta$$

$$-\frac{1}{C} = \int_0^1 \zeta^{(\alpha/\pi)-1}(1-\zeta)^{(\beta/\pi)-1}d\zeta$$

Resolviendo la integral (6.39)

Sea $t = 1 - \zeta$

$$-\frac{1}{C} = \int_0^1 (1-t)^{(\alpha/\pi)-1} t^{(\beta/\pi)-1} (-dt)$$

$$\frac{1}{C} = \int_0^1 t^{(\beta/\pi)-1} (1-t)^{(\alpha/\pi)-1} dt,$$

haciendo $m = \beta/\pi$, $n = \alpha/\pi$ se tiene

$$\frac{1}{C} = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt;$$ que expresa la función beta; $B(m,n)$

La cual se define por

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

luego aplicando la función Gamma queda

$$\frac{1}{C} = \int_0^1 \zeta^{(\alpha/\pi)-1} (1-\zeta)^{(\beta/\pi)-1} d\zeta = \frac{\Gamma(\alpha/\pi).\Gamma(\beta/\pi)}{(\frac{\alpha+\beta}{\pi})}$$

de donde

$$C = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{\pi})}{\Gamma(\frac{\alpha}{\pi})\Gamma(\frac{\beta}{\pi})}$$

sustituyendo en (6.11) se obtiene finlamente

$$W = \frac{\Gamma(\frac{\alpha\ \beta}{\pi})}{\Gamma(\frac{\alpha}{\pi})\Gamma(\frac{\beta}{\pi})} \int_0^{z_\circ} \zeta^{(\alpha/\beta)-1} (1-\zeta)^{(\beta/\pi)-1} d\zeta$$

observando que C es la longitud del lado $\overline{PQ}$ del triángulo PQR, por tanto

$$W = \int_{0}^{Z_\circ} Z^{(\alpha/\pi)-1}(1 - Z)^{(\beta/\pi)-1}dZ$$ es la transformación buscada.

CAPITULO VII

APLICACIONES DE LA TRANSFORMACION CONFORME EN MECANICA DE FLUIDOS

7.1 CONDICIONES FISICAS - MATEMATICAS

7.1.1 Funciones conjugadas armónicas

DEFINICION 7.1.1.1

Sean U(x,y), V(x,y) dos funciones reales de variable real definidas en un Dominio $\mathbb{E}$, se dice que U(x,y) es armónica en $\mathbb{E}$ si las derivadas parciales

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

existen y son contínuas sobre $\mathbb{E}$ y si para todo punto de $\mathbb{E}$, - U(x,y) satisface la E.D. parcial

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (7.1)$$

DEFINICION 7.1.1.2

Sean U(x,y), V(x,y) armónicas sobre $\mathbb{E}$, tal que satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Remann

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (7.2)$$

Se dice que U(x,y), V(x,y) son conjugadas armónicas si satisfacen (7.2).

TEOREMA 7.1.1.1

Una función necesaria y suficiente para que una función

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}: Z \rightsquigarrow f(Z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$$

sea analítica sobre $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}$ es que la parte real U(x,y) y la parte imaginaria V(x,y) de f(Z); sean conjugadas armónicas, sobre $\mathbb{G}$.

DEMOSTRACION

A probar la condición necesaria.

Sea f analítica sobre G, y diferenciable en todo punto de G, - entonces U(x,y) y V(x,y) son diferenciables, y satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann, entonces f'(Z) es analítica sobre G.

Así que

$$f'(Z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

podemos ver que :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,,\ -\frac{\partial u}{\partial y}\,,\ \frac{\partial v}{\partial y}\,,\ \frac{\partial v}{\partial x} \tag{7.3}$$

Son pares de funciones diferenciables sobre G y satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann, luego

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\partial u}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

o bien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - \frac{\partial v}{\partial x^2}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

asi u(x,y), v(x,y) satisfacen la ecuación de Laplace (7.1) solo falta mostrar la continuidad de u(x,y), v(x,y) con segunda derivada parciales,

como $f''(Z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

es analítica sobre G. Y por tanto contínua en todo punto de G.

La suficiencia se consigue por medio de que u(x,y), v(x,y) son conjugadas armonicas. Y f es analítica sobre G.

7.1.2 Integral de Poisson's. Fórmula de Schwarz's

TEOREMA 7.1.2.1

Dada una función armónica u(x,y) sobre un dominio simplemente conexo G. Entonces introduciendo una constante real arbitraria, la función

$$V(x,y) = \int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} \left(- \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \tag{7.4}$$

Es la conjugada Armónica de u(x,y) sobre G, además

$$f(Z) = u(x,y) + i \int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} \left(- \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

Es analítica sobre $\mathbb{G}$.

PRUEBA

Sea $V = V(x,y)$, entonces

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy \qquad (7.5)$$

Por (7.2) se tiene que (7.5) puede escribirse

$$dV = -\frac{\partial U}{\partial y}\, dx + \frac{\partial U}{\partial x}\, dy \;;\ \text{donde } \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial x} \text{ son contínuas en } \mathbb{G}$$

si (x_o, y_o) es un punto fijo arbitrario, de G se tiene, por integración directa, de (x_o, y_o) al punto (x,y) de $\mathbb{G}$.

$$V(x,y) = \int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \qquad (7.6)$$

por definición 7.1.1.1 $V = V(x,y)$ es contínua en todo punto - $(x,y) \in \mathbb{G}$ y en consecuencia es armónica, y 7.1.2.1 queda probado.

TEOREMA 7.1.2.2

Sea $U(x,y)$ una función armónica y analítica sobre un Dominio $\mathbb{G}$ con la función armónica conjugada $v(x,y)$. Sea $Z_o \in \mathbb{G} \subset \mathbb{C}$, punto arbitrario finito, y sea $\Delta = \Delta(Z_o)$ la distancia entre Z_o y un vecindario de G. Entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tienen expansión de la forma

$$u(x,y) = u(r,\theta) = \alpha_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(n\theta) - \beta_n \operatorname{sen}(n\theta)\right] r^n \qquad (7.7)$$

$$v(x,y) = v(r,\theta) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\beta_n \cos(n\theta) + \alpha_n \operatorname{sen}(n\theta)\right] r^n$$

sobre el disco $|Z-Z_o| < \Delta$, donde $Z-Z_o = re^{i\theta}$

PRUEBA

Sea $f(Z) = u(x,y) + iv(x,y)$, analítica sobre G.

Sea $Z - Z_o = re^{i\theta}$

por fórmula (7.4), formamos la función f y tiene como parte - real $u(x,y)$ luego por Teorema 4.5.1; si γ es diferenciable en Z_o

$$f(Z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(Z)}{Z-Z_o}\,dZ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z-Z_o)^n \quad y$$

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a\ (Z-Z_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(Z_o)}{n!}\ (Z-Z_o)^n \qquad (7.9)$$

converge sobre el disco $|Z-Z_o| < \Delta = \Delta(Z_o)$

Sea $a_n = \alpha_n + i\beta_n \qquad Z-Z_o = re^{i\theta}$; sustituyendo en (7.9)

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n).r^n e^{i\theta}$$

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n e^{in\theta} + i\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n r^n e^{in\theta}$$

$$f(Z) = u(x,y) + v(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n[\cos(n\theta) + i\ \mathrm{sen}(n\theta)]$$

$$+ i\sum_{n=0}^{\infty} r^n \beta_n [\cos(n\theta) + i\ \mathrm{sen}(n\theta)]$$

$$= \sum_{n=0} \alpha_n r^n[\cos(n\theta) + i\ \mathrm{sen}(n\theta)] + i\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos(n\theta)$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \mathrm{sen}(n\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n \cos(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} i\alpha_n r^n \operatorname{sen}(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} ir^n \beta_n \cos(n\theta) - \sum r^n \beta_n \operatorname{sen}(n\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n \cos(n\theta) - \beta_n r^n \operatorname{sen}(n\theta) + i \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n \operatorname{sen}(n\theta) + i \sum^{\infty} \beta_n r^n \cos(n\theta)$$

$$u(x,y) + iv(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(n\theta) - \beta_n \operatorname{sen}(n\theta)\right] r^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \operatorname{sen}(n\theta) + \beta_n \cos(n\theta)\right] r^n$$

de donde tomando la parte real e imaginaria en ambos miembros de la ecuación tenemos

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(n\theta) - \beta_n \operatorname{sen}(n\theta)\right] r^n = \alpha_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(n\theta) - \beta_n \operatorname{sen}(n\theta)\right] r^n$$

luego $u(r,\theta) = \alpha_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(n\theta) - \beta_n \operatorname{sen}(n\theta)\right] r^n$ (7.10)

como también

$$v(x,y) = v(r,\theta) = \beta_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \operatorname{sen}(n\theta) + \beta_n \cos(nr)\right] r^n \qquad (7.11)$$

la convergencia de (7.10) y (7.11) resulta de los teoremas --- 4.32, (4.3.3)

tomando

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left| \alpha_n + i\beta_n \right|\right)^{1/n}}$$

LEMA 7.1.2.1

Las series

$$\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\, r\rho\cos(\theta - \psi)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos(\theta - \psi) \qquad (7.12)$$

$$\frac{2\rho r \operatorname{sen}(\theta-\Psi)}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta-\Psi)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \operatorname{sen}(\theta-\Psi)$$

convergen uniformemente sobre todo subconjunto compacto del disco $|Z-Z_0| < \rho$.

PRUEBA

Sea f una función analítica en el disco K: $|Z-Z_0| < \rho$, tal que

Sea $r < \rho$, $Z-Z_0 = re^{i\theta}$, definamos

$$f(Z) = \frac{\rho e^{i\Psi} + re^{i\theta}}{\rho e^{i\Psi} - re^{i\theta}} = \frac{\rho e^{i\Psi} + (Z-Z_0)}{\rho e^{i\Psi} - (Z-Z_0)}$$

, la cual es analítica en $|Z-Z_0| < \rho$

denotando la parte real e imaginaria de f, tenemos

$$u(r,\theta)+iv(r,\theta) = \frac{(\rho e^{i\Psi}+re^{i\theta})}{(\rho e^{i\Psi}-re^{i\theta})} \cdot \frac{(\rho e^{-i\Psi}-re^{-i\theta})}{(\rho e^{-i\Psi}-re^{-i\theta})} = \frac{\rho^2-r^2+2i\rho r \operatorname{sen}(\theta-\Psi)}{\rho^2+r \ -2\rho r\cos(\theta-\Psi)}$$

$$u(r,\theta)+iv(r,\theta) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\Psi)} + \frac{2i\, r \operatorname{sen}(\theta-\Psi)}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\Psi)}$$

de donde

$$u(r,\theta) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\Psi)} \ ; \ V(r,\theta) = \frac{2\rho r \operatorname{sen}(\theta-\Psi)}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\Psi)} \tag{7.13}$$

pero ambas expresiones tienen el mismo denominador, entonces del punto Z al punto $Z_0 + \rho e^{\Psi}$ sobre el círculo $|Z-Z_0| = \rho$, se tiene

$$(\rho e^{i\Psi}-re^{i\theta})(\rho e^{-i\theta}-re^{-i\theta}) = |\rho e^{i\Psi}-re^{i\theta}|^2 = |\rho e^{i\Psi}-(Z-Z_0)|^2$$

así f puede expresarse en el desarrollo de la forma siguiente:

Sea $Z = \rho e^{i\Psi}$, $Z_o = re^{i\theta}$ así:

$$f(Z) = \frac{Z + (Z-Z_o)}{Z - (Z-Z_o)} = \frac{2Z - Z_o}{Z - (Z-Z_o)} = \frac{2Z}{Z_o} - 1$$

$$f(Z) = -1 + \frac{2\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\Psi} - (Z-Z_o)}$$

$$f(Z) = -1 + 2\left[1 + \frac{Z-Z_o}{\rho e^{i\Psi}} + \frac{(Z-Z_o)^2}{\rho^2 e^{2i\Psi}} + \dots\right]$$

$$f(Z) = -1 + 2 + \frac{2(Z-Z_o)}{\rho e^{i\Psi}} + \frac{2(Z-Z_o)}{\rho^2 e^{2i\Psi}} + \dots\Big]$$

$$f(Z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Z-Z_o)^n}{\rho^n e^{i\Psi}}$$

$$f(Z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Z-Z_o)^n}{\rho^n} e^{-in\Psi}, \text{ donde } (Z-Z_o) = re^{i\theta};\ (r < \rho)$$

en efecto,

$$f(Z) = u(r,\theta)+iv(r,\theta) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\rho^n}\left[\cos(n\Psi) - i\operatorname{sen}(n\Psi)\right]$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos(n\Psi) + 2i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \operatorname{sen}(n\Psi)$$

de donde

$$u(r,\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos(\theta-\Psi) \tag{7.14}$$

y $$v(r,\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \operatorname{sen}(\theta-\Psi) \tag{7.15}$$

luego comparando (7.14) y (7.15) con las ecuaciones (7.13)

se obtiene:

$$u(r,\theta) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta-\Psi)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{\rho})^n \cos(\theta-\Psi) \qquad (7.16)$$

$$v(r,\theta) = \frac{2\rho r \operatorname{sen}(\theta-\Psi)}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta-\Psi)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{\rho})^n \operatorname{sen} n(\theta-\Psi)$$

luego

$$f(Z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{\rho})^n \cos n(\theta-\Psi) + 2i \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{\rho})^n \operatorname{sen} n(\theta-\Psi)$$

lo que es lo mismo que

$$f(Z) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r \cos(\theta-\Psi)} + \frac{2i\rho r \operatorname{sen}(\theta-\Psi)}{\rho^2+r^2-2\rho r \cos(\theta-\Psi)} = u(r, \ )$$

$$+ iv(r,\theta)$$

tomando Re f(Z), obtenemos

$$f(Z) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r \cos(\theta-\Psi)}$$

por tanto

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\rho,\Psi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2+r^2-2\ r\cos(\theta-\Psi)} d\Psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\rho,\Psi)\, dZ \qquad (7.17)$$

es llamada <u>una integral de Poissón</u>.

TEOREMA 7.1.2.3

Sea u(x,y) una función armónica sobre $\mathbb{G}$, con armónica conjugada v(x,y), Z_o un punto de $\mathbb{G}$, arbitrario y sea $\Delta = \Delta(Z_o)$ la dis distancia entre Z_o y un vecindario de $\mathbb{G}$, entonces si

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta,\Psi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\Psi)} d\Psi \qquad (7.18)$$

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\rho,\Psi)\ \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\Psi)}\ d\Psi \tag{7.19}$$

para $r < \rho < \Delta$ y θ arbitrario, además

$v(r,\theta)$ puede expresarse en términos de $u(r,\theta)$ y tiene la forma

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\ \frac{2\rho r\ \mathrm{sen}\,(\theta-\Psi)}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\Psi)}\ d\Psi \tag{7.20}$$

DEMOSTRACION

Empezaremos utilizando la fórmula (7.7) y reemplazando r por - $\rho < \Delta$, $\forall\rho < \Delta$ y θ por Ψ, n por m, se obtiene

$$U(\rho,\Psi) = \alpha_o + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_m\cos(m\Psi) - \beta_m\,\mathrm{sen}\,(m\Psi)\right]\rho^m \qquad)7.21)$$

Usando la convergencia uniforme de (7.21) y multiplicando por $\cos(n\Psi)$, e integrando término a término con respecto a Ψ desde 0 a 2π, resulta:

$$\int_0^{2\pi} U(\rho,\Psi)\cos(n\Psi)d\Psi = \int_0^{2\pi}\alpha_o\cos(n\Psi) + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left[\alpha_m\cos(m\ )\cos(n\Psi)\rho^m\right]d\Psi$$
$$- \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left[\beta_m\mathrm{sen}(m\Psi)\cos(n\Psi)\rho^m\right]d\Psi$$

de donde

$$\alpha_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)d\Psi, \qquad \text{si} \quad n = 0 \tag{7.22}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\cos(n\Psi)\ d\Psi, \quad \text{para } n \geq 1$$

Similarmente multiplicando (7.21) por $\mathrm{sen}(n\Psi)$ e integrando término a término con respecto de Ψ de 0 a 2π obtenemos:

$$\frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\ \text{sen}(n\Psi)d\Psi \left< \begin{array}{ll} 0, & n = 0 \\ & \\ -\beta_n, & n \geq 1 \end{array} \right. \qquad (7.23)$$

luego sustituyendo (7.20) y (7.21) en (7.7) y (7.8) obtenemos:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)d\Psi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\cos(n\Psi)\cos(n\theta)r^n d\Psi$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\,\text{sen}(n\Psi)\,\text{sen}(n\theta)r^n d\Psi$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)d\Psi + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{r^n}{\rho^n}\right)\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\left[\cos(n\Psi)\cos(n\theta) + \text{sen}(n)\,\text{sen}(n\theta)\right]d\Psi$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)d\Psi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cos\left[n(\theta-\Psi)\right]d\Psi \qquad (7.24)$$

similarmente se consigue

$$v(r,\theta) = \beta_o + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\ \text{sen}\ n\ (\theta-\Psi) \qquad (7.25)$$

luego, las ecuaciones (7.18) y (7.19), por aplicación directa del Lema 7.1.2.1 y multiplicando por $\frac{1}{2\pi}$ $u(\rho,\Psi)$ luego integrando término a término con rescpecto a Ψ, tomando fijo r y ρ: - ($r < \rho$) y comparando el resultado con (7.25)

Además dado que (7.24) es armónica sobre $\mathbb{G}$, podemos reemplazar $u(r,\theta)$ por $v(r,\theta)$ obteniendo (7.19)

COROLARIO 7.1.2.1 (Fórmula de Schwarz's

Con la misma notación del Teorema (7.1.2.2), sea f una función analítica sobre $\mathbb{G}$ con $u(r,\theta)$ como parte real de f, entonces

$$f(Z) = i\beta_o + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\ \frac{\rho e^{i\Psi}+(Z-Z_o)}{e^{i\Psi}-(Z-Z_o)}\ d\Psi \qquad (7.26)$$

en términos de $u(r,\theta)$, es la representación conocida como fórmula de Schwarz's

PRUEBA

Sea $f(Z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$

multiplicando (7.10) por i y añadiendo este resultado, en --- (7.18) y utilizando el hecho de que $f(Z) = \frac{\rho e^{i\Psi}+(Z-Z_o)}{\rho e^{i\Psi}-(Z-Z_o)}$ se ob-- tiene el resultado deseado.

TEOREMA 7.1.2.4

Con utilización del Teorema 7.1.2.2 se tiene que

$$u(x_o,y_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} u(\rho,\Psi)\ d\Psi \qquad (7.27)$$

donde $Z_o = (x_o,y_o)$, $\rho < \Delta(Z_o)$, o más explicitamente

$$u(x_o,y_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_o+\rho\cos\Psi,\ y_o+\rho \operatorname{sen}\Psi)\, d\Psi$$

En otras palabras, el valor de una función armónica $u(x,y)$ en un punto (x_o,y_o) es de valor promedio sobre el círculo $|Z-Z_o|=\rho$ con centro en $Z_o = (x_o,y_o)$

PRUEBA

fijando que $r = 0$ en la relación (7.18), obtenemos

$$u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\ \frac{\rho^2}{\rho^2}\, d\Psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\,d\Psi = u(0,\theta)$$

Además como f es analítica sobre G y contiene a $|Z-Z_o|=\rho$ en su interior, entonces

$$f(Z_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Z_o+\rho e^{i\Psi})\, d\Psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[(x_o,y_o)+\rho(\cos\Psi + i\,\mathrm{sen}\,\Psi)\right]d\Psi$$

$$f(Z_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x_o+\rho\cos\Psi+iy_o\mathrm{sen}\Psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x_o+\rho\cos\Psi,\ y_o + \rho\mathrm{sen}\Psi)d\Psi$$

por tanto $u(x_o,y_o) = \frac{1}{2\pi}\int^{\pi} u(x_o+\rho\cos\Psi,\ y_o+ \mathrm{sen}\Psi)\ d\Psi$

7.1.3 <u>El problema de Dirichlet</u>

ENUNCIADO 7.1.3.1

Sea G un dominio con vecindario Γ, y sea $\mu(Z) = \mu(x,y)$ una fun ción real y contínua definida sobre Γ. Considerar el problema de encontrar una función $u(x,y)$ tal que

1. $u(x,y)$ es armónica sobre $\mathbb{G}$ y contínua sobre $\bar{\mathbb{G}}$
2. $u(x,y) = \mu(x,y)$ en todo punto de Γ.

Este es el problema de Dirichlet, de gran importancia en Física Matemática, cono en la Teoría de funciones

OBSERVACION 7.1.3.1

A obtener una interpretación física del problema de Dirichlet; supongamos una armazón de alambre rígida con la forma de una - curva cerrada, soportada sobre una membrana cuya frontera es - más firme que la armazón; supongamos la proyección de la arma-- zón sobre el plano x - y es una curva de Jordan Γ con interior $I(\Gamma)$ (ver la figura 27) y supongamos la membrana se considera como una superficie con ecuación

$$u = u(x,y)$$

donde u(x,y) es contínua sobre $\overline{I(\Gamma)}$. Claramente, el valor de u(x,y) sobre Γ depende sobre la posición de la armazón; sea ese valor del vecindario denotado por μ(x,y). Entonces la posición de equilibrio de la membrana, sin considerar cargas externas, se consigue mediante la solución de la ecuación.

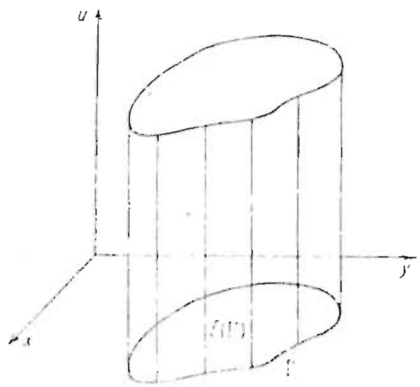


FIGURA 27

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 = \nabla^2 U = 0$$

la cual satisface la condición de Frontera u(x,y) = μ(x,y) en todo punto de Γ.

En otras palabras, el problema de determinar la posición de equilibrio de una membrana alargada y descargada se reduce a encontrar una función armónica sobre I(Γ) y continua sobre $\overline{I(\Gamma)}$, la cual se obtiene tomando valores μ(x,y) sobre Γ. Pero esto es justamente el problema de Dirichlet para G = I(Γ).

Consideremos ahora, el problema de Dirichlet en forma simple, pero de gran importancia que es el caso, donde el dominio G es un disco $|Z-Z_o| < \rho$ con vecindario o frontera circular

Γ: $|Z-Z_o| = \rho$. Entonces en este caso, la función $\mu(Z)$ toma la forma

$$\mu(Z) = \mu(Z_o + \rho e^{i\theta}) = \mu(\Psi) \qquad (0 \leq \Psi \leq 2\pi)$$

donde se puede ver claramente que $\mu(\Psi)$ satisface la condición inicial $\mu(0) = \mu(2\pi)$

si $\mu(\Psi)$ cohincide con el valor $\mu(\rho,\Psi)$, tomando sobre Γ por alguna función $\mu(r,\theta)$ cuál ésta es armónica sobre el disco $|Z-Z_o| < \rho'$, $(\rho' > \rho)$ donde ρ' puede ser muy grande en $\mathbb{G}$, entonces, dada la relación

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\,\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta-\Psi)}\,d\Psi$$

así el problema de Dirichlet , tiene solución; (ver teorema, 7.1.2.3)

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\Psi)\,\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta-\Psi)}\,d\Psi \qquad (7.28)$$

en términos de la integral de Poisson's.

TEOREMA 7.1.3.1 (problema de Dirichlet para un disco)

Sea $\mathbb{G}$ el disco $|Z-Z_o| < \rho$ con frontera Γ: $|Z-Z_o| = \rho$, y sea - $\mu(\Psi)$ una función real y continua en el intervalo $[0,2\pi]$ tal - que satisface la condición $\mu(0) = \mu(2\pi)$. Entonces la función - $u(r,\theta)$ definida por la integral (7.28), definida para algún - punto (r,θ) en $\mathbb{G}$, y por

$$u(\rho,\Psi) = \mu(\Psi)$$

Para algún punto (ρ,Ψ) en Γ, resuelve el problema de Dirichlet, para el dominio $\mathbb{G}$.

PRUEBA

Primero probaremos que la integral (7.28), define una función armónica sobre $\mathbb{G}$.

De acuerdo al lema 7.1.2.1, y $r < \rho$ se tiene:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\Psi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r - 2\rho r\cos(\theta-\Psi)}\, d\Psi$$

así por la relación (7.12) se tiene:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\Psi)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n(\theta-\Psi)\right] d\Psi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \mu(\Psi)\,d\Psi + \sum^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\Psi)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n\,(\theta-\Psi)\, d\Psi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\Psi)\,d\Psi + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi}\mu(\Psi)\cos n\Psi\, d\Psi\right] r^n .\ \cos(n\theta)\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} \mu(\Psi)\ \mathrm{sen}\, n\,\Psi\right] r^n \mathrm{sen}(n\theta)\right\}$$

$$(r,\theta) = \alpha_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n \cos(n\theta) - \beta_n \mathrm{sen}(n\theta)\right] r^n \tag{7.29}$$

donde

$$\alpha_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\Psi)\ d\Psi\ ,\quad \alpha_n = \frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} \mu(\Psi)\cos(n\Psi)\ d\Psi\ ,\ (n \geq 1)$$

$$,\quad -\beta_n = \frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} \mu(\Psi)\,\mathrm{sen}(n\Psi)\ d\Psi$$

luego

$$|\alpha_n + i\,\beta_n| = \left|\frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi}\mu(\Psi)\cos(n\Psi)\,d\Psi - \frac{i}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi}\mu(\Psi)\operatorname{sen}(n\Psi)\,d\Psi\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi}\mu(\Psi)e^{-in\Psi}d\Psi\right| \leq \frac{1}{\pi\rho^n}\left|\int_0^{2\pi}\mu(\Psi)\,d\Psi\right|$$

$$= \frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi}|\mu(\Psi)|\,d\Psi \qquad (7.30)$$

$$|\alpha_n + i\,\beta_n| \leq \frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi}|\mu(\Psi)|\,d\Psi$$

$$\rho^n|\alpha_n + i\,\beta_n| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\mu(\Psi)|\,d\Psi$$

$$\rho|\alpha_n + i\beta_n|^{1/n} \leq \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\mu(\Psi)|\,d\Psi\right)^{1/n}$$

$$\rho \leq \frac{\left(\frac{1}{\pi}\int^{2\pi}|\mu(\Psi)|\,d\Psi\right)^{1/n}}{\left(|\alpha_n+i\beta_n|\right)^{1/n}}$$

En consecuencia

$$\rho \leq \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n+i\beta_n|^{1/n}} = R;$$ como $r < \rho \leq R$, entonces

y la integral (7.29) es convergente en $|Z-Z_\circ| < R$ y por la representación en el teorema 7.1.2.2 $u(r,\theta)$ es analítica sobre $\mathbb{C}$.

Ahora se muestra que la función $u(r,\theta)$, definida por la inte--

gral (7.28) tiene aproximación $\mu(\Psi_o)$ al punto (r,θ) en $\mathbb{E}$, como algún punto fijo (ρ,Ψ_o) en Γ. En efecto.

Si consideramos $u(r,\theta) \equiv 1$ en

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\, \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\Psi)}\, d\Psi$$

obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int^{\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2+r\ -2\rho r\cos(\theta-\Psi)}\, d\Psi = 1 \qquad (7.31)$$

así la diferencia será:

$$u(r_n,\theta_n) - \mu(\Psi_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\mu(\Psi) - \mu(\Psi_o)\right] \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2+r_n^2-2\rho r_n\cos(\theta_n-\Psi)}\, d\Psi$$

donde (r_n,θ_n) es una sucesión arbitraria, de puntos en $\mathbb{E}$, convergente en el vecindario del punto (ρ,Ψ_o). Dado que $\mu(\Psi)$ es -uniformemente contínua sobre Γ, se tiene que,

dado un $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|\mu(\Psi) - \mu(\Psi_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |\Psi - \Psi_o| < 2\delta \qquad (7.32)$$

asumiendo que

$$-\beta_n = \frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} u(\rho,\Psi)\ \mathrm{sen}(n\Psi) d \quad \text{en (7.30) es tal que } |\Psi-\Psi_o| < 2\delta$$

así como $\Psi_o > 0$, dado que θ y Ψ son medidos con ángulos positivos, se tiene entonces que $\Psi_o - 2\delta >$ y $\Psi_o + 2\delta < 2\pi$, el cual -podemos escribir

$$|u(r_n,\theta_n) - \mu(\Psi_o)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\Psi_o-2\delta}\cdots\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Psi_o-2\delta}^{\Psi_o+2\delta}\cdots + \cdots + \frac{1}{2\pi}\int_{\Psi_o+2\delta}^{2\pi}\cdots\right| \tag{7.33}$$

haciendo una estimación, para los términos medios, se tiene

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Psi_o-2\delta}^{\Psi_o+2\delta}\qquad\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2 - r_n^2}{\rho^2+r_n^2-2\rho r_n\cos(\theta-\Psi)}\,d\Psi = \frac{\varepsilon}{2}$$

donde usamos (7.31) y (7.32), así para $|\theta_n - \Psi_o| < \delta$ se tendrá

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\Psi_o-2\delta}\cdots\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Psi_o+2\delta}^{2\pi}\qquad\right| \leq 2M\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{\rho^2 - r_n^2}{\rho^2+r_n^2-2\rho r_n\cos(\theta_n-\Psi)}\left(\int_0^{\Psi_o-2\delta}d\Psi + \int_{\Psi_o+2\delta}^{2\pi}d\Psi\right)$$

$$\leq 2M\,\frac{\rho^2 - r_n^2}{\rho^2+r_n^2-2\rho r\cos(\theta-\Psi)}\,d\Psi \tag{7.34}$$

donde

$$M = \max_{\Psi\varepsilon[0,2\pi]}|\mu(\Psi)|\ ,\ y \qquad \cos(\theta_n-\Psi) < \cos\delta$$

además

$$\frac{\rho^n - r_n^2}{\rho^2+r_n^2-2\rho r_n\cos(\theta-\Psi)} < \frac{\rho^n - r_n^2}{\rho^2+r_n^2-2\rho r\cos\delta}$$

si $|\theta_n - \Psi_o| < \delta$ y Ψ pertenece al intervalo $[0,\Psi_o-2\delta]$ ó $[\Psi_o+2\delta,2\pi]$ entonces el miembro derecho de (7.34) $\to 0$, como $r_n \to \rho$

y en consecuencia si $n \to \infty$ el miembro izquierdo de (7.34) $< \varepsilon/2$ (siempre que $|\theta_n - \Psi_o| < \delta$, para $n \to \infty$)

asi

$$|u(r_n,\theta_n) - \mu(\Psi_o)| < 2M \frac{\rho^2 - r_n^2}{\rho^2 - r_n^2 - 2\rho r \cos\delta} \text{ , donde } M = \max_{\Psi\varepsilon[0,2\pi]} |\mu\ \Psi|$$

$$|u(r_n,\theta_n) - \mu(\Psi_o)| < \varepsilon \quad , \quad \text{sí } n \to \infty$$

Es decir

$$\lim_{n\to\infty} \left[U(r_n,\theta_n) - \mu(\Psi_o)\right] = 0 \tag{7.35}$$

donde $\{(r_n,\theta_n)\}$ es una sucesión arbitraria, de puntos en $\mathbb{G}$ con acercamiento a (ρ,Ψ_o).

La ecuación (7.35), puede usarse si alguno ó todos los puntos de la sucesión $\{(r_n,\theta_n)\}$, puede estar situado sobre Γ, así.

Usando la continuidad de $\mu(\Psi)$ y recordando que $U(\rho.\Psi) = \mu(\Psi)$, se deduce que $u(r,\theta)$ es contínua sobre $\bar{\mathbb{G}}$. Y la prueba se completa.

7.1.4 Definiciones Básicas y Clasificación de Fluidos

DEFINICION 7.1.4.1

Llamaremos Fluido a la sustancia que se deforma contínuamente cuando se somete a una tensión de cortadura y la fuerza cortante es la componente de dicha fuerza, tangencial a la superficier de la Fuerza, y esta fuerza dividida por el área de la superficie, es la tensión de cortadura media sobre el área considerada.

OBSERVACION 7.1.4.1

La tensión de cortadura en un punto, es el límite del cociente de la fuerza cortante por el área, cuando el área tiende a cero, en el punto.

DEFINICION 7.1.4.2

Se dice que un Fluido es Permanente, o de régimen estacionario cuando las propiedades del Fluido y las condiciones del movimiento en cualquier punto no cambian, respecto al tiempo, esto puede expresarse por

$$\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} = 0 \qquad \mathbb{V} = f(\rho, p, T) \tag{7.36}$$

donde las coordenadas del punto x,y,Z permanecen constantes, - es decir, en el Flujo permanente no hay cambios ni en la densidad ρ, ni en la presión p, ni en la temperatura T, con el tiempo en cualquier punto; así:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{7.37}$$

DEFINICION 7.1.4.3

Llamarémos flujo bidimensional al Flujo donde todas las partículas siguen trayectorias identicas en planos paralelos; por - consiguiente no hay cambios, en todo flujo normal a dichos planos.

DEFINICION 7.1.4.4

Llamaremos línea de Corriente a la línea contínua trazada en - el fluido que es a cada punto tangente al vector velocidad.

OBSERVACION 7.1.4.4

A travéz de una línea de corriente, no puede pasar fluido, así; como una partícula se nueve en dirección de una línea de corriente entonces, en cualquier instante su desplazamiento δS con las componentes $(\delta x, \delta y)$ tiene la dirección del vector velocidad q con coordenadas (u,v). Así

$$\frac{\delta x}{u} \quad \frac{\delta y}{v}$$

establece la proporcionalidad entre las componentes; que en forma diferencial se expresa

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \tag{7.38}$$

es la ecuación diferencial de una línea de corriente, así la solución de (7.38) establece una línea de corriente.

DEFINICION 7.1.4.5

Llamaremos flujo estacionario o uniforme al flujo de Fluido donde la velocidad del Fluido en un punto depende de la posición (x,y) y no del tiempo.

DEFINICION 7.1.4.6

Llamaremos fluido incomprensible, al fluido tal que la densidad (o masa por unidad de volúmen) del fluido es constante.

DEFINICION 7.1.4.7

Se dice que un fluido es no viscoso, si no tiene viscosidad, es decir, si el fluido no tiene fricción interna, tal que las fuerzas de presión sobre la superficie, son perpendiculares a la superficie.

DEFINICION 7.1.4.8

Se dice que un fluido es ideal si es no viscoso e incomprensible.

DEFINICION 7.1.4.9

Llamaremos flujo irrotacional o circulación libre a la circulación del Fluido a lo largo de una trayectoria cerrada tal que dicho Fluido tiene circulación cero.

7.2 EL POTENCIAL COMPLEJO

7.2.1 Líneas y Trayectorias

DEFINICION 7.2.1.1

Sea $\mathbb{D}$ un dominio $f: \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de variable compleja tal que

$f(Z) = u(x,y) + iv(x,y)$; si consideramos que u,v, sean funciones de la variable compleja $Z = x + iy$, $u: \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$: $(x,y) \rightsquigarrow u=\phi(x,y)$

$v: \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \rightsquigarrow v = \Psi(x,y)$, entonces diremos u y v son trayectorias curvas de nivel si $\phi(x,y) = \alpha$, $\Psi(x,y) = \beta$, α, β ctes. (7.39)

7.2.2 Flujo de Fluido Bidimensional

Las funciones armónicas, Juegan un papel importante en la mecanica de los fluidos consideraremos el problema en condiciones de estado estacionario bidimensional, es decir el movimiento - del fluido se supone el mismo en todos los planos paralelos al plano x-y, siendo la velocidad paralela o ese plano independiente del tiempo.

Denotemos la velocidad de una partícula del fluido en un punto cualquiera (x,y), por el vector $\mathbb{V} = (p,q)$, así el vector que representa el número complejo, queda determinado por

$$\mathbb{V} = p + iq \tag{7.40}$$

$$\mathbb{V} = p(x,y) + iq(x,y)$$

por consiguiente en los puntos interiores a una región de flujo en la que no existen fuentes o sumideros del flujo, las funciones p, q y sus primeras derivadas parciales, se suponen que son contínuas.

DEFINICION 7.2.2.1

Sea c un contorno, L la longitud de arco sea $V_T(x,y)$. La componente tangencial del vector velocidad a lo largo de C se define la circulación del Fluido a lo largo de C con respecto de L como

$$\int_c V_T(x,y)\, dL = \int_c p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy \tag{7.41}$$

OBSERVACION 7.2.2.1

La relación de circulación a lo largo de C, a la longitud de C es la velocidad média del Fluido a lo largo del contorno y además cuando C es cerrada y simple, contenido en un Dominio simplemente conexo de un flujo que no contiene fuentes ni sumideros se tiene que:

$$\int_C V\ (x,y)\ dL = \int_C p(x,y)\ dx + q(x,y)\ dy$$

Así por teorema de Green, podemos escribir

$$\int_C p(x,y)\ dx + q(x,y)\ dy = \iint_R \left[\frac{\partial q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial p(x,y)}{\partial y} \right] dx\,dy$$

donde R es la región cerrada limitada por C.

En el caso en que $C = \{Z \in \mathbb{C}\ /\ |Z-Z_o| = r\}$, y tomando el sentido positivo. Una velocidad media a lo largo de C, se encuentra al dividir la circulación entre $2\pi r$, y la velocidad angular media correspondiente del fluido alrededor del eje del círculo se encuentra al dividir esa velocidad media entre r.

$$\frac{1}{2\pi r^2} \iint_R \frac{1}{2} \left[\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right] dx\,dy = \omega(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) \qquad (7.42)$$

Sobre la región circular R limitada por C.

Su límite cuando r tiende a cero es el valor w en el punto (x_o, y_o), por tanto $\omega(x,y)$, llamada rotación del fluido, representa el valor límite de la velocidad angular de un elemento circular de fluido, cuando el círculo se contrae hacia su centro, el punto (x,y).

Si $\omega(x,y) = 0$ en cada punto de cierto dominio, entonces el flujo se llama IRROTACIONAL en ese dominio.

en consecuencia

$$\int_C p(x,y)\ dx + q(x,y)\ dy = 0$$

si (x_o, y_o) es cualquier punto fijo en $\mathbb{D}$, podemos definir la función

$$\phi(x,y) = \int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} p(r,t)\,dr + q(r,t)\,dt \qquad (7.42')$$

en el dominio $\mathbb{D}$

como la integral (7.42') es independiente de la trayectoria tomada entre los límites de integración, si dicha trayectoria es tomada en un entorno dentro de $\mathbb{D}$.

puesto que

$$\phi(x,y) = 0$$

entonces,

$$p(x,y) = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}, \quad q(x,y) = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} \qquad (7.43)$$

así el vector velocidad $\mathbb{V} = p + iq$ es entonces $\nabla\phi$; y la derivada direccional de ϕ en cualquier dirección representa la componente de la velocidad de flujo en esa dirección.

DEFINICION 7.2.2.2

Sea (x_o, y_o) un punto fijo, $\mathbf{V}$ la velocidad de un fluido no viscoso e incompresible, entonces el potencial de velocidades en el punto (x_o, y_o) se define mediante la relación

$$\phi(x,y) = \int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} p(r,t)\,dr + q(r,t)\,dt \qquad (7.44)$$

tal que

$$\nabla^2\phi(x,y) = 0$$

7.2.3 Función corriente

Sea $\mathbb{V}$ el vector velocidad

$$\mathbb{V} = p(x,y) + iq(x,y)$$

Para un Dominio simplemente conexo, en el que el flujo es irrotacional puede escribirse como

$$\mathbb{V} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (7.45)$$

donde ϕ es el potencial de velocidades, si $\mathbf{V} \neq (0,0)$ y normal a una equipotencial que pasa por el punto (x,y), si además - $\psi(x,y)$ es una función armónica conjugada de $\phi(x,y)$, el vector velocidad es tangente a una curva de nivel definida mediante - $\psi(x,y) = c$, entonces las curvas $\psi(x,y) = c$ se llaman de corriente del flujo y la función ψ es llamada función corriente.

DEFINICION 7.2.3.1

Sea ϕ: una función armónica, definida en un conjunto simplemente conexo $\mathbb{D}$, ϕ potencial de velocidades, se dice que ψ es una función corriente, si ψ es la armónica conjugada de ϕ.

DEFINICION 7.2.3.2

A la familia de curvas $\phi(x,y) = \alpha$, $\psi(x,y) = \beta$ donde α, β son - constantes, le llamaremos Trayectoria equipotenciales del flujo.

DEFINICION 7.2.3.3

Sea F una función compleja de variable compleja F analítica en un dominio $\mathbb{D}$ llamaremos Potencial complejo del flujo, a la - función definida por

$$F(Z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y). \qquad (7.46)$$

Es de notar que

$$F'(Z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

de acuerdo a las ecuaciones de Cauchy - Riemann se tiene que -

$$F'(Z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\,\frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (7.47)$$

luego en vista de que la expresión de velocidad definida en -- (7.43) la expresión (7.47), puede escribirse como

$$F'(Z) = p(x,y) - iq(x,y)$$

queda entonces

$$\mathbb{V} = \overline{F'(Z)}$$

y tiene como rapidéz

$$|\,\mathbb{V}| = |\overline{F'(Z)}| = |F'(Z)|$$

como ϕ es armónica, en un dominio simplemente conexo $\mathbb{D}$, una - armónica conjugada de ϕ en ese dominio, puede escribirse como

$$\psi(x,y) = \int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} - \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial t}\,dr + \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial r} \qquad (7.48)$$

como la integración es independiente de la trayectoria, nuevamente con la ayuda de las ecuaciones (7.43) la ecuación (7.46) puede escribirse como

$$\psi(x,y) = \int_C - q(r,t)\,dr + p(r,t)\,dt \qquad (7.49)$$

donde C es cualquier contorno de $\mathbb{D}$ de (x_o, y_o) a (x,y), deberá de interpretarse, la ecuación (7.47) como la integral con respecto a la longitud de arco L, a lo largo de C de la componente normal $V_N(x,y)$, del vector cuyas componetes x,y son $p(x,y)$ y $q(x,y)$, respectivamente, así podremos escribir

$$\psi(x,y) = \int_C \mathbf{V}_N(r,y)\, dL \qquad (7.50)$$

Fisicamente (7.50) representa la tasa temporal de flujo por unidad de volúmen a travéz de una superficie de altura unitaria sobre la curva C perpendicualr al plano x - y.

Como se demostró en el capítulo VI Teorema 6.2.1.2 y Teorema 7.1.1.1 si ϕ y ψ son funciones analíticas en el plano x,y y armónicas entonces existe una transformación

$$Z = f(W) = x(u,v) + i\, y\,(u,v) \qquad (7.51)$$

donde f es analítica, transforma a $\phi(x,y)$ y $\psi(x,y)$ en funciones armónicas de u, v. Estas nuevas funciones se pueden interpretar como potencial de velocidad y función corriente respectivamente, para un flujo de la neuva región en el plano u - v, así, una línea de corriente o frontera $\psi(x,y) = c$ en el plano x - y se transforma en una línea de corriente o frontera natural $\psi(x(u,v),\, y(u,v)) = c$ en el plano u - v.

7.2.4 Algunas aplicaciones a Flujo de Fluidos

7.2.4.1 Flujo alrededor de un ángulo

Consideremos el potencial complejo

$$F(Z) = \alpha Z, \quad \alpha;\ \text{constante positiva} \tag{7.52}$$

Se tiene entonces que

$$F(x,iy) = \alpha(x,iy) = \alpha x + i\alpha y = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

de donde

$$\phi(x,y) = \alpha x, \quad \psi(x,y) = \alpha y \tag{7.53}$$

considerando las líneas de corriente

$\psi(x,y) = c\ ; \quad \alpha y = c \implies y = \frac{c}{\alpha}$, que son rectas (7.54

horizontales, y la velocidad de cualquier punto es,

$$V = \overline{F'(Z)} = \alpha$$

Aquí, un punto (x_o,y_o), tal que $\psi(x,y) = 0$, es cualquier punto situado en el eje x, (observar 7.54, c = 0).

Si el punto (x_o,y_o) se fija ó bién se toma como orígen, entonces $\psi(x,y)$ es la tasa de flujo a travéz de cualquier contorno trazado desde el origen al punto (x,y); (ver figuras 28-29). El flujo es uniforme y hacia la derecha; y puede interpretarse co como el flujo uniforme en el semiplano superior, limitado por el eje x $\underset{(c=0)}{(y = 0)}$ y entre dos rectas paralelas $y = y_1$, $y = y_2$.

Pero estamos interesados en calcular el potencial complejo en el plano W

en efecto,

Para determinar un flujo en el cuadrante $U \geq 0$, $V \geq 0$, tomaremos la transformación

$$Z = w^2$$

que mapea el cuadrante sobre la mitad superior del plano $x - y$ asi que

$$x + iy = (u + iv)(u + v) = u(u + iv) + iv(u + iv)$$

$$= u^2 + iuv + iuv - v^2$$

$$= u^2 - v^2 + 2iuv$$

de donde

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv, \text{ son armónicas.}$$

Ya que $y = 2uv$ es la función corriente y $\psi(x,y) = \alpha y$ se tiene que

$$\psi(u,v) = 2\alpha uv \quad \text{es la función corriente}$$

así $2\alpha uv = c$ son las línea de corriente

$$c = \frac{c}{2\,\alpha u} \quad \text{son ramas de hipérbolas rectangulares}$$

El potencial complejo es

$$F(W) = \alpha W^2$$

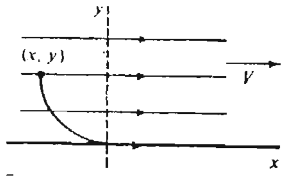


FIGURA 28

y la velocidad del fluido es

$$V = \overline{F'(W)} = a\alpha\bar{W}$$

$$V = 2\alpha(u - iv)$$

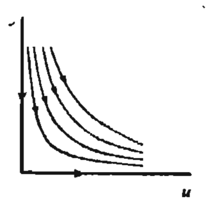


FIGURA 29

con rapidez

$$|V| = 2\alpha\sqrt{u^2+v^2}$$

7.2.4.1.1 Consideremos un fluido que se mueve con velocidad constante v_o en una dirección que hace un ángulo θ con el eje x, positivo.

Determinar

a) El potencial complejo

b) El potencial de velocidades y la función corriente

c) Las ecuaciones para las trayectorias y líneas equipotenciales.

SOLUCION

Consideremos la figura 30

a) las componentes de la velocidad v_o son:

$$v_{ox} = v_o \cos\theta ,$$

$$v_{oy} = v_o \operatorname{sen}\theta$$

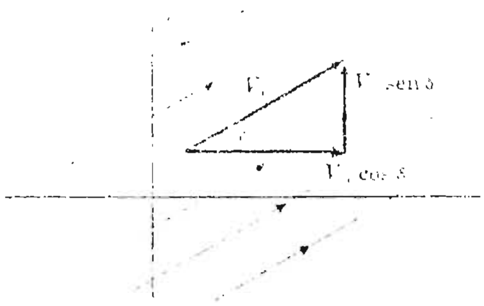


FIGURA 30

así la velocidad compleja es

$$v = v_{ox} + i v_{oy}$$

$$v = v_o \cos\theta + i v_o \operatorname{sen}\theta$$

$$v = v_o e^{i\theta}$$

y el potencial complejo está dado por

$\frac{dv}{dZ} = \bar{v} = v_o e^{-i\theta}$ que integrando se obtiene

$$v(Z) = v_o e^{-i\theta} Z$$

b) El potencial de velocidades ϕ y la función corriente, son - las partes real e imaginaria del potencial complejo respectivamente, en este caso tendrémos

$$v(Z) = v_o e^{-i\theta} Z = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

$$v(Z) = v_o e^{-i\theta}(x+iy) = v_o\left[xe^{-i\theta} + iye^{-i\theta}\right]$$

$$= v_o\left[x(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) + iy\,(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)\right]$$

$$= v_o\, x\cos\theta - iv_o\,\mathrm{sen}\,\theta + iy\, v_o\cos\theta + y\, v_o\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$v(Z) = v_o(x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta) + i\, v_o\,(y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

de donde

$$\phi(x,y) = v_o(x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad \psi(x,y) = v_o(y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

c) -Las ecuaciones para las trayectorias están dadas por $\psi(x,y) = \beta = v_o(y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta)$, para valores distintos de β. Como es su fluido estacionario, es decir la velocidad -- depende del punto (x,y), se deduce que cada una de las trayectorias sigue el mismo rumbo que sigue una partícula del fluido.

-Las líneas equipotenciales están dadas mediante $\phi(x,y) = \alpha = v_o(x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)$, para valores diferentes - de α, puesto que son familias artogonales a las trayecto--- rias, entonces todos los puntos sobre una línea equipoten-- cial, están con igual potencial

7.2.5 Flujos especiales

DEFINICION 7.2.5.1

Sea f una función compleja de variable compleja Z = a un punto singular de f entonces. Llamaremos fuente y sumidero (o bien - líneas de fuente y líneas de sumidero respectivamente) tales - que en Z = a el fluido aparece o desaparece respectivamente, - es decir, si el fluido en Z = -a el fluido brota con velocidad constante, le llamaremos fuente, si en Z = +a desaparece, le - llamaremos sumidero.

En términos geométricos, una fuente es una línea normal al plano Z tal que el fluido fluye uniformemente en todas sus direcciones que forma un ángulo recto con ella.

DEFINICION 7.2.5.2

Se define el Doblete bidimensional como el caso límite de una fuente y un sumidero tal que existe una aproximación de una para el otro, y su intensidad por la distancia permanece constante.

DEFINICION 7.2.5.3

Supongamos que un fluido brota con velocidad constante, de una línea de fuente Z = a, supongamos que existe la transformación $e^{w} = (Z - a)^{k}$ entonces el potencial complejo que rige el movimiento del fluido en la fuente viene dado mediante la relación

$$w(Z) = k \ln (Z - a), \quad k > 0 \qquad (7.55)$$

A la relación (7.55) le llamaremos fuente en $Z = a$, donde k se llama "fuerza" de la fuente

DEFINICION 7.2.5.4

Sea un fluido con velocidad constante, llamaremos Sumidero en $Z = a$ si el potencial complejo viene dado mediante

$$w(Z) = -k \ln (Z - a) \tag{7.56}$$

DEFINICION 7.2.5.5

Llamaremos circulación de un fluido con velocidad cosntante si el flujo tiene potencial complejo de la forma

$$w(Z) = i\, k \ln(Z - a) \tag{7.57}$$

al punto $Z = a$, le llamaremos vértice y el valor k se llama fuerza del fluido

DEFINICION 7.2.5.6

Sea f una función compleja de variable compleja, supongamos que f' está definida en un dominio $\mathbb{D}$ tal que f' tiene un polo de segundo orden en $Z = \pm a$, sea $Z = -a$ una fuente, $Z = a$ un sumidero entonces la superposición de flujos queda determinado mediante el potencial complejo

$$f(Z) = k \ln \left(\frac{Z + a}{Z - a}\right) = k \ln (Z + a) - k \ln (Z - a) \tag{7.58}$$

7.2.5.1 Flujo alrededor de obstáculos

Considremos el problema, en flujo de fluidos, en la determinación de un modelo de flujo, tal que el fluido se mueva inicialmente con una velocidad uniforme v_0, en el cual se encuentre -

un obstáculo en la corriente de dicho fluido,

en efecto,

Inicialmente tratemos de encontrar un potencial complejo tal - que más allá del obstáculo la velocidad del flujo tenga una - magnitud constante $v_o = y$, además habrá de considerarse que el potencial complejo sea tal que las trayectorias representen la frontera del bostáculo, en seguida trataremos de obtener - una transformación con forma adecuada tal que todos las líneas de flujo que rodeen el obstáculo en el plano Z sean mopeadas - conformemente al signo w.

Considremos el potencial complejo, y el flulo está en el plano Z

$$f(Z) = v_o Z + G(Z) \tag{7.59}$$

Si el flujo más allá del obstáculo tiene velocidad con magni-- dud constante v_o, esto indica que en la relación (7.59)

$$\lim_{Z \to \infty} G'(Z) = 0$$

entonces el potencial complejo correspondiente al flujo unifor me en el plano w, esta dado mediante,

$$f(Z) = v_o w \tag{7.60}$$

al considerar la transformación

$$w = Z + \frac{a^Z}{Z}$$

Las líneas del flujo del plano w con v_o cte, del semiplano superior w.

Se transforman en el semiplano superior Z exterior al círculo C con radio "a"

Por consiguiente el potencial buscado es

$$f(Z) = v_o Z + v_o \frac{a^2}{Z} \tag{7.61}$$

notar que

$$\lim_{Z\to\infty} v_o \frac{a^2}{Z} = 0$$

La relación (7.61) puede escribirse

$$f(Z) = v_o \left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) \tag{7.62}$$

Es el potencial complejo correspondiente al flujo uniforme alrededor del obstáculo que en este caso es un cilindro.

ILUSTRACION 7.2.5.1.1

Dado el potencial $f(Z) = v_o(Z + \frac{a^2}{Z})$, donde v_o y a son constantes positivas. Demostrar que dicho potencial rige con flujo - uniforme que rodea al obstaculo $|Z| < a$ y que preserva las condiciones planteadas al inicio de la precente sección.

i) Encontremos en primer lugar las trayectorias y las líneas - equpotenciales

Sea $Z = re^{i\theta}$ un punto exterior a $|Z| < a$. Entonces el potencial (7.62) puede escribirse

$$f(Z) = v_o Z + v_o \frac{a^2}{Z} = \psi(r,\theta) + \psi(r,\theta)$$

$$= v_o re^{i\theta} + v_o \frac{a^2}{re^{i\theta}} = v_o(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta})$$

Transformando a la forma polar se obtiene

$$f(r,\theta) = v_o \{r\cos(\theta) + ri\,\text{sen}(\theta) + \frac{a^2}{r}[\cos(\theta) - i\,\text{sen}(\theta)]\}$$

$$f(r,\theta) = v_o \left[r\cos(\theta) + ir\,\text{sen}(\theta) + \frac{a^2}{r}\cos(\theta) - \frac{a^2 i}{r}\,\text{sen}(\theta)\right]$$

$$f(r,\theta) = v_o\, r\cos(\theta) + \frac{v_o a^2}{r}\cos(\theta) + i\,v_o r\,\text{sen}(\theta) - \frac{a^2}{r}\,\text{sen}(\theta)$$

de donde

$$\psi(r,\theta) = v_o(r + \frac{a^2}{r})\cos(\theta) \quad , \quad \psi(r,\theta) = v_o(r - \frac{a^2}{r})\,\text{sen}(\theta)$$

Por consiguiente las trayectorias estan calculadas mediante

$$v_o(r - \frac{a^2}{r})\,\text{sen}(\theta) = \beta \quad , \quad \beta \quad \text{constante} \tag{7.63}$$

y las líneas equipotenciales por

$$v_o(r + \frac{a^2}{r})\cos(\theta) = \alpha, \quad \alpha \quad \text{constante} \tag{7.64}$$

OBSERVACION FISICA.

En el caso en que $r = a$ en (7.63), representa una trayectoria, y $\beta = 0$ ya que a travéz de una trayectoria no puede existir - flujo, por consiguiente se puede considerar el círculo $r = a$ - con obstáculo en el camino del fluido.

ii) Determinación de que la velocidad del fluido despues del obstáculo permanece constante en primer lugar determinémos los puntos donde la velocidad es nula, es decir los puntos estacionarios.

De la relación (7.62)

$f'(Z) = 0 \Rightarrow f'(Z) = v_o(1 - \frac{a^2}{Z^2}) = 0$ de donde $Z = -a$, $Z = a$ son los puntos sobre el eje real, y ellos son los puntos estacionarios.

La velocidad del Fluido despues del obstáculo se obtiene mediante $|\overline{f'(Z)}|$.

$$f'(Z) = v_o(1 - \frac{a^2}{Z^2}) \neq 0, \text{ en efecto; sea } Z = re^{i\theta}$$

$$f'(Z) = v_o(1 - \frac{a^2}{r^2} e^{-2i\theta}) = v_o\{1 - \frac{a^2}{r^2}[\cos(2\theta) + i\,\text{sen}(2\theta)]\}$$

$$f'(Z) = v_o - v_o \frac{a^2}{r^2} \cos(2\theta) + i\, v_o \frac{a^2}{r^2} \text{sen}(2\theta)$$

la velocidad es

$$|\overline{f'(Z)}| = \sqrt{\{v_o[1 - \frac{a^2}{r^2}\cos(2\theta)]\}^2 + [v_o \frac{a^2}{r^2}\text{sen}(2\theta)]^2}$$

$$|\overline{f'(Z)}| = \sqrt{v_o^2[1 - \frac{2.a^2}{r^2}\cos(2\theta) + \frac{a^4}{r^4}\cos^2(2\theta)] + v_o^2 \frac{a^4}{r^4}\text{sen}^2(2\theta)}$$

$$|\overline{f'(Z)}| = v_o\sqrt{\frac{a^4}{r^4}\text{sen}^2(2\theta) + \frac{a^4}{r^4}\cos^2(2\theta) + 1 - 2\frac{a^2}{r^2}\cos(2\theta)}$$

$$|\overline{f'(Z)}| = v_o\sqrt{\frac{a^4}{r^4} + 1 - 2\frac{a^2}{r^2}\cos(2\theta)}$$

Por consiguiente

$$\lim_{\theta\to\infty} |\overline{f'(Z)}| = v_o\sqrt{1 - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{a^4}{r^4}}$$

así para que $|\overline{f'(Z)}| = v_o$ es necesario que $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Por tanto el fluido corre en la dirección del eje x positivo - con velocidad v_o constante.

7.3 FLUJO EN CANALES Y TRANSFORMACION CONFORME

Supongamos un flujo estacionario idealizado; en esta parte veremos como se puede tomar en cuenta las fuentes y sumideros en los problemas de flujo de Fluidos.

Consideremos un flujo estacionario, bidimensional comprendido entre dos planos $v = 0$, $v = \pi$, cuando el fuido está entrando a travéz de una rendija estrecha a lo largo de una, línea, en el primer plano perpendicular al plano u, v como se indica en la Figura 31

Establezcamos que Q sea la velocidad del flujo del fluido hacia el canal a travež de la rendija, (en unidades de volúmen por unidad de tiempo) por cada unidad de profundidad del canal, donde la profundidad se mide perpendicularmente al plano, u,v.

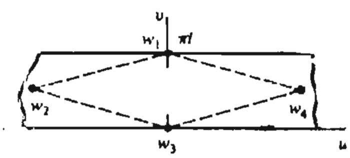


FIGURA 31

Entonces. Para estudiar el movimiento del fluido es necesario encontrar una transformación que sea conforme con c/u de los puntos de la trayectoria del fluido.

Consideremos la franja $0 < v < \pi$, sean w_1, w_2, w_3, w_4, puntos de la trayectoria del fluido tal que se considera dicha franja cono la forma límite de un rombo, con vértices en los puntos -

$w_1 = \pi i$, w_2, $w_3 = 0$ y w_4 cuando los puntos w_2 y w_4 se muevan infinitamente lejos hacia la izquierda y hacia la derecha respectivamente.

Por consiguiente.

En el límite los ángulos exteriores, toman valores,

$$k_1\pi = 0 \quad , \quad k_2\pi = \pi, \quad k_3\pi = 0, \quad k_4\pi = \pi \tag{7.65}$$

consideremos el plano xy tal que $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ y $x_4 = \infty$ y, x_1 para determinar.

Por el mapeo de Schwarz Christoffel, se tiene

$$\frac{dw}{dZ} = A(Z-x_1)^{0}.Z^{-1}(Z-1)^{0}$$

$$\frac{dw}{dZ} = \frac{A}{Z}$$

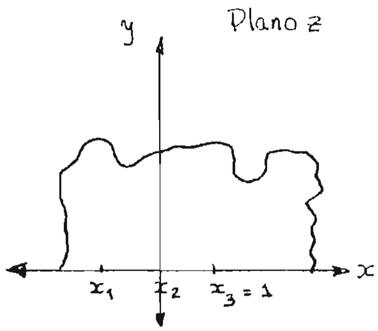


FIGURA 32

de donde

$$w = A\ln(Z) + - B \tag{7.66}$$

Ahora bien

Si $w = 0$, se tiene que, $B = 0$ así

$$A\ln(Z) = B$$

$$\ln(Z) = -\frac{B}{A}$$

$$Z = e^{-B/A}$$

$$Z = 1$$

La constante A debe ser real, puesto que el punto w se encuentra en el eje real, cuando $Z = x$, $x > 0$

Si $w = \pi i$. Es la imágen de $Z = x_1$, $x_1 < 0$

Por tanto en (7.66) se tiene

$$\pi i = A \ln |(x_1)| + A\pi i$$

Tomando las partes real e imaginaria se tiene que $|x_1| = 1$; - $A = 1$ y por tanto la transformación buscada es

$$w = \log Z \; ; \qquad (7.67)$$

si $x_1 = -1$, esta transformación, mapea el semiplano sobre la - franja.

Por consiguiente la tranformación (7.67) mapea la mitad supe-- rior del plano Z sobre la franja en el plano w.

Así la transformación inversa de (7.67)

$$Z = e^{w} = e^{u.iv} \qquad (7.68)$$

mapea la franja sobre el semiplano. Bajo la transformación - (7.68), la imágen del eje u es la mitad positiva del eje x.

La imágen de la recta $v = \pi$ es la mitad negativa del eje x. Por consiguiente la frontera de la franja se transforma en la frontera del semiplano.

Por otra parte, si $w = 0$ en (7.68) $Z = 1$ (7.69)

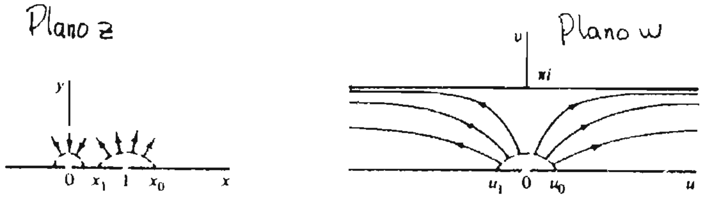
Así si $w = u_0 > 0$ entonces $Z = x_0 > 1$ la velocidad del flujo del fluido a travéz de una curva en el punto $w = u_0$ con el - punto (u,v) dentro de la franja, es una función de corriente - $\psi(u,v)$ para el flujo.

Si $u_1 < 0$, entonces, la velocidad del flujo hacia el canal a - travéz de la rendija es,

$$\psi(u_1,\ 0) = Q \qquad (7.70)$$

Bajo una transformación conforme, ψ queda expresada en función de x, e y y representa siempre la funciôn de corriente para el flujo de la regiôn correspondiente al plano Z, es decir como la velocidad de flujo es la misma en ambos planos, y en las curvas correspondientes, entonces podemos usar, el sîmbolo ψ, independientemente, para representar las funciônes de corriente.

Dado que la imâgen del punto $w = u_1$ es un punto $Z = x_1$, para - $0 < x_1 < 1$, la velocidad del flujo a travéz de cualquier curva que una los puntos $Z = x_o$, $Z = x_1$, (ver figura 33) que se encuentre a la mitad superior del plano Z, es también igual a Q. Por tanto en Z = 1 existe una fuente al igual que en w = 0.



FIGURAS 33

Si Re(w) $\longrightarrow \infty$. La imagen de 2 $\longrightarrow$ Z = 0, un sumidero de intensidad Q/2 aqui en este punto corresponde uu sumidero infinitamente alejado a la izquierda de la franja.

Ahora consideremos la velocidad del flujo a travéz de una curva con fronteras $v = 0$, $v = \pi$. Considerando la parte ezquierda de la franja y el flujo imágen a travéz de esa curva en el plano Z.

Así, el sumidero en el extremo izquierdo de la franja se transforma en un sumidero en el infinito del plano Z.

La función de corriente ψ, para el flujo en la mitad superior del plano Z es una función con valores constantes, a lo largo de cada una de las tres partes del eje x, y su valor debe de incrementarse en Q cuando el punto Z se nueva entorno de $Z = 1$ desde $Z = x_0$ hasta $Z = x_1$ y con intensidad Q/2 entorno a $Z = 0$. De manera que la función corriente queda determinada mediante

$$\psi(x,y) = \frac{Q}{\pi} \left| \arg(Z-1) \right| - \frac{Q}{2\pi} \arg(Z) \qquad (7.71)$$

y tiene como función potencial

$$f(Z) = \frac{Q}{\pi} \log(Z-1) - \frac{Q}{2\pi} \log(Z)$$

$$f(Z) = \frac{Q}{\pi} \log\left[(Z^{1/2} - \bar{Z}^{1/2}\right]$$

la función f está definida para la mitad superior del plano Z como

$$Z = e^{w} \text{ , entonces}$$

Una función potencial para el plano w es

$$f(w) = \frac{Q}{\pi} \log(e^{w/2} - e^{-w/2}) \qquad (7.72)$$

$$f(w) = \frac{Q}{\pi} \log\left[\operatorname{sen} h(w/2)\right] + \text{cte.}$$

y tiene por velocidad

$$f'(w) = \frac{Q}{2\pi} \cot h\left(\frac{\bar{w}}{2}\right) \tag{7.73}$$

se deduce de (7.73) que

$$\lim_{|w| \to \infty} f'(w) = \frac{Q}{2\pi}$$

así mismo

$w = \pi i$, entonces $f'(w) = 0$, y $w = \pi i$ es un punto de estanca---miento, por tanto la presión, a lo largo de la pared $v = \pi$ del canal, es maxima en los puntos opuestos a la rendija.

Como la función corriente $\psi(u,v)$ es la parte imaginaria de la función $f(w)$ en (7.72), y tiene por líneas de corriente

$$\Psi(u,v) = c$$

$$\frac{Q}{\pi} \operatorname{Arg}\left[\operatorname{sen} h\,(w/2)\right] = c$$

CAPITULO VIII

APLICACIONES DE LA TRANSFORMACION CONFORME EN TEORIA ELECTROMAGNETICA

Considerando el hecho básico de la gravitación, es que dos masas m_1, m_2 ejercen fuerzas entre si, podrémos considerar dicha fuerza como la interacción de dos particulas. Este punto de vista induce a pensar en la acción a distancia, puesto que dichas partículas interactúan aún no estando en contacto; si consideramos que una partícula de masa m, modifica de laguna manera el espacio que la rodea, entonces dirémos que se ha producido un CAMPO GRAVITACIONAL, así este cuerpo actuará sobre cualquier otra partícula de masa m_k. que se encuentre en el, ejerciendo la fuerza atracción gravitatoria sobre ella, por consiguiente el campo juega un papel intermedio, para poder determinar las fuerzas entre partículas de masa m_k.

De lo anterior se desprende que:

i) Dada las partículas situadas en los puntos P_k, con masa m_k respectivamente, entonces se deberá de encontrar el campo producido por una distribución dada de partículas con masa m_j.

ii) Para las partículas con masa m_k , debemos determinar las fuerzas que este campo ejerce sobre otra partícula de masa m_j, situadas a una distancia r_{kj}.

iii) El campo Gravitatorio es un modelo de un campo vectorial teniendo en cuenta que si en cada punto P_k se le asocia un vector'

iv) Además el campo gravitatorio es un modelo de campo estacionario, porque su módulo permanece constante al transcurrir el tiempo.

8.1 DEFINICIONES BASICAS

8.1.1 Potencial gravitatorio

Consideremos dos partículas situadas en los puntos Q y P de masas m_1 t m_2 respectivamente, (como se indica en la figura 34)

Segun la ley de gravitación de Newton, existe una fuerza entre ellas, cuya magnitud se define como.

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{8.1}$$

Donde r es la distancia entre las partículas y k es una constante que depende del sistema de unidades.

Si designamos el vector QP por $\vec{r}$.

Se puede expresar la fuerza por Unidad de masa en P, debida a la atracción de la partícula en Q, mediante.

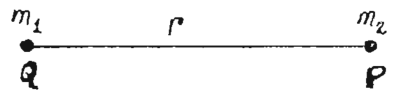


FIGURA 34

$$\mathbb{F} = -\frac{m\vec{r}}{r^3} = \nabla\left(\frac{m}{r}\right), \text{ donde } k = 1 \tag{8.2}$$

Donde $\mathbb{F}$ se denomina, la intensidad de fuerza o bien el campo gravitatorio de la fuerza en el punto P.

De (8.2) se deduce que $\mathbb{F}$ satisface

$$\nabla \times \mathbb{F} = \nabla \times \nabla \left(\frac{m}{r}\right) = 0,$$

siendo, por tanto un campo no disipativo de fuerza o bien campo conservativo.

El trabajo efectuado por la fuerza, cuando la partícula m está fija en Q, de atracción durante un desplazamiento infinitisi-- mal $d\vec{r}$ de la msa unitaria es

$$W = \mathbb{F}\, d\,\vec{r} \tag{8.3}$$

El trabajo total de la fuerza cuando la partícula unitaria se desplaza del infinito hasta una distancia r es

$$\int_{\infty}^{r} \mathbb{F} \circ d\vec{r} = \int_{\infty}^{r} \nabla \left(\frac{m}{r}\right) dr = \frac{m}{r} \int_{\infty}^{r} = \frac{m}{r} \tag{8.4}$$

es independiente de la trayectoria seguida por la partícula de masa m_2 en el punto P, y se denomina POTENCIAL en P debido a - la partícula de masa m_1 en el punto Q, y se designa por V, pudiendo escribir

$$V = \frac{m}{r} \tag{8.5}$$

La intensidad de la fuerza en P, debida al potencial es

$$\nabla V = \mathbb{F} = \nabla\left(\frac{m}{r}\right) \tag{8.6}$$

es decir, la intensidad en un punto cualquiera es igual al gradiente del potencial.

Para n-partículas de masas m_k; $k = 1,2,...,$ n cuyos vectores - de posición con respecto a P son $\vec{r}_k$, $k = 1,2,...,$ n recpectiva mente, entonces, la fuerza de atracción por unidad de masa en P debida al sistema, se consigue mediante la relación

$$\mathbb{F} = \nabla \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{m_k}{r_k}\right)$$

El trabajo realizado por las fuerzas de atracción sobre una -- partícula de masa unitaria que se mueve al infinito a P es

$$\int_{\infty}^{P} \mathbb{F} \circ d\vec{r} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{r_k} = V \qquad (8.8)$$

como el potencial V es una función escalar de posición, excep- to en los puntos Q_K, donde estan situadas las masa, así se sa- tisface la relación

$$\nabla \circ \nabla V = \nabla^2 V = \nabla^2 V = \sum_{k=1}^{n} \nabla^2 \left(\frac{mk}{r_k}\right) \qquad (8.9)$$

que es la ecuación de Laplace.

Como $\mathbb{F} = \nabla V$, significa que en un punto donde no hay materia - se tiene

$$\nabla \circ \mathbb{F} = 0 \qquad (8.10)$$

8.1.2 Distribución contínua de la materia

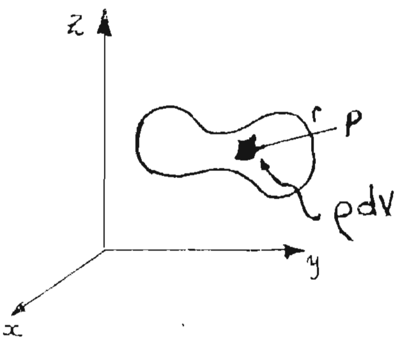
Supongamos ahora que la materia que atrae, forma un cuerpo - contínuo que ocupa el espacio limitado por la superficie cerra da S. Dividamos el cuerpo en un número infinito de elementos -

de masa ρdV, siendo ρ la densidad de masa en c/pto. y dV el - elemento de volúmen del cuerpo, como se indica en la figura 35

<u>Consideremos los casos siguientes:</u>

I) <u>Si P es exterior al cuerpo</u>

Entonces, la suma de la relación (8.8) se convierte en la integral



$$V_P = \int\int\int \frac{\rho dV}{r} \qquad (8.11)$$

FIGURA 35

donde r es la distancia del elemento de volúmen al punto P debido al cuerpo entero

II) <u>Si P es interior al cuerpo</u>

Entonces el integrando (8.11) se hace infinito.

En este caso, definimos el potencial de la siguiente manera: rodeando al punto P mediante una superficie espefica - S_o, y considerando el potencial debido a la materia com--- prendida entre S_o y S, con este mecanismo, el integrando - se convierte finito, ya que P es exterior a la región de - tal manera, obtenemos

$$V_P = \lim_{S_o \to 0} \int\int\int_{S_o}^{S} \frac{\rho dv}{r} \qquad (8.12)$$

Como el volúmen de S_o es del mismo orden que r^3, siendo r el radio de la esfera S_o, mientras que el integrando se hace infinito como 1/r se ρ es finito, el valor de (8.12) - tiene límite definido que se denomina, <u>Potencial P debido</u>

al cuerpo entero.

8.1.3 Ecuación de Poisson para distribución de masa contínua

Hemos visto que la función potencial satisface $\nabla^2 V = 0$; (8.9), o ecuación de la place en la región exterior a la materia. Consideremos ahora la ecuación que satisface el potencial en la región interior a la materia; (8.12).

Sea P un punto interior al cuerpo, de la figura 38, con densidad ρ. Supongamos a P dentro de una esfera S_o y de radio a.

El campo gravitatorio en P es el vector suma del campo gravitatorio $\mathbb{F}_o$, producido por la fuerza exterior a S_o, y de $\mathbb{F}_i$ debido a la materia interior a S_o. Es decir podemos escribir

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_o + \mathbb{F}_i \tag{8.13}$$

Calculemos ahora $\nabla \circ \mathbb{F}_P$, es decir

$$\nabla \circ \mathbb{F}_P = \nabla \circ \mathbb{F}_o + \nabla \circ \mathbb{F}_i$$

Como $\mathbb{F}_o$ es producido por la materia exterior a S_o, y por (8.10) se tiene que

$$\nabla \circ \mathbb{F}_o = 0$$

luego tenemos en (8.14)

$$\nabla \circ \mathbb{F}_P = \nabla \circ \mathbb{F}_i \tag{8.15}$$

Consideremos la esfera de radio a; su masa es

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho a^3$$

como $a \to 0$, la intensidad en la superficie de esta esfera es -

igual a

$$F_S = \frac{m}{a^2} = \frac{4}{3}\pi\rho a$$

en magnitud, dirección y sentido de la normal a la superficie trazada hacia el exterior.

Por el Teorema de Gauss, se tiene

$$\lim_{a\to 0}\iiint (\nabla \circ \mathbb{F}\ )\, dV = \lim_{a\to 0}(\nabla \circ \mathbb{F})\,\frac{4}{4}\,\pi a^2$$

$$= \lim_{a\to 0}\iint \mathbb{F}_S \circ dS$$

$$= \lim_{a\to 0}\left(-\frac{4}{3}\pi\rho a\right)(4\pi\rho a^2)$$

luego

$$\nabla\circ\mathbb{F} = \nabla \circ \mathbb{F}_i = -\,4\pi\rho$$

pero

$$\mathbb{F}_p = \nabla V_p$$

Luego la ecuación satisfecha por el potencial en una región - que contiene materia es

$$\nabla^2 V = -\,4\pi\rho = \nabla \circ \mathbb{F} \qquad (8.16)$$

la relación (8.16) es llamada Ecuación de Poisson que rige el Potencial V de una distribución de masa contínua en un punto P interior a una región R.

8.1.4 Corriente Electrica

Para el fluir de electricidad en un medio conductor electricamente isótopo y homogeneo, se tiene la relación

$$\vec{J}_n = \lambda \mathbb{E} \ , \quad (\lambda > 0) \tag{8.17}$$

Donde $\mathbb{E}$ es el campo eléctrico, λ la continuidad eléctrica específica y J la densidad de corriente eléctrica que representa la cantidad de carga eléctrica que atraviesa la unidad de - área normal en la unidad de tiempo.

La cantidad de carga eléctrica que llega por unidad de tiempo a una región R del espacio, se expresa mediante

$$\iiint_R \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV \tag{8.18}$$

Donde ρ es la densidad de carga por unidad de volúmen.

De (8.18) y por teorema de la divergencia, en el espacio, se - obtiene

$$- \iint_S U_n dS = - \iiint_R \mathrm{diV} \, J_n \, dV \tag{8.19}$$

siendo U_n la componente de J_n según la normal exterior (8.19) expresa la cantidad de carga eléctrica que llega, por unidad - de tiempo en dicha región.

Luego de (8.18) y (8.19) se obtiene

$$\iiint_R \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \, J_n\right) dV = 0 \tag{8.20}$$

si $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \, J$ es contínua y R arbitrario, se tiene en (8.20)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{diV} \, J_n = 0 \tag{8.21}$$

la relación (8.21) es llamada ECUACION DE CONTINUIDAD, ó CON-- SERVACION DE LA CARGA ELECTRICA.

8.1.5 Elementos de Electrostática

En la presente sección se expresa en forma general algunos elementos teorícos de alguna manera intuitiva y en consecuencia - con mayor posibilidad de utilidad. Los métodos de variable compleja son aplicables al caso plano, que cabe ubicar en un Marco General, considerando distribuciones y Conductores infinitos, perpendiculares al plano complejo.

COMENTARIO 8.1.5.1

El problema electrostático, cohincide con el gravitatario si suponemos que nos damos cargas fijas en tal caso sobre aisladores es decir la distrbución de cargas no cambia debido a la acción del campo electrico, interior o exterior a la región. En cambio, el problema electrostático con Conductores, así por - ejemplo, al estudiar el campo electrico de una Carga uniforme en una esfera maciza, ésta deberá suponerse aisladora pues de lo contrario, por no ser nulo el campo en su interior, las cargas no se mantendrán en Reposo. (8.22)

Si un Conductor se coloca en un campo $\vec{f}$, sus cargas se distribullen de tal forma que se produzca en su interior el campo $-\vec{f}$, en efecto, hallar esta distribución es el problema fundamental de la Electrostática. En virtud del conocido Teorema de Gauss en ningún caso quedan cargas en el interior de un Conductor, - pues si ello ocurriera el campo no seria nulo. Es decir: en el estado de equilibrio, las cargas en los conductores se distribullen sobre sus superficies.

COMENTARIO 8.1.5.2

Si un Conductor se coloca en un campo eléctrico, aparecen en - el cargas inducidas que anulan el campo en el conductor, luego: en un campo electrostático cada conductor tiene en todos sus - puntos el mismo potencial. En particular, una superficie Con-- ductora es equipotencial.

Además en un Conductor aislado la carga total es independiente del campo, y en un conductor conectado a tierra, cualquiera -- que sea su campo exterior, al potencial constante es el mismo.

$$(U = 0) \tag{8.23}$$

DEFINICION 8.1.5.1

Supongamos una distribución de Carga bidimensional, si γ es un camino en el plano Z que tiene Carga neta e, en su interior, - si se establece el Teorema de Gauss. Entonces existe una fun-- ción armónica ψ conjugada para Φ tal que

$$U(Z) = \Phi(x,y) + i\,\psi(x,y) \tag{8.24}$$

es analítica en una región no ocupada por carga.

DEFINICION 8.1.5.2

Sean $\phi(x,y)$; $\psi(x,y)$ dos funciones, reales de variable real, - $\psi(x,y)$ conjugada armónica de $\phi(x,y)$. Se define el POTENCIAL - ELECTROSTATICO de distribución de Carga como

$$U(Z) = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y) \tag{8.25}$$

DEFINICION 8.1.5.3

Supongamos la fuerza $\vec{f}$ que ejercen una sobre otra dos partículas cargadas de electricidad está dada por la ley de Coulomb y eligiendo adecuadamente la unidad de carga, su módulo es

$$|\vec{f}| = \frac{|e_1 e_2|}{r^2}$$

si e_1, e_2 son las cargas y r es la distancia que los separa. - Entonces se define el campo Electrico de una distribución de - cargas ó fuerza sobre la carga positiva como

$$\vec{f} = -\nabla U(Z) \tag{8.26}$$

donde U = U(Z) es el potencial electrostático definido en -- (8.25).

De la definición (8.25) se tiene que

$$\phi(x,y) = \alpha, \quad \psi(x,y) = \beta, \quad \alpha,\beta \text{ constantes,} \tag{8.27}$$

las ecuaciones (8.27) se les llaman, líneas equipotenciales y líneas de flujo respectivamente.

Puesto que U(Z), es una función compleja de variable compleja entonces, el campo electrico, puede expresarse en términos de las funciones ϕ y ψ

$$\begin{aligned}
-\nabla U(Z) &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)[\phi(x,y) + i\,\psi(x,y)] \\
&= -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi(x,y) + i\,\psi(x,y)) + i\frac{\partial}{\partial y}(x,y)+i\psi(x,y))\right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) - i\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y) - i\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) - i\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y) - i\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y)
\end{aligned} \tag{8.28}$$

Esto indica que existe una función armónica ψ conjugada para ϕ tal que se cumple (8.25) de donde por las ecuaciones de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \; , \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = - \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{8.29}$$

Asociando en (8.28) y aplicando (8.29)

$$- \nabla U = - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - i \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

se obtienen las conjugadas armónicas respectivas, luego.

$$- \nabla U = - \frac{\partial\phi}{\partial x} - i \frac{\partial\phi}{\partial y} = - \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial y} = - \frac{d\vec{f}}{dZ}$$

$-\nabla U = -\nabla\phi$, lamado intensidad del campo eléctrico, para una -- unidad de carga colocada en algún punto P de una región del - plano complejo.

DEFINICION 8.1.5.4

De igual manera que en flujo de fluidos, definimos fuentes y - sumideros, se define en electrostática el potencial complejo - (electrostático), debido a una línea de Carga e por la longi-- tud unidad, en $Z = Z_0$ (en el vació) como

$$U(Z) = - 2e \ln (Z-Z_0) \tag{8.30}$$

y representa una fuente, o sumidero, en Z_0 según sea $e < 0$, - $e > 0$ en (8.30). Analogamente dobletes ó dipolos, si el medio no es el vacio.

ILUSTRACION 8.1.5.1

Encontrar el potencial complejo debido a una línea de carga q por unidad longitud perpendicular al plano Z en $Z = 0$, y que - modificación deberá hacerce cuando la línea está en $Z = Z_o$.

SOLUCION

Cálculo del Potencial

Utilizando la definición 8.1.5.4 se tiene:

$U(Z) = -2q \ln(Z)$, para $Z_o = 0$, sea $Z = re^{i\theta}$, luego

$U(Z) = -2q \ln(re^{i\theta}) = 2q\left[\ln(r) + i\theta\right]$, que tomando la parte - real se obtiene

$U(Z) = -2q \ln(r)$, que es la componente normal del vector eléctrico, y es constante, luego $U(r) = 2q \ln(r)$.

Cuando la línea está en $Z = Z_o$, se tiene $U(Z) = -2q \ln(Z-Z_o)$

ILUSTRACION 8.1.5.1

Supongamos el interior de un conductor cilindrico circular infinito de radio r_1, conectado a tierra $(U = 0)$ se coloca otro cilindro coaxial de radio r_o que mantiene un potencial U_o. Encontrar el potencial en la región anular.

SOLUCION

Considerémos la región anular.

$$R = \{Z \in \mathbb{C} \;/\; r_o < |Z| < r_1\}$$

con las condiciones de contorno

$$U_o(Z) \text{ en } |Z| = r_o \text{ , cero en } |Z| = r_1 \qquad (8.31)$$

considerémos el potencial $U(Z) = a \ln(Z) + b$, encontrar los - números reales a y b

En efecto.

Sea $Z = re^{i\theta}$. así

$U(Z) = a \ln(re^{i\theta}) + b = a\left[\ln(r) + i^{i\theta}\right] + b$

$= a \ln(r) + ai\theta + b$

$= a \ln(r) + b + ai\theta$, de donde las líneas equipotenciales

$\Phi(r) = \alpha$ está representada mediante

$\Phi(r) = a \ln(r) + b = U(r)$

Aplicando (8.31) se obtiene:

Si $|Z| = r_o$ entonces $U_o = a \ln(r_o) + b$ (8.32)

Si $|Z| = r_1$ entonces $U_{r_1} = a \ln(r_1) + b = 0$ (8.33)

resolviendo (8.30) y (8.31) resulta

$$a = \frac{U_o}{\ln(r_o/r_1)}, \qquad b = -\frac{U_o \ln(r_1)}{\ln(r_o/r_1)}$$

De donde el potencial buscado es

$U(r) = a \ln(r) + b$

$$U(r) = U_o \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_o/r_1)}$$

8.2 REPRESENTACION CONFORME Y EL POTENCIAL ELECTROSTATICO

DEFINICION 8.2.1

Sean γ un camino, $\mathbb{D}$ un dominio, tal que $\mathbb{D} = \overset{o}{\overline{I(\gamma)}}$, $V(Z;Z_o)$ es una función armónica en $\mathbb{D}$. Entonces se define la función de - Green con singularidad $Z_o \in \mathbb{D}$ a la función

$$G(Z;Z_o) = V(Z;Z_o) + \ln(1/r), \quad r = |Z-Z_o| \qquad (8.34)$$

de donde $G(Z;Z_o) = 0$ en γ.

TEOREMA 8.2.1

Sean γ un camino, Z_o $I(\gamma)$ del plano Z, R la región definida - como el disco unitario $R = \{Z \in \mathbb{C} \ / \ |Z| < 1\}$ del plano w

$f: I(\gamma) \longrightarrow R$, una aplicación conforme, si $f(Z_o) = w = 0$ en-- tonces toda aplicación conforme f puede expresarse de la forma

$$f(Z;Z_o) = e^{-G-iH} \qquad (8.35)$$

DEMOSTRACION

Consideremos

$$-\ln f(Z,Z_o) = G(Z;Z_o) + iH(Z;Z_o) \qquad (8.36)$$

En primer lugar hay que probar que $G(Z;Z_o)$ es función de Green para $I(\gamma)$ con singularidad Z_o.

$$G(Z;Z_o) = V(Z;Z_o) + \ln(1/r), \quad r = |Z-Z_o| \qquad (8.37)$$

consideremos el desarrollo de Taylor para f.

$$f(Z,Z_o) = \sum_{n\geq 1} C_n(Z-Z_o)^n \qquad (8.38)$$

como f es conforme entonces $C_1 \neq 0$, de donde

$$f'(Z;Z_o) = \sum_{n\geq 1} nC_n(Z-Z_o)^{n-1} \qquad (8.39)$$

dividiendo (8.37) con (8.36) y considerando (8.36) se obtiene

$$\frac{f'(Z;Z_o)}{f(Z;Z_o)} = \frac{d}{dZ} \ln f(Z;Z_o) = \frac{1}{Z-Z_o} + \omega(Z;Z_o) \qquad (8.40)$$

con $\omega(Z;Z_o)$ analítica en $I(\gamma)$

tomando primitivas en (8.40) se obtiene

$\ln f(Z;Z_o) = \ln(Z-Z_o) + \Omega(Z;Z_o)$; $\Omega(Z;Z_o)$ analítica en $I(\gamma)$

tomando la parte real en (8.34) se tiene que

$$- G(Z;Z_o) = \ln|f(Z;Z_o)| = \ln(r) - V(Z;Z_o).$$

luego

$$G(Z;Z_o) = V(Z;Z_o) + \ln(1/r) \qquad (8.41)$$

Por otra parte en (8.36) se tiene que

$$- \ln f(Z;Z_o) = G(Z,Z_o) + iH(Z;Z_o)$$

luego por (8.41) se obtiene

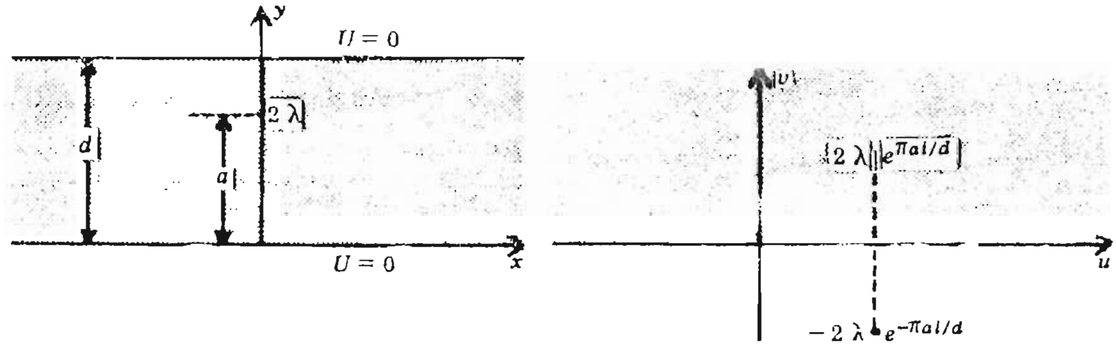
$f(Z,Z_o) = e^{-G-iH}$, siendo G la función de Green de $I(\gamma)$ con singularidad en Z_o,

La unicidad se prueba por el hecho de que $f(Z;Z_o)$ está definida y es armónica en γ y de la definición 8.2.1

ILUSTRACION 8.2.1

Un cable rectilíneo con carga uniforme con una densidad lineal λ se coloca entre dos planos conductores paralelos a el y co-- nectados a tierra (como se indica en la figura 36). Hallar el potencial en la región limitada por ambos planos.

SOLUCION



F I G U R A S 3 6

Sea Z = x+iy, de tal forma que donde U = 0, en el plano Z son las rectas y = 0, y = d; supongamos que el cable posee carga - 2λ en Z = ai.

Como es de observar en la figura, la transformación deseada es

$$W = f(Z) = e^{\pi Z/d} \tag{8.42}$$

mostrada en el capítulo VI ilustración 6.3.1

Aplicando (8.42) a los puntos $\text{Im}(Z) \in [0,d]$, con $d > 0$, se obtiene $\text{Im}(W) > 0$.

Si Z = ai entonces $W = e^{\pi ai/d}$.

Hallar el potencial de carga 2λ en $W = e^{\pi ai/d}$ en presencia del conductor Im(W) = v = 0 (el eje u) conectado a tierra, esto - conduce a considerar una carga opuesta -2λ.

En efecto.

Considerémos el plano Z, los complejos Z_o y $\bar{Z}_o$; el potencial - complejo debido a las dos líneas de carga q, en Z_o, y $\bar{Z}_o$, se - consigue mediante la definición 8.1.5.4, obteniendo.

$$U(Z) = -\ 2q\ \ln(Z-Z_o) + 2q\ \ln(Z-\bar{Z}_o)$$

$$U(Z) = 2q\ \ln\left(\frac{Z-\bar{Z}_o}{Z-Z_o}\right) \text{ entonces } \phi(x,y) = 2q\mathrm{Re}\{m\left(\frac{Z-\bar{Z}_o}{Z-Z_o}\right)\} \qquad (8.43)$$

Puesto que en el plano W, el potencial en un punto del semiplano superior le es correspondiente al potencial en un punto de la franja, en el plano Z mediante la transformación $W = e^{\pi Z/d}$, luego considerando

$$W_o = e^{\pi Z_o/d},\ \bar{W}_o = e^{-\pi Z_o/d},\ \text{y la carga } 2\lambda,\ Z_o = ai$$

Se obtiene en (8.43)

$$U(Z) = 2\ \ \ln\left(\frac{W-\bar{W}_o}{W-W_o}\right)$$

$$U(Z) = 2\lambda R_e \left(\frac{W - e^{-\pi ai/d}}{W - e^{\pi ai/d}}\right) \text{ es el potencial buscado.}$$

B I B L I O G R A F I A

1. INTRODUCTURY COMPLEX ANALYSIS
   Richard A Silverman
   Based, in part, on material by A. I. Markushevish
   Prentice-Hall, Inc.
   Englewood Cliffs N,J 1967

2. INTRODUCCION A LAS VARIABLES COMPLEJAS
   Peter Colwell
   Jerold C. Mathews
   Editorial Trillas
   México 1976

3. FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA-MONOGRAFIA 1973

4. VARIABLE COMPLEJA
   Polya y Latta
   Editorial Limusa 1976

5. VARIABLE COMPLEJA
   Murray R. Spiegel
   Mc Graw - Hill 1973

6. MECANICA DE FLUIDOS
   Victor L. Streeter
   Mc Graw - Hill 4° Edición

7. VARIABLES COMPLEJAS Y SUS APLICACIONES
   Ruell V. Churchill - Brown - Verhey
   Mc Graw - Hill 1979

8. MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS
   George Arfken, Second Edition; Academie Press, New York.