UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADUACIÓN:

"APLICACIONES DE LOS ESPACIOS HILBERT-BANACH"

PRESENTADO POR:

ALEYDA ELIZABETH JUÁREZ LUNA

ELMER SAÚL HERNÁNDEZ RAMOS

MÁRTIR LUCÍO GUEVARA MEMBREÑO

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ASESOR:

LIC. JOSÉ FREDY VÁSQUEZ

SAN MIGUEL, EL SALVADOR.

AGOSTO 2019.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

MSc. Roger Armando Arias Alvarado

RECTOR

Ing. Nelson Bernabé Granados

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO

Lic. Cristobal Hernán Ríos Benítez

SECRETARIO GENERAL

Lic. Rafael Humberto Peña Marín

FISCAL GENERAL

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

Ing. Joaquín Orlando Machuca Gómez

DECANO

Lic. Carlos Alexander Díaz

VICE-DECANO

Agradecimientos

A Dios todopoderoso, por ser mi sostén y derramar todas sus bendiciones y bondades en mi vida, por darme fuerzas para culminar exitosamente esta carrera, dado que sin su ayuda nada hubiese sido posible. Dedico a él este triunfo.

A mis padres: Kelvin Ulices Juárez y Roxana Argentina Luna, quienes me acompañaron en mi formación desde mis primeros grados de educación básica hasta ahora, compartiendo conmigo su conocimiento, su amor y paciencia, dándome ánimos cuándo más lo necesité. Gracias por todos los sacrificios que hicieron por mí, gracias por enseñarme a ser quien soy, por estar de mi lado incondicionalmente, por ser mi mejor ejemplo de perseverancia, los amo con todo mi corazón.

A mi esposo: Félix Abraham Guevara, por ser esa persona especial que me ha brindado su amistad, amor, alegrías, y comprensión. Por ayudarme a crecer como persona y ser mi compañero para toda la vida, Te amo.

A mis asesores de tesis: Lic. Fredy Vázquez, Lic. Mario Hernández, por todos los conocimientos que compartieron, por la paciencia que nos tuvieron, por mostrarnos su amistad durante toda la carrera, gracias por todo el apoyo.

A mis compañeros de tesis, por los momentos buenos y malos compartidos. Gracias por su dedicación y empeño en la realización de este logro, y éxitos en esta nueva etapa.

Con cariño, Aleyda.

Expreso mi más sincera gratitud a todas aquellas personas que de una u otra manera influyeron en la redacción de esta tesis.

A Dios, por darme las fuerzas necesarias para concluir el trabajo de graduación.

A mis padres: Ciro César Guevara Sorto y Vilma Deysi Membreño de Guevara, por el apoyo incondicional que me brindaron y por la paciencia que me tuvieron mientras me dedicaba al estudio, ya que sin ellos esto no sería posible.

A mis asesores de tesis: Lic. José Fredy Vásquez y Lic. Mario Hernández, por aceptar dirigir este proyecto de investigación, por la generosidad de compartir sus conocimientos y opiniones y el tiempo dedicado a la misma.

A mis compañeros de tesis, por la amabilidad, por la compresión y la confianza que siempre mostraron durante este proceso.

Lucío.

En estas líneas deseo expresar mi gratitud a quienes estuvieron conmigo en este largo trayecto de estudios:

A Dios Todopoderoso, por darme vida y fuerzas para recorrer todo el trayecto de mis estudios, por cubrirme de bendiciones en cada momento oportuno y necesario para llegar a esta culminación. Él se merece la honra por este logro.

A mi madre: María Magdalena Ramos, porque estuvo conmigo cada día, cada momento dificil, y por su esfuerzo incondicional y abnegado. Agradezco todo lo que dio por mí para poder alcanzar este triunfo, su ejemplo y valentía me dieron muchos ánimos. Gracias mamá, te amo.

A mi hermano: Rolando Antonio Ramos, por su ayuda y sus palabras de aliento cada vez que las necesité.

A Beatriz Guevara, por estar siempre a mi lado, por alentarme a salir adelante. Por compartirme su amor, su tiempo, su cariño, y por creer que sí podía lograr este triunfo. Te amo.

A mis asesores de tesis: Lic. Fredy Vázquez, Lic. Mario Hernández, por aceptar ayudarnos durante este proceso, poniendo a nuestra disposición su tiempo y sus amplios conocimientos.

A mis compañeros de tesis, por su entrega y esfuerzo para culminar este proyecto.

Con aprecio, Saúl.

Índice general

Introducción

Los espacios de Hilbert tienen su origen en los trabajos de David Hilbert (1862-1943) sobre la equivalencia de ecuaciones integrales y sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas con una infinidad de incógnitas. Esta obra, motivada por los trabajos de I. Fredholm, apareció en el libro: Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linear en Integral gleichungen en 1912.
El presente trabajo de investigación tiene como propósito describir los espacios de Hilbert, de Banach y algunas de sus aplicaciones.

En el capítulo 1, estudiaremos los espacios vectoriales, los espacios métricos y sus nociones topológicas, además de las aplicaciones entre dichos espacios y abordaremos también los conceptos de completitud y compacidad en los epsacios métricos a fin de establecer las ideas preliminares que nos ayudarán a comprender la siguiente parte de la investigación.

En el capítulo 2, estudiaremos los espacios normados y espacios de Banach junto con los conceptos de operadores lineales y funciones lineales. Luego se establecerá el espacio con producto interior o pre-Hilbert que nos ayudará a definir el espacio de Hilbert con sus propiedades, además de los conjuntos ortonormales y la representación de funcionales en espacios de Hilbert. Todo este marco establecido da paso al análisis de la siguiente sección.

Finalmente en el capítulo 3, describiremos algunas de las aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach; a ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales. Además de la aproximación en espacios normados y consideraremos el problema de la unicidad de las mejores aproximaciones.

Objetivos de la investigación

Objetivo general:

Exponer la teoría fundamental de los espacios de Hilbert y Banach y sus aplicaciones.

Objetivos específicos:

1. Enunciar las bases necesarias para la construcción de la teoría de los espacios de Banach y Hilbert.

2. Establecer la teoría fundamental de los espacios de Hilbert y los espacios de Banach planteando definiciones, demostrando teoremas y proponiendo problemas pertinentes a la misma.

3. Mencionar algunas de las aplicaciones de los espacios de Banach y Hilbert y la manera en la que éstas son utilizadas.

Justificación de la investigación

El presente trabajo está diseñado para estudiar el área de ánalisis funcional que es la rama de la matemática que estudia los espacios de funciones y tiene sus raíces históricas en el estudio de transformaciones tales como: las transformaciones de Fourier, el estudio de las ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales. Un objeto importante de estudio en análisis funcional son los operadores lineales continuos definidos en los espacios de Banach y de Hilbert, y es en estos últimos que centraremos nuestra atención. ¿Por qué abordar un tema como este?, ¿acaso será un tema de interés de solamente tres jóvenes universitarios?, nos preguntaron recientemente. La respuesta no solamente la podemos dar nosotros sino también un físico o un economista, que son algunos de los beneficiados con esta rama de las matemáticas aparte, por supuesto, de los matemáticos mismos.
Así, por ejemplo, hoy en día no podríamos concebir las mecánica cuántica sin los espacios de Hilbert o la teoría de distribuciones y la economía sin la teoría de dualidad. Creemos que esto basta para convencer al más escéptico de que hay mucho más que tres despistados interesados en esta área de las matemáticas. Por otra parte, hay pocos libros en español sobre análisis funcional y hasta donde sabemos muy pocos sobre las aplicaciones de los espacios de Hilbert y Banach, nuestro tema a estudiar. Pensamos que este texto será de utilidad para un curso introductorio de análisis funcional para estudiantes del último año de una licenciatura en matemática y cualquiera que quiera iniciarse en el tema y tenga familiaridad con la topología de conjuntos, el álgebra lineal y principalmente el análisis matemático.
Consideramos que todo buen estudio, cualquiera que sea la rama de la matemática que se aborde, contribuye a la adquisición de nuevos conocimientos y ayuda al desarrollo del pensamiento lógico-matemático del individuo interesado.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios vectoriales, definición y ejemplos

La idea de vector está tomada de la Física, donde sirven para representar magnitudes vectoriales como fuerzas, velocidades o aceleraciones. Para ello se emplean vectores de dos componentes en el plano, de tres componentes en el espacio, etcétera.

Se supone conocida la representación gráfica y manejo de los vectores de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$.
En Matemáticas, tratamos de abstraer las propiedades que caracterizan a los vectores para extenderlas también a otro tipo de objetos diferentes de los vectores de la Física. Esencialmente, el comportamiento que caracteriza a los vectores es el siguiente:

- Podemos sumar dos vectores y obtenemos otro vector;
- Podemos multiplicar un vector por un número (escalar) y obtenemos otro vector.

Además estas operaciones cumplen ciertas propiedades, que observamos en los vectores de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$.
En lo sucesivo, utilizaremos habitualmente la siguiente notación: u, v, w (u otras letras latinas) para vectores, mientras que las letras griegas designarán escalares.
Propiedades de la suma de vectores.

- Asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- Conmutativa: $v + u = u + v$.

- Existe un elemento neutro, el vector $\vec{0}$, tal que $\vec{0} + v = v$ para cualquier vector v.
- Para cada vector v existe un elemento opuesto, $-v$, que sumado con él da $\vec{0}$.

Propiedades del producto de un vector por un escalar.

- Asociativa: $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$.
- Distributivas:

  Respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

  Respecto de la suma de vectores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
- Existe un elemento unidad: el escalar 1, tal que $1 \cdot v = v$ para cualquier vector v.

Definición 1.1.1. *Cualquier conjunto que posea las operaciones suma y producto por escalares, cumpliendo todas las propiedades anteriores, diremos que es un **espacio vectorial**. Los elementos de tal conjunto se llamarán vectores (aunque pueda tratarse de objetos diferentes a los vectores de la Física).*

Diremos que el espacio vectorial es real o complejo, según sean los escalares. Además de que los escalares tienen su propia estructura.
Otras propiedades de los espacios vectoriales pueden deducirse de las anteriores propiedades básicas. Por ejemplo:

Si $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ (α escalar, v vector) entonces o bien es $\alpha = \mathbf{0}$ o bien es $v = \mathbf{0}$.

Nota 1.1.2. *Si X es un espacio vectorial, $A \subset X$, $B \subset X$, $\lambda \in \boldsymbol{K}$, escribiremos:*

- $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$.
- $A - B = \{x - y : x \in A,\ y \in B\}$.
- $A \setminus B = \{x : x \in A,\ x \notin B\}$ *(en particular $A^c = X \setminus A$).*
- $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$ *(obsérvese que $2A \neq A + A$).*
- $A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$.

Definición 1.1.3. *Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ vectores, $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ se le llama **combinación lineal** donde $a_i \in \boldsymbol{K}$, con $\boldsymbol{K}$ un cuerpo y $x_i \in \boldsymbol{V}$, con $\boldsymbol{V}$ un espacio vectorial.*

Definición 1.1.4. *Se dice que un conjunto $Y \subset X$ es un **subespacio de** X si Y es tambien espacio vectorial.*

Definición 1.1.5. *Sea $M \neq \emptyset \subset X$, donde X es un espacio vectorial, al conjunto de todas las combinaciones lineales de M se le llama **el generado de M** y se escribe **Span M**, el generado siempre es un subespacio de X.*

Ejemplo 1.1.6. *Sea X un espacio vectorial de dimension n.*
Sea $M \neq \emptyset$ en X; donde $M = \{x_{r_1}, x_{r_2}, \cdots, x_{r_m}\}$, entonces

$$x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{r_j} \in SpanM; \alpha_j \in K.$$

El Span M es subespacio de X ya que:
$0 = \sum_{j=1}^{m} 0 \cdot x_{r_j}$; *de donde* $0 \in SpanM$.
Si m_1 y $m_2 \in Span\ M$, entonces:
$m_1 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{r_j}$, $\quad m_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{r_j}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad m_1 + m_2 &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{r_j} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{r_j}, \\ &= \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j x_{r_j} + \beta_j x_{r_j}), \\ &= \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + \beta_j)\, x_{r_j}, \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_{r_j}; \quad \lambda_j = \alpha_j + \beta j \in K, \end{aligned}$$

$$\therefore\ m_1 + m_2 \in\ Span\ M.$$

Sea $z \in Span\ M$ y $\alpha \in K$.

$$\begin{aligned} z \in Span\ M \Rightarrow z &= \sum_{j=1}^{m} \delta_j x_{r_j}, \\ \Rightarrow \alpha z &= \sum_{j=1}^{m} (\alpha \delta_j) x_{r_j}, \\ &\therefore \alpha z \in Span\ M. \end{aligned}$$

Luego: Span M es subespacio de X.

Definición 1.1.7. *Los vectores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se dice que son **linealmente independientes (li)** si $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ implica que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, donde $a_i \in \boldsymbol{K}$, con $\boldsymbol{K}$*

un cuerpo y $x_i \in \boldsymbol{V}$*, con* $\boldsymbol{V}$ *un espacio vectorial. Se dice que son* ***linealmente dependientes (ld)*** *si la igualdad anterior también se cumple para algunas r-tuplas de escalares distintos de cero.*

Definición 1.1.8. *Sea* $M \neq \emptyset \subset X$*, donde* X *es un espacio vectorial,* M *se dice* ***linealmente independiente*** *si cualquier subconjunto finito de* M *es li.*

Definición 1.1.9. *Un espacio vectorial* X *se dice que es* ***finito dimensional*** *si existe un entero positivo* n *tal que,* X *contiene un conjunto li de* n *vectores y cualquier subconjunto con más de* n *vectores es ld (no es li). En este caso la dimensión de* X *es* n*, escribiremos* $dimX = n$*, (Sino se cumple que* X *tiene dimensión infinita).*

Definición 1.1.10. *Se dice que el espacio vectorial* X *es* ***suma directa*** *de los subconjuntos* $M_1, \cdots, M_n$ *de* X*, lo cual denotaremos por* $X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ *si* $X = M_1 + \cdots + M_n$ *y* $M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}, i = 1, \cdots, n$*. Con* M_i *subespacios de* X*.*

1.1.1. Ejemplos de espacios vectoriales

Ejemplo 1.1.11. *El espacio* $\mathbb{R}^n$*, formado por los vectores de* n *componentes* $(X_1, \cdots, X_n)$ *es un* ***espacio vectorial real****, en el que se pueden sumar vectores y multiplicar por un escalar (real) de la forma habitual. Se puede comprobar que se cumplen las propiedades requeridas para ambas operaciones. El vector cero es* $(0, \cdots, 0)$*. No es un espacio vectorial complejo, pues no podemos multiplicar por escalares complejos (si lo hacemos, el resultado no se mantendrá dentro de* $\mathbb{R}^n$*).*

Ejemplo 1.1.12. *Consideremos el conjunto* P_2 *de los* ***polinomios de grado menor o igual dos con coeficientes reales:***
$P_2 = \{aX^2 + bX + c : \ a, \ b, \ c \ \in \ \mathbb{R}\}$ *es* ***un espacio vectorial real****, pues podemos sumar dos elementos de* P_2 *y obtenemos otro elemento de* P_2*; también podemos multiplicar un elemento de* P_2 *por un escalar real y obtenemos otro elemento de* P_2*. Veámoslo:*
Suma: $(aX^2 + bX + c) + (a' X^2 + b' X + c') = (a+a')X^2 + (b+b')X + (c+c')$ *que pertenece a* P_2*.*
Producto por un escalar real: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(aX + bX + c) = \lambda aX^2 + \lambda bX + \lambda c$ *que pertenece*

a P_2.

Se puede comprobar que se cumplen las propiedades requeridas. El vector $\vec{0}$ *es el polinomio cero:* $0X^2 + 0X + 0$.

No es un espacio vectorial complejo, pues al multiplicar por un escalar complejo el resultado podrá ser un polinomio complejo que no pertenece a P_2.

1.2. Espacios métricos. Nociones generales

En un conjunto arbitrario (no necesariamente con estructura algebraica) se definirá el concepto de métrica. Si además posee estructura de espacio vectorial, ciertas métricas darán lugar a la noción de norma, como lo abordaremos en el capítulo II.

Definición 1.2.1. *Dado un conjunto* $X \neq \emptyset$, *una* ***métrica*** *o* ***distancia*** *sobre* X *es una aplicación* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que se verifican las siguientes propiedades:*

- *i)* ***Positividad****: para cada* $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$.
- *ii)* ***Propiedad idéntica****: dados* $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.
- *iii)* ***Simetría****: para cada* $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.
- *iv)* ***Desigualdad del triángulo****: para cada* $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
  Es notable que podemos obtener, por inducción, una generalización de esta propiedad, así:
  $$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

La expresión $d(x, y)$ *se lee como* ***distancia*** *de* x *a* y, *el par* (X, d) *recibe el nombre de* ***espacio métrico***.

Algunos ejemplos de espacios métricos son:

Ejemplo 1.2.2. $\mathbb{R}$ *es un espacio métrico con la función* $d(x, y) := |x - y|$. *En otras palabras, la distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une. Este es el ejemplo paradigmático y más importante de* ***espacio métrico*** *y, salvo indicación contraria, consideraremos que* $\mathbb{R}$ *posee esta métrica.*

Demostración. Consideramos si la función dada cumple las condiciones que pide la definición de métrica.

- i) *Positividad*

  Por la definición de distancia entre dos puntos es evidente que se cumple el primer ítem. (La distancia no puede ser menor que cero ya que es el valor absoluto de un número real)

  Así: $d(x, y) \geq 0;\ \forall\, x,\, y\ \in\ \mathbb{R}$

- ii) *Propiedad idéntica*

  $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = |x - y| = |x - x|;\ \forall\, x,\, y\ \in\ \mathbb{R},$

  $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = |0|;\ \forall\, x,\, y\ \in\ \mathbb{R},$

  $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0;\ \forall\, x,\, y\ \in\ \mathbb{R}.$

- iii) *Simetría*

  $d(x, y) = |x - y|;\ \forall\, x,\, y\ \in\ \mathbb{R},$

  $d(x, y) = |y - x|;\ \forall\, x,\, y\ \in\ \mathbb{R},$

  $d(x, y) = d(y, x);\ \forall\, x,\, y\ \in\ \mathbb{R}.$

  Observaciones 1.2.3. Antes de continuar, probaremos la **desigualdad triangular en los reales**:

  $$|a + b| \leq |a| + |b|\ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

  Usaremos algunas de las propiedades del valor absoluto de un número real como:

  $$|a|^2 = a^2;\ \forall a \in \mathbb{R},$$

  $$\begin{aligned}
  |a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\ &\textit{pero } a \leq |a| \\
  |a + b|^2 &\leq a^2 + 2|ab| + b^2;\ \textit{pero } |ab| = |a||b| \\
  |a + b|^2 &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2, \\
  |a + b|^2 &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2, \\
  |a + b|^2 &\leq (|a| + |b|)^2;\ \ a^2 \leq b^2 \textit{ entonces } a \leq b \textit{ solo si } a, b > 0 \\
  |a + b| &\leq |a| + |b|.
  \end{aligned}$$

Usando el hecho anterior probaremos la propiedad:

- iv) *Desigualdad triangular*

  $d(x, y) = |x - y|; \ \forall\, x,\, y \ \in \ \mathbb{R},$

  $d(x, y) = |x - z + z - y|; \ \forall\, x,\, y\ ,z \ \in \ \mathbb{R},$

  $d(x, y) = |(x - z) + (z - y)|; \ \forall\, x,\, y\ ,z \ \in \ \mathbb{R},$

  $d(x, y) \leq |x - z| + |z - y|; \ \forall\, x,\, y\ ,z \ \in \ \mathbb{R},$

  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y); \ \forall\, x,\, y\ ,z \ \in \ \mathbb{R}.$

■

Ejemplo 1.2.4. *Para cualquier conjunto X, la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, definida por:*

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & si\ x = y \\ 1, & otro\ caso \end{cases}$$

es una función distancia sobre X, llamada métrica discreta de X. Cada par (X, d) formado por un conjunto no vacío X y una métrica discreta, es un espacio métrico discreto.

Demostración. Consideramos si la función dada cumple las condiciones que pide la definición de métrica.

- i) *Positividad*

  Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$.

  Si $x \neq y$, entonces $d(x, y) = 1$. Esto es por la definición. De esta manera la propiedad de positividad se cumple $\forall x, y \in X$.

- ii) *Propiedad idéntica*

  $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0; \ \forall\, x,\, y \ \in \ X$. Es inmediato por la definición de la función.

- iii) *Simetría*

  Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0; \ \forall\, x,\, y \ \in \ X,$

  $\Rightarrow d(y, x) = 0$; porque $y = x \ \ \forall\, x,\, y \ \in \ X,$

  $\Rightarrow d(x, y) = d(y, x); \ \forall\, x,\, y \ \in \ X.$

Si $x \neq y$ entonces $d(x,y) = 1$; $\forall\ x,\ y\ \in\ X$,

$\Rightarrow d(y,x) = 1$; porque $y \neq x\ \ \forall\ x,\ y\ \in\ X$,

$\Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$; $\forall\ x,\ y\ \in\ X$.

- iv) *Desigualdad triangular*

  Sean $x, y, z \in\ X$.

  1. Empecemos considerando el caso donde $x = y$.

     $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$.

     i) Consideremos ahora que $x = z$, por transitividad $z = y$,

     entonces $d(x,z) = 0$ y $d(z,y) = 0$.

     Luego: $d(x,y) = 0 = 0 + 0 = d(x,z) + d(z,y)$,

     ii) Si $x \neq z$, por transitividad $z \neq y$,

     entonces $d(x,z) = 1$ y $d(z,y) = 1$,

     $\Rightarrow d(x,y) = 0$,

     $\Rightarrow d(x,y) < 1$,

     $\Rightarrow d(x,y) < 1 + 1$,

     $\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

     $\therefore d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$; $\forall\ x,\ y\ \in\ X$.

  2. Ahora consideremos cuando $x \neq y$.

     $x \neq y \Rightarrow d(x,y) = 1$.

     i) Tomando $x = z$, por transitividad $z \neq y$,

     entonces tenemos $d(x,z) = 0\ \ y\ \ d(z,y) = 1$.

     Luego: $d(x,y) = 1 = 0 + 1 = d(x,z) + d(z,y)$,

     ii) Si $x \neq z$, por transitividad $z \neq y$, entonces $d(x,z) = 1$ y $d(z,y) = 1$,

     $\Rightarrow d(x,y) = 1$,

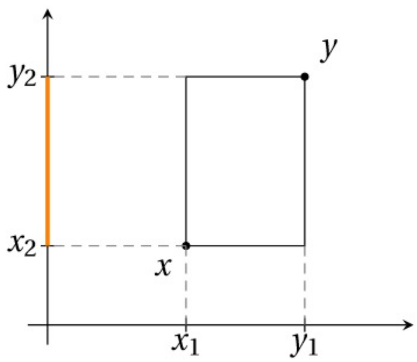
     $\Rightarrow d(x,y) \leq 1 + 1$,

     $\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,

     $\therefore d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$; $\forall\ x,\ y\ \in\ X$.

Así la función declarada constituye una métrica (la métrica discreta). ∎

Ejemplo 1.2.5. *Más generalmente, $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico con la función $d_\infty := \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$, donde x_i es la i-ésima coordenada de x, e y_i, la de y. En la siguiente figura se ilustra esta definición. La distancia d_∞ entre dos puntos x e y del plano es la máxima longitud de los lados del rectángulo con vértices opuestos x e y y lados paralelos a los ejes cartesianos; en este caso, la longitud de los lados verticales.*



$$d_\infty(x, y) = \operatorname{long} \overline{x_2 y_2}$$

Figura 1.1: Distancia d_∞ en $\mathbb{R}^2$

1.2.1. Nociones topológicas en Espacios métricos

Sea (X, d) un espacio métrico. Si $x \in X, r > 0$, la **bola abierta** de centro x y radio r es el conjunto $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Análogamente se definen las correspondientes **bolas cerradas** $\bar{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ y las esferas $S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$. En general, se llama **diámetro** de un conjunto A a $diam A = sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Ejemplo 1.2.6. *Si d es la métrica discreta en X,*

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & si\ r < 1 \\ X, & si\ r \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.7. *En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, las bolas abiertas son $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r\} = (x - r, x + r)$.*

Definición 1.2.8. *Sea $A \subset X$. Se dice que x es **punto interior** de A si $x \in A$ y existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Se llama **interior** de A al conjunto*

$$intA = \{x \in A : x\ es\ punto\ interior\ de\ A\}$$

Si $intA = A$, A se llama **conjunto abierto**. Si llamamos $\mathcal{A}$ a la colección de todos los conjuntos abiertos de X, tenemos las siguientes propiedades:

1. $A_\alpha \in \mathcal{A}, \alpha \in I \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{A}$ (I es cualquier conjunto de índices).

2. $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

3. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

Observaciones 1.2.9. Recordemos que un **espacio topológico** es aquel en el que existe una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que verifican los tres axiomas anteriores. De aquí se deduce que todo espacio métrico es a su vez un espacio topológico.

Definición 1.2.10. *Dado $A \subset X$, un punto $x \in X$ es de adherencia de A si*

$$\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset,$$

el conjunto $\overline{A} = \{x \in X : \textit{es punto de adherencia de } A\}$ se llama *clausura* de A. Un conjunto A se dice *cerrado* cuando $\overline{A} = A$. Las siguientes propiedades son elementales:

1. $A \subset \overline{A}$.

2. $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Proposición 1.2.11. *A es abierto si y solo si A^c es cerrado.*

Demostración. Probemos primero que si A es abierto, entonces A^c es cerrado, es decir, $\overline{A^c} \subset A^c$.
Sea $x \in \overline{A^c}$.

$$x \in \overline{A^c} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \tag{1.1}$$

Supongamos que $x \notin A^c$, así $x \in A$, A es abierto, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_0) \subset A$, de esta manera $B(x, \varepsilon_0) \cap A^c = \emptyset$, y esto contradice a 1.1.
Luego, $x \in A^c$, de donde $\overline{A^c} \subset A^c$.

Si A^c es cerrado, entonces A es abierto.

Como A^c es cerrado, entonces $A^c = \overline{A^c}$.

Sea $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \notin A^c = \overline{A^c}, \\ &\Rightarrow \exists\, \varepsilon_1 > 0,\ tal\ que\ B(x,\varepsilon_1) \cap A^c = \emptyset, \\ &\Rightarrow \exists\, \varepsilon_1 > 0,\ tal\ que\ B(x,\varepsilon_1) \subset A, \\ &\Rightarrow x \in int(A), \\ &\Rightarrow A \subset int(A), \\ &\therefore A\ es\ abierto. \end{aligned}$$

■

De esta proposición y de las propiedades análogas para los abiertos, se deducen las siguientes propiedades:

I. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i$ es cerrado.

II. Si $\{A_1, \cdots, A_n\}$ son cerrados, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es cerrado.

III. $\emptyset, X$ son cerrados.

Definición 1.2.12. *Un punto $x \in X$ es punto* ***límite*** *(o de acumulación) de $A \subset X$ cuando $\forall r > 0, B(x,r)$ contiene infinitos puntos de A (lo que es equivalente a decir que contiene algún punto de A distinto de x). Se llama* ***conjunto derivado*** *de A, al conjunto*

$$A' = \{x \in X : x\ es\ punto\ limite\ de\ A\}$$

Definición 1.2.13. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X, se dice que converge al punto x, y se escribe $x_n \to x$, cuando*

$$\forall r > 0, \exists N \in \mathbb{N} : x_n \in B(x,r), \forall n > N.$$

La condición anterior equivale a que la sucesión de números reales $\{d(x_n,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero. Análogamente, una sucesión de subconjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X converge a un punto $x \in X$ si para toda bola B centrada en x, existe un índice m tal que $A_n \subset B$ para todo $n > m$.

Definición 1.2.14. *Una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* X *es acotada cuando*

$$diam((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = sup\{d(x_n, x_m) : n, m \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

En general, un subconjunto $M \subset X$ es acotado cuando $M \subset B(x_0, r)$ para algún $x_0 \in X$ y para algún $r > 0$. Un concepto más general, y que relacionaremos posteriormente con el de compacidad, es el siguiente:

Definición 1.2.15. *Un conjunto* A *de un espacio métrico* X *se dice* ***totalmente acotado*** *o* ***pre-compacto*** *si, dado cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe un número finito de conjuntos* $A_1, \cdots, A_p$ *tales que* $A = A_1 \cup \cdots \cup A_p$ *y* $diam(A_i) \leq \varepsilon, i = 1, \cdots, p$.

Proposición 1.2.16. *Si* A *es totalmente acotado, entonces es acotado*

Demostración. Tomemos $\varepsilon = 1$; por hipótesis $A = A_1 \cup \cdots \cup A_p$ con $diam(A_i) \leq \varepsilon$.
Para cada $i \in \{1, \cdots, p\}$, elegimos $x_i \in A_i$ y llamamos

$$\delta = máx\{d(x_i, x_j),\ i, j = 1, \cdots, p\}.$$

Dados $x, y \in A$, existirán i, j tales que $x \in A_i$, $y \in A_j$; luego

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq 1 + \delta + 1 = 2 + \delta$$

con lo que se prueba que A es acotado. ■

Lema 1.2.17. *Sea* (X, d) *un espacio métrico*

a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente, entonces está acotada y su límite es único.*

b) Si $x_n \to x,\ y_n \to y$, *entonces* $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Demostración. a) Supongamos que $x_n \longrightarrow x$. Entonces, tomando $\varepsilon = 1$, podemos encontrar un N tal que $d(x_n, x) < 1,\ \forall n > N$. Por lo tanto, por la propiedad de la desigualdad triangular, $\forall n$ tenemos que $d(x_n, x) < 1 + a$ donde,

$$a = \text{máx}\{d(x_1, x), \cdots, d(x_N, x)\},$$

Esto muestra que (x_n) es acotada.

Suponiendo que $x_n \longrightarrow x$ y $x_n \longrightarrow z$, por la propiedad de la desigualdad triangular obtenemos:

$$0 \leq d(x,z) \leq d(x,x_n) + d(x_n,z) \longrightarrow 0+0$$

y la unicidad $x = z$ del límite se sigue de la propiedad de identidad de la definición 1.2.1 ii)

b) Por la generalización de la desigualdad triangular, tenemos:

$$d(x_n,y_n) \leq d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n).$$

Por lo tanto obtenemos

$$d(x_n,y_n) - d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(y,y_n).$$

y una desigualdad similar intercambiando x_n y x así como y_n y y y multiplicando por -1. Juntos,

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n,x) + d(y,y_n) \to 0.$$
$$\therefore d(x_n,y_n) \longrightarrow d(x,y)$$

■

Observaciones 1.2.18. En $\mathbb{R}$ con la métrica euclídea se verifica ademas que toda sucesión monótona y acotada es convergente. Otro resultado importante es enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.19. ***(Teorema de Bolzano-Weierstrass)***
Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene alguna sub-sucesión convergente.

Demostración. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción acotada en $\mathbb{R}$.
Decimos que una sucesión es acotada si todos los valores de sus términos pertenecen a un intervalo, digamos, $[A,B]$; es decir, $a_n \in [A,B]$ para todo n. A los números A y B los llamamos cotas de la sucesión.
La demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass se lleva a cabo de la siguiente manera: bisecamos el intervalo $[A,B]$ y consideramos los intervalos $[A, \frac{A+B}{2}]$ y $[\frac{A+B}{2}, B]$. Como todos

los términos de la sucesión se encuentran en $[A, B]$ y son infinitos, entonces uno de los dos subintervalos $[A, \frac{A+B}{2}]$ o $[\frac{A+B}{2}, B]$ debe contener una infinidad de ellos.
Si $[A, \frac{A+B}{2}]$ tiene una infinidad de términos de la sucesión, entonces hacemos $A_1 = A$ y $B_1 = \frac{A+B}{2}$; de otra forma, $A_1 = \frac{A+B}{2}$ y $B_1 = B$. Siguiente, bisecamos $[A_1, B_1]$, y tomamos uno de los intervalos $[A_1, \frac{A_1+B_1}{2}]$ o $[\frac{A_1+B_1}{2}, B_1]$ que tenga infinitos términos de la sucesión para obtener $[A_2, B_2]$. Continuamos de la misma forma para obtener una sucesión de intervalos cerrados $[A_n, B_n]$ tales que:
Cada $[A_n, B_n]$ tiene una infinidad de términos de la sucesión $a_1, a_2, a_3, \cdots$.
Cada intervalo está contenido en el anterior: $[A_{n+1}, B_{n+1}] \subset [A_n, B_n]$.
La longitud de cada intervalo $[A_n, B_n]$ está dada por $B_n - A_n = \frac{B-A}{2^n}$.
Ahora bien, construimos una subsucesión de la siguiente forma: tomamos $a_{n_1} \in [A_1, B_1]$; luego, tomamos a_{n_2} de tal forma que $n_2 > n_1$ y $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$. Esto es posible porque $[A_2, B_2]$ contiene una infinidad de términos de la sucesión. Repetimos el proceso: una vez tomados $a_{n_1}, \cdots, a_{n_k}$, tomamos $n_{k+1} > n_k$ tal que $a_{n_{k+1}} \in [A_{k+1}, B_{k+1}]$.
Observamos ahora que, si el número $x \in \bigcap_n [A_n, B_n]$ (es decir, está en todo intervalo $[A_n, B_n]$, un hecho que se cumple por el axioma de completitud de los reales), entonces

$$|a_{n_k} - x| \leq \frac{B-A}{2^k} \to 0,$$

por lo que $a_{n_k} \to x$. Hemos encontrado una subsucesión convergente, lo que termina la demostración del teorema. ■

Muy útiles en lo sucesivo serán las siguientes caracterizaciones de la clausura de un conjunto.

Proposición 1.2.20. $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ *tal que* $x_n \to x$.

Demostración. Si $x \in \overline{A}$, por definición, $\forall n \in \mathbb{N}, B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$. Elegimos un punto $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$. Está claro que $x_n \to x$ porque $d(x_n, x) < 1/n$.

Recíprocamente, si $x_n \to x$ con $x_n \in A$, dado cualquier $r > 0$, existe$N(r)$ tal que $x_n \in B(x, r), \forall n > N(r)$, de donde $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, así $x \in A$. ■

Corolario 1.2.21. *A es cerrado si y sólo si dada cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en A y $x_n \to x$, entonces $x \in A$.*

Definición 1.2.22. *Un subconjunto M de un espacio métrico X es **denso** en X si $\overline{M} = X$. El espacio X se dice **separable** si posee algún subconjunto numerable que es denso en X.*

1.2.2. Aplicaciones entre espacios métricos

Definición 1.2.23. *Sean (X,d), (Y,d') espacios métricos. Se dice que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es continua en $x_0 \in X$ cuando*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 : f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon).$$

Si f es continua en todo $x \in X$, se llama **aplicación continua**.

Proposición 1.2.24. *$f : X \longrightarrow Y$ es continua en x_0 si y solo si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x_0 verifica $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.*

Demostración. a) Supongamos que f es continua en x_0.

Entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 : f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon).$$

Si $x_n \to x_0$, dado tal δ, existe N tal que $x_n \in B(x_0,\delta), \forall n > N$. Entonces $f(x_n) \in B(f(x_0),\varepsilon)$.

En definitiva, $\forall \varepsilon > 0, \exists N : f(x_n) \in B(f(x_0),\varepsilon),\ \forall n > N$.

De modo que $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

b) (Razonando por contradicción) Si f no es continua en x_0, entonces

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall \delta > 0,\ \exists y \in B(x_0,\delta) :\ f(y) \notin B(f(x_0),\varepsilon).$$

Si elegimos $\delta_n = 1/n$, encontramos una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in B(x_0,\delta_n)$ y $f(y_n) \notin B(f(x_0),\varepsilon)$. Entonces $y_n \to x_0$ pero $f(y_n) \nrightarrow f(x_0)$. Esto contradice la hipótesis.

Luego: f es continua en x_0.

∎

Proposición 1.2.25. *Sean X e Y dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$. Son equivalentes:*

i) f *es continua.*

ii) $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x),\ \forall x \in X.$

iii) $F \subset Y$ *es cerrado* $\Rightarrow f^{-1}(F) \subset X$ *es cerrado.*

iv) $A \subset Y$ *es abierto* $\Rightarrow f^{-1}(A) \subset X$ *es abierto.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$. Ya se ha probado en la proposición anterior.

$ii) \Rightarrow iii)$. Supongamos que f cumple ii); sea F cerrado en Y y $A = f^{-1}(F)$. Verifiquemos que $\overline{A} \subset A$.
Si $x \in \overline{A}, \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ tal que $x_n \to x$ (por la proposición 1.2.20). Por hipótesis, $f(x_n) \to f(x)$, pero $f(x_n) \in F \Rightarrow f(x) \in \overline{F}$. Como F es cerrado, $f(x) \in F \Rightarrow x \in f^{-1}(F) = A$.

$iii) \Rightarrow iv)$. Sea $A \subset Y$ abierto. Entonces $Y - A$ es cerrado y, por hipótesis,
$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$ es cerrado, entonces $f^{-1}(A)$ es abierto.

$iv) \Rightarrow i)$. Sea $x \in X$ y elegimos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Podemos decir que $B(f(x), \varepsilon)$ es abierto. Esto implica por hipótesis que $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ es abierto. Como $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, debe existir $\delta > 0$, tal que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. De aquí se deduce que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.
Así se completa la prueba. ■

1.2.3. Completitud en espacios métricos

Cuando un conjunto tiene ciertas propiedades, es interesante saber qué tipo de aplicaciones conservan dichas propiedades. Así, un isomorfismo preserva la linealidad de los vectores de un espacio e incluso permite identificar los dos espacios y tratarlos como uno solo. Veremos aquí un concepto similar para los espacios métricos.

Definición 1.2.26. *Dados dos espacios métricos* (X, d), (Y, d'), *sea* $f : X \longrightarrow Y$. *Si* f *es biyectiva y bicontinua (es decir, tanto* f *como* f^{-1} *son continuas),* f *se llama* ***homeomorfismo***.

Los homeomorfismo preservan las propiedades topológicas esenciales: así aplican abiertos de X en abiertos de Y y si $x \in A'$, $f(x) \in f(A)'$.

Definición 1.2.27. ***Isometría***

a) *Si una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios métricos verifica que:*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X : d(x_1, x_2) = d'(f(x_1), f(x_2)),$$

*entonces f se llama **isometría**.*

b) *Si existe una isometría biyectiva $f : X \longrightarrow Y$, diremos que los espacios métricos X e Y son isométricos.*

Dos espacios isométricos son indistinguibles respecto a la métrica aunque difieran en la naturaleza de sus puntos.

Definición 1.2.28. *Sea (X,d) un espacio métrico. Una aplicación $T : X \longrightarrow X$ se llama **contracción** si $\forall x, y \in X$, existe algún $r \in (0, 1)$ tal que $d(T_x, T_y) \leq r \cdot d(x, y)$.*

Proposición 1.2.29. *Toda contracción T en un espacio métrico (X,d), es continua.*

Demostración. Para probar que T es continua en $x_0 \in X$, debemos ver que

$$\forall B(Tx_0, \varepsilon), \exists B(x_0, \delta) : T(B(x_0, \delta)) \subset B(Tx_0, \varepsilon).$$

Sea pues $x \in B(x_0, \delta)$ un punto arbitrario; debe cumplirse que $Tx \in B(Tx_0, \varepsilon)$, es decir $d(Tx, Tx_0) < \varepsilon$. Como T es contracción, existe $r \in (0, 1)$ tal que $d(Tx, Tx_0) \leq r{\cdot}d(x, x_0) < r{\cdot}\delta$ Tomando $\delta = \varepsilon/r$, se verifica que $d(Tx, Tx_0) < \varepsilon$, como queríamos probar. ■

Definición 1.2.30. *Sea (X,d) un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy cuando $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall n, m > N$.*

Definición 1.2.31. *Un espacio métrico X, es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente en el mismo espacio.*

Ejemplo 1.2.32. *$X = \mathbb{Q}$, con $d(x, y) = |x - y|$ no es completo*

Veamos: La sucesión $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ es de Cauchy y converge a **e** *que no es racional. Comprobemos que en efecto ésta sucesión converge a* **e** *(para ello haremos uso de las propiedades del Cálculo). Equivale a decir que*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \mathbf{e} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}(1 + \frac{1}{n})^n &= 1 + \frac{n(\frac{1}{n})}{1!} + \frac{n(n-1)(\frac{1}{n})^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)(\frac{1}{n})^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(n^2 - n)(\frac{1}{n})^2 + \frac{1}{3!}\frac{(n^2 - n)}{n^2}\frac{(n-2)}{n} + \cdots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots\end{aligned}$$

Luego tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\} \tag{1.3}$$

Luego, simplificando el lado derecho de 1.2 tenemos que:

$$\mathbf{e}^n = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \frac{n^4}{4!} + \cdots$$

Pero necesitamos **e** *y no* $\mathbf{e}^n$*, entonces hacemos $n = 1$, así:*

$$\mathbf{e}^1 = \{1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \cdots\} \tag{1.4}$$

Tomando 1.3 y 1.4 encontramos que: $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \mathbf{e}$.

$$\therefore (1 + \tfrac{1}{n})^n \text{ converge a } \mathbf{e}.$$

Ejemplo 1.2.33. *El espacio ℓ^∞ es completo.*

Donde ℓ^∞ se define como $\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión acotada$\}$. Con $d(x, y) = sup_n|x_n - y_n|$. Tal que (X, d) es un espacio métrico.

Sea $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^∞. Entonces, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que, para $n, m > N$,

$d(x^{(m)}, x^n) < \varepsilon$ así $|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon, \forall i \in \mathbb{N}$, luego $(x_i^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$, pero $\mathbb{C}$ es completo, de donde existe $x_i \in \mathbb{C}$ tal que $x_i^{(n)} \to x_i$.

Como $|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon$ y $x_i^{(n)} \to x_i$, así haciendo n lo suficientemente grande se tiene que

$|x_i^{(m)} - x_i| \leq \varepsilon$.

Si llamamos $x = (x_1, x_2, \cdots)$, *entonces* $d(x^{(m)}, x) \leq \varepsilon$, *es decir* $x^{(m)} \to x$.

Por otra parte, como la sucesión $(x_i^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ *converge a* x_i, *está acotada, es decir* $\exists k > 0 :$ $|x_i^{(m)}| < k, \forall m$. *Aplicando la desigualdad triangular,*

$$|x_i| \leq |x_i - x_i^{(m)}| + |x_i^{(m)}| < \varepsilon + k,$$

lo que significa que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *está acotada. Así,* $x \in \ell^\infty$.

Proposición 1.2.34. *Un subconjunto* M *de un espacio métrico completo* X *es completo si y sólo si* M *es cerrado en* X.

Demostración. Sea M completo. Entonces, $\forall x \in \overline{M}, \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in M$, $\forall n$ tal que $x_n \to x$. Pero como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, es de Cauchy; por tanto converge en M porque M es completo, lo que prueba que $x \in M$.

Recíprocamente, sea M cerrado y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en M.

Por ser X completo, $x_n \to x \in X \Longrightarrow x \in \overline{M} \Longrightarrow x \in M$. ■

Definición 1.2.35. *Dado un espacio métrico* (X, d), *un espacio* (X^*, d^*) *se llama* ***compleción*** *de* (X, d) *si existe* X_0 *subespacio denso de* X^* *tal que* (X, d) *es isométrico a* (X_0, d^*).

Definición 1.2.36. *Diremos que una sucesión* $\{A_n\}_n \in \mathbb{N}$ *de subconjuntos de* X *es un* ***encaje*** *cuando* $A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ *y* $diam A_n \to 0$.

1.2.4. Compacidad en espacios métricos.

Definición 1.2.37. *Una familia* $\{A_i\}_{i \in I}$ *de conjuntos se llama* ***cubrimiento*** *de un conjunto* A *cuando* $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. *Dado un cubrimiento* $\{A_i\}_{i \in I}$ *de* A, *se llama* ***subcubrimiento*** *a todo cubrimiento* $\{A_i\}_{i \in J}$ *tal que* $J \subset I$.

Definición 1.2.38. *Un subconjunto* M *de un espacio métrico* X *es compacto si todo cubrimiento por abiertos de* M *posee algún subcubrimiento finito (llamada* ***propiedad de Borel-Lebesgue****).*

Así, por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la métrica usual, el intervalo abierto $(0, 1)$ no es compacto pues del cubrimiento $\{(1/n,\ 1),\ n \in \mathbb{N}\}$ no se puede extraer ningún subcubrimiento finito.

Si consideramos $A = (0, 1)$ y la cubierta $\{(\frac{1}{n}, 1)\}_{n=1}^{\infty}$.
Esta cubierta no tiene subcubierta finita, ya que

$$(\tfrac{1}{n_1}, 1) \cup (\tfrac{1}{n_2}, 1) \cup \cdots \cup (\tfrac{1}{n_k}, 1) = (\tfrac{1}{N}, 1)$$

donde $N = máx\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ y además $\frac{1}{N} > 0$,
por lo que $(\frac{1}{N}, 1)$ no cubre a A.
La cubierta $\{(\frac{1}{n}, 1)\}$ no tiene subcubierta finita.

Definición 1.2.39. *Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X. $\mathcal{A}$ tiene* ***la propiedad de intersección finita*** *si cualquier subcolección finita de $\mathcal{A}$ tiene intersección no vacía.*

Definición 1.2.40. *Un espacio X es* ***secuencialmente compacto*** *si cualquier sucesión en X tiene una subsucesión convergente en X.*

Definición 1.2.41. *Un espacio topológico X tiene la* ***propiedad de Bolzano-Weierstrass*** *siempre que cualquier subconjunto infinito de X tiene un punto límite.*

Teorema 1.2.42. *Si Y es un subespacio de X, entonces $A \subset Y$ es compacto en Y si y sólo si, es compacto en X.*

Demostración. Supóngase que $A \subset Y$ es compacto en Y. Entonces cualquier cubierta de A, en Y, tiene una subcubierta finita. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta de A en X, es decir, los conjuntos U_α son abiertos en X. Ahora bien, como $A \subset Y$, los conjuntos $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$ forman una cubierta de A en Y, ya que cada V_α es abierto en Y y,

$$A = A \cap Y \subset \bigcup_\alpha \cup_\alpha \cap Y = \bigcup_\alpha V_\alpha.$$

Como A es compacto en Y, $\{V_\alpha\}$ tiene una subcubierta finita, digamos $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \cdots, V_{\alpha_k}\}$.
Por lo tanto $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_k}\}$ es una subcubierta finita de A en X.
Para la inversa, supongamos que $A \subset Y$ y que A es compacto en X: Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta de A en Y (es decir, los U_α son abiertos en Y), Entonces, para cada α, existe un abierta V_α en X tal que,

$$U_\alpha = Y \cap V_\alpha.$$

Como $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, entonces

$$A \subset \bigcup_\alpha V_\alpha.$$

Así que $\{V_\alpha\}$ es una cubierta de A en X. Como A es compacto en X, existe una subcubierta finita, digamos,

$$\{V_{\alpha_1}, \cdots, V_{\alpha_k}\}.$$

Entonces,

$$\{U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_k}\}.$$

es una subcubierta finita de A en Y, y por lo tanto es compacto en Y. ■

Proposición 1.2.43. *Sea X un espacio compacto, y $E \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces E es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta de E. Como E es cerrado, entonces $X \backslash E$ es abierto, por lo que entonces $\{X \backslash E\} \cup \{U_\alpha\}$ es una cubierta de X. Como X es compacto, esta cubierta tiene una subcubierta finita, que a su vez induce una subcubierta finita de $\{U_\alpha\}$ para E, prescindiendo de $X \backslash E$. ■

Proposición 1.2.44. *Sea (X, d) un espacio métrico y F un subespacio métrico compacto, entonces F es cerrado en X.*

Demostración. Si F no fuese cerrado, entonces tiene un punto de acumulación no contenido en sí mismo, digamos x.
Demostraremos que ésto implica que F no es compacto.
Sea $\bar{B}_{1/n}(x)$ la bola cerrada de radio $\frac{1}{n}$ con centro en x.
como $\bar{B}_{1/n}(x)$ es cerrado, entonces $U_n = X \backslash \bar{B}_{\frac{1}{n}}(x)$ es abierto $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces es una cubierta de F, ya que,

$$\bigcup_n U_n = \bigcup_n (X \backslash \bar{B}_{1/n}(x)) = X \backslash \bigcap_n \bar{B}_{1/n}(x) = X \backslash \{x\} \supset F,$$

porque x no está en F. Ahora bien, si $\{U_{n_1}, U_{n_2}, \cdots, U_{n_k}\}$ es un subconjunto finito de $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces

$$U_{n_1} \cup U_{n_2} \cup \cdots \cup U_{n_k} = X \backslash \bar{B}_{1/N}(x),$$

donde,

$$N = \text{máx}\{n_1, \cdots, n_k\}.$$

Sin embargo, tal unión no contiene a F porque x es un punto de acumulación y, por lo tanto, $F \cap \bar{B}_{1/N}(x) \neq \emptyset$. Entonces $\{U_n\}$ no tiene subcubiertas finitas, por lo que F no es compacto. ■

Definición 1.2.45. *Sea (X, d) un espacio métrico. X es totalmente acotado si, para cada $\varepsilon > 0$, existen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ tales que,*

$$X \subset B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_n).$$

Es decir, para cada $\varepsilon > 0$, X puede ser cubierto por un número finito de bolas de radio ε.
Si X es compacto y $\varepsilon > 0$, entonces la colección $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$ es una cubierta de X, la cual tiene una subcubierta finita por compacidad. Por lo tanto X es ***totalmente acotado****.*

Observaciones 1.2.46. Esta definición es equivalente a la definición **1.2.15**.

Lema 1.2.47. ***(Lebesgue)****. Sea (X, d) un espacio secuencialmente compacto y $\{U_\alpha\}$ una cubierta de X. Entonces existe $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in X$, existe α tal que $B_\delta(x) \subset U_\alpha$.*
-Es decir, todas las bolas de radio δ están contenidas en algún conjunto de la colección $\{U_\alpha\}$. El número δ no depende de x ó α.
-El supremo de todos los $\delta > 0$ que satisfacen esta condición es llamado el ***número de Lebesgue*** *de la cubierta $\{U_\alpha\}$. Este número depende de X, de la métrica d y de la cubierta.*

Demostración. Demostraremos este lema por contradicción.
Supongamos que para todo $\delta > 0$ existe $x_j \in X$, tal que para todo α, $B_j(x_j) \nsubseteq U_\alpha$.
Entonces podemos construir una sucesión (x_n), en X, tal que $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ no está contenida en ningún U_α.
Como X es secuencialmente compacto, (x_n) tiene una subsucesión convergente, digamos $x_{n_k} \longrightarrow x$ en X.
Como $\{U_\alpha\}$ es una cubierta, $x \in U_{\alpha_0}$ para algún α_0 pero, U_{α_0} es abierto, por lo que $B_\varepsilon(x) \subset U_{\alpha_0}$ para algún $\varepsilon > 0$.
Ahora bien, $x_{n_k} \longrightarrow x$. Así existe un entero N, tal que $d(x_N, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sin embargo, ésto implica que, $B_{\frac{1}{N}}(x_N) \subset U_{\alpha_0}$ porque, si $z \in B_{\frac{1}{N}}$, entonces $d(z, x_N) < \frac{1}{N}$, por la desigualdad del triángulo,

$$d(z, x) \leq d(z, x_N) + d(x_N, x) < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y $z \in B_\varepsilon(x) \subset U_{\alpha_0}$. Por tanto este hecho nos conlleva una contradicción

■

Teorema 1.2.48. ***(Bolzano-Weierstrass)***. *Sea (X, d) un espacio métrico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i. X es compacto.

ii. Si $A \subset X$ es infinito, entonces A tiene al menos un punto de acumulación.

iii. X es secuencialmente compacto y X es totalmente acotado.

Mostraremos que compacidad secuencial es equivalente a compacidad.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Suponemos que X es compacto y que A es un subconjunto de X que no tiene puntos de acumulación.

Demostraremos que A es finito.

Como A no tiene puntos de acumulación, es un conjunto cerrado. Luego $U = X \backslash A$ es abierto. Además, para cada $x \in A$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que,

$$B_{\varepsilon_x}(x) \cap A = \{x\}$$

porque x no es un punto de acumulación de A.

Sea $U_x = B_{\varepsilon_x}(x)$, entonces la colección $\{U\} \cup \{U_x\}_{x \in A}$ es una cubierta de X y como X es compacto, tiene una subcubierta finita, digamos $U, U_1, U_2, ..., U_k$ de donde $A \subseteq U_1, U_2, ..., U_k$. Como cada U_i tiene un solo punto de A, podemos concluir que A tiene k puntos, Es decir A es finito.

$ii) \Rightarrow iii)$ Suponemos ahora que todo conjunto infinito de X tiene un punto de acumulación, y mostraremos que X es secuencialmente compacto, es decir, toda sucesión en X tiene una sucesión que converge en X.

Sea (x_n) una sucesión en X.

Caso 1) Si (x_n) es un conjunto finito, entonces tiene una subsucesión convergente.

Caso 2) Sea $\{x_n : n \geq 1\}$ un conjunto infinito entonces tiene un punto de acumulación, digamos x.

Si $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $B(x, \frac{1}{k}) \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$, entonces existe $x_m \in B(x, \frac{1}{k}) \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de donde existe $x_m \in (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_m \in B(x, \frac{1}{k})$.

Sea $n_k = min\{m : x_m \in (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ y \ x_m \in B(x, \frac{1}{k})\}$.

Sea $n_{k+1} = min\{m : x_m \in (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ y \ x_m \in B(x, \frac{1}{k+1}) - \{x_{n_k}\}\}$, de esta manera $n_{k+1} > n_k$.

Ahora bien, para cada k podemos escoger x_{n_k} tal que $n_{k+1} > n_k$ y, además $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x)$, ya que x es un punto de acumulación de x_n.

Como $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$ para cada k, x_{n_k} es una sucesión de x_n que converge a x.

Ahora probemos que X es totalmente acotado.

Supongamos que no lo es, así existe $\varepsilon > 0$ tal que X no se puede cubrir por un número finito de bolas de radio ε.

Construiremos un subconjunto infinito de X (una sucesión) que no tiene puntos de acumulación.

Sea $z \in X$. Entonces $\{z_1\}$ es un subconjunto finito de X, así existe $x_2 \in X$ tal que $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$.

Procediendo por inducción. Supongamos $n \in \mathbb{N}$ y un subconjunto $\{x_i : i = 1, \cdots, n\}$ de X que se ha construido con la propiedad que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ para todo $i, j = 1, \cdots, n$; $i \neq j$. Entonces $\{x_i : i = 1, \cdots, n\}$ es finito así, como X no se puede cubrir por un número finito de bolas de radio ε, debe existir $x_{n+1} \in X$ tal que $d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon$ para todo $j = 1, \cdots, n$. Por lo tanto por inducción debe existir un subconjunto $A = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$, así toda subsucesión de A no sería de Cauchy por lo cual no sería convergente, de donde A no tiene puntos de acumulación, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto X es totalmente acotado.

$iii) \Rightarrow i)$ Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta de X. Como X es secuencialmente compacto, el lema de Lebesgue establece la existencia de un $\delta > 0$ tal que toda bola de radio δ está contenida en algún U_α.

Además, como X es totalmente acotado, existen $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ tal que,

$$X \subset B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2) \cup \cdots \cup B_\delta(x_n).$$

Ahora bien, sea α_i tal que $B_\delta(x_i) \subset U_{\alpha_i}$. Entonces,

$$X \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n},$$

y, por lo tanto, $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_n}\}$ es una subcubierta finita de $\{U_\alpha\}$. ■

Lema 1.2.49. *Un subconjunto compacto de un espacio métrico X es cerrado y acotado.*

Demostración. Sea $M \subset X$ un conjunto compacto y $x \in \overline{M}$.
Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, x_n que converge a x.
Como M es compacto, $x \in M$ (pues las subsucesiones deben tener el mismo límite que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$).
Si M no fuera acotado, dado $b \in M$, $\exists \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en M tal que $d(y_n, b) > n$.
Sea $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, así por lo anterior $d(y_{n_k}, b) > n_k$, luego (y_{n_k}) no puede ser acotada, por lo tanto no puede ser convergente. De manera que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene una subsucesión convergente, lo cual es una absurdo ya que M es compacto. ■

Definición 1.2.50. *Un conjunto A de un espacio métrico X es relativamente compacto si su clausura $\bar{A}$ es compacta.*

Corolario 1.2.51. *Si el espacio métrico (X, d) es completo y totalmente acotado, entonces es compacto.*

Demostración. Si X es completo y totalmente acotado, demostraremos que X es secuencialmente compacto, y luego por el teorema de Bolzano-Weierstras se tendrá que X es compacto.
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y asumimos que tiene rango infinito. Ahora bien, como X es totalmente acotado, X es cubierto por un número finito de bolas de radio 1. Sea B_1 alguna de estas bolas que contengan un número infinito de términos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A su vez, B_1 es totalmente acotado y podemos entonces encontrar una bola de radio $1/2$, a la cual llamamos B_2, que contiene infinitos términos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, contenidos en B_1.
Por inducción, tenemos bolas B_k de radio $1/k$ tal que cada una contiene un número infinito de términos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenidos en B_{k-1}.
Podemos entonces escoger una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que,

$$x_{n_k} \in B_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

Demostraremos que (x_{n_k}) es de Cauchy y, por la completitud de X, converge.

Sea $\varepsilon > 0$ y $K > 2/\varepsilon$. Por construcción, para todo $k \geq K$,

$$x_{n_k} \in B_K$$

y B_K es una bola de radio $1/K < \varepsilon/2$. Entonces, si k, $l \geq K$,

$$x_{n_k}, x_{n_l} \in B_K$$

y

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq d(x_{n_k}, y_0) + d(y_0, x_{n_l}) < 1/K + 1/K = 2/K < \varepsilon,$$

donde y_0 es el centro de B_K. Por lo tanto, la subsucesión (x_{n_k}) es una sucesión de Cauchy, como queríamos demostrar.

$\blacksquare$

1.3. Ejercicios

1. Sea d una métrica en X. Determinar todas las constantes k para las que

   i. kd

   ii. $d+k$

   es una métrica sobre X.

   Sugerencia:

   i. Sea $d' = kd$. Para que $d'(x,y) > 0$, debe ser $k > 0$.

   ii. Sea $d'' = d+k$. Para que $d''(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

2. Si A es el subespacio de l^∞ formado por las sucesiones de ceros y unos, ¿cuál es la métrica inducida sobre A?

3. Determinar si la aplicación $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definidas por $d(x,y) = \mid x^2 - y^2 \mid$ es una distancia. Si no lo es, decir si existe un subconjunto de la recta en que sí lo sea. Dar el mayor de los conjuntos que lo cumplen.

   Sugerencia: Si $d(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 = y^2$, pero puede ser $x = -y$ lo que implica que d no es distancia.

4. Sea (X,d) un espacio métrico cualquiera. Demostrar que la aplicación $D : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ es también una distancia sobre X.

   Sugerencia: La función $y = \dfrac{x}{1+x}$ es creciente, resulta que:

$$D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(y,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)}$$

5. Si (X_1,d_1) y (X_2,d_2) son espacios métricos, probar que en el espacio producto

$$X = X_1 \times X_2$$

   se pueden definir las métricas siguientes:

$$d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2),$$

$$\bar{d}(x,y) = \text{máx}\{d_1(x_1,y_1),\ d_2(x_2,y_2)\},$$

   donde $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in X$.

Sugerencia: Probar para d y d'

i) **Positividad**: para cada $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$.

ii) **Propiedad idéntica**: dados $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

iii) **Simetría**: para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

iv) **Desigualdad del triángulo**: para cada $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

6. Probar que la clausura $\overline{B(x_0, r)}$ de una bola abierta $B(x_0, r)$ en un espacio métrico puede ser distinta de la bola cerrada $\overline{B}(x_0, r)$.

   Sugerencia: Sea X un conjunto cualquiera con la métrica discreta, y $x_0 \in X$ arbitrario. Entonces $B(x_0, 1) = \{x \in X : d(x, x_0) < 1\}$.

7. Probar que un espacio métrico X es separable si y sólo si existe $Y \subset X$ numerable tal que $\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, x \in X, \exists\, y \in Y : d(x, y) < \varepsilon$.

   Sugerencia: Si X es separable, existe por definición $M \subset X$ numerable tal que $\forall\, x \in X,\ \exists\, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

   Recíprocamente, si $\forall x \in X, \exists y \in Y : d(x, y) < \varepsilon$, entonces $x \in \bar{Y}$.

8. Un espacio métrico se dice localmente compacto si todo punto tiene un entorno compacto. Probar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son espacios localmente compactos pero no compactos.

   Sugerencia: Dado un punto arbitrario x en $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$ cualquier bola cerrada centrada en x es un compacto.

8. Probar que todo espacio con la métrica discreta es completo.

   Sugerencia: La sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X, entonces $\forall\, n,\ m > N,\ x_n = x_m$.

Capítulo 2

Espacios de Banach y espacios de Hilbert

2.1. Espacios normados y espacios de Banach

En un espacio vectorial X son de particular importancia las métricas que verifican:

- $d(x+a, y+a) = d(x, y)$, es decir, d es invariante por traslaciones,
- $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\ d(x, y)$, es decir, d aumenta proporcionalmente a la dilatación,

En este sentido, basta conocer $d(x, 0)$, $\forall\, x \in X$ para determinar completamente la distancia entre dos elementos cualesquiera, ya que $d(x, y) = d(x-y, 0)$. Definimos entonces la longitud de norma de un vector x por $||x|| = d(x, 0)$. Esto sugiere, en un contexto abstracto, la siguiente definición axiomática.

Definición 2.1.1. *Una **norma** sobre un espacio vectorial X es una aplicación que va de X a $\mathbb{R}$; $||.|| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que:*

- *(N1)* $||x|| \geq 0$.
- *(N2)* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- *(N3)* $||\alpha x|| = |\alpha|\, ||x||$.
- *(N4)* $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$. *(Desigualdad del triángulo)*

Llamaremos a X: ***espacio normado****. En el caso que se cumplan todas excepto (N2), la aplicación* $||.||$ *se llama* ***seminorma****.*

Definición 2.1.2. *Una norma en un espacio vectorial X define una métrica d en X que viene dada por $d(x, y) = ||x - y||$. A d se le llama* ***métrica inducida por la norma****. El espacio normado que se acaba de definir se denota por $(X, ||.||)$ o simplemente X.*

Observaciones 2.1.3.

1. Todo espacio normado es a su vez un espacio métrico. Así, todas las nociones de espacios métricos están definidas también para los espacios normados. En particular, los conjuntos $\mathcal{B}(0, 1) = \{x \in X : ||x|| < 1\}$, $\bar{\mathcal{B}}(0, 1) = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ son las bolas unitarias abierta y cerrada de X, respectivamente.

2. El recíproco de lo anterior no es cierto, es decir, no todo espacio métrico es normado. Un ejemplo de esto es $X = \{(a_1, \cdots, a_n, \cdots) : a_n \in \mathbb{C}\}$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ es espacio vectorial; si definimos

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|},$$

podemos ver que cumple todas las propiedades para ser espacio métrico, pero para $\lambda \in \mathbb{C}$, $d(\lambda x, \lambda y) \neq |\lambda| \, d(x, y)$ con lo que, si definiéramos la “norma”a partir de la distancia, obtendríamos $||\lambda x - \lambda y|| \neq |\lambda| \, ||x - y||$ y X no sería espacio normado de esa forma .

Sin embargo la motivación dada al principio permite probar lo siguiente.

Teorema 2.1.4. ***(Traslación invariante)***

Una métrica inducida por una norma en un espacio normado X, satisface:

1. $d(x + \alpha, y + \alpha) = d(x, y)$; $\forall\, x,\, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{K}$.

2. $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$; $\forall\, x,\, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{K}$.

Demostración. Sea $(X, ||.||)$ un espacio normado.

1. $d(x+\alpha, y+\alpha) = ||(x+\alpha)-(y+\alpha)|| = ||x-y|| = d(x,y)$.

2. $d(\alpha x, \alpha y) = ||\alpha x - \alpha y|| = ||\alpha(x-y)|| = |\alpha|\,||x-y|| = |\alpha| d(x,y)$.

■

Definición 2.1.5. *Un **espacio de Banach** es un espacio normado completo con la métrica inducida por la norma o completo con esa norma. (Completo hace referencia a que cualquier sucesión de Cauchy tomada en el espacio converge en el mismo espacio).*

Cuando queremos demostrar que un espacio es de Banach, tendremos que probar que dicho espacio es completo, generalmente podemos usar el siguiente esquema para dicha demostración:

1. Tomar una sucesión de Cauchy arbitraria en el espacio.

2. Construir un candidato a límite para esa sucesión.

3. Demostrar que el candidato construido pertenece al espacio.

4. Demostrar que la sucesión converge al candidato.

Teorema 2.1.6. *Un subconjunto métrico M de un espacio métrico completo X, es completo si y sólo si M es cerrado en X.*

Demostración. Para demostrar este teorema usaremos el siguiente hecho: M es cerrado si y sólo si (x_n) converge a $x \in X$, entonces $x \in M$. Supongamos que (M, d_M) es completo y también (X, d) lo es, probaremos que M es cerrado.
Sea $(x_n) \subset M$ una sucesión convergente en X, como (x_n) converge, entonces es de Cauchy en X, por tanto es de Cauchy en M, dado que M es completo, el límite de (x_n) pertenece a M, así M es cerrado en X.
Ahora supongamos que M es cerrado en X y probemos que es completo.
Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en M, como $M \subset X$, la sucesión converge a algún $x \in X$, pero como M es cerrado así $x \in M$, de modo que cualquier sucesión de Cauchy en M converge en M, por tanto es completo. ■

Observaciones 2.1.7. El resultado anterior también podemos obtenerlo como resultado inmediato de la proposición **1.2.34**.

Ejemplo 2.1.8. *Determine si el conjunto de números naturales* $\mathbb{N}$ *es completo con la métrica usual en* $\mathbb{R}$*.*

Demostración. Para determinar si $\mathbb{N}$ es completo usaremos el teorema anterior, veamos entonces si $\mathbb{N}$ es cerrado.

Sea d la métrica usual, supongamos que $\mathbb{N}$ no es cerrado. Como $\mathbb{N}$ no es cerrado, $\exists x \in \overline{\mathbb{N}}$ tal que, $x \notin \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.
Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tal que, $n_1 < x < n_2,\ d(n_1, n_2) = 1$.
Como $x \ \in \ \overline{\mathbb{N}}$, entonces $\forall\, \epsilon > 0,\ \ \mathcal{B}(x, \epsilon) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$,
Sea $\epsilon = \text{mín} \left\{ \dfrac{d(x, n_i)}{2} : \quad i = 1, 2 \right\}$ y formemos la bola abierta $\mathcal{B}(x, \epsilon)$. (Ver figura 2.1) Dado

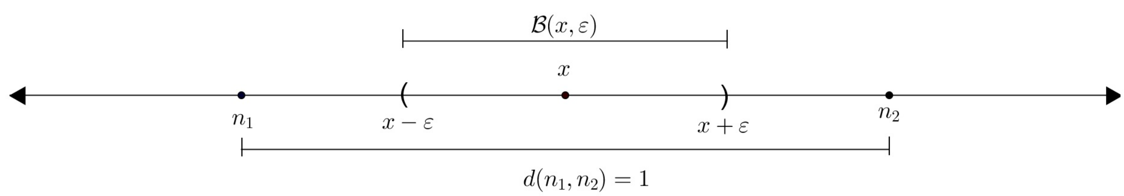


Figura 2.1: *Bola abierta*

que $\mathcal{B}(x, \epsilon) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \mathcal{B}(x, \epsilon)(\rightarrow\leftarrow)$
De donde $\nexists \in \overline{\mathbb{N}}$ tal que, $x \notin \mathbb{N}$, así $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, por tanto $\mathbb{N}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

$\therefore$ $\mathbb{N}$ es completo con la métrica usual.

∎

Ejemplo 2.1.9. $\mathbb{R}^n$ *es un espacio de Banach, es decir, es completo con la métrica usual.*

Demostración. Sea (x_m) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, donde

$x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})$.

Construiremos para esta sucesión un candidato a límite, por ser (x_n) de Cauchy sabemos que,

$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que, $d(x_m, x_k) < \epsilon;\ \forall\, m,\, k \geq N$,

$\sqrt{(x_1^{(m)} - x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(m)} - x_2^{(k)})^2 + \cdots + (x_n^{(m)} - x_n^{(k)})^2} < \epsilon$,

fijemos ahora j tal que, $1 \leq j \leq n$; si elevamos al cuadrado en ambos miembros de la desigualdad, se elimina el radical en el miembro izquierdo y en el derecho obtenemos ϵ^2; además dado que cada sumando en el miembro izquierdo está elevado al cuadrado, así cada uno es positivo y por lo tanto menor que ϵ^2, en particular para j.

$\Rightarrow (x_j^{(m)} - x_j^{(k)})^2 < \epsilon^2$,

$\Rightarrow \sqrt{(x_j^{(m)} - x_j^{(k)})^2} < \epsilon$,

$\Rightarrow |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}| < \epsilon;\ \forall\, m,\, k \geq N$,

$\Rightarrow (x_j^m)_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, con j fijo.

$\Rightarrow x_j^m \to x_j^*$, donde $x_j^* \in \mathbb{R}$ por ser $\mathbb{R}$ completo.

Sea $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$, este es un elemento de $\mathbb{R}^n$, ya que cada x_i^* está en $\mathbb{R}$ por el anterior razonamiento.

Probemos ahora que (x_m) converge a (x^*).

Sea $\epsilon > 0$,

como $x_j^{(m)} \longrightarrow x_j^*$, para todo $1 \leq j \leq n$, entonces para todo $(x_j^{(m)})$ existe N_j tal que:

$$\begin{aligned} d(x_j^{(m)}, x_j^*) &\leq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}, && \forall\, m > N_j \\ \Rightarrow\ ||x_j^{(m)} - x_j^*|| &\leq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}, && \forall\, m > N_j \end{aligned}$$

hacemos $N = \max\limits_{1\leq j\leq n} \{N_j\}$, entonces para todo $1 \leq j \leq n$ tenemos:

$$||x_j^{(m)} - x_j^*|| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}, \qquad \forall\ m > N,\ \forall\ \ 1 \leq j \leq n$$

Luego,

$$\begin{aligned}
d(x_m, x^*) &= \sqrt{(x_1^{(m)} - x_1^*)^2 + \cdots + (x_n^{(m)} - x_n^*)^2} \\
&< \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)^2}, \qquad \textit{cuando} \qquad m \longrightarrow \infty, \\
&= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{n} + \cdots + \frac{\epsilon^2}{n}}, \\
&= \sqrt{n \cdot \frac{\epsilon^2}{n}}, \\
&= \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon, \\
&\Rightarrow x_m \longrightarrow x^*, \qquad \textit{cuando} \qquad m \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

$\therefore$ $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach. ■

Ejemplo 2.1.10. $\mathbb{C}^n$ *es un espacio de Banach, es decir, es completo con su métrica usual.*

Demostración. Análogo a la demostración que $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach, usamos el hecho que $\mathbb{C}$ es completo con la métrica usual. ■

Ejemplo 2.1.11. $\mathbb{Q}$ *no es de Banach con la métrica* $d(x, y) = |x - y|$

Demostración. Si tomamos la sucesión $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, dicha sucesión es de Cauchy, porque converge a $\mathbf{e} \notin \mathbb{Q}$, de modo que $\mathbb{Q}$ no es completo con esa métrica y por lo tanto no es de Banach. ■

Todo espacio métrico tiene una completación y dos completaciones de un mismo espacio métrico son isométricas, esto se probará en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.12. ***(Completitud de un espacio métrico)***
Para un espacio métrico (X, d)*, existe un espacio métrico completo* $(\hat{X}, \hat{d})$ *el cuál tiene un subespacio métrico* W *que es isométrico a* X *y es denso en* $\hat{X}$*, este espacio* $\hat{X}$ *es único salvo isometría.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico, dadas dos sucesiones de Cauchy en X definamos la relación "$\sim$"tal que si (a_n) y (b_n) son sucesiones de Cauchy en X, entonces:

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0; \text{ es una relación de equivalencia}$$

Probemos que "$\sim$"es una relación de equivalencia.

1. "Reflexividad":

   Sea (a_n) una sucesión de Cauchy en X, donde $(a_n) = (a_1, a_2, ...)$; dado que d es una métrica en X, entonces $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
   así $d(a_i, a_i) = 0$; $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(a_n, a_n) = 0$, así $(a_n) \sim (a_n)$.

2. "Simetría":

   Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de Cauchy en X tal que $(a_n) \sim (b_n)$, así estas cumplen que $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(b_n, a_n) = 0$ ya que $d(x, y) = d(y, x)$, por ser d una métrica en X, de manera que $(b_n) \sim (a_n)$.

3. "Transitividad":

   Sean (a_n), (b_n) y (c_n) tres sucesiones de Cauchy en X, tal que $(a_n) \sim (b_n)$ y $(b_n) \sim (c_n)$, probaremos que $(a_n) \sim (c_n)$.

   Sea $\epsilon > 0$.

   Como $(a_n) \sim (b_n)$, $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$, esto implica que:
   $\exists\, N_1$ *tal que* $|d(a_n, b_n) - 0| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\, n \geq N_1$,
   $$\Rightarrow |d(a_n, b_n)| < \frac{\epsilon}{2},\ \forall\, n \geq N_1 \ \Rightarrow\ d(a_n, b_n) < \frac{\epsilon}{2},\ \forall\, n \geq N_1 \qquad (1)$$

   Como $(b_n) \sim (c_n)$, $\lim_{n\to\infty} d(b_n, c_n) = 0$, esto implica que:
   $\exists\, N_2$ *tal que* $|d(b_n, c_n) - 0| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\, n \geq N_2$,
   $$\Rightarrow |d(b_n, c_n)| < \frac{\epsilon}{2},\ \forall\, n \geq N_2 \ \Rightarrow\ d(b_n, c_n) < \frac{\epsilon}{2},\ \forall\, n \geq N_2. \qquad (2)$$

   Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$.

$\Rightarrow d(a_n, c_n) \leq d(a_n, b_n) + d(b_n, c_n)$, por ser d una métrica.

$\Rightarrow d(a_n, c_n) < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2}$, $\forall\, n \geq N$,

$\Rightarrow d(a_n, c_n) < \epsilon$, $\forall\, n \geq N$,

$\Rightarrow |d(a_n, c_n) - 0| < \epsilon$, $\forall\, n \geq N$,

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, c_n) = 0$,

$\Rightarrow (a_n) \sim (c_n)$,

$\therefore$ "$\sim$"es una relación de equivalencia.

Formemos entonces el espacio de todas las clases de equivalencias,

$\hat{X} = \{[(a_n)] :\ (a_n)\ \textit{es de Cauchy en}\ X\}$.

Definamos la métrica en el espacio $(\hat{X}, \hat{d})$.

$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n);\quad \forall\, \hat{x},\ \hat{y}\ \in\ \hat{X}$.

Probemos que este límite siempre existe:

Sea (x_n) y (y_n) dos sucesiones de Cauchy en X.

$\Rightarrow d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_m)$,

$\Rightarrow d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m)$,

$\Rightarrow d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m), \quad (i)$

además,

$\Rightarrow d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_n)$,

$\Rightarrow d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$,

$\Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m), \quad (ii)$

Luego por (i) y (ii), tenemos:

$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m), \quad (iii)$

Pero como (x_n) y (y_n) son de Cauchy en (X, d), *dado* $\epsilon > 0$,

$\exists\, N_1,\ N_2 \in\ \mathbb{N}\ \textit{tal que}:$

$d(x_n, x_m) \leq \dfrac{\epsilon}{2};\ \forall\, n,\ m \geq N_1, \quad (iv)$

$d(y_n, y_m) \leq \dfrac{\epsilon}{2};\ \forall\, n,\ m \geq N_2. \quad (v)$

Sea $N = \max\{N_1,\ N_2\}$, entonces de (iv) y (v) en (iii) tenemos:

$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2};\ \forall\, n,\ m \geq N$, de donde
$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq \epsilon;\ \forall\, n,\ m \geq N$.

Así $(d(x_n, y_n))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, y dado que en $\mathbb{R}$ todas las sucesiones de Cauchy convergen por ser completo, así $(d(x_n, y_n))$ converge, de manera que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ siempre existirá; ahora queremos saber si este límite es independiente de la elección de los representantes.

Sean (x_n), (x'_n), (y_n) y (y'_n) cuatro sucesiones de Cauchy en X tal que: $(x_n) \sim (x'_n)$ y $(y_n) \sim (y'_n)$.

$\Rightarrow |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)$, esto por (iii)
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq \lim\limits_{n\to\infty} (\, d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)\,)$,
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) + \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, y'_n)$,
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq 0 + 0 = 0$; por ser $(x_n) \sim (x'_n)$ y $(x_n) \sim (x'_n)$.
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| = 0$,
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) - \lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) = 0$,
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$,
$\Rightarrow \hat{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \hat{d}([(x'_n)], [(y'_n)])$,
$\therefore\ \hat{d}$ es función.

Así, el límite es independiente de la elección de los representantes; falta demostrar que $\hat{d}$ es efectivamente una métrica.

1. $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n); \quad \forall\, \hat{x},\ \hat{y} \in \hat{X}$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \geq 0$ dado que d es una métrica en X.
   $\therefore \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) \geq 0; \quad \forall\, \hat{x},\ \hat{y} \in \hat{X}$.

2. Probemos que dados $\hat{x},\ \hat{y} \in \hat{X}$, $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ si y sólo si $\hat{x} = \hat{y}$.
   $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \ \Leftrightarrow\ (x_n) \sim (y_n)$
   $\Leftrightarrow\ [(x_n)] = [(y_n)]\ \Leftrightarrow\ \hat{x} = \hat{y}$.
   $\therefore\ \ \hat{x},\ \hat{y} \in \hat{X}$, $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ si y sólo si $\hat{x} = \hat{y}$.

3. Sean $\hat{x},\ \hat{y}\ \in\ \hat{X}$.

   $\Rightarrow \hat{d}(\hat{x},\hat{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \hat{d}(\hat{y},\hat{x})$,

   $\therefore\ \hat{x},\ \hat{y}\ \in\ \hat{X}\ \Rightarrow\ \hat{d}(\hat{x},\hat{y}) = \hat{d}(\hat{y},\hat{x})$.

4. Probemos ahora que: $\forall\ \hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z}\ \in\ \hat{X},\ \ \hat{d}(\hat{x},\hat{y}) \leq \hat{d}(\hat{x},\hat{z}) + \hat{d}(\hat{z},\hat{y})$.

   Sean $\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z}\ \in\ \hat{X}$, entonces:

   $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$ por ser d una métrica,

   $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, z_n) + \lim\limits_{n\to\infty} d(z_n, y_n)$,

   $\Rightarrow \hat{d}(\hat{x},\hat{y}) \leq \hat{d}(\hat{x},\hat{z}) + \hat{d}(\hat{z},\hat{y})$,

   $\therefore \forall\ \hat{x},\ \hat{y}\ \wedge\ \hat{z}\ \in\ \hat{X},\ \ \hat{d}(\hat{x},\hat{y}) \leq \hat{d}(\hat{x},\hat{z}) + \hat{d}(\hat{z},\hat{y})$.

$\therefore\ (\hat{X},\hat{d})$ es un espacio métrico.

Para todo $p \in X$, sea la sucesión constante $(p) = (p, p, p, \cdots)$, ésta es convergente y por tanto de Cauchy.

Sea $A : X \longrightarrow A(X) \subset \hat{X}$, definida por $A(a) = [(a)]$.

$A(X) = \{[(a)] :\ a\ \in\ X\}$, de modo que A es sobreyectiva, ahora veamos si es una isometría:

Sean $a,\ b\ \in\ X$, con $a = b$, así $(a) = (b)$, de donde $[(a)] = [(b)]$ consecuentemente, por tanto A está bien definida.

Tomemos $a,\ b\ \in\ X$, con $a \neq b$, y $(a) = (a, a, a, ..),\ (b) = (b, b, b, \cdots)$.

$\Rightarrow d(a, b) = \lim\limits_{n\to\infty} d(a, b) = \hat{d}([(a)], [(b)]) = \hat{d}(A(a), A(b))$.

Por tanto A es una isometría sobreyectiva, así $W := A(X)$, debemos mostrar que W es denso en $\hat{X}$, es decir $\overline{W} = \hat{X}$, para mostrar esto antes probaremos el siguiente hecho:

- B es denso en X si y sólo si, $\forall x \in X, \forall\epsilon > 0, \exists y \in B$ tal que $y \in \mathcal{B}(x,\epsilon)$.

Probemos el hecho anterior: Supongamos que B es denso.

$x \in X$,

$\Rightarrow x \in \overline{B}$,

$\Rightarrow \forall\epsilon > 0, \mathcal{B}(x,\epsilon) \cap B \neq \emptyset$,

$\Rightarrow \forall\epsilon > 0, \exists y \in \mathcal{B}(x,\epsilon) \cap B$,

$\Rightarrow \forall\epsilon > 0, \exists y \in B$ tal que, $y \in \mathcal{B}(x,\epsilon)$.

Ahora supongamos que $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists y \in B$ tal que $y \in \mathcal{B}(x, \epsilon)$.

$x \in X$,

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists y \in B$ tal que $y \in \mathcal{B}(x, \epsilon)$,

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists y \in B \cap \mathcal{B}(x, \epsilon)$,

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, B \cap \mathcal{B}(x, \epsilon) \neq \emptyset$,

$\Rightarrow x \in \overline{B}$,

$\Rightarrow X = \overline{B}$.

Por tanto, B es denso en X si y sólo si, $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists y \in B$ tal que $y \in \mathcal{B}(x, \epsilon)$.

Usando el hecho anterior ahora probaremos que W es denso en $\hat{X}$

Sea $\hat{x} \in \hat{X}$ y $\epsilon > 0$, con $\hat{x} = [(x_n)]$,

como (x_n) es de Cauchy en X, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que, $d(x_n, x_m) < \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon, \forall m, n \geq N$.

Sea $\hat{x_N} = [(x_N, x_N, x_N, \cdots)] \in W$.

$\Rightarrow \hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_N) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} d(x_n, x_N) \leq \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon, \Rightarrow \ d(\hat{x}, \hat{x}_N) < \epsilon$,

$\Rightarrow \hat{x}_N \in \mathcal{B}_{\hat{d}}(\hat{x}, \epsilon)$,

$\Rightarrow \overline{W} = \hat{X}$,

$\therefore W$ es denso en $\hat{X}$.

Ahora debemos probar que $\hat{X}$ es completo.

<u>*NOTA*</u> :$(\hat{x}_n)$ *es una sucesión de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en* X*, donde* $(\hat{x}_n) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots)$, *y* $\hat{x}_i = [(x_n^{(i)})]$ *con* $(x_n^{(i)}) = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots)$ *de Cauchy en* X.

Para probar que $\hat{X}$ es completo probaremos antes el siguiente lema:

- Sea (M, d) un espacio métrico, (b_n) una sucesión de Cauchy en M, y sea (a_n) una sucesión en M tal que, $d(a_n, b_n) < \dfrac{1}{n}$, para todo n natural, entonces:
  - (i) (a_n) es una sucesión de Cauchy en M.
  - (ii) $a_n \to p \in M \Leftrightarrow b_n \longrightarrow p \in M$.

(i) Sabemos por la desigualdad triangular que:

$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, b_m) + d(b_m, b_n) + d(b_n, a_n)$, Para todo $\epsilon > 0$, existe n_1 natural tal que $\dfrac{1}{n_1} < \dfrac{\epsilon}{3}$, por tanto:

$n,\, m \geq n_1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_1} < \dfrac{\epsilon}{3}$,

y por hipótesis tenemos que: (a_n) es una sucesión en M tal que, $d(a_n, b_n) < \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$\Rightarrow d(a_m, a_n) \leq \dfrac{\epsilon}{3} + (b_m, b_n) + \dfrac{\epsilon}{3}$,

Como (b_n) es de Cauchy, existe n_2 natural tal que, si $n,\, m \geq n_2$, de donde $d(b_m, b_n) < \dfrac{\epsilon}{3}$;

$n_0 = \text{máx}\,\{n_1,\, n_2\}$,

$\Rightarrow \forall\, n,\, m \geq n_0 \;\Rightarrow\; d(a_m, a_n) < \dfrac{\epsilon}{3} + \dfrac{\epsilon}{3} + \dfrac{\epsilon}{3} = \epsilon$,

$\therefore\; (a_n)$ es de Cauchy.

(ii) $a_n \to p \in M$.

$\Rightarrow\; d(a_n, p) \to 0. \quad (*)$

por otra parte se tiene que $d(a_n, b_n) < \dfrac{1}{n}$, de donde

$d(a_n, b_n) \longrightarrow 0, \qquad \textit{cuando}\; n \longrightarrow \infty \quad (**)$

Luego por la desigualdad triangular sabemos que:

$0 \leq d(b_n, p) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, p)$, de modo que si aplicamos el Teorema del Sándwich y usamos (*) y (**) obtenemos que $d(b_n, p) \to 0$ lo que es equivalente a decir que $b_n \to p$. Análogamente se demuestra el otro sentido de la implicación del inciso (ii).

Ya podemos probar entonces que $\hat{X}$ es completo.

Sea $(\hat{\alpha_n})$ una sucesión de Cauchy en $\hat{X}$, demostraremos que esta sucesión converge en $\hat{X}$.

Como W es denso en $\hat{X}$, para todo $\epsilon > 0$, $W \cap \mathcal{B}(\hat{\alpha_n}, \epsilon) \neq \emptyset$.

Para $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, existe $\hat{x_n} \in W$ tal que $d(\hat{x_n}, \hat{\alpha_n}) < \dfrac{1}{n}$.

Sea $x_n = A^{-1}(\hat{x_n})$. Como $(\hat{x}_n)$ es de Cauchy en $\hat{X}$ por la parte (i) del lema anterior, entonces (x_n) será también de Cauchy en X por ser W y X isómetricos, $\hat{d}(\hat{x_n}, \hat{\alpha_n}) < \dfrac{1}{n}$. Sea $\hat{\alpha} = [(x_n)] \in \hat{X}$, entonces

$$\hat{d}(\hat{\alpha_n}, \hat{\alpha}) \leq \hat{d}(\hat{\alpha_n}, \hat{x_n}) + \hat{d}(\hat{x_n}, \hat{\alpha}) < \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{x_n}, \hat{\alpha}), \qquad (\circledast)$$

Como $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \hat{\alpha}$ y $(\hat{x_n}) \subset W$, $\hat{x_n} \in W$, así $(x_n, x_n, x_n, \cdots) \in \hat{x_n}$.

Luego $\hat{d}(\hat{x_n}, \hat{\alpha}) = \lim\limits_{m \longrightarrow \infty} d(x_n, x_m)$, Así de $(\circledast)$ tenemos:
$\hat{d}(\hat{\alpha_n}), \hat{\alpha} < \dfrac{1}{n} + \lim\limits_{m \longrightarrow \infty} d(x_n, x_m)$, entonces cuando $n \longrightarrow \infty$, $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$ y $\lim\limits_{m \longrightarrow \infty} d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$ por ser (x_n) de Cauchy, luego $\hat{\alpha_n} \longrightarrow \hat{\alpha}$, así $(\hat{\alpha_n})$ es convergente en $\hat{X}$, de donde $\hat{X}$ es completo.

Lo último que haremos será demostrar que si $\hat{Y}$ es una completación de X, entonces $\hat{Y}$ es isométrico a $\hat{X}$.

Sea $\hat{Y}$ una completación de X, Al ser X isométrico a un subespacio denso de $\hat{Y}$, podemos asumir que X es subespacio $\hat{Y}$. Al ser X denso en $\hat{Y}$,
$\Rightarrow \ \forall\, y \ \in \ \hat{Y}, \ \exists\, (x_n) \subset X \ \ tal\, que\ \hat{x}_n \longrightarrow y,$
Así x_n es de Cauchy.

Definamos la aplicación: $g : \hat{Y} \longrightarrow \hat{X}$, $g(y) = [(x_n)]$.

La aplicación está bien definida pues si (x'_n) es otra sucesión en X tal que $x'_n \longrightarrow y$, entonces $d(x_n, x'_n) \longrightarrow 0$ y, por tanto, $[(x'_n)] = [(x_n)]$.

Sean ahora $y, \ y' \ \in \ \hat{Y}$, con $x_n \longrightarrow y \ \wedge \ x'_n \longrightarrow y'$, entonces:
si $g(y) = g(y') \ \Rightarrow \ [(x_n)] = [(x'_n)] \ \Rightarrow \ \lim d(x_n, x'_n) = 0 \ \Rightarrow \ y = y'$.
Luego g es inyectiva. También es sobreyectiva por como se ha definido, en efecto, si $[(x_n)] \ \in \ \hat{X}$, la sucesión (x_n) es de Cauchy en $X \subset \hat{Y}$ por tanto (x_n) converge a un $y \in \hat{Y}$, luego $[(x_n)] = g(y)$,
Por último, para todo $y, \ y' \ \in \ \hat{Y}$,
$\hat{d}(g(y), g(y')) = \hat{d}([(x_n)], [(x'_n)]) = \lim d(x_n, x'_n) = d(\lim x_n, \lim x'n) = d(y, y')$ es decir, g es isometría.
Así $\hat{X}$ es único salvo isometría.

■

Teorema 2.1.13. *Un subespacio Y de un espacio de Banach X es completo si y sólo si Y es cerrado en X.*

Demostración. Dado que un espacio de Banach es un espacio métrico completo, este teorema es un resultado inmediato a partir del teorema **1.2.34**. ■

Teorema 2.1.14. *Sea X un espacio vectorial normado. Entonces X es de Banach, si y sólo si, toda serie en X absolutamente convergente es convergente.*

Es decir, X es completo si y sólo si, la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, converge siempre que $r_n = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||$ converge.

Demostración. Supongamos que X es de Banach. Sea $\sum x_n$ una serie absolutamente convergente, es decir $\sum_{k=1}^{n} ||x_k||$ converge.
Demostraremos que (S_n), la sucesión de sumas parciales converge. Como X es completo, es suficiente con mostrar que (S_n) es una sucesión de Cauchy.

Sea $\epsilon > 0$. Como $(\sum_{k=1}^{n} ||x_k||)$ converge en $\mathbb{R}$, entonces es una sucesión de Cauchy. Tomemos entonces N tal que si n, $m \geq N$ y $m < n$, entonces:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} ||x_k|| - \sum_{k=1}^{m} ||x_k|| \right| < \epsilon,$$

Pero esto significa que,

$$||x_{m+1}|| + ||x_{m+2}|| + \cdots + ||x_n|| < \epsilon.$$

Por lo tanto, si n, $m \geq N$ y $n > m$, tenemos que,

$$\begin{aligned} ||S_n - S_m|| &< \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k \right\|, \\ &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\|, \\ &\leq ||x_{m+1}|| + ||x_{m+2}|| + \cdots + ||x_n||, \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo que la sucesión (S_n) es de Cauchy y, por lo tanto converge.

Ahora suponemos que toda serie absolutamente convergente es convergente en X. Para mostrar que X es completo, sea (x_n) una sucesión de Cauchy. Mostraremos que esta sucesión converge. Para ello primero probaremos el siguiente hecho:

Hecho: Si (x_n) es una sucesión de Cauchy en un espacio normado X y alguna subsucesión de (x_n) converge a x, entonces (x_n) converge a x.

Demostración. Sea (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n), supongamos que $(x_{n_k}) \longrightarrow x$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe K tal que, si $k \geq K,\ d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$.
Como (x_n) es de Cauchy, existe N_1 tal que, si $m,\ n \geq N_1,\ d(x_m, x_n) < \epsilon/2$. Si tomamos $N = \text{máx}\{K,\ N_1\}$, entonces $n \geq N$ implica

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

De donde, (x_n) converge a x. ■

Haciendo uso del hecho anterior es suficiente demostrar que alguna subsucesión de (x_n) converge.
Primero, para cada $\epsilon_k = 2^{-k}$, con $k \in \mathbb{Z}_+$, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que, si $n,\ m \geq N_k$, entonces

$$||x_n - x_m|| < 2^{-k}.$$

Sea $n_k = \text{mín}\left\{N:\ n,\ m \geq N\ \Rightarrow ||x_n - x_m|| < 2^{-k}\right\}$, de tal manera que
$n_{k+1} \geq n_k$, esto es posible ya que (x_n) es una sucesión de Cauchy. Definamos la sucesión:

$$y_1 = x_{n_1}, \qquad y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}, \qquad k = 2,\ 3,\ \cdots$$

Por la construcción de las n_k, sabemos que $||y_k|| < 2^{-(k-1)}$, luego,

$$\sum_{k=1}^{n} ||y_k|| < ||x_{n_1}|| + \sum_{k=2}^{n} 2^{-(k-1)} < ||x_{n_1}|| + 1$$

y, por lo tanto, la serie $\sum y_k$ es absolutamente convergente. Por hipótesis, es convergente; es decir, para algún $y \in X$,

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \to y.$$

Pero,

$$\sum_{k=1}^{N} y_k = x_{n_1} + \sum_{k=2}^{N} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = x_{n_N},$$

por lo que concluimos que la subsucesión (x_{n_k}) converge. ■

Este teorema muestra por qué en $\mathbb{R}$ toda serie absolutamente convergente es de hecho convergente, como es mostrado en los cursos elementales del cálculo. Ésto es equivalente a la completitud.

El concepto de convergencia de una serie se puede usar para definir una "base"de la siguiente manera.

Definición 2.1.15. *Si un espacio normado X contiene una sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con la propiedad que para cualquier $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:*

$$||x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)|| \longrightarrow 0. \qquad \textit{(Cuando } n \longrightarrow \infty\textit{)}$$

*Entonces se dice que (e_n) es una **Base de Schauder** (o bases) para X. La serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

que tiene la suma x se llama expansión de x con respecto a (e_n), y escribimos

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Lema 2.1.16. *Sea $\{x_1, \cdots, x_n\}$ un conjunto li en un espacio normado X (de cualquier dimensión). Entonces existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para cualquier elección de escalares α_1, α_2, $\cdots \alpha_n$ se tiene.*

$$||\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n|| \geq c\,(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \tag{2.1}$$

Demostración. Sea $s = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Si $s = 0$, todos los α_j son cero, por lo que 2.1 se cumple para cualquier c. Supongamos que $s > 0$, transformemos 2.1 a una ecuación equivalente.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}||\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n|| &\geq c, \\ \left|\left|\frac{\alpha_1}{s} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{s} x_n\right|\right| &\geq c, \\ ||\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n|| &\geq c, \qquad \beta_i = \frac{\alpha_i}{s} \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| &= \left|\frac{\alpha_1}{s}\right| + \cdots + \left|\frac{\alpha_n}{s}\right|, \\ &= \frac{1}{s}(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|), \\ &= 1. \end{aligned}$$

Razonando por contradicción, supongamos que el lema es falso. Entonces para cada $c > 0$, existe $\beta_1^{(i)}, \cdots, \beta_n^{(i)}$ escalares tal que $y_i = \beta_1^{(i)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(i)} x_n$ pertenece a X, y

$$||\beta_1^{(i)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(i)} x_n|| \leq c. \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1 \right)$$

De modo que para cada $c_m = \frac{1}{m}$, existe $y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n \in X$ tal que:

$$||\beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n|| \leq \frac{1}{m}. \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1 \right)$$

Construimos de esa forma la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que tendría los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_1^{(1)} x_1 + \beta_2^{(1)} x_2 + \cdots + \beta_n^{(1)} x_n, \\ y_2 &= \beta_1^{(2)} x_1 + \beta_2^{(2)} x_2 + \cdots + \beta_n^{(2)} x_n, \\ &\vdots \\ y_m &= \beta_1^{(m)} x_1 + \beta_2^{(m)} x_2 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n. \end{aligned}$$

Así cuando $m \longrightarrow \infty$, $c_m \longrightarrow 0$, entonces $||y_m|| \longrightarrow 0$.

Como $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1$, entonces $|\beta_j^{(m)}| \leq 1$ para todo j. Por lo tanto, para cada j fijo la sucesión

$$(\beta_j^{(m)}) = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \cdots)$$

es acotada, luego por el teorema de Bolzano-Wierstrass, $(\beta_j^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ tendrá una subsucesión convergente $(\beta_j^{(m_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\beta_j^{(m_k)} \longrightarrow \beta_j$.
$(\beta_1^{(m)})$ posee una subsucesión $(\beta_1^{(m_k)}) \longrightarrow \beta_1$.

Sea $y_{1,k} = \beta_1^{(m_k)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m_k)} x_n$, es decir:

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= \beta_1^{(m_1)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m_1)} x_n, \\ y_{1,2} &= \beta_1^{(m_2)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m_2)} x_n, \\ &\vdots \\ y_{1,k} &= \beta_1^{(m_k)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m_k)} x_n. \end{aligned}$$

Como $(\beta_2^{(m_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es también acotado, existe una subsucesión $(\beta_2^{(m_{k_t})})_{t\in\mathbb{N}}$ tal que $\beta_2^{(m_{k_t})} \longrightarrow \beta_2$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

Sea $y_{2,t} = \beta_1^{(m_{k_t})} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m_{k_t})}$.

Después de n pasos obtenemos $(y_{n,m})$, cuyos términos son de la forma:

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j, \qquad \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}| = 1, \qquad \lim_{m\longrightarrow\infty} \gamma_j^{(m)} = \beta_j$$

Sea $y = \lim\limits_{m\longrightarrow\infty} y_{n,m}$.

$$\begin{aligned} y &= \lim_{m\longrightarrow\infty} y_{n,m}, \\ &= \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j, \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lim_{m\longrightarrow\infty} \gamma_j^{(m)} x_j, \\ &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j. \end{aligned}$$

Como $\sum\limits_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}| = 1$, entonces $\sum\limits_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$, ya que,

$$\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = \sum_{j=1}^{n} \lim_{m\longrightarrow\infty} |\gamma_j^{(m)}| = \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}| = \lim_{m\longrightarrow\infty} 1 = 1,$$

de donde los β_j no todos son cero, así $y \neq 0$ ya que los x_j son *li*, por hipótesis $\lim ||y_m|| = 0$, entonces $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty} ||y_{n,m}|| = 0$, así $||y|| = 0$, de donde $y = 0$. $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore$ El lema es cierto. $\blacksquare$

2.2. Operadores Lineales

Definición 2.2.1. *Sean X, Y dos espacios vectoriales, un* ***operador lineal****, (transformación lineal u homomorfismo) es una función $T : X \to Y$ donde a cada elemento de X le corresponde un único elemento de Y y satisface que:*

1. $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2); \forall x_1, x_2 \in X$.
2. $T(\alpha x) = \alpha T(x); \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.

Definición 2.2.2. *Sean X e Y dos espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal, donde $\mathcal{D}(T) \subset X$ y $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio vectorial. El operador T se dice que es acotado si $\exists c \in \mathbb{R}^+$ tal que:*

$$||Tx|| \leq c||x|, \forall x \in \mathcal{D}(T),$$

donde la norma que se aplicó a Tx es la norma del espacio Y y la norma que se aplica a x es la norma del espacio X.

De la manera en que se definió un operador lineal, sabemos de la propiedad 2, que si $x = 0$ entonces $T(x) = 0$ cumpliéndose la anterior definición sin mucha complejidad, ahora si tomamos a $x \neq 0$, entonces $||x|| \neq 0$ así que podemos transformar la definición anterior a:

$$\frac{||Tx||}{||x||} \leq c; \forall x \neq 0 \in \mathcal{D}(T).$$

Esto muestra que c, sea al menos tan grande como el supremo de la expresión del lado izquierdo tomada sobre $\mathcal{D}(T) - \{0\}$, nosotros estamos interesados en esa c que sea la más pequeña posible, es decir el supremo, y a esta cantidad la denotamos por $||T||$,

De manera que existe $\displaystyle \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||Tx||}{||x||} = ||T||$

y además, $\dfrac{||Tx||}{||x||} \leq ||T||$ entonces $||Tx|| \leq ||T||||x||$.

Esto da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.2.3. *Sea T un operador lineal acotado, $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$; donde X e Y son dos espacios normados y $\mathcal{D}(T) \subset X$ y $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio vectorial, entonces*

$$||T|| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||Tx||}{||x||}.$$

NOTA : *Por conveniencia se utiliza la notación $||\cdot||$ en diferentes espacios normados teniendo en cuenta que no es la misma norma.*

Lema 2.2.4. *Sea T un operador lineal acotado y $\mathcal{D}(T)$ el dominio de T, $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$; donde X e Y son dos espacios normados y $\mathcal{D}(T) \subset X$, entonces:*

1. *Una fórmula alternativa para $||T||$ es*

$$||T|| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ ||x||=1}} ||Tx||.$$

2. *La norma del operador es una norma (en el sentido de la definición de norma).*

Demostración. 1. Sea $x \neq 0 \in \mathcal{D}(T)$, $||x|| = a > 0$ ya que $x \neq 0$. Sea $y = \dfrac{x}{a}$.

$$||T|| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||Tx||}{||x||},$$

$$\Rightarrow ||T|| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \tfrac{1}{a}||Tx||,$$

$$\Rightarrow ||T|| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} ||T(\tfrac{1}{a}x)||,$$

$$\Rightarrow ||T|| = \sup_{\substack{y \in \mathcal{D}(T) \\ ||y||=1}} ||Ty||.$$

2. Probemos ahora que la norma del operador es una norma:

N1) Como $||Tx|| \geq 0, \forall\, x \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow \sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ ||x||=1}} ||Tx|| \geq 0 \;\Rightarrow\; ||T|| \geq 0$.

N2) probemos que $||T|| = 0 \Leftrightarrow T \equiv 0$; Supongamos que $||T|| = 0$ entonces:

$\sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \dfrac{||Tx||}{||x||} = 0 \Rightarrow \dfrac{||Tx||}{||x||} \leq 0, \forall\, x \in \mathcal{D}(T),\, x \neq 0$; pero además $\dfrac{||Tx||}{||x||} \geq 0$, ya que la norma aplicada a Tx es la norma definida en Y y la aplicada a x es la norma definida en X. De manera que $\dfrac{||Tx||}{||x||} = 0 \Rightarrow ||Tx|| = 0\,, \forall\, x \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow Tx = 0\,,$ $\forall\, x \in \mathcal{D}(T)$, así $T \equiv 0$.

Ahora supongamos que $T \equiv 0$. Si $T \equiv 0$:

$Tx = 0\,, \forall\, x \in \mathcal{D}(T),$

$\Rightarrow\ ||Tx|| = 0, \forall\, x \in \mathcal{D}(T)$, en particular para $x \neq 0$,

$$\Rightarrow \frac{||Tx||}{||x||} = 0,\ \forall\, x \in \mathcal{D}(T),\ x \neq 0$$

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||Tx||}{||x||} = 0 \Rightarrow ||T|| = 0.$$

N3) Probemos que $||\alpha T|| = |\alpha|\, ||T||$, con $\alpha \in \mathbb{K}$.

para esto primero debemos probar que αT es un operador lineal acotado.

Como T es acotado, entonces existe c tal que $||Tx|| \leq c||x||,\ \forall\, x \in \mathcal{D}(T)$

$\Rightarrow |\alpha|\, ||Tx|| \leq c\, |\alpha|\, ||x|| \ \Rightarrow\ ||(\alpha T)x|| \leq k\, ||x||,\ \forall\, x \in \mathcal{D}(T),\, k = |\alpha|\, c,$

por tanto αT es un operador lineal y acotado, entonces,

$$||\alpha T|| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||\alpha Tx||}{||x||} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{|\alpha|\, ||Tx||}{||x||} = |\alpha| \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||Tx||}{||x||}$$
$$= |\alpha|\, ||T||.$$

N4) Sea $T_1 : \mathcal{D}(T_1) \longrightarrow Y$, $T_2 : \mathcal{D}(T_2) \longrightarrow Y$, dos operadores lineales y acotados, $T = T_1 + T_2$ con $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_1) \cap \mathcal{D}(T_2)$.
Probaremos que $||T_1 + T_2|| \leq ||T_1|| + ||T_2||$.

Pero antes es necesario probar que $T_1 + T_2$ es un operador lineal y acotado.

Dado que T_1 es acotado, $\exists\, c_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $||T_1 x|| \leq c_1 ||x||$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(T_1)$,

también T_2 es acotado, $\exists\, c_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $||T_2 x|| \leq c_2 ||x||$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(T_2)$, así,

$||(T_1 + T_2)x|| = ||T_1 x + T_2 x|| \leq ||T_1 x|| + ||T_2 x||$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(T)$,

$\Rightarrow ||(T_1 + T_2)x|| \leq c_1 ||x|| + c_2 ||x|| = (c_1 + c_2)||x||$.

Por tanto $T = T_1 + T_2$ es un operador lineal y acotado. Luego,

$$\Rightarrow ||T|| = ||T_1 + T_2|| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||(T_1 + T_2)(x)||}{||x||},$$

$$\Rightarrow ||T|| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||T_1(x) + T_2(x)||}{||x||}, \text{ pero}$$

$||T_1(x) + T_2(x)|| \leq ||T_1(x)|| + ||T_2(x)||$; $\forall\, x \in \mathcal{D}(T)$, entonces

$$\Rightarrow \frac{||T_1(x) + T_2(x)||}{||x||} \leq \frac{||T_1(x)|| + ||T_2(x)||}{||x||}; \forall\, x \in \mathcal{D}(T),\, x \neq 0,$$

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||T_1(x) + T_2(x)||}{||x||} \leq \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||T_1(x)|| + ||T_2(x)||}{||x||},$$

$$\leq \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||T_1(x)||}{||x||} + \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{||T_2(x)||}{||x||} = ||T_1|| + ||T_2||.$$

Así los operadores lineales y acotados forman un espacio vectorial normado.

■

Ejemplo 2.2.5. *El operador* $\boldsymbol{0}$ *es acotado y* $||\boldsymbol{0}|| = 0$.

Demostración. La prueba de este hecho es un resultado inmediato de aplicar la definición, queda al lector su desarrollo. ■

Ejemplo 2.2.6. *El operador identidad* $\boldsymbol{I}:X \longrightarrow X$, $\boldsymbol{I}x = x$, *es acotado y* $||\boldsymbol{I}|| = 1$.

Demostración. Sea $x \in X$, entonces $||\mathbf{I}\,x|| = ||x||$ de donde $||\mathbf{I}\,x|| \leq 1\,||x||$, así $\mathbf{I}$ es acotado.

$$||\mathbf{I}|| = \underset{\substack{x \,\in\, \mathcal{D}(\mathbf{I}) = X \\ ||x||=1}}{sup} ||\mathbf{I}\,x|| = \underset{\substack{x \,\in\, \mathcal{D}(\mathbf{I}) = X \\ ||x||=1}}{sup} ||x|| = \underset{\substack{x \,\in\, \mathcal{D}(\mathbf{I}) = X \\ ||x||=1}}{sup} 1 = 1.$$

■

Ejemplo 2.2.7. *El operador diferencial* $T : P(X) \longrightarrow T(P(X)) = P'(X)$, *donde* $P(X)$ *es el espacio normado de todos los polinomios sobre* $J = [0, 1]$, *con la norma* $||x|| = \max\limits_{t \,\in\, [0,1]} |x(t)|$; *no es acotado.*

Demostración. Sea $x \in P(X)$, así $Tx = x'$, es decir la primera derivada y sea $x_n(t) = t^n$, con $n \in \mathbb{N}$,

$\Rightarrow ||x_n|| = \max\limits_{t \,\in\, [0,1]} |t^n| = 1, \; \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (1)$

además, $T(x_n(t)) = (t^n)' = nt^{n-1} = nx_{n-1}(t) \;\Rightarrow\; Tx_n = nx_{n-1}$,

$\Rightarrow ||Tx_n|| = ||nx_{n-1}|| = n||x_{n-1}|| = n,$ por (1)

$\Rightarrow \dfrac{||Tx_n||}{||x_n||} = n,$ como $n \in \mathbb{N}$ y es arbitrario, no existe c tal que $\dfrac{||Tx_n||}{||x_n||} \leq c$,

por tanto T no es acotado.

■

Teorema 2.2.8. *Sea* $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ *un operador lineal, donde* $\mathcal{D}(T) \subset X$ *y* X *e* Y *son espacios normados, entonces:*

a) *T es continuo si y sólo si, es acotado.*

b) *Si T es continuo en un punto, entonces es continuo.*

Demostración. **a)** Supongamos que T es continuo, así para $x \in \mathcal{D}(T)$, y para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $||Tx - Ty|| \leq \epsilon$ siempre que $||x - y|| \leq \delta$.

Sea $z \in \mathcal{D}(T)$, tal que $z \neq 0$, $y = x - \dfrac{\delta}{||z||}z \in \mathcal{D}(T)$, luego $x - y = \dfrac{\delta}{||z||}z$, entonces $||x-y|| = \delta$, de donde

$$\begin{aligned}
& ||Tx - Ty|| \leq \epsilon, \\
\Rightarrow\ & \left\| T\left(y + \frac{\delta}{||z||}z\right) - T(y) \right\| \leq \epsilon, \\
\Rightarrow\ & \left\| Ty + \frac{\delta}{||z||}Tz - Ty \right\| \leq \epsilon, \\
\Rightarrow\ & \left\| \frac{\delta}{||z||}Tz \right\| \leq \epsilon, \\
\Rightarrow\ & ||Tz|| \leq \frac{\epsilon}{\delta}||z||, \\
\therefore\ & T \textit{ es acotado.}
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que T es acotado, probaremos que T es continuo.

Si $T = \mathbf{0}$, entonces es continuo, supongamos que $T \neq \mathbf{0}$, sea $\epsilon > 0$, $x \in \mathcal{D}(T)$, $\delta = \epsilon/||T||$, de modo que si $||x-y|| < \delta = \epsilon/||T||$, entonces:

$$||Tx - Ty|| = ||T(x-y)|| \leq ||T|| \cdot ||x-y|| < ||T|| \cdot \delta = ||T|| \cdot \frac{\epsilon}{||T||} = \epsilon.$$

De donde T es continuo.

b) Supongamos que T es continua en a, entonces para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $||Tx - Ta|| \leq \epsilon$ siempre que $||x - a|| \leq \delta$.

Sea $z \neq 0 \in D(T)$, sea $x = a + \dfrac{\delta}{||z||}z$, entonces $x - a = \dfrac{\delta}{||z||}z$, luego

$$\begin{aligned}
||x-a|| = \delta \Rightarrow\ & ||Tx - Ta|| \leq \epsilon, \\
\Rightarrow\ & \left\| T\left(a + \frac{\delta}{||z||} \cdot z\right) - Ta \right\| \leq \epsilon, \\
\Rightarrow\ & \left\| Ta + \frac{\delta}{||z||} \cdot Tz - Ta \right\| \leq \epsilon, \\
\Rightarrow\ & \frac{\delta}{||z||} \cdot ||Tz|| \leq \epsilon, \\
\Rightarrow\ & ||Tz|| \leq \frac{\epsilon}{\delta} \cdot ||z||, \\
\therefore\ & T \textit{ es acotado.}
\end{aligned}$$

Luego por el inciso a) T es continuo.

$\blacksquare$

2.3. Funcionales lineales. Espacio dual

Entre los operadores lineales en espacios normados, una clase importante, e históricamente precursora de los mismos, la constituyen los funcionales lineales.

Definición 2.3.1. *Un funcional es un operador cuyo rango está en el conjunto $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Un funcional lineal es un operador lineal $f : X \to E$ donde X es el espacio normado y E su cuerpo de escalares. Un funcional lineal acotado es un operador lineal acotado cuyo rango está en E, cuerpo de escalares del espacio normado X, es decir, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c||x||$, para todo $x \in X$.*
Se define la norma de f de forma similar que en el caso de operadores lineales, y se verifican las mismas propiedades obtenidas en el caso general.

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ ||x||=1}} |f(x)|.$$

Así, $|f(x)| \leq ||f||\,||x||$.

Proposición 2.3.2. *Sea X un espacio normado y f un funcional lineal en X, $f : X \to E$. Entonces f es continuo si y sólo si su núcleo $N(f)$ es cerrado.*

Demostración. Supongamos que f es continuo, probaremos entonces que $N(f)$ es cerrado.
Sea $x \in \overline{N(f)}$, entonces existe $(x_n) \subset N(f)$ tal que $x_n \longrightarrow x$, basta probar que $x \in N(f)$ para que $N(f)$ sea cerrado.
Si $x_n \longrightarrow x$ entonces $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, por ser f continuo, pero $f(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, así $f(x_n) \longrightarrow 0$ de donde $f(x) = 0$ por lo tanto $x \in N(f)$.
Ahora supongamos que $N(f)$ es cerrado. Si $N(f) = X$, entonces $f = \mathbf{0}$ y es continuo.
Si $N(f) \neq X$, existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) \neq 0$. Sea $x_0 = \dfrac{x_1}{f(x_1)}$, entonces $f(x_0) = 1$.
Sea $d = d(x_0, N) = \inf_{x \in N} \{d(x_0, x)\}$ y $N(f) = N$, luego $d(x_0, N) = d = \inf_{x \in N} \{d(x_0, x)\}$,

supongamos que $d(x_0, N) = 0$.

$$\begin{aligned} d(x_0, N) = 0 \Rightarrow & \inf_{x \in N} \{d(x_0, x)\} = 0, \\ & \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \ \exists\, x_\epsilon \in N(f) \ tal\, que \ d(x_0, x_\epsilon) < \epsilon + 0 = \epsilon, \\ & \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \ \mathcal{B}(x_0, \epsilon) \cap N(f) \neq \emptyset, \\ & \Rightarrow x_0 \in \overline{N(f)} = N, \\ & \Rightarrow x_0 \in N(f). \ (\rightarrow\leftarrow) \end{aligned}$$

De donde $d(x_0, N) \neq 0$, así $d(x_0, N) > 0$; por otra parte, para todo $x \in X$, $x = x - f(x) \cdot x_0 + f(x) \cdot x_0$, donde $x - f(x) \cdot x_0 \in N(f)$ dado que $f(x_0) = 1$. Esto indica que $X = N(f) + \{\lambda x_0 : \ \lambda \in E\}$ y como $N(f) \cap \{\lambda x_0 : \ \lambda \in E\} = \{0\}$ se sigue que $X = N(f) \oplus \{\lambda x_0 : \ \lambda \in E\}$. Si escribimos entonces $x = n + \lambda x_0$, con $n \in N(f)$, $\lambda \in E$, resulta:

$$||x|| = |\lambda| \cdot \left|\left| x_0 + \frac{n}{\lambda} \right|\right| \geq |\lambda| \cdot \inf_{x \in N} \{d(x_0, x)\} = |\lambda| \cdot d = |\lambda \cdot f(x_0) + f(n)| \cdot d,$$

entonces $||x|| \geq |f(\lambda x_0 + n)| \cdot d = |f(x)| \cdot d$.

Esto implica que $|f(x)| \leq (1/d) \cdot ||x||$, y por el Teorema 2.2.8 literal a), f es continuo. ■

Definición 2.3.3. *Sea X un espacio normado; llamamos* **dual algebraico** *de X a $X^* = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es lineal}\}$.*

Definición 2.3.4. *Sea X un espacio normado; llamamos* **espacio dual** *de X a $X' = \{f : X \longrightarrow E : \ f \text{ es lineal y acotado}\}$. En dimensión finita se cumple que $X' = X^*$, en otro caso $X' \subset X^*$.*

2.4. Producto Interior y Espacios de Hilbert

Con el fin de poder dotar los espacios normados de una geometría, es necesario definir un producto interior o escalar. Una clase importante de espacios normados permite generalizar muchas propiedades de la geometría del espacio euclídeo real que dependen de la noción de ángulo, especialmente las que se refieren a perpendicularidad. Recordemos que si x, y son dos vectores en un espacio euclídeo y α es el ángulo que forman, se define el producto escalar por $\langle x, y\rangle = ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos\alpha$. Ahora la intención es obtener la noción abstracta de un producto escalar en espacios normados generales que permita extender la fórmula anterior. Como es lógico pensar, los espacios con producto escalar son históricamente anteriores a los espacios normados generales y mantienen todavía muchas propiedades de los espacios euclídeos. La teoría fue iniciada por Hilbert (1912) en sus trabajos sobre ecuaciones integrales y en la actualidad estos espacios son básicos en numerosas aplicaciones del Análisis Funcional.

Definición 2.4.1. *Un espacio con* **producto interior** *o* **pre – Hilbert** *es un espacio vectorial X en el que se define una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to E$, donde E es un cuerpo de escalares y cumple las siguientes propiedades:*

PI (1) *(aditiva)* $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

PI (2) *(homogénea)* $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

PI (3) *(hermítica)* $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

PI (4) *(definida positiva)* $\langle x, x\rangle \geq 0$ *y* $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

Toda aplicación que verifique PI (1), PI (2) y PI (3) se llama forma sesquilineal hermítica.

Nota. Los axiomas anteriores fueron establecidos por primera vez por Von Neumann en el año 1930 en sus trabajos sobre fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica. Se incluía también en su definición la separabilidad del espacio, el mismo fue posteriormente eliminado por Löwing, Rellig y F. Riesz ya que mostraron que dicha restricción era innecesaria en la práctica.

A continuación deduciremos algunas propiedades del producto interno a partir de los axiomas.

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \langle \alpha x, z \rangle + \langle \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
2. $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$;
3. $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\beta}\overline{\langle z, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$.

Así $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es conjugado en la segunda componente.
De 2) podemos ver que $\langle x, 0 \rangle = 0$, para todo $x \in X$, además si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in X$, entonces $y = 0$.

Todo espacio pre-Hilbert es en particular normado, donde la norma asociada se define como $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, y por tanto es también métrico, con la distancia $d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$.

$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ es una norma efectivamente, ese hecho queda como un ejercicio para el lector, esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.4.2. *Un* **Espacio de Hilbert** *es un espacio pre-Hilbert completo (respecto a la métrica asociada).*

Por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach en el que se ha definido un producto interior.

Proposición 2.4.3. *(Identidad del paralelogramo). Si* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *es un espacio pre-Hilbert, la norma asociada verifica* $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$*, para todo* $x, y \in X$.

Demostración. Sean $x, y \in X$.
$||x + y||^2 = (\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle})^2 = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle$,
$\Rightarrow ||x + y||^2 = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle. \qquad (1)$

$$||x-y||^2 = (\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle})^2 = \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle,$$
$$\Rightarrow ||x-y||^2 = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle. \qquad (2)$$

Así de (1) y (2) tenemos: $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle$, de donde $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

■

El siguiente resultado muestra cómo la norma asociada permite a su vez definir el producto interior.

Proposición 2.4.4. *(Identidad de polarización). Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert arbitrario y sean $x, y \in X$.*

a) *Si X es un espacio de producto interior real:*

- $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[||x+y||^2 - ||x-y||^2]$.

b) *Si X es un espacio de producto interior complejo,*

- $Re\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[||x+y||^2 - ||x-y||^2]$,
- $Im\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[||x+iy||^2 - ||x-iy||^2]$.

Demostración. La prueba de esta proposición se hará de manera directa.

a) $||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$,
$||x-y||^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$,
Así tenemos: $||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4\langle x, y\rangle$, ya que si $\langle x, y\rangle$ es real entonces $\langle x, y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$, luego,
$\frac{1}{4}[||x+y||^2 - ||x-y||^2] = \langle x, y\rangle$.

b)
- $Re\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[||x+y||^2 - ||x-y||^2]$,

  La prueba es inmediata a partir de la parte a) de esta proposición.

- $Im\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[||x+iy||^2 - ||x-iy||^2]$.

  $||x+iy||^2 = \langle x+iy, x+iy\rangle = \langle x, x\rangle + \langle iy, x\rangle + \langle x, iy\rangle + \langle iy, iy\rangle$,

$$||x - iy||^2 = \langle x - iy, x - iy\rangle = \langle x, x\rangle - \langle iy, x\rangle - \langle x, iy\rangle + \langle iy, iy\rangle,$$

luego,

$$\begin{aligned} ||x + iy||^2 - ||x - iy||^2 &= 2\langle iy, x\rangle + 2\langle x, iy\rangle, \\ &= 2[i\overline{\langle x, y\rangle} - i\langle x, y\rangle], \\ &= 2i[\overline{\langle x, y\rangle} - \langle x, y\rangle], \\ &= 2i[-2i \cdot Im\langle x, y\rangle], \\ &= 4 \cdot Im\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Por tanto $Im\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[||x + iy||^2 - ||x - iy||^2]$.

■

Esta propiedad sugiere una forma de definir un producto interior a partir de una norma. Sin embargo, será necesaria la identidad del paralelogramo. El siguiente resultado proporciona una especie de recíproco de la proposición 2.4.3.

Proposición 2.4.5. *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado que satisface la identidad del paralelogramo, entonces existe un producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en X tal que $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.*

Demostración. Consideraremos dos casos:

- Caso real:

  Usaremos $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[||x + y||^2 - ||x - y||^2]$.

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle+\langle z,y\rangle &= \frac{1}{4}\left[||x+y||^2-||x-y||^2\right]+\frac{1}{4}\left[||z+y||^2-||z-y||^2\right],\\
&= \frac{1}{4}\left[||x+y||^2+||z+y||^2\right]-\frac{1}{4}\left[||x-y||^2+||z-y||^2\right],\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(||x+y+z+y||^2+||x+y-(z+y)||^2\right)\right]\\
&- \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(||x-y+(z-y)||^2+||x-y-(z-y)||^2\right)\right],\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\left(||x+z+2y||^2+||x-z||^2\right)\right]\\
&- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\left(||x+z-2y||^2+||x-z||^2\right)\right],\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\left(||x+z+2y||^2-||x+z-2y||^2\right)\right],\\
&= \frac{1}{2}\langle x+z,2y\rangle.
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \langle x,y\rangle+\langle z,y\rangle=\frac{1}{2}\langle x+z,2y\rangle. \qquad (*)$$

Si hacemos $z=0$, entonces $\langle x,y\rangle+\langle 0,y\rangle=\frac{1}{2}\langle x,2y\rangle$, así $\langle x,y\rangle=\frac{1}{2}\langle x,2y\rangle$ puesto que $\langle 0,y\rangle=0$, luego tomando $x=u+v,\ u,v\in X$, se sigue que $\langle u+v,y\rangle=\frac{1}{2}\langle u+v,2y\rangle$, pero por $(*)$ se tiene que $\frac{1}{2}\langle u+v,2y\rangle=\langle u,y\rangle+\langle v,y\rangle$, así $\langle u+v,y\rangle=\langle u,y\rangle+\langle v,y\rangle$.

Como $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$, se tiene que $\langle x,u+v\rangle=\langle u+v,x\rangle=\langle u,x\rangle+\langle v,x\rangle=\langle x,u\rangle+\langle x,v\rangle$, así $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es aditiva en la primera y segunda componente.

Además

$$
\begin{aligned}
\langle nx,y\rangle &= \langle\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n-veces},y\rangle, \qquad n\in\mathbb{N},\\
&= \underbrace{\langle x,y\rangle+\cdots+\langle x,y\rangle}_{n-veces},\\
&= n\langle x,y\rangle.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\langle nx,y\rangle=n\langle x,y\rangle,\ \forall\, n\in\mathbb{N}$.

Sea $m \in \mathbb{Z}^-$, entonces $m = -n$ con $n \in \mathbb{N}$, luego,

$$\begin{aligned}
\langle mx, y \rangle &= \langle -nx, y \rangle, \\
&= n\langle -x, y \rangle, \\
&= n\frac{1}{4}\left[||-x+y||^2 - ||-x-y||^2\right], \\
&= n\frac{1}{4}\left[||(-1)(x-y)||^2 - ||(-1)(x+y)||^2\right], \\
&= n\frac{1}{4}\left[||x-y||^2 - ||x+y||^2\right], \\
&= -n\frac{1}{4}\left[||x+y||^2 - ||x-y||^2\right], \\
&= -n\langle x, y \rangle, \\
&= m\langle x, y \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle nx, y \rangle = n\langle x, y \rangle, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Luego $\langle x, y \rangle = \langle n(\frac{x}{n}), y \rangle = n\langle \frac{x}{n}, y \rangle$, de donde $\frac{1}{n}\langle x, y \rangle = \langle \frac{x}{n}, y \rangle, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.
Sea $r \in \mathbb{Q}$, así $r = \frac{a}{b}$ con $(a, b) = 1, \ b \neq 0, \ a, \ b \in \mathbb{Z}$, luego

$$\begin{aligned}
\langle rx, y \rangle &= \langle \frac{a}{b}x, y \rangle, \\
&= a\langle \frac{x}{b}, y \rangle, \\
&= \frac{a}{b}\langle x, y \rangle, \\
&= r\langle x, y \rangle.
\end{aligned}$$

por tanto $\langle rx, y \rangle = r\langle x, y \rangle$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, así $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, de donde existe $(r_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ tal que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} r_k = \alpha$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha x, y\rangle &= \frac{1}{4}[||\alpha x+y||^2 - ||\alpha x - y||^2],\\
&= \frac{1}{4}[||(\lim_{k\longrightarrow\infty} r_k)x+y||^2 - ||(\lim_{k\longrightarrow\infty} r_k)x - y||^2],\\
&= \frac{1}{4}[\lim_{k\longrightarrow\infty} ||r_k x+y||^2 - \lim_{k\longrightarrow\infty} ||r_k x - y||^2],\\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty}\frac{1}{4}[||r_k x+y||^2 - ||r_k x - y||^2],\\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty}\langle r_k x, y\rangle,\\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty} r_k\langle x, y\rangle,\\
&= \alpha\langle x, y\rangle.
\end{aligned}
$$

Por tanto $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Dado que estamos en el caso real $\langle y, x\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, entonces probaremos que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

$$
\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}[||x+y||^2 - ||x-y||^2],\\
&= \frac{1}{4}[||y+x||^2 - ||-(y-x)||^2],\\
&= \frac{1}{4}[||y+x||^2 - ||y-x||^2],\\
&= \langle y, x\rangle.
\end{aligned}
$$

Por último evaluamos $\langle x, x\rangle$,

$$
\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \frac{1}{4}[||x+x||^2 - ||x-x||^2],\\
&= \frac{1}{4}[4||x||^2],\\
&= ||x||^2,\\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

De donde $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Por tanto $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[||x+y||^2 - ||x-y||^2]$ es un producto interno.

- <u>Caso complejo:</u>

  Consideremos $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_R + i\langle x, iy\rangle_R$, donde $\langle x, y\rangle_R = \frac{1}{4}[||x+y||^2 - ||x-y||^2]$.

Sean $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
\langle x, ix\rangle_R &= \frac{1}{4}[||x+ix||^2 - ||x-ix||^2],\\
&= \frac{1}{4}[|1+i|^2||x||^2 - |1-i|^2||x||^2],\\
&= \frac{1}{4}[2||x||^2 - 2||x||^2],\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \langle x, x\rangle_R + i\langle x, ix\rangle_R,\\
&= \langle x, x\rangle_R + i\cdot 0,\\
&= ||x||^2.
\end{aligned}$$

De manera que $\langle x, x\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ ||x||^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\langle ix, iy\rangle_R &= \frac{1}{4}[||ix+iy||^2 - ||ix-iy||^2],\\
&= \frac{1}{4}[|i|^2||x+y||^2 - |i|^2||x-y||^2],\\
&= \frac{1}{4}[||x+y||^2 - |i|^2||x-y||^2],\\
&= \langle x, y\rangle_R. \qquad (a)
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\langle ix, y\rangle &= \langle ix, y\rangle_R + i\langle ix, iy\rangle_R,\\
&= \langle ix, y\rangle_R + i\langle x, y\rangle_R, \qquad \textit{por } (a),\\
&= i[\langle x, y\rangle_R - i\langle ix, y\rangle_R]. \qquad (b)
\end{aligned}$$

Como $\langle x, y\rangle_R = \langle ix, iy\rangle_R$ para todo $x, y \in X$, así,

$\langle ix, y\rangle_R = \langle i\cdot ix, iy\rangle_R = \langle -x, iy\rangle_R = -\langle x, iy\rangle_R$.

Luego en (b) tenemos:

$$\begin{aligned}\langle ix, y\rangle &= i[\langle x, y\rangle_R - i\langle ix, y\rangle_R],\\ &= i[\langle x, y\rangle_R - i(-\langle x, iy\rangle_R)],\\ &= i[\langle x, y\rangle_R + i\langle x, iy\rangle_R],\\ &= i\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

$\therefore \langle ix, y\rangle = i\langle x, y\rangle.$ (c)

Por (a) obtenemos:

$\langle y, ix\rangle_R = \langle iy, -x\rangle_R = -\langle iy, x\rangle_R = -\langle x, iy\rangle_R.$ (d)

Entonces,

$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle &= \langle y, x\rangle_R + i\langle y, ix\rangle_R,\\ &= \langle x, y\rangle_R + i\langle y, ix\rangle_R,\\ &= \langle x, y\rangle_R + i[-\langle x, iy\rangle_R], \qquad \textit{por } (d),\\ &= \langle x, y\rangle_R - i\langle x, iy\rangle_R,\\ &= \overline{\langle x, y\rangle}.\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}\langle x+y, z\rangle &= \langle x+y, z\rangle_R + i\langle x+y, iz\rangle_R,\\ &= \langle x, z\rangle_R + \langle y, z\rangle_R + i[\langle x, iz\rangle_R + \langle y, iz\rangle_R],\\ &= \langle x, z\rangle_R + \langle y, z\rangle_R + i\langle x, iz\rangle_R + i\langle y, iz\rangle_R,\\ &= [\langle x, z\rangle_R + i\langle x, iz\rangle_R] + [\langle y, z\rangle_R + i\langle y, iz\rangle_R],\\ &= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.\end{aligned}$$

Análogamente $\langle x, z+w\rangle = \langle x, z\rangle + \langle x, w\rangle$.

Sea $\alpha = a + bi \in \mathbb{C},\ a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha x, y\rangle &= \langle (a+bi)x, y\rangle,\\
&= \langle (a+bi)x, y\rangle_R + i\langle (a+bi)x, iy\rangle_R,\\
&= a\langle x, y\rangle_R + b\langle ix, y\rangle_R + ai\langle x, iy\rangle_R + bi\langle ix, iy\rangle_R,\\
&= a[\langle x, y\rangle_R + i\langle x, iy\rangle_R] + b[\langle ix, y\rangle_R + i\langle ix, iy\rangle_R],\\
&= a\langle x, y\rangle + b\langle ix, y\rangle,\\
&= a\langle x, y\rangle + bi\langle x, y\rangle, \qquad \textit{por } (c),\\
&= (a+bi)\langle x, y\rangle,\\
&= \alpha\langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_R + i\langle x, iy\rangle_R$ es un producto interno.

■

2.5. Propiedades de los espacios de Hilbert

Proposición 2.5.1. ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Boniakowski***

Para cualquiera $x, y \in X$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ y la igualdad se cumple si y sólo si x, y son linealmente dependientes.

Demostración. Para $y = 0$: $\langle x, y\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$, $\wedge \|y\| = 0$ $\forall x \in X$.

Para $y \neq 0$: $\langle y, y\rangle > 0$.

Partimos de la combinacion lineal $x - \alpha y$, $\alpha \in K$

$$\begin{aligned}
0 \leq \|x - \alpha y\|^2 &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle,\\
&= \langle x, x - \alpha y\rangle - \alpha\langle y, x - \alpha y\rangle,\\
&= \langle x, x\rangle - \bar{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha[\langle y, x\rangle - \bar{\alpha}\langle y, y\rangle].
\end{aligned}$$

Hacemos $\bar{\alpha} = \dfrac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}, \\
0 &\leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}, \\
\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} &\leq \|x\|^2, \\
|\langle x, y\rangle|^2 &\leq \|x\|^2\|y\|^2, \\
|\langle x, y\rangle| &\leq \|x\| \cdot \|y\|.
\end{aligned}$$

Por tanto $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Luego: Debemos probar que $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow x = \alpha y$, es decir, x, y son linealmente dependientes.

" $\Rightarrow$ "

Haremos uso del contrarrecíproco para probar esta implicación.

Supongamos que $x \neq \alpha y,\ \forall \alpha \in K$.

$$\begin{aligned}
x \neq \alpha y \Rightarrow x - \alpha y \neq 0,\ \forall \alpha \in K. \\
\Rightarrow 0 < \|x - \alpha y\|^2,\ \forall \alpha \in K.
\end{aligned}$$

Ya hemos visto por el razonamiento anterior para esta desigualdad que obtendremos: $|\langle x, y\rangle| < \|x\| \cdot \|y\|$, lo que quiere decir:$|\langle x, y\rangle| \neq \|x\| \cdot \|y\|$.

Por contrarrecíproco se deduce que: $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow x = \alpha y$, esto es que x, y son linealmente dependientes.

" $\Leftarrow$ "

Supongamos que x, y son linealmente dependientes, es decir, $x = \alpha y$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \langle \alpha y, y\rangle, \\
\langle x, y\rangle &= \alpha\langle y, y\rangle, \\
|\langle x, y\rangle| &= |\alpha|\|y\|^2, \\
|\langle x, y\rangle| &= |\alpha|\|y\| \cdot \|y\|, \\
|\langle x, y\rangle| &= \|\alpha y\| \cdot \|y\|, \\
|\langle x, y\rangle| &= \|x\| \cdot \|y\|.
\end{aligned}$$

■

Proposición 2.5.2. ***(Desigualdad triangular)***

Para cualesquiera $x, y \in X$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ y la igualdad se cumple si y sólo si $y = 0$ ó $x = cy$ $(c \geq 0)$.

Demostración. Como:

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = 2Re\langle x, y\rangle.$$

Por tanto $2Re\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$. $(*)$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (\sqrt{\langle x+y,\ x+y\rangle})^2,\\
&= \langle x+y,\ x+y\rangle,\\
&= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle,\\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle,\\
&= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2,\\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle,\\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle; \quad \text{por } (*),\\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle|; \quad \text{la parte real de un complejo es menor o igual}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{al módulo del complejo},\\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|.\|y\|; \quad \text{desigualdad de Cauchy},\\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 &\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|\\
&\Leftrightarrow 2Re\langle x, y\rangle = 2\|x\|\|y\|;\\
&\Leftrightarrow Re\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \qquad (**)
\end{aligned}$$

Sabemos que $Re\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle|$; y por Cauchy-Schwarz tenemos $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, entonces por (**) obtenemos $\|x\|\|y\| \leq |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, de donde $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| = Re\langle x, y\rangle$, entonces $Re\langle x, y\rangle \geq 0$.

Dado que $|\langle x,y\rangle|^2 = Re^2\langle x,y\rangle$, y además $Re^2\langle x,y\rangle + Im^2\langle x,y\rangle = Re^2\langle x,y\rangle$, entonces $Im^2\langle x,y\rangle = 0$, de donde $Im\langle x,y\rangle = 0$.

Como $|\langle x,y\rangle| = \|x\|.\|y\|$ esto implica dependencia lineal $x = cy$.

$Im\langle x,y\rangle = 0$ y $Re\langle x,y\rangle \geq 0$, entonces $0 \leq \langle x,y\rangle = \langle cy,y\rangle = c\|y\|^2$ de manera que $c \geq 0$. ■

Proposición 2.5.3. ***Continuidad del producto interior.***

Si $x_n \to x,\ y_n \to y$, entonces $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$.

Demostración. Sean $x_n \to x,\ y_n \to y$.

Hacemos uso de la diferencia $\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle$.

$$\begin{aligned}
|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x_n,y\rangle + \langle x_n,y\rangle - \langle x,y\rangle|,\\
&= |\langle x_n,y_n-y\rangle + \langle x_n-x,y\rangle|,\\
&\leq |\langle x_n,y_n-y\rangle| + |\langle x_n-x,y\rangle|,\\
&\leq \|x_n\|\cdot\|y_n-y\| + \|x_n-x\|\cdot\|y\|.
\end{aligned}$$

Aplicamos límite y hacemos uso de la hipótesis. Así:

$0 \leq \text{lím}\,|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| \leq \text{lím}\,\|x_n\|\cdot\|y_n-y\| + \text{lím}\,\|x_n-x\|\cdot\|y\| = 0$,

$\Rightarrow \text{lím}\langle x_n,y_n\rangle = \langle x,y\rangle$.

$\therefore \langle x_n,y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$. ■

Definición 2.5.4. *Dos elementos x,y de $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ son ortogonales, y escribimos $x\perp y$, cuando $\langle x,y\rangle = 0$. También, dos conjuntos $A,B \subset X$ son* ***ortogonales*** *si $x\perp y,\ \forall x \in A,\ \forall\, y \in B$. Dado un subconjunto $A \subset X$, el* ***complemento ortogonal*** *de A es el conjunto*

$$A^{\perp} = \{x \in X : x\perp A\}.$$

Proposición 2.5.5. ***(Teorema de Pitágoras)***
Si $x \perp y$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Demostración. Por definición x, y son ortogonales cuando $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle})^2, \\ &= \langle x+y, x+y\rangle, \\ &= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle, \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle, \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle, \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2. \end{aligned}$$

$$\therefore \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

■

2.6. Conjuntos Ortonormales

Definición 2.6.1. *Dado un espacio X pre-Hilbert, un conjunto* **ortogonal** *M de X es un subconjunto $M \subset X$, tal que para todo $x, y \in M$, $x \neq y$, $\langle x, y\rangle = 0$. M es* **ortonormal** *si además de lo anterior, $\langle x, x\rangle = 1$, para todo $x \in M$.*

Proposición 2.6.2. *Sea H un espacio pre-Hilbert y sea $Y \subset H$, definimos $Y^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0, \forall\, y \in Y\}$. Si Y es subconjunto de H no vacío, entonces $Y^{\perp}$ es subespacio de H.*

Demostración. Sean $x, z \in Y^{\perp}$, $y \in Y$, entonces $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$, como $\langle x, y\rangle = 0$ y $\langle z, y\rangle = 0$ así $\langle x+z, y\rangle = 0$, de donde $x+z \in Y^{\perp}$.

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, $\langle x, y\rangle = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha\langle x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle$.
Por tanto, $Y^{\perp}$ es subespacio de H. ■

Teorema 2.6.3. *Sea Y un subespacio de un espacio de Hilbert H, entonces Y es completo si y sólo si Y es cerrado en H.*

Demostración. Dado que por definición un espacio de Hilbert es un espacio de Banach por el teorema 2.1.13 obtenemos la prueba de este teorema. ■

Teorema 2.6.4. ***(Vector minimizante)***
Sea X un espacio pre-Hilbert y $M \neq \emptyset$ un subconjunto completo y convexo de X. Entonces para cualquier $x \in X$ dado, existe un único $\tilde{y} \in M$ tal que $\delta = \inf_{y \in M} ||x - y|| = ||x - \tilde{y}||$.

Demostración. $\delta = \inf_{y \in M} ||x - y|| = ||x - \tilde{y}||$, probemos que: $\delta \in \overline{\{||x - y|| \ : \ y \in M\}}$.

Sea $\epsilon > 0$, por definición de ínfimo, existe $y_0 \in M$ tal que $||x - y_0|| < \delta + \epsilon$, así $|\,||x - y_0|| - \delta\,| < \epsilon$, luego $||x - y_0|| \in \mathcal{B}(\delta, \epsilon) \subset \mathbb{R}$, de manera que $||x - y_0|| \in \mathcal{B}(\delta, \epsilon) \cap \{||x - y|| \ : \ y \in M\}$ y dado que ϵ es arbitrario se sigue que $\delta \in \overline{\{||x - y|| \ : \ y \in M\}}$.

Luego, existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $(||x - y_n||)_{n\in\mathbb{N}} = (\delta_n) \longrightarrow \delta$
Sea $v_n = y_n - x$, entonces $||v_n|| = ||y_n - x|| = \delta_n$ y además,

$$\begin{aligned}
||v_n - v_m|| &= ||y_n - x + y_m - x||, \\
&= ||y_n + y_m - 2x||, \\
&= 2\left\|\frac{1}{2}(y_m + y_n) - x\right\|, \\
&= 2\left\|\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) y_n + \left(1 - \frac{1}{2}\right) y_m}_{convexidad} - x\right\|, \\
&\geq 2\delta.
\end{aligned}$$

También tenemos que $v_n - v_m = y_n - y_m$, y dado que X es pre-Hilbert se cumple la identidad del paralelogramo, de donde:
$||v_n - v_m||^2 = -||v_n + v_m||^2 + 2[||v_n||^2 + ||v_m||^2]$ y dado que $||v_n - v_m||^2 = ||y_n - y_m||^2$, entonces

$$\begin{aligned}
||y_n - y_m||^2 &= -||v_n + v_m||^2 + 2[||v_n||^2 + ||v_m||^2], \\
&= -||v_n + v_m||^2 + 2({\delta_n}^2 + {\delta_m}^2), \\
&\leq -4\delta^2 + 2{\delta_n}^2 + 2{\delta_m}^2.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\longrightarrow\infty} -4\delta^2 + 2{\delta_n}^2 + 2{\delta_m}^2 = 0$, así (y_n) es de Cauchy y dado que M es completo, así $y_n \longrightarrow y \in M$, de donde $||x - y|| \geq \delta$, además $||x - y|| \leq ||x - y_n|| + ||y_n - y|| = \delta_n + ||y_n - y||$

aplicando límite obtenemos $||x-y|| \leq \delta+0=\delta$, entonces $||x-y||=\delta$, así hemos demostrado que y existe y pertenece a M.

Ahora probaremos que y es único.

Sean $y, y_0 \in M$ tales que $\delta = ||x-y|| = ||x-y_0||$, entonces

$$\begin{aligned}
||y-y_0||^2 &= ||(y-x)-(y_0-x)||^2, \\
&= -||(y-x)+(y_0-x)||^2 + 2[||y-x||^2 + ||y_0-x||^2], \\
&= 2\delta^2 + 2\delta^2 - ||y+y_0-2x||^2, \\
&= 4\delta^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|^2, \\
&\leq 4\delta^2 - 4\delta^2, \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de donde $||y-y_0||=0$, así $y=y_0$, por lo tanto y es único. ■

Lema 2.6.5. ***(Ortogonalidad)*** *En el teorema anterior, sea $M=Y$ un subespacio completo, $x \in X$ fijo, y siempre por el mismo teorema existe un único $\tilde{y} \in Y$ tal que*

$$\delta = \inf_{y\in M} ||x-y|| = ||x-\tilde{y}||.$$

Entonces $z := x-\tilde{y}$ es ortogonal a Y. ($z \perp Y$ si y sólo si $\langle z, y\rangle = 0,\ \forall y \in Y$)

Demostración. Si el lema fuera falso: $\exists\ y_1 \in Y$ tal que $\langle z, y_1\rangle \neq 0$ por tanto $y_1 \neq 0$.
Así, $\forall \alpha \in K$:

$$\begin{aligned}
\|z-\alpha y_1\|^2 &= \langle z-\alpha y_1, z-\alpha y_1\rangle, \\
&= \langle z,z\rangle + \langle z,-\alpha y_1\rangle + \langle -\alpha y_1, z\rangle + \langle -\alpha y_1, -\alpha y_1\rangle, \\
&= \langle z,z\rangle - \bar{\alpha}\langle z,y_1\rangle - \alpha\langle y_1,z\rangle + \alpha\bar{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle, \\
&= \langle z,z\rangle - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + |\alpha^2|\langle y_1,y_1\rangle, \\
&= \langle z,z\rangle - \bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha(\bar{\beta} - \bar{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle).
\end{aligned}$$

Si escogemos

$$\alpha = \frac{\bar{\beta}}{\langle y_1, y_1\rangle},$$

como $\delta = \|x - y\| = \|z\|$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
\|z - \alpha y_1\|^2 &= \|z\|^2 - \frac{\bar{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle} \cdot \beta, \\
&= \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle}, \\
&= \delta^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2, \\
&\Rightarrow \|z - \alpha y_1\| < \delta, \\
&\Rightarrow \|x - \tilde{y} - \alpha y_1\| < \delta, \\
&\Rightarrow \|x - (\tilde{y} + \alpha y_1)\| < \delta.
\end{aligned}$$

Pero $\delta = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \leq \|x - (\tilde{y} + \alpha y_1)\| < \delta$.

Tenemos que $\delta < \delta$ (una contradicción), por tanto: $\langle z, y \rangle = 0, \ \forall \, y \in Y$. ■

Teorema 2.6.6. *Sea Y cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces $H = Y \oplus Y^{\perp}$.*

Demostración. Sea $y \in Y \cap Y^{\perp}$, así $y \in Y^{\perp}$, entonces $\langle y, z \rangle = 0$, para todo $z \in Y$, de modo que $\langle y, y \rangle = 0$, de donde $y = 0$, por tanto $Y \cap Y^{\perp} = 0$

Dado que Y es cerrado, entonces es completo; por ser subespacio de Hilbert sabemos por el teorema 2.6.4 que para todo $x \in H$, existe $\tilde{y} \in Y$ tal que $\delta = \inf_{y \in M} ||x - y|| = ||x - \tilde{y}||$ y además $z = x - \tilde{y} \in Y^{\perp}$, entonces $x = \tilde{y} + z$, donde $\tilde{y} \in Y$, $z \in Y^{\perp}$ de donde $H = Y + Y^{\perp}$, por lo tanto $H = Y \oplus Y^{\perp}$.

■

Lema 2.6.7. *El complemento ortogonal $Y^{\perp}$ de un subespacio Y cerrado en un espacio de Hilbert H es el espacio nulo $\mathcal{N}(P)$.*

$$Y^{\perp} = \mathcal{N}(P).$$

Definido como $\mathcal{N}(P) = \{x \in \mathcal{D}(P) / P(x) = 0\}$, con $P : H = Y \oplus Y^{\perp} \longrightarrow Y$ que asigna $x = y + z \longmapsto P(x) = y$. Llamaremos a P proyección ortogonal de x sobre Y.

Demostración. Trabajaremos haciendo uso de la doble inclusión.

$Y^{\perp} \subset \mathcal{N}(P)$ se cumple dado que $P(Y^{\perp}) = \{0\}$.

Sea $x \in \mathcal{N}(P)$, como $x \in H$, $x = y + z,\ y \in Y,\ z \in Y^{\perp}$.

$P(x) = y = 0$.

$\Rightarrow x = 0 + z = z,$

$\Rightarrow x = z\ \in Y^{\perp},$

$\Rightarrow x \in Y^{\perp},$

$\Rightarrow \mathcal{N}(P) \subset Y^{\perp}.$

$$\therefore Y^{\perp} = \mathcal{N}(P).$$

■

Lema 2.6.8. *El complemento ortogonal $M^{\perp}$, de un subconjunto M cerrado en un espacio Hilbert H, es cerrado.*

Demostración. tenemos que $M^{\perp} = \{h \in H : h \perp M\}$,

sea $h \in \overline{M^{\perp}}$ entonces existe $(x_n) \subset M^{\perp}$, tal que $(x_n) \longrightarrow h \in H$.

Sea $(m) \in M$ arbitrariamente fijado, $m \longrightarrow m$

así $<x_n, m> \longrightarrow <h, m>$, pero $\langle x_n, m\rangle = 0$ para todo x_n,

$\Rightarrow <h, m> = 0,$

$\Rightarrow h \perp M,$

$\Rightarrow h \in M^{\perp},$

$\therefore M^{\perp}$ es cerrado. ■

Lema 2.6.9. *Si Y es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces $Y = Y^{\perp\perp}$.*

Demostración. Sabemos que $Y^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0, \forall\, y \in Y\}$ de manera que $Y^{\perp\perp} = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0, \forall\, y \in Y^{\perp}\}$.

Sea $y \in Y,\ y_1 \in Y^{\perp}$, entonces $\langle y, y_1\rangle = 0$, de donde $y \in Y^{\perp\perp}$, de este modo $Y \subset Y^{\perp\perp}$.

Sea $x \in Y^{\perp\perp}$ por la definición 1.1.10 podemos escribir a x como $x = y + z$, donde $y \in Y,\ z \in Y^{\perp}$, así $y \in Y^{\perp\perp}$ (ya que $Y \subset Y^{\perp\perp}$) y $x \in Y^{\perp\perp}$, entonces $x - y = z \in Y^{\perp\perp}$, es decir $z \in Y^{\perp} \cap Y^{\perp\perp}$ de donde $z = 0$, $x = y$ pero $y \in Y$ así $x \in Y$ por tanto $Y^{\perp\perp} \subset Y$.

■

Definición 2.6.10. *Un conjunto total (Conjunto fundamental) en un espacio normado X es un subconjunto $M \subset X$ cuyo Span es denso en X, es decir $\overline{SpanM} = X$. Un conjunto ortonormal que es total en X se le llama conjunto ortonormal total.*

2.7. Representación de funcionales en espacios de Hilbert

La forma general de los funcionales lineales y acotados en los espacios de Hilbert es admirablemente simple y de gran importancia práctica. A continuación estudiaremos la representación de funcionales lineales en términos del producto interno.

Proceso de Gram-Schmidt

El proceso de Gram-Schmidt se utiliza para ortonormalizar cualquier sucesión linealmente independiente (x_j) en un espacio con producto interno. El resultado de este proceso es una sucesión ortonormal (e_j), la cual posee la propiedad que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$Span\{e_1, \cdots, e_n\} = Span\{x_1, \cdots, x_n\}.$$

El proceso es el siguiente:

- Paso 1. El primer elemento de (e_k) es

$$e_1 = \frac{1}{||x_1||} \cdot x_1.$$

- Paso 2. x_2 puede ser escrito de la siguiente manera:

$$x_2 = \langle x_2, e_1 \rangle e_1 + v_2.$$

  En donde $v_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1$ no es el vector cero ya que (x_j) es linealmente independiente; además $v_2 \perp e_1$ ya que $\langle v_2, e_1 \rangle e_1 = 0$, de modo que,

$$e_2 = \frac{1}{||v_2||} \cdot v_2.$$

- Paso 3. El vector $v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2$ no es el vector cero y $v_3 \perp e_1$ tanto como $v_3 \perp e_2$, luego tomamos
$$e_3 = \frac{1}{||v_3||} \cdot v_3.$$

- Paso n. El vector $v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k$, no es el vector cero y es ortogonal a $e_1, \cdots, e_{n-1}$, de manera que:
$$e_n = \frac{1}{||v_n||} v_n.$$

La nueva sucesión (e_j) generada por este proceso es ortonormal y además para todo $n \in \mathbb{N}$,
$$Span\{e_1, \cdots, e_n\} = Span\{x_1, \cdots, x_n\}.$$

Un resultado inmediato de este proceso nos indica que cuando el espacio posee una base, podemos a partir de ella generar una base ortonormal.

Teorema 2.7.1. ***(Representación de Riesz para dimensión finita)****. Si X es un espacio pre-Hilbert de dimensión finita y $f : X \to E$ funcional lineal, entonces existe un único $y \in X$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$, para todo $x \in X$.*

Demostración. Dado que X es un espacio de dimensión finita posee una base, sabemos que una base es una sucesión linealmente independiente, por lo que podemos aplicar el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de X. Sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una base ortonormal de X.
Si $y = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(x_i)} x_i$, definimos la aplicación $f_y : X \to E$ como $f_y(x) = \langle x, y \rangle$.

Luego,

$$\begin{aligned}
f_y(x_j) &= \langle x_j, y\rangle,\\
&= \langle x_j, \sum_{i=1}^{n}\overline{f(x_i)}x_i\rangle,\\
&= \langle x_j, \overline{f(x_1)}x_1 + \cdots + \overline{f(x_n)}x_n\rangle,\\
&= \langle x_j, \overline{f(x_1)}x_1\rangle + \cdots + \langle x_j, \overline{f(x_j)}x_j\rangle + \cdots + \langle x_j, \overline{f(x_n)}x_n\rangle,\\
&= f(x_1)\langle x_j, x_1\rangle + \cdots + f(x_j)\langle x_j, x_j\rangle + \cdots + f(x_j)\langle x_j, x_n\rangle,\\
&= 0 + \cdots + f(x_j) + \cdots + 0,\\
&= f(x_j).
\end{aligned}$$

Por tanto $f_y(x_j) = f(x_j)$, $\forall\, j = 1, \cdots, n$. de aquí deducimos que $f_y(x) = f(x)$, $\forall\, x \in X$.

Si existiera $z \in X$ tal que $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ para todo $x \in X$, entonces $\langle x, y-z\rangle = 0$, $\forall\, x \in X$, de donde $y = z$. ■

Probaremos a continuación el teorema de representación de Riesz que prueba que este hecho es también cierto en espacios de Hilbert arbitrarios.

Teorema 2.7.2. ***(Riesz para cualquier dimensión)***.
Un funcional $f : X \to E$ de un espacio de Hilbert es lineal y acotado si y sólo si existe un único $y \in X$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$, para todo $x \in X$. Además $||f|| = ||y||$.

Demostración. Suponga que $f : X \to E$ es un funcional en un espacio de Hilbert y existe un único $y \in X$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$, para todo $x \in X$, probaremos que es lineal y acotado.

Dado que $y \in X$, consideramos $f(x) = \langle x, y\rangle$, claramente f es lineal por estar definido como un producto interno. Además $|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por tanto, f está acotado y

$\sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(f)\\ x\neq 0}} |f(x)| \leq ||y||$. Pero si hacemos $x = y$, $|f(y)| = ||y|| \cdot ||y||$, entonces

$\sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(f)\\ x\neq 0}} |f(x)| \geq ||y||$, de donde $||f|| = ||y||$.

Ahora supongamos que f es lineal y acotado, probemos que existe un único $y \in X$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$, para todo $x \in X$. Además $||f|| = ||y||$.

Si $f = \mathbf{0}$, entonces tomamos $y = 0$.
Supongamos $f \neq \mathbf{0}$, si y existiera, veamos que propiedades tendría, dado que $f(x) = 0$, para todo y e $x \in \mathcal{N}(f)$, entonces $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{N}(f)$, de manera que $y \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$.

Por el teorema 2.2.8 sabemos que f es continuo, luego por la proposición 2.3.2 tenemos que $\mathcal{N}(f)$ es cerrado.
Dado que $\mathcal{N}(f)$ es cerrado, $H = \mathcal{N}(f) \oplus \mathcal{N}(f)^{\perp}$ por el teorema 2.6.6, además por ser $f \neq \mathbf{0}$, $\mathcal{N}(f) \neq H$. Por ser $\mathcal{N}(f) \neq H$, existe $y_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$ tal que $y_0 \neq 0$.

Definamos $v_x = f(x)y_0 - f(y_0)x$, $\forall\, x \in X$, luego $f(v_x) = f(x)f(y_0) - f(y_0)f(x)$, entonces $f(v_x) = 0$, $\forall\, x \in X$, de manera que $v_x \in \mathcal{N}(f)$, $\forall\, x \in X$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_x, y_0\rangle, \\ &= \langle f(x)y_0 - f(y_0)x, y_0\rangle, \\ &= \langle f(x)y_0, y_0\rangle - \langle f(y_0)x, y_0\rangle, \\ &= f(x)\langle y_0, y_0\rangle - f(y_0)\langle x, y_0\rangle. \end{aligned}$$

De donde $f(x) = \dfrac{f(y_0)}{\langle y_0, y_0\rangle}\langle x, y_0\rangle = \left\langle x, y_0 \cdot \dfrac{\overline{f(y_0)}}{\langle y_0, y_0\rangle}\right\rangle$, $\forall\, x \in X$.
Sea $y = y_0 \cdot \dfrac{\overline{f(y_0)}}{\langle y_0, y_0\rangle}$, entonces $f(x) = \langle x, y\rangle$, $\forall\, x \in X$.

Supongamos que existe $z \in X$ tal que $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ para todo $x \in X$, entonces $\langle x, y - z\rangle = 0$, $\forall\, x \in X$, de donde $y = z$.

Tenemos entonces que $f(x) = \langle x, y\rangle$, donde y es único y depende de f, probemos que $||f|| = ||y||$.
Si $f = \mathbf{0}$, entonces $\langle x, y\rangle = 0\ \forall\, x \in X$, así $y = 0$ y $||f|| = ||y||$.
Supongamos que $f \neq \mathbf{0}$.

$||y||^2 = \langle y, y \rangle = f(y) \leq ||f||\,||y||$, ya que f es acotado, entonces $||y|| \leq ||f||$.

Por otra parte $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq ||x||\,||y||$, $\forall\, x \in X$, entonces

$\sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ ||x||=1}} |f(x)| \leq ||y||$, de donde $||f|| \leq ||y||$, por tanto $||f|| = ||y||$.

■

Lema 2.7.3. ***(Igualdad)***

Si $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle$ para todo w en un espacio pre-Hilbert X, entonces $v_1 = v_2$. En particular, $\langle v_1, w \rangle$=0 para todo $w \in X$ entonces $v_1 = 0$.

Demostración. Suponemos que para todo $w \in X$, $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle$

$\langle v_1 - v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle - \langle v_2, w \rangle = 0, entonces\ \langle v_1 - v_2, w \rangle = 0$.

Sea $w = v_1 - v_2$.

Como $w = v_1 - v_2$, entonces $\langle v_1 - v_2, w \rangle = \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle = 0$, entonces $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$, por lo tanto $v_1 - v_2 = 0$, así $v_1 = v_2$.

En particular si $\langle v_1, w \rangle = 0$ para todo $w \in X$.

Sea $w = v_1$.

Como $w = v_1$ entonces $\langle v_1, w \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle = \|v_1\|^2 = 0$, así $v_1 = 0$. ■

Definición 2.7.4. (**Forma sesquilineal**)

Sean X e Y espacios vectoriales sobre $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ una forma sesquilineal h sobre $X \times Y$ es un mapeo $h : X \times Y \longrightarrow K$, tal que para todo $x, x_1, x_2 \in X$, para todo $y, y_1, y_2 \in Y$ y para todo $\alpha, \beta \in K$.

1. $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$.

2. $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$.

3. $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$.

4. $h(x, \beta y) = \overline{\beta} h(x, y)$.

Definición 2.7.5. *Si X e Y son espacios normados y h una forma sesquilineal sobre $X \times Y$, entonces se dice que* **h es acotada** *si existe $c > 0$ tal que*
$|h(x, y)| \leq c\|x\|\|y\|$, para todo $(x, y) \in X \times Y$. Y el número

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \in X-\{0\} \\ y \in Y-\{0\}}} \frac{|h(x, y)|}{\|x\|\|y\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ ||y||=1}} |h(x, y)|,$$

como

$$\frac{|h(x, y)|}{\|x\|\|y\|} \leq \|h\|$$

entonces,

$$\|h(x, y)\| \leq \|h\|\|x\|\|y\|.$$

Teorema 2.7.6. ***(Representación de Riesz)*** *Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert y sea h una forma sesquilineal acotada tal que $h : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$, entonces h tiene representación $h(x, y) = \langle Sx, y\rangle_{H_2}$, donde S es un operador lineal y acotado tal que $S : H_1 \to H_2$. S está unicamente determinado por h y además $||S|| = ||h||$.*

Demostración. Consideremos $\overline{h(x, y)}$, fijemos $x \in H_1$, y variamos $y \in H_2$, entonces $\overline{h(x, y)} : H_2 \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal en la segunda componente., por el teorema de Riesz existe un único $z_x \in H_2$ tal que $\overline{h(x, y)} = \langle y, z_x\rangle_{H_2}$, de donde $h(x, y) = \langle z_x, y\rangle_{H_2}$.

Definamos $S : H_1 \to H_2$, tal que $S(x) = z_x$. Tenemos la certeza que S está bien definida ya que para cada x existe un único z_x por el teorema de Riesz. Entonces $h(x, y) = \langle S_x, y\rangle_{H_2}$, $S_x = z_x$. Probemos que S es lineal. Sea x, $w \in H_1$, $y \in H_2$.

$$\begin{aligned}
\langle S(\alpha x + w), y\rangle &= h(\alpha x + w, y), \\
&= \alpha h(x, y) + h(w, y), \\
&= \alpha\langle Sx, y\rangle + \langle Sw, y\rangle, \\
&= \langle \alpha Sx + Sw, y\rangle, \ \forall\, y \in H_2. \\
\therefore S(\alpha x + w) &= \alpha Sx + Sw.
\end{aligned}$$

De donde S es lineal. Probaremos ahora que $||S|| = ||h||$.

Sabemos que $||h|| = \sup\limits_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \dfrac{|h(x,y)|}{||x||\,||y||}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
||h|| &= \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|h(x,y)|}{||x||\,||y||},\\
&= \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|\langle Sx,y\rangle|}{||x||\,||y||},\\
&\leq \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{||Sx||\,||y||}{||x||\,||y||}, \quad \text{Cauchy-Schwarz},\\
&= \sup_{x\neq 0} \frac{||Sx||}{||x||},\\
&= ||S||.\\
\therefore\ ||h|| &\leq ||S||.
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
||h|| &= \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|h(x,y)|}{||x||\,||y||},\\
&\geq \sup_{\substack{x\neq 0\\ Sx\neq 0}} \frac{|\langle Sx,Sx\rangle|}{||x||\,||Sx||},\\
&= \sup_{\substack{x\neq 0\\ Sx\neq 0}} \frac{||S_x||^2}{||x||\,||Sx||},\\
&= \sup_{\substack{x\neq 0\\ Sx\neq 0}} \frac{||S_x||}{||x||},\\
&= ||S||.\\
\therefore\ ||h|| &\geq ||S||.
\end{aligned}
$$

Por tanto $||h|| = ||S||$.

Para probar la unicidad de S: Sea T un operador tal que $T : H_1 \to H_2$, donde $h(x,y) = \langle Sx,y\rangle = \langle Tx,y\rangle$, entonces,

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle Sx,y\rangle - \langle Tx,y\rangle,\\
0 &= \langle Sx - Tx,y\rangle,\ \forall\, x\in H_1,
\end{aligned}
$$

De manera que $Sx = Tx$ para todo x de donde $S = T$. ■

Definición 2.7.7. ***(Operador Hilbert-adjunto)*** *Sea $T : H_1 \longrightarrow H_2$, un operador lineal y acotado donde H_1 y H_2 son espacios de Hilbert. Entonces el operador Hilbert-adjunto T^* de T es el operador $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ tal que $\langle T_x, y\rangle = \langle x, T^*_y\rangle$, $\forall x \in H_1$, $\forall y \in H_2$.*

Teorema 2.7.8. ***(Existencia del operador Hilbert-adjunto)***
Dado un operador lineal acotado $T : H_1 \longrightarrow H_2$ donde H_1, H_2 son dos espacios de Hilbert, siempre existe $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ el operador Hilbert-adjunto de T, y es único, lineal y acotado.

Demostración. Sea $h : H_2 \times H_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $h(y, x) = \langle y, Tx\rangle$, donde $(y, x) \in H_2 \times H_1$. Si $(y_1, x_1) = (y_2, x_2)$, entonces $Tx_1 = Tx_2$, de donde $\langle y_1, Tx_1\rangle = \langle y_2, Tx_2\rangle$, así h es función.

Probemos que h es una forma sesquilineal.

Paso 1.

$$\begin{aligned} h(y_1 + y_2, x) &= \langle y_1 + y_2, Tx\rangle, \\ &= \langle y_1, Tx\rangle + \langle y_2, Tx\rangle, \\ &= h(y_1, x) + h(y_2, x). \end{aligned}$$

Paso 2.

$$\begin{aligned} h(y, x_1 + x_2) &= \langle y, T(x_1 + x_2)\rangle, \\ &= \langle y, Tx_1\rangle + \langle y, Tx_2\rangle, \\ &= h(y, x_1) + h(y, Tx_2). \end{aligned}$$

Paso 3.

$$\begin{aligned} h(\alpha y, x) &= \langle \alpha y, Tx\rangle, \\ &= \alpha\langle y, Tx\rangle, \\ &= \alpha \cdot h(y, x). \end{aligned}$$

Paso 4.

$$\begin{aligned} h(y, \beta x) &= \langle y, T(\beta x)\rangle, \\ &= \langle y, \beta Tx\rangle, \\ &= \overline{\beta}\langle y, Tx\rangle, \\ &= \overline{\beta} \cdot h(y, x). \end{aligned}$$

Luego, $|h(y,x)| = |\langle y, Tx\rangle| \leq ||y||\,||Tx|| \leq ||T||\,||x||\,||y||$, entonces $\dfrac{|h(y,x)|}{||x||\,||y||} \leq ||T||$, de donde $||h|| \leq ||T||$.
Por otra parte,

$$\begin{aligned}
||h|| &= \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|h(y,x)|}{||x||\,||y||},\\
&= \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|\langle y, Tx\rangle|}{||x||\,||y||},\\
&\geq \sup_{\substack{x\neq 0\\ Tx\neq 0}} \frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{||x||\,||Tx||},\\
&= \sup_{\substack{x\neq 0\\ Tx\neq 0}} \frac{||Tx||^2}{||x||\,||Tx||},\\
&= \sup_{\substack{x\neq 0\\ Tx\neq 0}} \frac{||Tx||}{||x||},\\
&= ||T||.\\
\therefore\ ||h|| &\geq ||T||.
\end{aligned}$$

De donde $||h|| = ||T||$. Por el teorema de representación de Riesz existe un único operador lineal $T^* : H_2 \to H_1$ tal que $h(y,x) = \langle T^*y, x\rangle_{H_1}$ y $||T^*|| = ||h|| = ||T||$ y T^* es lineal, por como se definió h tenemos, $h(y,x) = \langle y, Tx\rangle_{H_2} = \langle T^*y, x\rangle_{H_1}$, así se sigue que $\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^*y\rangle_{H_1}$.

■

Lema 2.7.9. ***(Operador cero)*** *Sean X e Y espacios pre-Hilbert y $Q : X \longrightarrow Y$ un operador lineal y acotado. Entonces:*

(a) $Q = 0$ si y sólo si $\langle Qx, y\rangle = 0$, para todo $x \in X$, para todo $y \in Y$.

(b) Si $Q : X \longrightarrow X$, donde X es complejo y $\langle Qx, x\rangle = 0$ para todo $x \in X$ entonces $Q = 0$.

Demostración. a) Probaremos si $Q = 0$ entonces $\langle Qx, y\rangle = 0$, para todo $x \in X$, para todo $y \in Y$.

Si $Q = 0$, entonces $Qx = 0$ para todo x, por lo tanto $\langle Qx, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, así $\langle Qx, y\rangle = 0$.

Ahora probemos si $\langle Qx, y\rangle = 0$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, entonces $Q = 0$.

Si $\langle Qx, y\rangle = 0$, $\forall\ x \in X$, $\forall\ y \in Y$.

Sea $x_0 \in X$, como $x_0 \in X$ entonces $\langle Qx_0, y\rangle = 0$, $\forall y \in Y$, así $Qx_0 = 0$, por lema de igualdad 2.7.3, por tanto $Q = 0$, ya que x_0 es arbitrario en X.

b) Sea $x, y \in X$, entonces $v = \alpha x + y \in X$.

Por hipótesis: $0 = \langle Qv, v\rangle$,

así

$$\begin{aligned} 0 = \langle Qv, v\rangle &= \langle Q\alpha x + y, \alpha x + y\rangle, \\ &= \langle \alpha Qx + Qy, \alpha x + y\rangle, \\ &= |\alpha|^2\langle Qx, x\rangle + \alpha\langle Qx, y\rangle + \overline{\alpha}\langle Qy, x\rangle + \langle Qy, y\rangle, \\ &= \alpha\langle Qx, y\rangle + \overline{\alpha}\langle Qy, x\rangle. \end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$:

$$\langle Qx, y\rangle + \langle Qy, x\rangle = 0. \qquad (1)$$

Si $\alpha = i$, $\overline{\alpha} = -i$:

$$\begin{aligned} i\langle Qx, y\rangle - i\langle Qy, x\rangle = 0 &\Rightarrow i(\langle Qx, y\rangle - \langle Qy, x\rangle) = 0, \\ &\Rightarrow \langle Qx, y\rangle - \langle Qy, x\rangle = 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Sumamos (1) y (2)

$$\begin{aligned} (\langle Qx, y\rangle + \langle Qy, x\rangle) + (\langle Qx, y\rangle - \langle Qy, x\rangle) = 0 &\Rightarrow 2\langle Qx, y\rangle = 0, \\ &\Rightarrow \langle Qx, y\rangle = 0, \\ &\Rightarrow Q = 0. \end{aligned}$$

■

2.8. Ejercicios

1. Sea X un espacio pre-Hilbert real. Probar que si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, entonces $x \perp y$.

   Probar que lo anterior no es cierto si X es complejo.

   Sugerencia: De los axiomas del producto escalar obtenemos:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

   Aplicando la hipótesis se deduce que

$$2Re\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$$

2. Probar que en un espacio pre-Hilbert, para cualquier escalar α,

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|$$

   Sugerencia: Las siguientes igualdades son válidas en general.

$$\|x+\alpha y\|^2 = \langle x,x\rangle + \alpha\langle y,x\rangle + \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\bar{\alpha}\langle y,x\rangle$$

$$\|x-\alpha y\|^2 = \langle x,x\rangle - \alpha\langle y,x\rangle - \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\bar{\alpha}\langle y,x\rangle$$

3. Sea X un espacio pre-Hilbert.

   Probar que $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = \|x\|$, $\forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow x = y$.

   ¿Es cierto lo anterior si X es un espacio normado?

   Sugerencia: Utilice la identidad del paralelogramo.

4. Probar que la descomposición $X = M \oplus M^{\perp}$ no es cierta si M es subespacio cerrado de X pero X es pre-Hilbert.

5. Sea X un espacio normado e Y un espacio pre-hilbert.

   Si un operador $T : X \longrightarrow Y$ es lineal y acotado, probar que $\|T\| = supA$, donde

$$A = \{\frac{|\langle T_x, y\rangle|}{\|x\|.\|y\|} : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$$

   Sugerencia: Utlizar la desigualdad de Cauchy- Schwarz.

Capítulo 3

Aplicaciones

3.1. Teorema de punto fijo de Banach

Un ***punto fijo*** de un mapeo $T : X \longrightarrow X$ de un conjunto X hacia él mismo es un elemento $x \in X$ que se mapea sobre si mismo (se mantiene "fijo"por T), es decir,

$$Tx = x.$$

La imagen Tx coincide con x.

El teorema de punto fijo de Banach que se indicará a continuación es un teorema de existencia y unicidad para puntos fijos de ciertos mapeos, y también da un procedimiento constructivo para obtener mejores aproximaciones al punto fijo. Este proceso es llamado una ***iteración***. Por definición, este es un método tal que elegimos un x_0 arbitrario en un conjunto dado y calculamos recursivamente una secuencia $x_0, x_1, x_2, \cdots$ de una relación de la forma

$$x_{n+1} = Tx_n,\ n = 0, 1, 2, \cdots ;$$

es decir, elegimos un x_0 arbitrario y determinamos sucesivamente $x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_{1,\ldots}$. Los procesos de iteración son usados en casi cada rama de las matemáticas aplicadas, y las pruebas de convergencia y error estimado son muy a menudo obtenidas de una aplicación del teorema de punto fijo de Banach. El teorema de Banach da las condiciones suficientes para la existencia (y unicidad) de un punto fijo para una clase de mapeos, llamados contracciones. La definición es la siguiente.

Definición 3.1.1. ***Contracción.***

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. Un mapeo $T : X \longrightarrow X$ es llamado contracción sobre X si existe un número real positivo $\alpha < 1$ tal que para todo $x, y \in X$:

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y). \tag{3.1}$$

Geométricamente esto significa que algunos puntos x e y tienen imágenes que están más juntas que esos puntos x e y; más precisamente, la relación $d(Tx, Ty)/d(x, y)$ no excede a una constante α que es estrictamente menor que 1.

Teorema 3.1.2. ***Teorema de punto fijo de Banach. (Teorema de contracción)***
Considere un espacio métrico $X = (X, d)$, donde $X \neq \emptyset$. Supóngase que X es completo y sea $T : X \longrightarrow X$ una contracción sobre X. Entonces X tiene precisamente un punto fijo.

Demostración. La idea de la prueba es construir una sucesión (x_n) y mostrar que es de Cauchy, es decir, que converge en el espacio completo X, y luego probaremos que su limite x es un punto fijo de T y es único.
Elegimos cualquier $x_0 \in X$ y definimos la sucesión iterada (x_n) por

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ \cdots, \ x_n = T^n x_0, \ \cdots \tag{3.2}$$

Esta es una sucesión de imágenes de x_0 bajo una repetida aplicación de T. Mostraremos que (x_n) es de Cauchy.
Por 3.1 y 3.2,

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}), \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}), \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}), \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}), \\ &\cdots \leq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por lo tanto, por la desigualdad del triángulo y la fórmula para la suma de una sucesión geométrica obtenemos para $n > m$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n), \\ &\leq \alpha^m d(x_0, x_1) + \alpha^{m+1} d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{n-1} d(x_0, x_1), \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1), \\ &= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Ya que $0 < \alpha < 1$, en el numerador tenemos que $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Por consiguiente,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \quad (n > m). \tag{3.4}$$

A la derecha, $0 < \alpha < 1$ y $d(x_0, d_1)$ es fijo, de modo que podemos hacer que el lado derecho sea tan pequeño como lo deseamos, tomando m lo suficientemente grande con $n > m$. Esto prueba que (x_m) es de Cauchy. Como X es completo, (x_m) converge, digamos, $x_m \longrightarrow x$. Mostraremos que este límite x es un punto fijo del mapeo T.

Por la desigualdad del triángulo y 3.1 tenemos:

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx), \\ &= d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx), \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x). \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$, dado que $(x_n) \longrightarrow x$ tenemos que: $d(x, x_m) < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $d(x_{m-1}, x) < \dfrac{\epsilon}{2}$, de donde $d(x, Tx) \leq \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$, de manera que podemos concluir que $d(x, Tx) = 0$, así que $x = Tx$, recordemos que $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ **(*)**. Esto muestra que x es un punto fijo de T.

x es el único punto fijo de T ya que si $Tx = x$ y $T\tilde{x} = \tilde{x}$ obtenemos por 3.1 que:

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leq \alpha d(x, \tilde{x}),$$

lo que implica $d(x, \tilde{x}) = 0$ ya que $\alpha < 1$. Por lo tanto $x = \tilde{x}$ por (*) y el teorema queda probado. ■

Corolario 3.1.3. ***Iteración, límites de error***. *Bajo las condiciones del teorema anterior, la sucesión iterada* ***3.2*** *con* $x_0 \in X$ *converge a el único punto fijo* x *de* T. *Los errores de estimación son la* ***estimación previa***.

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1), \tag{3.5}$$

y la ***estimación posterior***

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m), \tag{3.6}$$

Demostración. La primera afirmación es evidente de la prueba anterior por la ecuación. La desigualdad 3.5 sigue de 3.4 dejando $n \longrightarrow \infty$. Deducimos 3.6 tomando $m = 1$ y escribiendo y_0 por x_0 y y_1 por x_1, tenemos de 3.5 que:

$$d(y_1, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1).$$

Ajustando $y_0 = x_{m-1}$, tenemos $y_1 = Ty_0 = x_m$ y así obtenemos 3.6. ■

El límite de error previo 3.5 puede usarse al comienzo de un cálculo para estimar el número de pasos necesarios para obtener una precisión dada. El límite de error posterior puede usarse en etapas intermedias o al final de un cálculo. Es al menos tan preciso como 3.5 y puede ser mejor.

Desde el punto de vista de las matemáticas aplicadas, la situación aún no es completamente satisfactoria porque frecuentemente ocurre que un mapeo, T es una contracción no en todo el espacio X, sino simplemente en un subconjunto Y de X. Sin embargo, si Y es cerrado, es completo por el Teorema 2.1.6. Por lo que T tiene un punto fijo x en Y, y $x_m \longrightarrow x$ como antes, siempre que impongamos una restricción adecuada a la elección de x_0, de modo que los x_m permanezcan en Y.

Un resultado típico y práctico de este tipo es el siguiente teorema.

Teorema 3.1.4. ***Contracción de una bola***

Sea T un mapeo de un espacio métrico completo $X = (X, d)$ hacia él mismo. Supongamos que T es una contracción en una bola cerrada $Y = \{x : d(x, x_0) \leq r\}$, esto es, T satisface 3.1 para todo $x, y \in Y$. Además, asumimos que:

$$d(x_0, Tx_0) < (1 - \alpha)r \tag{3.7}$$

Entonces la sucesión iterada 3.2 converge a un $x \in Y$. Este x es un punto fijo de T y es el único punto fijo de T en Y.

Demostración. Simplemente tenemos que mostrar que todos los x_m y x se encuentran en Y. Hacemos $m = 0$ en 3.4, cambiamos n a m y usamos 3.7 para obtener

$$d(x_0, x_m) \leq \frac{1}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) < r.$$

Por lo tanto, todos los x_m están en Y. Además $x \in Y$ ya que $x_m \longrightarrow x$ e Y es cerrado. La afirmación del teroema ahora se sigue de la prueba del teorema del teorema de Banach (punto fijo). ■

3.2. Aplicaciones del Teorema de Banach a ecuaciones lineales

El teorema de punto fijo de Banach tiene importantes aplicaciones a los métodos de iteración para resolver sistemas de ecuaciones lineales y proporciona suficientes condiciones para los límites de convergencia y error.

Para entender la situación, primero recordemos que para resolver un sistema así existen varios *métodos directos*, un ejemplo familiar es el método de reducción de Gauss. Sin embargo, una iteración, o método indirecto, puede ser más eficiente si el sistema es especial, por ejemplo, si es escasa, es decir, si consta de muchas ecuaciones pero tiene solo un pequeño numero de coeficientes distintos de cero.Además, los métodos directos habituales requieren alrededor de $n^3/3$ operaciones aritméticas (n=número de ecuaciones=número de incógnitas), y para n muy grande, los errores de redondeo pueden llegar a ser bastante grandes, mientras que en una iteración, los errores debidos al redondeo (o incluso cualquier error) pueden ser eliminados eventualmente. De hecho, los métodos de iteración se utilizan con frecuencia para mejorar las soluciones obtenidas mediante métodos directos.

Para aplicar el teorema de Banach, necesitamos un espacio métrico completo y un mapeo de contracción en él. Tomamos el conjunto X de todas las n-tuplas ordenadas de números reales, escritas
$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n), \qquad y = (\eta_1, \cdots, \eta_n), \qquad z = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n),$
etc. Definimos sobre X una métrica d,

$$d(x, z) = \max_j |\xi_j - \zeta_j|, \tag{3.8}$$

$X = (X, d)$ es completo.
En X definimos $T : X \longrightarrow X$ por:

$$y = Tx = Cx + b, \tag{3.9}$$

donde $C = (c_{j_k})$ es una matriz real fija de $n \times n$ y $b \in X$ un vector fijo.Aquí y después en esta sección, todos los vectores son *vectores columna*, debido a las conveniencias habituales de la multiplicación de matrices.

¿Bajo qué condición T será una contracción?
Escribiendo **3.9** en componentes, tenemos

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{j_k} \xi_k + \beta_j \qquad j = 1, \cdots n,$$

donde $b = (\beta_j)$. Hacemos $w = (\omega_j) = Tz$, así obtenemos de **3.8** y **3.9**

$$\begin{aligned} d(y, w) = d(Tx, Tz) &= \max_j |\eta_j - \omega_j|, \\ &= \max_j |\sum_{k=1}^{n} c_{j_k}(\xi_k - \zeta_k)|, \\ &\leq \max_j |\xi_j - \zeta_j| \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{j_k}|, \\ &= d(x, z) \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{j_k}|. \end{aligned}$$

Vemos que esto puede ser escrito como $d(y,w) \leq \alpha d(x,z)$, donde

$$\alpha = \max_{j} \sum_{k=1}^{n} |c_{j_k}|. \tag{3.10}$$

El teorema de Banach 3.1.2 da como resultado:

Teorema 3.2.1. ***(Ecuaciones lineales)***

Si un sistema

$$x = Cx + b \qquad\qquad (C = (c_{j_k}),\ b \text{ es dado}) \tag{3.11}$$

de n ecuaciones lineales con n incógnitas $\xi_1, \cdots, \xi_n$ (las componentes de x) satisface

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{j_k}| < 1 \qquad\qquad (j = 1, \cdots, n), \tag{3.12}$$

tiene precisamente una solución de x. Esta solución puede ser obtenida como el limite de la sucesión iterada $(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots)$, donde $x^{(0)}$ es arbitrario y

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b, \qquad\qquad m = 0, 1, \cdots \tag{3.13}$$

Los límites de error son:

$$d(x^{(m)}, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(m-1)}, x^{(m)}) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)}). \tag{3.14}$$

La condición 3.12 es suficiente para la convergencia. Es un **criterio de suma de filas** porque involucra sumas de filas obtenidas sumando los valores absolutos de los elementos en una fila de C. Si reemplazamos 3.8 por otras métricas, obtendría otras condiciones.
¿Cómo se relaciona el teorema 3.2.1 con los métodos utilizados en la práctica? Un sistema de n ecuaciones lineales en n incógnitas se escribe generalmente

$$Ax = c, \tag{3.15}$$

donde A es una matriz cuadrada $n \times n$. Algunos métodos iterativos para 3.15 con $det A \neq 0$ son tales que se escribe $A = B - G$ con una adecuada matriz no singular B. Entonces 3.15 se convierte en

$$Bx = Gx + c$$

o

$$x = B^{-1}(Gx + c).$$

Esto sugiere la iteración 3.13 donde

$$C = B^{-1}G, \qquad b = B^{-1}c \tag{3.16}$$

Ilustrémoslo con dos métodos estándar, la iteración de Jacobi, que es en gran parte de interés teórico, y la iteración de Gauss-Seidel, que se utiliza ampliamente en las matemáticas aplicadas.

Definición 3.2.2. ***(Iteración de Jacobi)***
Este método es definido por

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}}(\gamma_j - \sum_{k \neq j}^{n} a_{j\,k}\xi_k^{(m)}) \qquad j = 1, \cdots, n \tag{3.17}$$

donde $c = (\gamma_j)$ *en 3.15 y asumiendo que* $a_{jj} \neq 0$ *por* $j = 1, \cdots, n$.

Esta iteracion se sugiere resolviendo la j-ésima ecuación en 3.15 para ξ_j. Además 3.17 puede ser escrito de la forma de 3.13 con

$$C = -D^{-1}(A - D), \qquad b = D^{-1}c \tag{3.18}$$

donde $D = diag(a_{jj})$ es la matriz diagonal cuyos elementos distintos de cero son los de la diagonal principal de A.
La condición 3.12 aplicada a C en 3.18 es suficiente para la convergencia de la Iteracion de Jacobi. Como C en 3.18 es relativamente simple, podemos expresar 3.12 directamente en términos de los elementos de A. El resultado es el criterio de suma de filas para la Iteración de Jacobi

$$\sum_{k=1, k\neq 1}^{n} |\frac{a_{jk}}{a_{jj}}| < 1 \qquad j = 1, \cdots, n \tag{3.19}$$

o

$$\sum_{k \neq j}^{n} |a_{jk}| < |a_{jj}| \qquad j = 1, \cdots, n \tag{3.20}$$

Esto muestra que, en términos generales, la convergencia está garantizada si los elementos en la diagonal principal de A son suficientemente grandes.

Tenga en cuenta que en la iteración de Jacobi algunos componentes de $x^{(m+1)}$ ya pueden estar disponibles en un momento determinado, pero no se utilizan mientras el cálculo de los componentes restantes aún está en progreso, es decir, todos los componentes de una nueva aproximación se introducen simultáneamente al final de un ciclo iterativo. Expresamos este hecho diciendo que la iteración de Jacobi es un método de correcciones simultáneas.

Definición 3.2.3. ***(Iteración de Gauss-Seidel)***
Este es un método de correcciones sucesivas, en el que en cada instante se utilizan todos los componentes conocidos más recientes. El método está definido por

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}}(\gamma_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}\xi_k^{(m+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}\xi_k^{(m)}) \tag{3.21}$$

donde $j = 1, \cdots, n$ y asumimos $a_{jj} \neq O$ para todo j.

3.3. Aplicación del Teorema de Banach a las ecuaciones diferenciales

Las más interesantes aplicaciones del teorema de punto fijo de Banach surgen en conexión con espacios de funciones. El teorema luego da lugar a teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales e integrales, como ya veremos.
De hecho, en esta sección consideraremos una *ecuación diferencial ordinaria explícita de primer orden*

$$x' = f(t, x) \tag{3.22}$$

Un **problema de valor inicial** para tal ecuación consiste de la ecuación y una *condición inicial*

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.23}$$

donde t_0 y x_0 son números reales.
Usaremos el teorema de Banach para probar el famoso teorema de Picard que, si bien no es el más fuerte de su tipo que se conoce, juega un papel vital en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. La idea de enfoque es bastante simple: 3.22 se convertirá en una

ecuación integral, que define un mapeo T, y las condiciones del teorema implicarán que T es una contracción tal que su punto fijo se convierte en la solución de nuestro problema.

Teorema 3.3.1. ***Existencia y unicidad de Picard (Ecuación diferencial ordinaria)***

Sea f continua en un rectángulo

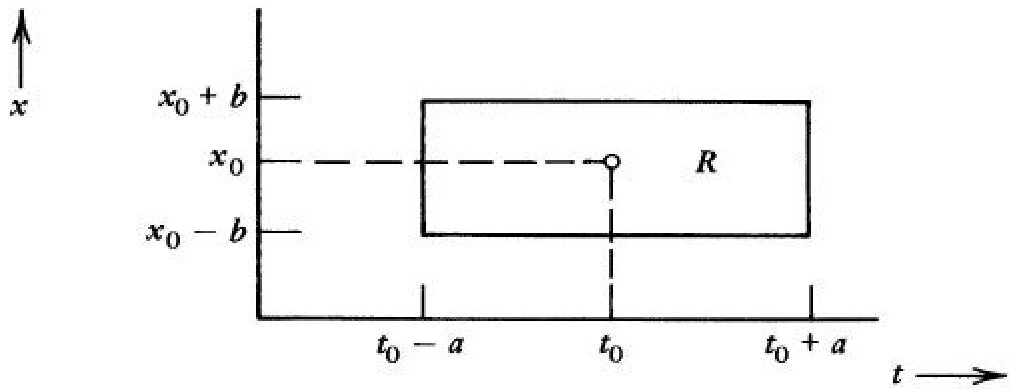


Figura 3.1: *f continua en un rectángulo*

$$R = \{(t,x)/|t-t_0| \leq a, |x-x_0| \leq b\}$$

y por lo tanto acotada en R (ver figura 3.2), supongamos que se cumple para todo (t,x) en $\mathbb{R}$ que,

$$|f(t,x)| \leq c \tag{3.24}$$

Supongamos que f satisface la condición de Lipschitz en R con respecto a su segundo argumento, es decir, existe una constante k (constante de Lipschitz) tal que para (t,x), $(t,v) \in R$,

$$|f(t,x) - f(t,v)| \leq k|x-v|. \tag{3.25}$$

Entonces el problema de valor inicial 3.8 tiene solución única. Esta solución existe en un intervalo $[t_0-\beta, t_0+\beta]$, donde

$$\beta < \text{mín}\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\}. \tag{3.26}$$

.

Figura 3.2: *Rectángulo R*

Demostración. Sea $C(J)$ el espacio métrico de todas las funciones continuas de valor real en el intervalo $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ con la métrica d definida por

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

$C(J)$ es completo. Sea $\bar{C}$ el subespacio de $C(J)$ que consiste de todas aquellas funciones $x \in C(J)$ que satisfacen:

$$|x(t) - x_0| \leq c\beta. \tag{3.27}$$

Probemos que $\bar{C}$ es cerrado en $C(J)$ Sea x en la clausura $\bar{C}$.
Entonces existe $(x_n) \subset \bar{C}$ tal que $x_n \to x$, por definición sabemos que, $|x_n(t) - x_0| \leq c\beta$, entonces $\lim_{n\to\infty} |x_n(t) - x_0| \leq \lim_{n\to\infty} c\beta$, por lo que $| \lim_{n\to\infty} x_n(t) - x_0| \leq c\beta$, de donde $x(t) - x_0| \leq c\beta$, así $x \in \bar{C}$. Por tanto $\bar{C}$ es cerrado, por lo que $\bar{C}$ es completo. Por integración vemos que 3.8 puede escribirse $x = Tx$, donde $T : \bar{C} \to \bar{C}$ se define por:

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{3.28}$$

De hecho, T se define para toda $x \in \bar{C}$ porque $c\beta < b$ por 3.26, de modo que si $x \in \bar{C}$, entonces $\tau \in J$ y $(\tau, x(\tau)) \in R$, y la integral en 3.28 existe ya que f es continua en R. Para ver que T mapea C en sí mismo, podemos usar 3.28 y 3.24, obteniendo

$$|Tx(t) - tx_0| = |\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau| \leq c|t - tx_0| \leqq c\beta.$$

Mostramos que T es una contracción en C. Por la condición de Lipschitz 3.10,

$$\begin{aligned}|Tx(t) - Tv(t)| &= |\int_{tx_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau))]d\tau| \\ &\leq |t - tx_0| \max_{\tau \in J} k|x(\tau) - v(\tau)| \\ &\leq k\beta d(x, v).\end{aligned}$$

Como la última expresión no depende de t, podemos tomar el máximo a la izquierda y tener

$$d(Tx, Tv) \leqq \alpha d(x, v), \qquad \textit{donde} \qquad \alpha = k\beta.$$

De 3.26 vemos que $\alpha = k\beta < 1$, de modo que T es una contracción de C. El teorema 3.1.2 implica que T tiene un punto fijo único $x \in C$, es decir, una función continua x en J satisfaciendo $x = Tx$. Escribiendo $x = Tx$, tenemos por 3.28:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{3.29}$$

Como $(\tau, x(\tau)) \in R$ donde f es continua, 3.29 puede diferenciarse. Por lo tanto, x es incluso diferenciable y satisface 3.8. A la inversa, toda solución de 3.8 debe satisfacer 3.29. Esto completa la prueba. ■

El teorema de Banach también implica que la solución x de 3.8 es el límite de la sucesión $(x_0, x_1, \cdots)$ obtenida por la iteración de Picard

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))d\tau, \tag{3.30}$$

donde $n = 0, 1, \cdots$. Sin embargo, la utilidad práctica de esta forma de obtener aproximaciones a la solución de 3.8 y los correspondientes límites de error es bastante limitada debido a las integraciones involucradas.

Finalmente mencionamos lo siguiente. Se puede demostrar que la continuidad de f es suficiente (pero no necesaria) para la existencia de una solución del problema 3.8, pero no es suficiente para la singularidad. Una condición de Lipschitz es suficiente (como muestra el teorema de Picard), pero no es necesario.

3.4. Aproximación en espacios normados.

La teoría de aproximación se ocupa de la aproximación de funciones de cierto tipo (por ejemplo, funciones continuas en algún intervalo) por otras funciones (probablemente más simples, por ejemplo, polinomios). Tal situación ya surge en el cálculo: si una función tiene una Serie de Taylor, podemos considerar y usar las sumas parciales de la serie como aproximaciones. Para obtener información sobre la calidad de tales aproximaciones, tendríamos que estimar los residuos correspondientes.
Más generalmente, uno puede querer establecer criterios prácticos útiles para la calidad de las aproximaciones. Dado un conjunto X de funciones para ser aproximado y un conjunto Y de funciones por las cuales los elementos de X son aproximados, uno puede considerar los problemas de la existencia, unicidad, y la construcción de una "mejor aproximación" en el sentido de tal criterio.

Definición 3.4.1. *Sea $X = (X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y supongamos que cualquier $x \in X$ es aproximado por $y \in Y$, donde Y es un subespacio fijo de X. Sea δ que denota la distancia de x a Y. Por definición,*

$$\delta = \delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|. \tag{3.31}$$

Claramente, δ depende tanto de x como de Y, que mantenemos fijos, para que la notación simple δ esté en orden.
Si existe $y_0 \in Y$ tal que:

$$\|x - y_0\| = \delta, \tag{3.32}$$

*entonces y_0 se llama una **mejor aproximación** a x fuera de Y.*

Vemos que una mejor aproximación y_0 es un elemento de mínima distancia de x. Tal $y_0 \in Y$ puede o no existir; esto plantea el problema de existencia. El problema de la unicidad también es de interés práctico, ya que para x e Y dados puede haber más de una mejor aproximación, como veremos.
En muchas aplicaciones, Y será de dimensión finita. Luego tenemos lo siguiente:

Teorema 3.4.2. *Teorema de la existencia (mejores aproximaciones).* *Si Y es un subespacio dimensional finito de un espacio normado $X = (X, \|\cdot\|)$, entonces para cada $x \in X$ existe una mejor aproximación a x fuera de Y.*

Demostración. Sea $x \in X$. Considerando la bola cerrada.

$$\tilde{B} = \{y \in Y / \|y\| \leq 2\|x\|\}.$$

Entonces $0 \in \tilde{B}$ de modo que para la distancia x a $\tilde{B}$ obtengamos

$$\delta(x, \tilde{B}) = \inf_{\tilde{y} \in \tilde{B}} \|x - \tilde{y}\| \leq \|x - 0\| = \|x\|\|.$$

Ahora si $y \notin \tilde{B}$, entonces $\|y\| > 2\|x\|$ y

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\|| > \|x\| \geq \delta(x, \tilde{B}). \tag{3.33}$$

Esto muestra que $\delta(x, \tilde{B}) = \delta(x, Y) = \delta$, y este valor no puede ser tomado por $y \in Y - \tilde{B}$, debido a que es mayor en 3.33. Por lo tanto, si una mejor aproximación a x existe, debe estar en $\tilde{B}$. Ahora vemos la razón para el uso de $\tilde{B}$. En lugar de todo el subespacio Y, ahora podemos considerar el subconjunto compacto $\tilde{B}$, de donde viene la compacidad ya que $\tilde{B}$ es cerrado y acotado e Y es de dimensión finita. La norma es continua por 3.32, esto implica que hay un $y_0 \in \tilde{B}$ tal que $\|x - y\|$ asume un mínimo en $y = y_0$. Por definición, y_0 es la mejor aproximación a x fuera de Y. ■

Ejemplo 3.4.3. *Espacio C[a,b]*
Un subespacio dimensional finito del espacio $C[a, b]$ es

$$Y = span\{x_0, \cdots, x_n\}, \qquad x_j(t) = t^j \qquad (n\ fijo).$$

Este es el conjunto de todos los polinomios de grado como máximo n (para lo cual ningún grado se define en la discusión habitual de grado). Teorema 3.4.2 implica que para una función continua dada x en $[a, b]$ existe un polinomio $p_n(t)$ de grado como máximo n tal que para cada $y \in Y$,

$$\max_{t \in J} |x(t) - p_n(t)| \leq \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

Donde $J = [a, b]$. La aproximación en $C[a, b]$ se llama ***aproximación uniforme****.*

Ejemplo 3.4.4. ***Polinomios***

La dimensionalidad finita de Y *en el (teorema anterior) es esencial.*

De hecho, sea Y *el conjunto de todos los polinomios en* $[0, \frac{1}{2}]$ *de cualquier grado, considerado como un subespacio de* $C[0, \frac{1}{2}]$ *Entonces dim*$(Y) = \infty$. *Sea* $x(t) = (1-t)^{-1}$. *Entonces para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* N *tal que,*

$$y_n(t) = 1 + t + \cdots + t^n,$$

tenemos $\|x - y_n\| < \varepsilon$ *para todo* $n > N$.
Esto sucede dado que $x(t) = \dfrac{1}{1-t} = \sum_{i=0}^{n} t^i$, *donde* $\sum_{i=0}^{n} t^i \to x(t)$, *la serie converge y por tanto la sucesión de sumas parciales convergen. Por lo tanto,* $\delta(x, Y) = 0$. *Sin embargo, como* x *no es un polinomio, vemos que no existe* $y_0 \in Y$ *que satisfaga* $\delta = \delta(x, Y) = \|x - y_0\| = 0$.

3.5. Unicidad, convexidad estricta

En esta sección consideramos el problema de la unicidad de las mejores aproximaciones. Para entender lo que está pasando, comencemos con dos ejemplos simples. Si $X = \mathbb{R}^3$ e Y es el $\xi_1\xi_2$-plano ($\xi_3 = 0$), entonces sabemos que para un punto dado $x_0 = (\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30})$ una mejor aproximación fuera de Y es el punto $y_0 = (\xi_{10}, \xi_{20}, 0)$, la distancia de x_0 a Y es $\delta = |\xi_{30}|$ y la mejor aproximación de y_0 es única. Estos hechos simples son bien conocidos de la geometría elemental. En otros espacios, la unicidad de las mejores aproximaciones puede no ser válida, incluso si los espacios son relativamente simples. Por ejemplo, sea $X = (X, \|\cdot\|_1)$ el espacio vectorial de pares ordenados $x = (\xi_1, \xi_2)$ de números reales con norma definida por:

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|. \tag{3.34}$$

Tomemos el punto $x = (1, -1)$ y el subespacio Y mostrado en la figura 3.3,
es decir, $Y = \{y = (\eta, \eta)/\eta \ \ real\}$. Entonces para todo $y \in Y$, claramente tenemos

$$\|x - y\|_1 = |1 - \eta| + |-1 - \eta| \geq 2.$$

Además si tomamos el par ordenado $y_0 = (0, 0)$ entonces $||x - y_0|| = 2$, por tanto, la distancia de x a Y es $\delta(x, Y) = 2$, y todos $y = (\eta, \eta)$ con $|\eta| \leq 1$ son las mejores

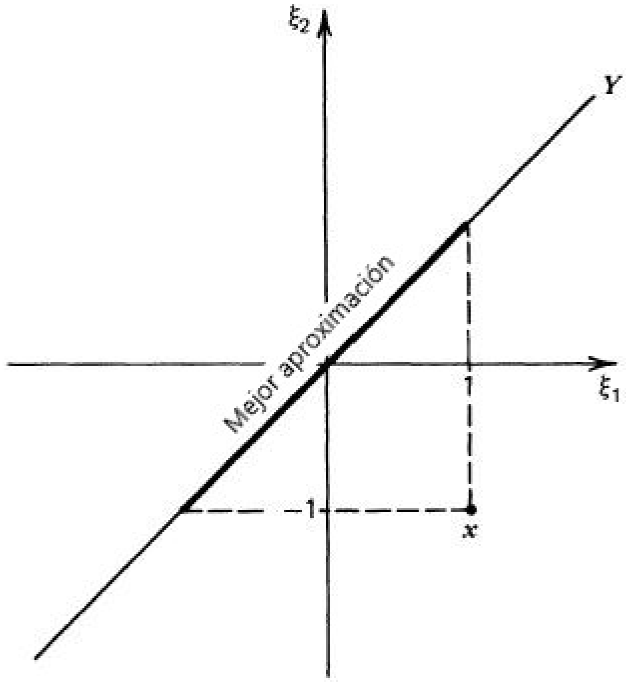


Figura 3.3: *Mejor aproximación*

aproximaciones a x fuera de Y. Esto ilustra que incluso en un espacio tan simple, para X e Y podemos tener varias aproximaciones mejores, incluso infinitas de ellas. Observamos que en el presente caso el conjunto de mejores aproximaciones es convexo, y afirmamos que esto es típico. También afirmamos que la convexidad será útil en relación con nuestro problema actual de unicidad. Entonces, primero indiquemos la definición y luego descubramos cómo podemos aplicar el concepto. Se dice que un subconjunto M de un espacio vectorial X es convexo si $y, z \in M$ implica que el conjunto

$$W = \{v = \alpha y + (1 - \alpha)z / 0 \leq \alpha \leq 1\},$$

es un subconjunto de M. Este conjunto W se llama *segmento cerrado.* y y z se denominan *puntos límite* del segmento W. Cualquier otro punto de W se denomina *punto interior* de W. Vea la figura 3.4.

Lema 3.5.1. ***Convexidad***

En un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ el conjunto M de las mejores aproximaciones a un punto dado x fuera de un subespacio Y de X es convexo.

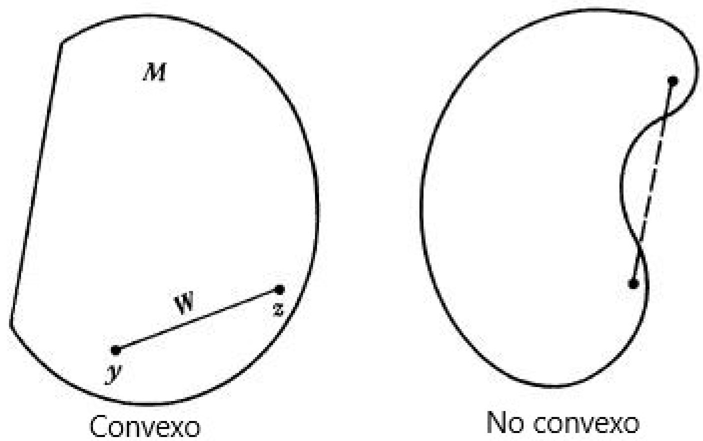


Figura 3.4: *Convexidad*

Demostración. Sea δ que denota la distancia de x a Y. La declaración se mantiene si M está vacío o tiene solo un punto.
Supongamos que M tiene más de un punto. Entonces para $y, z \in M$ tenemos, por definición,

$$\|x - y\| = \|x - z\| = \delta$$

Demostramos que esto implica:

$$w = \alpha y + (1 - \alpha)z \in M, \qquad (0 \leq \alpha \leq 1). \tag{3.35}$$

De hecho, $\|x - w\| \geq \delta$ ya que $w \in Y$, y $\|x - w\| \leq \delta$ dado que,

$$\begin{aligned} \|x - w\| &= \|\alpha(x - y) + (1 - \alpha)(x - z)\|, \\ &\leq \alpha\|x - y\| + (1 - \alpha)\|x - z\|, \\ &= \alpha\delta + (1 - \alpha)\delta, \\ &= \delta; \end{aligned}$$

aquí usamos que $\alpha \geq 0$ así como $1 - \alpha \geq 0$. Juntos, $\|x - w\| = \delta$. Por lo tanto, $w \in M$. Dado que $y, z \in M$ fueron arbitrarios, esto prueba que M es convexo. ■

Definición 3.5.2. ***Convexidad estricta***

Una norma estrictamente convexa es una norma tal que para toda x, y de norma 1,

$$\|x+y\| < 2, \qquad\qquad (x \neq y)$$

Un espacio normado con tal norma se denomina espacio normado estrictamente convexo.

Tenga en cuenta que para $\|x\| = \|y\| = 1$ la desigualdad del triángulo da

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| = 2,$$

y, la convexidad estricta excluye el signo de igualdad, excepto cuando $x = y$. Podemos resumir nuestro resultado de la siguiente manera:

Teorema 3.5.3. ***Teorema de unicidad (Mejor aproximación)***

En un espacio normado estrictamente convexo X hay, a lo sumo, una mejor aproximación a una $x \in X$ fuera de un subespacio Y dado.

Demostración. Sea M el conjunto de las mejores aproximaciones de x fuera de Y, hay que probar que M sólo tiene un elemento a lo sumo.

Supongamos que existe y_1, $y_2 \in M$ con $y_1 \neq y_2$, tal que $||x - y_1|| = ||x - y_2|| = \delta$, pero por el lema 3.5.1, M es convexo, así $\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \in M$ luego,

$$\begin{aligned}
\delta &= \left\| x - \left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y_2 \right\| \\
&= \frac{1}{2} \left\| (x - y_1) + (x - y_2) \right\| \\
1 &= \frac{1}{2} \left\| \left(\frac{x - y_1}{\delta} \right) + \left(\frac{x - y_2}{\delta} \right) \right\| \\
&< 1 \\
&\therefore 1 < 1 \ (\rightarrow\leftarrow)
\end{aligned}$$

De manera que, el teorema es cierto. ■

Este teorema puede o no ser útil en problemas prácticos, según el espacio que utilicemos. Enumeramos dos casos muy importantes.

Lema 3.5.4. ***Convexidad estricta***

(a) El espacio de Hilbert es estrictamente convexo.

(b) El espacio $C[a,b]$ no es estrictamente convexo.

Demostración.

(a) Para todo x e $y \neq x$ de norma 1 tenemos: $\|x-y\| = \alpha$, donde $\alpha > 0$, y la igualdad del paralelogramo da:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= -\|x-y\|^2 + 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \\ &= -\alpha^2 + 2(1+1) < 4, \end{aligned}$$

por lo tanto $\|x+y\| < 2$.

(b) Consideramos x_1 y x_2 definidos por

$$x_1(t) = 1, \qquad x_2(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

donde $t \in [a,b]$. Claramente, $x_1, x_2 \in C[a,b]$ y $x_1 \neq x_2$. También tenemos $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, y

$$\|x_1 + x_2\| = \max_{t \in J} |1 + \frac{t-a}{b-a}| = 2$$

donde $J = [a,b]$. Esto muestra que $C[a,b]$ es no estrictamente convexo. ∎

Con la demostración de este lema damos por concluida esta investigación sobre los espacios de Hilbert y Banach y algunas de sus aplicaciones. Tenemos la esperanza de contribuir con este texto a futuras investigaciones, de ayudar en alguna medida al lector a adentrarse en el extenso mundo del análisis funcional

3.6. Ejercicios

1. Proporcione ejemplos adicionales de mapeos en geometría elemental que tengan (a) un solo punto fijo, (b) infinitos puntos fijos.

2. Si $T : X \to X$ satisface $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ cuando $x \neq y$ y T tiene un punto fijo, muestre que el punto fijo es único; aquí (X, d) es un espacio métrico.

3. Si la derivada parcial $\partial f/\partial x$ de f existe y es continua en el rectángulo R (véase el teorema de Picard), demuestre que f satisface una condición de Lipschitz en R con respecto a su segundo argumento.

4. Si en un espacio normado, la mejor aproximación a x fuera de un subespacio Y no es única, demuestre que x tiene infinitamente muchas de esas mejores aproximaciones.

5. Muestre que si un espacio normado X es estrictamente convexo, entonces

$$||x + y|| = ||x|| + ||y||, \qquad x \neq 0, y \neq 0$$

implica que $x = cy$ para algún número real c positivo.

Antes de concluir la lectura de este trabajo, agradeceremos al lector que tenga sugerencias y/o anotaciones adicionales sobre cualquiera de las temáticas abordadas aquí escribirlas al correo: *hilbertbanach-tesis@hotmail.com*.

Bibliografía

[1] Erwin Kreyszig. *Introducty Functional Analysis with Applications*, 1978.

[2] Helga Fetter Nathansky, Berta Gamboa de Buen. *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach*, 2008. S y G Editores. S.A. de C.V.

[3] Juan Carlos Cabello Pinar. *Análisis Funcional*, 2009. Universidad de Granada.

[4] Luis Bernal González, Tomás Domínguez Benavides. *Nociones de Análisis Funcional*, 2009. Universidad de Sevilla.

[5] Ventura Echandía Liend, Carlos E. Finol. *Notas de Análisis Funcional*, 2002. Caracas.