UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

ESTADISTICA NO PARAMETRICA

Trabajo de Graduación presentado por

Armando Antonio Figueroa Morales

Previo a la opción del Título de

LICENCIADO EN MATEMATICA

Noviembre 1979

San Salvador El Salvador Centro América

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

ESTADISTICA NO PARAMETRICA

Noviembre 1979

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR a.i.: Lic. LUIS ARGUETA ANTILLON.

SECRETARIO GENERAL a.i.: Lic. OSCAR ARMANDO ACEVEDO.

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO a.i.: Ing. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO.

SECRETARIO a.i.: Lic. MANUEL DE JESUS BAIRES ZELAYA.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DE DEPARTAMENTO: Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA.

Trabajo de Graduación
elaborado por
ARMANDO ANTONIO FIGUEROA MORALES
previo a la opción
de su Título de
LICENCIADO EN MATEMATICA.

ASESOR: Lic. Raúl Aguilera Liborio.

INTRODUCCION

Este trabajo representa una introducción al estudio de la estadística no paramétrica, esperando que pueda continuarse con la colaboración de futuros trabajos de graduación, y así, en cierto grado incrementar el desarrollo de dicha estadística.

La estadística no paramétrica se puede aplicar a varias distribuciones, en contraste con otros métodos (de la estadística paramétrica) que se restringen a cierto tipo de distribuciones, por ejemplo: La Distribución de Poisson. De ésto se deduce que los métodos dados por la estadística no paramétrica son convenientes si no se conoce la distribución de la población, por ejemplo una investigación exploratoria. Más aún, una ventaja es que los cálculos necesarios son más sencillos y precisos.

Se usa el término estadística no paramétrica por el hecho de que, muchos métodos no tratan con estimaciones de parámetros de una función de distribución de algún tipo dado, es decir que no necesita del conocimiento de la manera como está distribuida la población.

En la realización de este trabajo me encontré con una dificultad, la cual resultó ser la poca bibliografía, dado que el tema es totalmente desconocido en nuestro medio, pero gracias a la valiosa asesoría del Lic. Raúl Aguilera Liborio fue posible llevarlo adelante.

I N D I C E

PAGINA

C A P I T U L O   I

TEST DE LOS RANGOS EN LA COMPARACION DE DOS TRATAMIENTOS.

I. LOS RANGOS EN LA COMPARACION DE DOS TRATAMIENTOS.

El problema de decidir si una innovación propuesta constituye un mejoramiento sobre algún procedimiento estandar, surge en muchos contextos diferentes:

¿Es la instrucción televisada menos efectiva que la enseñanza personal en el salón de clase?

¿Conduce a una precipitación pluvial el bombardeo de las nubes con yoduro de plata, o sucede lo contrario?

¿Aumenta el kilometraje un nuevo y caro aditivo para gasolina?

¿Se reduce el efecto perjudicial de los cigarros por medio del filtro?

¿Prolonga la vida de los pacientes con cáncer una nueva droga?, etc.

El siguiente ejemplo ilustra la clase de evidencia que puede ser usada para obtener por lo menos respuestas tentativas para tales preguntas.

Ejemplo 1.

Una nueva droga.

Un hospital para enfermos mentales desea probar la efectividad de una nueva droga, que demanda tener un efecto benéfico sobre algún desorden emocional o mental.

Hay 5 pacientes en el hospital que padecen de este desorden casi al mismo grado. (En realidad este número típicamente sería demasiado pequeño para dar resultados significativos). De estos 5, 3 se seleccionan al azar para recibir la nueva droga y los otros 2 sirven como controles, a éstos se les suministra una pastilla inofensiva que no contenga ingredientes activos. De esta manera los pacientes no saben quienes están recibiendo el nuevo tratamiento; esto elimina la posibilidad de efectos psicológicos que pueden resultar de tal conocimiento.

Después de algún tiempo, un médico visitador entrevista a los pacientes y los clasifica de acuerdo a la severidad de su condición. El paciente cuya condición se juzga ser más seria se le asigna el rango 1, el próximo más serio rango 2, y así sucesivamente, hasta el rango 5.

El nuevo tratamiento será considerado suficientemente garantizado si los 3 pacientes tratados obtienen los rangos más altos en esta combinada clasificación de los 5 pacientes, de lo contrario el reclamo será hecho sobre la ineficacia del tratamiento.

Una base para evaluar la significación de la clasificación observada se prevee por la siguiente consideración: supongamos que el tratamiento no tiene efecto, es decir, que la salud de un paciente de ninguna manera es afectada, ya sea que reciba o no la nueva droga. Nos referimos a la asunción como la hipótesis H de no efecto en el tratamiento. Después de asumir esta hipótesis (para abreviar, lo haremos bajo H) el rango de cada paciente se determina solamente por su estado de salud, está claro que la clasificación de los pacientes no depende de quienes de ellos reciban el tratamiento y cuáles sirven como controles.

Podemos así pensar en el rango que se le adjudique a cada paciente, aún antes que se hagan las asignaciones al tratamiento y control. Cada posible selección de los 3 pacientes para recibir el tratamiento divide los rangos en dos grupos: Los rangos de los pacientes tratados y de controles. Estas divisiones se muestran en el siguiente cuadro para todos los casos posibles.

(A_1)

TRATADOS	(3,4,5)	(2,4,5)	(1,4,5)	(2,3,5)	(1,3,5)
CONTROLES	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1,4)	(2,4)

TRATADOS	(2,3,4)	(1,3,4)	(1,2,4)	(1,2,3)	(1,2,5)
CONTROLES	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(3,4)

Así por ejemplo, la primera casilla corresponde a la posibilidad que eventualmente a los tres pacientes tratados se les ha otorgado el más alto de los rangos (3,4,5) al recibir el tratamiento.

Como se ve de (A_1) los pacientes y sus rangos de iniciación pueden dividirse en 2 grupos y en 10 maneras diferentes. La asunción de que los 3 pacientes que reciben el tratamiento se seleccionan arbitrariamente, significa que estas diez posibles divisiones son iguales, es decir, que cada una de las 10 posibilidades expuestas en (A_1) tienen probabilidad de 1/10.

Las consideraciones introducidas en el contexto del ejemplo anterior se generalizan facilmente a continuación.

Supongamos que N sujetos se disponen para un estudio comparativo, y que n de éstos se seleccionan arbitrariamente para recibir un nuevo tratamiento, y el resto $m = N - n$ estarán sirviendo como controles. Denotemos el número de posibles escogitaciones de n sujetos de entre N por $\binom{N}{n}$, para $N = 5$ y $n = 3$ hemos visto que $\binom{5}{3} = 10$.

El número $\binom{N}{n}$ es conocido como el número de combinaciones de N objetos tomando n de una vez y puede ser computado por la fórmula

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{1x2x3x \;\dots\; x\; n}$$

Por asunción, los n sujetos que reciben el tratamiento se seleccionan de los sujetos disponibles en forma arbitraria; es decir, todas las $\binom{N}{n}$ posibles alternativas de estos sujetos son iguales, por tanto cada una tiene la probabilidad de $1/\binom{N}{n}$

Cuando concluye el estudio se clasifican los sujetos - con respecto al tratamiento que se desea estudiar. El rango de cada sujeto puede ser considerado como determinado - (aunque desconocido) antes de que la asignación de sujetos para tratamiento y control sea ejecutada.

El resultado anterior es tan fundamental que ahora vamos a redefinirlo más formalmente.

Sean los rangos de los sujetos tratados denotados por $S_1, S_2, \ldots, S_n$ donde nosotros asumiremos que ellos están enumerados en orden creciente

$$S_1 < S_2 < \ldots < S_n,$$

y los rangos de controles

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_m.$$

Los rangos m + n son precisamente los enteros 1,2,...,N; dado que los R_s' están determinados una vez que los S_s' sean conocidos.

La división de los rangos en los grupos pueden ser especificados por las n-uplas y m-uplas

$(S_1, S_2,\ldots,S_n)$ y $(R_1, R_2,\ldots,R_m)$, respectivamente.

Las $\binom{N}{n}$ de posibles n-uplas constituyen los posibles resultados del estudio.

Los resultados básicos derivados anteriormente establecen que la probabilidad bajo H, de observar en particular - cualquier n-upla $(S_1,\ldots,S_n)$ es

$$P_H\ (S_1 = s_1,\ S_2 = s_2,\ldots,\ S_n = s_n) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \qquad (A_2)$$

para cada una de las posibles n-uplas $(S_1,S_2,\ldots,S_n)$.

Ilustremos ahora el uso de los rangos en estudios comparativos con otro ejemplo ideal sobre sujetos desanimados y - sujetos en condiciones óptimas.

Ejemplo 2.

Efecto del desánimo.

Para probar si el desánimo afecta adversamente la realización de una prueba de inteligencia; 10 sujetos fueron divididos aleatoriamente en un grupo de control y un grupo de - tratamiento, en grupos de 5, respectivamente.

Los tratados bajo condiciones de desánimo y los contro les bajo condiciones óptimas se les aplica un cuestionario y obtuvieron determinadas puntuaciones; dos semanas más tar de se les aplicó un nuevo cuestionario bajo las condiciones antes mencionadas. Las diferencias en sus puntuaciones obtenidas en ambos cuestionarios fueron:

CONTROLES:	5	0	16	2	9
TRATADOS:	6	-5	-6	1	4

Al observar las diferencias entre controles y tratados, éstos últimos rindieron menos que los otros.

Si los sujetos son clasificados, con rango 1 yendo del sujeto con la diferencia más pequeña, rango 2 para el próxi mo más pequeño, etc. Los rangos de los sujetos fueron:

TRATADOS: 1 , 2 , 4 , 6 , 8

CONTROLES: 3 , 6 , 7 , 9 , 10 ;

ambas diferencias y sus rangos sugieren de manera general - que los 5 sujetos desanimados rindieron menos que los otros 5 sujetos.

Sea H que denota la hipótesis de no efecto del trata - miento, es decir, que el desánimo no tendrá influencia en - las puntuaciones obtenidas por un sujeto. Si H es verdadera, las diferencias en las puntuaciones de cada uno de los

10 sujetos y de una vez su rango no fue afectado por el método al cual se le asignó.

$\binom{10}{5} = 252$ es el número de alternativas posibles de valores de los rangos en los 5 tratados, siendo estas alternativas iguales ya que cada uno tiene la probabilidad de $\frac{1}{252}$.

La estructura de los dos ejemplos es básicamente la misma, pero ellos difieren en un importante aspecto.

En el primer ejemplo sólo una clasificación de los sujetos fue disponible, los datos en el ejemplo 2 consistieron en una medición para cada sujeto (la diferencia en sus puntuaciones) y éstos fueron clasificados de acuerdo a los valores de estas mediciones.

A través de esta sección hemos asumido que los sujetos que están disponibles para la observación no se escogen, si no que se dan y ellos se asignan aleatoriamente, los n al tratamiento y los N-n al control. Llamaremos a este modelo, en el cual las posibilidades entran únicamente a través de la asignación de los sujetos al tratamiento y control, Modelo Aleatorio.

Este se distingue de algún otro modelo de acuerdo al cual los N sujetos no están fijos, si no que se seleccionan de alguna manera especial en una población de tales sujetos. En este caso, la posibilidad también está implicada en la selección de los sujetos.

II. TEST DE LA SUMA DE LOS RANGOS DE WILCOXON.

Comparando un nuevo tratamiento o procedimiento con el método estándar; se dividen N sujetos (estudiantes, pacientes, etc.) aleatoriamente en dos grupos, el primero de n sujetos quienes recibirán un nuevo tratamiento, y el segundo de m sujetos quienes servirán como controles al ser tratados por el método estándar. Cuando se termina el estudio los sujetos se clasifican ya sea directamente o de acuerdo a alguna respuesta que mida el éxito del tratamiento, tales como: una prueba de puntuaciones en una investigación educacional o psicológica, la cantidad de lluvia en un experimento del tiempo, etc.

Cuando la hipótesis H de no efecto en el tratamiento es rechazada, la superioridad del tratamiento es reconocida si en esta clasificación los n sujetos tratados llegan a un rango lo suficientemente grande. (Aquí se asume que el éxito del tratamiento es indicado por una respuesta aumentada, si en cambio lo es por una respuesta disminuida, los n sujetos tratados bajan suficientemente de rango y H es rechazada).

Una sencilla y efectiva estadística es la suma de los rangos de los tratados

$$W_s = S_1 + S_2 + \ldots + S_n \qquad (B_1)$$

La hipótesis H será rechazada y el tratamiento será efectivo cuando W_s sea suficientemente grande, es decir cuando

$$W_s \geq C \; ; \; C : \text{constante} \qquad (B_2)$$

Los test definidos por (B_1) y (B_2) son conocidos como "test de la suma de los rangos de Wilcoxon".

La constante C es llamada valor crítico, ésta es determinada convencionalmente (bajo H) por la ecuación

$$P_H \; (W_s \geq C) = \alpha \qquad (B_3)$$

siendo α un número pequeño específico llamado nivel de significación; las alternativas comunes de α son: 0.01, 0.025, - 0.05.

En (B_3) el subíndice H indica la probabilidad que es - computada bajo H, es decir la asunción que el tratamiento no tiene efecto.

Las expresiones

$$W_s = S_1+S_2+\ldots+S_n \; , \; W_s \geq C \quad \text{y} \quad P_H(W_s \geq C) = \alpha$$

se hacen precisas y justamente permanecen defendibles cuando los rangos de los tratados se consideran bastante grandes para la hipótesis de no efecto en el tratamiento.

Cuando los valores que toma W_s no satisfacen con ser

$W_s \geq C$, entonces podemos afirmar que H es verdadera.

Los valores que satisfacen $P_H(W_s \geq C) = \alpha$ conducen al abandono de H en favor de la alternativa que el tratamiento es efectivo.

Para determinar el valor de c en la ecuación $P_H(W_s \geq C)=\alpha$ es necesario aprender a encontrar la probabilidad (bajo H) cuando W_s tiene un valor específico. Para el caso N=5, n=3 discutido en el ejemplo 1, las probabilidades se obtienen - facilmente del cuadro (A_1). Para cada posible conjunto de ran gos en los tratados expuestos en (A_1) corresponde un valor W - de W_s como se muestra en el cuadro (B_4)

(B_4)

RANGOS EN LOS TRATAMIENTOS	3,4,5	2,4,5	1,4,5	2,3,5	1,3,5
W	12	11	10	10	9

RANGOS EN LOS TRATAMIENTOS	2,3,4	1,3,4	1,2,4	1,2,3	1,2,5
W	9	8	7	6	8

Sabemos que la probabilidad de cada una de las sumas de los rangos de los tratados es 1/10; por ejemplo para $W_s = 9$, resulta que $P_H(W_s = 9) = P_H(S_1=1,S_2=3,\ S_3=5)+P_H(S_1=2,S_2=3,S_3=4)$ $= 2/10$; de esta manera se encuentran las probabilidades (bajo H) de W_s tomando sus valores posibles que se muestran a continuación:

(B_5)

W	6	7	8	9	10	11	12
$P_H(W_s = W)$	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1

Estas probabilidades constituyen la distribución de W_s bajo H. Algunas veces H es llamada hipótesis nula (afirma - que el efecto del tratamiento es cero o nulo). De (B_5) resulta en particular, que:

$$P_H(S_s \geq 12) = P_H(W_s = 12) = 0.1$$

$$\text{siendo } \alpha = 0.1$$

La hipótesis se rechaza solamente cuando $W_s = 12$, sucede cuando los rangos de los controles son (1,2) y aquellos - de los sujetos tratados son (3,4,5).

De (B_5) vemos que la probabilidad $P_H(W_s \geq W)$ toma los valores siguientes:

W	6	7	8	9	10	11	12
$P_H(W_s = W)$	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1
$P_H(W_s \geq W)$	1.0	0.9	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1

No es posible encontrar un valor crítico c que satisfaga $P_H(W_s \geq C) = \alpha$ para cada valor de α, únicamente para los valores que se acaban de dar. Esta dificultad se pronuncia particularmente cuando N es tan pequeño como en el presente caso, cuando N es grande persiste aunque en un grado menor.

Es costumbre aproximar los valores de α, que en cualquier caso tienden a ser un tanto arbitrarios, por ejemplo para N = 13 y n = 8 los valores posibles de $P_H(W_s \geq w)$ son:

0.0008, 0.0016, 0.0031, 0.0054, 0.0093, 0.0148, 0.0225, 0.0326, 0.0466, 0.0637, etc. Podremos reemplazar aproximando los siguientes valores:

0.01 por 0.0093

0.03 por 0.0326

0.05 por 0.0466, etc.

Es importante no exceder el nivel intentado, se puede hacer la escogitación de tal manera que se tome el más pequeño y más cercano que esté al alcance del valor, por ejemplo:

0.0148 en lugar de un intentado 0.02

0.0326 en lugar de un intentado 0.04, etc.

La distribución nula de W_s puede obtenerse en forma general por el método usado para calcular la distribución en (B_5) para el caso cuando N=5 y n=3.

Sea N° (W;n,m) que denota el número de todas las divisiones de los rangos desde 1 hasta N, en n tratamientos y m controles, para los cuales la suma de los rangos de los tratados es igual a W (por ejemplo, cuando n = 3 y m = 2 se ve de (B_4) que N° (8,3,2) = 2). Por (A_2) cada división tiene probabilidad $1/\binom{N}{n}$ bajo H, luego resulta que

$$(B_6) \qquad P_H(W_s = W) = \frac{N° \ (W;n,m)}{\binom{N}{n}}$$

(continuando con el ejemplo anterior $P_H(W_s = 8) = \frac{2}{\binom{5}{3}} = 0.2$).

Para calcular la distribución de W_s practicamente se van a ir contando todos los números N°(W,n,m) y dividiéndolos por $\binom{N}{n}$.

Realmente para encontrar el valor crítico C para un nivel α no se necesita la distribución completa de W_s. Para ilustrarlo consideremos una vez más el ejemplo 2 (Efecto del desánimo), en el cual la hipótesis (que el desánimo no produce efecto) estaba siendo probada contra la alternativa, que el desánimo tiene efecto adverso. Bajo la alternativa de diferencias en las puntuaciones de los sujetos en tratamiento (aquellos que son desanimados) tenderían a ser más bajas que aquellas de los controles. La hipótesis por lo tanto será -

rechazada cuando $W_s \leq C$ donde C se determina de manera que se satisfaga cuando sea posible la ecuación

$$P_H(W_s \leq C) = \alpha$$

Por ejemplo sabemos que n=m=5, cada posible conjunto de los rangos en el tratamiento tiene probabilidad

$$\frac{1}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{252}$$

Supongamos que $\alpha = 0.05$ y enumeremos sistemáticamente los conjuntos de rangos del tratamiento dando los valores más pequeños a W_s. Para ver cuán lejos este proceso necesita llevarse, notemos que el número x de tales conjuntos requeridos se da aproximadamente por la ecuación

$$\frac{x}{252} = \alpha = 0.05$$

obteniendo la solución para $x = \frac{252}{20} = 12.6$

Tomemos a x = 12

La cuenta resultante se da a continuación:

$$
\left.\begin{array}{l}
1+2+3+4+5=15\\
1+2+3+4+6=16\\
1+2+3+4+7=17\\
1+2+3+5+6=17\\
1+2+3+4+8=18\\
1+2+3+5+7=18\\
1+2+4+5+6=18\\
1+2+3+4+9=19\\
1+2+3+5+8=19\\
1+2+3+6+7=19\\
1+2+4+5+7=19\\
1+3+4+5+6=19
\end{array}\right. \qquad (B_7)
$$

Estos son los casos con $W_s \leq 19$, de aquí podemos ver $P_H(W_s \leq 19) = \frac{12}{252} = 0.0476$, este valor es el que más se acerca a $\alpha = 0.05$, porque si tomásemos

$P_H(W_s \leq 20) = 0.0754$ no estaríamos próximos al nivel α.

Siguiendo con el ejemplo 2, encontramos la suma de los rangos tratados

$$W_s = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 = 21$$

donde 21 resulta ser mayor que el valor crítico C=19.

No obstante la apariencia de la efectividad del tratamiento notado en el ejemplo 2 (El desánimo tiene efecto en las respuestas de los sujetos), los resultados no son significativos al nivel de $\alpha = 0.0476$, ni aún al de $\alpha = 0.0754$. (La hipótesis es aceptada por ser el valor crítico C=21, ya que $W_s = 21$ se encuentra en la zona de aceptación de H).

El número de casos posibles $\binom{N}{n}$ aumenta a medida que N y n aumentan, y al efectuar enumeraciones (como en el caso anterior) resulta trabajoso; por lo tanto, es conveniente hacer uso de una tabla de la distribución de W_s.

Notamos que la distribución de W_s no es la misma cuando los tamaños de dos grupos son $m = 2$, $n = 4$ como cuando $m = 4$, $n = 2$. Resulta sin embargo, que la distribución de la estadística

$$W_s - 1/2\, n(n+1)$$

es la misma en ambos casos y más generalmente para enteros cualesquiera $K_1 \leq K_2$. La distribución de $W_s - 1/2\, n(n+1)$ es la misma cuando los tamaños de los grupos son: $m = K_1$, $n = K_2$ como cuando $m = K_2$, $n = K_1$.

Hay otra razón para preferir a la tabla de distribución de $W_s - 1/2\, n(n+1)$, que el valor mínimo de W_s se obtiene cuando los n rangos de los tratados son: $1, 2, \ldots, n$, y así

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (B_8)$$

Obteniendo así la estadística Wxy, dada como

$$Wxy = W_s - 1/2\ n(n+1) \qquad (B_9)$$

Pa.

Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ tq'

$$Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$$

Computemos para cada $j: 1,2,\ldots,n$, el número de $X_i, i: 1,2\ldots m$ menores que Y_j. El rango de Y_1 es S_1, luego podemos decir que hay $S_1 - 1$ observaciones menores que Y_1, éstas deben ser todas las X_i que satisfacen ser menores que Y_1, así mismo el número de las X_i será $S_1 - 1$. Similarmente hay $S_2 - 1$ observaciones menores que Y_2, uno de ellos es un Y(particularmente Y_1), luego el número de los X_i menores que Y_2, sin interesarnos Y_1 será $(S_2 - 1) - 1 = S_2 - 2$. De la misma manera, se puede generalizar puesto que el número de los Y'_s menores que Y_j es $j-1$, el número de las X_i menores que Y_j es $(S_j - 1) - (J - 1) = S_j - J$; el número total de pares (X_i, Y_j) con $X_i < Y_j$ es por lo tanto:

$$(S_1-1) + (S_2-2) + (S_3-3) + \ldots + (S_n-n) = W_s - (1+2+\ldots+n) = W_s - 1/2n(n+1)$$

Por (B_{20}) $\quad Wxy = W_s - 1/2n(n+1)$ lo que se quería demostrar

En forma similar se prueba para Wyx.

USO DE TABLA A

La Tabla A da las probabilidades de

$$P_H\ (Wxy \leq a) \qquad (B_{10})$$

ilustrando el uso de la tabla, consideremos la probabilidad $P_H(W_s \leq 21)$. Observemos los valores que satisfagan con - $W_s \leq 21$, volvamos al ejemplo 2 y al valor 21, sabemos que - $m = n = 5$, obtenemos el valor mínimo de W_s siendo igual a

$\frac{5\ (5\ +\ 1)}{2} = 15$, así

$$\begin{aligned} P_H(W_s \leq 21) &= P_H\ [(W_s - 15) \leq 21 - 15] \\ &= P_H\ (W_s - 15 \leq 6) \\ &= P_H\ (Wxy \leq 6) \end{aligned}$$

Luego en la tabla encontramos $K_1 = K_2 = 5$ y $a = 6$, siendo la probabilidad igual a 0.1111.

Supongamos en cambio que nosotros queremos usar la tabla para encontrar el valor crítico correspondiente a un nivel de significación aproximado 0.05; observamos a través de los valores $K_1 = K_2 = 5$, que las dos probabilidades cercanas a 0.05 son 0.0476 y 0.0754. La primera de éstas es la más - cercana y correspondiente al valor $a = 4$ así que

$$0.0476 = P_H\ (Wxy \leq 4) = P_H\ (W_s - 15 \leq 4) = P_H\ (W_s \leq 19)$$

luego el valor crítico es 19 como lo habíamos hecho antes.

De la tabla es fácil obtener la probabilidad sabiendo que $W_s \leq C$; sin embargo, la hipótesis se rechaza frecuentemente para valores grandes W_s. Se necesita resolver la ecuación (B_3) y así obtener P_H ($W_s \geq C$).

Estas probabilidades pueden ser obtenidas de la tabla por cualquiera de los siguientes métodos:

Método 1.

Este método se basa en el hecho que la distribución de W_s es simétrica respecto a 1/2 $\underline{n(N+1)}$. (La prueba sobre la simetría se hará al final de II). Esto significa que para cada K (K un Real), los dos valores

$$1/2\ n(N+1) - K \quad y \quad 1/2\ n(N+1) + K\ ,$$

los cuales son igualmente distantes de 1/2 n(N+1) en lados opuestos, tienen la misma probabilidad; así para toda K tenemos:

$$P_H\ [W_s = 1/2\ n(N+1) - K] = P_H\ [W_s = 1/2\ n(N+1) + K] \qquad (B_{11})$$

Supongamos por ejemplo que m = 4, n = 6 y deseamos encontrar P_H ($W_s \geq 35$).

Procedemos a encontrar $\frac{n(N+1)}{2}$, así $\frac{6(10+1)}{2} = 33$

luego

$$P_H\ (W_s \geq 35) = P_H\ (W_s \geq 33 + 2) = P_H\ (W_s \leq 33-2) = P_H\ (W_s \leq 31)$$

es conveniente sustraer de W_r su valor mínimo el cual es

$$1 + 2 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

y encontrar la estadística

$$Wyx = W_r - 1/2\ m(m+1) \qquad (B_{17})$$

Al final de II se probará que Wxy y Wyx tienen la misma distribución nula, es decir que

$$P_H\ (Wxy \leq a) = P_H\ (Wyx \leq a)\ , \quad (B_{18})$$

para toda a en los Reales.

Así la tabla A puede usarse para encontrar

$$P_H\ (W_r \leq C') \quad y \quad P(W_r \geq C').$$

Ilustrando el método, consideremos otra vez la probabilidad de $W_s \geq 35$, cuando $m = 4$, $n = 6$ (obtenida previamente por el método 1), $N = 10$.

tenemos que $W_r + W_s = \frac{10(10+1)}{2} = 55$

$W_s = 55 - W_r$ ①, como $W_s \geq 35$

entonces los valores de W_r que satisfacen ①

son $W_r \leq 20$ ②

Por (B_{17}) $Wyx = W_r - 1/2\ m(m+1)$ para $m = 4$

$$Wyx = W_r - 10$$

por @ tenemos que $W_{yx} \leq 10$ entonces

P_H $(W_r \leq 20) = P_H$ $(W_{yx} \leq 10)$.

Al buscar en la tabla para $K_1 = 4$, $K_2 = 6$ y $a = 10$ encontramos la probabilidad 0.3810, que está de acuerdo con el valor de P_H $(W_s \geq 35)$ obtenido en el primer método.

Consideremos una vez más la situación del ejemplo 2.

La suma de los rangos de los tratados resulta ser $W_s = 21$, y con los valores menores de W_s favoreciendo la hipótesis alternativa (el desánimo produce efecto), no se rechaza al nivel de significación más cercano a $\alpha = 0.05$.

En lugar de reportar sencillamente el rechado de H al nivel dado de significación, es más informativo reportar la probabilidad bajo H de obtener un valor tan extremo o más extremo que el valor observado. Esta probabilidad es llamada Probabilidad de significación del resultado observado. En el caso del ejemplo 2, la probabilidad de significación es la probabilidad de W_s, siendo $W_s \leq 21$ tenemos que

$$P_H\ (W_s \leq 21) = 0.1111.$$

La probabilidad de significación tiene una importante propiedad de mostrar en un solo número si se rechaza o no la hipótesis a un nivel logrado α.

Supongamos que los valores grandes de una prueba estadística digamos W_s, son significativos, si W denota el valor observado de W_s, la probabilidad de significación se define como

$$P_H (W_s \geq W) = \hat{\alpha} . \qquad (B_{19})$$

La hipótesis se rechaza cuando $W \geq C$ y cuando $\alpha \geq \hat{\alpha}$, contrariamente H se acepta para cualquier valor crítico $C > W$ y cuando $\alpha < \hat{\alpha}$.

Cuanto más pequeño sea $\hat{\alpha}$, es más importante observar en este extremo un valor bajo H y lo más fuerte, por lo tanto, es la evidencia contra H.

Volvamos al test de la suma de los rangos de Wilcoxon, discutiremos la interpretación alternativa de las estadísticas Wxy y Wyx.

Denotemos las observaciones de los tratados y control por $X_1, X_2, \ldots, X_m$; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, respectivamente y consideremos todos los posibles pares de observaciones (X_i, Y_j).

Entre las m n observaciones, los pares se encuentran cumpliendo que $X_i < Y_j$ ó $Y_j < X_i$, con $i = 1,2,\ldots,m$, $J = 1,2,\ldots,n$; y definiremos que

$$Wxy = \text{número de pares } (X_i, Y_j) \text{ con } X_i < Y_j . \qquad (B_{20})$$

$$Wyx = \text{número de pares } (X_i, Y_j) \text{ con } Y_j < X_i . \qquad (B_{21})$$

Las estadísticas $Wxy = W_s - 1/2\ n(n+1)$

$$Wyx = W_r - 1/2\ m(m+1)$$

son equivalentes a las estadísticas de la suma de los rangos de Wilcoxon (W_s y W_r) y son conocidas como las estadísticas Mann - Whitney.

La interpretación de Wxy = número de pares (X_i, Y_j) con $X_i < Y_j$, provee un método alternativo para computar Wxy, el cual algunas veces es más conveniente.

Para ilustrar el método consideremos el ejemplo 2.

En lugar de clasificar a los sujetos en 10 diferencias, procedemos a contar cada diferencia de tratamiento (-6,-5,1,4,6) que excede a los números de las diferencias de control -- (5,0,16,2,9), -6, -5 no exceden a ninguna diferencia de control luego el excedente es 0 de cada uno, 1 solamente excede al 0 (sólo a una diferencia), 4 excede al 0 y 2 (2 es el número de diferencias que excede) y 6 excede a 0, 2, 5 (3 diferencias); procedemos a calcular $Wxy = 0 + 0 + 1 + 2 + 3 = 6$.

Prueba sobre la simetría de la Distribución de W_s con respecto a $1/2\ n(N+1)$

Pa.

Sean N sujetos (de los cuales n reciben tratamiento y m sirven como controles) que son clasificados en orden inverso -

así: El sujeto que obtuvo el rango 1 ahora obtiene el rango N, el de rango 2 es reemplazado por el rango N-1 = (N+1) - 2, para el rango 3 se tendrá N - 2 = (N+1) - 3 y de manera general el de rango S es reemplazado por el rango (N+1) - S.

Denotemos por S_i', i : 1,2,...,n, este nuevo rango inverso correspondiente al sujeto en tratamiento que había recibido previamente a S_i, i : 1,2,...,n. Entonces

$$P_H\ (S_1' = s_1, \ldots, S_n' = s_n) = 1/\binom{N}{n}$$

Así que $W_s' = S_1' + S_2' + \ldots + S_n'$ tiene la misma distribución nula como la de W_s; habíamos encontrado que

$$S_1' = (N+1) - S_1$$

$$S_2' = (N+1) - S_2$$

$$S_3' = (N+1) - S_3$$

$$\vdots$$

$$S_n' = (N+1) - S_n$$

como W_s' tiene la misma distribución de W_s.

Tenemos ahora:

$$W_s = s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_n$$

$$W_s = [(N+1)-S_1] + [(N+1) - S_2] + \ldots + [(N+1) - S_n]$$

$$W_s = n\ (N+1) - (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = n\ (N+1) - W_s$$

$$W_s - 1/2\ n(N+1) = 1/2\ n(N+1) - W_s$$

Resulta que

$W_s - 1/2\ n\ (N+1)$ y $1/2\ n\ (N+1) - W_s$ tienen la misma distribución, así:

$$P_H\ [W_s - 1/2\ n(N+1) = K] = P_H\ [1/2\ n(N+1) - W_s = K]$$

siendo equivalente a

$$P_H\ [W_s = 1/2\ n(N+1) + K] = P_H\ [W_s = 1/2\ n(N+1) - K]$$

Lo que se quería demostrar.

Probaremos ahora que

$$P_H\ (Wxy \leq a) = P_H\ (Wyx \leq a)$$

Pa.

En el método 2 para el uso de la Tabla A, vimos que

$W_r + W_s = 1/2\ N(N+1)$, sabiendo que $N = m+n$

tenemos que

$$W_r + W_s = 1/2\ (n+m)\ (N+1)$$

$$W_r + W_s = 1/2\ n(N+1) + 1/2\ m(N+1)$$

$$W_r - 1/2\ m(N+1) = 1/2\ n(N+1) - W_s$$

Por prueba anterior

$$W_r - 1/2\ m(N+1) = W_s - 1/2\ n(N+1)$$

Sumando 1/2 mn a ambos miembros de la ecuación

$$W_r - 1/2\ m(N+1) + 1/2\ mn = W_s - 1/2\ n(N+1) + 1/2\ mn$$

$$W_r - 1/2\ m(N+1-n) = W_s - 1/2\ n(N+1-m)$$

$$W_r - 1/2\ m(m+1) = W_s - 1/2\ n(n+1)$$

Luego

$$P_H\left[W_r - 1/2\ m(m+1) \leq a\right] = P_H\left[W_s - 1/2\ n(n+1) \leq a\right]$$

$P_H\left[Wyx \leq a\right] = P_H\left[Wxy \leq a\right]$. Lo que se quería demostrar.

III. DISTRIBUCION ASINTOTICA NULA DE LA ESTADISTICA DE WILCOXON

Los valores coíticos y las probabilidades de significación de la suma de los rangos de Wilcoxon pueden obtenerse de la Tabla A cuando $m \leq 10$ y $n \leq 10$, para valores mayores de m y n utilizaremos el teorema de límite central.

Antes de enunciar dicho teorema, definiremos ciertos objetos estadísticos que entran a conformarlo.

Sea ξ un experimento y S un espacio muestral (Todos los resultados posibles de un experimento).

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$S_i \rightsquigarrow f(S_i)=V_i$$ donde $f(S_i)$ es llamada <u>Variable Aleatoria.</u>

Se dice que las variables aleatorias V_1 y V_2 son independientes si cualquier suceso (un subconjunto del espacio muestral asociado a una experiencia aleatoria) definido a partir de V_1 únicamente, es independiente de cualquier suceso definido a partir de V_2.

Tomemos n variables aleatorias independientes $V_1, V_2, \ldots, V_n$ con media y varianza (finita) común.

Formando $W = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$.

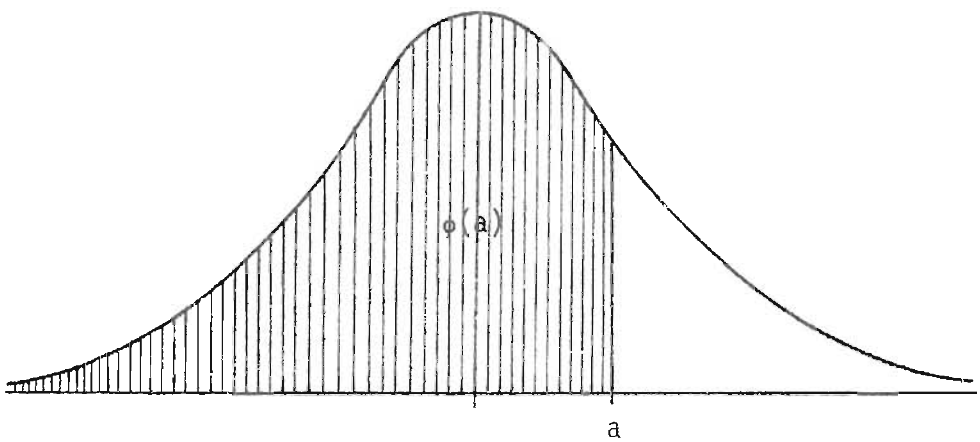
De los resultados anteriores podemos obtener

E(W) y Var(W) [Esperanza y varianza de W, respectivamente]

El teorema del límite central dice que cuando $n \to \infty$, la suma estandarizada $Z = \frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}}$ está normalmente distribuida con media 0 y varianza 1.

Encontrando la distribución cuando $\frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} \leq a$ obtendríamos $P\left[\frac{W - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} \leq a\right] = \phi(a)$, (C_1)

donde $\phi(a)$ denota el área a la izquierda de a bajo una curva normal estandar como se ve en la siguiente figura.



La aproximación normal es aplicable a la distribución de Wilcoxon. El uso de esta aproximación requiere conocimiento de la esperanza y varianza de W_s; éstas son determinadas por la distribución de W_s, la cual descansa en la distribu -

ción de los rangos de los tratados, dados por (A_2).

$$E(W_s) = 1/2\ n(N+1) \qquad (C_2)$$

$$Var(W_s) = 1/12\ mn(N+1) \qquad (C_3)$$

La esperanza y varianza correspondiente a W_r se obtienen a partir de (C_2) y (C_3) sólo intercambiando m por n, así:

$$E(W_r) = 1/2\ m(N+1) \qquad (C_4)$$

$$Var(W_r) = 1/12\ mn(N+1) \qquad (C_5).$$

Probaremos (C_2) y (C_3), para (C_4) y (C_5) su prueba es similar a las anteriores.

Prueba de (C_2)

Sea V la población constituida por $V_1, V_2,\ldots,V_N$, (N-elementos) siendo éstos V_s' los enteros de $1,\ldots,N$.

Encontramos la E(V) (esperanza de V) así:

$$E(V) = \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_N}{N} = \bar{V}$$

$$\bar{V} = \frac{1}{N}(V_1 + V_2 + \ldots + V_N) = \frac{1}{N}\,\frac{(N(N+1))}{2} = \frac{N+1}{2}\ .$$

Tomando una parte de la población $S_1, S_2,\ldots,S_n$ y haciendo $W_s = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, obtenemos

$$E(W_s) = E(S_1) + E(S_2) + \ldots + E(S_n)$$

$$E(W_s) = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \ldots + \bar{S}_n \ , \ (\bar{S}_i\text{: media de la población})$$

como la media es igual a $\frac{N+1}{2}$, luego

$E(W_s) = n \frac{(N+1)}{2}$ Lo que se quería demostrar.

<u>Prueba de (C_3)</u>

Trabajaremos con la población V dada en la prueba de C_2.

$$Var(V) = E(V - \bar{V})^2$$

$$= 1/N \sum_{i=1}^{N} V_i^2 - \bar{V}^2$$

$$\equiv \frac{N(N+1)\ (2N+1)}{6N} - \left\{ \frac{N+1}{2} \right\}^2$$

$Var(V) = \frac{N^2 - 1}{12}$, utilizaremos la notación $\tau^2 = \frac{N^2 - 1}{12}$.

Tomando el par (S_i, S_j) con i,j independientes

donde i : 1,2,...,n ; j: 1,2,...,m, podemos encontrar

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} S_i \right) = \sum_{i=1}^{n} Var(S_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Cov\ (S_i, S_j)$$

haciendo n = m tenemos que

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} S_i \right) = \sum_{i=1}^{n} Var(S_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov(S_i, S_j)$$

con $i \neq j$

Como Var $(S_i) = \tau^2$, para cada S_i, con i : 1,2,...,n

y suponiendo que Cov $(S_i, S_j) = \lambda$,

tenemos $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right) = n\tau^2 + n(n-1)\lambda$ (1)

Tomando n = N

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right) = N\tau^2 + N(N-1)\lambda = 0$$

por ser $\sum_{i=1}^{N} S_i$ constante, luego $\lambda = -\frac{\tau^2}{N-1}$

Volviendo a (1)

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right) = n\tau^2 + n(n-1)\left(-\frac{\tau^2}{N-1}\right)$$

$$= \left[\frac{n(N-1) - n(n-1)}{N-1}\right]\tau^2$$

$$= \left[\frac{nm + n^2 - n - n^2 + n}{N-1}\right]\left[\frac{(N-1)(N+1)}{12}\right]$$

$$= \frac{nm(N+1)}{12}$$ Lo que se quería demostrar.

Probaremos ahora que

$$E(Wxy) = 1/2mn \qquad (C_6)$$

<u>Pa.</u>

$$Wxy = W_s - 1/2n(n+1)$$

$E(Wxy) = E(W_s)+E(-1/2\ n(n+1))$, [La esperanza de una constante es la constante misma]

$E(Wxy) = 1/2\ n(N+1) - 1/2n(n+1)$

$E(Wxy) = 1/2nm$

Ahora probaremos que

$$Var(Wxy) = \frac{nm\ (N+1)}{12}$$

Pa.

$Var\ (Wxy) = Var(W_s - 1/2\ n(n+1))$

$Var\ (Wxy) = Var(W_s) + Var\ (-1/2\ n(n+1))$

$Var\ (Wxy) = Var(W_s)$, ($Var\ (K) = 0$, con K constante)

$Var\ (Wxy) = \frac{nm\ (N+1)}{12}$ Lo que se quería demostrar.

La aplicación de (C_1) requiere además de la esperanza y la varianza de W_s, de una tabla para encontrar el área de ϕ (a) a la izquierda de a bajo la curva normal estandar. Tal tabla, para valores positivos de a se encuentra al final del texto como tabla B.

Puebe obtenerse de esta tabla para valores negativos de a usando los factores:

I. La curva normal estándar es simétrica con respecto al origen.

II. El área total bajo la curva es igual a 1.

Por I, el área $\phi(-a)$ a la izquierda de $-a$ es igual al área de la derecha de a, y por II esta última área es igual a $1 - \phi(a)$. Así nos proveemos de la relación

$$\phi(-a) = 1 - \phi(a) \qquad (C_8)$$

Para ilustrar el cálculo y la precisión de la aproximación normal, tomemos un ejemplo.

Supongamos que $m = n = 10$ y queremos encontrar la probabilidad $P_H (W_s \leq 79)$; procedemos a encontrar:

$E (W_s) = 105$

$\mathrm{Var} (W_s) = 175$

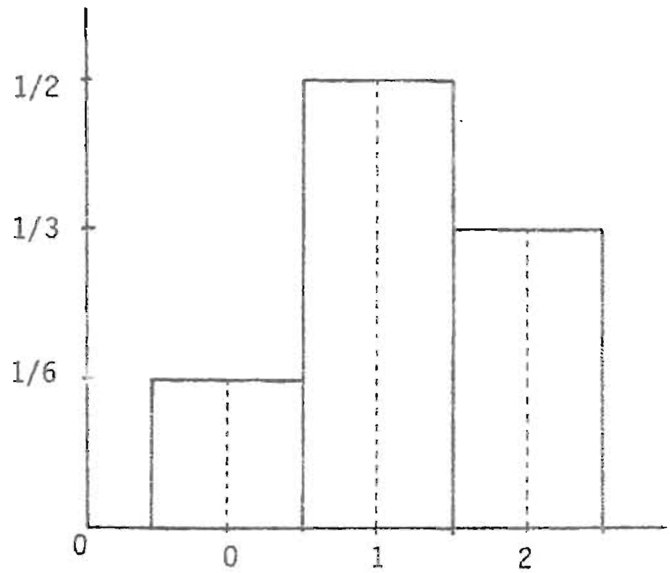
$$P_H (W_s \leq 79) = P \left[\frac{W_s - 105}{\sqrt{175}} \leq - \frac{26}{\sqrt{175}}\right] = \phi \left(\frac{-26}{\sqrt{175}}\right) = \phi (-1.965)$$

La tabla B muestra que $\phi(1.965) = 0.9753$,, así que - $1 - 0.9753 = 0.025 = \phi(-1.965)$, que por lo tanto es la aproximación normal deseada. En comparación con la Tabla A tenemos:

$$P_H (W_s \leq 79) = P_H (W_s - 55 \leq 79 - 55) = P_H (Wxy \leq 24) = 0.026.$$

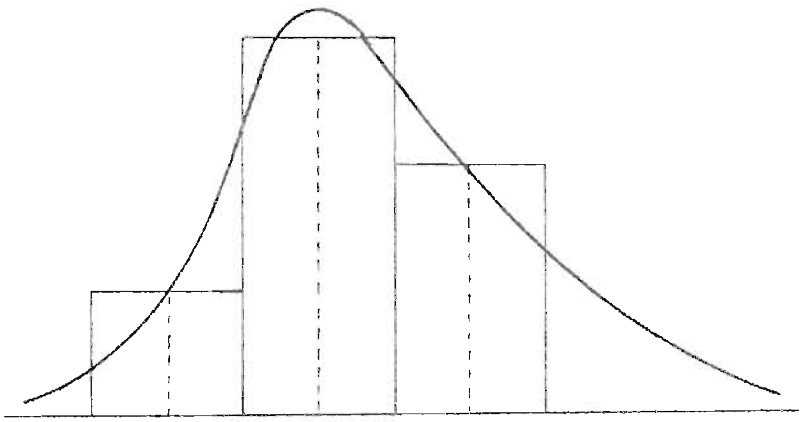
La precisión de la aproximación se mejora frecuentemente por el siguiente refinamiento, el cual tiene su base en la representación gráfica de una distribución por medio de - un histograma. Este consiste en una serie de rectángulos o barras correspondientes a cada uno de los valores positivos de la variable arbitraria en cuestión.

La base del rectángulo está centralizada en el valor, y su área es igual a la probabilidad con la cual se toma el va lor.



Para una variable arbitraria X, tomando los valores de 0,1,2, con probabilidad de 1/6, 1/2, 1/3, respectivamente. En este caso la base de cada rectángulo es igual a 1, la - altura es igual al área del rectángulo, siendo las alturas de estos tres 1/6, 1/2, 1/3, respectivamente.

Supongamos ahora que las probabilidades se están aproxi mando por medio del área apropiada bajo una curva, así:



Aproximación a la distribución X.

La aproximación a $P(x \leq a)$ es el área bajo la curva a la izquierda de a; por ejemplo para $P(x \leq 1)$, está aproximada por el área bajo la curva a la izquierda de 1. Sin embargo, puesto que $P(x \leq 1)$ es igual al área bajo el histograma correspondiente a los rectángulos centralizados en 0 y 1, siendo el área bajo el histograma a la izquierda de 1.5.

Esta modificación es llamada "corrección de continuidad", porque compensa el hecho que un histograma no continuo está siendo aproximado por una curva continua.

Como una ilustración de su efecto, consideremos la probabilidad a $P(W_s \leq 12)$ donde $m = 11$ y $n = 3$ (a pesar de tan ampia diferencia entre los tamaños de los grupos).

La probabilidad exacta, al obtenerla por enumeración facilmente encontramos que es igual a 0.063; por la aproximación normal obtenemos:

$$P(W_s \leq 12) = P\left[\frac{W_s - 22.5}{6.423} \leq \frac{12 - 22.5}{6.423}\right] = \phi(-1.635) = 0.051.$$

Apliquemos ahora la corrección de continuidad. Como el valor más pequeño que W_s puede tomar es $\frac{n(n+1)}{2}$, al sustituir $n = 3$ obtenemos 6, luego los valores posibles son: -- 6, 7,...,12, 13... y los valores posibles de $\frac{W_s - 22.5}{6.423}$ son por lo tanto

$$\frac{6 - 22.5}{6.423}, \frac{7 - 22.5}{6.423}, \ldots, \frac{12 - 22.5}{6.423}, \frac{13 - 22.5}{6.423}, \ldots,$$

estos valores son los centros de las barras del histograma.

La aproximación normal toma sólo el área de la curva a la izquierda de $\frac{12 - 22.5}{6.423}$, el cual es el centro de la barra correspondiente a $W_s = 12$. Sin embargo, puesto que el área total de esta barra se cuenta en la probabilidad $P(W_s \leq 12)$.

Es mejor incluir el área bajo la curva normal al punto terminal del lado derecho de esta barra que está en el punto medio de $\frac{12 - 22.5}{6.423}$ y $\frac{13 - 22.5}{6.423}$, y por lo tanto es igual

a $1/2 \left[\frac{12 - 22.5}{6.423} + \frac{13 - 22.5}{6.423}\right] = \frac{12.5 - 22.5}{6.423}$.

Y así la corrección de continuidad conduce a la aproximación $\phi\left(\frac{12.5 - 22.5}{6.423}\right) = \phi\,(-1.557) = 0.060,$

estando más cerca del valor 0.063 que el valor 0.051 obtenida por la aproximación normal no corregida.

En general, el mismo argumento conduce aproximar la probabilidad $P(W_s \leq C)$ por $P(W_s \leq C) \simeq \phi\left[\frac{C - 1/2\, n(N+1) + 1/2}{\sqrt{\frac{mn(N+1)}{12}}}\right]$ (C_7)

Es difícil hacer afirmaciones generales confiables con - cerniente a la exactitud de C_7 y similares aproximaciones, - sin embargo estaremos más próximos a ella (exactitud) si tomamos en cuenta las dos siguientes afirmaciones cualitativamente aplicables no sólo al caso de Wilcoson sino también a todas las aproximaciones que aparezcan en el desarrollo de este trabajo.

i) La precisión de la aproximación tiende a aumentar cuando m y n aumentan.

ii) Si la precisión es medida no por el error absoluto (la -

diferencia entre el valor exacto y el aproximado) sino por el error relativo (error absoluto dividido por el valor exacto), la aproximación tiende a volverse menos confiable cuando las probabilidades que se están aproximando están bien cerca a cero, eso es, en las colas de distribución.

Para (i) puede agregarse que en el caso de Wilcoxon, - en los tamaños de los dos grupos, un aumento en el más pequeño de ellos resulta típicamente un mayor aprovechamiento que un correspondiente aumento en el tamaño del grupo mayor.

Estas declaraciones dejan abierta la pregunta crucial - de cuán mayor tiene que ser m y n para que la aproximación - sea satisfactoria. Alguna luz se arroja en este problema - por la tabla 1, la cual provee una comparación de la probabilidad de Wilcoxon $P(W_r \leq C)$ con su aproximación normal, ambos con o sin la corrección de continuidad para tres combinaciones de los tamaños de los grupos m y n.

Para los casos $m = 4$ y $n = 12$ y $m = 8$, $n = 8$, sugieren que por lo menos al rango de $\alpha = 0.01$ hasta $\alpha = 0.15$, la aproximación con la corrección de continuidad será adecuada - para la mayoría de los propósitos en los cuales los tamaños de todos los grupos que no están cubiertos por la tabla A, - y en el cual el tamaño más pequeño del grupo K_1 es al menos 4; incidentalmente, se ve de la tabla 1 que la corrección de continuidad no siempre mejora la aproximación a pesar que en la mayoría de los casos parece dar muchos mejores resultados.

TABLA 1

Valores exactos y aproximaciones de $P(W_s \leq C)$ con o sin corrección de continuidad.

C	6	7	8	9	10
EXACTO	0.012	0.024	0.048	0.083	0.131
SIN	0.010	0.019	0.035	0.061	0.098
CON	0.014	0.026	0.047	0.078	0.123
$m = 3$, $n = 6$					

C	13	15	20	23	25
EXACTO	0.004	0.010	0.052	0.106	0.158
SIN	0.005	0.011	0.045	0.091	0.138
CON	0.006	0.012	0.051	0.102	0.151
$m = 4$, $n = 12$					

C	44	46	48	52	56
EXACTO	0.005	0.010	0.019	0.052	0.117
SIN	0.006	0.010	0.018	0.047	0.104
CON	0.007	0.012	0.020	0.052	0.114
$m = 8$, $n = 8$					

IV. TRATAMIENTO CON EMPATES.

En la aplicación de pruebas de rangos, con frecuencia se encuentra una dificultad la cual hemos evitado anteriormente.

Cuando las medidas u otras observaciones numéricas se toman, con frecuencia sucede que dos o más observaciones son iguales, ésto nos conduce a la dificultad suscitada.

Supongamos por ejemplo que $m = n = 2$ y las observaciones son 1.3, 1.7, 1.7, 2.5. Entonces la observación más pequeña tiene rango 1 y la mayor rango 4; pero no sabemos cuál de las otras dos tiene rango 2 y cuál tiene rango 3. Si no se introduce una distinción entre las dos observaciones, a ellas se les asignará el mismo rango y entonces será más natural asignar a cada una el promedio de los dos rangos, en el caso presente $(2 + 3)/2 = 2.5$. A los cuatro sujetos se les asignará entonces los rangos medios 1, 2.5, 2.5, 4, y denotaremos los rangos medios asignados al tratamiento y control por S_1^*, S_2^* y R_1^*, R_2^*, respectivamente.

Claramente la distribución nula

$$\left(P_H(S_1 = s_1, S_2 = s_2, \ldots, S_n = s_n) = \frac{1}{\binom{N}{n}}\right)$$

Ya no se sostiene porque aún los valores posibles de -

(S_1^*, S_2^*) no son los mismos con los de (S_1, S_2). Sin embargo, el argumento todavía conduce a A_2 en sus aplicaciones.

Bajo la hipótesis de no efecto en el tratamiento, los 4 sujetos recibirán los rangos medios independientemente de - cuáles de ellos se asignan al tratamiento y cuáles para control. La selección arbitraria de dos de los sujetos para recibir el tratamiento nos lleva también a la selección de sus rangos medios, así que cualquiera de las seis posibles alternativas de dos de los 4 rangos medios (S_1^* y S_2^*) son iguales.

Los rangos 1, 2.5, 2.5, 4 aparecen el siguiente cuadro con las alternativas posibles.

TRATADOS	1,2.5	2.5,2.5	1,4	2.5,4	2.5,4	1,2.5
CONTROLES	2.5,4	1,4	1.5,2.5	1,2.5	1,2.5	2.5,4

Esto conduce a la siguiente distribución:

$$P(S_1^* = 1,\ S_2^* = 2.5) = 2/6$$

$$P(S_1^* = S_2^* = 2.5) = 1/6$$

$$P(S_1^* = 1,\ S_2^* = 4) = 1/6$$

$$P(S_1^* = 2.5,\ S_2^* = 4) = 2/6$$

Esta distribución determina la estadística de la suma de los rangos medios de Wilcoxon.

$W_s^* = S_1^* + S_2^*$

$P(W_s^* = 3.5\ ) = 2/6$

$P(W_s^* = 5) = 2/6$

$P(W_s^* = 6.5) = 2/6$

Vemos que W_s^* toma los valores de 3.5, 5, 6.5 cada uno con una probabilidad de 1/3. La aproximación anterior se aplica - generalmente a situaciones con observaciones en donde existen empates; ilustraremos con un ejemplo más:

Supongamos que $m = n = 3$ y que las observaciones del control son 2, 2, 9 y las observaciones del tratamiento 4, 9, 9; los seis rangos medios son 1.5, 1.5, 3, 5, 5, 5, así los rangos medios del tratamiento son 3, 5, 5; siendo $W_s^* = 3 + 5 + 5 = 13$.

Para $W_s^* \geq 13$ encontraremos la probabilidad del nivel de - significación.

Hay $\binom{6}{3} = 20$ alternativas iguales para los rangos medios de los tratados y las probabilidades de los posibles conjuntos -- (S_1^*, S_2^*, S_3^*) son:

$S_1^*=$, $S_2^*=$, $S_3^*=$	1.5, 1.5, 1.5	1.5, 1.5, 5	1.5,3,5	1.5,5,5	3,5,5	5,5,5
$P(S_1^*, S_2^*, S_3^*)$	1/20	3/20	6/20	6/20	3/20	1/20

Del cuadro anterior puede verse que la probabilidad de significación de $P(W_s^* \geq 13) = 4/20 = 0.2$.

Se dispone nuevamente de una aproximación normal cuando m y n no sean lo suficientemente pequeños y la máxima proporción de observaciones empatadas a cualquier valor no esté tan cerca de 1.

El uso de la aproximación normal requiere de la esperanza y la varianza de W_s^*.

$$E(W_s^*) = 1/2\ n(N+1) \qquad (D_1)$$

La varianza de W_s^* implica el número de observaciones empatadas a los diferentes valores. Supongamos que de N observaciones tomadas hay e distintos valores, y que d_1 de las N observaciones son iguales a los valores más pequeños, d_2 al próximo más pequeños, y así sucesivamente hasta d_e, el más grande.

Si las observaciones son por ejemplo: 2, 2, 4, 9, 9, 9 (como en uno de los ejemplos primeros), entonces e = 3 y $d_1 = 2$, $d_2 = 1$ y $d_e = d_3 = 3$, luego

$$\mathrm{Var}(W_s^*) = \frac{mn(N+1)}{12} - \frac{mn\sum_{i=1}^{e}(d_i^3 - d_i)}{12N(N-1)} \qquad (D_2)$$

[La prueba para (D_1) y (D_2) aparecerá al final de IV]

El primer término no es más que la varianza de W_s y el segundo da la corrección para los empates. El efecto de la corrección tiende a ser bastante pequeña, a pesar de las posibles excepciones a esta regla.

En particular, cuando no hay empates presentes todos los d_i, con i:1, 2...., e son iguales a 1, y el término de corrección es cero.

Típicamente, la aproximación normal no es tan exacta con la presencia de empates como lo es para los mismos tamaños de los grupos sin empates. Esto no es extraño puesto que los empates tienden a disminuir el número de valores tomados por W_s y aumentar la deformidad de su distribución.

La prueba W_s^* puede aplicarse también en situaciones en las cuales no se observan respuestas numéricas, estando los sujetos divididos en categorías tales como malo, regular, bastante bueno, bueno y se observa cuántos de los sujetos tratados y de control caen dentro de estas categorías.

Ilustramos ahora la aproximación normal en un ejemplo de esta clase.

Ejemplo: Consultorio Psicológico.

En una prueba del efecto del consultorio psicológico, 80 muchachos están divididos aleatoriamente en un grupo de -

control de 40 sujetos, para quienes solamente las facilidades de consulta normal están disponibles, y un grupo de 40 para ser tratados quienes recibirán consulta especial.

Al final del estudio, se hace una cuidadosa prueba de certificación de cada muchacho que se clasifica entonces como personas que han salido bien (bueno), bastante bueno, regular, deficiente o malo, con los siguientes resultados:

	MALO	REGULAR	BASTANTE BUENO	BUENO	TOTAL
TRATAMIENTO	5	7	16	12	40
CONTROL	7	9	15	9	40

Los datos pueden tratarse como si las observaciones fueron capaces de tomar solamente 4 valores. Con 5 + 7 = 12 observaciones empatadas al valor más pequeño, 7 + 9 = 16 al próximo más pequeño, 16 + 15 = 31 al tercero, y 12 + 9 = 21 al valor mayor. El rango medio de los 12 sujetos cuya clasificación está dada como malo es entonces 6.5; el rango medio de los regulares es 10.5, en la tercera 44, y en la cuarta categoría, 70.

$$W_s^* = 5 \times 6.5 + 7 \times 20.5 + 16 \times 44 + 12 \times 70 = 1{,}720$$

La probabilidad de significación de los resultados observados es $P_H(W_s^* \geq 1{,}720)$.

Como $m = n = 40$ y $d_1 = 12$, $d_2 = 16$, $d_3 = 31$, $d_4 = 21$, resulta por (D_1) y (D_2) que:

$$E(W_s^*) = 1,620$$

$$\sqrt{Var(W_s^*)} = 99.27$$

La aproximación normal a la probabilidad de significación por lo tanto es $P\left\{\frac{W_s^* - 1.620}{99.27} \leq \frac{1,720 - 1,620}{99.27}\right\} = \phi\ (1.01)$

luego $P_H(W_s^* \geq 1,720) = 1 - \phi\ (1.01) = 0.16.$

La estadística W_s^* es la generalización natural de la suma de los rangos W_s, cuando las observaciones no son todas distintas.

En la misma situación, es también posible generalizar la estadística Wxy. Dado que Wxy cuenta el número de pares (x_i, y_j) tales que $x_i < y_j$ con $i:1,2,\ldots,m$; $j:1,2,\ldots,n$; a cada par (x_i, y_j) se asigna la puntuación de 1 y 0, cuando $x_i < y_j$ y $y_j < x_i$, respectivamente; y Wxy es la suma de estas puntuaciones.

Cuando los empates están presentes, puede suceder que y_j sea igual a x_i y entonces es natural asignar 1/2 al par (x_i, y_j).

Denotemos la suma de las puntuaciones resultantes por W^*_{xy} = [N° pares (x_i, y_j) con $x_i < y_j$] + 1/2 [N° de pares - (x_i, y_j) con $x_i = y_j$]. (D_3); siendo una generalización de (B_{10}). Entonces las pruebas basadas en W^*_s y W^*_{xy} son - siempre equivalentes y en verdad las dos estadísticas sa - tisfacen la relación correspondiente

$$Wxy = W_s - 1/2\ n(n+1) \quad ,$$

así para las estadísticas anteriores

$$W^*_{xy} = W^*_s - 1/2\ n(n+1)\ . \ (D_4)$$

$$E(W^*_{xy}) = 1/2\ nm \qquad . \ (D_5)$$

$$Var(W^*_{xy}) = Var\ (W^*_s) = \frac{mn(N+1)}{12} - \frac{nm \sum_{i=1}^{e} (d_i^3 - d_i)}{12N(N+1)} \ . \ (D_6)$$

Prueba de (D_4)

Si las d_1 observaciones están empatadas al valor más - pequeño, el rango medio de estas observaciones es el prome- dio de los rangos de $1, 2, \ldots, d_1$, siendo éste igual a

$$\frac{1+2+\ldots+d_1}{d_1} = 1/2\ (d_1 + 1) \quad ,$$

Las observaciones en el segundo grupo empatadas ocupan las posiciones $d_1 + 1$, $d_1 + 2, \ldots, d_1 + d_2$, y su rango medio es por lo tanto:

$$\frac{d_1 + 1 + d_2 + 2 + \ldots + d_1 + d_2}{d_2} = d_1 + 1/2\ (d_2 + 1)\ .$$

similarmente el rango medio de las observaciones empatadas en el i-ésimo grupo es

$$\frac{(d_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+1)+(d_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+2)+\ldots+(d_1+d_2+\ldots+d_i)}{d_i}=d_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+1/2\ (d_i + 1).$$

Supongamos que de las d_1 observaciones empatadas al valor más pequeño, tenemos A_1X's y B_1 Y's; de las d_2 observaciones empatadas el valor próximo más pequeño A_2X's y B_2y's, y así sucesivamente para d_i observaciones empatadas al mayor valor, A_iX's y B_iY's, la suma de los y- rangos medios es entonces:

$$W_s^* = B_1[1/2(d_1+1)]+B_2[d_1+1/2(d_2+1)]+\ldots+B_i[d_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+1/2(d_i+1)].$$

Obtendremos una expresión similar para W_{xy}^*; consideremos la contribución de W_{xy}^* desde una observación Y_j en el primer grupo, no hay X's más pequeños que este Y, y el número de las X's igual a Y es A_1; luego la contribución de esta Y es 1/2 A_2. Para una observación Y en el segundo grupo, el número de los X's más pequeños que Y son los A_1 y el número de X's igual a Y es A_2; siendo la contribución para este Y, $A_1 + 1/2\ A_2$; continuando en esta misma forma obtendríamos - las contribuciones correspondientes. Recordemos que el número de Ys en los respectivos grupos son $B_1, B_2, \ldots, B_j$.

Deduciremos ahora que

$$W^*_{xy} = B_1(1/2A_1) + B_2(A_1+1/2A_2) + B_3(A_1+A_2+1/2A_3)+\ldots$$

sabiendo que $d_i = A_i + B_i$,

podemos encontrar

$$(1)\ W^*_s - W^*_{xy} = B_1\ 1/2(B_1+1) + B_2(B_1+1/2(B_2+1)) + B_3\ (B_1+B_2+1/2(B_3+1) + \ldots$$

La suma de los términos de esta diferencia, sin incluir los términos con el factor 1/2 es

$$B_2B_1 + B_3\ (B_1 + B_2)+\ldots \quad \text{es decir}$$

$$\sum_{i>j} B_iB_j = 1/2 \sum_{i\neq j} B_iB_j$$

regresando a (1) tenemos que

$$W^*_s - W^*_{xy} = 1/2\ \left[\sum_{i=1} B_i + \sum_{i=1} B_i^2 + \sum_{i\neq j} B_iB_j\right]$$

$$(2)\ W^*_s-W^*_{xy}=1/2\ \left[\sum_{i=1} B_i+(\sum_{i=1} B_i)^2\right] \text{por ser } (\sum B_i)^2 = \sum_{i=1} B_i^2+\sum_{i\neq j} B_iB_j$$

La suma de los B_i es el número total de los Y's.

Así $\sum B_i = n$ sustituyendo en (2)

$W_s^* - W_{xy}^* = 1/2\ (n+n^2)$ luego $W_{xy}^* = W_s^* - 1/2\ n(n+1)$, esto completa la prueba.

Prueba de (D_6) $\left[(Var(W_s^*) = \frac{nm(N+1)}{12} - \frac{nm \sum_{i=1}^{e} d_i(d_i^2-1)}{12N(N-1)} \right]$

Supongamos que la población $V_1, V_2, \ldots, V_N$ tiene los valores $1,2,\ldots,N$.

Sean los enteros $d_1, d_2, \ldots, d_e$ cuya suma es N.

Supongamos que d_1 de los V_s, son iguales al promedio de $1,2,\ldots,d_1$, así

$$V_1 = \frac{1+2+\ldots+d_1}{d_1} = 1/2(d_1+1) = Vd_1;$$ d_2 de los V_s son iguales al promedio de $d_1+1,\ d_1+2, \ldots, d_1+d_2$ así

$$Vd_{1+1} = \frac{(d_1+1)+(d_{1+2})+\ldots+(d_1+d_2)}{d_2} = d_1+1/2(d_2+1) = Vd_1+d_2,$$ de la misma manera vemos que para d_i de los V_s que serían $d_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+1,\ d_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+2, \ldots, d_1+d_2+\ldots+d_i$ siendo el promedio igual a

$$Vd_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+1 = \frac{(d_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+1)+\ldots+(d_1+d_2+\ldots+d_i)}{d_i}$$

$$= d_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+1/2(d_i+1).$$

Estos promedios no son más que los rangos medios.

Sabemos que la media de la población es $\bar{V} = \frac{N+1}{2}$, luego la media de los d_i será la misma.

Por (C_3) sabemos que Var $(W_s) = \frac{n(N-n)}{N-1} \tau^2$, nuestro objetivo para encontrar Var (W_s^*) será encontrar la expresión para τ^2; nos auxiliaremos de la expresión (Var(a_i))

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} a_i^2 - \bar{a}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K} (a_i - \bar{a})^2}{K}$$

Tomaremos valores reales para los $a_1, a_2, \ldots, a_{d_1}$ haciendo $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots, a_{d_1} = d_1$ luego $\bar{a} = V_1 = V_2 = \ldots V_{d_1}$

Así $\bar{a} = V_1 = \frac{1+2+\ldots+d_1}{d_1} = 1/2\ (d_1 + 1)$

por ser $\tau^2 = \frac{N^2-1}{12}$ (dada en C_3 (Var $(W_s) = \frac{n(N-n)}{N-1} \tau^2$) tenemos

que $\sum_{i=1}^{d_1} \frac{(a_i - \bar{a})^2}{d_1} = \frac{d_1^2 - 1}{12}$ o sea $\sum_{i=1}^{d_1} (a_i - \bar{a})^2 = \frac{d_1(d_1^2 - 1)}{12}$

$$\sum_{i=1}^{d_1} a_i^2 - \sum_{i=1}^{d_1} 2a_i\ \bar{a} + \sum_{i=1}^{d_1} \bar{a}^2 = \frac{d_1(d_1^2 - 1)}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{d_1} a_i^2 = 2\bar{a} \sum_{i=1}^{d_1} a_i - d_1\ \bar{a}^2 + \frac{d_1(d_1^2 - 1)}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{d_1} a_i^2 = 2\,\frac{(d_1+1)}{2}\;\frac{d_1(d_1+1)}{2} - \frac{d_1(d_{1+1})^2}{2^2} + \frac{d_1(d_1^2-1)}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{d_1} a_1^2 = \frac{d_1(d_{1+1})^2}{4} + \frac{d_1(d_1^2-1)}{12}$$

$$1^2+2^2+\ldots+d_1^2 = \sum_{j=1}^{d_1}\left(\frac{d_{1+1}}{2}\right)^2 + d_1\,\frac{(d_1^2-1)}{12}\text{, como } V_j = \frac{d_{1+1}}{2}\text{, J: } 1,2,\ldots,d_1$$

obteniendo así

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+d_1^2 = \sum_{j=1}^{d_1} V_j^2 + \frac{d_1\,(d_1^2-1)}{12}$$

Para $a_1 = d_{1+1}$, $a_2 = d_{1+2}, \ldots, a_{d_2} = d_1+d_2$ tenemos entonces

$$(d_{1+1})^2 + (d_{1+2})^2+\ldots+(d_1+d_2)^2 = \sum_{j=d_{1+1}}^{d_1+d_2} V_j^2 + \frac{d_2(d_2^2-1)}{12}$$

continuando de la misma manera tendríamos para

$a_1 = d_1+d_2+\ldots+d_{i=1}+1$, $a_2 = d_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+2,\ldots,a_{d_i} = d_1+d_2+\ldots+d_i$ luego

$$(d_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+1)^2+\ldots+(d_1+d_2+\ldots+d_i)^2 = \sum_{j=d_1+d_2+\ldots+d_{i-1}+1}^{d_1+d_2+\ldots+d_i} V_j^2 + \frac{d_i(d_i^2-1)}{12}$$

sumando los resultados de las ecuaciones llegamos a obtener

$$1^2+2^2+\ldots+N^2 = \sum_{j=1}^{N} V_j^2 + \sum_{i=1}^{e}\frac{d_i(d_{i-1}^2)}{12}$$

$$\sum_{j=1}^{N} V_j^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \sum_{i=1}^{e}\frac{d_i(d_i^2-1)}{12}$$

Restando $N\bar{V}^2$ y a la vez dividiendo por N la ecuación

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} V_j^2 - \frac{N(N+1)^2}{2^2\, N} = \frac{N(N+1)\ (2N+1)}{6N} - \frac{N(N+1)^2}{4N} - \sum_{i=1}^{e} \frac{d_i(d_i^2 - 1)}{12N}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} V_j^2 - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \left[\frac{N^2 - 1}{12} - \sum_{i=1}^{e} \frac{d_i(d_i^2 - 1}{12N}\right]$$

El miembro de la izquierda de la ecuación es $Var(V_j) = \tau^2$.

Teniendo τ^2 sustituimos en (C_3) W_s por W_s^* y nuestro τ^2 - encontrado así:

$$Var\ (W_s^*) = \frac{nm}{N-1}\left[\frac{N^2\ 1}{12} - \sum_{i=1}^{e} \frac{d_i\ (d_1^2 - 1)}{12N}\right]$$

$$Var\ (W_s^*) = \frac{nm(N+1)}{12} - \frac{nm \sum d_i(d_i^2 - 1)}{12N(N-1)}$$ Lo que se quería demostrar.

V. ALTERNATIVAS BILATERALES.

El test de la suma de los rangos de Wilcoxon provee un sencillo y efectivo método para comparar un nuevo tratamiento con uno estándar. Esta comparación está fuertemente dirigida en favor de este último.

En efecto, el valor crítico se coloca de tal manera que la probabilidad sea 1 - α (típicamente 0.9 o más) de decidir en favor del tratamiento estándar cuando no hay en realidad diferencia entre los dos. La decisión va para el nuevo competidor solamente si se ha probado su efectividad más allá de una duda razonable.

Indicamos una aproximación más simétrica para las dos siguientes clases de problemas:

i) Al tratar de decidir cuál de los dos tratamientos es mejor, podemos encontrarnos con una situación en la cual ambos tratamientos sean nuevos y por lo tanto no hay razón para conducir el procedimiento en favor de uno de ellos.

   Ejemplo: Podemos decidir por cuál de las dos líneas de gasolina un carro obtiene más kilometraje.

ii) El problema no puede ser de decidir cuál de los dos tratamientos es mejor sino sólo determinar si ellos difieren por completo, y en cuáles situaciones los dos trata -

mientos juegan típicamente un papel simétrico.

Mostraremos cómo el test de la suma de los rangos de Wilcoxon puede adaptarse a estos dos tipos de problemas. Comenzaremos con el segundo problema como el más sencillo de los dos. Para probar si existe una diferencia significativa entre los dos tratamientos P y Q, se asignan los N sujetos así m para P y n para Q. Las respuestas de los N sujetos se clasifican con W_P y W_Q denotando la suma de los rangos de P y Q respectivamente. La hipótesis nula H será "no hay diferencia entre P y Q".

Las alternativas se especifican así: Que Q sea superior o inferior a P. La hipótesis se rechaza, por lo tanto no solamente cuando la suma W_Q de rangos de Q sea demasiado grande, sino también cuando sea demasiado pequeña, así

$$W_Q \leq C_1 \quad \text{o} \quad W_Q \geq C_2 \quad \text{con } C_1 < C_2 \ . \qquad (E_1)$$

Las constantes C_1 y C_2 están determinadas de tal manera que bajo H la probabilidad de rechazo es igual al nivel de significación especificado α, es decir que

$$P_H(W_Q \leq C_1) + P_H(W_Q \geq C_2) = \alpha \ . \qquad (E_2)$$

Sin embargo, esta ecuación no es suficiente para especificar C_1 y C_2 puesto que deja abierta la pregunta de cómo distribuir la probabilidad total α entre el primero y segun do término. Si los dos tratamientos juegan un papel completamente simétrico, parece natural escoger C_1 y C_2, de tal manera que H es igualmente rechazada cuando W_Q es demasiado grande como cuando es demasiado pequeño, esto es

$$P_H(W_Q \leq C_1) = P_H(W_Q \geq C_2) = 1/2\ \alpha \qquad (E_3)$$

De el hecho que la distribución de W_Q es simétrica con respecto a $1/2\ n(N+1)$, resulta que C_1 y C_2 deben ser igualmente distantes a $1/2\ n(N+1)$ y ser de la forma

$$C_1 = 1/2\ n(N+1) - C\ , \quad C_2 = 1/2\ n(N+1) + C.$$

La prueba bilateral de la suma de los rangos de Wilcoxon, definida por (E_1) y (E_3) rechaza a H cuando

$$W_Q - 1/2\ n(N+1) \leq -C \quad \text{o} \quad W_Q - 1/2\ n(N+1) \geq C\ ,$$

o sea

$$|W_Q - 1/2\ n(N+1)| \geq C \qquad (E_4)$$

Debido a la naturaleza discreta de W_Q no existirá exactamente un valor C para la ecuación

$$P_H[\,|W_Q - 1/2\ n(N+1)| \geq C\,] = \alpha\ . \qquad (E_5)$$

Como en II se puede escoger el valor C para el cual el lado izquierdo de (E_5) está tan cerca de α como sea posible, o el valor más pequeño para el cual no exceda a α.

Como en el caso unilateral no sólo estaremos interesados en el rechazo o la aceptación a un nivel fijado α, sino también en la probabilidad de significación del dato.

La prueba bilateral (E_4) se da por

$$P_H\left[\,|W_Q - 1/2\ n(N+1)| \geq |W - 1/2\ n(N+1)|\,\right].\ (E_6)$$

W denota los valores observados de W_Q.

La prueba bilateral (E_4) puede por supuesto expresarse también en términos de Wxy, de (B_9) nos damos cuenta que (E_4) es equivalente a

$$|Wxy - 1/2\ mn| \geq C \qquad (E_7)$$

(Siendo la misma constante C en ambos casos).

Para valores grandes de m y n la prueba se lleva a cabo con la ayuda de la aproximación normal, así bajo H tenemos

$$\frac{W_Q - 1/2\ n(N+1)}{\sqrt{mn\ (N+1)/12}},$$

que tiene aproximadamente la distribución normal estándard; la probabilidad de significación (E_6) está aproximada por el área bajo la curva normal a la izquierda de

$$-\frac{|W - 1/2\ n(N+1)| + 1/2}{\sqrt{mn\ (N+1)/12}},$$

más el área a la derecha de

$$\frac{|W - 1/2\ n(N+1)| - 1/2}{\sqrt{mn\ (N+1)/12}} .$$

Estas áreas son iguales, y la probabilidad de significación de la prueba bilateral (E_4) por lo tanto está aproximada por

$$2\left[1 - \phi\left[\frac{|W - 1/2\ n(N+1) - 1/2|}{\sqrt{mn\ (N+1)/12}}\right]\right] . \qquad (E_8)$$

Cuando hay empates, la prueba (E_1) y las condiciones de (E_3) se modifican reemplazando W_Q por W_Q^*. Puesto que la distribución de W_Q^* no es en general simétrica, (E_1) no puede ser reemplazada por (E_4). En cambio C_1 y C_2 son determinados de tal manera que

$$P_H\ (W_Q^* \leq C_1) \quad y \quad P_H\ (W_Q^* \geq C_2)$$

estén tan cerca de $\alpha/2$ como sea posible. Para valores grandes de m y n una aproximación normal puede aplicarse otra - vez. La simetría de la curva normal implica que la distribución de W_Q^* es entonces aproximadamente simétrica, y el argumento que conduce a (E_8) muestra ahora que la probabilidad de significación de la prueba bilateral de Wilcoxon puede ser aproximada por

$$2\left[1 - \phi\left[\frac{|W - 1/2\ n(N+1)|}{\sqrt{Var_H\ (W_Q^*)}}\right]\right] \qquad (E_9)$$

Aquí W es el valor observado de W_Q^*, la varianza de W_Q^*

se da por (D_6), y la corrección de continuidad de 1/2 en (E_8) - se ha omitido puesto que los valores de W_Q^* no son igualmente espaciados (dado que existen valores que tienen el mismo rango medio o sea se encuentran empatados).

Ejemplo 1. Anticipación de Hipnosis.

En un estudio sobre el efecto de la hipnosis, se dividieron arbitrariamente dieciséis sujetos en grupos de 8 para ser hipnotizados y 8 para control.

Cuando fueron analizados los resultados del experimento, se notó que una medida de las respuestas a ciertas preguntas hechas a cada sujeto al principio del experimento, inesperadamente apareció más alta para los sujetos del experimento - que para los de control.

Una explicación plausible fue que tal aumento pudo ser causado en los sujetos del experimento por la anticipación de ser hipnotizados, y pareció de interés probar la significación del efecto.

Las observaciones obtenidas fueron:

CONTROLES: 3.99, 4.19, 4.21, 4.54, 4.64, 4.69, 4.84, 5.48.
TRATADOS : 4,36, 4.67, 4.78, 5.08, 5.16, 5.20, 5.52, 5.74.

A pesar que es tentador aquí usar una prueba unilateral, ésta no es apropiada ya que una diferencia correspon -

diente en la otra dirección sería notada. Por ello, la hipótesis de no efecto habría sido rechazada para una diferencia suficientemente grande en cualquier dirección, y la regla de rechazo está basada en una prueba bilateral.

Para probar la hipótesis de no efecto en el tratamiento a un nivel de significación $\alpha = 0.05$, los valores críticos C_1 y C_2 se computan de (E_3) o las correspondientes ecuaciones para Wxy con $\alpha/2 = 0.025$. Para los tamaños m = n = 8, la tabla A muestra que $P_H(Wxy \leq 13) = 0.025$, ya que

$$P_H(Wxy \leq 13) = P_H(Wr - \frac{8(8+1)}{2} \leq 13) = P_H(Wr \leq 49) =$$

$$P_H(|Wr - 1/29(16+1)| \geq |(49 - \frac{8(16+1)}{2}|) = P_H(|Wr - 68| \geq 19) = P_H(Wr - 68 \geq 19)$$

$$P_H(Wr \geq 87).$$

Se ve que a un nivel $\alpha = 0.05$ los datos serán significativos siempre que $|Wr - 68| \geq 19$.

Los valores observados son $Wr = 49$ y por ello $|Wr - 68| = 19$, al mismo tiempo la hipótesis de no diferencia es rechazada al nivel de $\alpha = 0.05$. La probabilidad de significación de la prueba (E_4) es $P_H(|Wr - 68| \geq |49 - 68|)$, la cual resulta ser exactamente 0.05.

Como una ilustración a la aproximación normal, computemos la probabilidad de significación usando (E_8). Puesto que

$n = 8$, $N = 16$, al efectuar las sustituciones y evaluaciones correspondientes obtenemos $2\,[1 - \phi\,(2.001)] = 0.0454$.

La prueba bilateral de Wilcoxon acepta la hipótesis de no diferencia entre P y Q cuando

$$|W_Q - 1/2\, n(N+1)| < C \qquad (E_{10})$$

y rechaza H en el caso contrario.

Típicamente, cuando se rechaza la hipótesis no se estará satisfecho con aceptar la existencia de una diferencia - significativa, por el contrario uno desea saber cuál de los dos tratamientos es el mejor. En base a ésto podemos escoger entre tres alternativas:

D_0 : Aceptando H.

D_1 : Decidiendo que Q es mejor que P.

D_2 : Decidiendo que P es mejor que Q.

El procedimiento sugerido por (E_{10}) es tomar la decisión D_0 : Cuando se mantiene E_{10}. D_1 : Si $W_Q \geq 1/2\, n(N+1) + C$, D_2 : Si $W_Q \leq 1/2\, n(N+1) - C$.

Para este procedimiento el nivel de significación α retiene su interpretación como la probabilidad de un falso rechazo de H (y por lo tanto declara que uno de los tratamientos es superior al otro) cuando en efecto no existe ninguna diferencia.

Existe en realidad una manera más natural de observar el presente problema. En lugar de enfatizar la hipótesis más o menos artificial de no diferencia entre P y Q, se puede enfocar el problema de determinar cuál de los dos tratamientos es mejor. Si además, se permite la posibilidad de permanecer en duda cuando los datos no son suficientemente conclusivos, el procedimiento puede ser reformulado así:

$$\text{Seleccione Q si } W_Q \geq 1/2\ n(N+1) + C \qquad (E_{11})$$

$$\text{Seleccione P si } W_Q \leq 1/2\ n(N+1) - C$$

$$\text{Suspenda el tratamiento si } |W_Q - 1/2\ n(N+1)| < C$$

Esto se ve que es la solución al problema (i) declarado al principio de esta sección.

¿Cómo se especificará en tal tratamiento el valor crítico?. Sea α' que denota la probabilidad común

$$\alpha' = P_H\ [W_Q \leq 1/2\ n(N+1) - C] = P_H\ [W_Q \geq 1/2\ n(N+1) + C]\ . \qquad (E_{12})$$

Computada bajo la asunción que no hay diferencia entre los dos tratamientos. Entonces $2\alpha'$ es sólo el nivel de $\underline{\alpha}$ definido por (E_5), que es la probabilidad de concluir diciendo que uno de los tratamientos es mejor que el otro (ya sea P mejor que Q o Q mejor que P) cuando, en verdad, ellos son iguales. Una interpretación que está más cerca del presente punto de vista es obtenida considerando los - dos errores a los que puede conducir el procedimiento (E_{11}): escogiendo P cuando Q es el mejor tratamiento, o viceversa, escogiendo Q cuando P es mejor. Supongamos por ejemplo que Q es mejor, pero que $W_Q \leq 1/2\ n(N+1) - C$ de modo que, erróneamente P es seleccionado.

Es intuitivamente plausible que la probabilidad de este error aumente a medida que disminuye la calidad de Q y - alcanza su máxima proporción cuando Q es esencialmente igual a P; <u>la probabilidad de seleccionar erróneamente P es siempre menor o igual a α' y se aproxima arbitrariamente a α'</u> - cuando los dos tratamientos llegan suficientemente cerca. - El mismo argumento se aplica cuando P es mejor que Q (notemos que solamente uno de estos errores es posible en cualquier situación dada). Los dos resultados juntos demuestran que α' tiene una propiedad interesante de ser la máxima probabilidad de acercamiento a la conclusión errónea o sea al seleccionar al peor de los dos tratamientos. Por ello el valor crítico C puede ser determinado a partir de (E_{12}) mediante la especificación de la máxima probabilidad de error α' que se está dispuesto a tolerar.

<u>Ejemplo 2.</u> <u>DOS DIETAS.</u>

En la comparación de dos dietas, 12 ratas fueron asignadas aleatoriamente así: 7 con dieta P y 5 con dieta Q. Des pués de 7 semanas ellas mostraron los siguientes pesos ganados:

P :	156	183	120	113	138	145	142
Q :	130	148	117	133	140.		

Los rangos de Q serán entonces 2, 4, 5, 7, 10; y

$W_Q = 28$

Puesto que 28 es menor que $1/2\ 7(12+1) = 32.5$ los datos favorecen a la dieta P. A fin de determinar cuán fuertemente ellos sostienen a P, determinemos al nivel mínimo de α' en el cual el procedimiento definido por (E_{11}) y (E_{12}) nos mostraría o declararía como la superioridad de P sobre Q es significativa. Esto es $P_H(W_Q \leq W)$, donde $W = 28$ es el valor observado de W_Q y la probabilidad se computa bajo la asunción que P = Q. De la tabla A encontramos que

$$\alpha' = P_H(W_Q \leq 28) = P_H\left[W_Q - 1/2\ n(n+1) \leq 13\right] = 0.265.$$

Aún cuando P es ligeramente peor que Q, hay así una probabilidad más de 1/4 que P sea aceptada. Para cualquier valor de $\alpha' < 0.265$ que es un valor posible de la distribución de Wilcoxon, el procedimiento (E_{11}) suspendería el juicio de cuál de las 2 dietas es mejor.

La probabilidad de error unilateral es apropiado solamente cuando la dirección de la diferencia o efecto esté cla ro antes que cualquier observación haya sido hecha. Aún - así, en el ejemplo 2, donde no se sabía de antemano si P o Q era mejor, la probabilidad de error $\alpha' = P_H(W_Q \leq 28)$ es unilateral. La explicación se encuentra por supuesto en las - diferentes interpretaciones acerca de qué es lo que constituye un error. En la prueba bilateral Wilcoxon (E_1), el error que será controlado en la falsa declaración que un tratamiento es mejor que el otro, cuando en realidad ellos no difieren en nada.

Por otra parte, en el procedimiento de tres decisiones (E_{11}) el error que será controlado es aquel de declarar a - un tratamiento mejor que el otro si en efecto es peor, y en caso de que no exista diferencia alguna, no tenemos que preocuparnos por cuál de los dos tratamientos es el preferido. El procedimiento (E_{11}) provee de una selección simétrica entre los dos tratamientos en situaciones en las cuales la selección debe hacerse solamente cuando los datos sean razonablemente conclusivos, de otra manera el juicio se suspende.

Un procedimiento análogo se dispone cuando la escogitación yace en un tratamiento nuevo y un tratamiento estándar o en otros casos asimétricos, por ejemplo, cuando un tratamiento es menos difícil que el otro o tiene menos efectos - laterales no deseables. Por ello, el procedimiento de tres decisiones que resulta toma la siguiente forma:

Seleccione Q si $W_Q \geq C_2$

Seleccione P si $W_Q \leq C_1$ (E_{13})

El tratamiento se suspende si $C_1 < W_Q < C_2$, aquí, C_1 y C_2 pueden ser determinados de modo que se brindan valores - preasignados para las máximas probabilidades de error

$$\alpha_1 = P_H(W_Q \leq C_1) \text{ y } \alpha_2 = P_H(W_Q \geq C_2) . \qquad (E_{14})$$

Donde las probabilidades son computadas bajo la asunción de que no existe diferencia (con respecto a la respuesta que - está siendo observada) entre los tratamientos, y donde, como consecuencia de la naturaleza discreta de la distribución involucrada, puede sentirse satisfecho con los valores C_1 y C_2 para los cuales se mantienen tan cerca como sea posible a las ecuaciones. Si P es el tratamiento estándar o aquél que nos parece más deseable, al principio uno preferirá más a P que Q cuando los dos tratamientos sean igualmente efectivos, y así especificaremos un valor menor para α_2 que el especificado para α_1.

El procedimiento (E_{13}) generaliza la simetría de las - tres decisiones al procedimiento (E_{11}) y la prueba (B_2). Se reduce al primero cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha'$ y al último cuando $C_1 = C - 1$ y $C_2 = C$, y cuando P y Q se identifican con el tratamiento estándar y el nuevo tratamiento, respectivamente, así que $\alpha_2 = \alpha$

y $\alpha_1 = 1 - \alpha$.

No hay dificultad en extender (E_6) al caso en que algunas observaciones están empatadas.

Solamente es necesario para el propósito reemplazar W_Q por la suma W_Q^* de los rangos medios de Q. La presencia de empates, sin embargo, crea una dificultad con respecto al procedimiento simétrico (E_{11}) puesto que la distribución W_Q^* ya no necesita ser simétrica. Se determinará en este caso los valores críticos C_1 y C_2 de modo que hagan α_1 y α_2 lo más cerca de α'.

El procedimiento de tres decisiones (E_{11}) asume la posibilidad de no llegar a una decisión para cuál de los dos tratamientos es mejor. Este será el caso si una decisión puede posponerse hasta que la información posterior (por ejemplo, observaciones adicionales) se vuelvan disponibles.

Sin embargo, la decisión algunas veces no puede demorarse y una escogencia inmediata entre P y Q se requiere.

Un procedimiento sugerido por (E_{11}) es entonces escoger el tratamiento Q cuando $W_Q > 1/2\ n(N+1)$ y el tratamiento P cuando $W_Q < 1/2\ n(N+1)$. Esto deja todavía la interrogante que hacer cuando $W_Q = 1/2\ n(N+1)$ o equivalente que hacer cuando $Wxy = 1/2\ mn$.

Este caso (el cual no puede surgir cuando m y n no están pareados) es exactamente cuando la mitad de los pares $Y_j - X_i$ son positivos; y otra mitad negativos (con J : 1,2,..., i : 1,2,...,m), y parece no razonable preferir uno de los dos tratamientos. Si se debe tomar una decisión, puede ser posible basarla en alguna consideración auxiliar tal como el valor del tratamiento. Si no se dispone de otro recurso, puede hacerse necesario rifar con una moneda (como se hace algunas veces en torneos cuando el tiempo concluyó y no definió tal situación).

Para hacer una escogitación definitiva entre P y Q (del procedimiento anterior) puede darse en una forma más ligeramente intuitiva, notando que por (B_{14})

$$W_P + W_Q = 1/2\ (m+n)(N+1) = \frac{N(N+1)}{2}$$

es entonces fácil ver que

$$W_Q \underset{>}{\overset{<}{=}} 1/2\ n(N+1) \quad \text{si y solo si} \quad \frac{W_Q}{n} \underset{\geq}{\leq} \frac{W_P}{m}$$

El procedimiento escoge P o Q cuando $\frac{W_P}{m}$ es mayor que o menor que $\frac{W_Q}{n}$, respectivamente.

Al discutir las diferentes situaciones en la cual cada uno de los tres procedimientos (B_2), (E_4) y (E_{11}) es adecuado, es importante estar al tanto de una asunción común que sustente a los tres. Esta asunción es que si hay una diferencia entre los dos tratamientos que se están comparando, la diferencia toma la forma de que un tratamiento está siendo mejor que el otro.

C A P I T U L O II

COMPARACION DE DOS TRATAMIENTOS POR BLOQUES.

I. TEST DE LOS SIGNOS EN LAS COMPARACIONES APAREADAS.

Anteriormente tratamos la comparación de dos tratamientos cuando los N sujetos disponibles para la observación se dividen aleatoriamente uno al tratamiento y el otro a control. Este tipo de comparaciones será inefectiva cuando los sujetos sean altamente variables, puesto que la variación inherente puede entonces ocultar cualquier diferencia que pueda existir entre los tratamientos.

En tales casos, la efectividad de la comparación con frecuencia puede ser aumentada dividiendo los sujetos en más subgrupos homogéneos de control y tratamiento, y comparando sujetos de tratamiento y control solamente dentro de cada subgrupo.

Típicamente será más fácil obtener subgrupos pequeños homogéneos que grandes, y particularmente se dispone de buenas oportunidades para dividir a los sujetos en subgrupos de tamaño 2. Un ejemplo obvio es dado por estudios en los gemelos, donde cada subgrupo está conformado por un par.

En otras situaciones, los ojos o las manos de una misma persona constituye un subgrupo natural.

Las divisiones en subgrupos homogéneos de tamaño 2 no están restringidos a situaciones en las cuales exista un pareamiento natural, sino también pueden con frecuencia lograrse a través de un cuidadoso pareamiento de sujetos, por ejemplo, pacientes que son iguales con respecto a edad, sexo y severidad de la enfermedad; comunidades que tienen el mismo tamaño, carácter rural-urbano, ubicación geográfica, etc.

Supongamos que N pares de sujetos están disponibles para tales comparaciones apareadas, y que dentro de cada par un sujeto es seleccionado aleatoriamente con probabilidad de 1/2 para recibir el tratamiento, mientras el otro estará como control.

Las selecciones para diferentes pares se asume que son independientes.

En el presente trabajo se asumirá que los N pares de sujetos disponibles, no se escogen sino que se dan, y la escogitación será solamente a través de las asignaciones aleatorias dentro de cada par al tratamiento y al control.

En analogía con el modelo visto en capítulo anterior, ahora lo llamaremos "modelo aleatorio para comparaciones -

apareadas".

Una prueba sencilla de la hipótesis H de no efecto - del tratamiento en el modelo de aleatorización puede estar basado en el número S_N de pares, para el cual el sujeto - tratado viene adelante de el de control, por ejemplo, da - la respuesta más alta cuando es esperado que el tratado aumente la respuesta. La hipótesis H se rechaza cuando S_N - es suficientemente grande.

La estadística S_N depende de las respuestas de los N pares de sujetos, sólo a través de las diferencias entre - las respuestas de los tratados y los de control en cada par.

Si tales diferencias: tratados menos control son iguales a un número positivo, entonces la prueba resultante es por lo tanto llamada "Test del signo".

El test no requiere los valores de las respuestas o - aún sus diferencias, sino que sólo el signo de cada diferencia; y es aplicable sólo cuando las comparaciones cualitativas de los tratamientos están disponibles, tal como: La - droga A dió más alivio que la droga B, su aplicabilidad en tales casos es posiblemente el rasgo más valioso del test.

La distribución nula de S_N se encuentra por un argumento análogo al del capítulo I, parte II. Bajo H, las respues tas de un par dado de sujetos solamente dependen de ellos y no sobre cuáles de ellos se asigna al tratamiento y control.

El sujeto tratado vendrá adelante del de control cuando el sujeto con la mejor respuesta haya sido asignado al tratamiento, en cuanto ocurra tendrá la probabilidad de 1/2. Cada par así, constituye un camino, el cual con la probabilidad de 1/2 termina en éxito (sujeto tratado viene adelante) o fracasa (el sujeto de control viene adelante).

La prueba estadística S_N es el número de sucesos independientes en N procesos, y la distribución nula de S_N es por lo tanto la distribución binomial correspondiente a N procesos con sucesos de probabilidad de 1/2.

La distribución es dada por:

$P_H\ (S_N = a) = \binom{N}{n}\ 1/2^N.$ (F_1). para a: 0, 1, 2,..., N.

Una tabla de distribución dando las probabilidades

$$P_H\ (S_N \leq a)$$

para $N \leq 40$, es encontrada en la tabla C que aparece al final del trabajo.

Ejemplo 1.

Medicamento para el dolor de cabeza.

Al probar la efectividad de un medicamento para la tensión de los dolores de cabeza, a cada una de las 15 personas que sufren de estos dolores de cabeza se les da un número de pastillas del nuevo medicamento, y un número igual de un medicamento estándar, en botellas etiquetadas aleatoriamente A y B. Se les pide a los sujetos tomar una de las pastillas al aparecer cada vez el dolor de cabeza, alternando entre A y B, y cuando se agoten las pastillas reportar cuál de las dos drogas fué más efectiva.

Supongamos que 10 de los sujetos se reportan a favor de la botella que contiene la nueva droga (se guarda por supuesto una lista, la cual para cada uno de los sujetos determina si A o B).

La probabilidad de significación de este resultado se obtiene de la tabla C, así:

$$P_H (S_{15} \geq 10) = P_H (S_{15} \leq 5) = 0.1509$$

Para N grande, S_N es aproximada a la distribución normal.

La requerida esperanza y varianza de S_N se muestran en las expresiones siguientes:

$$E_H (S_N) = PN$$

$$\mathrm{Var}_H (S_N) = PqN \qquad (F_2)$$

(Por ser de distribución binomial; la probabilidad de éxito $P = 1/2$ y de fracaso $q = 1/2$).

Así tendremos:

$$E_H\ (S_N) = \frac{N}{2}$$

$$\text{Var}\ (S_N) = \frac{N}{4}$$

La aproximación es sostenida por el teorema del límite central, el cual nos dice que la distribución de

$$\frac{S_N - \frac{N}{2}}{1/2\ \sqrt{N}} \qquad (F_3)$$

tiende a la distribución normal estándar.

Para ilustrar la aproximación normal consideremos una vez más la probabilidad de significación.

$P_H\ (S_N \geq 10)$ para $N = 15$.

El valor de $E_H\ (S_N) = 15/2 = 7.5$

y $\text{Var}_H\ (S_N) = 15/4 = 3.75$.

Usando la corrección de continuidad procedemos a encontrar

$$P_H = (S_N \geq 10) = P_H \left[\frac{S_N - 7.5}{1/2\ \sqrt{15}} \geq \frac{9.5 - 7.5}{1.937}\right] = \phi\left(\frac{-2}{1.937}\right) = 0.151\ ,$$

que concuerda con el resultado obtenido anteriormente de la tabla C.

En la descripción del test del signo se asumió tácitamente que cada diferencia es positiva o negativa. Puede suceder sin embargo que en uno o más pares las observaciones de tratamiento y control sean iguales y las diferencias resultantes son cero.

Similarmente, las evaluaciones cualitativas como las del ejemplo 1, un cero puede resultar de la inhabilidad para decidir si el nuevo tratamiento o el estándar es más efectivo.

Una prueba estadística natural en la presencia de empates es análoga a la estadística W^{*}_{xy} considerada en el capítulo I, se obtiene asignando a un par de sujetos la puntuación de 1, 1/2 ó 0 como la diferencia entre la respuesta tratada y de control sea positiva, cero o negativa.

$$N_{+}, \; N_{0}, \; N_{-}$$

denotan los números positivos, cero y negativos, respectivamente, siendo estas diferencias entre los N pares; la prueba estadística es entonces

$$N_{+} + 1/2 \; N_{0} \; ,$$

y la prueba rechaza a H cuando esta estadística es suficientemente grande.

Recordemos que los sujetos son dados y las respuestas son fijadas, y lo que varía es solamente la asignación de sujetos dentro de cada par al tratamiento y control.

Una diferencia cero ocurre solamente cuando las respuestas de los dos sujetos en ese par son iguales, y las diferencias de sus respuestas (tratados menos control) será entonces cero a pesar de cuál se asigne al tratamiento y cuál al control.

Así, bajo H, las estadísticas

$$N_+ \; + \; 1/2 \; N_0 \quad y \quad N_+$$

son equivalentes, y la prueba puede basarse en la más simple o sencilla N_+, que tiene la distribución binomial correspondiente a $N' = N - N_0$ procesos con probabilidad de éxito de 1/2.

La prueba resultante la cual rechaza a la hipótesis cuando N_+ es suficientemente grande, consiste en descartar los ceros y aplicar la prueba a los

$$N' = N - N_0 \text{ pares.}$$

II. TEST DEL SIGNO DE LOS RANGOS DE WILCOXON.

En el test del signo que se discutió en la sección precedente se utilizó sólo los signos de las diferencias de los N pares.

Pruebas más efectivas son posibles cuando los valores de las diferencias estén disponibles, como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.

Probando un nuevo fertilizante.

Para probar si un nuevo fertilizante dará una producción mayor que el fertilizante que se ha estado usando en el pasado, se dividen tres terrenos de una granja donde se cultiva fresa, en dos partes cada terreno a los que se les asigna al azar 2 fertilizantes.

Hay entonces tres pares, las dos partes de cada terreno constituyen un par. Supongamos que las producciones son 76 y 78 libras en un terreno, 82 y 91 en el segundo, 80 y 86 en el tercero; así que las diferencias son 2, 9 y 6 libras, respectivamente.

El test del signo se aplicará sólo al número de terrenos en el cual el nuevo fertilizante dió la mayor producción. Sin embargo, este es el caso para dos de los terrenos, es en tonces de interés saber cuáles dos. Los resultados aparecen más significativos si ellos fueran con diferencias 6 y 9, que si ellos fueran con diferencias 2 y 6.

Esto sugiere que la prueba debe estar basada no solamente en los signos de las diferencias sino también en los valores de los rangos de las diferencias a las cuales los signos están unidos.

En el siguiente cuadro se expresan todas las posibles combinaciones de los signos de las tres diferencias y cada uno de los rangos con su signo, es decir los rangos de los valores absolutos de las diferencias junto con sus signos.

(G_I)

DIFERENCIAS	-2, -6, -9	-2, -6, +9	-2, +6, -9	-2, +6, +9
RANGOS	-1, -2, -3	-1, -2, +3	-1, +2, -3	-1, +2, +3
DIFERENCIAS	+2, -6, -9	+2, -6, +9	+2, +6, -9	+2, +6, +9
RANGOS	+1, -2, -3	+1, -2, +3	+1, +2, -3	+1, +2, +3

Los rangos con signo -1, +2, +3 en la cuarta casilla por ejemplo, corresponden al hecho de que en este caso el valor absoluto de la diferencia más pequeña (2), es negativa; pero aquellas con los valores absolutos más grandes (6 y 9) son positivos.

Encontremos ahora la distribución nula de los rangos con su signo, bajo la hipótesis H de que no hay diferencia entre los fertilizantes. Si H es verdadera, las producciones de las dos mitades del primer terreno son 76 y 78 libras, a pesar de cuál mitad se le da a la innovación y cuál al estándar.

La preferencia entre innovación-estándar será por lo tanto igual ya sea +2 ó -2, cada uno con probabilidad de 1/2. Similarmente, con la probabilidad de 1/2, la segunda diferencia será +6 ó -6, y la tercera será +9 ó -9.

Más adelante veremos que los signos de las tres diferencias son independientes. De G_1, vemos que $2x2x2 = 2^3 = 8$ combinaciones de signos cada una con probabilidad de 1/8, y la misma observación es verdadera para los 8 conjuntos posibles de valores de los rangos con signo (por comodidad escribiremos rangos signeados en lo que resta del capítulo). Esto especifica la distribución nula deseada. Con las consideraciones anteriores se ha provisto de las bases y fácilmente podemos generalizar el test del signo de los rangos.

Sean N pares de sujetos, con asignación arbitraria al tratamiento y al control dentro de cada par; y supongamos que $N_+ = n$ diferencias positivas entre las respuestas de tratamiento y control son positivas, y las restantes $N_-=m=N-n$

son negativas.

Clasifiquemos el rango de los valores absolutos de las diferencias, y al rango de cada valor absoluto se le adjunta el signo de la diferencia respectiva como en (G_1). Denotemos los rangos cuyos signos son negativos por

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_m \quad ,$$

y aquellos con signo positivo por

$$S_1 < S_2 < \ldots < S_n \quad ,$$

siendo los R_s' y S_s' los enteros 1, 2,...,N.

Hay 2^N combinaciones posibles de signos $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$ y cada uno se caracteriza por el subconjunto $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ de rangos con signo positivo. Por ejemplo si $n = 2$ y $S_1 = 1$, $S_2 = N$, los rangos con signo son $(+1, -2, -3, \ldots -(N-1), + N)$. Esto corresponde al caso en que las diferencias con los valores absolutos más pequeña y la más grande son positivos y todas las demás son negativos.

Similarmente, si $n=N-1$ y $S_1=1$, $S_2=3$, $S_3=4, \ldots, S_n = N$, los rangos signeados son $(+1, -2, +3, \ldots, +N)$, y la diferencia con el segundo valor absoluto más pequeño es negativo y todos los demás son positivos. Un caso especial ocurre cuando todas las diferencias son negativas, entonces $n = 0$ y el con -

junto $(S_1, S_2,\ldots,S_n)$ es el conjunto vacío. Una verificación de lo anterior se obtiene haciendo notar que para cada valor fijo de n hay $\binom{N}{n}$ alternativas posibles para -- $(S_1, S_2,\ldots,S_n)$, puesto que n puede tomàr los valores -- 0, 1, 2,...,N, el número total de las posibles alternativas para los S_s' es por lo tanto $\binom{N}{0} + \binom{N}{1}+ \ldots + \binom{N}{n} = 2^N$; lo mismo que el número total de combinaciones de signos.

Al obtener los rangos signeados hemos asumido que no o curren empates entre los valores absolutos de las diferen - cias y que ninguna diferencia es cero.

Bajo la hipótesis H de no efecto en el tratamiento, re sulta como antes bajo la asignación aleatoria dentro de cada par, cada diferencia es positiva o negativa con probabilidad de 1/2, y los N signos son independientes; así que cada una de las 2^N posibles combinaciones de los signos tiene la probabilidad de $1/2^N$. Puesto que cada combinación de - signos corresponde exactamente a un valor de n y a $(S_1,S_2,\ldots,S_n)$; la unión de la distribución nula de estos valores se da por

$$P_H (N_+ = n \; ; S_1 = s_1, S_2 = s_2,\ldots,S_n = s_n) = 1/2^N. \qquad (G_2).$$

Aquí el lado izquierdo de (G_2) denota la probabilidad que el número de diferencias positivas es n y que sus rangos entre los valores absolutos de las diferencias son $(S_1,S_2,\ldots,S_n)$.

Consideremos ahora probando la hipótesis H de no efecto del tratamiento contra la alternativa que el tratamiento tiende a incrementar la respuesta. El rechazo de H es indicado si para muchos de los pares el sujeto tratado viene adelante, y si las diferencias tienden a ser más grandes para los pares en los cuales el sujeto tratado viene adelante, excepto para aquellos en los cuales es superado por el control; es decir si n es grande y los rangos positivos -- $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ tienden a ser más grandes que los rangos - $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$.

Una estadística que combina estos dos criterios es la suma de rangos con signos positivos

$$V_S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n. \qquad (G_3)$$

La hipótesis de no diferencia en los tratamientos es rechazada cuando V_S es suficientemente grande, es decir, si

$$V_S \geq C. \qquad (G_4)$$

La prueba resultante es "El test del signo de los rangos de Wilcoxon", con la regla de rechazo $V_S > C$. Anteriormente se vió como el test de la suma de los rangos de Wilcoxon rechazaba a H cuando

$W_s = S_1 + S_2, \ldots + S_n \geq C$; sin embargo, en la primera prueba n se fijó, mientras en el presente caso n es el valor de una variable aleatoria que puede tomar los valores de 0,1,2,...,N.

Como una consecuencia, las estadísticas V_s y W_s tienen - muchas distribuciones nulas diferentes y los diferentes valores críticos C corresponden al mismo nivel de significación α.

Ilustraremos el cálculo de la distribución nula de V_s para el caso de N = 3.

Para cada conjunto de rangos signeados corresponde un valor V de los V_s como se muestra a continuación:

(G_5)

RANGOS SIGNEADOS	-1, -2, -3	-1, -1, +3,	-1, +2, -3	-1, +2, +3
V	0	3	2	5
RANGOS SIGNEADOS	+1, -2, -3	+1, -2, +3	+1, +2, -3	+1, +2, +3
V	1	4	3	6

La probabilidad de cada conjunto de rangos con signo es 1/8, la distribución nula es dada por

(G_5)

V	0	1	2	3	4	5	6
$P_H (V_s = V)$	1/8	1/8	1/8	2/8	1/8	1/8	1/8

Este método de computar la distribución nula por enumeración es bastante general. Sea N_o (V;N) que denota el número de combinaciones de rangos signeados 1,2,...,N, para los cuales la suma de los rangos con signo positivos es igual a V.

Por ejemplo, cuando N = 3, se ve de (G_5) que N_o (2 ; N)=1 y N_o (3 ; N) = 2. Puesto que bajo H la probabilidad de cualquier combinación de signos es $1/2^N$, resulta que

$$P_H (V_s = V) = \frac{N_o (V;N)}{2^N} , \qquad (G_6)$$

y que la distribución nula puede obtenerse determinando enumeraciones a través del número N_o(V ; N).

Ilustraremos el método con otro ejemplo.

Ejemplo 3.

Heridas saturadas vrs. Heridas vendadas.

En un estudio comparativo de las heridas vendadas y saturadas en 10 ratas; se obtuvieron los siguientes resultados 40 días después de hechas las incisiones en sus espaldas, habían sido cerradas por saturación o por venda quirúrgica.

RATA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VENDADA	659	984	397	574	447	479	676	761	647	577
SATURADA	452	587	460	787	351	277	234	516	577	513
DIFERENCIAS	207	397	-63	-213	96	202	442	245	70	64
RANGO SIGNEADO	6	9	-1	-7	4	5	10	8	3	2

Supongamos que se desea probar la hipótesis de no diferencia contra las alternativas de que las heridas cerradas con venda es más efectiva. Puesto que han más pocos rangos con signo negativos que positivos, será más conveniente trabajar con la suma de los rangos correspondientes a las diferencias negativas.

$$V_r = R_1 + R_2 + \ldots + R_m \qquad (G_7)$$

La suma de V_r y V_s es igual a la suma de los enteros desde 1 hasta N, así que

$$V_r + V_s = 1/2\ N(N+1) \qquad (G_8)$$

Las pruebas estadísticas V_r y V_s son por lo tanto equivalentes con valores pequeños de V_r correspondientes a valores grandes de V_s.

El valor observado de V_r es 1+ 7 = 8, y puesto que valores pequeños de V_r son significativos; la probabilidad de significación es $P_H\ (V_r \leq 8)$. Para computar estas probabilidades, hagamos una lista de los valores de m y $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ para los cuales $V_r \leq 8$.

m = 0 conjunto vacío. (1)

m = 1 , r : 1, 2,..., 8 (8)

m = 2 , (r_1, r_2):(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,3),(2,4),
(2,5),(2,6),(3,4),(3,5). (12)

$$m = 3 \ , \ (r_1, r_2, r_3):(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4). \qquad (4)$$

El número total de casos es 1 + 8 + 12 + 4 = 25, y la probabilidad de significación es por lo tanto

$$P_H \ (V_r \leq 8) = 25/2^{10} = 0.0244$$

Si en lugar del test de Wilcoxon se usa el test de los signos, la probabilidad de significación es $P_H(S_{10} \leq 2) = 0.0547$ (usando la tabla C). También podemos encontrar la probabilidad $(S_{10} \leq 2)$, así:

$$P_H(S_{15} \leq 2) = P_H(S_N = 0) \ P_H(S_N = 1) + P_H(S_N = 2)$$

$$= \binom{10}{0} \frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{1} 1/2^{10} + \binom{10}{2} 1/2^{10} =$$

$$= 1/2^{10} + 10/2^{10} + 45/2^{10} = 56/2^{10} = 0.0547$$

Así que el resultado parece menos significativo en relación con 0.0244.

Para facilitar el uso del test del signo de los rangos de Wilcoxon, una tabla de la distribución nula se da al final del trabajo como tabla D. Se ve del cálculo de V_s y V_r que tienen la misma distribución nula, así que la tabla se aplica igualmente a ambos, puesto que la distribución es simétrica con respecto a $\frac{N(N+1)}{4}$.

Haremos uso de la tabla solamente para un extremo; la cantidad en ella quedará así:

$$P_H\ (V_s \leq v) = P_H\ V_N \leq v)$$

$$P_H\ (V_r \leq v) = P_H\ (V_N \leq v) \quad \text{para } N \leq 20.$$

Como una ilustración encontraremos la probabilidad de significación $P_H\ (V_r \leq 8)$ cuando $N = 10$ y $v = 8$, encontramos $P_H\ (V_r \leq 8) = P_H\ (V_{10} \leq 8) = 0.0244$.

Podemos aplicar la aproximación normal. La varianza - y la esperanza de V_s se muestran a continuación:

$$E_H\ (V_s)\ P(V_1 + V_2 + \ldots + V_N) = P\left[\frac{N(N+1)}{2}\right] \quad \text{, como } P = 1/2$$

$$E_H\ (V_s) = \frac{N(N+1)}{4} \quad . \qquad (G_9)$$

$$Var(V_s) = pq\ (V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_N^2) = pq\left[\frac{N(N+1)\ (2N+1)}{6}\right] \quad , (q = 1/2)$$

$$Var(V_s) = \frac{N(N+1)\ (2N+1)}{24} \qquad (G_{10})$$

(Las probabilidades $P=1/2$ y $q=1/2$ fueron dados en (F_2)).

Ilustremos la aproximación normal aplicándola a la - probabilidad de significación $P_H\ (V_r \leq 8)$ para el caso de $N = 10$, el cual nosotros ya computamos por enumeración.

$$E_H\ (V_r) = 27.5$$

$$Var_H\ (V_r) = 96.25.$$

Usando la corrección de continuidad, encontramos por lo tanto $P_H\ (V_r \leq 8) \simeq \phi\left(\frac{8.5 - 27.5}{9.81}\right) = \phi\,(-1.9367) = 0.0264$ lo cual está en completo acuerdo con el valor 0.0244 obtenido primeramente.

Una idea más sistemática de la precisión a la aproximación puede obtenerse de la table (G_{11}), la cual provee una comparación de la probabilidad de Wilcoxon $P(V_s \leq v)$ con su aproximación normal, ambos con y sin corrección de continuidad.

Sugiere que por lo menos para el rango de $\alpha = 0.01$ a $\alpha = 0.15$, la aproximación con corrección de continuidad será adecuada para más propósitos cuando $N \geq 20$, y así para los tamaños de la muestra no cubiertos por la tabla D.

Tabla (G_{11})

Valores exactos y aproximados de $P(V_s \leq v)$ sin y con corrección de continuidad.

V	3	5	11	14	17	37	47	61	70	76
EXACTO	0.0049	0.0098	0.0527	0.0967	0.1611	0.0047	0.0093	0.0527	0.1012	0.1471
SIN	0.0063	0.0109	0.0463	0.0844	0.1423	0.0055	0.0103	0.0502	0.0957	0.1394
CON	0.0072	0.0124	0.0515	0.0926	0.1541	0.0059	0.0108	0.0522	0.0989	0.1437
	N = 10					N = 20				

La aproximación normal es sostenida por el teorema del límite que afirma

$$P_H \left[\frac{V_s - N(N+1)/4}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)/24}} \leq Z \right] \simeq \phi\ (Z)\ . \qquad (G_{12})$$

Denotemos las N diferencias por $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ y consideremos la totalidad de los promedios como $1/2(Z_i+Z_j)$, con $i \leq j$.

Para $i < j$ estos son promedios de dos de las diferencias observadas $(1/2\ (Z_i + Z_j)$; para $i = j$, ello se reduce a las diferencias entre ellas mismas $(1/2\ (Z_i + Z_i))$. Hay $\binom{N}{2} + N$ promedios; ahora demostraremos que

V_s : es la suma de los rangos positivos.

Pa.

Sea V_s = número de promedios positivos $1/2(Z_i + Z_j)$ con $i \leq j$. (G_{13}). Al ver (G_{13}) notamos que $1/2(Z_i + Z_j)$ o equivalente con $Z_i + Z_j$ (ya que nos interesa el signo), es positivo si y solo si la diferencia con el valor absoluto más grande es positivo (o en el caso $i = j$, si la diferencia es positiva).

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la diferencia ha sido numerada en orden creciente de sus valores absolutos; así que los signos de los rangos de Z_j es j o -j, - así como cuando Z_j sea positivo o negativo. Entonces para un valor fijado de j, la contribución al lado derecho de - (G_{13}) de pares (Z_i, Z_j) con $i \leq j$ es cero cuando $Z_j < 0$ y es j (y así igual al rango asignado de Z_j) cuando $Z_j > 0$. Así el lado derecho de (G_{13}) es igual a la suma de los ran gos con signo positivo o sea V_s (Lo que se quería demostrar).

La definición de los rangos signeados en la sección pre cedente, presupone que no ocurren empates entre los valores absolutos de las diferencias, y que ninguna diferencia es - cero. Las modificaciones requeridas en la presencia de ceros o empates son bastante análogos a aquellos hechos en los ca sos no pareados en el capítulo I.

Supongamos por ejemplo, que N = 7 y que cada observa - ción tiene una puntuación de -2, -1, 0, 1, 2 correspondien- te a una contribución de la respuesta del sujeto como muy - pobre, pobre, indiferente, bueno, muy bueno. En los siguien tes pares de observaciones

(-1,0), (-2,0), (1,0), (2,2), (0,0), (-1,1), (0,0) ;

con el primer miembro de par que representa al control y el segundo la respuesta del tratado. Las 7 diferencias son:

+1, +2, -1, 0, 0, +2, 0; sus valores absolutos en orden cre ciente 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, y los rangos medios de estos va lores absolutos son 2, 2, 2, 4.5, 4.5, 6.5, 6.5.

Multiplicando cada uno de los rangos medios por +1, -1, ó 0, como la diferencia correspondiente es positiva, negativa o cero, obteniendo los signos de los rangos medios así:

DIFERENCIA	-1	0	0	0	+1	+2	+2
RANGO SIGNEADO	-4.5	0	0	0	+4.5	+6.5	+6.5

La suma de los rangos medios positivos es

$V_s^* = 4.5 + 6.5 + 6.5 = 17.5$

Computemos ahora la distribución nula de V_s^*.

En este proceso, los ceros pueden no ser tomados en - cuenta y podemos restringir a cuatro rangos medios signea - dos -4.5, +4.5, +6.5, +6.5.

Notemos que los ceros desaparecen solamente después que los rangos medios han sido computados. En el test del signo se notó que los ceros no implican un elemento de arbitrariedad como los otros rangos signeados, pero tendrán el mismo - valor (cero), sin tomar en cuenta la asignación de los pares correspondientes al tratamiento y control.

En el presente caso hay $2^4 = 16$ combinaciones posibles de signos, y hacemos la lista de los diferentes conjuntos -

de rangos medios con signo positivo $(S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*)$ junto con los valores de V_s^* y sus probabilidades.

$(S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n)$	NINGUNO	4.5	6.5	4.5,4.5	4.5,6.5	6.5,6.5	4.5,4.5,6.5	4.5,6.5,6.5	4.5,4.5,6.5,6.5
V_s^*	0	4.5	6.5	9	11	13	15	17.5	22
PROBABILIDAD	1/16	2/16	2/16	1/16	4/16	1/16	2/16	2/16	1/16

La probabilidad en la segunda casilla por ejemplo es 2/16, puesto que hay 2 posibles alternativas de los rangos medios (4.5). Similarmente la probabilidad en la quinta casilla es 4/16 puesto que hay cuatro alternativas de los rangos medios (4.5 y 6.5) y así un total de 2 x 2 = 4 alternativas. En la segunda línea no hay duplicaciones de los valores de V_s^*, la segunda y la tercera línea dan la distribución nula deseada de V_s^*. Si los valores mayores de V_s^* son significativos, resulta en particular que la probabilidad de significación es $P_H(V_s^* \geq 17.5) = 3/16$.

Puesto que la distribución nula de V_s^* no es práctica cuando N aumenta y la enumeración (método) rápidamente se vuelve incontrolable, tenemos nuevamente que recurrir a la aproximación normal.

La requerida esperanza se da por

$$E_H\,(V_s^*) = \frac{N(N+1) - d_\circ(d_\circ+1)}{4} \quad . \qquad (G_{14})$$

donde d_o es el número de diferencias cero.

Para $d_o = 0$, $E_H(V_s^*)$ se reduce a $E_H(V_s)$.

La varianza de V_s^* depende no sólo de d_o sino también de los números $d_1, d_2, \ldots, d_e$ de empates entre las diferencias de los no ceros absolutos, y la varianza se da por

$$Var_H(V_s^*) = \frac{1}{4}\left[N(N+1)(2N+1) - d_o(d_o+1)(2d_o+1)\right] - 1/48 \sum_{i=1}^{e} d_i(d_i^2 - 1)$$

La $Var_H(V_s^*)$ se reduce a $Var_H(V_s)$, cuando $d_o = 0$ y los restantes d_i son iguales a 1 [al final de esta sección aparecerán las respectivas demostraciones de $Var_H(V_s^*)$ y $E_H(V_s^*)$].

La aproximación normal es sostenida por el teorema del límite, el cual dice que la distribución nula de

$$\frac{V_s^* - E_H\,(V_s^*)}{\sqrt{Var_H\,(V_s^*)}}$$

tiende a la distribución normal estándar cuando el número - diferencias no ceros tienden a aumentar considerablemente.

Ejemplo 4.

Vitaminas y C.I. (Cociente intelectual).

En un estudio del efecto de la tiamina (vitamina B) sobre el aprendizaje, 74 niños que viven en un orfanatorio se dividieron en 37 pares. Un niño de cada par se seleccionó al azar para recibir la tiamina, el otro recibió un placebo que sirvió como control. A pesar de que el estudio fué primeramente con relación al aprendizaje, se observaron otras variables. La siguiente tabla muestra el aumento de C. I. durante las seis semanas del experimento para 12 pares.

PARES	2°	5°	8°	11°	14°	17°	20°	23°	26°	29°	32°	35°
TRATADOS	14	18	2	4	-5	14	-3	-1	1	6	3	3
CONTROL	8	26	-7	-1	2	9	0	-4	13	3	3	4
DIFERENCIA	6	-8	9	5	-7	5	-3	3	-12	3	0	-1
RANGO MEDIO SIGNEADO	8	-10	11	6.5	-9	6.5	-4	4	-12	4	0	-2

Para probar la hipótesis de no efecto en el tratamiento, contra la alternativa que los niños tratados tienden a demostrar un mejor aumento que aquellos no tratados, podemos emplear el test de Wilcoxon. El signo de los rangos medios de las diferencias (tratado menos control) se muestran en la última línea de la tabla, la suma de los rangos medios positivos es 40, y la probabilidad de significación es por lo tanto $P_H(V_s^* \geq 40)$. Puesto que $d_o = 1$ y los restantes d_s, uno es igual a 2, otro igual a 3, y seis iguales a 1; se ve de (G_{14}) y (G_{15}) que $E_H(V_s^*) = 38.5$

$$Var_H(V_s^*) = 161.625.$$

La probabilidad de significación aproximada es

$$P_H\ (V_s^* \geq 40) \simeq 1 - \phi \left(\frac{40 - 38.5}{12.71}\right) = 0.453$$

El tratamiento no tenía efecto significativo en el aumento de las puntuaciones de I. C.

Igual que V_s, la estadística V_s^* tiene una interpretación alternativa. Supongamos que las N diferencias son denotadas por $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ y que cada promedio $1/2(Z_i + Z_j)$, $i \leq j$, se pondera con 1, 2/2, 0, cuando sea positivo, cero, negativo, respectivamente. Entonces V_s^* define la suma de estas puntuaciones por una constante más precisa, así:

V_s^* = [No. de promedios positivos $1/2\ (Z_i+Z_j)$ con $i\leq j$] + 1/2 [No. de promedios $1/2\ (Z_i + Z_j)$ con $i\leq j$, que son ceros.] - $1/2\ d_o\ (d_o+1)$. (G_{16})

d_o es el número de ceros entre las Z_s'.

La prueba de (G_{16}) es análoga a la de W_{xy}^*, vista en el capítulo I (sección IV).

Encontraremos la esperanza y varianza de los rangos medios de la estadística V_s^*. Procedemos a encontrar $E(V_s^*)$.

Sean $d_o, d_1, d_2, \ldots,$ de enteros cuya suma es N y sea $N' = N - d_o$.

Supongamos que de los N' valores $U_1, U_2, \ldots, U_{N'}$,

d_1 son iguales a $d_\circ + 1/2\ (d_1 + 1)$

d_2 son iguales a $d_\circ + d_\circ + d_1 + 1/2\ (d_2 + 1)$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

d_e son iguales a $d_\circ + d_1 + \ldots + d_{e-1} + 1/2\ (d_e + 1)$.

Al obtener $\sum U_i$ y $\sum U_i^2$, notamos que el conjunto de las - U_s' está aumentado por $d_\circ$ valores iguales a $\frac{(d_\circ + 1)}{2}$; esen- cialmente coinciden con el conjunto de los N V_s' definidos - en prueba (D_6) así:

$$V_1 = 1/2\ (d_1 + 1)$$

$$V_{d_1} + 1 = d_1 + 1/2\ (d_2 + 1)$$

. . .

. . .

. . .

$$V_{d_1} + d_2 + \ldots + d_{e-1} + 1 = d_1 + d_2 + \ldots + d_{e-1} + 1/2\ (d_e + 1).$$

Hay sólo un pequeño cambio de notación: Los enteros - sumados son iguales a N, los cuales fueron denotados por - $d_1, d_2, \ldots, d_e$, ahora denotamos por $d_\circ, d_1, \ldots, d_e$.

Como $N' = N - d_\circ$

al obtener $\sum_{n=1}^{N'} U_i$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{N'} U_i = \sum_{j=1}^{N} V_j - \frac{d_\circ(d_\circ + 1)}{2} \quad ⓪ \;, \left[d_\circ \text{ veces } \frac{(d_\circ+1)}{2} = \frac{d_\circ(d_\circ+1)}{2}\right]$$

como

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} V_j = \frac{N + 1}{2} \quad \text{(dada en prueba de } C_2\text{)}$$

tenemos que $\sum_{j=1}^{N} V_j = \frac{N(N + 1)}{2}$

al sustituir en ⓪ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{N'} U_i = \frac{N(N + 1)}{2} - \frac{d_\circ\,(d_\circ + 1)}{2}$$

haciendo $V_s^* = \sum_{i=1}^{N'} U_i$ tenemos por (F_2)

$$E(V_s^*) = p\left[\frac{N(N + 1)}{2} - \frac{d_\circ(d_\circ + 1)}{2}\right]$$, y como $p = 1/2$ (dado por F_2)

$$E(V_s^*) = 1/4\,[N(N + 1) - d_\circ\,(d_\circ + 1)]$$. Que es lo que buscábamos.

Procedemos a encontrar $Var(V_s^*)$

anteriormente vimos que

$$\sum_{i=1}^{N'} U_i = \sum_{j=1}^{N} V_j - \frac{d_\circ(d_\circ + 1)}{2}$$

pudiendo de aquí afirmar que

$$\sum_{i=1}^{N'} U_i^2 = \sum_{j=1}^{N} V_j^2 - d_\circ\left(\frac{d_\circ + 1}{2}\right)^2 \quad ⓪$$

por prueba de (D_6) tenemos que

$$\sum_{j=1}^{N} V_j^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \sum_{i=0}^{e} \frac{d_i(d_i^2-1)}{12}$$

al sustituir en @ tenemos

$$\sum_{i=1}^{N'} U_i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{d_\circ(d_\circ+1)^2}{4} - \sum_{i=0}^{e} \frac{d_i(d_i^2-1)}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{N'} U_i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - d_\circ\frac{(d_\circ+1)^2}{4} - \sum_{i=1}^{e} d_i(d_i^2-1) - \frac{d_\circ(d_\circ-1)}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{N} U_i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \left[\frac{d_\circ(d_\circ+1)^2}{4} + \frac{d_\circ(d_\circ-1)}{12}\right] - \sum_{i=1}^{e} \frac{d_i(d_i^2-1)}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{N'} U_i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{d_\circ(d_\circ+1)(2d_\circ+1)}{6} - \sum_{i=1}^{e} \frac{d_i(d_i^2-1)}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{N'} U_i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)-d_\circ(d_\circ+1)(2d_\circ+1)}{6} - \sum_{i=1}^{e} \frac{d_i(d_i^2-1)}{12}$$

hacemos $V_s^* = \sum_{i=1}^{N'} U_i^2$ y por (F_2) tenemos que

$$Var(V_s^*) = pq\left[\frac{N(N+1)(2N+1)-d_\circ(d_\circ+1)(2d_\circ+1)}{6} - \sum_{i=1}^{e} \frac{d_i(d_i^2-1)}{12}\right]$$

como $p = 1/2$ y $q = 1/2$ (dados en (F_2)) obtenemos

$$Var(V_s^*) = 1/24\,[N(N+1)(2N+1) - d_\circ(d_\circ+1)(2d_\circ+1)] - \sum_{i=1}^{e} \frac{d_i(d_i^2-1)}{48}$$

que es lo que buscábamos.

III. COMBINACION DE DATOS DE VARIOS EXPERIMENTOS O BLOQUES.

Con frecuencia sucede que después que se ha completado un estudio, observaciones adicionales se vuelven más disponibles y surge el problema entonces de cómo combinar las diferentes fuentes de datos.

Ejemplo 1.

Enseñanza Televisada vrs. Enseñanza Personal.

Para ver si un curso de Historia televisada es tan -- efectivo como tener al profesor en el aula, a los estudiantes se les pide que sean voluntarios en el experimento, algunos de ellos escogidos al azar asistirán a las conferencias en el aula, mientras que otros observarán las conferencias en la televisión en un cuarto adjunto.

Supongamos que 12 estudiantes están de acuerdo en participar en el estudio, y encontramos que estos estudiantes varían considerablemente en lo que respecta a su currículum y habilidad. Se decidió formar pares en lugar de usarlos, en una completa comparación aleatoria; los pares están formados de acuerdo a los grados en cursos previos sobre historia, número de años en el colegio, y de acuerdo también al sexo; porque se pensó que el efecto psicológico de tener al profesor en la pantalla podría ser diferente para ambos sexos.

Supongamos que la combinación final de los siguientes 6 pares de puntuaciones son:

T. V.	70	77	80	80	84	73
AULA	73	75	80	83	85	74
DIFERENCIA	-3	2	0	-3	-1	-1
RANGOS MEDIOS SIGNEADOS	-5.5	+4	0	-5.5	-2.5	-2.5

Un profesor ha realizado un año anterior el mismo estudio, este estudio involucraba cinco pares de estudiantes y dieron los resultados siguientes:

T.V.	85	93	90	91	89
AULA	89	92	90	98	87
DIFERENCIA	-4	1	0	-7	2

Estas primeras observaciones pueden estar combinadas con aquellos del presente estudio para dar el siguiente - conjunto de 11 diferencias:

-7, -4, -3, -3, -1, -1, 0, 0, 1, 2, 2.

Ordenando los valores absolutos de estas diferencias así:

0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 7,

procedemos a encontrar los rangos medios signeados

-11, -10, -8.5, -8.5, -4, -4, 0, 0, 4, 6.5, 6.5;
y así el valor de $V_s^* = 4 + 6.5 + 6.5 = 17$.

Para computar la probabilidad de significación $P_H(V_s^* \leq 17)$, consideremos 2^9 combinaciones posibles de signos de las nueve diferencias, diferentes de cero:

±1, ±1, ±1, ±2, ±2, ±3, ±3, ±4, ±7

El argumento de las secciones precedentes muestra que bajo la hipótesis de no diferencia entre los dos tipos de instrucción, cada signo tiene más o menos una probabilidad de 1/2 (puesto que el signo de cada diferencia está determinada solamente por la asignación aleatoria de los dos sujetos a los dos métodos de instrucción) y que los nueve signos son independientes.

Así la unión de la distribución nula de los rangos medios, y por lo tanto, la distribución nula de éstos es exactamente la misma, como si las observaciones hubiesen sido obtenidas en una sola ocasión, mejor que desde los dos experimentos separados, y la probabilidad de significación de las observaciones combinadas es

$$P_H\ (V_s^* \leq 17) = 0.107.$$

Combinemos ahora las condiciones del ejemplo. Supongamos que en el primer experimento no contamos con pares; 5 de 10 estudiantes disponibles se les asigna aleatoriamente al -

curso televisado, los otros 5 sirven como control y un examen dió los siguientes resultados:

68, 69, 74, 82, 93 y

72, 75, 83, 95, 100,

para estudiantes que asisten a las conferencias televisadas y las conferencias de aula, respectivamente.

Asumamos que la comparación se repite en otro semestre con 8 estudiantes que participan así: 4 al tratamiento y 4 al control, y los resultados finales fueron:

44, 51, 52, 56 y

54, 59, 60, 70

para el tratamiento y control, respectivamente.

¿Podemos otra vez proceder como si las observaciones hubieran sido obtenidas en una sola ocasión?

Para contestar esta pregunta notemos que el estudio combinado implica 18 estudiantes, de quienes 9 se les ha asignado al tratamiento, pero que no todas $\binom{18}{9} = 48{,}620$ asignaciones son iguales. De hecho, 5 de los 9 sujetos tratados deben venir del primer grupo de 10, los 4 restantes vienen del segundo grupo de 8, así que sólo $\binom{10}{5}\binom{8}{4} = 17{,}640$ de las asignaciones son posibles. Estas son claramente iguales y cada una tiene la probabilidad de 1/17,640, y las restantes asignaciones tienen probabilidad cero.

Si de las 18 puntuaciones que fueron clasificadas, tomamos la unión de distribuciones de los 9 rangos de los tratados, éstas ya no serían dadas por

$$P_H\ (S_1 = s_1,\ S_2 = s_2, \ldots, S_n = s_n) = \frac{1}{\binom{N}{n}}\ .$$

y la distribución nula de la suma de los rangos de los tratados ya no sería la suma de los rangos de Wilcoxon, sino - que tendría que ser computada en base a 17,640 casos iguales. Sin embargo, hay razones para no basar un test en todos estos rangos.

Al mirar a los dos conjuntos de observaciones, encontramos que las puntuaciones en el segundo conjunto son significativamente más bajas que las del primero (talvez el examen fué más duro, los estudiantes menos preparados). Esto sugiere que la comparación de las observaciones de los tratados - de un conjunto, con las observaciones de control del otro - conjunto, deberían ser evitadas, ya que se ha dado una única clasificación para las 18 observaciones.

Antes de discutir las formas de tratar esta dificultad, notemos que el mismo problema surge en el contexto de las - secciones precedentes, donde se asumió que los sujetos disponibles para la observación se subdividen deliberadamente en dos subgrupos o bloques, los cuales pueden diferir ampliamente, pero relativamente son homogéneos.

Estos pueden ser bloques de observaciones tomadas el mismo día en la clínica o escuela; pueden obtenerse pareando los sujetos, ya sea por apreciación subjetiva o criterios objetivos, tales como edad, sexo, severidad de la enfermedad, etc.

Sean b bloques, con N_i sujetos en el i-ésimo bloque del cual n_i son seleccionados aleatoriamente para recibir el tratamiento, y los restantes $m_i = N_i - n_i$ sirven como controles. Las asignaciones en los diferentes bloques se asume que son independientes.

El número de posibles asignaciones en el i-ésimo bloque es $\binom{N_i}{n_i}$

y el número total de posibles asignaciones es el producto

$$\binom{N_i}{n_i} \cdots \binom{N_b}{n_b} \qquad (H_1)$$

bajo la asunción de asignaciones aleatorias independientes, todas son iguales y la probabilidad de cada una es por lo tanto

$$\frac{1}{\binom{N_i}{n_i} \cdots \binom{N_b}{n_b}}$$

Denotaremos como siempre el número total de sujetos por N, y el número total de sujetos de tratamiento y control por n y m, así que $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_b$, $n = n_1 + n_2 + \ldots n_b$, $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_b$. (H_2)

La selección de los n sujetos en tratamiento ya no es completamente aleatoria, puesto que no todas las $\binom{N}{n}$ asignaciones son posibles.

En su defecto, estamos tratando con un método aleatorio de asignación restringida, solamente para quellas asignaciones (e iguales) en los cuales exactamente los n_i sujetos del i-ésimo bloque reciben el tratamiento.

En la presente notación las comparaciones pareadas corresponden al caso $N_i = 2$, $m_i = n_i = 1$ para todo i. El número de pares que se denotó previamente para N en la presente notación es b y N denota ahora el número total de sujetos en estudio.

Cuando las observaciones se dividen en bloques, los cuales varían presumiblemente en forma considerable entre uno y otro, las observaciones de diferentes bloques no son directamente comparables. Por esta razón las observaciones se clasifican separadamente en cada bloque.

Sean $S_{i1} < S_{i2} < \ldots < S_{in}$, denotan los n_i rangos en tratamiento del i-ésimo bloque. Entonces resulta que: por la independencia de las asignaciones aleatorias en los diferentes bloques y por la expresión (A_2), que la distribución de los $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_b$ rangos de tratamiento bajo la hipótesis de no efecto en el tratamiento, es dada por

$$P_H\,(S_{11}=s_{11},\ S_{12}=s_{12},\ldots,S_{in1}=s_{in1}\ ;\ S_{21}=s_{21},\ldots,S_{2n2}=s_{2n2};\ldots) =$$

$$= \frac{1}{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\cdots\binom{N_b}{n_b}} \qquad (H_3)$$

$$\text{Sea } W_s^{(i)} = S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{ini} \qquad (H_4)$$

Denota la estadística de la suma de los rangos de Wilcoxon computada para el i-ésimo bloque, y se considera el problema de probar la hipótesis de no efecto en el tratamiento, contra la alternativa que el tratamiento tiene efecto y que es en la misma dirección para todos los bloques.

Pruebas estadísticas sencillas para este problema se proveen por la suma de las estadísticas $W_s^{(i)}$, más generalmente por las combinaciones lineales $\sum C_i\ W_s^i$. Cuando los tamaños de los grupos m_i y n_i (y así el tamaño del bloque N_i) son los mismos para todos los bloques, parece natural dar a cada uno de los bloques el mismo peso y así tomar como prueba estadística sóla la suma de $W_s^{(i)}$.

Sin embargo, para grupos y tamaños de bloques diferentes resulta que una prueba más poderosa se obtiene usando los pesos $C_i = 1/(N_{i+1})$, y así basando la prueba en la estadística

$$W_s = \sum \frac{W_s^{(i)}}{N_{i+1}} \quad . \qquad (H_5)$$

Cuando los tamaños de los bloques son iguales, esta estadística es proporcional a la suma de $W_s^{(i)}$, y la prueba por lo tanto se reduce a la basada en esta suma. Puesto que la distribución nula W_s depende de los tamaños de los grupos m_i y n_i, una tabla de esta distribución no es practicable.

Ilustraremos por lo tanto, el cálculo de la probabilidad de significación con un ejemplo y luego discutiremos la aproximación normal.

Ejemplo 2.

Dos Métodos de Publicidad.

Una Agencia de Publicidad desea probar si la teoría fuerte, ofensiva y desagradable de un anuncio será más efectiva que un anuncio agradable, debido a su impacto más fuerte. Para probar esta teoría, la agencia persuade a un cliente interesado y de acuerdo en una campaña de anuncio experimental para un nuevo producto que él está a punto de introducir en varias ciudades. Los sujetos en este ejemplo son las ciudades, y ellas podrían por supuesto, ser asignadas aleatoriamente a los dos métodos, digamos la mitad de las ciudades para cada uno (control, tratamiento). Sin embargo, las ciudades de prueba varían considerablemente en tamaño y como -

resultado habrá una gran variabilidad en el consumo del producto en cuestión.

Si el consumo fuera proporcional al tamaño de la ciudad, aunque esta asunción no es para ser justificable, parece ser aconsejable hacer bloques de ciudades de acuerdo al tamaño. Resulta que ellas caerán en cuatro bloques claramente homogéneas. Si tenemos que las ciudades en mención se distribuyen así: dos ciudades grandes con igual población, dos grupos de tres cada uno a niveles intermedios y un grupo de 6 ciudades más pequeñas (del mismo tamaño).

Se decide, por lo tanto, seleccionar en estos cuatro bloques 1, 2 y 3 ciudades, respectivamente, para ser asignados al tratamiento, con las restantes sirviendo como controles (el anuncio más agradable y convencional). Las cifras de consumo al final de un mes se dan en la tabla 1, y los rangos aparecen en la tabla 2.

Tabla 1

BLOQUE	CONTROL	TRATAMIENTO
1	236	255
2	183	179,193
3	115,128	132
4	61,70,79	67,84,88

Tabla 2

	RANGOS	
BLOQUE	CONTROL	TRATAMIENTO
1	1	2
2	2	1 , 3
3	1 , 2	3
4	1 , 3 , 4	2 , 5 , 6

Al tratar con números pequeños trabajaremos con la estadística de la prueba (H_5).

$$W_r = \frac{\sum W_r^{(i)}}{N_{i+1}}$$

los pesos $1/N_{i+1}$ para los cuatro bloques son respectivamente, 1/3, 1/4, 1/4 y 1/7. Para evitar fracciones es conveniente multiplicar la estadística.

$$W_r = 1/3\ W_r^{(1)} + 1/4\ W_r^{(2)} + 1/4\ W_r^{(3)} + 1/7\ W_r^{(4)}$$

por el mínimo común múltiplo de los denominadores que es 84, al operar obtenemos la estadística equivalente a saber

$$84W_r = 28W_r^{(1)} + 21\ W_r^{(2)} + 21W_r^{(3)} + 12W_r^{(4)}.$$

El valor observado de esta estadística es

$$28x1 + 21x2 + 21x3 + 12x8 = 229$$

y la probabilidad de significación es $P_H(84\ W_r \leq 229)$.

Para facilitar el cálculo de esta probabilidad escribiremos primero la distribución de las sumas $W_r^{(1)},\ldots,W_r^{(4)}$, de los rangos de control en los diferentes bloques multiplicando por 28, 21, 21 y 12, respectivamente.

TABLA CON TODOS LOS POSIBLES RANGOS ASIGNABLES AL CONTROL.

BLOQUE 1		
CONTROL	$W_r^{(1)}$	$28W_r^{(1)}$
1	1	28
2	2	56

BLOQUE 2		
CONTROL	$W_r^{(2)}$	$21W_r^{(2)}$
1	1	21
2	2	42
3	3	63

BLOQUE 3		
CONTROL	$W_r^{(3)}$	$21W_r^{(3)}$
(1,2)	3	63
(1,3)	4	84
(2,3)	5	105

BLOQUE 4		
CONTROL	$W_r^{(4)}$	$12\ W_r^{(4)}$
(1,2,3)	6	72
(1,2,4)	7	84
(1,2,5)	8	96
(1,2,6)	9	108
(1,3,4)	8	84
(1,3,5)	9	108
(1,3,6)	10	120
(1,4,5)	10	120
(1,4,6)	11	132
(1,5,6)	12	144
(2,3,4)	9	108
(2,3,5)	10	120
(2,3,6)	11	132
(2,4,5)	11	132
(2,4,6)	12	144
(2,5,6)	13	156
(3,4,5)	12	144
(3,4,6)	13	156
(3,5,6)	14	168
(4,5,6)	15	180

	CUADRO RESUMEN													
	$28W_r^{(1)}$		$21W_r^{(2)}$			$21W_r^{(3)}$			$12W_r^{(4)}$					
ESTADISTICAS	28	56	21	42	63	63	84	108	72	84	96	108	120	...
$P(W_r^{(i)} = W)$	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/20	1/20	2/20	3/20	3/20	...

Ahora fijemos $28W_r^{(1)}$, $21W_r^{(2)}$ y $21W_r^{(3)}$ a sus valores más bajos 28, 21 y 63; la unión de las probabilidades de estos valores es

$1/2 \times 1/3 \times 1/3 = \frac{1}{28}$, y su suma es 112.

La suma permanecerá menor o igual a 229 cuando se sume $12W_r^{(4)}$, previendo que $12W_r^{(4)} \leq 229 - 112 = 117$, con un evento de probailidad 7/20.

La probabilidad total de estos casos es por lo tanto 7/360. Fijando $28W_r^{(1)}$, $21W_r^{(2)}$ y $21W_r^{(3)}$ próximos a 28, 21 y 84, respectivamente, la suma permanecerá menor o igual a 229, cuando $12W_r^{(4)}$ se sume, previendo $12W_r^{(4)} \leq 96$, y la probabilidad de estos casos es 4/360.

Continuando en esta forma encontramos

$P_H\ (84W_r \leq 229) = \frac{20}{360} = 0.056.$

La aproximación normal a la distribución de las estadísticas W_r y W_s se colocan en un problema particular. La media y la varianza de estas estadísticas son iguales a la -

suma de las medias y varianzas de las variables aleatorias $W_r^{(i)}/N_{i+1}$ y $W_s^{(i)}/N_{i+1}$, respectivamente, las cuales por C_2 y C_7 son dados por

$$E_H\left(\frac{W_r^{(i)}}{N_{i+1}}\right) = \frac{m_i}{2}$$

$$E_H\left(\frac{W_s^{(i)}}{N_{i+1}}\right) = \frac{n_i}{2} \qquad (H_6)$$

$$Var_H\left(\frac{W_r^{(i)}}{N_{i+1}}\right) = Var_H\left(\frac{W_s^{(i)}}{N_{i+1}}\right) = \frac{m_i n_i}{12(N_{i+1})} \ . \quad (H_7)$$

El cálculo puede ilustrarse en los datos del ejemplo anterior para las Esperanzas y Varianzas en los diferentes bloques listados en la siguiente tabla:

i	m_i	n_i	$E_H(W_r^{(i)}/N_{i+1})$	$Var_H(W_r^{(i)}/N_{i+1})$
1	1	1	1/2	1/36
2	1	2	1/2	1/24
3	2	1	1	1/24
4	3	3	3/2	3/28

Encontramos que $E_H(W_r) = 3.5$ y $Var_H(W_r) = 0.218$, y así la -

aproximación normal a la probabilidad de significación es

$$\phi\left[\frac{2.73 - 3.5}{.467}\right] = \phi\ (-1.649) = 0.05$$ comparado con el valor

0.056 obtenido primero por enumeración, es aceptable.

Discutiremos ahora un mejoramiento para el caso general, continuando con el ejemplo: Métodos de Publicidad.

Consideremos una vez más las cifras de consumo para las 14 ciudades. Estas no fueron directamente comparables puesto que ellas dependían directamente del tamaño de las ciudades. Tratemos de eliminar, o por lo menos de reducir este efecto del tamaño, restando de cada observación el promedio de las observaciones para cada bloque.

Por ejemplo, el promedio del Tercer bloque es

$\frac{115 + 128 + 132}{3} = 125$, y restando 125 de cada observación en este bloque obtenemos $115 - 125 = 10$, $128 - 125 = 3$, $132 - 125 = 7$.

Procediendo de esta manera con cada uno de los bloques, reemplazamos las observaciones originales con las siguientes observaciones alineadas.

BLOQUE	CONTROL	TRATAMIENTO
1	- 9 1/2	9 1/2
2	- 2	-6,8
3	- 10,3	7
4	-13 5/6,-4 5/6,4 1/6	-7 5/6,9 1/2,13 1/6

Puesto que las observaciones alineadas son del mismo orden de magnitud, aún observaciones de diferentes bloques son comparables, y por lo tanto, clasificamos todas las 14 observaciones en lugar de clasificarlas separadamente dentro de cada bloque. En esta nueva clasificación la observación más pequeña es -13 5/6 y por lo tanto se le asigna rango 1; luego viene -10 con rango 2; y así sucesivamente. Los rangos de las observaciones alineadas las encontramos - así:

BLOQUE	CONTROL	TRATAMIENTO
1	3	13
2	7	5,11
3	2,8	10
4	1,6,9	4,12,14

Para obtener la distribución nula de los rangos de - los tratados o de control alineados, debemos repetir ahora el argumento estándar (Capítulo I, Secciones I y IV).

Notemos primero que bajo la hipótesis H de no efecto en el tratamiento, y con el método de asignación aleatoria que se usó, el rango alineado de tal sujeto es independiente de cuáles sujetos sean asignados al tratamiento y cuáles al control. Esto se sigue del hecho que:

i) Bajo H la respuesta de cada sujeto es la misma, ya sea asignado al tratamiento o control.

ii) El promedio de la respuesta en cada bloque es independiente de esta asignación. Puesto que las respuestas alineadas no dependen de una asignación, y por lo tanto, ni de los rangos alineados.

Arbitrariamente seleccionamos los sujetos que van a recibir el tratamiento, también se seleccionan los rangos alineados. Uno de los dos rangos es 3 y el otro es 13 del bloque uno, con probabilidad de 1/2 cada uno; uno de los tres rangos del bloque dos, cada uno con probabilidad de $1/\binom{3}{1} = 1/3$; 2 del bloque 3 con probabilidad $1/\binom{3}{2} = 1/3$ y 3 del bloque cuatro, con probabilidad $1/\binom{6}{3} = 1/20$.

Después, las selecciones de los cuatro bloques son independientes. Esta distribución da la base para computar la distribución nula de cualquier prueba estadística que se define en términos de los rangos de las observaciones alineados.

Consideremos por ejemplo la suma $\hat{W}_r$ de los rangos de control de las observaciones alineadas, los valores observados son 3 + 7 + 2 + 8 + 1 + 6 + 9 = 36.

Así, la probabilidad de significación es $P_H(\hat{W}_r \leq 36)$; convencionalmente siempre es obtenido por la primera consideración de las correspondientes sumas $W_r^{(1)}$, $W_r^{(2)}$, $W_r^{(3)}$ y - $W_r^{(4)}$ de los rangos de control alineados en los diferentes - bloques.

Puesto que el valor mínimo de $\hat{W}_r^{(1)} + \hat{W}_r^{(2)} + \hat{W}_r^{(3)}$ es 3 + 5 + 10 = 18, el valor más grande de $W_r^{(4)}$ para cualquier $\hat{W}_r \leq 36$ es 18.

La distribución nula de $\hat{W}_r^{(1)}$, $\hat{W}_r^{(2)}$, $\hat{W}_r^{(3)}$ y $\hat{W}_r^{(4)}$ se encuentra en la siguiente tabla:

	BLOQUE 1		BLOQUE 2			BLOQUE 3			BLOQUE 4			
W	3	13	5	7	11	10	12	18	11	14	16	17
$P_H(W_r^{(i)}=W)$	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/20	1/20	1/20	1/20

Ahora procedemos como en la primera parte del ejemplo 2 con los valores fijados de $\hat{W}_r^{(1)}$, $\hat{W}_r^{(2)}$, $\hat{W}_r^{(3)}$ más bajos 3,5,10; la suma $\hat{W}_r \leq 36$ dado que $\hat{W}_r^{(4)} < 18$, y la probabilidad total - de estos caso es $4/360 = \left(\frac{4}{2 \times 3 \times 3 \times 20}\right)$; para $P(\hat{W}_r \leq 36)$ se encuentra así:

$W_r^{(1)}$, $W_r^{(2)}$, $W_r^{(3)}$, $W_r^{(4)}$	W_r	No.
3, 5, 10, 11	29	1
3, 5, 10, 14	32	2
3, 5, 10, 16	34	3
3, 5, 10, 17	35	4
3, 5, 12, 11	31	5
3, 5, 12, 14	34	6
3, 5, 12, 16	36	7
3, 7, 10, 11	31	8
3, 7, 10, 14	34	9
3, 7, 10, 16	36	10
3, 7, 12, 11	33	11
3, 7, 12, 14	36	12
3, 7, 12, 14	35	13

luego $P(\hat{W}_r \leq 36) = \frac{13}{360} \simeq 0.036$, comparando la probabilidad 0.056 obtenida por clasificación separada con $\alpha = 0.036$, - podemos recomendar el proceso en el cual obtuvimos 0.036.

TABLA A: DISTRIBUCION DE LA SUMA DE LOS RANGOS DE WILCOXON: $P(W_{xy} \leq a)$

k_1	a	$k_2=3$	$k_2=4$	$k_2=5$	$k_2=6$	$k_2=7$	$k_2=8$	$k_2=9$	$k_2=10$	$k_2=11$	$k_2=12$
3	0	.0500	.0286	.0179	.0119	.0083	.0061	.0045	.0035	.0027	.0022
	1	.1000	.0571	.0357	.0238	.0167	.0121	.0091	.0070	.0055	.0044
	2	.2000	.1143	.0714	.0476	.0333	.0242	.0182	.0140	.0110	.0088
	3	.3500	.2000	.1250	.0833	.0583	.0424	.0318	.0245	.0192	.0154
	4	.5000	.3143	.1964	.1310	.0917	.0667	.0300	.0385	.0302	.0242
	5	.6500	.4286	.2857	.1905	.1333	.0970	.0727	.0559	.0440	.0352
	6	.8000	.5714	.3929	.2738	.1917	.1394	.1045	.0804	.0632	.0505
	7	.9000	.6857	.5000	.3571	.2583	.1879	.1409	.1084	.0852	.0681
	8	.9500	.8000	.6071	.4524	.3333	.2485	.1864	.1434	.1126	.0901
	9	1.0000	.8857	.7143	.5476	.4167	.3152	.2409	.1853	.1456	.1165
	10		.9429	.8036	.6429	.5000	.3879	.3000	.2343	.1841	.1473
	11		.9714	.8750	.7262	.5833	.4606	.3636	.2867	.2280	.1824
	12		1.0000	.9286	.8095	.6667	.5394	.4318	.3462	.2775	.2242
	13			.9643	.8690	.7417	.6121	.5000	.4056	.3297	.2681
	14			.9821	.9167	.8083	.6848	.5682	.4685	.3846	.3165
	15			1.0000	.9524	.8667	.7515	.6364	.5315	.4423	.3670
	16				.9762	.9083	.8121	.7000	.5944	.5000	.4198
	17				.9881	.9417	.8606	.7591	.6538	.5577	.4725
	18				1.0000	.9667	.9030	.8136	.7133	.6154	.5275

CONTINUACION. TABLA A

k_1	a	$k_2 = 3$	$k_2=4$	$k_2=5$	$k_2=6$	$k_2=7$	$k_2=8$	$k_2=9$	$k_2=10$	$k_2=11$	$k_2=12$
4	0		.0143	.0079	.0048	.0030	.0020	.0014	.0010	.0007	.0005
	1		.0286	.0159	.0095	.0061	.0040	.0028	.0020	.0015	.0011
	2		.0571	.0317	.0190	.0121	.0081	.0056	.0040	.0029	.0022
	3		.1000	.0556	.0333	.0212	.0141	.0098	.0070	.0051	.0038
	4		.1714	.0952	.0571	.0364	.0242	.0168	.0120	.0088	.0066
	5		.2429	.1429	.0857	.0545	.0364	.0252	.0180	.0132	.0099
	6		.3429	.2063	.1286	.0818	.0545	.0378	.0270	.0198	.0148
	7		.4429	.2778	.1762	.1152	.0768	.0531	.0380	.0278	.0209
	8		.5571	.3651	.2381	.1576	.1071	.0741	.0529	.0388	.0291
	9		.6571	.4524	.3048	.2061	.1414	.0993	.0709	.0520	.0390
	10		.7571	.5476	.3810	.2636	.1838	.1301	.0939	.0689	.0516
	11		.8286	.6349	.4571	.3242	.2303	.1650	.1199	.0886	.0665
	12		.9000	.7222	.5429	.3939	.2848	.2070	.1518	.1128	.0852
	13		.9429	.7937	.6190	.4636	.3414	.2517	.1868	.1399	.1060
	14		.9714	.8571	.6952	.5364	.4040	.3021	.2268	.1714	.1308
	15		.9857	.9048	.7619	.6061	.4667	.3552	.2697	.2059	.1582
	16		1.0000	.9444	.8238	.6758	.5333	.4126	.3177	.2447	.1896
	17			.9683	.8714	.7364	.5960	.4699	.3666	.2857	.2231
	18			.9841	.9143	.7939	.6586	.5301	.4196	.3304	.2604
	19			.9921	.9429	.8424	.7152	.5874	.4725	.3766	.2995
	20			1.0000	.9667	.8848	.7697	.6448	.5275	.4256	.3418
	21				.9810	.9182	.8162	.6979	.5804	.4747	.3852
	22				.9905	.9455	.8586	.7483	.6334	.5253	.4308
	23				.9952	.9636	.8929	.7930	.6823	.5744	.4764
	24				1.0000	.9788	.9232	.8350	.7303	.6234	.5236

CONTINUACION TABLA A

k_1	a	$k_2=5$	$k_2=6$	$k_2=7$	$k_2=8$	$k_2=9$	$k_2=10$
5	0	.0040	.0022	.0013	.0008	.0005	.0003
	1	.0079	.0043	.0025	.0016	.0010	.0007
	2	.0159	.0087	.0051	.0031	.0020	.0013
	3	.0278	.0152	.0088	.0054	.0035	.0023
	4	.0476	.0260	.0152	.0093	.0060	.0040
	5	.0754	.0411	.0240	.0148	.0095	.0063
	6	.1111	.0628	.0366	.0225	.0145	.0097
	7	.1548	.0887	.0530	.0326	.0210	.0140
	8	.2103	.1234	.0745	.0466	.0300	.0200
	9	.2738	.1645	.1010	.0637	.0415	.0276
	10	.3452	.2143	.1338	.0855	.0559	.0376
	11	.4206	.2684	.1717	.1111	.0734	.0496
	12	.5000	.3312	.2159	.1422	.0949	.0646
	13	.5794	.3961	.2652	.1772	.1199	.0823
	14	.6548	.4654	.3194	.2176	.1489	.1032
	15	.7262	.5346	.3775	.2618	.1818	.1272
	16	.7897	.6039	.4381	.3108	.2188	.1548
	17	.8452	.6688	.5000	.3621	.2592	.1855
	18	.8889	.7316	.5619	.4165	.3032	.2198
	19	.9246	.7857	.6225	.4716	.3497	.2567
	20	.9524	.8355	.6806	.5284	.3986	.2970
	21	.9722	.8766	.7348	.5835	.4491	.3393
	22	.9841	.9113	.7841	.6379	.5000	.3839
	23	.9921	.9372	.8283	.6892	.5509	.4296
	24	.9960	.9589	.8662	.7382	.6014	.4765
	25	1.0000	.9740	.8990	.7824	.6503	.5235

CONTINUACION TABLA A

k_1	a	$k_2=5$	$k_2=6$	$k_2=7$	$k_2=8$	$k_2=9$	$k_2=10$
6	0		.0011	.0006	.0003	.0002	.0001
	1		.0022	.0012	.0007	.0004	.0002
	2		.0043	.0023	.0013	.0008	.0005
	3		.0076	.0041	.0023	.0014	.0009
	4		.0130	.0070	.0040	.0024	.0015
	5		.0206	.0111	.0063	.0038	.0024
	6		.0325	.0175	.0100	.0060	.0037
	7		.0465	.0256	.0147	.0088	.0055
	8		.0660	.0367	.0213	.0128	.0080
	9		.0898	.0507	.0296	.0180	.0112
	10		.1201	.0688	.0406	.0248	.0156
	11		.1548	.0903	.0539	.0332	.0210
	12		.1970	.1171	.0709	.0440	.0280
	13		.2424	.1474	.0906	.0567	.0363
	14		.2944	.1830	.1142	.0723	.0467
	15		.3496	.2225	.1412	.0905	.0589
	16		.4091	.2669	.1725	.1119	.0736
	17		.4686	.3141	.2068	.1361	.0903
	18		.5314	.3654	.2454	.1638	.1099
	19		.5909	.4178	.2864	.1942	.1317
	20		.6504	.4726	.3310	.2280	.1566
	21		.7056	.5274	.3773	.2643	.1838
	22		.7576	.5822	.4259	.3035	.2139
	23		.8030	.6346	.4749	.3445	.2461
	24		.8452	.6859	.5251	.3878	.2811
	25		.8799	.7331	.5741	.4320	.3177
	26		.9102	.7774	.6227	.4773	.3564
	27		.9340	.8170	.6690	.5227	.3962
	28		.9535	.8526	.7136	.5680	.4374
	29		.9675	.8829	.7546	.6122	.4789
	30		.9794	.9097	.7932	.6555	.5211

CONTINUACION TABLA A

k_1	a	$k_2=7$	$k_2=8$	$k_2=9$	$k_2=10$
7	0	.0003	.0002	.0001	.0001
	1	.0006	.0003	.0002	.0001
	2	.0012	.0006	.0003	.0002
	3	.0020	.0011	.0006	.0004
	4	.0035	.0019	.0010	.0006
	5	.0055	.0030	.0017	.0010
	6	.0087	.0047	.0026	.0015
	7	.0131	.0070	.0039	.0023
	8	.0189	.0103	.0058	.0034
	9	.0265	.0145	.0082	.0048
	10	.0364	.0200	.0115	.0068
	11	.0487	.0270	.0156	.0093
	12	.0641	.0361	.0209	.0125
	13	.0825	.0469	.0274	.0165
	14	.1043	.0603	.0356	.0215
	15	.1297	.0760	.0454	.0277
	16	.1588	.0946	.0571	.0351
	17	.1914	.1159	.0708	.0439
	18	.2279	.1405	.0869	.0544
	19	.2675	.1678	.1052	.0665
	20	.3100	.1984	.1261	.0806
	21	.3552	.2317	.1496	.0966
	22	.4024	.2679	.1755	.1148
	23	.4508	.3063	.2039	.1349

CONTINUACION TABLA A

k_1 a	$k_2=7$	$k_2=8$	$k_2=9$	$k_2=10$
24	.5000	.3472	.2349	.1574
25	.5492	.3894	.2680	.1819
26	.5976	.4333	.3032	.2087
27	.6448	.4775	.3403	.2374
28	.6900	.5225	.3788	.2681
29	.7325	.5667	.4185	.3004
30	.7721	.6106	.4591	.3345
31	.8086	.6528	.5000	.3698
32	.8412	.6937	.5409	.4063
33	.8703	.7321	.5815	.4434
34	.8957	.7683	.6212	.4811
35	.9175	.8016	.6597	.5189

CONTINUACION TABLA A

k_1	a	$k_2=8$	$k_2=9$	$k_2=10$
8	0	.0001	.0000	.0000
	1	.0002	.0001	.0000
	2	.0003	.0002	.0001
	3	.0005	.0003	.0002
	4	.0009	.0005	.0003
	5	.0015	.0008	.0004
	6	.0023	.0012	.0007
	7	.0035	.0019	.0010
	8	.0052	.0028	.0015
	9	.0074	.0039	.0022
	10	.0103	.0056	.0031
	11	.0141	.0076	.0043
	12	.0190	.0103	.0058
	13	.0249	.0137	.0078
	14	.0325	.0180	.0103
	15	.0415	.0232	.0133
	16	.0524	.0296	.0171
	17	.0652	.0372	.0217
	18	.0803	.0464	.0273
	19	.0974	.0570	.0338
	20	.1172	.0694	.0416
	21	.1393	.0836	.0506
	22	.1641	.0998	.0610

CONTINUACION TABLA A

k_1 a	$k_2=8$	$k_2=9$	$k_2=10$
23	.1911	.1179	.0729
24	.2209	.1383	.0864
25	.2527	.1606	.1015
26	.2869	.1852	.1185
27	.3227	.2117	.1371
28	.3605	.2404	.1577
29	.3992	.2707	.1800
30	.4392	.3029	.2041
31	.4796	.3365	.2299
32	.5204	.3715	.2574
33	.5608	.4074	.2863
34	.6008	.4442	.3167
35	.6395	.4813	.3482
36	.6773	.5187	.3809
37	.7131	.5558	.4143
38	.7473	.5926	.4484
39	.7791	.6285	.4827
40	.8089	.6635	.5173

CONTINUACION TABLA A

k_1	a	$k_2=9$	$k_2=10$	k_1	a	$k_2=10$
9	0	.0000	.0000	10	0	.0000
	1	.0000	.0000		1	.0000
	2	.0001	.0000		2	.0000
	3	.0001	.0001		3	.0000
	4	.0002	.0001		4	.0001
	5	.0004	.0002		5	.0001
	6	.0006	.0003		6	.0002
	7	.0009	.0005		7	.0002
	8	.0014	.0007		8	.0004
	9	.0020	.0011		9	.0005
	10	.0028	.0015		10	.0008
	11	.0039	.0021		11	.0010
	12	.0053	.0028		12	.0014
	13	.0071	.0038		13	.0019
	14	.0094	.0051		14	.0026
	15	.0122	.0066		15	.0034
	16	.0157	.0086		16	.0045
	17	.0200	.0110		17	.0057
	18	.0252	.0140		18	.0073
	19	.0313	.0175		19	.0093
	20	.0385	.0217		20	.0116
	21	.0470	.0267		21	.0144
	22	.0567	.0326		22	.0177
	23	.0680	.0394		23	.0216
	24	.0807	.0474		24	.0262

CONTINUACION TABLA A

k_1 a	$k_2=9$	$k_2=10$	k_1 a	$k_2=10$
25	.0951	.0564	25	.0315
26	.1112	.0667	26	.0376
27	.1290	.0782	27	.0446
28	.1487	.0912	28	.0526
29	.1701	.1055	29	.0615
30	.1933	.1214	30	.0716
31	.2181	.1388	31	.0827
32	.2447	.1577	32	.0952
33	.2729	.1781	33	.1088
34	.3024	.2001	34	.1237
35	.3332	.2235	35	.1399
36	.3652	.2483	36	.1575
37	.3981	.2745	37	.1763
38	.4317	.3019	38	.1965
39	.4657	.3304	39	.2179
40	.5000	.3598	40	.2406
41	.5343	.3901	41	.2644
42	.5683	.4211	42	.2894
43	.6019	.4524	43	.3153
44	.6348	.4841	44	.3421
45	.6668	.5159	45	.3697
			46	.3980
			47	.4267
			48	.4559
			49	.4853
			50	.5147

TABLA B: AREA ϕ (z) BAJO LA CURVA NORMAL A LA IZQUIERDA DE:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

CONTINUACION TABLA B

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

TABLA C: DISTRIBUCION DEL TEST DEL SIGNO: $P(S_N \leq a)$

a \ N	2	3	4	5	6	7	8	9
0	.2500	.1250	.0625	.0313	.0156	.0078	.0039	.0020
1	.7500	.5000	.3125	.1875	.1094	.0625	.0352	.0195
2	1.0000	.8750	.6875	.5000	.3438	.2266	.1445	.0898
3		1.0000	.9375	.8125	.6562	.5000	.3633	.2539
4			1.0000	.9687	.8906	.7734	.6367	.5000

a \ N	10	11	12	13	14	15	16	17
0	.0010	.0005	.0002	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000
1	.0107	.0059	.0032	.0017	.0009	.0005	.0003	.0001
2	.0547	.0327	.0193	.0112	.0065	.0037	.0021	.0012
3	.1719	.1133	.0730	.0461	.0287	.0176	.0106	.0064
4	.3770	.2744	.1938	.1334	.0898	.0592	.0384	.0245
5	.6230	.5000	.3872	.2905	.2120	.1509	.1051	.0717
6	.8281	.7256	.6128	.5000	.3953	.3036	.2272	.1662
7	.9453	.8867	.8062	.7095	.6037	.5000	.4018	.3145
8	.9893	.9673	.9270	.8666	.7880	.6964	.5982	.5000

a \ N	18	19	20	21	22	23	24	25
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0007	.0004	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000
3	.0038	.0022	.0013	.0007	.0004	.0002	.0001	.0001

CONTINUACION TABLA C

a \ N	18	19	20	21	22	23	24	25
4	.0154	.0096	.0059	.0036	.0022	.0013	.0008	.0005
5	.0481	.0318	.0207	.0133	.0085	.0053	.0033	.0020
6	.1189	.0835	.0577	.0392	.0262	.0173	.0113	.0073
7	.2403	.1796	.1316	.0946	.0669	.0466	.0320	.0216
8	.4073	.3238	.2517	.1917	.1431	.1050	.0758	.0539
9	.5927	.5000	.4119	.3318	.2617	.2024	.1537	.1148
10	.7597	.6762	.5881	.5000	.4159	.3388	.2706	.2122
11	.8811	.8204	.7483	.6682	.5841	.5000	.4194	.3450
12	.9519	.9165	.8684	.8083	.7383	.6612	.5806	.5000

CONTINUACION TABLA C

a \ N	26	27	28	29	30	31	32
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0003	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000
5	.0012	.0008	.0005	.0003	.0002	.0001	.0001
6	.0047	.0030	.0019	.0012	.0007	.0004	.0003
7	.0145	.0096	.0063	.0041	.0026	.0017	.0011
8	.0378	.0261	.0178	.0121	.0081	.0053	.0035
9	.0843	.0610	.0436	.0307	.0214	.0147	.0100
10	.1635	.1239	.0925	.0680	.0494	.0354	.0251
11	.2786	.2210	.1725	.1325	.1002	.0748	.0551
12	.4225	.3506	.2858	.2291	.1808	.1405	.1077
13	.5775	.5000	.4253	.3555	.2923	.2366	.1885
14	.7214	.6494	.5747	.5000	.4278	.3601	.2983
15	.8365	.7790	.7142	.6445	.5722	.5000	.4300
16	.9157	.8761	.8275	.7709	.7077	.6399	.5700

a \ N	34	35	36	37	38	39	40
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

a \ N	34	35	36	37	38	39	40
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000
8	.0015	.0009	.0006	.0004	.0002	.0001	.0001
9	.0045	.0030	.0020	.0013	.0008	.0005	.0003
10	.0122	.0083	.0057	.0038	.0025	.0017	.0011
11	.0288	.0205	.0144	.0100	.0069	.0047	.0032
12	.0607	.0448	.0326	.0235	.0168	.0119	.0083
13	.1147	.0877	.0662	.0494	.0365	.0266	.0192
14	.1958	.1553	.1215	.0939	.0717	.0541	.0403
15	.3038	.2498	.2025	.1620	.1279	.0998	.0769
16	.4321	.3679	.3089	.2557	.2088	.1684	.1341
17	.5679	.5000	.4340	.3714	.3136	.2612	.2148
18	.6962	.6321	.5660	.5000	.4357	.3746	.3179
19	.8042	.7502	.6911	.6286	.5643	.5000	.4373
20	.8853	.8447	.7975	.7443	.6864	.6254	.5627

TABLA D: DISTRIBUCION DE LOS RANGOS SIGNEADOS DE WILCOXON :

$P(V \leq v)$

a \ N	1	2	3	4	5	6	7
0	.5000	.2500	.1250	.0625	.0313	.0156	.0078
1	1.0000	.5000	.2500	.1250	.0625	.0313	.0156
2		.7500	.3750	.1875	.0938	.0469	.0234
3		1.0000	.6250	.3125	.1563	.0781	.0391
4			.7500	.4375	.2188	.1094	.0547
5			.8750	.5625	.3125	.1563	.0781
6			1.0000	.6875	.4063	.2188	.1094
7				.8125	.5000	.2813	.1484
8				.8750	.5937	.3438	.1875
9				.9375	.6875	.4219	.2344
10				1.0000	.7812	.5000	.2891
11					.8437	.5781	.3438
12					.9062	.6562	.4063
13					.9375	.7187	.4688
14					.9687	.7812	.5312

a \ N	8	9	10	11	12	13	14
0	.0039	.0020	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
1	.0078	.0039	.0020	.0010	.0005	.0002	.0001
2	.0117	.0059	.0029	.0015	.0007	.0004	.0002
3	.0195	.0098	.0049	.0024	.0012	.0006	.0003

CONTINUACION TABLA D

a \ N	8	9	10	11	12	13	14
4	.0273	.0137	.0068	.0034	.0017	.0009	.0004
5	.0391	.0195	.0098	.0049	.0024	.0012	.0006
6	.0547	.0273	.0137	.0068	.0034	.0017	.0009
7	.0742	.0371	.0186	.0093	.0046	.0023	.0012
8	.0977	.0488	.0244	.0122	.0061	.0031	.0015
9	.1250	.0645	.0322	.0161	.0081	.0040	.0020
10	.1563	.0820	.0420	.0210	.0105	.0052	.0026
11	.1914	.1016	.0527	.0269	.0134	.0067	.0034
12	.2305	.1250	.0654	.0337	.0171	.0085	.0043
13	.2734	.1504	.0801	.0415	.0212	.0107	.0054
14	.3203	.1797	.0967	.0508	.0261	.0133	.0067
15	.3711	.2129	.1162	.0615	.0320	.0164	.0083
16	.4219	.2480	.1377	.0737	.0386	.0199	.0101
17	.4727	.2852	.1611	.0874	.0461	.0239	.0123
18	.5273	.3262	.1875	.1030	.0549	.0287	.0148
19	.5781	.3672	.2158	.1201	.0647	.0341	.0176
20	.6289	.4102	.2461	.1392	.0757	.0402	.0209
21	.6797	.4551	.2783	.1602	.0881	.0471	.0247
22	.7266	.5000	.3125	.1826	.1018	.0549	.0290
23	.7695	.5449	.3477	.2065	.1167	.0636	.0338
24	.8086	.5898	.3848	.2324	.1331	.0732	.0392
25	.8437	.6328	.4229	.2598	.1506	.0839	.0453

CONTINUACION TABLA D

N / a	8	9	10	11	12	13	14
26	.8750	.6738	.4609	.2886	.1697	.0955	.0520
27	.9023	.7148	.5000	.3188	.1902	.1082	.0594
28	.9258	.7520	.5391	.3501	.2119	.1219	.0676
29	.9453	.7871	.5771	.3823	.2349	.1367	.0765
30	.9609	.8203	.6152	.4155	.2593	.1527	.0863
31	.9727	.8496	.6523	.4492	.2847	.1698	.0969
32	.9805	.8750	.6875	.4829	.3110	.1879	.1083
33	.9883	.8984	.7217	.5171	.3386	.2072	.1206
34	.9922	.9180	.7539	.5508	.3667	.2274	.1338
35	.9961	.9355	.7842	.5845	.3955	.2487	.1479
36	1.0000	.9512	.8125	.6177	.4250	.2709	.1629
37		.9629	.8389	.6499	.4548	.2939	.1788
38		.9727	.8623	.6812	.4849	.3177	.1955
39		.9805	.8838	.7114	.5151	.3424	.2131
40		.9863	.9033	.7402	.5452	.3677	.2316
41		.9902	.9199	.7676	.5750	.3934	.2508
42		.9941	.9346	.7935	.6045	.4197	.2708
43		.9961	.9473	.8174	.6333	.4463	.2915
44		.9980	.9580	.8398	.6614	.4730	.3129
45		1.0000	.9678	.8608	.6890	.5000	.3349
46			.9756	.8799	.7153	.5270	.3574
47			.9814	.8970	.7407	.5537	.3804

CONTINUACION TABLA D

a \ N	8	9	10	11	12	13	14
48			.9863	.9126	.7651	.5803	.4039
49			.9902	.9263	.7881	.6066	.4276
50			.9932	.9385	.8098	.6323	.4516
51			.9951	.9492	.8303	.6576	.4758
52			.9971	.9585	.8494	.6823	.5000

a \ N	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000
5	.0003	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000
6	.0004	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000
7	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
8	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000
9	.0010	.0005	.0003	.0001	.0001	.0000
10	.0013	.0007	.0003	.0002	.0001	.0000
11	.0017	.0008	.0004	.0002	.0001	.0001
12	.0021	.0011	.0005	.0003	.0001	.0001
13	.0027	.0013	.0007	.0003	.0002	.0001
14	.0034	.0017	.0008	.0004	.0002	.0001

CONTINUACION TABLA D

a \ N	15	16	17	18	19	20
15	.0042	.0021	.0010	.0005	.0003	.0001
16	.0051	.0026	.0013	.0006	.0003	.0002
17	.0062	.0031	.0016	.0008	.0004	.0002
18	.0075	.0038	.0019	.0010	.0005	.0002
19	.0090	.0046	.0023	.0012	.0006	.0003
20	.0108	.0055	.0028	.0014	.0007	.0004
21	.0128	.0065	.0033	.0017	.0008	.0004
22	.0151	.0078	.0040	.0020	.0010	.0005
23	.0177	.0091	.0047	.0024	.0012	.0006
24	.0206	.0107	.0055	.0028	.0014	.0007
25	.0240	.0125	.0064	.0033	.0017	.0008
26	.0277	.0145	.0075	.0038	.0020	.0010
27	.0319	.0168	.0087	.0045	.0023	.0012
28	.0365	.0193	.0101	.0052	.0027	.0014
29	.0416	.0222	.0116	.0060	.0031	.0016
30	.0473	.0253	.0133	.0069	.0036	.0018
31	.0535	.0288	.0153	.0080	.0041	.0021
32	.0603	.0327	.0174	.0091	.0047	.0024
33	.0677	.0370	.0198	.0104	.0054	.0028
34	.0757	.0416	.0224	.0118	.0062	.0032
35	.0844	.0467	.0253	.0134	.0070	.0036
36	.0938	.0523	.0284	.0152	.0080	.0042

CONTINUACION TABLA D

a \ N	15	16	17	18	19	20
37	.1039	.0583	.0319	.0171	.0090	.0047
38	.1147	.0649	.0357	.0192	.0102	.0053
39	.1262	.0719	.0398	.0216	.0115	.0060
40	.1384	.0795	.0443	.0241	.0129	.0068
41	.1514	.0877	.0492	.0269	.0145	.0077
42	.1651	.0964	.0544	.0300	.0162	.0086
43	.1796	.1057	.0601	.0333	.0180	.0096
44	.1947	.1156	.0662	.0368	.0201	.0107
45	.2106	.1261	.0727	.0407	.0223	.0120
46	.2271	.1372	.0797	.0449	.0247	.0133
47	.2444	.1489	.0871	.0494	.0273	.0148
48	.2622	.1613	.0950	.0542	.0301	.0164
49	.2807	.1742	.1034	.0594	.0331	.0181
50	.2997	.1877	.1123	.0649	.0364	.0200
51	.3193	.2019	.1218	.0708	.0399	.0220
52	.3394	.2166	.1317	.0770	.0437	.0242
53	.3599	.2319	.1421	.0837	.0478	.0266
54	.3808	.2477	.1530	.0907	.0521	.0291
55	.4020	.2641	.1645	.0982	.0567	.0319
56	.4235	.2809	.1764	.1061	.0616	.0348
57	.4452	.2983	.1889	.1144	.0668	.0379
58	.4670	.3161	.2019	.1231	.0723	.0413

CONTINUACION TABLA D

a \ N	15	16	17	18	19	20
59	.4890	.3343	.2153	.1323	.0782	.0448
60	.5110	.3529	.2293	.1419	.0844	.0487
61	.5330	.3718	.2437	.1519	.0909	.0527
62	.5548	.3910	.2585	.1624	.0978	.0570
63	.5765	.4104	.2738	.1733	.1051	.0615
64	.5980	.4301	.2895	.1846	.1127	.0664
65	.6192	.4500	.3056	.1964	.1206	.0715
66	.6401	.4699	.3221	.2086	.1290	.0768
67	.6606	.4900	.3389	.2211	.1377	.0825
68	.6807	.5100	.3559	.2341	.1467	.0884
69	.7003	.5301	.3733	.2475	.1562	.0947
70	.7193	.5500	.3910	.2613	.1660	.1012
71	.7378	.5699	.4088	.2754	.1762	.1081
72	.7556	.5896	.4268	.2899	.1868	.1153
73	.7729	.6090	.4450	.3047	.1977	.1227
74	.7894	.6282	.4633	.3198	.2090	.1305
75	.8053	.6471	.4816	.3353	.2207	.1387
76	.8204	.6657	.5000	.3509	.2327	.1471
77	.8349	.6839	.5184	.3669	.2450	.1559
78	.8486	.7017	.5367	.3830	.2576	.1650
79	.8616	.7191	.5550	.3994	.2706	.1744
80	.8738	.7359	.5732	.4159	.2839	.1841

CONTINUACION TABLA D

N / a	15	16	17	18	19	20
81	.8853	.7523	.5912	.4325	.2974	.1942
82	.8961	.7681	.6090	.4493	.3113	.2045
83	.9062	.7864	.6267	.4661	.3254	.2152
84	.9156	.7981	.6441	.4831	.3397	.2262
85	.9243	.8123	.6611	.5000	.3543	.2375
86	.9323	.8258	.6779	.5169	.3690	.2490
87	.9397	.8387	.6944	.5339	.3840	.2608
88	.9465	.8511	.7105	.5507	.3991	.2729
89	.9527	.8628	.7262	.5672	.4144	.2853
90	.9584	.8739	.7415	.5841	.4298	.2979
91	.9635	.8844	.7563	.6006	.4453	.3108
92	.9681	.8943	.7707	.6170	.4609	.3238
93	.9723	.9036	.7847	.6331	.4765	.3371
94	.9760	.9123	.7981	.6491	.4922	.3506
95	.9794	.9205	.8111	.6647	.5078	.3643
96	.9823	.9281	.8236	.6802	.5235	.3781
97	.9849	.9351	.8355	.6953	.5391	.3921
98	.9872	.9417	.8470	.7101	.5547	.4062
99	.9892	.9477	.8579	.7246	.5702	.4204
100	.9910	.9533	.8683	.7387	.5856	.4347
101	.9925	.9584	.8782	.7525	.6009	.4492
102	.9938	.9630	.8877	.7659	.6160	.4636
103	.9949	.9673	.8966	.7789	.6310	.4782
104	.9958	.9712	.9050	.7914	.6457	.4927
105	.9966	.9747	.9129	.8036	.6603	.5073

nvdr.

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA ESTADISTICA.
Mood Alexander M., Gray Bill Franklin A.
2a. Edición. Editorial Aguilar. Madrid, 1972.

METODOS ESTADISTICOS.
Sn Edecor, George W.
5a. Edición en Inglés. Compañía Editorial Continental,S.A.
México, 1956.

INTRODUCTION TO PROBALITY AND STATISTIC.
Alder Henry L., Roessler Edward B.
4a. Edición. Editorial W. H. Freeman and Company.
San Francisco, E.E. U.U., 1968

NON PARAMETRICS-STATISTICAL.
Lehmann E. L.
4a. Edición.
Editorial Columbia University, New York, 1970.