T
512.934
L177a
1966
c. Ing. Arq.
Ej. 1

?70008

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Facultad de Ingeniería y Arquitectura

APLICACION DE MATRICES A LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Tesis presentada por
RICARDO LAGOS M.,
Previa a la opción del título de
INGENIERO CIVIL

Universidad de El Salvador
Biblioteca Central
San Salvador, El Salvador, C. A.

octubre 1966

EL SALVADOR, C. A.

T-513.83
E177
1966

Ej. 1

UES BIBLIOTECA CENTRAL
INVENTARIO: 10123588

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

Dr. Fabio Castillo Figueroa

SECRETARIO GENERAL:

Dr. Mario Flores Macall

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO:

Ing. León E. Cuéllar

SECRETARIO:

Ing. Alonso Garcia Rivera

DIRECTOR DE LA ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL:

Ing. Roberto Parker

JURADO EXAMINADOR PRIVADO "B"

Ing. Jorge E. Campos

Ing. Ernesto E. Kury

Ing. Roberto Mayén V.

JURADO EXAMINADOR PRIVADO "A"

Ing. Guido Armando Lucha

Ing. Ricardo Martínez G.

Ing. Carlos Manuel Arita U.

JURADO REVISOR DE TESIS:

Ing. Rodolfo Morales M.

Ing. Carlos Manuel Arita U.

Ing. Guido Armando Lucha

AL UNO Y TRINO

A mis padres: CARMEN y *ALFREDO*

A Ali

A Heidi

P R O L O G O

Mi deseo al comenzar este trabajo fue el de dar a conocer una de las múltiples aplicaciones de las matrices.

Mi trabajo en el Departamento de Matemáticas me hizo ver que en la Facultad de Ingeniería hasta el año de 1964 no se enseñaban las matrices; cuando el Ing. Rodolfo Morales funda el Departamento de Matemáticas él inicia una revolución y entre sus consecuencias fue el de mostrar a los alumnos, incipientes conocimientos de matrices a través de los profesores del Departamento, personal al cual tengo el honor de pertenecer. Es por eso que me decidí a escribir sobre un tema tan apasionante, tratando de mostrar lo más sencillo para lograr despertar interés en la profesión por este tópico.

Como se menciona al final, los avances de la técnica moderna, atañen a todas las profesiones, Ingeniería no puede quedarse atrás. Las computadoras electrónicas son un arma común para el Ingeniero y para poder manejarlas es necesario tener conocimientos de lo -- que son las matrices

Como puede verse, esta obra no es un tratado profundo de las matrices, más bien es una introducción al conocimiento y aplicación de ellas, en sí mi intención ha sido "popularizar" el conocimiento de las matrices.

CAPITULO I

ALGEBRA ELEMENTAL DE MATRICES

1 - Introducción:

En esta sección hablaremos de las operaciones del Algebra matricial y notación. Trataremos de dar estos en forma sencilla, aunque el lector debería de refrescar sus conocimientos en lo que respecta a las sumatorias y términos generales de sucesiones.

2 - Definición de Matriz:

Un arreglo en filas y columnas de números reales o complejos, es lo que llamamos matriz. Un arreglo de estas sería el siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Este es un arreglo con "m" filas y "n" columnas. Cualquier cantidad en la matriz se llama elemento y puede ser función Real o Compleja de ciertas variables. Encerraremos los elementos que forman la matriz entre corchetes, otros usan doble línea vertical ||, o paréntesis ( ). Vemos que hay dos números subíndices con cada elemento, el primero nos representará la fila que él ocupa y el segundo, la columna; así, el elemento a_{37} ocupa la fila 3 y la columna 7; y, en general el elemento a_{ij} ocupa la fila $\underline{i}$ y la columna $\underline{j}$. Este elemento a_{ij} nos representa cualquier elemento de la matriz, por lo tanto es el término general de la matriz. Escribiremos entonces en forma sintetizada a la matriz A en la forma si guiente: $A = [a_{ij}]$ mn, en lugar de la escritura inicial. La matriz mencionada al principio, tenía m columnas y n filas, se llamará matriz de orden (m,n) ó matriz m x n. Si m = n la matriz se llama matriz cuadrada de orden m ó n.

Si en una matriz las filas las pasamos a columnas y las columnas a filas, la matriz así obtenida se llama matriz transpuesta, de la matriz original. Es decir si $A = [a_{ij}]$ mn, transponiendo, las filas pasan a columnas y viceversa. Se escribe así A^t ó A' entonces:

$$A' = [a_{ji}] \text{ nm}$$

3 - Principales Tipos de Matrices

a) Matriz Vector Columna: Es una matriz con una sola columna, su órden es (m, 1). Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [b_{i1}]_{m1}$$

ó

$$B = [b_{11} \; b_{21} \; \ldots . b_{m1}]$$ para ahorrar espacio.

b) Matriz Vector fila. Es una matriz con una sola fila, su órden es (1,n)

$$C = [c_{11}, c_{12}, c_{13} \; \ldots . c_{1n}] = [c_{1j}]_{1n}$$

c) Matriz Diagonal: En ella los elementos de la diagonal principal, que es la que corre de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, son los únicos diferentes de cero. Es decir $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$\text{Eje. } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

d) Matriz Unitaria: Es una matriz diagonal, con la característica que los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad, es decir: $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$; pero $a_{ij} = 1$ si $i = j$.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Unitaria de tercer órden

e) Matriz Cero: Es una matriz rectangular (m,n) en la cual todos los elementos son iguales a cero.

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ Matriz cero, órden(3,4)}$$

4 - Operaciones con Matrices:

a) Igualdad de matrices:

Este concepto es sencillo, pero de mucha importancia en Algebra matricial. Dos matrices $[a_{ij}]mn$ y $[b_{ij}]mn$, son iguales si y solo sí $a_{ij} = b_{ij}$ para todos los valores i y j. En otra forma: Dos matrices son iguales sí y solo sí, ellas tienen el mismo órden y sus correspondientes elementos son iguales.

Ej: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

b) Suma: La suma de matrices solo está definida para matrices del mismo orden. Si $[a_{ij}]$ y $[b_{ij}]$ son matrices del mismo órden, entonces la suma $[a_{ij}] + [b_{ij}]$ es una matriz $[c_{ij}]$ cuyo elemento típico es $[c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ es decir:

$$A + B = C \text{ ó } [a_{ij}]\, mn + [b_{ij}]\, mn = [c_{ij}]\, mn = [a_{ij} + b_{ij}]mn$$

Ej: $\begin{bmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 1+t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+t & -2 \\ -3 & 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Dos matrices del mismo orden se llaman conformes para la suma.

La suma de matrices es una operación asociativa y conmutativa:

Asociativa : $(A + B) + C = A + (B + C)$

Conmutativa: $A + B = B + A$

c) Resta

Si A y B son matrices del mismo órden, entonces la resta A-B se define - como otra matriz D del mismo órden que A y B dada por:

$$D = A - B$$

$$[d_{ij}] = [a_{ij}] - [b_{ij}]$$

$$[d_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$$

$$Ej: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

d) <u>Multiplicación de Matrices</u>

1) Multiplicación de una matriz por un escalar:

Por definición la multiplicación de una matriz $A = [a_{ij}]$ por un escalar k se efectúa multiplicando todos los elementos de A por el número k y se obtiene una matriz cuyos elementos son

$$B = K\,A$$

$$[b_{ij}] = K\,[a_{ij}]$$

$$[b_{ij}] = [Ka_{ij}]$$

$$Ej:\ 3\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 3 & 6 \\ 6 & -3 & 18 \end{bmatrix}$$

2) <u>Multiplicación de una matriz por otra matriz.</u>

La definición de la operación de que vamos a hablar se ha hecho a fin de facilitar las operaciones que involucran transformaciones lineales.

La multiplicación de dos matrices está definida solamente cuando el número de columnas de la primer matriz es igual al número de filas de la segunda matriz. Si $A = [a_{ij}]_{mn}$ y $B = [b_{ij}]_{pq}$ son dos matrices, el producto AB no está definido a menos que $n = p$, si esto sucede las matrices se llaman <u>conformes</u> para la multiplicación. Sólo las matrices conformes se pueden multiplicar.

<u>Definición de Multiplicación.</u>

Pasemos a dar una definición de producto matricial auxiliador de un ejemplo $A.B = C$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_{18} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

Estas dos matrices son conformes.

Consideremos que la primer matriz está formada por vectores filas y que la segunda está formada por vectores columnas.

Tomemos el primer vector fila de A y efectuemos el producto escalar (recordemos los vectores) de este vector fila por todos los vectores columnas de la segunda matriz, estos productos nos darán números como nosotros sabemos ya, siendo cada uno de estos números el resultado de la suma de - productos entre los componentes de cada vector. Ahora bien, el primer valor obtenido, es decir, el producto escalar del primer vector fila por el primer vector columna, nos dará el elemento situado en la primera fila y primera columna de la matriz C o sea C_{11}, el resultado del primer vector fila por el segundo vector columna nos dará el elemento situado en la primera fila y segunda columna o sea C_{12}. Para obtener el C_{21} tomamos el segundo vector fila y lo multiplicamos escalarmente por el primer vector columna, etc.

Podemos considerar entonces que la multiplicación de matrices es una serie de productos escalares, entre los vectores filas de la primer matriz y los vectores columnas de la segunda matriz.

Realizando la operación A.B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}) \\ (a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}) & (a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}) \end{bmatrix}$$

1er Vector fila: $a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}$

1er Vector Col : $b_{11} \quad b_{21} \quad b_{31}$

Producto Escalar: $a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13}\, b_{31} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, b_{kj}$

Vemos aquí lo mencionado en el párrafo anterior. Como cada elemento es una suma lo podemos representar simbólicamente. En general el elemento situado en la fila i fila y j columna ó sea C_{ij} será el producto escalar del vector fila situado en la i fila por el vector columna situado en la j columna:

i fila: $a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3}$

j Col $\quad b_{1j} \quad b_{2j} \quad b_{3j}$

$$C_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + a_{i3}\, b_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, b_{kj}$$

Ya con lo dicho pasamos a dar la definición de producto de dos matrices:

El producto de dos matrices A y B, dónde $A = [a_{ij}]_{mp}$ y $B = [b_{ij}]_{pn}$ es una matriz $C = [c_{ij}]_{mn}$ tal que:

$$[C_{ij}] = [a_{ij}]_{mp} \cdot [b_{ij}]_{pn}$$

donde:

$$C_{ij} = \sum_{h=1}^{p} a_{ih}\, b_{hj}$$

Es decir: $[a_{ij}]_{mp} \cdot [b_{ij}]_{pn} = \left[\sum_{h=1}^{p} a_{ih}\, b_{hj}\right]_{mn}$

La matriz C es de orden (m,n), y A era de orden (m,p) y B de orden (p,n); esto lo podemos expresar simbólicamente:

$$(m,p)(p,n) = (m,n)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 6 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+10+0) & (4+5-8) \\ (6+2+0) & (12+1+20) \\ (2+2+0) & (4+1+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 8 & 33 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

La multiplicación de matrices no es conmutativa, salvo algunos casos, que son la excepción, es decir:

$$AB \neq BA$$

Podemos comprobar esto por un análisis directo, viendo la conformidad de la multiplicación en ambos sentidos. Exepto que las matrices sean cuadradas, ellas no pueden multiplicarse en ambos sentidos, es decir en general. $AB \neq BA$

La matriz unitaria I, forma un producto conmutativo con cualquier matriz cuadrada del mismo orden. $I.A = A.I$

Puede comprobarse que: $AI = IA = A$

Producto Continuado:

Las leyes del álgebra ordinaria se satisfacen en el algebra matricial, excepto la Ley Conmutativa. Ley Asociativa:

$$(AB)\ C = A\ (BC) = D$$

$$[d_{ij}]_{mn} = [a_{ij}]_{mp} \cdot [b_{ij}]_{pq} \cdot [c_{ij}]_{qn}$$

$$d_{ij} = \sum_{h=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kh} c_{hj}$$

En todas las matrices debe existir conformidad para la multiplicación en cadena.

5 - Potencia de una matriz

Si una matriz A es multiplicada por sí misma P veces, el resultado será A^P

$$A^P = A.A \ldots\ldots\ldots A \quad p \text{ veces}$$

6 - División Matricial - Matriz inversa

Cuando nosotros trabajamos con cantidades algebraicas y tenemos que $a.x=1$ decimos que x es el inverso de a y esto lo escribimos así:

$$x = \frac{1}{a} = a^{-1}$$

Hemos mencionado la matriz unitaria, ésta hace las veces del 1 en el álgebra ordinaria, es decir que:

$$IA = AI = A$$

La semejanza con el Algebra es:

$$1.a = a.1 = a$$

a) <u>La matriz inversa</u>

Dada una matriz A cuadrada y una matriz unitaria I del mismo orden, entonces puede encontrarse una matriz X tal que:

$$A.X = I$$

Decimos que X es la matriz inversa de A y se escribe asi:

$$X = A^{-1}$$

Antes de dar una forma general para hallar la matriz inversa de orden N, vamos a estudiar el caso de una matriz de 2°orden y calcular su matriz inversa:

$$\text{Sea} \qquad A = [a_{ij}]_{2.2}$$

$$\text{es decir } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vamos a buscar una matriz X tal que:

$$AX = I$$

$$\text{donde} \qquad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

Los elementos a_{ij} son elementos conocidos y las x_{ij} son los elementos buscados.

Efectuando:
AX

$$\begin{bmatrix} (a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21}) & (a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22}) \\ (a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21}) & (a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquí tenemos dos matrices relacionadas por el signo igual, para que esto - se sostenga, los elementos correspondientes deben ser iguales:

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{array}$$

Dos sistemas de ecuaciones independientes, cada una con dos incógnitas, resolviendo estos sistemas de ecuaciones llegamos a lo siguiente:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{12}x_{21} = 0 \end{array} \qquad x_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad x_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Observando vemos que todos los denominadores son iguales llamémosle a este denominador común: D

$$x_{11} = \frac{a_{22}}{D} \qquad x_{21} = \frac{-a_{21}}{D}$$

$$x_{12} = \frac{-a_{12}}{D} \qquad x_{22} = \frac{a_{11}}{D}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{D} & -\frac{a_{12}}{D} \\ \frac{-a_{21}}{D} & \frac{a_{11}}{D} \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Ya tenemos una regla general para hallar la matriz inversa de 2o. orden Para que la matriz inversa esté definida, este valor de D debe ser una - cantidad distinta de cero. Para hallarlo se efectúan los productos cruzados de los elementos de la matriz A, el producto positivo es el de los elementos de la diagonal principal. Si observamos como han quedado los elementos de la matriz inversa, se puede ver que los elementos de la diagonal secundaria sólo han cambiado de signo y que el resto de los elementos han alterado su posición de tal manera cual si hubieran girado alrededor de la diagonal secundaria.

Si tuviésemos una matriz de tercer orden tendremos una matriz X con nueve incógnitas, las que podemos resolverlas; pero este es un trabajo tedioso.

7 - Determinantes

Para definir completamente el concepto, necesitamos recordar lo que es Determinante, daremos una pasada a vuelo de pájaro para recordar someramente sus propiedades más importantes:

a) Definición y notación: El determinante es un número asociado a cada matriz cuadrada, y escribimos determinante de la matriz A, encerrando a la matriz A entre barras verticales: det A = $|A|$ ó

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

b) Evaluación de Determinantes:

Hay varios métodos: por cofactores, por reducción a cero, por condensación, etc. El que recordaremos es el método por cofactores

El cofactor de un elemento es un menor con signo.

Menor de un elemento, es el determinante que queda al quitar la fila y la columna del elemento considerado, el cofactor de un elemento dijimos que es un menor con signo, este signo será + ó -, según si la suma de los subíndices del elemento sean par o impar.

Ej:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

El cofactor del elemento situado en 2a. fila y 3a. columna. lo escribimos así A_{23} lleva signo menos, porque 2 + 3 es impar.

A_{22} signo más porque 2+2 = par.

La expansión de un determinante de 3er. orden, se efectuará tomando los elementos de una fila (o columna) multiplicándolas respectivamente por sus correspondientes cofactores y luego sumar estos productos.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Por cofactores de la primer fila:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Por cofactores de la 2a. columna:

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$|A| = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Se puede comprobar que si tomamos elementos de una fila y los multiplicamos por los cofactores de otra fila, y luego estos productos los sumamos, el resultado es igual a cero, diremos al recordar esta propiedad:

Desarrollo por cofactores ajenos es igual a cero

Con lo poco que hemos dicho de determinantes, pasaremos a seguir estudiando la matriz inversa.

8 - Matriz Singular y no Singular

Una matriz cuadrada se llama singular si su determinante es igual a cero. Si no es igual a cero, entonces se llama matriz no singular. En el primer caso la matriz no tiene inversa; en el segundo caso sí tiene.

9 - Matriz Adjunta

Sea A una matriz de orden n x n; $A = [a_{ij}]_{nn}$

Formemos otra matriz a partir de ésta, cuyos elementos sean los cofactores de A, así:

$$\text{Cof. } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{nn} \end{bmatrix}$$

transpongamos los elementos de esta matriz, es decir pasemos las filas a columnas y viceversa, la matriz obtenida se llama Adjunta de A:

$$\text{Adj. } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix} ; \text{ Adj. } A = [A_{ji}]_{nn}$$

Efectuemos la operación: A. adj. A:

El resultado al que llegaremos será el siguiente:

$$A.\text{adj}.A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & |A| & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & |A| \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & |A| \end{bmatrix}$$

En los elementos donde $i \neq j$, el valor es cero; porque tuvimos desarrollo por cofactores ajenos y en los elementos de la diagonal $(i = j)$, el resultado fue $|A|$ por tener desarrollo por cofactores propios. Podemos comprobarlo, efectuando la multiplicación.

Continuemos:

$$A.\ \text{adj } A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = |A|\ .\ I$$

$$A.\ \text{adj } A = |A|\ .\ I$$

$$A.\ \frac{\text{adj } A}{|A|} = I$$

llamemos a $\frac{\text{adj } A}{A} = B$, tendremos $A.B = I$, esta es una ecuación semejante a: $a.x = 1$, puesto que la matriz I tiene un oficio semejante al número 1, entonces B se llamará matriz inversa de A y podremos escribir: $B = A^{-1}$ es decir:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{|A|}\ \text{adj } A\ ;\ |A| \neq 0$$

Esta es la expresión que nos permite calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada de orden n.

10 - Soluciones de Ecuaciones Lineales por el uso de la Matriz inversa, Regla de Cramer.

Analizemos dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Utilizando la multiplicación de matrices, el sistema anterior lo podemos - representar así:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Efectuemos la multiplicación y llegaremos al mismo resultado que las igualdades antes propuestas:

A la primer matriz se le llama matriz coeficiente

Si ahora se nos presenta el caso de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Lo podemos escribir así:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}$$

La primer matriz será llamada A, a la 2a. matriz le diremos X ó matriz incógnita y a la 3er. matriz, le llamaremos B, con esto la igualdad quedará así:

$$AX = B$$

ahora bien; nuesto interés es conocer los valores de las x_i es decir los elementos de la matriz X, si lográramos quitar la matriz A del lado de A ya estaría resuelto el problema, porque estaría despejada X.

Si recordamos el uso y propiedades de la matriz inversa y de la matriz unitaria, podemos realizar lo deseado, sabemos que si E es una matriz cuadrada no singular: $E.E^{-1} = I$ y que $I.E = E.I = E$, donde E^{-1} es la matriz inversa de E e I es la matriz unitaria o matriz identidad,
Pasemos a la igualdad de nuestro problema:

$$AX = B$$

Si premultiplicamos ambos lados de la igualdad por A^{-1} la igualdad se sostiene:

$$A^{-1}(A.X) = A^{-1}B$$

pero $A^{-1}(A.X) = (A^{-1}A)X$

recordando $A^{-1}.A = I$

entonces $(A^{-1}.A)\ X = IX$

pero $IX = X$

por lo tanto $A^{-1}(A.X) = A^{-1}.B$

es igual a: $X = A^{-1}.B = \frac{1}{|A|}\ \text{adj}\ A.B$

B = AX

Efectuemos la operación: adj A.B

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}) \\ (b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn}) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} (b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}) \\ (b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (b_1A_{1n} + \ldots\ldots\ldots + b_nA_{nn}) \end{bmatrix}$$

de donde, por el principio de igualdad de matrices:

$$X_1 = \frac{1}{|A|}\,(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + b_nA_{n1})$$

$$X_2 = \frac{1}{|A|}\,(b_1A_{12} + b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdot\cdot\cdot + b_nA_{n2})$$

etc.

si observamos detenidamente en el valor de x_1 la suma de términos dentro del paréntesis, tenemos todas las b_i multiplicadas por los cofactores de la primer columna de A, quiere decir que las b_i han venido a sustituir a la primer columna del determinante de la matriz A,

entonces:

$$X_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdot & & & \vdots \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ b_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

para el caso de la x_2, los cofactores que aparecen son los de la 2a. columna y por un razonamiento análogo:

$$x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & b_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Hemos hallado una ley que nos permite calcular incógnitas de un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas.

La Regla podría enunciarse así:

"" La solución de cualquier variable en un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, es un quebrado cuyo denominador es el determinante de la matriz coeficiente y el numerador otro determinante - que se obtiene sustituyendo la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita deseada por el vector columna de los términos independientes"".

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 1 \\ 3x - 2y + z &= 2 \\ -2z + y - z &= 5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} ; \quad |A| = -5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{-5} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-5}$$

luego

$$x = \frac{28}{-5} \qquad y = \frac{63}{-5} \qquad x = \frac{32}{-5}$$

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
Biblioteca Central
SAN SALVADOR
EL SALVADOR, C. A.

Esta es la Regla de Cramer para solución de ecuaciones.

11 - Ecuaciones Lineales Homogéneas.

Si los términos indenendientes son iguales a cero, en un sistema de ecuaciones lineales, entonces las ecuaciones son ecuaciones homogéneas, y podríamos escribir el sistema así:

$$AX = 0$$

Pueden existir dos casos en las ecuaciones homogéneas

(1) si $|A| = 0$

(2) si $|A| = \neq 0$

/

Discutiremos ambos casos:

a) Caso: en el cual $|A| \neq 0$

En este caso A es matriz no singular, por lo tanto existe la inversa A^{-1} y en las soluciones son:

$$X = A^{-1}.0 = 0$$

y la solución será :

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ Llamada solución trivial

b) Caso: cuando $|A| = 0$, sunondremos que al menos un cofactor $C_{hk} \neq 0$ para algún valor de h y k.

Consideremos la k-ésima ecuación del sistema:

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 \ldots + a_{kn} x_n = 0$$

Supongamos el caso que $x_1 = tC_{h1}$, $x_2 = tC_{h2}$, $x_n = tC_{hn}$ donde C_{hj} es el cofactor de cualquier elemento de la fila h, entonces la ecuación anterior será:

$$a_{k1} tC_{h1} + a_{k2} tC_{h2} + \ldots + a_{kn} tC_{hn} = 0$$

$$t(a_{ki} Ch1 + a_{k2} Ch2 + \ldots + a_{kn} C_{hn}) = 0,$$

donde t es cualquier constante, sabemos que el paréntesis es igual a cero, puesto que aquí tenemos elementos de la fila k y cofactores de la fila h, recordando que desarrollo por cofactores ajenos es igual a cero; y aún, la igualdad se sostendría cuando h = k, puesto que por hipótesis $|A| = 0$

Vemos pues que si $|A| = 0$, la ecuación homogénea tiene multitud de soluciones, puesto que h puede tomar valores entre 1 ó n y t es un número completamente arbitrario

El hecho de que las ecuaciones homogéneas posean soluciones diferentes de cero, es de gran importancia en muchos problemas de matemáticas aplicada.

12 - Relaciones con el Algebra Escalar

Hay que agregar que en el algebra matricial existen ciertas diferencias con el Algebra ordinaria. Por ejemplo si a.b = 0 esto es verdadero si y sólo sí $a = 0$ ó $b = 0$. Sin embargo en Algebra matricial, sí $A.B = 0$ es suficiente que $A = 0$ ó $B = 0$ pero no necesario

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En Algebra ordinaria si $ab = ad$ entonces $b = d$, si $a \neq 0$. Sin embargo en Algebra matricial, si $AB = A.D$ y $A \neq 0$ no podemos decir que $B = D$.

Por Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Pero

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si $AB = AD$, $|A| \neq 0$ entonces podemos premultiplicar a ambos lados de la igualdad por A^{-1} y obtener $B = D$.

Si se nos presenta la ecuación $AB = CD$ y $|A| \neq 0$, entonces podemos premultiplicar a ambos lados de la igualdad y obtener:

$$B = A^{-1}.C.D.$$

13 - Potencia Negativas de una Matriz

Si A es una matriz no singular, o sea $|A| \neq 0$, podemos entonces definir las potencias negativas de A, utilizando A^{-1}, y elevando A^{-1} a potencias positivas.

Por definición:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n \quad n = 0, 1, 2, 3.....$$

CAPITULO II

LA ECUACION CARACTERISTICA DE UNA MATRIZ

1 - Introducción

En estructuras sólidas, tales como puentes, las alas de un aeroplano,etc., el estudio de vibraciones o el estudio de las perturbaciones seculares en astronomía, nos conducen a lo que conocemos en matrices como: autovalores o autovectores.

También recibe el nombre de valor característico, vector característico, estos nombres son los más usados.
También se usa el adjetivo "latente". Otros usan valores de Eigen o vectores de Eigen, derivado del alemán Eigenwert.

2 - El Autovalor de una Matriz:

Supongamos que A es una matriz cuadrada $\underline{n} \times \underline{n}$ y X una matriz vector columna de orden (n x 1) multipliquemos A por X, esto nos generará una matriz Y de orden $\underline{n} \times \underline{1}$ como ya sabemos, es decir: $AX = Y$.

El vector Y puede o no, ser de la misma dirección que $\underline{X}$. Si tiene la misma dirección que $\underline{X}$ entonces diremos que Y es un vector proporcional a X, podrá tener su misma longitud o no, y aún tener sentido opuesto. Sabemos que si entre dos vectores existe una relación como la mencionada, podemos comparar estos dos vectores por la igualdad de la manera siguiente: $\vec{u} = K\vec{v}$ donde $\underline{\vec{u}}$ y $\underline{\vec{v}}$ son dos vectores con igual dirección, es decir son paralelos, pueden - tener diferente magnitud y sentido.

Por lo tanto la relación AX = Y podemos escribirla así: AX = kX donde Y = kX si Y es paralelo a X.

Nos interesa conocer k y los vectores X

Escribamos la ecuación anterior en notación expandida:

$$A.X = kX$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ kx_n \end{bmatrix}$$

efectuando la multiplicación:

$$\begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \\ \\ kx_n \end{bmatrix}$$

restando

$$\begin{bmatrix} (a_{11}-k)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-k)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-k)x_n \end{bmatrix} = 0$$

Esta ecuación matricial nos hace llegar a n ecuaciones homogéneas con n incógnitas:

$$
\begin{aligned}
(a_{11} - k)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{12}x_1 + (a_{22} - k)x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + (a_{nn} - k)x_n &= 0
\end{aligned}
$$

Cuando se presenta este caso, como recordaremos, existen dos posibilidades:

1 - Que el determinante del sistema sea diferente de cero

2 - Que el determinante del sistema sea igual a cero.

En el primer caso, la solución es trivial, obvia: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ y no existe el vector Y, puesto que $k = 0$. En el segundo caso habrá valores de k, con los que determinaremos el vector Y, es decir si:

$$
\begin{vmatrix}
(a_{11} - k) & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\
a_{21} & (a_{22} - k) \ldots & a_{2n} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
a_{n1} & a_{n2} & (a_{nn} - k)
\end{vmatrix} = 0
$$

entonces existe el vector Y.

Los elementos del determinante anterior forman una matriz del siguiente tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} - k. \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = [A-kI]$$

Es decir que el determinante de la matriz anterior lo podemos escribir así:

$$| A - kI |$$

La expansión de $|A - kI| = 0$ se convierte en un polinomio homogéneo de <u>n</u> grado, al que le podemos llamar <u>polinomio en k</u> ó <u>f(k)</u>; a este polinomio se le denomina <u>polinomio característico</u> de la matriz A.

De la teoría de ecuaciones sabemos que una ecuación de <u>n</u> grado, tiene <u>n</u> raíces (reales ó complejas), por lo tanto $f(k) = 0$ tendrá <u>n</u> raíces a estas raíces se les llaman <u>raíces características</u>, <u>valores seculares</u>, <u>valores latentes</u> o <u>valores Eigen</u> de A.

La ecuación $AX = lX$ se puede escribir así:

$$AX - kX = 0$$

$$(A - kI)\,X = 0$$

Con cada raíz característica (o autovalor) la ecuación $(A-kI) = 0$ tiene soluciones no triviales, cada vector X que se obtiene es llamado <u>Vector característico</u>.

Ejemplo:

Encontrar los autovalores y los autovectores de A.

Sea $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>Solución</u>:

La ecuación característica es: $|A-kI| = 0$

o sea: $$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 5 & 4-k \end{vmatrix} = k^2 - 5k - 6 = 0$$

Resolviendo obtenemos $\underline{k_1 = 6 \quad k_2 = -1}$

Vamos a formar los autovectores con los valores característicos hallados.

Planteando la ecuación: $(A-kI)X = 0$.

Con $k_1 = 6$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} -6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Efectuando: $$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_1+2x_2 \\ 5x_1-2x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-5x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{5}x_2 \quad \text{si} \quad x_2 = 5 \quad \text{entonces } x_1 = 2$$

El primer autovector será: $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Y con $k = 1$, de igual manera $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ya encontramos los autovectores.

3 - Discusión Algebraica de los Autovalores:

La ecuación $A - KI = 0$, hemos mencionado, que es una ecuación de orden n, y se puede demostrar que este polinomio es:

$$f(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + . . . + a_n$$

$$f(k) = |A - KI| = 0$$

Por Algebra sabemos que esta es una ecuación que tiene n raíces (reales o complejas)

Si en $f(k)$ hacemos $k = 0$, entonces

$f(0) = a_n$ pero $f(k) = |A-KI|$ será $|A-0I| = |A|$

entonces $a_n = |A|$ es decir, el término independiente de $f(k)$ es el determinante de A.

Sabemos que si: $k_1, k_2, . . ., k_n$ son las raíces de $f(k)$ se puede colocar $f(k) = (k_1 -k)(k_2-k). . . (k_n-k) = 0$

Si en esta ecuación hacemos $k = 0$, entonces

$$f(0) = k_1.k_2.k_3 \; . \; . \; . \; k_n =$$

$$|A| = k_1.k_2.k_3 \; . \; . \; . \; k_n$$

El producto de los autovalores de una matriz es igual al determinante de la matriz.

Para seguir estudiando los autovalores, tomaremos una matriz de tercer orden y calcularemos su ecuación característica: sea $A = [a_{ij}]_{mm}$ su ecuación característica es:

$$| A - KI | = 0$$

Antes de continuar, por expansión podemos demostrar que si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Entonces $|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$
$-a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$.

Sigamos:

$$| A - kI | = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix}$$

Si expandimos este determinante, llegaremos a los resultados siguientes:

$$|A - kI| = (a_{11}-k)(a_{22}-k)(a_{33}-k) + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$

$$a_{13}\, a_{31}\, (a_{22}-k) - a_{12}\, a_{21}\, (a_{33}-k) - a_{23}\, a_{32}\, (a_{11}-k)$$

$$= (a_{11}-k)(a_{22}-k)(a_{33}-k) + k(a_{13}\, a_{31} + a_{12}\, a_{21} + a_{23}\, a_{32})$$

$$+ (a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{31}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

$$a_{11}\, a_{23} \cdot a_{32})$$

$$|A - kI| = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{31}\, a_{22}$$

$$a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}) - k(-a_{13}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21} - a_{23}\, a_{32}$$

$$+ a_{11}\, a_{33} + a_{22}\, a_{33} + a_{11}\, a_{22}) + k^2(a_{11} + a_{22} + a_{32}) - k^3$$

ó

$$|A - kI| = a_o + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3$$

vemos que $a_o = |A|$

y $a_3 = -1$

$a_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

Es importante notar que los términos que contienen k^3 y k^2 se obtuvieron del producto de los elementos de la diagonal principal. El coeficiente de k^2 es la suma de los elementos de la diagonal principal, a esta suma se le llama TRAZA ó SPUR. El coeficiente de k^3 es igual a -1, se ve que si n fuera el orden de la matriz, entonces $a_n = (-1)^n$. Este signo lo -

BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

lleva a_n ó a_o puesto que el polinomio está igualado a cero. Vemos un ejemplo para aclarar:

$$f(k) = 10 - 8k + 9k^2 = k^3 = 0$$

$$ó \quad k^3 - 9k^2 + 8k - 10 = 0$$

al multiplicar por -1 la ecuación.

Hay fórmulas que nos permiten calcular los coeficientes de la ecuación característica, sin necesidad de expandir el determinante de $|A - kI|$. Una de éstas, quizás la más sencilla es la fórmula de BOCHER:

"Sea A una matriz de orden n y S_n la traza de A^n , entonces los coeficientes de la ecuación f(k) serán:"

$$a_1 = - s_1$$

$$a_2 = - 1/2(a_1s_1 + s_2)$$

$$a_3 = - 1/3(a_2s_1 + a_1s_2 + s_3)$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$a_n = - 1/n(a_{n-1}k + a_{n-2}s_2 + . \ . \ . + a_1s_{n-1} + s_n)$$

Donde $f(k) = a_n + a_{n-1}k + . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . + a_1k^{n-1} + k_n$

recordando además que A^n = A.A.A. . . . A (n veces)

El determinante de A puede calcularse así:

$$|A| = (-1)^n a_n$$

C A P I T U L O III

SERIES MATRICIALES, DERIVACION, INTEGRACION

1 - Introducción

Veremos ahora las matrices como se comportan al ser consideradas desde el punto de vista del Algebra escalar.
Definiremos la diferenciación y la integración de matrices y más ad4lante entraremos a la solución de ecuaciones diferenciales con matrices.

2 - Polinomios matriciales

Vamos a hablar de ciertas funciones matriciales, pero antes veremos los polinomios matriciales.
En general en Algebra ordinaria f(x) (función de x) es un polinomio en x donde x es un número real o complejo:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \; . \; . \; . + a_n$$

Si en vez de que x sea una variable numérica, esta variable es una matriz A, (los coeficinetes a_i los mantenemos) además a_n lo multiplicamos por la matriz unitaria del mismo orden que A, entonces f(x) será:

$$f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \; \ldots \; . \; . + a_nI$$

f(A) es un polinomio, en la matriz A, de orden n. Se supone que los coeficientes del polinomio se conocen, por lo tanto f(A) se puede calcular.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ si $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

entonces: $f(A) = 3A^2 - 2A + AI$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= 3\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -10 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

3 - Series Infinitas.

En general el polinomio en A es:

$$f(A) = a_nI + a_{n-1}\ A + a_{n-2}A^2 + \ .\ .\ .\ .\ + a_oA^n$$

$$= \sum_{i=o}^{n} \quad a_{n-i}\ A^i$$

Si n = ∞ entonces la serie se vuelve infinita en términos.

$$f(A) = a_nI + a_{n-1}A + \ .\ .\ .\ .\ .\ . + = \sum_{i=o}^{\infty} \quad a_{n-i}A^i$$

Siendo $f(A) = \sum_{i=o}^{n} \quad a_{n}-i\ A^i$ entonces si f(A) tiende a una matriz límite, definida; cuando n se aproxime a infinito, a la serie se le llama convergente. Si la serie converge, define una función matricial.

Por analogía en las series infinitas algebráicas para ciertas funciones, definiremos estas funciones, con matrices:

Serie exponencial:

Algebraica $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Matricial $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$

Serie del Seno y Coseno

Algebraica $\text{Sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} +$

Matricial $\text{Sen } A = A - \frac{A^3}{3!} \quad \frac{A^5}{5!}$

Algebraica $\text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdot \ldots$

Matricial $\text{Cos } A = I - \frac{A^2}{2!} \quad \frac{A^4}{4!} - \ldots$

4 - Convergencia de series matriciales.

Dada la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = f(u)$, si f(u) se aproxima a un valor fijo c, entonces se dice que la serie es convergente. Es decir si:

$|f(u) - c| < \varepsilon$, ε es una cantidad arbitrariamente pequeña.

Para estudiar convergencia de series, nosotros estudiamos el comportamiento del término general, y a partir de esto, llegaremos a conclusiones respecto de la convergencia de la serie.

Todo lo anterior es hecho para series algebraicas. Para hablar de series matriciales, el análisis es muy difícil, pues el trabajo se remonta a la matemática pura. Así como en la serie algebraica, en las series matriciales, la convergencia se estudia analizando el enésimo término. Para este estudio, hablaremos de lo que llamaremos NORMA de una matriz.

a) Norma de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n x n, la norma de A llamada N(A) es la cantidad expresada por medio de la siguiente ecuación:

$$N(A) = \left[\text{Traza de } (AA')\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Donde A' es la transpuesta de A, y traza de A es la suma de los elementos contenidos en la diagonal de A. Recordemos que transpuesta de una matriz B es aquella matriz obtenida a partir de B cambiando las filas a columnas.

Caso Particular

Si $A = A'$ la matriz A se llama matriz simétrica.

Entonces $N(A) = \left[Tr(A.A')\right]^{1/2}$ pero $A = A'$

Luego $N(A) = \left[Tr(A^2)\right]^{1/2}$

Ej.: 1. sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ una matriz simétrica.}$$

$$A.A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \text{ una matriz general y } B' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B.B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2^2+7^2)+ & 67 & 80 \\ 67 & (3 +4^2+8^2) & 111 \\ 80 & 111 & (5^2+6^2 9^2 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse, en el producto BB', la traza es la suma de todos - los elementos de B cada uno elevado al cuadrado, es decir;

$$Tr\ (B.B') = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a^2{}_{ij}$$

Existen ciertas relaciones para la norma de una matriz, cuyas demostraciones no las haremos:

1 - $N(A + B) \leq N(A) + N(B)$

2 - $N(A.B) \leq N(A) \, . \, N(B)$

$$N(A^n) = N(A.A.\ldots.A) \leq N(A).N(A)\ldots\ldots N.(A)$$

luego 3 - $\quad N(A^n) \leq \left[N(A)\right]^n$

Ahora bien si $N(A) \leq 1$, el límite de $N(A^n)$ cuando $\underline{n}$ se aproxima a infinito es cero, esto es una consecuencia de 3.

Vamos ahora a estudiar la matriz I y la matriz kI(matriz escalar)

$$N(I) = \left[Tr(I.I')\right]^{1/2} = \left[Tr(I^2)\right]^{1/2} = \left[Tr(I)\right]^{1/2}$$

pero la traza de I es $1 + 1 + . . . + 1 = n$

luego:

$$\underline{N(I) = (n)^{1/2}}$$

$$N(kI) = \left[Tr(kI)(kI)'\right]^{1/2} = \left[Tr(kI)^2\right]^{1/2} = \left[Tr.k^2 I\right]^{1/2}$$

luego: $\quad \underline{N(kI) = k(n)^{1/2}}$

Ejemplo: $\quad kI = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}; (kI)' = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}; n = 3 ; k = 9$

$$(kI)(kI)' = \begin{bmatrix} 9^2 & 0 & 0 \\ 0 & 9^2 & 0 \\ 0 & 0 & 9^2 \end{bmatrix} = (kI)^2$$

$$N(kI)^2 = \left[Traza\ (kI)^2\right]^{1/2} = \left[9^2 + 9^2 + 9^2\right]^{1/2} = \left[9^2.3\right]^{1/2} = 9(3)^{1/2}$$

Para ver el uso de la norma como un criterio de convergencia, analizemos la serie geométrica:

Primero recordemos la algebraica:

$$s = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$$

$$sa = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n \text{; hallemos } \underline{s}$$

$$s - sa = 1 - a^n$$

$$s(1-a) = 1 - a^n$$

$$s = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

Esta es la suma de la serie geométrica, siempre que $\underline{a} \neq 1$.

Analizemos la serie geométrica matricial, vamos a encontrar su suma:

$$S = I + A \cdot A^2 + \ldots + A^{n-1} \quad \underline{\text{A de orden } \underline{m} \times \underline{m}}$$

$$SA = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n$$

$$S - SA = I - A^n$$

$$S(I-A) = I - A^n$$

Ahora sí $\quad |I - A| \neq 0$

$$S = (I - A^n)(I-A)^{-1} = (I-A)^{-1} - A^n(I-A)^{-1}$$

De aquí despejamos $(I-A)^{-1}$

$$(I-A)^{-1} = S + A^n(I-A)^{-1}$$

Si $N(A) = k$, vamos a analizar convergencia, supongamos que $k < 1$.

$$N(I-A)^{-1} = N\left[S + A^n(I-A)^{-1}\right] \leq N(S) + N\left[A^n(I-A)^{-1}\right]$$

$$N(I-A)^{-1} \leq N(S) + N(A^n)\ N(I-A)^{-1}$$

$$\leq N(S) + N(A)^n \ .\ N(I-A)^{-1}$$

pero $\quad N(S) = N(I+A+A^2+\ .\ .+A^{n-1})$

$$N(S) \leq N(I) + \left[N(A)\right] + \left[N(A)\right]^2 + \ .\ .\ .\ + \left[N(A)\right]^{n-1}$$

I. matriz de orden $\underline{m} \times \underline{m}$

$$N(I) = m^{1/2}\ ;\quad N(A) = k; \left[N(A)\right]^2 < k^2$$

entonces $\quad N(S) \leq m^{1/2} + k + k^2 + \ .\ .\ .\ + k^{n-1}$

sustituyendo en $N(I - A)^{-1}$ nos queda

$$N(I-A)^{-1} \leq m^{1/2} + k + k^2 + \ .\ .\ + k^{n-1} + k^n . N(I-A)^{-1}$$

restando a ambos lados $k^n N(I-A)^{-1}$

$$N(I-A)^{-1} - k^n N(I-A)^{-1} \leq m^{1/2} + k + k^2 + \ .\ .\ + k^{n-1}$$

el lado derecho es una serie geométrica.

$$(1-k^n)\ .\ N(I-A)^{-1} \leq m^{1/2} + \frac{1-k^n}{1-k}\ .\ k$$

entonces $\quad N(I-a)^{-1} \leq \dfrac{m^{1/2}}{1-k^n} + \dfrac{k}{1-k}$

Como $k < 1$ el límite de k^n cuando $\underline{n}$ se hace muy grande es cero, podemos decir que $k^n = 0$ por lo tanto

$$N(I - A)^{-1} \leq\ .\ m^{1/2} + \frac{k}{1-k}$$

<u>Concluimos</u>: cuando la norma de una matriz es menor que $\underline{1}$, la progresión geométrica matricial converge.

5 - Función Exponencial.

Por analogía con la serie algebraica exponencial tenemos la serie exponencial matricial; sea A una matriz cuadrada de orden n x n, entonces:

$$e^{A} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ . \ . \ . \ + \frac{A^n}{n!}$$

Puede demostrarse que esta serie es convergente para toda matriz A. Si A y B (dos matrices del mismo orden) son conmutativas, tal que AB = BA entonces: se puede tener:

$$e^{A} \ . \ e^{B} = e^{B} \ \ e^{A} = e^{A+B}$$

y también:

$$e^{A} \ . \ e^{-A} = e^{-A} \ . \ e^{A} = I$$

A e^{-A} le llamamos función inversa de e^{A}

6 - El Teorema de Cayley - Hamilton

Recordemos la ecuación característica f(k)

$$f(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_n$$

donde los diferentes k son los autovalores de la matriz A. Si en esta ecuación f(k), en lugar de k sustituímos por A la ecuación será·

$$f(A) = A^n + a_1A^{n-1} + . . . + a_nI$$

a esto le llamamos <u>función característica de A</u>. Relativo a esta función está el famoso Teorema de <u>Cayley - Hamilton.</u>

<u>Teorema</u>: $f(A) = 0$

Es sorprendente como un teorema tan famoso tenga una expresión tan sencilla. El teorema dicho de otro modo, sería así: <u>Toda matriz satisface su propia ecuación característica</u>. Es decir que si <u>B</u> es una matriz cuadrada y $k^2 + 3k - 5 = 0$ es su ecuación característica, entonces $A^2 + 3A - 5I$, también es igual a cero ó $f(A) = 0$.

Vamos ahora a demostrar el teorema:

$A - kI$ es la matriz característica, y llamemos <u>C</u> a la adjunta de $A - kI$, los cofactores de $A - kI$ a lo sumo son de orden n-1 en <u>k</u>, y estos son los elementos de <u>C</u>, por lo tanto podemos decir que los elementos <u>C</u> son al menos de n-1 grado en k.

Podemos entonces representar a <u>C</u> como un polinomio matricial:

$$C = C_o + C_1k + C_2k + . . . + C_{n-1}k^{n-1}$$

$$C = \sum_{i=o}^{n-1} C_ik^i$$

Ilustremos con un ejemplo

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad A - kI = \begin{bmatrix} 1-k & 4 & -1 \\ 2 & 2-k & 0 \\ 0 & 1 & 4-k \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8-6k+k^2 & (4-5k+k^2) & (2-3k+k^2) \\ (4k-17) & (2k-8) & (k-1) \\ (2-k) & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} k^2 + \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} 8 & -8 & 2 \\ -17 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

es decir: $C = C_2k^2 + C_1k + C_o$

Recordemos que: $A.\text{adj } A = |A| .I$

entonces: $(A - kI).C = (|A-kI|).I$

pero $|A-kI| = f(k)$

luego: $AC - kC = f(k)I$

Ahora bien:

$$C = \sum_{i=o}^{n-1} C_ik^i \quad y \quad f(k) = \sum_{i=o}^{n} a_ik^i$$

podemos escribir la ecuación $AC - kC = f(k)I$

en esta forma:

$$A . \left(\sum_{i=o}^{n-1} C_ik^i \right) - k \left(\sum_{i=o}^{n-1} C_ik^i \right) = \left(\sum_{i=o}^{n} a_ik^i \right) I$$

$$\sum_{i=o}^{n-1} AC_i k^i - \sum_{i=o}^{n-1} C_i k^{i+1} = \sum_{i=o}^{n} (a_i k^i) I$$

Esta es una identidad en $\underline{k}$ y podemos igualar los coeficientes de las respectivas potencias de $\underline{k}$ a cada lado de la igualdad, por lo tanto podemos escribir

$$\begin{array}{lcll}
AC_o & = & a_o\, I & i = 0 \\
AC_1 - C_o & = & a_1\, I & i = 1 \\
AC_2 - C_1 & = & a_2\, I & i = 2 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & = & \cdot & \cdot \\
\quad C_{n-1} & = & a_n\, I & i = n
\end{array}$$

Vamos a eliminar las matrices $\underline{C}$, si multiplicamos la segunda igualdad por $\underline{A}$ y la sumamos a la primera se elimina AC_o y esto continuadamente lo podemos hacer con todas las igualdades para eliminar todas las C_k, así:

$$\begin{array}{lcl}
AC_o & = & a_o\, I \\
A^2C_1 - AC_o & = & a_1\, A \\
A^3C_2 - A^2C_1 & = & a_2\, A^2 \\
A^4C_3 - A^3C_2 & = & a_3\, A^3 \\
A^5C_4 - A^4C_3 & = & a_4\, A^4 \\
\cdot & \cdot & \\
A^nC_n & = & a_n\, A^n
\end{array}$$

Sumando estas igualdades, obtenemos lo siguiente:

$$0 = a_o I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$$

o sea f(A) = 0 "Toda matriz satisface su ecuación característica". que es lo que queríamos demostrar.

7 - Polinomios como funciones lineales de una matriz

El teorema anterior es muy útil para reducir polinomios matriciales. Es posible expresar cualquier polinomio de grado n como una función de grado n-1.

Suponiendo que conocemos f(A) = 0 podemos obtener:

$$A^n = -\frac{1}{a_n} \left| a_o I + a_1 A + \ldots + a_{n-1} A^{n-1} \right|$$

$$A^n = -\frac{a_o}{a_n} I - \frac{a_1}{a_n} A + \ldots\ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n} A^{n-1}$$

Multiplicando por A y sustituyendo por el valor de A^n que hemos encontrado:

$$A^{n+1} = -\frac{a_o}{a_n} A - \frac{a_1}{a_n} A^2 \qquad - \frac{a_{n-1}}{a_n} A^n$$

$$A^{n+1} = -\frac{a_o}{a_n} A - \frac{a_1}{a_n} A^2 \qquad - \frac{a_{n-1}}{a_n} \left[-\frac{a_o}{a_n} I - \frac{a_1}{a_n} A - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n} A^{n-1} \right]$$

BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

$$= -\frac{a_o}{a_n} A - \frac{a_1}{a_n} A^2 \ . \ . \ . \quad + \frac{a_{n-1}a_o}{a_n^2} I + \frac{a_1 a_{n-1}}{a_n^2} A + \ . \ . \ . \ . + \frac{a_{n-1}^2}{a_n^2} A^{n-1}$$

$$A^{n+1} = \frac{a_{n-1}a_o}{a^2} I + \left(\frac{a_{n-1}a_1}{a_n^2} - \frac{a_o}{a_n}\right) + \ \ldots \ + \left(\frac{a_{n-1}{}^2}{a_n^2} - \frac{a_{n-2}}{a_n}\right) A^{n-1}$$

Continuando este proceso, podemos expresar cualquier potencia de A como - función lineal de ella misma.

Ejemplo: sea $A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ queremos hallar:

$$P(A) = A^4 - 7A^2 + A$$

La ecuación característica de A es: $K^2 - 5k + 2 = 0$

tenemos entonces que:

$$A^2 - 5A + 2I = 0$$

Despejando A^2:

$$A^2 = 5A - 2I$$

Multiplicando por A

$$A^3 = 5A^2 - 2A$$

Sustituyendo el valor de A^2 encontrado:

$$A^3 = 5(5A - 2I) - 2A$$

$$= 25A - 10I - 2A$$

$$A^3 = 23A - 10I$$

Multiplicando por $\underline{A}$ y sustituyendo A^2 por su equivalente

$$A^4 = 23(5A - 2I) - 10A$$

$$A^4 = 115A - 46I - 10A$$

$$A^4 = 105A - 46I$$

Luego: $$P(A) = A^4 - 7A^2 + A$$

$$= (105A - 46I) - 7(5A - 2I) + A$$

$$= 105A - 46I - 35A + 14I + A$$

$$P(A) = 71A - 32I$$

y ya hemos logrado resolver el problema.

8 - Potencias negativas

Con un proceso semejante al anterior se pueden hallar potencias negativas como combinaciones lineales. A guisa de ejemplo, continuemos con la matriz anterior, se pide hallar A^{-2} ó sea $(A^{-1})(A^{-1})$

$$A^2 - 5A + 21 = 0$$

multiplicando por A^{-1} nos queda:

$$A - 5I + 2A^{-1} = 0$$

$$2A^{-1} = 51 - A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(5I - A)$$

Podríamos considerar lo anterior como un método para calcular la matriz in versa.

Además del uso de los autovalores para calcular la matriz inversa, también nos servirán para diagonalizar una matriz.

9 - Diagonalización de una matriz

Dada una matriz $\underline{A}$ vamos a construir una matriz diagonal a partir de ésta. Ya hemos hallado los autovalores de A, construyamos una matriz $\underline{T}$ cuyas columnas sean los autovectores de A.

$$T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{n1} & \cdot\ \cdot & \cdot & x_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{en la cual } X_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nj} \end{bmatrix}$$

donde X_j es un autovector de A.

Los autovectores son linealmente independiente, por lo tanto $|T| \neq 0$, (Recordemos que si hay en un determinante dos filas o columnas proporcionales el determinante es nulo) por lo tanto $\underline{T}$ tiene inversa: T^{-1}

Veamos estas identidades:

$$T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = X_1 \quad ; \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = X_2 \; ; \; . \; . \; . \; .$$

Para notación usaremos un símbolo muy conocido, llamado Delta de DRONECKER (δ_{ij}), definida por:

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$
$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{si } i = j$$

Podemos escribir en general las ecuaciones anteriores:

$$T \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{ni} \end{bmatrix} = X_i \quad ; \quad T^{-1} T \, [\delta_{ki}]_{ni} = [\delta_{ki}] = T^{-1} X_i = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{ni} \end{bmatrix}$$

Multipliquemos la primer igualdad por T^{-1} A:

$$T^{-1} AT \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{ni} \end{bmatrix} = T^{-1} AX_i \quad ; \quad \text{pero} \quad AX_i = K_i X_i$$

y sustituyendo:

$$T^{-1} AT \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{ni} \end{bmatrix} = K_i T^{-1} X_i \quad ; \quad \text{pero: } T^{-1} X_i = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{ni} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$T^{-1} AT \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{ni} \end{bmatrix} = k_i \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{ni} \end{bmatrix}$$

a la matriz $T^{-1}AT$ llamémosle C la ecuación anterior nos recordará, la ecuación de los autovectores $\underline{CX = KX}$, donde X es un vector fila. Podemos concluir que la matriz C tiene los mismos autovalores que A o sea: $T^{-1}AT$ tiene los mismos autovectores que A y como autovectores los siguientes:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{ni} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz C.

$$C = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \; . \; . \; . \; . \; .. & & . \\ 0 & K_2 & & . \\ . \; . \; . \; . \; . \; . & K_3 & & . \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & & & K_n \end{bmatrix}$$

Tiene los mismos autovalores que $T^{-1}AT$.

Puede demostrarse que dos matrices con las mismas K_i y las mismas X_i, son idénticas por lo tanto $C = T^{-1}AT$ y decimos que $T^{-1}AT$ es una matriz diagonal.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$|A - KI| = -k^3 + 4k^2 + 4k - 16 = 0 \;;\; k_1 = 2 \;;\; k_2 = -2 \;;\; k_3 = 4$$

Vamos a buscar los tres autovectores X_1, X_2, X_3 :

Recordemos $AX = KX$ ó $(A - KI)\,X = 0$

Entonces para $k_1 = 2$

$$(A - 2I)X_1 = \begin{bmatrix} 3-2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{11} \end{bmatrix} = 0 \;;\; \begin{bmatrix} (x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31}) \\ (-x_{11} - 2x_{21} - 3x_{31}) \\ (x_{11} - 2x_{21} - x_{31}) \end{bmatrix} = 0$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$\begin{aligned} (1)\quad & x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31} = 0 \\ (2)\quad & -x_{11} - 2x_{21} - 3x_{31} = 0 \\ (3)\quad & x_{11} - 2x_{21} - x_{31} = 0 \end{aligned}$$

Usando (1) y (3)

$$x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31} = 0$$
$$x_{11} - 2x_{21} - x_{31} = 0$$

De aquí obtenemos: $4x_{21} + 4x_{31} = 0$

ó sea : $x_{21} = -x_{31}$

y : $x_{11} + 2x_{21} - 3x_{21} = 0$

entonces : $x_{11} = x_{21}$

ó sea : $x_{11} = x_{21} = - x_{31}$

Tomemos para x_{11} un valor igual a $\underline{1}$

Por lo tanto:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De igual manera podemos hallar los otros autovectores, entonces:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ellos cumplen: $AX_1 = 2X_1$ $AX_2 = - 2X_2$; $AX_3 = + 4X_3$

La matriz T será:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y su inversa:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

y multiplicando $T^{-1}AT$, obtendremos:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Vemos aquí un método para diagonalizar una matriz. Utilizando los autovalores éstos irán en la diagonal.

10 - Diferenciación e Integración de Matrices:

Las operaciones de diferenciación e integración de matrices se realizan del modo siguiente:

Diferenciación: Si tenemos una matriz cuyos elementos sean variables, para derivar esta matriz, lo que se hace es derivar cada uno de los elementos de esta matriz.

$$\text{Si: } A = \left[a_{ij}\right]_{mn} \qquad \text{donde} \quad a_{ij} = f(x)$$

$$\text{entonces: } \frac{dA}{dx} = A' = \left[\frac{d}{dx}(a_{ij})\right]_{mn}$$

Integración: Para integrar una matriz, se integra todos y cada uno de los elementos de la matriz.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{mn} \quad \text{entonces,}$$

$$\int A dx = \left[\int a_{ij} dx\right]_{mn}$$

C A P I T U L O IV

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1 - Introducción

En general una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona dos variables o más en términos de derivados o diferenciales. Una ecuación diferencial muy simple será:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

La solución es inmediata:

Integrando obtendremos :

$$y - y_o = \int_{x_o}^{x} f(t)dt$$

$$y = \int_{x_o}^{x} f(t)dt + y_o$$

x_o y y_o son las condiciones del contorno.

En general la solución de una ecuación diferencial, es una ecuación que no contiene diferenciales.

Dependiendo del orden de las derivadas involucradas en la ecuación así se determina el grado de una ecuación diferencial:

$$(1) \quad y' + \cos x = 0$$

$$(2) \quad y'' + 4y = 0$$

$$(3) \quad x\, y\, y'' + y' .\ 2\operatorname{sen} x + y''' = 0$$

La ecuación (1) es una ecuación de orden 1, la (2) es de orden 2, y la (3) es de orden 3; por ser y', y'', y''' las derivadas de mayor orden en cada ecuación.

Y ahora la siguiente ecuación:

$$a_0(z)\, y^{(n)} + a_1(z).y^{(n-1)} + \ . \ . \ . \ + a_{n-2}(z)y'' + a_{n-1}(z)y' + a_n(z).y = f(x)$$

Vemos que todas las derivadas están elevadas a la primer potencia, y el orden de la máxima derivada es (n), a esta ecuación se le llama ecuación diferencial lineal de orden n. Si $n = 1$ tenemos una ecuación lineal de primer orden.

2 - Ecuaciones diferenciales lineales de Primer Orden

(1) $y' + f(x)y = g(x)$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden, si $g(x) = 0$ la ecuación se llama homogénea.

Vamos a hallar la solución de la ecuación de primer orden.

Analizemos la ecuación homogénea:

$$(2) \quad y' + f(x)\, y = 0$$

$$y' = -f(x)y$$

Esta es una ecuación de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = - f(x) \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = - f(x)\, dx$$

$$\ln \frac{y}{y_o} = - \int_{x_o}^{x} f(t)\, dt$$

(3) $$y = y_o\, e^{-\int_{x_o}^{x} f(t)\, dt}$$

Un caso especial es si $y_o = 1$, que podemos considerar como un generador de la solución general. Si realizamos una adecuada transformación de coordenadas para que $x_o = 0$, la solución general quedará así:

(4) $$y = y_o\, e^{-\int_{o}^{x} f(t)\, dt}$$

Vamos ahora a resolver la ecuación no homogénea, con las condiciones del contorno $y(o) = 1$.

(5) $$y' + f(x)\, y = g(x)$$

Para resolver esta ecuación nos valdremos de la ecuación auxiliar siguiente:

(6) $$z' - f(x)\, z = 0$$

con valor inicial $z(0) = 1$, la que conoceremos como ecuación adjunta de (5). Observando (4) tenemos la solución de (6)

(7) $$z = e^{\int_{o}^{x} f(t)\, dt}.$$

Para encontrar la solución de (5) hagamos el siguiente artificio:

$$(yz)' = yz' + y'z = y(f(x)z) + [g(x) - y\, f(x)]\, z$$

$$(yz)' = yz\ f(x) + z\, g(x) - zy\, f(x)$$

$$(yz)' = z\, g(x)$$

Hemos llegado a una ecuación diferencial de variables separables;

$$\frac{d(yz)}{dx} = z\ g(x)$$

$$d(yz) = z\ .\ g(x)\ .\ dx$$

$$yz \Big|_{y_o z_o}^{yz} = \int_o^x z\ g(x)\ dx$$

$$yz - y_o z_o = \int_o^x z\ g(t)\ dt$$

pero $z_o = 1$

entonces:

$$y = \frac{y_o}{z} + \frac{1}{z} \int_o^x z\ g(t)\ dt.$$

reemplazando en (9) el valor de $\underline{z}$ hallado en(7) tendremos la solución.

Ejemplo Resolver $y' + y\ tgx = sen\ 2x\ ;\ \ y(o) = 1$

$f(x) = tgx;\ \ g(x) = sen\ 2x$

$$\int_o^x f(t)\ dt = \int_o^x tg\ t\ dt = \ln |\ sec.\ x\ |$$

$$z = e^{\int f(t)dt} = e^{\ln |\sec.x|} = |\sec.x|$$

Tendremos entonces:

$$y = \frac{y_o}{z} + \frac{1}{z} \cdot \int_0^x z \;\; g(t)\; dt$$

$$y = \frac{y_o}{\sec.x} + \frac{1}{\sec.x} \cdot \int_0^x \sec t . \; \text{sen } 2t \; dt.$$

$$= \frac{y_o}{\sec x} + \frac{1}{\sec x} \cdot (-2 \cos x)$$

$$y = y_o \cos x - 2 \cos^2 x$$

Las condiciones iniciales son:

Si $x = 0$ $\qquad y = 1$

Luego $1 = y_o \cos 0 - 2 \cos^2 0 = y_o - 2$

$$y_o = 3$$

Por lo tanto: $y = 3 \cos x - 2 \cos^2 x$

3 - Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Cuando hablamos de funciones, tomaremos a $\underline{t}$ como variable independiente y x, y, z, x_1, x_2, etc. como variables dependientes.

Una ecuación de segundo orden, como sabemos es de la siguiente forma:

$$a_o(t)\ \frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\ \frac{dx}{dt} + a_2x, = f(t) \qquad (1)$$

$$a_o(t)\ .\ x'' + a_1(t)\ x' + a_2.x = f(t) \qquad (1)$$

Podemos transformar esta ecuación de segundo orden, a un sistema de dos e- cuaciones de primer orden con dos incógnitas.

$$\text{Sea} \qquad y = \frac{dx}{dt} = x' \qquad (2)$$

(1) Se transformará en:

$$a_o(t)\ .\ y' + a_1(t)\ y + a_2\ x = f(t)$$

(2-a)

Las ecuaciones (2) y (2-a) forman un sistema de dos ecuaciones con dos in- cógnitas; ambas ecuaciones son lineales de primer orden.
Este procedimiento lo podemos seguir para un sistema lineal de n orden.

Ejemplo: En general una ecuación de n orden, será así:

$$F(t,\ x,\ x'\ ,\ x'',\ .\ .\ .x^{(n)}) = 0$$

Pero también podemos escribir esta ecuación en función de $\frac{d^nx}{dx^n}$, por lo tanto (3) se puede escribir así:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = G(t,x,x',x'',x''',\ldots x^{(n-1)}) \qquad (3\text{-b})$$

transformemos el sistema anterior a un sistema equivalente, utilizando las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{array}{llll}
\frac{dx}{dt} = x' & = u_1 & u_1' & = x'' \\
x'' & = u_2 & u_2' & = x''' \\
x''' & = u_3 & & \\
\cdots & & \cdots & \\
x^{(n)} & = u_n & u_{n-1}' & = x^{(n)}
\end{array}
$$

La ecuación (3-b) podemos escribirla así:

$$U_{n-1}' = G(t, x, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \qquad (4)$$

Tenemos acá (n+1) ecuaciones con (n+1) incógnitas, y sólo ecuaciones lineales de primer orden.

A menudo en problemas de Ingeniería surgen esta clase de ecuaciones, tales como la ecuación de la deflexión y pendiente, en el análisis de una columna, al estudiar el comportamiento de un suelo elástico, o en la hidrodinámica, etc. Las leyes de Newton son ecuaciones diferenciales que pueden - convertirse a este tipo; las ecuaciones para la ley de Newton son:

$$
\begin{aligned}
x'' &= G(x, y, z) \\
y'' &= H(x, y, z) \\
z'' &= F(x, y, z)
\end{aligned}
$$

En la cual F, G, H son componentes de la fuerza.

Introduciendo nuevas variables:

$$x = u' \;; \quad v = y' \;; \quad w = z' \tag{6}$$

El sistema (5) se convertirá en:

a

$$u' = G(x,y,z) \;; \; v' = H(x,y,z) \;; \; w' = F(x,y,z) \tag{7}$$

Las ecuaciones (6) y (7) forman un sistema lineal de primer orden de 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Es equivalente al sistema (5).

En general, un sistema lineal de primer orden, con n incógnitas y n ecuaciones será:

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \end{aligned} \tag{8}$$

Donde F_i son funciones ya determinadas. Utilizando notación matricial, ayudados de vectores columnas, escribiremos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad y \quad f(x) = \begin{bmatrix} F_1(t, x_1, \ldots\ldots x_n) \\ F_2(t, x_1, \ldots\ldots x_n) \\ . \\ . \\ . \\ F_n(t, x_1, \ldots\ldots x_n) \end{bmatrix}$$

Podemos escribir (8) así:

$$X' = F(x) \tag{9}$$

En general, la forma más común de un sistema diferencial lineal será:

$$x_1' = a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3 + \ldots \pm a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$

$$x_1' = a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)$$

$$x_n' = a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

escrito lo anterior en notación sintetizada será:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

La ecuación anterior en notación matricial será:

siendo:

$$X = [x_j]_{1n} \qquad A = [a_{ij}(t)]_{nn} \qquad F = [f_j]_{1n}$$

entonces:

$$X' = AX + F \tag{11}$$

Si $F = 0$, el sistema se llama homogéneo.

Si A es una matriz variable. Ahora bien, si a_{ij} es constante, entonces el sistema (11) se llamará sistema lineal con coeficientes constantes.

4 - Sistemas Lineales con coeficientes constantes

Un sistema homogéneo, con coeficientes constantes, ya vimos que es:

$$X' = A X \qquad (1)$$

donde A es una matriz (n x n) con elementos constantes. Este sistema tiene n soluciones linealmente independientes.

Teniendo el sistema (1), vamos a analizar un sistema para poder resolver estas ecuaciones.

Se tiene en (1), condiciones iniciales que nos servirán para determinar las constantes de integración, estas constantes son:

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ x_3^o \\ x_n^o \end{bmatrix} = X^o$$

Consideremos primero que A, es una matriz que puede diagonalizarse y todos sus autovalores son diferentes.

Por lo tanto existe una matriz T tal que:

$$T^{-1} AT = D$$

$$D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \; . \; . \; . \; . \; . & 0 \\ 0 & k_2 \; . \; . \; . \; . \; . & 0 \\ . \; . \; . \; . & & \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

Construyamos una matriz vector columna asociada a X y T, en la forma si-guiente:

(3) $Y = T^{-1}X$ ó sea $TY = X$; multiplicando por T a ambos lados.

Derivando (3) y sustituyendo en el resultado el valor de (1), obtendremos:

$$Y' = T^{-1} \,.\, X' = T^{-1} \,.\, AX$$

pero $X = TY$

entonces:

$$Y' = T^{-1} ATY$$

Recordando que $T^{-1} AT = D$

$$Y' = DY \qquad (4)$$

La ecuación (4) es una ecuación de variables separables:

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 0 & & 0 \\ 0 k_2 & & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 0 & & k_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 y_1 \\ k_2 y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ k_n y_n \end{bmatrix}$$

luego $y'_i = k_i y_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$

$$\frac{dy_i}{dt} = k_i y_i \;;\; \frac{dy_i}{y_i} = k_i \; dt \qquad (5)$$

Por lo tanto: $$y_i = c_i e^{k_i t}$$

las c_i son constantes arbitrarios.

Los vectores solución serán:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} e^{k_1 t} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{k_2 t} \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad . \; . \; . \qquad (6)$$

Estos vectores son linealmente independientes, puesto que al sumarlos, no lo gramos un vector cero a menos que todas las c_i sean cero. Para la solución (6) $c_i = 1$.

La ecuación (1) tendrá como soluciones todos los vectores

$$X = TY$$

ó sea

$$X_1 = TY_1 \quad ; \quad X_2 = TY_2 \; ; \; . \; . \; X_n = TY_n$$

Todos los X_i son vectores, tal conjunto de vectores, es conocido como conjunto fundamental de soluciones de (1) con condiciones iniciales del contorno:

BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

$$X_j(0) = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ \delta_{nj} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, n \\ \delta_{ij} = \text{delta de Kronecker} \end{array}$$

Con todos los vectores X_i construyamos una matriz cuadrada n x n llamémosle θ, esta matriz satisface la siguiente ecuación diferencial.

$$\theta' = A\theta \qquad (7)$$

Analizemos por qué:

$$\theta = \left[X_1, X_2\ X_3 \ldots X_n\right] \text{ cada } X_i \text{ es un vector columna.}$$

$$\theta' = \left[X_1'\ \ X_2'\ X_3' \qquad X_n'\right] \text{ pero } X' = AX$$

Entonces: $\theta' = \left[AX_1\ AX_2\ AX_3 \ldots AX_n\right] = A\left[X_1\ X_2 \ldots X_n\right]$

La segunda matriz es θ

Luego $\theta' = A\,\theta$

Las condiciones iniciales serán:

$$\theta\ (0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = I$$

La ecuación (7) es semejante a (1). La ecuación (1) es vector y (7) es matriz cuadrada. Toda columna de θ es solución de (1)

Hemos analizado un método sencillo para resolver ecuaciones simúltáneas, cuando todos los autovalores son diferentes; pero falta cuando hay autovalores repetidos. Pero la solución hallada nos hizo ver que la solución de (1) son ecuaciones exponenciales de la forma:

$$x = e^{kt}$$

En vista de lo anterior, trataremos de hallar una solución general para (1) de la forma:

$$X = e^{kt} \quad C \quad \text{(C matriz vector columna constante)}$$

Derivando

$$X' = ke^{kt}\ C = AX = Ae^{kt}\ C$$

$$e^{kt}\ (KC - AC) = 0$$

$$(KI - A)\ C = 0$$

Esta ecuación nos es familiar. Sabemos que es un sistema homogéneo, que - tiene solución si:

$$|KI - A| = 0$$

Si A tiene n autovalores diferentes, con cada k_i hay un c_i y la ecuación $X = e^{kt}\ .\ C_i$ tendrá n soluciones las que serán

$$X_1 = e^{k_1 t} C_1\ , \quad X_2 = e^{k_2 t} C_2, \ldots \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Vemos entonces que los vectores C son realmente los autovectores de A.

Si existe un conjunto de soluciones para un sistema de ecuaciones diferenciales entonces la combinación lineal de estas, también es solución, por lo tanto:

$$X = e^{k_1 t} C_1 + e^{k_2 t} C_2 + \ldots + e^{k_n t} C_n = \sum_{i=1}^{n} e^{k_i t} C_i \qquad (8)$$

es solución de (1)

Con condiciones iniciales $X(0)$ cuando $t = 0$ o sea $X(0) = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$

El polinomio característico $|KI-A|$ asociado al sistema (1) tiene n raíces que son los autovalores, cada autovalor determina un conjunto de números $x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ, \ldots, x_n^\circ$ que son la solución (8) de (1)

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_2' &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' &= x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Colocando esta ecuación en la forma (1) o sea $X' = AX$ entonces:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de A es:

$$|A-KI| = \begin{bmatrix} 2-k & -1 & 3 \\ -1 & 1-k & -1 \\ 0 & 1 & -1-k \end{bmatrix} = 0$$

$$|A - KI| = (2-k)(1-k)(-1-k) = 0$$

$$k_1 = 1 \quad ; \quad k_2 = -1 \quad ; \quad k_3 = 2$$

Vamos a construir la matriz T. Encontrando los autovectores, estos son:

Con $k_1 = 1$, tenemos $= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, con k_2: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y k_3: $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Luego:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Recordemos que $Y' = DY$ y por lo tanto,

$$\text{siendo } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces: $y_1 = e^{t}$; $y_2 = e^{-t}$; $y_3 = e^{2t}$

Las soluciones de $X' = AX$ son: $X = TY$

Por lo tanto:

$$X_1 = TY_1 = \begin{bmatrix} e^t \\ -2e^t \\ e^t \end{bmatrix} \quad ; \quad X_2 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} -4e^{2t} \\ 3e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

La solución general será:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = \begin{bmatrix} e^t + e^{-t} - 4e^{2t} \\ -2e^t + 3e^{2t} \\ e^t - e^{-t} + e^{2t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - 3y' - 10y = 0$$

Con condiciones iniciales: $y(0) = 3$; $y'(0) = 15$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$U_1 = y \qquad U_1' = U_2 \qquad y'' = 3y' + 10y$$
$$U_2 = y' \qquad U_2' = 10\,U_1 + 3\,U_2$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Soluciones para este sistema serán del tipo $U = e^{kt} C$

$$U' = ke^{kt} C \quad \text{pero} \quad U' = AU$$

$$\text{luego} \quad Ae^{kt} C = ke^{kt} C$$

$$\text{entonces:} \quad (A - KI)\ C = 0$$

El sistema anterior tiene solución si $|A - KI| = 0$. Hallemos k.

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 10 & 3-k \end{vmatrix} = -3k + k^2 - 10 = 0$$

$$k_1 = 5 \qquad k_2 = -2$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} a \\ -5a \end{bmatrix} ; \qquad C_2 = \begin{bmatrix} b \\ 2b \end{bmatrix}$$

$$U = e^{k_1 t} C_1 + e^{k_2 t} C_2$$

Si $t = 0$ entonces $U_1(0) = 3$; $U_2(0) = 15$

$$U(0) = C_1 + C_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + b \\ -5a + 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{array}{rl} a + b & = 3 \\ +5a - 2b & = 15 \end{array}$$

luego : $a = 3$ y $b = 0$

$$U = e^{kt}\, C$$

$$U_1 = e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ -15 \end{bmatrix} \quad ; \quad U_2 = e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$U = U_1 + U_2 = 3e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

pero : $y = U_1$

entonces: $y = 3e^{5t}$

C O N C L U S I O N

Hemos descrito someramente una aplicación, de las múltiples, de las matrices. Esta descripción ha sido lo más sencilla, y más bien el interés del presente trabajo se dirige a despertar en la profesión el interés por lo útil que son ellas.

Además de la solución de ecuaciones diferenciales, las matrices las tenemos en la elasticidad y en estructuras. En estructuras, tiene mucho interés para el Ingeniero Civil, puesto que con los avances de la técnica moderna, las computadoras son un arma común y por lo tanto debemos poder alimentarla para trabajar con ella. La forma de alimentación más fácil es el uso de matrices.

En circuitos eléctricos, en problemas de líneas conductoras, etc. Hay infinidad de aplicaciones de las matrices. Ojalá que este trabajo cumpla con la finalidad a que ha sido hecho: " DESPERTAR EL INTERES POR EL ESTUDIO DE LAS MATRICES "

B I B L I O G R A F I E

Elements of Differential Equations .... Wilfred Kaplan
Addison-Wesley

Ecuaciones Diferenciales Elementales............. Lyman M. Kells
McGraw-Hill

Differential Equations:(A modern Approach)........ Harry Hochstadt
Holt,Rinehart and Winston.

Advanced Calculus for Applications................Francis B. Hildebrand
Prentice-Hall, Inc.

Matrix Methods for Engineering................... Luis A. Pipes
Prentice-Hall,Inc.

Modern Mathematical Analysis .... Murray H. Protter
Charles B. Morrey, Jr.
Addison-Wesley
Publishing Co.

Elementary Matrix Algebra ....Franz E. Hohn
Mc Millan Co.