**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**
**FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**
**DEPARTAMENTO DE CC.NN. Y MATEMÁTICA**
**SECCIÓN DE MATEMÁTICA**

**TRABAJO DE GRADO:**

# GEOMETRÍA EN ESPACIOS DE BANACH

**PRESENTADO POR:**

JOCELYN MAYRENE GUEVARA RAMOS

FÁTIMA MARGARITA FLORES ANDRADE

JONATHAN JOSUÉ AMAYA MÉNDEZ

**PARA OPTAR AL GRADO DE:**

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

**DOCENTE ASESOR:**

LIC. TOBÍAS HUMBERTO MARTÍNEZ LOVO

**CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, NOVIEMBRE DE 2019**

**SAN MIGUEL EL SALVADOR CENTROAMÉRICA**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

**AUTORIDADES**

MSC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO
**RECTOR**

PHD. RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ
**VICE-RECTOR ACADÉMICO**

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA
**VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO**

ING. FRANCISCO ALARCÓN
**SECRETARIO GENERAL**

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARIN
**FISCAL GENERAL**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**
**FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

**AUTORIDADES**

LIC. CRISTOBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ.
**DECANO**

DR. OSCAR VILLALOBOS
**VICE-DECANO**

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA
**SECRETARIO INTERINO**

# Agradecimientos

**A Dios todopoderoso**, por brindarme la capacidad y sabiduría durante todos mis años de estudio. Por permitirme culminar mi carrera universitaria, fortalecerme en los momentos difíciles y permitirme vivir buenos momentos en el proceso.

**A mis padres y hermano: María Blanca Ramos Chicas, Reinaldo Guevara Barahona** y **Reynaldo Isaac Guevara Ramos**, quienes han sido el pilar fundamental en mi vida y, por todo su apoyo incondicional en todas las etapas de mi vida, por darme mucho amor y sobre todo por orientarme.

**A mi asesor: Lic. Tobías Humberto Martínez Lovo**, por el tiempo invertido y los esfuerzos dedicados a guiarnos en nuestro Trabajo de Grado, por compartir sus conocimientos y por la paciencia durante todo el proceso.

**A mis tíos: María Jacinta Ramos de Chica** y **Rafael de Jesús Chica**, por su apoyo incondicional, por la paciencia y siempre poder contar con ellos, por el cariño, y sobre todo por la confianza que me brindaron.

**A mis compañeros de tesis: Fátima Margarita Flores Andrade** y **Jonathan Josué Amaya Méndez**, por la disposición, paciencia y compañerismo que tuvieron durante todo el proceso de investigación.

**A mis amigas**, por brindarme en todo momento su amistad sincera y apoyo, por las risas y la alegría que me brindaron durante mis años de estudio. Por estar en buenos y malos momentos, y estar presentes durante todo este proceso.

**A mis compañeros de clase y docentes**, por estar a mi lado durante mis años de estudio, por el apoyo y la solidaridad que me brindaron. Por haber incidido en mi formación profesional.

***Jocelyn Mayrene Guevara Ramos***

**Agradezco...**

**A Dios todopoderoso**, por brindarme sabiduría, entendimiento durante todos mis años de estudio, por permitirme que finalice mi carrera universitaria, por darme la fuerza necesaia para avanzar en el largo camino de la vida, más que todo por darme vida hasta estos momentos.

Seguidamente agradezco a **mis padres: Agustín Flores Romero** y **Eva Isabel Andrade de Flores**, por brindarme su apoyo incondicional, por darme su amor y orientarme en todo momento, agradezco también a **mi abuelita: María Isabel Andrade** por su apoyo incondicional, por estar en todo momento y a **mis hermanas** por sus palabras y ánimos en todo momento.

**A mi asesor: Lic. Tobías Humberto Martínez Lovo**, por brindarme de su tiempo para poder culminar nuestra carrera, por orientarnos en todo momento, por la paciencia durante todo el proceso.

Por último agradezco **a mis compañeros de tesis: Jocelyn Mayrene Guevara Ramos** y **Jonathan Josué Amaya Méndez**, por la disposición, esfuerzo, paciencia, compañerismo que tuvieron durante todo el proceso.

***Fátima Margarita Flores Andrade***

**Agradezco...**

**A Dios todopoderoso**, por permitirme culminar esta etapa de mi vida, por proveerme de salud, sabiduría, perseverancia y por siempre ser la única luz de esperanza en mi vida.

**A mis padres: Manuel Ivan Amaya Chávez** y **Olga Sabina Méndez de Amaya** por su gran apoyo tanto financiero como espiritual, por su paciencia y por todo el amor que me han dado.

**A mi asesor: Lic. Tobías Humberto Martínez Lovo**, por el tiempo dedicado a guiarnos en nuestro Trabajo de Grado, por su paciencia y su forma amable de atendernos en todo el proceso.

**A mis compañeras de tesis: Jocelyn Mayrene Guevara Ramos** y **Fátima Margarita Flores Andrade**, por la dedicación, apoyo incondicional, compañerismo y sobre todo por no rendirse conmigo.

**A mis amigos, compañeros y alumnos**, por sus palabras de apoyo y por todos los momentos felices que hicieron posible seguir adelante.

**A los docentes**, por compartir conmigo sus conocimientos y por tener paciencia en toda mi historia en la universidad.

***Jonathan Josué Amaya Méndez***

# Índice general

# Resumen

Hoy en día no podríamos concebir la mecánica cuántica sin los espacios de Hilbert, la teoría de distribuciones y la economía sin la teoría de la dualidad, ni la teoría de optimización y mejor aproximación sin la herramienta de los teoremas de Hahn-Banach, Krein-Milman y Alaoglu, deducidos por la geometría de espacios de Banach. Un espacio de Banach es un espacio normado completo (con la métrica definida por la norma). Comúnmente un espacio de Banach es entendido por un espacio normado en el que todas sus sucesiones de Cauchy convergen en él. La geometría de los espacios de Banach es el estudio algebraico y topológico de los mismos. Al estudiar la estructura topológica y algebraica entre los espacios se busca encontrar relaciones para comprender el comportamiento de espacios que son más complicados de estudiar. Así el concepto de geometría en espacios de Banach es un enlace entre el álgebra y la topología de dichos espacios, es por eso que se profundizará la teoría de estos tratando que sea un documento autosuficiente. Se construirá una teoría sólida con algunos ejemplos y la resolución de algunos ejercicios. Para ello se hará uso de fuentes bibliográficas confiables tanto escritas como virtuales. Se pretende demostrar los principales teoremas relacionados a la estructura algebraica y topológica de los espacios de Banach $\ell^p$, $c_0$, el espacio $C[0,1]$ y el espacio peculiar $J$ de James.

*Palabras clave:* espacio de Banach, espacios $\ell^p$, $c_0$, $C[0,1]$, $J$ de James, topología, bases de Hamel, bases de Schauder, operadores, funcionales, norma.

# Introducción

A continuación se presenta el informe final del trabajo de investigación titulado: **Geometría en Espacios de Banach**. Damos a conocer los objetivos que se perseguirán a lo largo del proceso, la justificación del estudio y la simbología principal. Para ello, el presente trabajo consta de tres capítulos, los cuales detallamos a continuación.

## Capítulo 1: Espacios Normados y de Banach

En este capítulo se estudian las nociones básicas de espacios normados y de Banach, operadores lineales, cocientes y sumas directas, sub-espacios de dimensión finita, el Teorema de Baire y operadores continuos, dualidad y topología débil, reflexividad.

## Capítulo 2: Espacios Vectoriales Topológicos

Seguidamente abordaremos conceptos básicos para espacios vectoriales: operadores lineales, sub-espacios de dimensión finita y los espacios localmente convexos. Habiendo establecido las bases podemos dar la introducción a geometría en espacios de Banach.

## Capítulo 3: Geometría de espacios de Banach

Estudiaremos la geometría de espacios de Banach: primero definiremos las bases de Schauder, tipos de base, los espacios $\ell^p$, $c_0$, $C[0,1]$ y el espacio peculiar $J$ de James.

Al final del documento se agregaron la bibliografía y algunos anexos.

# Justificación

El Análisis Funcional como tal fue surgiendo a principios del siglo XX como el marco abstracto adecuado para solucionar una serie de problemas del Análisis muy importantes en esos momentos. Desde entonces ha experimentado un gran desarrollo y en este momento es una herramienta muy sofisticada y útil para abordar una amplia variedad de problemas. Desde el desarrollo de la Geometría en espacios de Banach, al considerar el estudio algebraico y topológico de los espacios de funciones normados, lineales y completos, se vió que en ocasiones era necesario considerar propiedades del espacio (ó conjunto) combinadas entre sí, o heredadas a los subespacios. El obtener estas propiedades es vital en la resolución de problemas relacionados a la mecánica cuántica, la teoría de distribuciones y la economía.
Es por ello que captó nuestro especial interés el hecho de que no hay investigaciones previas en ésta área del análisis funcional en específico, ya sea por la complejidad de estudiar topológicamente los espacios de funciones o por el simple hecho de que el tema es desconocido para la mayoría. Es así como el desarrollo de nuestra investigación: Geometría en espacios de Banach se centra en el estudio de los espacios: $\ell^p$, $c_0$, el espacio $C[0,1]$ y el espacio $J$ de James. Hacemos especial énfasis a estos espacios por ser los más conocidos y los que poseen más propiedades a estudiar; nuestro trabajo pretende que este sea un documento auto-suficiente, para que cualquier curioso con los conocimientos básicos de topología y análisis funcional sea capaz de interpretar y comprender lo que aquí se ha desarrollado.

# Objetivos

## General

- Investigar la estructura algebraica y topológica de los espacios de Banach: $\ell^p$, $c_0$, el espacio $C[0,1]$ y el espacio peculiar $J$ de James.

## Específicos

- Enunciar resultados importantes de la teoría de espacios normados y espacios de Banach
- Mostrar las propiedades de los espacios de Banach $\ell^p$, $c_0$, el espacio $C[0,1]$ y el espacio $J$ de James.
- Explicar las propiedades de los espacios de Banach $\ell^p$, $c_0$, el espacio $C[0,1]$ y el espacio $J$ de James.
- Ejemplificar las propiedades de los espacios de Banach $\ell^p$, $c_0$, el espacio $C[0,1]$ y el espacio $J$ de James.

# Simbología

$\mathbb{N}$ : Números naturales.
$\mathbb{Q}$ : Números racionales.
$\mathbb{R}$ : Números reales.
$\mathbb{C}$ : Números complejos.
$\mathbb{K}$ : Números reales o complejos.
$A - B$ : Complemento de $B$ en $A$.
$f|_C$ : $f$ restringida en $C$.
$X/Y$ : Espacio cociente.
$\mathscr{N}(x)$ : Vecindad de $x$.
$convA$ : Envolvente convexa de $A$.
$X \bigoplus_a Y$ : Suma directa algebraica.
$spanX$ : Espacio generado de $X$.
$\ker T$ : Espacio nulo o kernel de $T$.
$\overline{E}$ : Clausura de $E$.
$intE$ : Interior de $E$.
$B_r(x)$ o $B(x, r)$ : Bola abierta, centro $x$ y radio $r$.
$\| \cdot \|$ : Función norma.
$X^*$ : Dual de $X$.
$\|T\|$ : Norma del operador $T$.
$\mathcal{B}(X, Y)$ : Espacio de los operadores lineales continuos.
$T^\times$ : Operador adjunto de $T$.
$c_0$ : Espacio vectorial de las sucesiones escalares convergentes a 0.
$\ell^\infty$ : Espacio vectorial de las sucesiones acotadas.

$\ell^p, 1 \leq p < \infty$ : Espacio vectorial de las sucesiones acotadas donde la sumatoria de los $p_i$ converge.

$X \bigoplus Y$ : Suma directa.

$(X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \ldots)_p$ : $p$-suma directa de sucesiones de espacios normados.

$B_X$ : Bola cerrada unitaria en $X$.

$S_X$ : Esfera unitaria en $X$.

$X^{**}$ : Bidual de $X$ o dual de $X^*$.

$j$ : Inyección canónica de $X$ en $X^{**}$.

$\omega$, $\sigma(X, X^*)$ : Topología débil.

$V(x_0, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, \varepsilon)$ : Básicos de la topología débil.

$\omega^*$, $\sigma(X^*, X)$ : Topología débil estrella.

$V(x_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon)$ : Básicos de la topología débil estrella.

$x_\alpha \underset{\omega}{\longrightarrow} x_0$ : Convergencia débil.

$x_\alpha \underset{\omega^*}{\longrightarrow} x_0^*$ : Convergencia débil estrella o convergencia puntual en $X$.

$\overline{A}^{\omega}$ : Cerradura débil de $A$.

$\overline{A}^{\omega^*}$ : Cerradura débil estrella de $A$.

$E^{\perp}$ : Aniquilador de $E$ en $X$.

$F_{\perp}$ : Aniquilador de $F$ en $X^*$.

# Capítulo 1

# ESPACIOS NORMADOS Y DE BANACH

En 1910 y 1913 Riesz, al estudiar las ecuaciones integrales y el problema de momentos, introdujo los espacios $L^p$ y $\ell^p$, con $1 < p < \infty$. Demostró que son espacios normados complejos reflexivos que no son isomorfos a su dual, si $p \neq 2$. Posteriormente, Banach dió las definiciones abstractas de espacio vectorial y de norma y por eso los espacios normados completos llevan su nombre.

## 1.1. ESPACIOS MÉTRICOS

**Definición 1.1.1.** *Un espacio métrico es un par $(X, d)$, donde $X$ es un conjunto y $d(x, y)$ es una métrica en $X$ (o función distancia en $X$), es decir, una función definida en $X \times X$ tal que para todo $x,\ y,\ z \in X$ tenemos,*

*(M1)* $d(x, y)$ *para todo* $x, y \in X$ *es un valor real, finito y no negativo.*

*(M2)* $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

*(M3)* $d(x, y) = d(y, x)$.

*(M4)* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ***(desigualdad triangular)***.

**Ejemplo 1.1.2.** *El plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$, es un espacio métrico que es obtenido si tomamos el conjunto de pares ordenados de números reales, escritos $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$, etc., y la métrica Euclidiana definida por*

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}.$$

**Definición 1.1.3.** ***(Sucesión)***. *Una sucesión es una función de $\mathbb{N}$ a un conjunto $X$. Si $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$ es una sucesión, en vez de escribir*

$$a(1), a(2), a(3), \ldots,$$

*suele escribirse,*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

*La misma sucesión suele designarse mediante un símbolo tal como* $\{a_n\}$, $(a_n)$ *ó* $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.

**Ejemplo 1.1.4.** *La sucesión de Fibonnacci* $\{a_n\}$ *está definida por*

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

**Definición 1.1.5.** ***(Sucesiones convergentes)****. Se dice que una sucesión* $\{a_n\}$ *converge a* $L$ *si para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$, *entonces*

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

*En este caso se dice que la sucesión* $\{a_n\}$ *converge a* $L \in \mathbb{R}$, *o el límite de* $a_n$ *es* $L$, *en este caso se escribe* $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = L$.

**Ejemplo 1.1.6.** ***(Sucesión convergente)****. Sea* $a_n = \frac{1}{n}$. *Probaremos que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**<u>Demostración:</u>**

Para demostrar que la sucesión $\frac{1}{n}$ converge a cero, aplicaremos la propiedad arquimediana. Sea $\varepsilon > 0$, tal que $m > \dfrac{1}{\varepsilon}$, es decir, $\varepsilon > \dfrac{1}{m}$. Por propiedad arquimediana tenemos que, existe $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ tal que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{m}$, así, $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \left|\dfrac{1}{n}\right| \leq \left|\dfrac{1}{m}\right|$, pero $\varepsilon > \dfrac{1}{m}$, entonces $\left|\dfrac{1}{n}\right| \leq \left|\dfrac{1}{m}\right| < \varepsilon$, $\left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Por Definición 1.1.5, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ converge a 0. ■

**Definición 1.1.7.** ***(Sucesión de Cauchy)****. Una sucesión* $\{x_n\}$ *en un espacio métrico* $X$, *se dice que es de Cauchy si para todo* $\varepsilon > 0$, *existe un* $N = N(\varepsilon)$ *tal que* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, *para todo* $m$, $n > N$. *El espacio* $X$ *se dice que es completo si cada sucesión de Cauchy converge dentro del mismo espacio.*

**Ejemplo 1.1.8.** ***(Sucesión de Cauchy no convergente)****. La sucesión dada por* $\{a_n\} = \{1/n\}$ *converge a cero en* $\mathbb{R}$. *La misma sucesión en el espacio* $\mathbb{R} - \{0\}$ *sigue siendo una sucesión de Cauchy, sin embargo no es convergente en el nuevo espacio.*

**Definición 1.1.9.** *Diremos que* $D$ *es un conjunto dirigido si tiene un orden* $\prec$ *(ya sea parcial o estricto), tal que dados* $\alpha, \beta \in D$, $\exists\ \gamma \in D$ *con* $\alpha \prec \gamma$ *y* $\beta \prec \gamma$.

**Ejemplo 1.1.10.** *Un ejemplo de conjunto dirigido es la colección* $\mathscr{P}(X)$ *de subconjuntos de un conjunto* $X$ *con* $E \prec F$ *si y sólo si* $E \subset F$.

**Definición 1.1.11.** *Una red en un conjunto* $X$ *es una función* $\sigma : D \to X$, *donde* $D$ *es un conjunto dirigido. En general, la denotaremos por* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$, *donde para cada* $\alpha \in D$, $x_\alpha = \sigma(\alpha)$.

**Ejemplo 1.1.12.** *Toda sucesión en* $X$ *es una red en* $X$.

**Demostración:**
Una sucesión es una función de los números naturales a otro conjunto $X$, de manera que definimos

$$\begin{aligned}\sigma :&\mathbb{N} \longrightarrow X\\ &n \rightsquigarrow \sigma(n) = x_n.\end{aligned}$$

Y es definida de forma general a una sucesión como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, así que solo falta demostrar que $\mathbb{N}$ es dirigido. Luego, para que $\mathbb{N}$ sea un conjunto dirigido debe de tener un orden $\prec$ (parcial) es decir que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. La relación de orden $(\mathbb{N}, \prec)$ definida por, $\forall\ m, n \in \mathbb{N}\ m \prec n \Longleftrightarrow m \leq n$.
Probaremos que dicha relación es reflexiva, $m \prec m \Longrightarrow m \leq m\ , \forall\ m \in \mathbb{N}$.
Veamos si es antisimétrica, es decir, $m \prec n, n \prec m \Longrightarrow m \leq n$. Si $m \prec n \Longrightarrow m \leq n$; además, si $n \prec m \Longrightarrow n \leq m$, de esto obtenemos que $m \leq n$ y que $n \leq m$, entonces $m \leq n \leq m$ así $m = n$.
Por último probaremos que es transitiva, es decir, $m \prec n$ y $n \prec k \Longrightarrow m \prec k$. Tenemos que $m \prec n$ y que $n \prec k$, entonces $m \leq n$ y $n \leq k$ respectivamente. Así obtenemos que $m \leq n \leq k$ por lo que $m \leq n \leq k$, entonces $m \prec k$. Por tanto, $\mathbb{N}$ tiene orden parcial, es un conjunto dirigido y $\sigma$ es una función de un conjunto dirigido $\mathbb{N}$ a $X$ por lo cual toda sucesión es una red. ■

**Definición 1.1.13.** *Una vecindad de $x$ denotada por $\mathscr{N}(x)$ es un conjunto abierto que contiene a $x$.*

**Definición 1.1.14.** ***(Topología)***. *Una topología sobre un conjunto $X$ es una colección $\tau$ de subconjuntos de $X$ con las siguientes propiedades,*

*(1) $\emptyset$ y $X$ están en $X$.*

*(2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\tau$ está en $\tau$.*

*(3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\tau$ está en $\tau$.*

*Al par $(X, \tau)$ donde $\tau$ es una topología definida sobre $X$, se le llama* ***Espacio Topológico****. A los elementos de la topología se les llama conjuntos abiertos.*

**Definición 1.1.15.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Diremos que una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ en $X$ converge a $y \in X$, si para toda vecindad $U$ de $y$, existe $\alpha_0 \in D$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha > \alpha_0$. En este caso escribiremos $\lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha = y$ o $x_\alpha \to y$.*

**Definición 1.1.16.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, diremos que una subfamilia $\mathcal{B} \subset \tau$, es una base de la topología $\tau$, sí cada abierto $A$ se puede expresar como unión de conjuntos de $\mathcal{B}$, es decir, existe $\{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \cup_{i\in I} B_i$.*

**Definición 1.1.17.** ***(Topología Métrica)***. *Para toda $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$, la bola abierta con centro en $x$ y radio $r$ se define como $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Si $(X, d)$ es* *un espacio métrico, también es un espacio topológico con la topología que tiene como base a la colección de bolas abiertas, es decir:* $U = \{B_r(x) : x \in X,\ r \in R,\ r > 0\}$; $U \in \mathcal{B}$, *donde* $\mathcal{B}$ *es la base que genera la topología* $\tau$. *Dicha topología se llama* ***Topología Inducida*** *en* $X$ *por la métrica* $d$. *Además se dice que* $(X, \tau)$ *es metrizable, si existe una métrica* $d$ *tal que* $\tau$ *es la topología inducida en* $X$ *por* $d$.

**Ejemplo 1.1.18.** ***(Topología Métrica)****. Dado un conjunto* $X$*, definimos*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \neq y \\ 0, \text{ si } x = y. \end{cases}$$

Observemos que $d$ es una distancia. La topología que induce es la topología discreta; el elemento básico $B(x, 1)$, por ejemplo, consiste únicamente en el punto $x$.

**Definición 1.1.19.** ***(Clausura de un conjunto)****. La cerradura de un conjunto* $A \subseteq X$ *es*

$$\overline{A} = \{x \in X;\ \forall\ r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

**Definición 1.1.20.** *Un conjunto* $X$ *es compacto sí de cada cubrimiento abierto* $\mathcal{A}$ *de* $X$*, podemos extraer una subcolección finita de* $\mathcal{A}$ *que también cubre a* $X$.

Nótese que si $X$ es un conjunto de dimensión finita, tenemos que, $X$ es compacto sí es cerrado y acotado.

**Definición 1.1.21.** *Diremos que un espacio* $X$ *es localmente compacto si cada* $x \in X$ *posee una base de vecindades compactas (es decir cada vecindad de la base es compacta).*

**Definición 1.1.22.** ***(Conjunto sucesionalmente compacto)****. Sea* $X$ *un espacio topológico. Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión de puntos de* $X$ *y si*

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots,$$

*es una sucesión creciente de enteros positivos, entonces la sucesión* $\{y_i\}$ *definida por* $y_i = x_{n_i}$ *se denomina subsucesión de la sucesión* $\{x_n\}$*. El espacio* $X$ *se dice que es* ***sucesionalmente compacto*** *si cada sucesión de puntos de* $X$ *contiene una subsucesión convergente.*

**Definición 1.1.23.** ***(Propiedad de intersección finita)****. Una colección* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos de* $X$ *se dice que tiene la propiedad de la intersección finita, sí cada subcolección finita*

$$\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$$

*de* $\mathcal{C}$ *tiene intersección no vacía, es decir,* $C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n$ *es no vacía.*

**Teorema 1.1.24.** *Sean* $\mathcal{A}$ *una colección de subconjuntos de* $X$ *y sea* $\mathcal{C} = \{X - A;\ A \in \mathcal{A}\}$ *la colección de sus complementarios, se cumple que,*

*a)* $\mathcal{A}$ *es una colección de abiertos si y sólo si* $\mathcal{C}$ *es una colección de cerrados.*

*b) La colección* $\mathcal{A}$ *no cubre a* $X$ *si y sólo si* $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$.

*c) La subcolección finita* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *de* $\mathcal{A}$ *cubre a* $X$ *si y sólo si la intersección de los* $C_i = X - A_i$ *es vacía.*

**Demostración:**

Para el literal $a$). Sí $\mathcal{A}$ es una colección de abiertos, sabemos por definición de complementarios, el complemento de cada $A$ es cerrado, así la colección de complementarios es cerrado. Análogamente el regreso.

Para el literal $b$). Por Ley De Morgan, tenemos

$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C = \bigcap_{C\in\mathcal{C}}(X-A) = X - \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset.$$

Dado que $\mathcal{A}$ no cubre a $X$.

Y por último, para el literal $c$). Por leyes De Morgan tenemos

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_i = \bigcap_{i=1}^{k}(X-A_i) = X - \bigcup_{i=1}^{k} A_i = X - X = \emptyset.$$

Dado que $\mathcal{A}$ cubre a $X$. ■

**Teorema 1.1.25.** *Sea $X$ un espacio topológico, entonces $X$ es compacto si y sólo si, para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en $X$ con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección*

$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

**Demostración:**

"$\Longrightarrow$"

$X$ es compacto si y solo si para todo cubrimiento abierto de $X$, existe un sub-recubrimiento finito. Luego tenemos que, $X$ es compacto si y solo si dada una colección $\mathcal{A}$ de abiertos tal que no existe un cubrimiento finito de $\mathcal{A}$ para $X$, entonces $\mathcal{A}$ no cubre a $X$. Sea $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos cerrados, probaremos que cumple con la propiedad de intersección finita. Sea $\mathcal{A} = \{X - C;\ C \in \mathcal{C}\}$ una colección de conjuntos abiertos y sea $\{C_i\}_{i\in N_n}$ una colección finita de $\mathcal{C}$, entonces tenemos que

$$\cap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset \Longrightarrow \{A_i\}_{i\in N_n} \text{ no cubre a } X \Longrightarrow \mathcal{A} \text{ no cubre a } X \Longrightarrow \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

Por tanto, concluimos que $\mathcal{C}$ cumple la propiedad de intersección finita.

"$\Longleftarrow$"

Sea $\mathcal{A}$ una colección de abiertos tal que no existe un recubrimiento finito de $\mathcal{A}$ para $X$, probaremos que $\mathcal{A}$ no cubre a $X$. Sea $C = \{X - A;\ A \in \mathcal{A}\}$, por Teorema 1.1.24 $c$) como $\{C_i\}_{i\in N_n}$ cumple la propiedad de la intersección finita, entonces por hipótesis tenemos que $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \emptyset$, así por Teorema 1.1.24 $b$), $\mathcal{A}$ no cubre a $X$. Por tanto, $X$ es compacto. ■

**Definición 1.1.26.** ***(Puntos de acumulación)***. *Si $A$ es un subconjunto de $(X,\tau)$, $x \in X$, diremos que $x$ es* ***punto límite o punto de acumulación*** *de $A$ si cada vecindad de $x$ interseca a $A$ en algún punto distinto de $x$, es decir*

$$U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset, \ \forall \ U \in \tau.$$

*Al conjunto de puntos de acumulación lo denominaremos* ***Conjunto Derivado*** *y lo denotaremos por $A'$. Observemos que $\overline{A} = A \cup A'$.*

**Teorema 1.1.27.** *Sea $M$ un subconjunto no vacío de un espacio métrico $(X,d)$ y $\overline{M}$ su clausura entonces*

*a) $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}$ en $M$ tal que $x_n \to x$.*

*b) $M$ es cerrado si y sólo si, $\forall \ \{x_n\} \subset M$, $x_n \to x$ implica que $x \in M$.*

**Demostración:**
Primero demostraremos el literal a).
"$\Longleftarrow$"
Supongamos que una sucesión $\{x_n\} \subset M$ tal que $x_n \to x$.

Caso 1: Si $x \in M \subset \overline{M}$, entonces $x \in \overline{M}$. Por tanto, $x \in \overline{M}$.

Caso 2: Si $x \notin M$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to x$, $\exists \ N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$, $\forall \ n > N$,

$$\Longrightarrow x_n \in B_\varepsilon(x) \cap M, \forall \ n > N \Longrightarrow (B_\varepsilon(x) - \{x\}) \cap M \neq \emptyset \Longrightarrow x \in M' \subset \overline{M} \Longrightarrow x \in \overline{M}.$$

En todo caso $x \in \overline{M}$.

"$\Longrightarrow$"
Sea $x \in \overline{M} = M \cup M'$.

Caso 1: Si $x \in M$, entonces podemos crear una sucesión de la forma $(x, x, x, \ldots)$ que converge a $x$.

Caso 2: Si $x \notin M$, entonces $x$ es un punto de acumulación de $M$. Por lo tanto, $\forall \ n \in \mathbb{Z}^+$ la bola $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap M \neq \emptyset$. Por tanto, si escogemos, $\forall \ n \in \mathbb{Z}^+, \ x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ y $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$.

Ahora demostraremos el literal b).
"$\Longrightarrow$"
Supongamos que $M$ es cerrado y que $\{x_n\} \subset M$, $x_n \to x$, por inciso a) tenemos que $x \in \overline{M} = M$, así $x \in M$.

"$\Longleftarrow$"
Sea $x \in \overline{M}$. Como $x \in \overline{M}$, por inciso a) tenemos que, existe $\{y_n\} \subset M$ tal que $y_n \to x$, pero por hipótesis $x \in M$, entonces $\overline{M} \subset M$, también $M \subset \overline{M}$ , por lo tanto $\overline{M} = M$, por lo cual $M$ es cerrado. ■

A continuación daremos a conocer unas desigualdades, las cuales serán de gran importancia para nuestra investigación, sus demostraciones pueden consultarse en cualquier libro de Análisis Funcional.

**Desigualdades.**

- **Desigualdad de Hölder.**

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} ; \quad 1/p + 1/q = 1.$$

- **Desigualdad de Cauchy-Schwartz.**

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

- **Desigualdad de Minkowsky.**

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q\right)^{\frac{1}{q}} ; \quad 1/p + 1/q = 1.$$

**Teorema 1.1.28.** *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.*

<u>**Demostración:**</u>
Si $x_n \to x$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\ n > N$. Utilizando la desigualdad del triángulo tenemos $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $\forall\ n, m > N$. Y por Definición 1.1.7 $\{x_n\}$ es de Cauchy. ■

**Proposición 1.1.29.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico, entonces*

*a) Si $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos abiertos de $X$, entonces $\cup_{\alpha \in I} V_\alpha$ es un conjunto abierto.*

*b) La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

*c) El mismo espacio $X$ y el conjunto vacío son abiertos en $X$.*

La proposición anterior se cumple debido a la Definición 1.1.17, dado que la topología es inducida por una métrica.

**Definición 1.1.30.** ***(Espacio Normado)****. Un espacio normado es un espacio vectorial $X$ con una norma definida en él. Aquí una norma en un espacio vectorial (real o complejo) $X$ es una función de valor real en $X$ cuyo valor para $x \in X$ se denota por*

$$\|x\| \quad \textit{(léase “norma de } x\textit{”).}$$

*Y cumple las siguientes propiedades:*

*i)* $\|x\| \geq 0$.

*ii)* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

*iii)* $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

*iv)* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ***(Desigualdad del triángulo)***.

*Aquí $x$ e $y$ son vectores arbitrarios en $X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Una norma en $X$ define una métrica $d$ en $X$ que está dada por*

$$d(x, y) = \|x - y\|; \quad x, y \in X. \tag{1.1}$$

*Y se llama métrica inducida por la norma. El espacio normado que se acaba de definir se denota por $(X, \|\cdot\|)$ o simplemente por $X$.*

**Definición 1.1.31.** ***(Espacio** $\ell^p(X)$**)**. Sea $X$ un espacio normado, donde cada elemento en el espacio $\ell^p(X)$ es una sucesión de la forma $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$, donde*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty, \ p \geq 1, \text{ fijo, y cuya norma está definida por } \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Definición 1.1.32.** ***(Espacio** $\ell^\infty(X)$**)**. Sea $X$ un espacio normado, definimos $\ell^\infty(X)$ como el espacio que contiene todas las sucesiones acotadas de $X$, es decir*

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \text{ con } |\xi_j| \leq c_x, \text{ para todo } j = 1, 2, 3, \dots.$$

*Donde $c_x$ es un número real que depende de $x$ y no de $j$, cuya norma está definida por*

$$\|x\| = sup_j |\xi_j|.$$

**Definición 1.1.33.** ***(Espacio** $c_0$**)**. Sea $c_0$ un espacio normado con la norma $\|\cdot\|$ (véase Definición 1.1.32). Definimos $c_0 = \{\{x_n\} : x_n \longrightarrow 0\}$, es decir el espacio de sucesiones escalares convergentes a cero.*

**Definición 1.1.34.** ***(Espacio** $C[X]$**)**. Sea $X$ un espacio normado y compacto, decimos que $C[X]$ es el espacio de todas las funciones continuas en $X$ sobre un intervalo $J$, cuya norma está definida por*

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|; \ J = [a, b].$$

**Ejemplo 1.1.35.** *Sea $X$ el conjunto de todas las funciones en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sobre $J = [0, 1] \times [0, 1]$, así un elemento de este espacio son las funciones $f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ definida por $f(x, y) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$ es una función continua en $[0, 1]$. Así,*

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| = \max_{t \in [0,1]} \left|1 - \frac{t}{2} - \frac{t}{2}\right| = 1.$$

**Definición 1.1.36.** *Una seminorma en un espacio vectorial $E$ sobre $\mathbb{K}$ es una función $\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$,*

*(i)* $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

*(ii)* $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$.

El siguiente lema nos da algunas de las propiedades de las seminormas, las cuales serán de utilidad posteriormente.

**Lema 1.1.37.** *Si $\rho$ es una seminorma en un espacio vectorial $X$ sobre $\mathbb{K}$, entonces dados $x, y \in X$ tenemos*

*(a)* $\rho(0) = 0$.

*(b)* $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y)$.

*(c)* $\rho(x) \geq 0$.

*(d)* $\{x \in X : \rho(x) = 0\}$ *es un subespacio de $X$.*

**<u>Demostración:</u>**
Para el literal $(a)$. Por Definición 1.1.36 $(ii)$ tenemos que $\rho(0 * x) = |0|\rho(0) \Longrightarrow \rho(0) = 0$.

Para el literal $(b)$. Tenemos que

$$\rho(x) = \rho(x - y + y) = \rho((x - y) + y) \leq \rho(x - y) + \rho(y) \Longrightarrow \rho(x) - \rho(y) \leq \rho(x - y).$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} &\rho(y) = \rho(y - x + x) = \rho((y - x) + x) \leq \rho(y - x) + \rho(x); \text{ por Definición 1.1.36 } (i) \\ \Longrightarrow &\rho(y) \leq \rho(y - x) + \rho(x) \Longrightarrow \rho(y) - \rho(x) \leq \rho(y - x) \Longrightarrow \rho(y) - \rho(x) \leq \rho((-1)(x - y)) \\ \Longrightarrow &(-1)(\rho(x) - \rho(y)) \leq |-1|\rho(x - y) \Longrightarrow \rho(x) - \rho(y) \geq -\rho(x - y). \end{aligned}$$

Por tanto, $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y)$.

Para el literal $(c)$. Del literal $(b)$ tenemos que

$$\begin{aligned} &|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y) \Longrightarrow |\rho(x) - \rho(0)| \leq \rho(x - 0) \Longrightarrow |\rho(x) - 0| \leq \rho(x) \\ \Longrightarrow &|\rho(x)| \leq \rho(x) \Longrightarrow 0 \leq |\rho(x)| \leq \rho(x). \end{aligned}$$

Por tanto, $\rho(x) \geq 0$.

Y por último, para el literal $(d)$. Para que el conjunto $\{x \in X : \rho(x) = 0\}$ sea un subespacio de $X$ probaremos que dados $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se cumple que $\rho(\alpha x + \beta y) = |\alpha|\rho(x) + |\beta|\rho(y)$. Luego

$$\begin{aligned} &\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(\alpha x) + \rho(\beta y) = |\alpha|\rho(x) + |\beta|\rho(y); \text{ por Definición 1.1.36 (i)} \\ \Longrightarrow &\rho(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|\rho(x) + |\beta|\rho(y) \\ \Longrightarrow &0 \leq \rho(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|\rho(x) + |\beta|\rho(y); \text{ por literal } (c). \end{aligned}$$

Si $\rho(x) = \rho(y) = 0$ se tiene que

$$|\alpha|\rho(x) + |\beta|\rho(y) = |\alpha| * 0 + |\beta| * 0 = 0.$$

Por lo que $|\alpha|\rho(x) + |\beta|\rho(y) = 0$. Asi, $0 \leq \rho(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|\rho(x) + |\beta|\rho(y) = 0$. Por tanto, $\rho(\alpha x + \beta y) = |\alpha|\rho(x) + |\beta|\rho(y)$. ■

Nótese que toda norma es una seminorma y que una seminorma no necesariamente es una norma, una seminorma será una norma si cumple que $\rho(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

**Definición 1.1.38.** *Un espacio de Banach es un espacio normado completo (completo en la métrica definida por la norma (ver Definición 1.1.30)).*

**Definición 1.1.39.** *Sean $E$ y $F$ espacios métricos y $f : E \longrightarrow F$, decimos que $f$ es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in E$ verifican que $||y - x|| < \delta$, entonces $||f(y) - f(x)|| < \varepsilon$. Una definición equivalente es que $f$ es uniformemente continua, para cualesquiera dos sucesiones $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ de puntos de $E$ tales que $\{y_n - x_n\} \longrightarrow 0$, se tiene que $\{f(y_n) - f(x_n)\} \longrightarrow 0$.*

**Ejemplo 1.1.40.** *El espacio $\ell^p$ de sucesiones acotadas (Definición 1.1.31) es un espacio de Banach.*

**Demostración:**

Por la Definición 1.1.31 sabemos que $\ell^p$ es un espacio normado, bastará probar que es completo. Sea $\{x_m\} \in \ell^p$ una sucesión de Cauchy, donde $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > N$,

$$\|x_m - x_n\| = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Se deduce que para cada $j = 1, 2, \cdots$ tenemos que

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p < \varepsilon \; ; \; (m, n > N). \tag{1.3}$$

Elegimos un $j$ fijo. De la Ecuación (1.3) vemos que $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots)$ es una sucesión de Cauchy de números. Es convergente dado que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son completos, por lo que $\xi_j^{(m)} \longrightarrow \xi_j$ cuando $m \longrightarrow \infty$. Usando estos límites, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ y demostraremos que $x \in \ell^p$ y que $x_m \longrightarrow x$. De la Ecuación (1.2) tenemos que para todo $m, n > N$,

$$\left( \sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \Longrightarrow \sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p < \varepsilon^p \; ; \; (k = 1, 2, \cdots).$$

Si $n \longrightarrow \infty$, para $m > N$ obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \leq \varepsilon^p \; ; \; (k = 1, 2, \cdots).$$

Ahora si $k \longrightarrow \infty$, entonces para $m > N$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leq \varepsilon^p. \tag{1.4}$$

Esto demuestra que $x_m - x = (\xi_j^{(m)} - \xi_j) \in \ell^p$. Como $x_m \in \ell^p$, luego por la Desigualdad de Minkowski (Ecuación (1.1)), tenemos que

$$x = x_m + (x - x_m) \in \ell^p.$$

Además, la serie en la Ecuación (1.4) representa $\|x_m - x\|^p$, de modo que la Ecuación (1.4) implica que $x_m \longrightarrow x$. Como $\{x_m\} \in \ell^p$ es una sucesión arbitraria de Cauchy, tenemos que $\ell^p$ es completo con $1 \leq p < \infty$. Y como $\ell^p$ es un espacio normado completo por Definición 1.1.38 es un espacio de Banach. ■

**Teorema 1.1.41.** ***(Subespacio de un espacio de Banach)***. *Un subespacio $Y$ de un espacio de Banach $X$ es completo, si y sólo si $Y$ es cerrado en $X$.*

**Demostración:**

"$\Longrightarrow$"

Sea $X$ un espacio de Banach. Supongamos que $Y$ es un subespacio completo de $X$, probaremos que el conjunto $Y$ es cerrado en $X$, es decir $Y = \overline{Y}$. Como $Y \subset \overline{Y}$, bastará probar que $Y \supset \overline{Y}$. Sea $x \in \overline{Y}$. Como $x \in \overline{Y}$, entonces $\exists$ $\{x_n\} \subset Y$ tal que $\{x_n\} \to x$; por Teorema 1.1.27 inciso a). Como $\{x_n\}$ es convergente, entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy (por Teorema 1.1.27). Además por ser $Y$ completo, $\{x_n\} \to x \in Y$; por Definición 1.1.7. Por lo cual $Y \supset \overline{Y}$. Por tanto, $Y = \overline{Y}$.

"$\Longleftarrow$"

Sea $X$ un espacio de Banach. Supongamos que Y es un subespacio cerrado en $X$, probaremos que $Y$ es completo, es decir toda sucesión de Cauchy converge. Sea $\{x_n\} \subset Y \subset X$ una sucesión de Cauchy. Como $X$ es un espacio de Banach por Definición 1.1.38 $X$ es completo, como $X$ es completo por Definición 1.1.7, entonces $\{x_n\} \to x \in X$. Luego por Teorema 1.1.27 inciso a) tenemos que $x \in \overline{Y}$, pero por hipótesis $Y$ es cerrado, es decir $Y = \overline{Y}$, por lo que $x \in \overline{Y} = Y$, entonces $x \in Y$. Por tanto, $\{x_n\} \to x \in Y$. Así $Y$ es un subespacio completo de $X$. ■

Además de $\ell^p$ existen otros espacios comunes que son de Banach como lo es $C[0,1]$ cuya demostración la presentamos a continuación.

**Ejemplo 1.1.42.** *El espacio de funciones $C[0,1]$ donde $[0,1]$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es un espacio de Banach (Definición 1.1.38).*

**Demostración:**

Por la Definición 1.1.34 sabemos que $C[0,1]$ es un espacio normado, bastará probar que es completo. Como $\mathbb{R}$ es completo y $[0,1]$ es cerrado, se concluye que $[0,1]$ es completo. Sea

$\{f_n\} \in C[0,1]$ una sucesión arbitraria de Cauchy. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > N$ tenemos que

$$\|f_n - f_m\| = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \text{ para } m, n > N \text{ y } x \in [0,1]. \tag{1.5}$$

Esto implica que para todo $x \in [0,1]$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy, y al ser $[0,1]$ completo tiene un límite al que llamamos $f(x)$. Además, $f(x) \in [0,1]$. Tomando límites cuando $m \longrightarrow \infty$ en la Ecuación (1.5), para cada $n \geq N$ tenemos que,

$$\|f_n - f\| = \max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} < \varepsilon.$$

En consecuencia, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces se cumple $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$. Por Definición 1.1.39, la convergencia de $\{f_n\}$ hacia $f$ es uniforme y al ser las $f_n$ continuas, así lo es $f$. Es decir, $f \in C[0,1]$ y por Definición 1.1.15, $C[0,1]$ es completo. Y como $C[0,1]$ es un espacio normado completo por Definición 1.1.38 es un espacio de Banach. ■

**Ejemplo 1.1.43.** *El espacio $\ell^\infty$ es un espacio de Banach.*

**Demostración:**

Demostremos que $\ell^\infty$ es de Banach, para ello cabe mencionar que $\ell^\infty$ también es conocido como $(B(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, entonces $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon,\ \forall\, n, m \geq n_0$, entonces $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy para toda $x$ en $\mathbb{N}$, además sabemos que,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \Longrightarrow \exists\ f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x).$$

Donde $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, con

$$|f_n - f_m| < \varepsilon,\ \forall\, x \in \mathbb{N},\ \forall\, n, m \geq n_0. \tag{1.6}$$

Si $m \longrightarrow \infty$ se tiene que $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0,\ \forall\, x \in \mathbb{N}$. Ahora bien, $|f_n(x) - f(x)| = |f(x) - f_n(x)|$, pero $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, aplicando la desigualdad del triángulo para la resta tenemos,

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x)| - |f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x)| - |f_n(x)| < \varepsilon \\
\Longrightarrow &|f(x)| < \varepsilon + |f_n(x)| \text{ pero } |f_n(x)| \leq \|f_n(x)\| < M \\
\Longrightarrow &|f(x)| < \varepsilon + M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Por lo que $f(x) \in \ell^\infty$. Ahora bien, sí la Ecuación (1.6) tenemos, $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \|f_n - f\| < \varepsilon$, entonces tenemos que $f_n$ converge a $f$, por Definición 1.1.7 $\ell^\infty$ es completo, concluimos que $\ell^\infty$ es de Banach. ■

**Ejemplo 1.1.44.** *El espacio $c_0$ es un espacio de Banach.*

**Demostración:**
Demostremos que $c_0$ es de Banach. Para ello, primero demostremos que $c_0$ es un espacio cerrado de $\ell^\infty$. Sea $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy de elementos en $c_0$ con

$$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, \ldots),$$

tal que converge en $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ a un vector $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots,) \in \ell^\infty$, hemos de ver que $y \in c_0$, es decir que la sucesión $\{y_n\}$ es convergente a $0 \in \mathbb{K}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0$ tal que si $m \geq m_0$

$$\|x^{(m)} - y\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $x^{(m_0)} \in c_0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0$ tal que si $n \geq n_0$, $|x_n^{(m)}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, si tomamos a $n \geq \text{máx}\{n_0, m_0\}$

$$\begin{aligned} |y_n| &= |y_n - x_n^{(m_0)} + x_n^{(m_0)}| \leq |y_n - x_n^{(m_0)}| + |x_n^{(m_0)}| \leq \|y - x_n^{(m_0)}\|_\infty + |x_n^{(m_0)}| \\ \Longrightarrow |y_n| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo que $y \in c_0$, por tanto $c_0$ es cerrado en $\ell^\infty$. Como $c_0$ es cerrado en $\ell^\infty$ y $\ell^\infty$ es de Banach, por Teorema 1.1.41, $c_0$ es de Banach. ■

Recordemos que en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, la topología tiene como base al conjunto de las bolas abiertas con centro en $x$ y radio $\varepsilon$

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

**Definición 1.1.45.** *Sea $A \subset X$, diremos que $A$ es convexo si $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$, para todo $x, y \in A$, $\alpha \in [0,1]$.*

**Teorema 1.1.46.** *En un espacio normado $X$, las bolas abiertas y cerradas son conjuntos convexos.*

**Demostración:**
Para las bolas abiertas, $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : \|x - y\| < \varepsilon\}$. Para que $B_\varepsilon(x)$ sea convexo demostraremos que para $a, b \in B_\varepsilon(x)$ y $t \in [0,1]$ se verifica que $(1-t)a + tb \in B_\varepsilon(x)$. Como $a, b \in B_\varepsilon(x) \Longrightarrow \|x - a\| < \varepsilon$ y $\|x - b\| < \varepsilon$. Luego,

$$\begin{aligned} \|x - ((1-t)a + tb)\| &= \|x - a + ta - tb\| \\ &= \|x - a + ta - tb + tx - tx\| \\ &= \|(x - tx - a + ta) + (tx - tb)\| \\ &= \|((1-t)x - a(1-t)) + (t(x-b))\| \\ &= \|(1-t)(x-a) + t(x-b)\| \\ &\leq |1-t|\|x-a\| + |t|\|x-b\|; \text{ por Definición 1.1.30 (iv) y (iii).} \end{aligned}$$

Además,

$$\|x-((1-t)a+tb)\| \leq |1-t|\|x-a\|+|t|\|x-b\| < |1-t|\varepsilon+|t|\varepsilon = \varepsilon \Longrightarrow \|x-((1-t)a+tb)\| < \varepsilon.$$

Por tanto, $(1-t)a+tb \in B_\varepsilon(x)$. Por lo que las bolas abiertas son convexas.

Para las bolas cerradas, $\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X : \|x-y\| \leq \varepsilon\}$. Para que $B_\varepsilon(x)$ sea convexo demostraremos que para $a, b \in \overline{B}_\varepsilon(x)$ y $t \in [0,1]$; se verifica que $(1-t)a+tb \in \overline{B}_\varepsilon(x)$. Como $a, b \in \overline{B}_\varepsilon(x) \Longrightarrow \|x-a\| \leq \varepsilon$ y $\|x-b\| \leq \varepsilon$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|x-((1-t)a+tb)\| &= \|x-a+ta-tb\| \\
&= \|x-a+ta-tb+tx-tx\| \\
&= \|(x-tx-a+ta)+(tx-tb)\| \\
&= \|((1-t)x-a(1-t))+(t(x-b))\| \\
&= \|(1-t)(x-a)+t(x-b)\| \\
&\leq |1-t|\|x-a\|+|t|\|x-b\|; \text{ por Definición 1.1.30 (iv) y (iii).}
\end{aligned}$$

Además,

$$\|x-((1-t)a+tb)\| \leq |1-t|\|x-a\|+|t|\|x-b\| \leq |1-t|\varepsilon+|t|\varepsilon \leq \varepsilon \Longrightarrow \|x-((1-t)a+tb)\| \leq \varepsilon.$$

Por tanto, $(1-t)a+tb \in \overline{B}_\varepsilon(x)$. Por lo que las bolas cerradas son convexas. ■

Sabemos que el conjunto $x+B_\varepsilon(0)$ es abierto, pues es igual a la bola $B_\varepsilon(x)$; por lo que podemos generalizar que si $U$ es abierto en $X$, para $x \in X$ el conjunto $x+U$ es abierto en $X$. La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, así $\cup_{a\in A}(a+V)$ es un abierto en $X$, más aún

$$\cup_{a\in A}(a+V) = A+V. \tag{1.7}$$

Donde $A+V = \{a+v : a \in A,\ v \in V\}$. Implica que $A+V$ es abierto en $X$. El siguiente resultado dió pie a que se generalizara la noción de espacio normado a la de espacio vectorial topológico.

**Definición 1.1.47.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$. Una función $T : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|)$ se dice que es continua sobre el punto $x_0 \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ para toda $x$ que satisface $\|x-x_0\| < \delta$. $T$ es continuo, si es continuo en todo punto de $(X, \|\cdot\|)$.*

*Nótese que es equivalente decir, $T$ es continuo sí, para cada subconjunto $V$ abierto de $Y$, el conjunto $T^{-1}(V)$ es subconjunto abierto de $X$.*

**Proposición 1.1.48.** *Sea $X$ un espacio normado, entonces*

*(i) La función suma de $X \times X$ en $X$ dada por $f(x,y) = x+y$ es continua.*

*(ii) La función producto por un escalar de $\mathbb{K}\times X$ en $X$, dada por $g(\alpha, x) = \alpha x$, es continua. Donde la norma está definida por $\|(x,y)\| = \|x\|+\|y\|$.*

**Demostración:**

Prueba del literal (i). Demostraremos que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f(x_n,y_n) - f(x,y)\| = 0$.

Sea $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$, es decir $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$, así

$$\begin{aligned}
&\|f(x_n, y_n) - f(x, y)\| = \|x_n + y_n - (x + y)\| \\
\Longrightarrow &\|f(x_n, y_n) - f(x, y)\| = \|x_n + y_n - x - y\| \\
\Longrightarrow &\|f(x_n, y_n) - f(x, y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|; \quad \text{por desigualdad del triángulo} \\
\Longrightarrow &\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f(x_n, y_n) - f(x, y)\| \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n - x\| + \lim_{n \longrightarrow \infty} \|y_n - y\| \\
\Longrightarrow &\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f(x_n, y_n) - f(x, y)\| \leq 0,
\end{aligned}$$

pero sabemos que, $\| \cdot \| \geq 0$, entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f(x_n, y_n) - f(x, y)\| = 0.$$

Por tanto, $f$ es continua.

Prueba del literal ii). Demostraremos que, $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|g(\alpha_n, y_n) - g(\alpha, y)\| = 0$.
Sea $(\alpha_n, y_n) \longrightarrow (\alpha, y)$, es decir $\alpha_n \longrightarrow \alpha$, $y_n \longrightarrow y$, así

$$\begin{aligned}
&\|g(\alpha_n, y_n) - g(\alpha, y)\| = \|\alpha_n y_n - (\alpha y)\| \\
\Longrightarrow &\|g(\alpha_n, y_n) - g(\alpha, y)\| = \|\alpha_n y_n - \alpha y + \alpha_n y - \alpha_n y\| \\
\Longrightarrow &\|g(\alpha_n, y_n) - g(\alpha, y)\| \leq \|\alpha_n (y_n - y) + (\alpha_n y - \alpha y)\| \\
\Longrightarrow &\|g(\alpha_n, y_n) - g(\alpha, y)\| \leq \|\alpha_n (y_n - y)\| + \|(\alpha_n - \alpha) y\|; \quad \text{por desigualdad del triángulo} \\
\Longrightarrow &\|g(\alpha_n, y_n) - g(\alpha, y)\| \leq |\alpha_n| \|y_n - y\| + |\alpha_n - \alpha| \|y\| \\
\Longrightarrow &\lim_{n \longrightarrow \infty} \|g(\alpha_n, y_n) - g(\alpha, y)\| \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} |\alpha_n| \|y_n - y\| + \lim_{n \longrightarrow \infty} |\alpha_n - \alpha| \|y\| \\
\Longrightarrow &\lim_{n \longrightarrow \infty} \|g(\alpha_n, y_n) - g(\alpha, y)\| \leq 0,
\end{aligned}$$

pero sabemos que, $\| \cdot \| \geq 0$, entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|g(\alpha_n, y_n) - g(\alpha, y)\| = 0.$$

Por tanto, $g$ es continua. ■

De la continuidad de las operaciones en un espacio normado, obtenemos las siguientes relaciones entre cerraduras e interiores de sumas de conjuntos, que nos dan información sobre la topología del espacio. Dado un espacio vectorial $X$, se pueden definir distintas normas sobre él. Si dos de ellas inducen la misma topología sobre $X$, los espacios normados que se obtienen tienen la misma estructura algebraica y topológica y en ese sentido son el mismo.

**Definición 1.1.49.** *Dos normas $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ en un espacio vectorial $X$ son equivalentes si inducen la misma topología en $X$.*

**Lema 1.1.50.** *Si $\rho$ y $\sigma$ son seminormas en un espacio vectorial $X$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

*i)* $\rho(x) \leq \sigma(x)$ *para toda* $x \in X$.

*ii)* $\{x \in X : \sigma(x) < 1\} \subset \{x \in X : \rho(x) < 1\}$, *es decir,* $\rho(x) < 1$ *siempre que* $\sigma(x) < 1$.

*iii)* $\{x \in X : \sigma(x) \leq 1\} \subset \{x \in X : \rho(x) \leq 1\}$, *es decir,* $\rho(x) \leq 1$ *siempre que* $\sigma(x) \leq 1$.

*iv)* $\{x \in X : \sigma(x) < 1\} \subset \{x \in X : \rho(x) \leq 1\}$, *es decir,* $\rho(x) \leq 1$ *siempre que* $\sigma(x) < 1$.

**Demostración:**

Sea $x \in X$. Demostraremos las equivalencias como sigue a continuación.

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Supongamos que se cumple $i)$, además de $ii)$, se tiene que $\sigma(x) < 1$, así,

$$\rho(x) \leq \sigma(x) \Longrightarrow \rho(x) \leq \sigma(x) < 1 \Longrightarrow \rho(x) < 1.$$

$(i) \Longrightarrow (iii)$. Supongamos que se cumple $ii)$, además de $iii)$, se tiene que $\sigma(x) \leq 1$, así,

$$\rho(x) \leq \sigma(x) \Longrightarrow \rho(x) \leq \sigma(x) \leq 1 \Longrightarrow \rho(x) \leq 1.$$

$(i) \Longrightarrow (iv)$. Supongamos que se cumple $i)$, además de $iv)$, se tiene que $\sigma(x) < 1$, así,

$$\rho(x) \leq \sigma(x) \Longrightarrow \rho(x) \leq \sigma(x) < 1 \Longrightarrow \rho(x) \leq 1.$$

$(ii) \Longrightarrow (iv)$. Supongamos que se cumple $ii)$, además de $iv)$, se tiene que $\sigma(x) < 1$, así,

$$\sigma(x) < 1 \Longrightarrow \rho(x) < 1 \text{ para toda } x \in X \Longrightarrow \rho(x) \leq 1.$$

$(iii), (iv) \Longrightarrow (i)$. Supongamos que se cumple $iii)$ o $iv)$, ya que es la misma hipótesis para ambos y $\varepsilon > 0$, entonces

$$\rho\left(\frac{x}{\sigma(x)+\varepsilon}\right) = \frac{1}{|\sigma(x)+\varepsilon|}\rho(x) \Longrightarrow \frac{\rho(x)}{\sigma(x)+\varepsilon} \leq 1 \Longrightarrow \rho(x) \leq \sigma(x) + \varepsilon.$$

Como la última desigualdad es cierta para todo $\varepsilon > 0$, $\rho(x) \leq \sigma(x)$ para todo $x \in X$. Luego, los enunciados son equivalentes. ■

**Proposición 1.1.51.** *Sea $X$ un espacio normado, dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en $X$ son equivalentes si y sólo si existe $M > 0$ tal que para toda $x \in X$*

$$\frac{1}{M}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1. \tag{1.8}$$

**Demostración:**

"$\Longrightarrow$"

Supongamos que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ son equivalentes. Por Definición 1.1.49, como $\{x \in X : \|x\|_1 < 1\}$ es una vecindad de cero en la topología inducida por $\|\cdot\|_2$. Por lo tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que,

$$\{x \in X : \|x\|_2 < \varepsilon\} \subset \{x \in X : \|x\|_1 < 1\}.$$

Si en el Lema 1.1.50 $ii)$ implica $i)$, tomamos $\rho(x) \leq \sigma(x)$, entonces $\sigma(x) = \frac{1}{\varepsilon}\|x\|_2$ y $\rho(x) = \|x\|_1$. De manera análoga, por Definición 1.1.49, como $\{x \in X : \|x\|_2 < 1\}$ es una vecindad de cero en la topología inducida por $\|\cdot\|_1$. Por lo tanto, existe $r > 0$ tal que,

$$\{x \in X : \|x\|_1 < r\} \subset \{x \in X : \|x\|_2 < 1\}.$$

Si en el Lema 1.1.50 $ii)$ implica $i)$, tomamos $\sigma(x) = r\|x\|_2$ y $\rho(x) = \|x\|_1$, entonces $r\|x\|_2 \leq \|x\|_1$, por lo que $\|x\|_2 \leq \frac{1}{r}\|x\|_1$.Luego, sea $M = \max(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{r})$, entonces $\frac{1}{M}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$. Análogamente el regreso. ■

## 1.2. OPERADORES LINEALES

Como las funciones entre espacios vectoriales que preservan la estructura vectorial son las llamadas lineales, estamos particularmente interesados en ellas, pero recordar que los espacios que estamos estudiando están dotados de una topología y la forma en que se preservan la topología es mediante funciones continuas. Si $X$ e $Y$ son espacios normados, cuando no haya peligro de confusión denotaremos la norma en ambos espacios por $\|\cdot\|$ y cuando necesitemos especificar, escribiremos $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$.

**Definición 1.2.1.** *Sean $X$ y $Y$ dos espacios normados sobre $\mathbb{K}$. Un operador lineal es una función lineal $T : X \longrightarrow Y$ denotado por $Tx$, al operador evaluado en $x$. A los operadores de $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ les llamaremos funcionales, serán denotados por $f(x)$ al funcional evaluado en $x$. Un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ es una isometría, si para toda $x \in X$, $\|Tx\| = \|x\|$. Si un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ es biyectivo y además es un homeomorfismo ($U$ es abierto en $X$ si y sólo si $f(U)$ es abierto en $Y$), entonces diremos que es un isomorfismo de espacios normados. Si $T$ es una isometría, diremos que $X$ y $Y$ son isométricamente isomorfos.*

*Cabe resaltar que los espacios isométricamente isomorfos son aquellos que tienen la misma estructura topológica, algebraica y métrica, mientras que en los espacios isomorfos sólo podemos asegurar que tienen la misma estructura topológica y algebraica, debido a que existe una biyección con inversa continua.*

El siguiente teorema nos da algunas condiciones equivalentes para la continuidad de un operador. De hecho, a los operadores lineales continuos entre espacios normados se les llama también *operadores lineales acotados*, ya que si satisfacen *(c)* en el siguiente teorema, la imagen bajo $T$ de conjuntos acotados es un conjunto acotado. Es importante no confundir esta definición con la definición usual de función acotada, es decir aquella cuyo rango es acotado; en este sentido el único operador lineal acotado es el identicamente cero pues el rango de todo operador lineal es un subespacio del contradominio.

**Teorema 1.2.2.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal, entonces son equivalentes*

*(a) $T$ es continuo en $0$.*

*(b) $T$ es continuo.*

*(c) Para cada $x \in X$, existe una constante $C > 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$.*

**Demostración:**
*(a)* $\Longrightarrow$ *(b)*. Sea $x, y \in X$, asi $x - y \in X$ y supongamos que $T$ es continua en $0$, por lo que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T_{x-y} - T_0\| < \varepsilon$ siempre que $\|(x - y) - 0\| < \delta$. Luego,

$$\|T_{x-y} - T_0\| = \|T_x - T_y - T_0\| = \|T_x - T_{y+0}\| = \|T_x - T_y\|.$$

Por lo que $\|T_x - T_y\| = \|T_{x-y} - T_0\| < \varepsilon$, entonces $\|T_x - T_y\| < \varepsilon$. Por tanto, $T$ es continuo.

*(b)* $\Longrightarrow$ $(c)$. Supongamos que $T$ es continua en algún punto $x_0 \in X$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T_x - T_{x_0}\| < \varepsilon$ siempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Sea $y \neq 0$, arbitrariamente dado en $X$ y $x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y$, entonces

$$x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|}y \Longrightarrow \|x - x_0\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|y\| = \delta.$$

Como $\|x - x_0\| = \delta$ por definición de continuidad y como $T$ es un operador lineal, entonces

$$\|T_x - T_{x_0}\| = \|T_{x-x_0}\| = \left\|T_{\frac{\delta}{\|y\|}y}\right\| = \left\|\frac{\delta}{\|y\|}T_y\right\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|T_y\|.$$

Por lo que $\frac{\delta}{\|y\|}\|T_y\| = \|T_x - T_{x_0}\| < \varepsilon$, así

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|T_y\| < \varepsilon \Longrightarrow \|T_y\| < \frac{\varepsilon}{\delta}\|y\| \Longrightarrow \|T_y\| < C\|y\|; \qquad C = \frac{\varepsilon}{\delta} > 0.$$

Por tanto, $T$ es acotada.

*(c)* $\Longrightarrow$ $(a)$. Sean $T \neq 0$, $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $T \neq 0$, entonces $\|T\| \neq 0$. Al ser $T$ es un operador lineal acotado, para todo $x \in X$ se tiene que $\|x - x_0\| < \delta$; con $\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$, por lo que

$$\|T_x - T_{x_0}\| = \|T_{x-x_0}\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\|\delta = \|T\|\frac{\varepsilon}{\|T\|} = \varepsilon.$$

Por tanto, $T$ es continuo. ■

La equivalencia entre $(a)$ y $(c)$ permite definir la norma entre operadores continuos. En efecto, si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal continuo, por $(c)$, existe $C$ tal que $\|T_x\| \leq C\|x\|$. Entonces definimos la norma de un operador como sigue.

**Definición 1.2.3.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal continuo. Definimos la norma de un operador $T$ por*

$$\|T\| = \inf\{C : \|T_x\| \leq C\|x\|, \forall\ x \in X\},$$

*o, equivalentemente,*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_x\|. \tag{1.9}$$

*De igual forma definimos la norma en un funcional acotado como,*

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(f)\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Denotaremos por $\mathcal{B}(X,Y)$, al espacio de los operadores lineales continuos de $X$ en $Y$ con la norma anterior. Cuando $X = Y$ denotaremos a $\mathcal{B}(X,X)$ simplemente por $\mathcal{B}(X)$. Si $Y = \mathbb{K}$, el espacio $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ se denota por $X^*$, y es conocido como el espacio dual de $X$. A continuación veremos que el operador $T : \ell^p \longrightarrow \ell^1$ pertenece a $\mathcal{B}(\ell^p,\ell^1)$ este resultado es muy importante para los capitulos posteriores.

**Ejemplo 1.2.4.** *Sean $X = \ell^p$, $1 < p < \infty$, $Y = \ell^1$ y $T : \ell^p \longrightarrow \ell^1$ dado por*

$$T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \left\{\frac{x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

*Entonces $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ con $\|T\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}}$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

**Demostración:**
En primer comprobaremos que $T$ está bien definido. En efecto, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, como $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ (pues $1 < q < \infty$), entonces $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Ya que

$$\|T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})\|_1 = \left\|\left\{\frac{x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right| |x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Este último resultado por la desigualdad de Hölder, luego

$$\|T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})\|_1 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\right\|_q \|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p < \infty.$$

Por tanto, $T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \left\{\frac{x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en $\ell^1$.

Ahora verificaremos que es lineal. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, tenemos que

$$T(\alpha\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \beta\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \left\{\frac{\alpha x_n + \beta y_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\alpha\frac{x_n}{n} + \beta\frac{y_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\Longrightarrow T(\alpha\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \beta\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \alpha\left\{\frac{x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} + \beta\left\{\frac{y_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \alpha T\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \beta T\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Por lo que $T$ es lineal.

Para ver que es continua usaremos la desigualdad de Hölder,

$$\|T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})\|_1 = \left\|\left\{\frac{x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right| |x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Longrightarrow \|T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})\|_1 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\right\|_q \|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p.$$

Por Teorema 1.2.2, $T$ es continuo.

Ahora probaremos que $\|T\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}}$. Sea $C_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}}$. Para probar que $\|T\| = C_q$ es suficiente encontrar $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p = 1$ y $\|T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})\|_1 = C_q$. Consideremos $x_n = \frac{C_q^{-q/p}}{n^{q-1}}$, para $n \in \mathbb{N}$. Además $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ de donde se deduce que,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} \Longrightarrow p = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{q}} = \frac{1}{\dfrac{q-1}{q}} = \frac{q}{q-1} \Longrightarrow p = \frac{q}{q-1}$$

$$\Longrightarrow p(q-1) = q \Longrightarrow q - 1 = \frac{q}{p}.$$

De los pasos anteriores hemos de resaltar las siguientes igualdades $q-1=\frac{q}{p}$ , $p=\dfrac{q}{q-1}$ y $\dfrac{1}{p}=\dfrac{q-1}{q}$.Luego,

$$\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p=\left\|\frac{C_q^{-q/p}}{n^{q-1}}\right\|_p=C_q^{-q/p}\left\|\frac{1}{n^{q-1}}\right\|_p=C_q^{-q/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{q-1}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Longrightarrow\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p=C_q^{-q/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(q-1)p}}\right)^{\frac{1}{p}};\text{ pero } p=\frac{q}{q-1}$$

$$\Longrightarrow\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p=C_q^{-q/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(q-1)\frac{q}{q-1}}}\right)^{\frac{1}{p}}=C_q^{-q/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{p}};\text{ pero }\frac{1}{p}=\frac{q-1}{q}$$

$$\Longrightarrow\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p=C_q^{-q/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}\right)^{\frac{q-1}{q}}=C_q^{-q/p}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1};\text{ pero } C_q=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Longrightarrow\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p=C_q^{-q/p}C_q^{q-1};\text{ pero } q-1=\frac{q}{p}$$

$$\Longrightarrow\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p=C_q^{-q/p}C_q^{q/p}=C_q^{-q/p+q/p}=C_q^0=1.$$

Por otro lado:

$$\|T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\frac{C_q^{-q/p}}{n^{q-1}}\right|}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_q^{-q/p}}{n^{q-1}n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_q^{-q/p}}{n^{q-1+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_q^{-q/p}}{n^q}$$

$$\Longrightarrow\|T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})\|_1=C_q^{-q/p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}=C_q^{-q/p}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q=C_q^{-q/p}C_q^q=C_q.$$

Sabemos que

$$\|T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})\|_1}{\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p}=\frac{C_q}{1}=C_q=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Por tanto, $\|T\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}}$. ■

Cuando el operador es un funcional, además de las condiciones mencionadas en el teorema anterior, hay otras condiciones equivalentes a la continuidad.

**Definición 1.2.5.** *Sea $D$ un conjunto de $(X,d)$, diremos que $D$ es denso en $X$ si $\overline{D}=X$.*

**Lema 1.2.6.** *Un subconjunto $D$ de $X$ es denso en $X$ si y sólo si para cada conjunto abierto $U\neq\emptyset$, tenemos $U\cap D\neq\emptyset$.*

**Demostración:**

"$\Longleftarrow$"

Sea $U$ un conjunto abierto, tal que $U \cap D = \emptyset$, entonces $D \subseteq X - U \subsetneq X$. Puesto que $X - U$ es cerrado, tenemos que $\overline{D} \subseteq X - U \subsetneq X$, por Definición 1.2.5, $D$ no es denso en $X$.

" $\Longrightarrow$ "
Supongamos que $D$ no es denso en $X$, entonces $\overline{D} \subsetneq X$ y por lo tanto, existe un conjunto $U$ abierto de $X$ tal que, $U \neq \emptyset$, $U = X - \overline{D}$, así $U \cap \overline{D} = \emptyset$, pero $D \subset \overline{D}$, por lo que $U \cap D = \emptyset$.
■

**Proposición 1.2.7.** *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional en un espacio normado $X$. Si existe $x \in X$ con $f(x) \neq 0$, entonces son equivalentes*

*(i) $f$ es continua.*

*(ii) El espacio nulo de $f$, $\ker f$, es cerrado.*

*(iii) El $\ker f$ no es denso en $X$.*

**Demostración:**
$(i) \Longrightarrow (ii)$. Supongamos que $f$ es continua. Como $\{0\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{K}$ (los unipuntuales son cerrados en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$), entonces $\ker f = f^{-1}(\{0\})$, por continuidad de $f$, $f^{-1}(\{0\})$ es cerrado en $X$. Por tanto, $\ker f$ es cerrado en $X$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Supongamos que $\ker f$ es cerrado en $X$, es decir $\ker f = \overline{\ker f}$, como existe $x$ tal que $f(x) \neq 0$, entonces $\ker f \neq X$ y así $\ker f = \overline{\ker f} \neq X$. Por tanto, $\ker f$ no es denso en $X$.
$(iii) \Longrightarrow (i)$. Supongamos que el $\ker f$ no es denso en $X$, entonces existen $x \in X$ y $r > 0$ tales que

$$B_r(x) \cap \ker f = \emptyset. \tag{1.10}$$

Veremos que existe $C > 0$ tal que $\|f(y)\| < C$ para toda $y \in B_r(x)$. Si no existiere tal $C$, dado $n \in \mathbb{N}$ existiría $y_n \in B_r(x)$ con $|f(y_n)| \geq n + |f(x)|$. Como $B_r(x) = x + B_r(0)$, esto implica que existe $z_n \in B_r(0)$ tal que $y_n = x + z_n$ y $|f(z_n)| \geq n$.
Sea $w \in \mathbb{K}$ con $|w| < n$, entonces $|w| < |f(z_n)|$ y existe $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \geq 1$ tal que $w = \alpha f(z_n) = f(\alpha z_n)$. Por lo tanto, $B_n(0) \subset f(B_r(0))$, como esto se cumple para cada $n$, tenemos que $f(B_r(0)) = \mathbb{K}$ y también $f(B_r(x)) = \mathbb{K}$, lo cual contradice la Ecuación (1.10).
Finalmente, dado $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &|f(x) - f(y)| = |f(x-y)| \leq \|f\| \|(x-y)\| < \|f\|(\|x\| + \|y\|) < \|f\|(C + C) = \|f\| 2C \\ \Longrightarrow &|f||(x-y)| < \|f\| 2C \Longrightarrow |(x-y)| < \frac{\|f\| 2C}{|f|} \delta. \end{aligned}$$

Si $\delta = \frac{|f|\varepsilon}{\|f\|2C}$ obtenemos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para toda $y \in B_\delta(x)$, es decir, $f$ es continua en $x$, luego por el Teorema 1.2.2 $(c)$ obtenemos que $f$ es continua. ■

La proposición anterior no necesariamente es cierta para operadores entre espacios de Banach, para ello presentamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.2.8.** *Sea $f : c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal discontinua y sea $T : c_0 \longrightarrow c_0$ definido como sigue, para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$, $T(x_1, x_2, \ldots) = (f(x), x_1, x_2, \ldots)$. Demuestre que $T$ es un operador lineal con* $\ker T$ *cerrado y que no es continuo.*

**Demostración:**

Hemos demostrado que $c_0$ es un espacio de Banach (Ejemplo 1.1.44) y como $\mathbb{R}$ es un espacio normado completo también es de Banach. Primero probaremos que $T$ es lineal. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots) \in c_0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha(x_1, x_2, \ldots) + \beta(y_1, y_2, \ldots)) = T((\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots) + (\beta y_1, \beta y_2, \ldots))\\
\Longrightarrow &T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots) = (f(\alpha x + \beta y), \alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots)\\
\Longrightarrow &T(\alpha x + \beta y) = (\alpha f(x) + \beta f(y), \alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots)\\
\Longrightarrow &T(\alpha x + \beta y) = (\alpha f(x), \alpha x_1, \alpha x_2, \ldots) + (\beta f(y), \beta y_1, \beta y_2, \ldots)\\
\Longrightarrow &T(\alpha x + \beta y) = \alpha(f(x), x_1, x_2, \ldots) + \beta(f(y), y_1, y_2, \ldots) = \alpha T(x) + \beta T(y).
\end{aligned}$$

Por lo que $T$ es un operador lineal. Por definición del $\ker T$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\ker T = \{x \in c_0 : Tx = 0\} = \{x \in c_0 : (f(x), x_1, x_2, \ldots) = 0\}\\
\Longrightarrow &\ker T = \{x \in c_0 : f(x), x_1, x_2, \ldots = 0\} = \{(0, 0, \ldots)\}.
\end{aligned}$$

Veamos que el $\ker T$ es cerrado. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ker T$.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ker T \Longrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0 \in \ker T.$$

Por Teorema 1.1.27 *b*), el $\ker T$ es cerrado. Observemos que $T$ no es continua dado que su primer componente está formada por $f(x)$ donde $f$ es discontinua, por lo que la Proposición 1.2.7 no es cierta para operadores entre espacios de Banach. ■

**Lema 1.2.9.** *La función norma es continua y está definida por*

$$\begin{aligned}
f :\ & X \longrightarrow \mathbb{R}\\
& x \rightsquigarrow \|x\|.
\end{aligned}$$

**Demostración:**

Para demostrar que la función norma es continua, demostraremos que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, tal que, $\forall\, x, y \in X$ se cumple que $|\|x\| - \|y\|| \leq \varepsilon$ siempre que $\|x - y\| \leq \delta$.

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ y además $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. Pero por propiedad de métrica $\|x - y\| = d(y, x) = d(x, y) = \|y - x\|$, entonces $\|x - y\| = \|y - x\|$, por propiedad de valor absoluto tenemos $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Si tomamos a $\delta = \varepsilon$ tenemos que $|\|x\| - \|y\|| \leq \varepsilon$. Luego por definición de continuidad, $f$ es continua. ■

**Proposición 1.2.10.** *Sean $X$ un espacio normado y $Y$ un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio de Banach.*

**Demostración:**

Sea $\{T_n\} \in \mathcal{B}(X,Y)$ una sucesión de Cauchy arbitraria. Demostraremos que $\{T_n\}$ converge a un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Como $\{T_n\}$ es de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon : \qquad (m, n > N). \tag{1.11}$$

Para todo $x \in X$ y $m, n > N$, tenemos que

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|. \tag{1.12}$$

Ahora para cada $x$ fijo y dado $\varepsilon$ podemos escoger $\varepsilon = \varepsilon_x$ tal que $\varepsilon_x\|x\| < \varepsilon$. Entonces en la Ecuación (1.11) tenemos

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon,$$

por lo que $\{T_n x\}$ es de Cauchy en $Y$. Como $Y$ es completo, $\{T_n x\}$ converge, es decir, $T_n x \longrightarrow y$. Observemos que el límite $y \in Y$ dependiendo de la elección de $x \in X$. Esto define un operador $T : X \longrightarrow Y$, donde $y = Tx$. El operador $T$ es lineal dado que

$$\lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim (\alpha T_n x + \beta T_n z) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n z.$$

Ahora probaremos que $T$ es acotado y que $T_n \longrightarrow T$, es decir $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. Como en la Ecuación (1.12) se mantiene para cada $m > N$ y $T_m x \longrightarrow Tx$ cuando $m \longrightarrow \infty$. Usando la continuidad de la norma, entonces obtendremos de la Ecuación (1.12) que para cada $n > N$ y para todo $x \in X$

$$\|T_n x - Tx\| = \left\|T_n x - \lim_{m \longrightarrow \infty} T_m x\right\| = \lim_{m \longrightarrow \infty} \|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon\|x\|. \tag{1.13}$$

Esto demuestra que $(T_n - T)$ con $n > N$ es un operador lineal acotado. Como $T_n$ es acotado, $T = T_n - (T_n - T)$ es acotado, es decir, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Además, si en la Ecuación (1.13) tomamos al supremo de los $x$ con norma 1, tenemos que $\|T_n - T\| \leq \varepsilon;\ (n > N)$. Por tanto, $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. ■

## 1.3. ESPACIOS COCIENTES Y SUMAS DIRECTAS

**Definición 1.3.1.** *Sea $X$ un espacio normado y $Y$ un subespacio cerrado de $X$. Definimos la norma cociente en $X/Y$, para $\tilde{x} = x + Y$ por*

$$\|\tilde{x}\| = \inf\{\|x + y\| : y \in Y\}. \tag{1.14}$$

*Al espacio $X/Y$ con la norma cociente lo llamaremos espacio cociente, donde $X/Y$ está definido como el conjunto de las clases laterales de la forma: $x + Y = \{z : z = x + y,\ y \in Y\}$.*

**Ejemplo 1.3.2.** *Sea $X = \mathbb{R}^3$ y $Y = \{(\xi_1, 0, 0) : \xi_1 \in \mathbb{R}\}$. Encuentre $X/Y$, $X/X$, $X/\{0\}$.*

**Demostración:**

Para $X/Y$, podemos deducir (geométricamente) que los elementos de $X/Y$ son lineas paralelas al eje $\xi_1$. Es decir, por definición, $X/Y = \{x + Y : x \in X\}$; para un $x_0$ fijo con

$x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$,

$$x_0 + Y = \{(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0) + (\xi_1, 0, 0) : \xi_1 \in \mathbb{R}\} = \{(\tilde{\xi_1}, \xi_2^0, \xi_3^0) : \tilde{\xi_1} \in \mathbb{R}\}.$$

Esto corresponde a una línea paralela al eje $\xi_1$. Por lo que $X/Y$ son las lineas paralelas a $\xi_1$ Ahora para $X/X$, tenemos por definición que $X/X = \{x+X : x \in X\}$; así $x+y \in X;\ y \in X$ para todo $x \in X$ por lo que $X/X = \{0\}$.
Por último, para $X/\{0\}$ tenemos que

$$X/\{0\} = \{x + \{0\} : x \in X\} = \{x : x \in X\} = X.$$

Así $X/\{0\} = X$, bajo cierta identificación. ■

**Teorema 1.3.3.** *Sean $X$ un espacio normado y $Y$ un subespacio cerrado de $X$. Entonces*

*a) La Ecuación (1.14) define una norma en $X/Y$.*

*b) La proyección $q : X \longrightarrow X/Y$ cumple que $\|q\| \leq 1$ y por lo tanto, $q$ es continua.*

*c) Si $X$ es un espacio de Banach, también lo es $X/Y$.*

*d) $U$ es abierto en $X/Y$ si y sólo si $q^{-1}$ (U) es abierto en $X$.*

*e) Si $V$ es abierto en $X$, entonces $q(V)$ es abierto en $X/Y$.*

**Demostración:**
Demostraremos $a$), para ello la Ecuación (1.14) debe definir una norma, es decir que cumplir las propiedades en la Definición 1.1.30.

Primero demostraremos que $\|\tilde{x}\| \geq 0$. Sabemos que $\|\tilde{x}\| = inf\{\|x + y\| : y \in Y\}$, pero $\|x + y\| \geq 0$, entonces $\inf\{\|x + y\| : y \in Y\} \geq 0$. Por tanto, $\|\tilde{x}\| \geq 0$.

Ahora demostraremos que $\|\tilde{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \tilde{x} = 0$. Si $\|\tilde{x}\| = 0$ tenemos que

$$\|\tilde{x}\| = 0 \Longrightarrow inf\{\|x + y\| : y \in Y\} = 0 \Longrightarrow \|x + y\| = 0.$$

Pero $\|x + y\|$ es una norma, luego

$$x + y = 0 \Longrightarrow x = -y \Longrightarrow x \in Y \Longrightarrow \tilde{x} = Y, \text{ i.e } \tilde{x} = 0.$$

Por tanto, $\tilde{x} = 0$. Ahora si $\tilde{x} = 0$, se tiene que

$$\tilde{x} = 0 \Longrightarrow x+Y = Y \Longrightarrow \exists\ y \in Y;\ x+y = 0 \Longrightarrow \|x+y\| = 0 \Longrightarrow inf\{\|x+y\|; y \in Y\} = 0.$$

Por tanto, $\|\tilde{x}\| = 0$.

Ahora demostraremos que $\|\tilde{x}+\tilde{y}\| \leq \|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|$. Sabemos que $\|\widetilde{x+y}\| = \|\tilde{x}+\tilde{y}\|$ por lo que $\|\tilde{x}+\tilde{y}\| = \|\widetilde{x+y}\| = inf\{\|(x+y)+z\|; z \in Y\}$. Luego

$$\begin{aligned} &\|\tilde{x}+\tilde{y}\| = inf\{\|(x+z)+(y+z)\|; z \in Y\} \leq inf\{\|(x+z)\|+\|(x+z)\|; z \in Y\} \\ \Longrightarrow &\|\tilde{x}+\tilde{y}\| \leq inf\{\|(x+z)\|; z \in Y\} + inf\{\|(x+z)\|; z \in Y\} = \|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\| \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\tilde{x}+\tilde{y}\| \leq \|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|$.

Seguidamente demostraremos que $\|\alpha\tilde{x}\| = |\alpha|\|\tilde{x}\|$.

$$\begin{aligned} &\|\alpha\tilde{x}\| = inf\{\|\alpha(x+y)\|; y \in Y\} = inf\{|\alpha|\|(x+y)\|; y \in Y\} = |\alpha| inf\{\|(x+y)\|; y \in Y\} \\ \Longrightarrow &\|\alpha\tilde{x}\| = |\alpha|\|\tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\alpha\tilde{x}\| = |\alpha|\|\tilde{x}\|$. Por lo cual concluimos que la Ecuación (1.14) define una norma en $X/Y$.

Ahora demostraremos *b*). Como $\|q(x)\| = inf\{\|x+y\|; y \in Y\} \leq \|x\|$, $\forall x \in X$. Por Lema 1.1.50 inciso iv) si tomamos a $\|q(x)\| = \rho(x)$ y $\|x\| = \sigma(x)$ tenemos $\|q\| < 1$ y por Teorema 1.2.2, $q$ es continua.

Demostraremos *c*). Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $X/Y$. Podemos extraer una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que

$$\|\widetilde{x_{n_k}} - \widetilde{x_{n_{k+1}}}\| = \|x_{n_k} - \widetilde{x_{n_{k+1}}}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Construiremos dicha sucesión de Cauchy en $X$ de la siguiente manera. Sea $y_1 = 0$; por la definición de norma cociente, existe $y_2 \in Y$ tal que

$$\|\widetilde{x_{n_1}} - \widetilde{x_{n_2}} + y_2\| \leq \|x_{n_1} - \widetilde{x_{n_2}}\| + \frac{1}{2} < 1.$$

Podemos elegir $y \in Y$ tal que

$$\|\widetilde{x_{n_2}} - \widetilde{x_{n_3}} + y\| \leq \|x_{n_2} - \widetilde{x_{n_3}}\| + \frac{1}{2^2} < 1.$$

Entonces si $y_3 = y_2 - y$ obtenemos

$$\|(x_{n_2}+y_2) - (x_{n_3}+y_3)\| \leq \|x_{n_2} - \widetilde{x_{n_3}}\| + \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2}.$$

Continuando de esta manera construimos una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ tal que

$$\|(x_{n_k}+y_k) - (x_{n_{k+1}}+y_{k+1})\| \leq \|x_{n_k} - \widetilde{x_{n_{k+1}}}\| + \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Entonces $\{x_{n_k}+y_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $X$, y como $X$ es completo (por hipótesis), converge a algún punto $x_0 \in X$. Por otra parte, por b), tenemos $\widetilde{x_{n_k}} = q(x_{n_k}+y_k)$ converge a $q(x_0) = \widetilde{x_0}$. Como $\{\widetilde{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, tenemos que converge al mismo límite que su subsucesión y por definición, $X/Y$ es completo.

Demostraremos $d$). Sea $U$ abierto en $X/Y$. Por b) tenemos que $q$ es continua, por definición de continuidad $q^{-1}(U)$ es abierto en $X$. Supongamos ahora que $A \subset X/Y$, y que $q^{-1}(A)$ es abierto en $X$ y que $x_0 \in q^{-1}(A)$. Entonces $\exists > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \subset q^{-1}(A)$, luego, si $\|x - x_0\| < \varepsilon$, entonces $q(x) \in A$. Ahora bien, por como está definida la norma en $X/Y$ tenemos que, existe $y \in Y \ : \ \|x_0 - x + y\| < \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} &\|x_0 - (x-y)\| = \|(x-y) - x_0\| < \varepsilon \Longrightarrow (x-y) \in B_\varepsilon(x_0) \Longrightarrow (x-y) \in q^{-1}(A) \\ \Longrightarrow & q(x-y) \in A, \text{ pero } A \subset X/Y \Longrightarrow q(x-y) = q(x) - q(y) = \tilde{x} - \tilde{y}, \text{ pero } y \in Y \\ \Longrightarrow & q(x-y) = \tilde{x} - 0 = \tilde{x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A$ es abierto.

Y por último, demostraremos $e$). Si $V$ es abierto en $X$, entonces por la Ecuación (1.7) tenemos que $q^{-1}(q(V)) = V + Y \subset X$ es abierto y por d), $q(V)$ es abierto en $X/Y$. ■

## 1.4. SUBESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA

Veremos que para cada $n \in \mathbb{N}$ todos los espacios normados sobre $\mathbb{K}$ de dimensión $n$ son isomorfos, es decir desde los puntos de vista topológico y algebraico todos son el mismo.

**Definición 1.4.1.** ***(Subespacios linealmente independientes)***. *Sea $A \subset X$, decimos que $A$ es* ***linealmente independiente*** *si dado un número natural $n$, dados $x_1, \ldots, x_n \in X$ y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ se tiene que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0, \ \textit{implica que } \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

**Ejemplo 1.4.2.** *Si $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. ¿Es $A$ un subespacio linealmente independiente?*

**Solución:**

Sean $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$, luego:

$$\begin{aligned} \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \theta(1,1,1) &= (0,0,0) \\ (\alpha,0,0) + (0,\beta,0) + (\theta,\theta,\theta) &= (0,0,0) \\ (\alpha+\theta, \beta+\theta, \theta) &= (0,0,0). \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} \alpha + \theta &= 0 \\ \beta + \theta &= 0 \\ \theta &= 0. \end{aligned}$$

Así $\alpha, \beta, \theta = 0$, por lo que $A$ es un subespacio linealmente independiente de $\mathbb{R}^3$. ■

**Definición 1.4.3.** ***(Base de Hamel)***. *Sea $B \subset X$, decimos que $B$ es base de Hamel si*

*a) $B$ es linealmente independiente.*

*b) $B$ genera a $X$, es decir, el subespacio lineal más pequeño de $X$ que contiene a $B$ es $X$.*

**Ejemplo 1.4.4.** *Sea $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ el conjunto de todos los polinomios de coeficientes reales, encuentre una base de Hamel sí existe.*

**Solución:**
Como la suma y producto de polinomios por números reales verifican todas las propiedades de espacio vectorial, tenemos que $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Ahora si analizamos un poco, observemos que no existe ningún conjunto ordenado de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ que pueda generar este espacio vectorial. Supongamos que existe tal conjunto finito. Para cualquier conjunto finito de polinomios que elijamos $S = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ si el polinomio de *mayor* grado en $S$ es $p_i$ (para algún $1 \leq i \leq n$), siempre existirá algún polinomio en $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ de grado mayor que el de $p_i$. Es decir $S$ no puede generar a $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ y por tanto, no es una base del mismo. En cambio, si consideramos el conjunto ordenado de cardinalidad infinita $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\}$ podemos observar que cualquier polinomio de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ puede expresarse como combinación lineal (y por tanto finita) de los elementos de $B$, por lo que $B$ genera $\mathbb{P}(\mathbb{R})$. Además, $B$ es una combinación de polinomios linealmente indepedientes. Por lo que $B$ es una base de Hamel. ■

**Teorema 1.4.5.** *Cada subespacio $Y$ de dimensión finita de un espacio normado $X$ es cerrado en $X$.*

**Demostración:**
Sabemos que cada subespacio de dimensión finita $Y$ de un espacio normado $X$ es completo (véase [1]) y por Teorema 1.1.41 $Y$ es cerrado en $X$. ■

**Teorema 1.4.6.** *Sean $E$ y $F$ espacios métricos y $f : E \longrightarrow F$ una función continua. Si $E$ es compacto, entonces $f$ es uniformemente continua.*

**Demostración:**
Razonemos por contradicción, supongamos que $f$ no es uniformemente continua, por la Definición 1.1.39 esto implica que existen dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ de puntos de $E$, y un $\varepsilon > 0$, tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $||y_n - x_n|| < \frac{1}{n}$ y $||f(y_n) - f(x_n)|| \geq \varepsilon$. Por ser $E$ compacto, tenemos una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $x \in E$ (Teorema 1.1.22 y Definición 1.1.20). Puesto que $\{x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}\} \longrightarrow 0$, entonces $\{x - y_{\sigma(n)}\} \longrightarrow 0$ por lo que $\{y_{\sigma(n)}\} \longrightarrow x$. Como $f$ es continua, tenemos que $\{f(x_{\sigma(n)})\} \longrightarrow f(x)$ y $\{f(y_{\sigma(n)})\} \longrightarrow f(x)$, luego $\{||f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})||\} \longrightarrow 0$, lo cual es una contradicción, ya que $||f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})\} \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $f$ es uniformemente continua. ■

**Definición 1.4.7.** *Un subconjunto $A$ de $X$ es relativamente compacto en $X$ si su cerradura $\overline{A}$ en $X$ es compacta. O su equivalente si $A'$ es compacto.*

**Definición 1.4.8.** *Un subconjunto $A$ de un espacio métrico $X$ es totalmente acotado (precompacto) si para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto finito $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de $X$ tal que*

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon).$$

**Corolario 1.4.9.** *Un subconjunto $A$ de un espacio métrico completo $X$ es relativamente compacto en $X$ si y sólo si es totalmente acotado.*

**Demostración:**
"$\Longrightarrow$"
Sea $A$ un subconjunto de un espacio métrico completo $X$. Supongamos que $A$ es relativamente compacto, es decir, que $\overline{A}$ es compacto en $X$. Probaremos que $A$ es totalmente acotado. Como $\overline{A}$ es compacto, dado un cubrimiento $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ existe un subcubrimiento finito $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ tal que $\overline{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Pero como $A$ es subconjunto de un espacio métrico completo por Teorema 1.1.41 se tiene que $A$ es cerrado, así $A = \overline{A}$. Por lo que $A = \overline{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Por tanto, $A$ es totalmente acotado.

"$\Longleftarrow$"
Sea $A$ un subconjunto de un espacio métrico completo $X$. Supongamos que $A$ es totalmente acotado. Por lo que para cada $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento de $A$ mediante un número finito de conjuntos $C_k$ de diámetro $d < \varepsilon/2$; cada $C_k$ esta contenido en una bola cerrada $D_k$ (en $X$) de radio $\varepsilon/2$. Se tiene que $\overline{A} \subset \bigcup_k D_k$, donde $\bigcup_k D_k$ es cerrado, y cada $D_k$ tiene un diámetro menor o igual que $\varepsilon$. Por otra parte, por Teorema 1.1.41 $\overline{A}$ es un subespacio completo. Por lo que $\overline{A}$ es compacto y así $A$ es relativamente compacto. ■

Sean $(X, d_X)$ un espacio métrico compacto y $(Y, d_Y)$ un espacio métrico. Consideremos el espacio de funciones continuas $B(X, Y)$ con la métrica uniforme $d_\infty = \max_{z\in X} d_X(f(z), g(z))$.

**Definición 1.4.10.** *Un subconjunto $A$ de $B(X, Y)$ es equicontinuo en el punto $z_0 \in X$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (dependiente de $\varepsilon$ y $z_0$) tal que para toda $f \in A$,*

$$d_X(f(z), f(z_0)) < \varepsilon \text{ si } d_Y(z, z_0) < \delta,$$

*$A$ es equicontinuo si lo es en todo punto de $X$.*

Denotaremos por $B_\infty(f_0, r) = \{f \in B(X, Y) | d_\infty(f, f_0) < r\}$ a la bola abierta en $B(X, Y)$ con centro $f_0$ y radio $r$.

**Teorema 1.4.11.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto y $Y$ un espacio métrico completo. Un subconjunto $A$ de $B(X, Y)$ es relativamente compacto en $B(X, Y)$ si y sólo si $A$ es equicontinuo y los conjuntos*

$$A(z) = \{f(z) | f \in A\}$$

*son relativamente compactos en $X$ para cada $z \in X$.*

**Demostración:**

"$\Longrightarrow$"

Supongamos que $A$ es relativamente compacto en $B(X,Y)$. Entonces por Corolario 1.4.9 $A$ es totalmente acotado. En consecuencia por Definición 1.4.8, dado $\varepsilon > 0$, existen $g_1, \cdots, g_m \in A$ tales que

$$A \subset B_\infty(g_1, \varepsilon/3) \cup \cdots \cup B_\infty(g_m, \varepsilon/3).$$

Por tanto, $g_i(z) \in A(z)$ para $i = 1, \cdots, m$ y

$$A(z) \subset B_X\left(g_1(z), \frac{\varepsilon}{3}\right) \cup \cdots \cup B_X\left(g_m(z), \frac{\varepsilon}{3}\right), \ \forall z \in X.$$

Esto prueba que $A(z)$ es totalmente acotado.

Como $Y$ es completo, por el Corolario 1.4.9 como $A(z)$ es totalmente acotado, entonces $A(z)$ es relativamente compacto en $Y$ para todo $z \in X$. Por otra parte como $X$ es compacto, por Teorema 1.4.6 cada $g_i$, es uniformemente continua. En consecuencia por Definición 1.1.39, existe $\delta_i > 0$ tal que, para cualesquiera $y, z \in X$,

$$d_Y(g_i(y), g_i(z)) < \varepsilon/3 \text{ si } d_X(y,z) < \delta_i.$$

Definimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Dada $f \in A$, existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $d_\infty(f, g_i) < \varepsilon/3$ tenemos

$$d_Y(f(y), f(z)) \leq d_Y(f(y), g_i(y)) + d_Y(g_i(y), g_i(z)) + d_Y(g_i(z), f(z)) < \varepsilon.$$

Luego por Definición 1.4.10, $A$ es equicontinuo.

"$\Longleftarrow$"

Supongamos ahora que $A$ es equicontinuo y que $A(z)$ es relativamente compacto en $Y$ para todo $z \in X$. Probaremos que $A$ es relativamente compacto en $B(X,Y)$. Como $X$ es completo, $B(X,Y)$ también lo es, vamos a probar que $A$ es totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$. Como $A$ es equicontinuo, por Definición 1.4.10 para cada $z \in X$ tomemos $\delta_z > 0$ tal que, para todo $f \in A$,

$$d_Y(f(y), f(z)) < \varepsilon/4 \text{ si } d_X(y,z) < \delta_z. \tag{1.15}$$

Como $X$ es compacto por Definición 1.1.20, existen $z_1, \cdots, z_m \in X$ tales que

$$X \subset B_X(z_1, \delta_{z_1}) \cup \cdots \cup B_X(z_m, \delta_{z_m}). \tag{1.16}$$

Y como cada $A(z_i)$ es totalmente acotado, por Definición 1.4.8, existen $x_1, \cdots, x_k \in Y$ tales que

$$A(z_1) \cup \cdots \cup A(z_m) \subset B_Y(x_1, \varepsilon/4) \cup \cdots \cup B_Y(x_k, \varepsilon/4). \tag{1.17}$$

Denotemos por $S$ al conjunto (finito) de todas las funciones

$$\sigma : \{1, \cdots, m\} \longrightarrow \{1, \cdots, k\}.$$

Para cada $\sigma \in S$ definimos

$$A_\sigma = \{f \in A \mid f(z_i) \in B_Y(x_{\sigma_i}, \varepsilon/4), \ \forall\, i = 1, \cdots, m\}.$$

Se sigue de la Ecuación (1.17) que, para cada $f \in A$ y cada $i \in \{1, \cdots, m\}$, existe $\sigma_i \in \{1, \cdots, k\}$ tal que $f(z_i) \in B(x_{\sigma_i}, \varepsilon/4)$. En consecuencia

$$A \subset \bigcup_{\sigma \in S} A_\sigma. \tag{1.18}$$

Probaremos ahora que cada $A_\sigma$ está contenida en una bola de radio $\varepsilon$ con centro en $A$. Sean $f, g \in A_\sigma$ y sea $z \in X$. Sean $f, g \in A_\sigma$ y sea $z \in X$. Se sigue de la ecuación (1,16) que existe $i \in \{1, \cdots, m\}$ tal que $d_X(z, z_i) < \delta_{z_i}$ y, en consecuencia, la Ecuación (1.15) implica que $d_Y(h(z), h(z_i)) < \varepsilon/4$ para toda $h \in A$. Por tanto,

$$d_Y(f(z), g(z)) \leq d_Y(f(z), f(z_i)) + d_Y(f(z_i), x_{\sigma_{(i)}}) + d_Y(g(z), g(z_i)) < \varepsilon.$$

Tomando el máximo sobre toda $z \in X$ concluimos que $d_\infty(f, g) < \varepsilon$ para toda $f, g \in A_\sigma$. En consecuencia, para cualquier elección de $g_\sigma \in A_\sigma$, se cumple que $A_\sigma \subset B_\infty(g_\sigma, \varepsilon)$ luego por las Ecuaciones (1.17) y (1.18) se sigue que $A \subset \bigcup_{\sigma \in S} B_\infty(g_\sigma, \varepsilon)$. Por tanto, $A$ es totalmente acotado. ■

**Ejemplo 1.4.12.** *Sea $k : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y definamos*

$$Tf(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \;\; f \in B([a, b], \mathbb{R}).$$

*Se considera $B([a, b], \mathbb{R})$ con la norma $\| \cdot \|_\infty$ (ver Definición 1.1.34), demostraremos que el espacio $Y = \{f \in C([a, b], \mathbb{R}) : Tf = f\}$ es un subespacio vectorial de dimensión finita cerrado.*

**<u>Demostración:</u>**

Primero demostraremos que $T : B([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow B([a, b], \mathbb{R})$ está bien definida, es decir, que dado $f \in B([a, b], \mathbb{R})$, entonces $Tf \in B([a, b], \mathbb{R})$. Sea $f \neq 0$ y sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in [a, b]$, luego

$$\begin{aligned}
||Tf(x) - Tf(x_0)|| &= \left| \int_a^b k(x, y) f(y) dy - \int_a^b k(x_0, y) f(y) dy \right| \\
\Longrightarrow ||Tf(x) - Tf(x_0)|| &= \left| \int_a^b (k(x, y) f(y) - k(x_0, y) f(y)) dy \right| \\
\Longrightarrow ||Tf(x) - Tf(x_0)|| &= \left| \int_a^b (k(x, y) - k(x_0, y)) f(y) dy \right| \leq \int_a^b |k(x, y) f(y) - k(x_0, y)| f(y) dy
\end{aligned}$$

Como $[a, b]$ es compacto, por el Teorema de Tychonoff (véase [2]) el producto de compactos es compacto, así $[a, b] \times [a, b]$ es compacto y por el Teorema 1.4.6, $Tf$ es uniformemente continua, es decir dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, existe $\delta = \delta(\tilde{\varepsilon})$ tal que, si $||(x, y) - (x_0, y)|| = ||x - x_0|| < \delta$ (todas las normas son equivalentes en espacios de dimensión finita por el Teorema 1.4.13), entonces $||k(x, y) - k(x_0, y)|| < \tilde{\varepsilon}$, escogiendo $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{||f||_\infty}(b - a) > 0$, tenemos que

$$||Tf(x) - Tf(x_0)|| \leq \int_a^b |k(x, y) f(y) - k(x_0, y)| f(y) dy \leq \tilde{\varepsilon} ||f||_\infty (b - a) = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $Tf$ es continua en $x_0$, como este último era arbitrario, concluimos la continuidad de $Tf$. Ahora probaremos que $\{Tf : ||f||_\infty \leq M\}$ es relativamente compacto para la topología de $||\cdot||_\infty$ para todo $M \geq 0$. Si $M = 0$ se tiene que

$$A = \{Tf : ||f||_\infty \leq M\} = \{Tf : ||f||_\infty \leq 0\}.$$

Por el Teorema 1.4.11, es relativamente compacto.
Si $M > 0$, veremos que $\{Tf : ||f||_\infty \leq M\}$ cumple con las condiciones del Teorema 1.4.11.

Probaremos que $A$ es equicontinuo. Sea $x_0 \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$, como $k$ es uniformemente continua, escogemos $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$. Notemos que en tal caso, dada $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ se tiene que

$$|Tf(x) - Tf(x_0)| \leq \int_a^b |k(x,y) - k(x_0,y)||f(y)|dy \leq \tilde{\varepsilon}M(b-a) = \varepsilon.$$

Luego, dado $g \in A$ cualquiera, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (el asociado a la continuidad uniforme de $k$) tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|g(x) - g(x_0)| = |Tg(x) - Tg(x_0)| \leq \varepsilon$. Por lo que $A$ es equicontinuo.

Ahora debemos probar que los conjuntos $\{Tf : ||f||_\infty \leq M\}$ son acotados en $\mathbb{R}$ para toda $x \in [a,b]$. Pero como $f$ es acotado con la norma infinito se tiene que

$$|Tf(x)| = \left|\int_a^b k(x,y)f(y)dy\right| \leq \int_a^b |k(x,y)||f(y)|dy \leq K||f||_\infty(b-a) \leq KM(b-a) \leq \infty.$$

Donde $K \sup_{(x,y)\in[a,b]^2} < \infty$ al ser $k$ continua en un compacto. Luego, por el Teorema 1.4.11, $A$ es relativamente compacto y por tanto compacto. Ahora demostraremos que $V = \{f \in B([a,b],\mathbb{R}) \mid Tf = f\}$ es un espacio vectorial de dimensión finita. Como $V$ es un subespacio vectorial normado, por el Teorema 1.4.20 basta probar que la bola cerrada en $V$ es compacta, en efecto, notemos que $B_V \subset T(B)$ esto sucede ya que, si $f \in B_V$, es decir, $f \in V$, $||f||_\infty < 1$, entonces $Tf = f$ luego, en particular si $f \in T(B) = A_1$ es el conjunto $A_1 = \{Tf : ||f||_\infty \leq 1\}$ pues es la imagen de sí mismo. Y como probamos que $A_1$ es relativamente compacto y por el Teorema 1.4.20, $A_1$ tiene dimensión finita por tanto $V$, es un espacio vectorial de dimensión finita. Luego por la Proposición 1.4.5, $V$ es cerrado. ∎

**Teorema 1.4.13.** ***(Normas equivalentes)***. *Si $X$ es un espacio normado de dimensión $n$, entonces cualesquiera dos normas en $X$ son equivalentes.*

**Demostración:**

Sea $X$ un espacio normado de dimensión finita, así $X$ es isomorfo a $\mathbb{K}^n$. Sean $\|\cdot\|$ cualquier norma en $X$, $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ una base de Hamel para $X$ y sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica en $\mathbb{K}^n$, es decir $e_i$ es el vector que tiene un 1 en el $i$-ésimo lugar y cero en el resto. Si para $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ en $\mathbb{K}^n$ definimos $|(\|x\|)|_n = |(\|\sum_{i=1}^n a_i\xi_i\|)|$, probaremos que $|(\|\cdot\|)|_n$ define una norma en $\mathbb{K}^n$. Tenemos que $|(\|x\|)|_n = |(\|\sum_{i=1}^n a_i\xi_i\|)|$, pero $\|\cdot\|$ es una norma ya definida, por lo que $|(\|\cdot\|)|$ es una norma. Debido a que $|(\|\cdot\|)|_n$ define una norma en $\mathbb{K}^n$ tenemos que es suficiente probar el teorema para $X = \mathbb{K}^n$. Consideremos entonces a $\mathbb{K}^n$ con la norma usual $\|\cdot\|$ y sea $|(\|\cdot\|)|$

cualquier otra norma en $\mathbb{K}^n$. Veremos por inducción sobre $m \leq n$ que existe $M_m \in \mathbb{R}$ tal que si $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_m \leq n$ y $x \in \mathbb{K}^n$, $x = \sum_{i=1}^m a_i e_i$, entonces

$$\frac{1}{M_m}\|x\| \leq |(\|x\|)| \leq M_m\|x\|. \tag{1.19}$$

Para $m = 1$ esto es inmediato, tomando como,

$$M_1 = \text{máx}\{C_i,\ 1/C_i,\ i = 1, 2, \ldots, n : |(\|e_i\|)| = C_i\}.$$

Ahora sea $J = \{x = (j_1, \ldots, j_{m+1}) :\ j_i \in \mathbb{N}\ y\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{m+1} \leq n\}$. Supongamos que es cierta la Ecuación (1.19) para $m < n$. Esto implica que para cualquier $(j_1, \ldots, j_{m+1})$, el espacio generado por $\{e_i\}_{i=1}^m$ es cerrado en la norma $|(\|\cdot\|)|$, porque es cerrado en la norma $\|\cdot\|$, esto por Teorema 1.4.5. Sea ahora $Y^{(x)} = \{\sum_{i=1}^{m+1} a_i e_i : a_i \in \mathbb{K}\} \subset (\mathbb{K}^n, |(\|\cdot\|)|)$. Consideremos para $r = 1, \ldots, m+1$ los funcionales $P_{j_r}^{(x)}\colon Y^{(X)} \longleftrightarrow \mathbb{K}$ dadas por

$$P_{j_r}^{(x)} \sum_{i=1}^{m+1} a_i e_{j_i} = a_r.$$

Luego tenemos que $\ker P_{j_r}^{(x)}$ es el subespacio de $Y^{(X)}$ generado por $\{e_{j_i}\}_{i\neq r}$, que, como ya mencionamos es cerrado. Aplicando la Proposición 1.2.7, esto implica que $P_{j_r}^{(x)}$ es continua para $r = 1, 2, \ldots, m+1$. Entonces, si $x = \sum_{i=1}^n a_i e_{j_i}$ tenemos que

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{m+1}(P_{j_r}^{(x)} x)e_{j_i}\| \leq \sum_{i=1}^{m+1} \|P_{j_r}^{(x)}\| |(\|x\|)| \leq K_1|(\|x\|)|.$$

Donde $K_1 = \text{máx}\{\sum_{i=1}^{m+1} \|P_{j_r}^{(x)}\| :\ x = (j_1, \ldots, j_{m+1}) \in J\}$. Este número existe, ya que $J$ es un conjunto finito. Por otro lado tenemos,

$$|(\|x\|)| \leq \sum_{i=1}^{m+1} |a_i||(\|e_{j_i}\|)| \leq \left(\sum_{i=1}^{m+1} |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{m+1} |(\|e_{j_i}\|)|^2\right)^{1/2}$$

$$\Longrightarrow |(\|x\|)| \leq \left(\sum_{i=1}^{m+1} |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |(\|e_{j_i}\|)|^2\right)^{1/2} = K_2|(\|x\|)|.$$

Donde $K_2 = (\sum_{i=1}^n |(\|e_{j_i}\|)|^2)^{1/2}$, de manera que si $M_{m+1} = \text{máx}\{K_1, K_2\}$.

$$\frac{1}{M_{m+1}}\|x\| \leq |(\|x\|)| \leq M_{m+1}\|x\|.$$

Y esto prueba el teorema. ■

**Ejemplo 1.4.14.** *El espacio $\mathbb{R}^n$, es un espacio de dimensión finita $n$ en el cual todas sus normas son equivalentes.*

**Demostración:**
Sabemos que $\mathbb{R}^n$ es de dimensión $n$ dado que una base de $\mathbb{R}^n$ es

$$A = \{(1, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 1)\},$$

cuyo número de elementos es $n$. Ahora por el Teorema 1.4.13, tenemos que sus normas son equivalentes. Eso ocurre porque cada norma $||\cdot||$ sobre $\mathbb{R}^n$ es equivalente a la norma $||\cdot||_1$, donde $||(x_1, \cdots, x_n)|| = |x_1| + \cdots + |x_n|$. ■

**Corolario 1.4.15.** *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio normado de dimensión n y sea $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ una base de Hamel de $X$. Entonces, si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$, el operador $T : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dado por*

$$T\sum_{i=1}^n a_i\xi_i = \sum_{i=1}^n a_ie_i \text{ es un isomorfismo.}$$

**Demostración:**
Sabemos que $T$ está bien definido por la independencia lineal de la base de Hamel, ahora demostremos que $T$ es biyectivo. Probaremos primero la inyectividad.
Sean $x$ e $y$ elementos de la base de Hamel de $X$ tal que $x \neq y$, entonces $T_x \neq T_y$. Denotemos la base de Hamel por $(B)$ y $(C)$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

$$x,\ y \in B;\, x \neq y \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^n a_i\xi_i,\ y = \sum_{i=1}^n b_i\xi_i;\ \xi_i \in B.$$

Y además $a_i, b_i \in \mathbb{K}$, aplicando $T$ a $x$ e $y$ obtenemos que

$$Tx = T\sum_{i=1}^n a_i\xi_i = \sum_{i=1}^n T(a_i\xi_i) = \sum_{i=1}^n a_iT\xi_i = \sum_{i=1}^n a_ie_i.$$

Y que

$$Ty = T\sum_{i=1}^n b_i\xi_i = \sum_{i=1}^n T(b_i\xi_i) = \sum_{i=1}^n b_iT\xi_i = \sum_{i=1}^n b_ie_i.$$

Entonces $Tx \neq Ty$. Por tanto, $T$ es inyectiva. Ahora demostremos que es sobreyectiva. Como para cada $y \in \mathbb{K}^n$, existe un $x \in B$ para el cual $y = Tx$ ya que cada $x$ es una combinación lineal de elementos de la base de Hamel de $X$ cuya representación es única, tenemos que $T$ es sobreyectiva. Dado lo anterior concluimos que, $T$ es biyectivo.
Probemos que $T$ es un homomorfismo, es decir se cumple que $T(x + \beta y) = Tx + \beta Ty$.

$$T(x+\beta y) = \sum_{i=1}^n (a_ie_i + \beta b_ie_i) = \sum_{i=1}^n a_iei_i + \sum_{i=1}^n \beta b_ie_i = T\left(\sum_{i=1}^n a_i\xi_i + \beta\sum_{i=1}^n b_i\xi_i\right)$$

$$\Longrightarrow T(x+\beta y) = T\sum_{i=1}^n a_i\xi_i + T\beta\sum_{i=1}^n b_i\xi_i = T\sum_{i=1}^n a_i\xi_i + \beta T\sum_{i=1}^n b_i\xi_i = Tx + \beta Ty.$$

Como $T$ es biyectivo y es un homomorfismo, concluimos que T es un isomorfismo. ■

**Ejemplo 1.4.16.** *Sea la función lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (2x - y, y + z, x - z)$, demuestre que es un isomorfismo.*

**Demostración:**
La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Ahora buscaremos una base de Hamel para la imagen. Tenemos que

$$\begin{aligned} &f(x, y, z) = (2x - y, y + z, x - z) \\ \Longrightarrow\ &f(x, y, z) = (2x, 0, x) + (-y, y, 0) + (0, z, -z) \\ \Longrightarrow\ &f(x, y, z) = x(2, 0, 1) + y(-1, 1, 0) + z(0, 1, -1) \end{aligned}$$

Por lo que la base de Hamel de $f(\mathbb{R}^3)$ es $B' = \{(2, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$. Además,

$$\begin{aligned} &f(1, 0, 0) = (2(1) - 0, 0 + 0, 1 - 0) = (2, 0, 1) \\ \Longrightarrow &f(0, 1, 0) = (2(0) - 1, 1 + 0, 0 - 0) = (-1, 1, 0) \\ \Longrightarrow &f(0, 0, 1) = (2(0) - 0, 0 + 1, 0 - 1) = (0, 1, -1) \end{aligned}$$

Por lo que $T(B) = B'$, por el Teorema 1.4.15 tenemos que, $T$ es un isomorfismo. ■

**Corolario 1.4.17.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados con $X$ de dimensión finita. Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal, entonces es continuo.*

**Demostración:**
Supongamos que $\dim X = n$ y sea $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ una base de Hamel de $X$. Como $X$ es de dimensión finita por Teorema 1.4.13, todas las normas en $X$ son equivalentes, es suficiente probar que $T$ es continuo. Si dotamos a $X$ con la norma definida para $x = \sum_{k=1}^n a_k\xi_k \in X$ por $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |a_k|$. Primero demostremos que la norma definida anteriormente realmente es norma, para ello solamente demostraremos la propiedad del escalar y la desigualdad del triángulo, dado que las primeras propiedades de norma son inmediatas, es decir, probaremos que, $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha|\|x\|_\infty$ y $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Probemos que $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha|\|x\|_\infty$, tenemos que

$$\|\alpha x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |\alpha a_k| = \max_{1\leq k\leq n} |\alpha||a_k| = |\alpha| \max_{1\leq k\leq n} |a_k| = |\alpha|\|x\|.$$

Por lo que $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha|\|x\|_\infty$.

Ahora probemos que, $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Sea $x = \sum_{k=1}^n a_k\xi_k$, $y = \sum_{k=1}^n b_k\xi_k$, se tiene que

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |a_k + b_k| \leq \max_{1\leq k\leq n} |a_k| + \max_{1\leq k\leq n} |b_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Por lo que $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, así $\|\cdot\|_\infty$ define una norma.

Probaremos que $T$ es acotado, para demostrar su continuidad, entonces

$$\|Tx\| = \left\|T\sum_{k=1}^n a_kT\xi_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^n Ta_kT\xi_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^n a_ke_k\right\| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|\|e_k\| \leq \max_{1\leq k\leq n} |a_k| \sum_{k=1}^n \|e_k\|.$$

Por lo que,

$$\|Tx\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|e_k\| \max_{1\leq k\leq n} |a_k| = C\|x\|_\infty;\ C = \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|.$$

Por lo que $T$ es acotado y por Teorema 1.2.2, $T$ es continuo. ■

El siguiente es un ejemplo del Corolario 1.4.17.

**Ejemplo 1.4.18.** *Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) := (x + 2y, 3x + 4y)$, donde $||\cdot||_\infty$. (véase Definición 1.1.34), demuestre que $T$ es un operador lineal y continuo.*

**Demostración:**

Es fácil observar que $\mathbb{R}^2$ es de dimensión finita dado que su base canónica es $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ tiene cardinalidad 2, asi $\mathbb{R}^2$ es de dimensión 2, por lo que $T$ es un operador entre dos espacios de dimensión finita.
Ahora probaremos que $T$ es lineal, Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) = T(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)\\
\Longrightarrow &T(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta x_2 + 2(\alpha y_1 + \beta y_2), 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 4(\alpha y_1 + \beta y_2))\\
\Longrightarrow &T(\alpha x + \beta y) = ((\alpha x_1 + 2\alpha y_1) + (\beta x_2 + 2\beta y_2), (3\alpha x_1 + 4\alpha y_1) + (3\beta x_2 + 4\beta y_2))\\
\Longrightarrow &T(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + 2\alpha y_1, 3\alpha x_1 + 4\alpha y_1) + (\beta x_2 + 2\beta y_2, 3\beta x_2 + 4\beta y_2)\\
\Longrightarrow &T(\alpha x + \beta y) = \alpha(x_1 + 2y_1, 3x_1 + 4y_1) + \beta(x_2 + 2y_2, 3x_2 + 4y_2)\\
\Longrightarrow &T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x_1, y_1) + \beta T(x_2, y_2) = \alpha T(x) + \beta T(y)
\end{aligned}$$

Por lo que, $T$ es lineal. Veamos que $T$ es continuo. Para ello nos apoyaremos del Teorema 1.2.2 $(c) \longrightarrow (b)$. Es decir, demostraremos que $T$ es acotado. Por otra parte, para cualquier $x = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
&\|Tx\|_\infty = ||T(x_1, y_1)||_\infty = ||(x_1 + 2y_1, 3x_1 + 4y_1)||_\infty = \max\{|x_1 + 2y_1|, |3x_1 + 4y_1|\}\\
\Longrightarrow &\|Tx\| \leq |x_1 + 2y_1| + |3x_1 + 4y_1| \leq |x_1| + 2|y_1| + 3|x_1| + 4|y_1| = 4|x_1| + 6|y_1|\\
\Longrightarrow &\|Tx\| \leq 6|x_1| + 6|y_1| = 6(|x_1| + |y_1|) = 6||x||_1
\end{aligned}$$

Luego $||T|| \leq 6$. Por otra parte, $||(0, 1)||_1 = |0| + |1| = 1$, luego

$$||T|| \geq ||T(0, 1)||_1 = ||(0 + 2(1), 3(0) + 4(1))||_1 = ||(2, 4)||_1 = |2| + |4| = 6$$

Por lo que $||T|| = 6$, y por el Teorema 1.2.2 $(c) \longrightarrow (b)$, se tiene que $T$ es continuo. ■

El Teorema 1.4.13 también nos permite probar que los subespacios de dimensión finita son cerrados. Recordemos que si $Y \subset X$, entonces el $spanY$ es el subespacio lineal generado por $Y$ y denotaremos por $\overline{spanY}$ la cerradura del $spanY$.

**Ejemplo 1.4.19.** *Las esferas de dimensión finita en $\mathbb{R}^n$ son cerradas.*

**Demostración:**

Podemos observar que

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$. Esto se puede observar en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué es una esfera en $\mathbb{R}^2$?, es el conjunto de puntos a la misma distancia de un centro, es decir, una circunferencia. Así una circunferencia es una esfera en un espacio de dimensión 2, tiene dimensión 1 ya que para ubicarse en una circunferencia es preciso un solo número. Por el teorema queda inmediata la cerradura de $S^{n-1}$, pero, ¿será cierto?. Probaremos que $S^{n-1}$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$. Por cuestiones prácticas denotaremos a la esfera de centro $x_0$ y radio $r$ por $S(\tilde{x_0}, r)$. Sea $\tilde{x_0} \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$. Mostraremos que la esfera $S(\tilde{x_0}, r)$ es un conjunto cerrado demostrando que su complemento $\mathbb{R}^n - S(\tilde{x_0}, r)$ es un conjunto abierto. Sea $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n - S(\tilde{x_0}, r)$, debemos mostrar que existe una bola $B(\tilde{x}, R)$ contenida en $\mathbb{R}^n - S(\tilde{x_0}, r)$. Como $\tilde{x} \notin S(\tilde{x_0}, r)$, entonces $||\tilde{x} - \tilde{x_0}|| \neq r$ tenemos dos casos $||\tilde{x} - \tilde{x_0}|| < r$ ó $||\tilde{x} - \tilde{x_0}|| > r$.

Para el primer caso tenemos que $\tilde{x} \in B(\tilde{x_0}, r)$, como esta bola es un conjunto abierto, hay una bola abierta con centro en $\tilde{x}$ denótese $B(\tilde{x}, R)$, contenida en $B(\tilde{x_0}, r)$. Así que para todo $\tilde{z} \in B(\tilde{x_0}, R)$ satisface $||\tilde{z} - \tilde{x}|| < r$. Luego, $\tilde{z}$ no puede ser un elemento de la esfera $S(\tilde{x_0}, r)$, es decir, $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n - S(\tilde{x_0}, r)$.

Para el segundo caso la desigualdad significa que $\tilde{x}$ está en el complemento de la bola cerrada $\overline{B(\tilde{x_0}, r)}$ y como esta bola es un conjunto cerrado, entonces su complemento es abierto, por tanto existe una bola abierta $B(\tilde{x}, R)$ contenida en $\mathbb{R}^n - \overline{B(\tilde{x_0}, r)}$. Los elementos $\tilde{z}$ de $B(\tilde{x}, R)$ no están en la bola cerrada $\overline{B(\tilde{x_0}, r)}$, es decir, todo elemento $\tilde{z}$ de la bola $B(\tilde{x}, R)$ satisface que $||\tilde{z} - \tilde{x}|| > r$. Esto quiere decir que $B(\tilde{x}, R) \subset \mathbb{R}^n - S(\tilde{x_0}, r)$. Por lo que $\mathbb{R}^n - S(\tilde{x_0}, r)$ es un conjunto abierto. Por tanto, $S(\tilde{x_0}, r)$ es un conjunto cerrado. ■

Del Corolario 1.4.15, es inmediato que la bola unitaria cerrada en un espacio de dimensión finita es compacta, ya que esto es cierto en $\mathbb{K}^n$. Veremos ahora que esa propiedad caracteriza a los espacios normados de dimensión finita. De aquí en adelante

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \quad \text{y} \quad S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\},$$

denotarán a la bola cerrada unitaria y a la esfera unitaria en $X$ respectivamente.

**Teorema 1.4.20.** *Sea $X$ un espacio normado. Si la bola $B_X$ es compacta, entonces $X$ tiene dimensión finita.*

**Demostración:**
Supongamos que $B_X$ es compacta. Como $B_X \subset \cup_{x \in B_X} B_{\frac{1}{2}}(x)$, existen $x_1, \ldots, x_m \in B_X$ tales que $B_X \subset \cup_{i=1}^m B_{\frac{1}{2}}(x_i)$. Sea $Y$ el espacio generado por $x_i, \ldots, x_m$. Entonces la dimensión de $Y$ es menor o igual a $m$ y, por la Proposición 1.4.5, $Y$ es un subespacio cerrado de $X$. Además $B_X \subset Y + B_{\frac{1}{2}}(0)$, lo que implica,

$$B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \frac{1}{2} B_X \subset \frac{1}{2} Y + \frac{1}{2} B_{\frac{1}{2}}(0) = Y + B_{\frac{1}{4}}(0).$$

Y por lo tanto,

$$B_X \subset Y + B_{\frac{1}{2}}(0) \subset Y + Y + B_{\frac{1}{4}}(0) = Y + B_{\frac{1}{4}}(0).$$

Continuando de esa manera obtenemos que

$$B_X \subset \cap_{n=1}^{\infty} \left( Y + B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(0) \right) = Y.$$

Como $Y$ es cerrado, sabemos que $Y = \overline{Y}$, además tenemos

$$B_X \subset \cap_{n=1}^{\infty} \left( Y + B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(0) \right) = Y + \cap_{n=1}^{\infty} \left( B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(0) \right) = Y = \overline{Y}.$$

De donde $kB_X \subset Y$ para toda $k = 1, 2, \ldots$ y entonces $X = Y$. Esto demuestra que $X$ tiene dimensión menor o igual que $m$. ■

**Ejemplo 1.4.21.** $\mathbb{R}^2$ *con la norma euclídea es un espacio de dimensión finita.*

**Demostración:**
Sea $X = \mathbb{R}^2$, para demostrar que $X$ es de dimensión finita haremos uso del Teorema 1.4.20, es decir demostraremos que la bola cerrada $B_X$ es compacta. Sean $B_X = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ y $\{x_n\} \in B_X$, probaremos que es sucesionalmente compacto. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\{x_n\} \subset B_X \Longrightarrow \|x_n\| \leq 1 \Longrightarrow \{\|x_n\|\} \subset \mathbb{R}.$$

Por lo que $\{x_n\}$ es acotado así, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^2$ tiene una subsucesión convergente, por lo que existe $\{x_{n_k}\}$ tal que $\{\|x_{n_k}\|\}$ converge y por Definición 1.1.22, $B_X$ es sucesionalmente compacto, entonces $B_X$ es compacto y por el Teorema 1.4.20 $X$ es de dimensión finita. Y en efecto es de dimensión finita ya que una base de Hamel para $\mathbb{R}^2$ es el conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ que es de cardinalidad 2 por lo que la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2. ■

**Lema 1.4.22.** *Los subespacios de $X$ cuya codimensión es 1, son aquellos subespacios $Y$ para los que existe $z \in X - Y$ tal que para toda $x \in X$, existen $y \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ únicos tales que $x = y + \lambda z$. En este caso escribiremos $X = Y \bigoplus_a Z$ donde $Z = [z]$.*

**Demostración:**
Supongamos que $x$ se puede representar de dos maneras diferentes, es decir, $x = y + \lambda z$ además $x = w + \xi z$, entonces

$$\begin{aligned} &y + \lambda z = w + \xi z \Longrightarrow y + \lambda z - w - \xi z = 0 \Longrightarrow (y - w) + (\lambda - \xi)z = 0 \\ \Longrightarrow &y - w = 0,\ \lambda - \xi = 0 \Longrightarrow y = w,\ \lambda = \xi. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $y - w \neq 0$,

$$\Longrightarrow y - w = (\xi - \lambda)z \Longrightarrow y - w = z.$$

Si tomamos a $\beta = 1$, tenemos que $y = w + \beta z$, entonces $y \in X$, pero esto es una contradicción. Por lo cual, concluimos que, la representación de cada $x$ en $X$ es única. ■

La siguiente proposición nos proporciona una correspondencia entre los subespacios de codimensión 1 de un espacio vectorial y sus funcionales no nulos.

**Proposición 1.4.23.** *Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. $Y$ es un subespacio de codimensión 1 (Lema 1.4.22) de $X$ si y sólo si, existe una función lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{K}, f \neq 0$ con $\ker f = Y$.*

**Demostración:**
" $\Longrightarrow$"
Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal con $f \neq 0,$ y $x_0 \in X$ con $f(x_0) \neq 0$. Sea $F$ el subespacio vectorial de $X$ generado por $x_0$ y sea $Y = \ker f$. Probaremos que $X = F \bigoplus_a Y$. Como $Y$ es un subespacio vectorial de $X$, $0 \in Y$ y además $0 \in \ker f$, entonces $Y \cap F = \{0\}$ y dado $x \in X$, tenemos que

$$x = \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 + \left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right).$$

Donde $\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in X$ y $x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in Y$.

"$\Longleftarrow$"
Sean $Y$ un subespacio de $X$ de codimensión 1 (Lema 1.4.22) y $F$ un subespacio de dimensión 1 de $X$ tal que $X = F \bigoplus_a Y$. Como $F$ tiene dimensión 1, existe $x_0$ que lo genera y entonces todo elemento en $X$ se puede representar de la forma $y + \lambda x_0;\ y \in Y$. Probemos que su representación es única. Sea $x$ un elemento de $X$ supongamos que $x = y + \lambda x_0$ y que $x = w + \xi x_0$, entonces

$$\begin{aligned} y + \lambda x_0 = w + \xi x_0 &\Longrightarrow y + \lambda x_0 - w - \xi x_0 = 0 \Longrightarrow (y - w) + (\lambda - \xi)x_0 = 0 \\ &\Longrightarrow y = w,\ \lambda = \xi. \end{aligned}$$

Por tanto, la representación de $x$ es única. Definimos $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ por $f(y + \lambda x_0) = \lambda$, probaremos que $f$ es lineal. Sea $x, z \in X$, tenemos que

$$f(x) = f(a + \lambda x_0) = \lambda, f(z) = f(b + \beta x_0) = \beta;\ a, b \in Y.$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(x + mz) &= f((a + \lambda x_0) + m(b + \beta x_0)) = f((a + b) + (\lambda + m\beta)x_0) = \lambda + m\beta \\ &\Longrightarrow f(x + mz) = f(x) + mf(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f$ es lineal. Probemos que el $\ker f = Y$ por doble inclusión.
Sea $x \in \ker f$.

$$x \in \ker f \Longrightarrow f(x) = 0 \Longrightarrow x = a + 0x_0,\ a \in Y \Longrightarrow x \in Y \Longrightarrow \ker f \subset Y.$$

Sea $x \in Y$.

$$x \in Y \Longrightarrow f(x) = f(x + 0z) \Longrightarrow f(x) = 0 \Longrightarrow x \in \ker f \Longrightarrow Y \subset \ker f.$$

Por tanto, $\ker f = Y$. ■

**Lema 1.4.24.** *Sean $Y$ y $W$ subespacios de un espacio normado $X$. Si $Y$ es de codimensión 1 (Lema 1.4.22) en $X$ y si $Y \subset W$, entonces $W = Y$ ó $W = X$.*

**Demostración:**
Supongamos que $X = Y \bigoplus_a span\{x_0\}$ con $x_0 \in X$ tal que $W \neq Y$. Sea $w \in W - Y$.

$$w \in W - Y \Longrightarrow w = y + \mu x_0; y \in Y, \lambda \in \mathbb{K}, \mu \neq 0.$$

Si $x \in X, x = z + \lambda x_0; z \in Y, \lambda \in \mathbb{K}$. Entonces tenemos que

$$x = z - \frac{\lambda}{\mu}y + \frac{\lambda}{\mu}y + \lambda x_0 \Longrightarrow x = z - \frac{\lambda}{\mu}y + \frac{\lambda}{\mu}y + \frac{\lambda}{\mu}\mu x_0 \Longrightarrow x = z - \frac{\lambda}{\mu}y + \frac{\lambda}{\mu}(y + \mu x_0)$$
$$\Longrightarrow x = z - \frac{\lambda}{\mu}y + \frac{\lambda}{\mu}w.$$

Entonces tenemos que $X = Y \bigoplus_a span\{w\} \subset W \subset X$. Por tanto, $W = Y$ ó $W = X$. ■

**Lema 1.4.25.** *Sean $Y$ y $W$ dos subespacios de codimensión 1 (Lema 1.4.22) de un espacio normado $X$. Entonces $Y = W$ o bien, $Y \cap W$ tiene codimensión 2 en $X$.*

**Demostración:**
Si $Y \subset W$ le aplicamos el lema anterior, obtenemos que $Y = W$. Demostremos que $Y \cap W$ tiene codimensión 2. Supongamos que $Y \neq W$, entonces por el lema anterior ni $Y$ está contenido en $W$, ni $W$ en $Y$. Sean $w_0 \in W - Y$ y $y_0 \in Y - W$. Ahora, como en el lema anterior obtenemos que, $X = Y \bigoplus_a span\{w_0\} = W \bigoplus_a span\{y_0\}$. Si $x \in X$, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $y \in Y$ y $w \in W$ tales que $x = y + \lambda w_0 = w + \mu y_0$. Por lo tanto, $y - \mu y_0 = w - \lambda w_0 \in Y \cup W$ y $x = (y - \mu y_0) + \mu y_0 + \lambda w_0$, es decir, $X = (Y \cap W) \bigoplus_a span\{y_0\} \bigoplus_a \{w_0\}$. Por Lema 1.4.22, $Y \cap W$ tiene codimensión 2. ■

**Corolario 1.4.26.** *Sea $X$ un espacio normado y $Y \subset X$ un subespacio de codimensión 1 (Lema 1.4.22), entonces $Y$ es cerrado o denso en $X$.*

**Demostración:**
Supongamos que $X = Y \bigoplus_a span\{x_0\}$ con $x_0 \in X$ tal que $\overline{Y} \neq Y$. Sea $w \in \overline{Y} - Y \Longrightarrow w = y + \mu x_0;\ y \in Y, \mu \in \mathbb{K}, \mu \neq 0$. Si $x \in X,\ x = z + \lambda x_0;\ z \in Y,\ \lambda \in \mathbb{K}$. Así,

$$x = z - \frac{\lambda}{\mu}y + \frac{\lambda}{\mu}y + \lambda x_0 \Longrightarrow x = z - \frac{\lambda}{\mu}y + \frac{\lambda}{\mu}y + \frac{\lambda}{\mu}\mu x_0 \Longrightarrow x = z - \frac{\lambda}{\mu}y + \frac{\lambda}{\mu}(y + \mu x_0)$$
$$\Longrightarrow x = z - \frac{\lambda}{\mu}y + \frac{\lambda}{\mu}w.$$

Entonces tenemos que $X = Y \bigoplus_a span\{w\} \subset \overline{Y} \subset X$, pero por Lema 1.4.24, $\overline{Y} = Y$ ó $\overline{Y} = X$, es decir $Y$ es cerrado o denso en $X$. ■

**Lema 1.4.27.** *Sea $X$ un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y $Y$ un subespacio cerrado de $X$ de codimensión 1 (Lema 1.4.22), entonces $X/Y$ es isomorfo a $\mathbb{K}$.*

**Demostración:**
Supongamos que $X = Y \bigoplus_a span\{z_0\}$ y que $q$ es la función cociente de $X$ sobre $X/Y$, es decir,

$$\begin{aligned} q : & X \longrightarrow X/Y \\ & x \rightsquigarrow \tilde{x} = y + \lambda z_0. \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} f :& X/Y \longrightarrow \mathbb{K} \\ & x \rightsquigarrow f(q(x)) = \lambda. \end{aligned}$$

Si $x = y+\lambda z_0$. Podemos observar que, $q, f$ son lineales, entonces por definición de composición de funciones lineales, $f \circ q$ es lineal, además sabemos que ambas son biyectivas, y $f^{-1}$ es lineal, por lo que, $f$ es un isomorfismo algebraico, por Teorema 1.4.13, $X/Y$ es isomorfo a $\mathbb{K}$. ■

# 1.5. TEOREMAS DE HAHN-BANACH

Si $E$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $F$ un subespacio vectorial de $E$ y $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función lineal, siempre podemos definir una función lineal $G : E \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $G(x) = g(x)$ para todo $x \in F$. Esto se puede hacer tomando una base de Hamel en $F$, extendiéndola a una base de Hamel de $E$ y definiendo $G$ como cero en los elementos de la base de Hamel de $E$ que no están en $F$. Cuando $E$ es un espacio normado de dimensión infinita y $g$ es lineal y continua, no es trivial que se pueda obtener una extensión $G$ que también sea continua. Hans Hahn y Stefan Banach probaron independientemente en 1927 y 1929 que existen extensiones continuas. Hay en la actualidad varias versiones de este resultado fundamental en las matemáticas, todas ellas conocidas como Teorema de Hahn-Banach.

**Definición 1.5.1.** *Sea $E$ un espacio normado sobre $\mathbb{C}$. Diremos que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}-$lineal si $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$, para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y para toda $x, y \in E$. Además, diremos que $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, es un funcional $\mathbb{C}-$lineal si $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $u(x) = Ref(x)$, es $\mathbb{R}$-lineal y $f(x) = u(x) - iu(ix)$, para toda $x \in E$.*

**Ejemplo 1.5.2.** *Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$-lineal, entonces $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $u(x) = Ref(x)$, es $\mathbb{R}$-lineal.*

**Solución:**

Para que $u$ sea $\mathbb{R}$-lineal debe satisfacer que $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y para toda $x, y \in E$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in E$, tenemos que

$$\begin{aligned} & u(\lambda x + y) = Ref(\lambda x + y) = Ref(\lambda x) + Ref(y) = \lambda Ref(x) + Ref(y) = u(\lambda x + y) \\ \Longrightarrow & u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y) \end{aligned}$$

Por lo que $u$ es $\mathbb{R}$-lineal. ■

**Definición 1.5.3.** ***(Extensión lineal)****. Si $f$ es una función definida en un conjunto $Z$ de un espacio normado $X$ y $\tilde{f}$ es una función definida en $X$, diremos que $\tilde{f}$ es una extensión de $f$ si $\tilde{f}(x) = f(x)$ para toda $x \in Z$.*

**Ejemplo 1.5.4.** *Sea $Z \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio representado por $\xi_2 = 0$ y sea $f \in Z$ definido por $f(x) = \frac{\xi_1 - \xi_3}{2}$. Encuentre una extensión lineal $\tilde{f}$ de $f$ a $\mathbb{R}^3$ tal que $\tilde{f}(x_0) = k$ (una constante dada), donde $x_0 = (1, 1, 1)$.*

__**Solución:**__
Sean $x_1 = (2,0,3)$, $x_2 = (5,0,1)$ elementos de $Z$. Queremos encontrar $\alpha, \beta, \theta$ tal que $\tilde{f}(x) = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \theta\xi_3$. Como $x_1$, $x_2 \in Z$ se tiene que

$$f(x_1) = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2} \text{ y que } f(x_2) = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Pero $x_0 \notin Z$, por lo que:

$$\tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(1,1,1) = \alpha(1) + \beta(1) + \theta(1) = k$$

De donde

$$\alpha + \beta + \theta = k \tag{1.20}$$

Luego tenemos que

$$\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(2,0,3) = \alpha(2) + \beta(0) + \theta(3) = k$$

y que

$$\tilde{f}(x_2) = \tilde{f}(5,0,1) = \alpha(5) + \beta(0) + \theta(1) = k$$

Pero $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in Z$ y como $x_1$, $x_2 \in Z$ se tiene las siguientes ecuaciones

$$2\alpha + 3\theta = -\frac{1}{2} \tag{1.21}$$

$$5\alpha + \theta = 2 \tag{1.22}$$

Resolvemos el sistema formado por las Ecuaciones (1.20), (1.21) y (1.22). De la Ecuación (1.22) se tiene que

$$5\alpha + \theta = 2 \Longrightarrow \theta = 2 - 5\alpha$$

Sustituimos $\theta$ en la Ecuación (1.21) y tenemos que

$$2\alpha + 3\theta = -\frac{1}{2} \Longrightarrow 2\alpha + 3(2-5\alpha) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow 2\alpha + 6 - 15\alpha = -\frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow -2\alpha + 15\alpha = \frac{1}{2} + 6 \Longrightarrow 13\alpha = \frac{13}{2} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Por lo que $\theta = 2 - 5\alpha = 2 - 5\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, así: $\theta = -\frac{1}{2}$. Por último, sustituimos $\alpha$ y $\theta$ para encontrar el valor de $\beta$ en la Ecuación (1.20), tenemos que

$$\alpha + \beta + \theta = k \Longrightarrow \frac{1}{2} + \beta - \frac{1}{2} = k \Longrightarrow \beta = k$$

Por lo que $\tilde{f} = \frac{1}{2}\xi_1 + k\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_3$ es una extensión lineal de $f$ a $\mathbb{R}^3$ que cumple que $\tilde{f}(x_0) = k$. ■

El siguiente teorema que veremos nos permite extender funcionales lineales acotados por una función sublineal en espacios vectoriales reales de manera que continúen siendo acotadas; más adelante probaremos que también es cierto en el caso complejo.

**Teorema 1.5.5.** ***(Hahn-Banach real)***. *Sean $E$ un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, $\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función sublineal, $F$ un subespacio de $E$ y $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ una función lineal tal que $f(x) \leq \rho(x)$ para toda $x \in F$. Entonces existe una extensión lineal $\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de $f$ con $\tilde{f}(x) \leq \rho(x)$ para toda $x \in E$.*

**Demostración:**
Sea $x_0 \in E - F$. Primero probaremos que podemos extender $f$ a $F \bigoplus_a span\{x_0\}$, tal que la extensión $g$ satisface que $g(x) \leq \rho(x)$, $\forall\ x \in F \bigoplus_a span\{x_0\}$. Sean $y, z \in F$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} &f(y) + f(z) = f(y+z) \leq \rho(y+z) = \rho(y + x_0 - x_0 + z) = \rho((y+x_0) + (z - x_0)) \\ \Longrightarrow &f(y) + f(z) \leq \rho(y + x_0) + \rho(z - x_0) \end{aligned}$$

De donde $f(z) - \rho(z - x_0) \leq \rho(y + x_0) - f(y)$ y por ende, $\sup\{f(z) - \rho(z - x_0) : z \in F\} \leq \inf\{\rho(y + x_0) - f(y) : y \in F\}$. Sea $k \in \mathbb{R}$ tal que,

$$sup\{f(z) - \rho(z - x_0) : z \in F\} \leq k \leq \text{ínf}\{\rho(y + x_0) - f(y) : y \in F\}. \tag{1.23}$$

Definamos $g : F \bigoplus_a span\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda k$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y toda $y \in F$. Vemos que $g$ es una extensión lineal de $f$. Probaremos que $g(x) \leq \rho(x)$ para toda $x \in F \bigoplus_a span\{x_0\}$, para ello probaremos lo siguiente $f(y) + \lambda k \leq \rho(y + \lambda x_0)$ para toda $\lambda \in \mathbb{K}$ y $y \in F$, si y sólo si $k \leq \rho(y + x_0) - f(y)$ y $f(z) - \rho(z - x_0) \leq k$ para toda $y, z \in F$.

"$\Longrightarrow$"
Probaremos que si $f(y) + \lambda k \leq \rho(y + \lambda x_0)$ para toda $\lambda \in \mathbb{K}$ y $y \in F$, entonces $k \leq \rho(y + x_0) - f(y)$ y $f(z) - \rho(z - x_0) \leq k$ para toda $y, z \in F$.
Si $\lambda = 1$ tenemos

$$f(y) + \lambda k \leq \rho(y + \lambda x_0) \Longrightarrow f(y) + k \leq \rho(y + x_0) \Longrightarrow k \leq \rho(y + x_0) - f(y).$$

Si $\lambda = -1$ tenemos

$$f(z) + \lambda k \leq \rho(z + \lambda x_0) \Longrightarrow f(z) - k \leq \rho(z - x_0) \Longrightarrow f(z) - \rho(z - x_0) \leq k.$$

"$\Longleftarrow$"
Probaremos que si $f(z) - \rho(z - x_0) \leq k$ ó $k \leq \rho(y + x_0) - f(y)$, entonces $f(y) + \lambda \leq \rho(y + \lambda x_0)$.
Si $z = \frac{1}{\lambda} y$ y $\lambda < 0$ tenemos

$$\begin{aligned} f(z) - \rho(z - x_0) \leq k \Longrightarrow &f\left(\frac{1}{\lambda} y\right) - \rho\left(\frac{1}{\lambda} y - x_0\right) \leq k \Longrightarrow \frac{1}{\lambda} f(y) - \frac{1}{\lambda} \rho(y + \lambda x_0) \leq k \\ &\Longrightarrow - f(y) + \rho(y + \lambda x_0) \geq \lambda k \Longrightarrow \rho(y + \lambda x_0) \geq \lambda k + f(y). \end{aligned}$$

Si $z = \frac{1}{\lambda} y$ y $\lambda > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} k \leq \rho(z + x_0) - f(z) \Longrightarrow &k \leq \rho\left(\frac{1}{\lambda} y + x_0\right) - f\left(\frac{1}{\lambda} y\right) \Longrightarrow k \leq \frac{1}{\lambda} \rho(y + \lambda x_0) - \frac{1}{\lambda} f(y) \\ \Longrightarrow &\lambda k \leq \rho(y + \lambda x_0) - f(y) \Longrightarrow f(y) + \lambda k \leq \rho(y + \lambda x_0). \end{aligned}$$

Entonces de la Ecuación (1.23), obtenemos el resultado deseado. Además, de lo anterior obtenemos que la extensión es única si y sólo si

$$sup\{f(z) - \rho(z - x_0) : z \in F\} = \text{ínf}\{\rho(y + x_0) - f(y) : y \in F\}.$$

Para demostrar que $f$ se puede extender a todo $E$, usaremos el Lema de Zorn. Sea $\mathcal{G}$ la colección de todas las parejas ordenadas $(M, g)$ donde $M$ es un subespacio de $E$ que contiene a $F$ y $g$ es una extensión de $f$ a $M$ con $g(x) \leq \rho(x)$ para toda $x \in M$. $\mathcal{G}$ es no vacío por lo que ya hemos demostrado. Definimos sobre $\mathcal{G}$ un orden parcial dado por $(M, g) \leq (M', g')$ si $M \subset M'$ y $g'$ es una extensión de $g$. Como todo conjunto totalmente ordenado $\{(M_a, g_a) : a \in A\}$ en $\mathcal{G}$ esta acotado superiormente por $(M, g)$ donde $M = \cup_{a \in A} M_a$ y $g(x) = g_a(x)$ si $x \in M_a$. Entonces, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal en $\mathcal{G}$ que denotaremos por $(N, h)$. Si $N \neq E$, existe $x_0 \in E - N$ y por la primera parte de la demostración existe $\tilde{h}$ extensión de $h$ tal que $(N \bigoplus_a span\{x_0\}, \tilde{h})$ es un elemento estrictamente mayor que $(N, h)$, lo cual contradice la maximilidad de $(N, h)$. Por lo tanto, $N = E$ y $h$ es la extensión requerida de $f$. ■

**Ejemplo 1.5.6.** *Sea $p$ un funcional sublineal en un espacio vectorial real $X$. Sea $f$ definido en $Z = \{x \in X \mid x = \alpha x_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$ por $f(x) = \alpha p(x_0)$ con $x_0$ fijo, $x_0 \in X$. Demuestre que $f$ es un funcional lineal en $Z$ que satisface que $f(x) \leq p(x)$ y que existe un funcional lineal $\tilde{f}$ en $X$ tal que $-p(-x) \leq \tilde{f}(x) \leq p(x)$.*

**Demostración:**

Sea $Z = \{x \in X \mid x = \alpha x_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Supongamos que $x = \alpha x_0,\ y = \beta x_0 \in Z,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Primero demostraremos que $f$ es un funcional lineal, entonces

$$f(x + y) = f(\alpha x_0 + \beta x_0) = f((\alpha + \beta)x_0) = (\alpha + \beta)p(x_0) = \alpha p(x_0) + \beta p(x_0) = f(x) + f(y).$$

Además

$$f(\theta x) = f(\theta \alpha x_0) = \theta \alpha p(x_0) = \theta(\alpha p(x_0)) = \theta f(x).$$

Por lo que, $f$ es un funcional lineal. Ahora probaremos que $f(x) \leq p(x)$, en dos casos $\alpha \geq 0$ y $\alpha < 0$.

Si $\alpha \geq 0$. Por homogeneidad positiva, cuando $\alpha \geq 0$ tenemos

$$f(x) = \alpha p(x_0) = p(\alpha x_0) = p(x).$$

Antes de demostrar para $\alpha < 0$, probaremos que $p(0) = 0$ y que $p(-x) \geq -p(x)$.

Para $p(0) = 0$, tenemos que $p(0) = p(0 * x) = 0p(x) = 0$. Luego para $p(-x) \geq -p(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) &\Longrightarrow p(0) \leq p(x) + p(-x) \Longrightarrow 0 \leq p(x) + p(-x) \\ &\Longrightarrow -p(x) \leq p(-x) \Longrightarrow p(-x) \geq -p(x) \end{aligned}$$

Ahora, si $\alpha < 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} &f(x) = \alpha p(x_0) = -\alpha(-p(x_0)) = -\alpha(-p(x_0)) \leq -\alpha p(-x_0)\ ; \ -p(x) \leq p(-x) \\ \Longrightarrow &f(x) \leq -\alpha p(-x_0) = p(-\alpha(-x_0)) = p(\alpha x_0) = p(x) \end{aligned}$$

Por último, probaremos la existencia de $\tilde{f}$ y la desigualdad $-p(-x) \leq \tilde{f}(x) \leq p(x)$. Por hipótesis $p$ es un funcional sublineal y además demostramos que $f(x) = \alpha p(x_0)$ es un funcional sublineal que satisface $f(x) \leq p(x)$. Luego por Teorema 1.5.5 $f$ tiene una extensión lineal que satisface

$$\tilde{f}(x) \leq p(x)\ ;\ \tilde{f} = f \text{ para todo } x \in Z.$$

Tenemos que para todo $x \in Z$, $\tilde{f}(x) = f(x) = \alpha p(x_0)$. Anteriormente demostramos que $-p(x) \leq p(-x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, así $-p(-x) \leq p(-(-x)) = p(x)$ por lo que $-p(-x) \leq p(x)$. Luego

$$-p(-x) \leq p(x) \Longrightarrow -p(-x) \leq p(\alpha x_0) = \alpha p(x_0) = f(x) = \tilde{f}(x) \Longrightarrow -p(-x) \leq \tilde{f}(x).$$

Por el Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.5.5), $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ por lo que, $-p(-x) \leq \tilde{f}(x) \leq p(x)$. ■

Nos dedicaremos a demostrar la forma compleja del Teorema de Hahn-Banach. Usaremos el hecho de que todo espacio normado complejo es también un espacio normado real.

**Teorema 1.5.7.** ***(Hahn-Banach complejo)****. Sean $E$ un espacio normado sobre $\mathbb{C}$, $\rho$ una seminorma en $E$, $F$ un subespacio normado de $E$ y $f : F \longrightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$-lineal tal que $|f(x)| \leq \rho(x)$ para toda $x \in F$. Entonces, existe una extensión $\mathbb{C}$-lineal $\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{C}$ con $|\tilde{f}(x)| \leq \rho(x)$ para toda $x \in E$.*

<u>**Demostración:**</u>

Sea $u : F \longrightarrow \mathbb{R}$ la parte real de $f$. Sabemos que $u \leq \rho$ en $F$ y por el Teorema 1.5.5, tiene una extensión $\mathbb{R}$-lineal $\tilde{u} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para $x \in E$,

$$\tilde{u}(x) \leq \rho(x). \tag{1.24}$$

Como mencionamos anteriormente, $\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $\tilde{f}(x) = \tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix)$ es un funcional $\mathbb{C}$-lineal ya que

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(\lambda x + y) = \tilde{u}(\lambda x + y) - i\tilde{u}(i(\lambda x + y)) = \tilde{u}(\lambda x) + \tilde{u}(y) - i\tilde{u}(\lambda i x) - i\tilde{u}(iy)\\
\Longrightarrow &\tilde{f}(\lambda x + y) = \tilde{u}(\lambda x) - i\tilde{u}(\lambda i x) + \tilde{u}(y) - i\tilde{u}(iy) = \lambda\tilde{u}(x) - \lambda i\tilde{u}(ix) + \tilde{u}(y) - i\tilde{u}(iy)\\
\Longrightarrow &\tilde{f}(\lambda x + y) = \lambda(\tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix)) + \tilde{u}(y) - i\tilde{u}(iy) = \lambda\tilde{f}(x) + \tilde{f}(y).
\end{aligned}$$

Además si $x \in F$, tenemos que $f(x) = u(x) - iu(ix) = \tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix) = \tilde{f}(x)$. Finalmente, como $\rho$ es una seminorma, si $x \in E$ y por coordenadas polares obtenemos $\tilde{f}(x) = re^{-i\theta}$ con $r > 0$, así

$$|\tilde{f}(x)| = r = \tilde{f}(xe^{-i\theta}) = \tilde{u}(xe^{-i\theta}) \leq \rho(xe^{-i\theta}) = |e^{-i\theta}|\rho(x) = (1)\rho(x) = \rho(x).$$

■

**Teorema 1.5.8.** *Sean $X$ un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, se cumple que*

*a) Si $Y$ es un subespacio de $X$ y $f : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ una función lineal continua, entonces existe una extensión $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal y continua de $f$, tal que $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.*

*b) Para toda $x \in X$, con $x \neq 0$, existe una función lineal y continua $f_x : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f_x(x) = \|x\|$ y $\|f\| = 1$.*

**Demostración:**

Sea $X$ un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ e $Y$ un subespacio de $X$.
Primero probaremos el literal $a$). Sea $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la seminorma definida por $\rho(x) = \|f\|\|x\|$. Como para toda $y \in Y$, $|f(y)| \leq \|f\|\|y\|$, resulta que $f \leq \rho$ en $Y$, por Teorema 1.5.7, existe una extensión $\widetilde{f}$ lineal y continua de $f$ a $X$, tal que para toda $x \in X$ se cumple que $|\widetilde{f}(y)| \leq \|f\|\|y\|$. Por lo que $\|\widetilde{f}\| \leq \|f\|$. Como $\widetilde{f}(y) = f(y)$, para toda $y \in Y$, tenemos que $\|\widetilde{f}\| \leq \|f\|$ y entonces $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.

Para el literal $b$). Sea $g : \overline{span\{x\}} \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $g(\lambda x) = \lambda\|x\|$. Sabemos que la función escalar es continua por Proposición 1.1.48 inciso ii), además la función norma es continua por Lema 1.2.9, ahora bien por literal $a$) tenemos que, existe una extensión $\tilde{g}$ sobre $X$, es decir, existe $\tilde{g} :\ X \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que $\|g\| = \|\tilde{g}\|$ para toda $x$ en $\overline{span(x)}$ pero

$$\|\tilde{g}\| = \sup_{x \in X} \frac{|g(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Ahora bien, para todo $x \in X$ se tiene que $g(x) = \|x\|$, entonces $\tilde{g}(x) = g(x) = \|x\|$, obtenemos lo deseado. ■

**Ejemplo 1.5.9.** *Demuestre que bajo las hipótesis del Teorema 1.5.8, existe un funcional lineal acotado $\hat{f} \in X$ tal que $||\hat{f}|| = ||x_0||^{-1}$ y $\hat{f}(x_0) = 1$.*

**Demostración:**

Como $X$ satisface las hipótesis del Teorema 1.5.8, existe un funcional lineal acotado $\tilde{f}$ en $X$ tal que $||\tilde{f}|| = 1$, y $\tilde{f}(x_0) = ||x_0||$. Sea $\hat{f} = \frac{\tilde{f}}{||x_0||}$, demostraremos que $||\hat{f}|| = ||x_0||^{-1}$ y $\hat{f}(x_0) = 1$. Primero para $||\hat{f}||$ tenemos que

$$||\hat{f}|| = \left|\left|\frac{\tilde{f}}{||x_0||}\right|\right| = \frac{1}{||x_0||}||\tilde{f}|| = \frac{1}{||x_0||}(1) = \frac{1}{||x_0||} = ||x_0||^{-1}.$$

Por lo que, $||\hat{f}|| = ||x_0||^{-1}$. Luego para $\hat{f}(x_0)$ se tiene que

$$\hat{f}(x_0) = \left[\frac{\tilde{f}}{||x_0||}\right](x_0) = \frac{\tilde{f}(x_0)}{||x_0||} = \frac{||x_0||}{||x_0||} = 1.$$

Por tanto, $\hat{f}(x_0) = 1$. ■

Además, como $X$ es un espacio de Banach y en la Proposición 1.2.10, probamos que $X^*$ es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|f^*\| = \sup_{\|f^*\| \leq 1} |f^*(x)|, \tag{1.25}$$

para toda $f^* \in X^*$.

**Corolario 1.5.10.** *Sean $X$ un espacio normado y $x \in X$. Entonces*

$$\|x\| = \sup_{\|f^*\| \leq 1} |f^*(x)|, \ \forall \ f^* \in X^*. \tag{1.26}$$

**Demostración:**

Si $x = 0$, se tiene que $f^*(0) = 0$ y además $\|0\| = 0$ por lo que $\|0\| = \sup_{\|f^*\|\leq 1} |f^*(0)|$. Supongamos pues que $x \neq 0$. Ya que para toda $f^* \in X^*$, $|f^*(x)| \leq \|f^*\|\|x\|$ , se tiene que

$$\|x\| \geq \sup_{\|f^*\| \leq 1} |f^*(x)|.$$

Por otra parte, por el Teorema 1.5.8, existe $f^* \in X^*$ con $\|f^*\| = 1$ tal que $f^*(x) = \|x\|$, y esto nos da la igualdad. ■

**Definición 1.5.11.** *Un conjunto $A$ de un espacio topológico $X$ se dice que es denso en ninguna parte, sí el interior de su clausura es vacío.*

**Definición 1.5.12.** *Sea $\Omega$ un espacio topológico, diremos que $\Omega$ es un espacio de Baire si toda intersección numerable de abiertos densos en $\Omega$ es un conjunto denso en $\Omega$. Además diremos que un conjunto es de primera categoría (o raro) en $\Omega$, sí es una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Un conjunto es de segunda categoría en $\Omega$, sí no es de primera categoría.*

**Teorema 1.5.13.** ***(Teorema de Baire)**. Si $\Omega$ es un espacio métrico completo ó un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, entonces es un espacio de Baire.*

**Demostración:**

Supongamos que $\Omega$ es un espacio métrico completo, $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos abiertos densos en $\Omega$ y $V$ un abierto no vacío en $\Omega$, entonces por ser $V$ abierto, existe una bola abierta $B_r$ de radio $r > 0$, tal que $B_r \subset V$. Ahora bien, para demostrar el teorema veremos que, $(\cap_{i=1}^{\infty} U_i) \cap B_r \neq \emptyset$. Como $U_i$ es denso y abierto y $V$ es abierto en $\Omega$, tenemos que, $\exists \ \omega_1 \in U_1 \cap B_r$ y $0 < r_1 < \dfrac{r}{2}$ tales que la bola abierta con centro en $\omega_1$ y radio $r_1$ satisface $\overline{B_{r_1}(\omega_1)} \subset B_r \cap U_1$. Como $U_2$ es denso y abierto, además $V$ es abierto en $\Omega$ tenemos que, existen $\omega_2 \in B_{r_1}(\omega_1) \cap U_2$ y $0 < r_2 < \frac{r}{4}$ tales que

$$\overline{B_{r_2}(\omega_2)} \subset B_{r_1}(\omega_1) \cap U_2 \subset B_r \cap U_1 \cap U_2.$$

Continuando de esta manera, construimos una sucesión de $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $\Omega$ y una sucesión de reales $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que $0 < r_n < \frac{r}{2^n}$ y

$$\overline{B_{r_n}(\omega_n)} \subset B_{r_{n-1}}(\omega_{n-1}) \cap U_n \subset B_r \cap U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n.$$

Ahora bien, la sucesión $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\Omega$ y como $\Omega$ es completo tenemos que

$$\exists \ \omega \in \cap_{i=1}^{\infty} (\overline{B_{r_i}(\omega_i)} \subset (\cap_{i=1}^{\infty} U_i) \cap B_r,$$

tal que $\lim_{i \longrightarrow \infty} \omega_i = \omega$, así $\Omega$ es intersección numerable de conjuntos densos en $\Omega$, aplicando la Definición 1.5.12, $\Omega$ es de Baire. Si $\Omega$ es localmente compacto y de Hausdorff.

Por definición de conjunto compacto, existe una sucesión $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente en $\Omega$, como toda sucesión convergente es de Cauchy, por Definición 1.1.7, $\Omega$ es completo. Ahora bien, en vez de bolas abiertas podemos tomar conjuntos abiertos $V_n$ no vacíos con $\overline{V_n}$ compacto, $\overline{V_1} \subset V$ y $\overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap U_n$. Entonces por la propiedad de la intersección finita, existe $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \subset V \cap (\cap_{n=1}^{\infty} U_n)$, tal que $\lim_{i \longrightarrow \infty} \omega_i = \omega$, así $\Omega$ es intersección numerable de conjuntos densos en $\Omega$, aplicando la Definición 1.5.12, $\Omega$ es de Baire. ■

El Teorema de Baire para espacios métricos completos posee dos restricciones importantes, las cuales son

(1) La completitud del espacio métrico.

(2) La numerabilidad de los subconjuntos abiertos y densos en el espacio.

¿Será posible omitir la segunda condición?, el siguiente ejemplo es una muestra de ello.

**Ejemplo 1.5.14.** *El conjunto* $\{A_x\}_{x\in\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ *no es un conjunto de Baire en* $\mathbb{R}$.

**Demostración:**

En $\mathbb{R}$, si para cada $x \in \mathbb{R}$ se definen $A_x = \mathbb{R} \setminus \{x\}$, se tiene que cada $A_x$ es abierto en $\mathbb{R}$ porque es unión de dos abiertos en $\mathbb{R}$, $A_x = \mathbb{R} \setminus \{x\} = (-\infty, x) \cup (x, +\infty)$. Además $A_x$ es denso en $\mathbb{R}$ porque $A_x \cap \mathbb{R} = A_x \neq \emptyset$. Sin embargo $\bigcap_{x\in\mathbb{R}} A_x = emptyset$. Por lo que

$$\left(\bigcap_{x\in\mathbb{R}} A_x\right) \cap \mathbb{R} = \emptyset \cap \mathbb{R} = \emptyset.$$

Así $\bigcap_{x\in\mathbb{R}} A_x$ no es denso, por tanto el conjunto $\{A_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ no representa una intersección numerable de abiertos densos en $\mathbb{R}$, entonces no es un conjunto de Baire. ■

**Definición 1.5.15.** *Sea $M$ un subconjunto de un espacio normado $X$, diremos que $M$ es total si $\overline{spanM} = X$.*

**Lema 1.5.16.** *Sea $X$ un espacio normado y $Y$ un subespacio de $X$ con interior no vacío, entonces $Y = X$.*

**Demostración:**

Sea $x \in intY$ y $r > 0$ tales que $B_r(x) \subset Y$. Como $Y$ es un espacio normado, $B_r(0) = -x + B_r(x) \subset Y$ y entonces tenemos que $\lambda B_r(0) \subset Y$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Por lo tanto, $Y = X$ ■

**Teorema 1.5.17.** ***(Acotamiento Uniforme)***. *Sean $X$ un espacio de Banach, $Y$ un espacio normado y $\mathcal{G}$ una familia de operadores acotados de $X$ en $Y$, entonces son equivalentes*

1. $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{G}\} < \infty$.

2. $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{G}\} < \infty$ *para toda* $x \in X$.

3. $\sup\{|f(Tx)| : T \in \mathcal{G}\} < \infty$ *para toda* $x \in X$ *y para todo* $f \in Y^*$.

**Demostración:**
Por definición de norma para operadores tenemos que 1. $\Longrightarrow$ 2. $\Longrightarrow$ 3.

Ahora demostremos 2. $\Longrightarrow$ 1. Supongamos que $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{G}\} < \infty$ para toda $x \in X$. Sea $A_n = \{x \in X : \sup_{T\in\mathcal{G}} \|Tx\| \leq n\}$. Entonces $A_n$ es cerrado para toda $n \in \mathbb{N}$, dado que $A_n$ es la preimagen por $T$ del intervalo $[-n, n]$, luego cada $A_n$ es cerrado y así el conjunto $\cap_{T\in\mathcal{G}} A_n$ es cerrado en $X$.
Tenemos que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, como $X$ es un espacio de Baire, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $intA_k \neq \emptyset$, por lo tanto, existe $x_0 \in A_k$ y $\delta > 0$ tales que $\|x - x_0\| < \delta$ implica que

$$\sup_{T\in\mathcal{G}} \|Tx\| \leq k.$$

En particular si $\|x\| < \delta$ y $T \in \mathcal{G}$, $\|Tx - Tx_0\| \leq k$ aplicando la desigualdad del triángulo para la resta tenemos

$$\|Tx\| - \|Tx_0\| \leq \|Tx - Tx_0\| \leq k \Longrightarrow \|Tx\| - \|Tx_0\| \leq k \Longrightarrow \|Tx\| \leq k + \|Tx_0\| = M$$

$$\Longrightarrow \sup_{T\in\mathcal{G}} \|Tx\| \leq \sup M \Longrightarrow \sup_{T\in\mathcal{G}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \frac{M}{\delta}.$$

Pero, $\sup_{T\in\mathcal{G}} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$, entonces $\|T\| \leq \dfrac{M}{\delta} < \infty$. Por tanto, se cumple 2. $\Longrightarrow$ 1.

Ahora demostremos que 3. $\Longrightarrow$ 2. Supongamos que $\sup\{|f(Tx)| : T \in \mathcal{G}\} < \infty$ para toda $x \in X$ y para todo $f \in Y^*$. Fijemos $x \in X$ y sea $A_n = \{f \in Y^* : \sup_{T\in\mathcal{G}} |f(Tx)| \leq n\}$. $A_n$ es cerrado y $Y^* = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, como $Y^*$ es de Banach por Teorema 1.5.13, $Y^*$ es de Baire, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $intA_k \neq \emptyset$, por lo tanto, existe $f_0 \in A_k$ y $\delta > 0$ tales que $\|f - f_0\| < \delta$ implica que

$$\sup_{T\in\mathcal{G}} |f(Tx)| \leq k.$$

En particular, sí $\|f\| < \delta$ y $T \in \mathcal{G}, |f(Tx) - f(Tx_0)| \leq k$, aplicando la desigualdad del triángulo para la resta, tenemos

$$|f(Tx) - f(Tx_0)| \leq k \Longrightarrow |f(Tx)| - |f(Tx_0)| \leq k \Longrightarrow |f(Tx)| \leq k + |f(Tx_0)| = M$$

$$\Longrightarrow \sup_{T\in\mathcal{G}} |f(Tx)| \leq \sup M \Longrightarrow \sup_{\substack{T\in\mathcal{G}\\ |f\|\leq 1}} \frac{|f(Tx)|}{\|f\|} \leq \frac{M}{\delta}$$

Pero $\sup_{\substack{T\in\mathcal{G}\\ |f\|\leq 1}} \dfrac{|f(Tx)|}{\|f\|} = \sup_{T\in\mathcal{G}} \|T\|$, entonces $\sup_{T\in\mathcal{G}} \|Tx\| \leq \dfrac{M}{\delta}$. Por lo que concluimos que se cumple 3. $\Longrightarrow$ 2. ■

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que el teorema anterior no es cierto si solo se supone que el espacio de partida $X$ es normado.

**Ejemplo 1.5.18.** *Sean $X = (c_{00}, ||\cdot||_\infty)$ y $\{f_n\}_n$ la sucesión de funciones lineales en $X$ definidas por*

$$f_n(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ donde } x = \{x_j\}_j \in c_{00}.$$

*La sucesión $\{f_n\}_n$ es puntualmente acotado y $||f_n|| = n$, es decir*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty \text{ para cada } x \in c_{00} \text{ y } \sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n|| = \infty.$$

**Demostración:**

Recordemos que $c_{00}$ es el conjunto de las sucesiones casi nulas de escalares definido por

$$c_{00} = \{\{x_n\} \in \mathbb{K}^n : \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\} \text{ es finito}\}.$$

Sea $x = \{x_n\}_n \in c_{00}$, existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que $x_n = 0$ cuando $n > N$, por tanto la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_N(x), f_N(x), f_N(x), \cdots\}$ tiene una cantidad finita de términos distintos y en consecuencia $\sup\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Por tanto, la sucesión $\{f_n\}_n$ es puntualmente acotada. Por otro lado, dada $f_n$ si $x \in c_{00}$ con $||x||_\infty \leq 1$ sabemos que

$$|f_n(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} ||x||_\infty \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Por lo que, $||f_n|| = \sup\{|f_n(x)| : ||x||_\infty \leq 1\} \leq n$. Si tomamos ahora

$$x = (1, \underbrace{\cdots}_{n}, 1, 0, \cdots).$$

Se tiene que $||x||_\infty = 1$ y que $n = f_n(x) \leq ||f_n|| \leq n$. Así concluimos que $||f_n|| = n$. ■

**Proposición 1.5.19.** *Sea $T$ un operador lineal acotado de un espacio normado $X$ a un espacio normado $Y$. Suponga que existe un $b$ positivo tal que $||Tx|| \geq b||x||$ para todo $x \in X$. Demuestre que $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ existe y es acotado.*

**Demostración:**

Supongamos que $Tx = 0$. Entonces

$$\|Tx\| = \|0\| \geq b\|x\| \Longrightarrow \|0\| \geq b\|x\| \Longrightarrow 0 \geq \|x\|;\ b > 0.$$

Además, por definición de norma $\|x\| \geq 0$, así $\|x\| = 0$ por lo que $x = 0$. Entonces $\ker T = \{0\}$ y así $T$ es inyectiva. Como $T$ es sobreyectiva, entonces $T$ es invertible, por lo que existe $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ tal que $\mathcal{R}(T) = Y$. Sea $y = Tx$ así $T^{-1}y = x$, probaremos que $T^{-1}$ es acotado

$$||T^{-1}y|| = ||x|| \leq \frac{1}{b}||Tx|| = \frac{1}{b}||y||.$$

Entonces $||T^{-1}y|| \leq \frac{1}{b}||y||$, por lo que $T^{-1}$ es acotada. ■

**Teorema 1.5.20.** ***(De la función inversa)**. Si $X$ e $Y$ son espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ es un operador biyectivo y acotado, entonces $T$ es un isomorfismo, es decir, $T^{-1}$ es acotado y por lo tanto*

$$\|T^{-1}\|^{-1}\|x\| \leq \|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

**Demostración:**

Sabemos que $T$ es un operador biyectivo y acotado, es decir $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, entonces por ser acotado $T$ es continuo, además $T^{-1}$ existe. Por Proposición 1.5.19, $T^{-1}$ es acotado aplicando el Teorema 1.2.2, $T^{-1}$ es continuo, Por tanto, $T$ es un isomorfismo. ■

## 1.6. DUALIDAD Y TOPOLOGÍAS DÉBILES

Sea $X$ un espacio normado. Hemos visto que $X^*$ siempre es un espacio de Banach (Proposición 1.2.10), y entonces podemos hablar de su espacio dual o bidual de $X$, que denotaremos por $X^{**}$ el cual también es un espacio de Banach. Tenemos la siguiente relación entre $X$ y su bidual $X^{**}$.

**Teorema 1.6.1.** *Sea $X$ un espacio normado. Entonces $X$ es isométrico a un subespacio de $X^{**}$ vía la función $j : X \longrightarrow X^{**}$ dada por*

$$[j(x)](f) = f(x),$$

*para toda $x \in X$ y $f \in X^*$. Esta función es llamada la inyección canónica de $X$ en $X^{**}$.*

**Demostración:**
Primeramente demostremos que $j(x)$ es lineal. Sean $x, y \in X$, $f \in X^*$, $\beta, \alpha \in \mathbb{K}$ y sea $j : X \longrightarrow X^{**}$, una función definida por $[j(x)](f) = f(x)$. Probaremos que $[j(\alpha x+\beta y)](f) = \alpha[j(x)](f) + \beta[j(y)](f)$. Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$, entonces

$$[j(\alpha x + \beta y)](f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha[j(x)](f) + \beta[j(y)](f).$$

Por tanto, $j(x)$ es lineal. Luego, tenemos que $|[j(x)](f)| = |f(x)|$. Ya que para toda $f^* \in X^*$ se cumple que

$$|f(x)| \leq \|x\|\|f\| \Longrightarrow \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\| \Longrightarrow \sup_{\|f\|\leq 1} |f(x)| \leq \|x\| \Longrightarrow \sup_{\|f\|\leq 1} |[j(x)](f)| \leq \|x\|$$

$$\Longrightarrow \|j\| \leq \|x\|.$$

■

**Definición 1.6.2.** *Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach $X$ se llama base de Schauder de $X$ si para toda $x \in X$, existe una sucesión única de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$, tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = 0.$$

**Ejemplo 1.6.3.** *Sea $X$ el espacio $\ell^p$ de las sucesiones y sea $\{e_n\}_n$ la sucesión $e_k = \delta_{i,k}$, es decir la sucesión de vectores de $\ell^p$ con $1$ en la posición $k$ y $0$ en el resto. Demostraremos que dicha sucesión es una base de Schauder.*

**Demostración:**
En efecto, para todo $x \in \ell^p$ tenemos $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$. Como $x \in \ell^p$, entonces para

$A := \text{lím}_{n\longrightarrow\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} e_k x_k\|$ se tiene que

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots) - [x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n]\| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots) - [x_1(1, 0, \cdots) + x_2(0, 1, \cdots) + \cdots + x_n(0, \cdots, 1^{(n)}, 0, \cdots)]\right\| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots) - [(x_1, 0, \cdots) + (0, x_2, \cdots) + \cdots + (0, \cdots, x_n^{(n)}, 0, \cdots)]\right\| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots) - (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0 \cdots)\| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(x_1 - x_1, x_2 - x_2, \cdots, x_n - x_n, x_{n+1} - 0, x_{n+2} - 0, \cdots)\| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)\| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

De donde si $n \longrightarrow \infty$ se tiene que

$$A = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0.$$

Por lo que,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|x - \sum_{k=1}^{n} e_k x_k\right\| = 0.$$

Así $\{e_n\}_n$ es una base de Schauder para $\ell^p$. ■

Observemos que la base de Schauder de $\ell^p$ también es una base de Schauder para $c_0$, lo demostraremos a continuación.

**Ejemplo 1.6.4.** *Sea $X$ el espacio $c_0$ de las sucesiones convergentes a cero y sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ la sucesión $e_k = \{\delta_{ik}\}_{j=1}^{\infty}$, es decir la sucesión de vectores de $c_0$ con 1 en la posición $k$ y 0 en el resto. Demostraremos que dicha sucesión es una base de Schauder de $c_0$.*

**Demostración:**
En efecto, para todo $x \in c_0$ tenemos $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0 \cdots)$. Como $x \in c_0$, entonces para $A := \text{lím}_{n\longrightarrow\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} e_k x_k\|_p$ se tiene que

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots) - [x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n]\|_p \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots) - [x_1(1, 0, \cdots) + x_2(0, 1, \cdots) + \cdots + x_n(0, \cdots, 1^{(n)}, 0, \cdots)]\right\|_p \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots) - [(x_1, 0, \cdots) + (0, x_2, \cdots) + \cdots + (0, \cdots, x_n^{(n)}, 0, \cdots)]\right\|_p \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots) - (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0 \cdots)\|_p \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(x_1 - x_1, x_2 - x_2, \cdots, x_n - x_n, 0 - 0, \cdots)\|_p \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(0, 0, \cdots)\|_p = 0.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}e_kx_k\right\|_p=0.$$

Así $\{e_n\}_n$ es una base de Schauder para $c_0$. ■

Hemos de agregar un resultado importante respecto a $c_0$.

**Ejemplo 1.6.5.** *El espacio dual de $c_0$ es $\ell^1$.*

**Demostración:**

Como demostramos en el Ejemplo 1.6.4 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ la sucesión $e_k=\{\delta_{ik}\}_{j=1}^{\infty}$, es decir la sucesión de vectores de $c_0$ con 1 en la posición $k$ y 0 en el resto es una base de Schauder de $c_0$. Entonces para cada $x\in c_0$ tiene representación única

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_ke_k.$$

Donde $x=\{\xi_k\}$. Sea $f\in(c_0)^*$. Entonces, dado que es lineal y acotada

$$f(x)=f\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_ke_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_kf(e_k).$$

Primero demostraremos que la sucesión $\{f(e_k)\}\in\ell^1$. Definimos los números $\theta_n$ de la siguiente manera

$$\theta_n=\begin{cases}\frac{|f(e_n)|}{f(e_n)}, & f(e_n)\neq 0\\ 0, & f(e_n)=0.\end{cases}$$

Ahora consideremos la sucesión $\{x_n\}$ donde

$$x_n=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n,0,0,\cdots)=\theta_1e_1+\theta_2e_2+\cdots+\theta_ne_n.$$

Observemos que $x_n\in c_0$ y $\|x_n\|_\infty$ es 0 o 1 para todo $n$. Luego

$$|f(x_n)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\theta_kf(e_k)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\theta_kf(e_k)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\theta_kf(e_k)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\theta_kf(e_k)\right|+0.$$

Por lo que

$$|f(x_n)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\theta_kf(e_k)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(e_k)|}{f(e_k)}f(e_k)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|\right|=\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|.$$

Y así

$$|f(x_n)|=\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|\leq\|x_n\|_\infty\|f\|;\ \text{dado que } f \text{ es acotada.}$$

Pero $\|x_n\|_\infty \|f\| \leq \|f\|$, por lo que $\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)| \leq \|x_n\|_\infty \|f\| \leq \|f\|$ para todo $n$. Como la desigualdad se mantiene para todo $n$, si $n \longrightarrow \infty$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)| \leq \|x_n\|_\infty \|f\| \leq \|f\| \text{ para todo } n. \tag{1.27}$$

Por tanto, $\{f(e_k)\} \in \ell^1$.

Seguidamente demostraremos que para cada $b = \{\beta_k\} \in \ell^1$, podemos obtener un operador lineal acotado correspondiente a $c_0$. Definimos $g$ en $c_0$ por

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k;\ x = \{\xi_k\} \in c_0,$$

entonces $g$ es lineal. Y además $g$ es acotado porque

$$|g(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k \right| \leq \sup_j |\xi_j| \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| \leq \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|.$$

Tomando el supremo de todos los $x$ con norma 1, tenemos que $\|g\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|$. Si combinamos este resultado con la Ecuación (1.27), obtenemos que $\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|$, que es la norma en $\ell^1$. Entonces el mapeo $f \longrightarrow \{f(e_k)\}$ de $c_0$ a $\ell^1$ es biyectivo, lineal y preserva la norma por lo que es un isomorfismo isométrico. Por tanto, el dual de $c_0$ es $\ell^1$. ■

Ahora demostremos que el dual de $\ell^1$ es $\ell^\infty$.

**Ejemplo 1.6.6.** *El espacio dual de $\ell^1$ es $\ell^\infty$.*

**Demostración:**

Sea $X = \ell^1$. Una base de Schauder para $\ell^1$ es $\{e_k\}$, donde $e_k = \{\delta_{k_j}\}$ tiene 1 en la $k-$ésima posición y 0 en las demás. Entonces por Teorema de Representación de Riesz (veáse [4]), todo $x \in \ell^1$ tiene una representación única, así

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k.$$

Consideremos cualquier $f \in X^*$, donde $X^*$ es el espacio dual de $\ell^1$, además $f$ es lineal y acotado, es decir, $\|f\| \leqq M$ y

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k, \tag{1.28}$$

donde $\gamma_k = f(e_k)$ están únicamente determinados por $f$. Como $\|e_k\| = 1$ y

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leqq \|f\| \|e_k\| = \|f\| \tag{1.29}$$

$$\Longrightarrow \sup_k |\gamma_k| \leqq \|f\|. \tag{1.30}$$

De ahí tenemos que $\sup_k |\gamma_k| \leqq M$, de donde $\{\gamma_k\} \in \ell^\infty$. Por otro lado, llegaremos a que para toda $b = \{\beta_k\} \in l^\infty$ podemos obtener una función lineal acotada correspondiente $g \in X^*$. En efecto así es, podemos definir $g$ en $\ell^1$ por $g(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k\beta_k$, donde $x = \{\xi_k\} \in \ell^1 \Longrightarrow \|x\| \leqq M$. Demostremos que $g$ es lineal, es decir que $g(x+\alpha y) = g(x) + \alpha g(y)$, donde $x = \{\xi_k\}$ y $y = \{\eta_k\}$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \ell^1$, tenemos que

$$g(x+\alpha y) = \sum_{k=1}^\infty (\xi_k + \alpha\eta_k)\beta_k = \sum_{k=1}^\infty (\xi_k\beta_k + \alpha\eta_k\beta_k) = \sum_{k=1}^\infty (\xi_k\beta_k) + \alpha\sum_{k=1}^\infty (\eta_k\beta_k) = g(x) + \alpha g(y).$$

Ahora demostremos que $g$ está acotado, sean $x \in \ell^1$ tenemos que

$$|g(x)| = \left|\sum_{k=1}^\infty \xi_k\beta_k\right| \leqq \sum_{k=1}^\infty |\xi_k\beta_k| \leqq \sum_{k=1}^\infty \left|\xi_k(\sup_k \beta_k)\right| = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| \left|\sup_j \beta_j\right| = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| \sup_j |\beta_j|$$
$$\Longrightarrow |g(x)| = \sup_j |\beta_j| \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| = \sup_j |\beta_j| \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| = \sup_j |\beta_j| \, \|x\|.$$

Donde $g \in X^*$. Finalmente demostremos que la norma de $f$ es la norma en el espacio $\ell^\infty$. De la Ecuación (1.28) tenemos,

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^\infty \xi_k\gamma_k\right| \leqq \sum_{k=1}^\infty |\xi_k\gamma_k| \leqq \sum_{k=1}^\infty \left|\xi_k(\sup_k \beta_k)\right| = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| \left|\sup_j \gamma_j\right| = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| \sup_j |\gamma_j|$$
$$\Longrightarrow |f(x)| = \sup_j |\gamma_j| \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| = \sup_j |\gamma_j| \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| = \sup_j |\gamma_j| \, \|x\|.$$

Tomando el supremo de toda $x$ de norma 1, vemos que,$\|f\| \leqq \sup_j |\gamma_j|$. De esto y de la Ecuación (1.30) tenemos,

$$\|f\| = \sup_j |\gamma_j|.$$

La cual es la norma de $\ell^\infty$. Por lo que esta ecuación la podemos escribir como $\|f\| = \|c\|_\infty$ donde $c = (\gamma_j) \in l^\infty$. Podemos definir $\phi : X^* \to \ell^\infty$ como $\phi(f) = c = (\gamma_j) \in \ell^\infty$, de aquí tenemos que, $\|\phi(f)\| = \|c\| = \|f\|$, por definición, $\phi$ es un isomorfismo isométrico, por lo cual $X^* = \ell^\infty$. ■

**Definición 1.6.7.** *Un espacio normado $X$ es reflexivo si $j(X) = X^{**}$, donde $j : X \longrightarrow X^{**}$ es la inyección canónica definida arriba.*

Un ejemplo de un espacio de Banach no reflexivo lo detallaremos a continuación.

**Ejemplo 1.6.8.** *El espacio $c_0$ de sucesiones convergentes a cero no es reflexivo.*

**Solución:**

Sabemos que $(c_0)^* = \ell^1$ (Ejemplo 1.6.5) y además que $(c_0)^{**} = (\ell^1)^* = \ell^\infty$ (Ejemplo 1.6.6). Por tanto, tenemos un isomorfismo isométrico de $(c_0)^{**}$ sobre $\ell^\infty$. Como $\ell^\infty$ no es separable, $(c_0)^{**}$ tampoco lo es, luego $c_0$ no es siquiera homeoformo a $(c_0)^{**}$ y, en particular, la inyección canónica de $c_0$ no puede ser sobreyectiva. Por tanto, $c_0$ no es reflexivo. ■

Notemos que si un espacio es reflexivo, es isométricamente isomorfo a su doble dual, entonces es un espacio de Banach. La definición estipula que la isometría debe de ser la inyección canónica, sin embargo $X$ puede ser isométricamente isomorfo a $X^{**}$ mediante una isometría distinta. Durante mucho tiempo se pensó que un espacio de Banach isométricamente isomorfo a su doble dual debería ser reflexivo, pero en 1950, Robert Clarke James construyó un espacio que es un contraejemplo a esta conjetura. Estudiaremos el espacio $J$ de James con cierto detalle en el capítulo 3.

**Proposición 1.6.9.** *El dual del espacio $\ell^p$ con $1 < p < \infty$ es el espacio $\ell^q$ donde $q$ es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $\ell^p$ es reflexivo.*

**Demostración:**

Para $n = 1, 2, \ldots$ sea $e_n = \left(\underbrace{0, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots\right) \in \ell^p$.

Toda $y = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$, define un elemento $\varphi_y : \ell^p \longrightarrow \mathbb{C}$, de la siguiente manera para toda $x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$,

$$\varphi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Demostremos que $\varphi_y$ está bien difinida. Sean $x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$ y $x' = \{a'_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$, tal que $x = x'$, entonces tenemos que al multiplicar cada elemento de la sucesión $y$ con las respectivas de $x$ y $x'$, tenemos que

$$\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a'_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n b_n \Longrightarrow \varphi_y(x) = \varphi_y(x').$$

Por lo cual $\varphi_y$ está bien definida. Usando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$|\varphi_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|y\|_q \|x\|_p.$$

Por lo tanto, $|\varphi_y(x)| \leq \|y\|_q \|x\|_p$, de donde

$$\|\varphi_y\| \leq \|y\|_q. \tag{1.31}$$

Además, tenemos que

$$\varphi_y(e_k) = \varphi_y(0, \ldots, 1, 0, \ldots) = 0(b_1) + 0(b_2) + \cdots + 1(b_k) + \cdots = b_k.$$

Por lo que $\varphi_y(e_n) = b_n$. Probaremos que la función $\Phi : \ell^q \longrightarrow (\ell^p)^*$, dada por $\Phi(y) = \varphi_y$, es un isomorfismo isométrico.

Demostremos que $\Phi$ está bien definida. Sea $x = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, z = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$ tal que $x = z$, sea $w = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$.

$$x = z \Longrightarrow \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n c_n\}_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$$
$$\Longrightarrow \varphi_x(w) = \varphi_z(w) \Longrightarrow \Phi(x) = \Phi(z).$$

Por tanto, $\Phi$ está bien definida.

Probemos que $\Phi$ es inyectiva. Sea $\Phi(x) = \Phi(z)$, tenemos que

$$\Phi(x) = \Phi(z) \Longrightarrow \varphi_x(w) = \varphi_z(w) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \Longrightarrow \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n c_n\}_{n=1}^{\infty}$$
$$\Longrightarrow \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow x = z.$$

Por tanto, $\Phi$ es inyectiva.

Demostremos que $\Phi$ es sobreyectiva. Sabemos que para cada $\varphi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, con $y$ fijo, existe una sucesión de elementos $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ que lo genera, donde $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = y$, por lo cual, tenemos que existe un elemento en $\ell^p$, $x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\varphi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, por lo que $\varphi_y$ es sobreyectiva, como $\Phi = \varphi_y$, concluimos que, $\Phi$ es sobreyectiva.

Dada $f \in (l^p)^*$, sea $b_n = f(e_n)$; llegaremos a que la sucesión $y = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ pertenece a $\ell^q$. Para ello, sean $m \in N$ y $z^{(m)} = \sum_{n=1}^{m} e^{i\theta_n} |b_n|^{q-1}$, sabemos que un número y su inverso tienen módulo recíproco, escogemos un vector unitario tal que $\frac{e^{i\theta_n}}{|b_n|} = b_n^{-1}$, nos dá la dirección de $b_n$, esto nos garantiza que, $e^{i\theta_n} b_n = |b_n|$, si $z^m = \sum_{n=1}^{m} e^{i\theta_n} |b_n|^{q-1} e_n$, entonces

$$f(z^{(m)}) = \sum_{i=1}^{m} f(e^{i\theta_n} |b_n|^{q-1} e_n) = \sum_{i=1}^{m} e^{i\theta_n} |b_n|^{q-1} f(e_n) = \sum_{i=1}^{m} e^{i\theta_n} |b_n|^{q-1} b_n.$$

Pero, $e^{i\theta_n} b_n = |b_n|$ así

$$f(z^{(m)}) = \sum_{n=1}^{m} |b_n||b_n^{q-1}| = \sum_{n=1}^{m} |b_n|^q \leq \|f\| \|z^{(m)}\|_p = \|f\| \left( \sum_{n=1}^{m} |b_n|^{p(q-1)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando el hecho de que $p(q-1) = q$ y que $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, obtenemos que

$$\left( \sum_{n=1}^{m} |b_n|^q \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|f\|,$$

para toda $m$, esto prueba que $y = (b_n)_{n=1}^{\infty} \in l^q$ y que,

$$\|y\|_q \leq \|f\|. \tag{1.32}$$

Por otra parte, si $x = a_n{}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$, sea $x^{(m)} = \sum_{n=1}^{m} a_n e_n$, entonces sabemos que, por el criterio de convergencia de Cauchy:

$$\|x - x^{(m)}\|_p = \left( \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \underset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \, . \tag{1.33}$$

Como $f$ es continua, $f(x^{(m)}) = \sum_{n=1}^{m} a_n \, b_n \underset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} f(x)$ y se sigue que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, es decir, $\Phi(y) = f$. Además por Ecuación (1.31) $\|\varphi_y\| \leq \|y\|_q$ pero $f = \Phi(y) = \varphi_y$ por lo que

$$\|f\| = \|\Phi(y)\| = \|\varphi_y\| \|f\| \leq \|y\|_q.$$

Por la Ecuación (1.32) se tiene que

$$\|y\|_q \leq \|f\| \Longrightarrow \|f\| = \|y\|_q.$$

Esto concluye la prueba de que el espacio dual de $\ell^p$ es $\ell^q$. ■

**Ejemplo 1.6.10.** *Demostremos que el espacio $\ell^p$ con $1 < p < \infty$ es reflexivo.*

**Demostración:**

Sea $X = \ell^p$ y $X^* = \ell^q$ con $1 < p < \infty$ y $q$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Definamos la función canónica $T : X \to X^{**}$ como

$$[Tx](f^*) = f^* x, \quad \forall x \in X, \ \forall f^* \in X^*.$$

Demostraremos que $\exists \, x \in X; T(x) = g, g \in X^{**}$. Sea $g \in X^{**}$, ahora consideremos las aplicaciones

$$\phi : X \to (X^*)^*, \qquad \psi : X^* \to (X)^*.$$

Definidas como

$$[\phi(x)](y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n; \ \forall x = \{x_n\} \in X, \ \forall y = \{y_n\} \in X^*,$$
$$[\psi(y)](x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n; \ \forall x = \{x_n\} \in X, \ \forall y = \{y_n\} \in X^*.$$

Las cuales ya se demostraron que son isomorfismos isométricos. Luego, la composición $g \circ \psi$ es una aplicación lineal y continua de $X^*$ en $\mathbb{R}$ y por tanto un elemento de $(X^*)^*$, por lo cual existe $x = \{x_n\} \in X$ tal que $\phi(x) = (x^{**} \circ \psi)(x)$. Dado que $y^* \in (X)^*$ e $y \in X^*$ tal que $\psi(y) = y^*$ se tiene que

$$[T(x)](y^*) = y^*(x) = \psi(y)_x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = [\phi(x)](y) = [g](\psi(y)) = g(y^*).$$

Como la igualdad es cierta para todo $y^* \in (X)^*$ se deduce que $T(x) = g$. Así, concluimos que el espacio $\ell^p$ es reflexivo. ■

**Ejemplo 1.6.11.** *Aplicando la proposición anterior, para p=2, tenemos que $l^2$ es reflexivo.*

Dos de las topologías más importantes que surgieron de esta investigación, son las ahora conocidas como topología débil y topología débil estrella, la primera en el espacio mismo y la segunda en su espacio dual.

**Definición 1.6.12.** *Una colección $\mathcal{V}$ de un punto $x \in X$ es una base local de $x$ si toda vecindad de $x$ contiene un elemento de $\mathcal{V}$.*

**Ejemplo 1.6.13.** *En un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, la familia de bolas $\mathcal{V}_x = \{B(x,r) : r > 0\}$ es una base de entornos de $x$, para cada $x \in X$.*

**Solución:**

Un entorno de $x$ es la bola $B(x, r+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ y $r \in \mathbb{R}$. Observemos que $B(x,r) \subset B(x, r+\varepsilon)$, por lo que cumple la definición de base local. ■

**Definición 1.6.14.** *Sean $X$ un espacio normado y $X^*$ su dual. La topología débil en $X$, denotada por $\sigma(X, X^*)$ o simplemente por $\omega$, es la topología que tiene como base local de $x_0 \in X$ a los conjuntos de la forma*

$$V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in X : |f_i^*(x - x_0)| < \varepsilon\}, \ \text{con } f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^* \in X^* y \varepsilon > 0. \tag{1.34}$$

Entonces un conjunto $U \subset X$ es débilmente abierto, o $\omega$-abierto, si y sólo si para toda $x_0 \in U$, existen $f_1^*$, $f_2^*, \ldots, f_k^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tales que, $V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) \subset U$. Cuando $x_0 = 0$ denotaremos la vecindad en la Ecuación (1.34) simplemente por $V(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon)$, y luego tenemos que,

$$V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) = x_0 + V(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*). \tag{1.35}$$

$$V(\lambda x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \lambda\varepsilon) = \lambda V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) \text{ si } \lambda > 0, \tag{1.36}$$

y que la topología débil es de Hausdorff. Demostremos la Ecuación (1.35), con $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
&V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) = \cap_{i=1}^{k}\{|f_i^*(x - x_0)| < \varepsilon\} = \cap_{i=1}^{k}\{|f_i^*(x) - f_i^*(x_0)| < \varepsilon\} \\
\Longrightarrow &V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) = \cap_{i=1}^{k}\{|f_i^*(x) - f_i^*(0)| < \varepsilon\} = \cap_{i=1}^{k}\{|f_i^*(x) - 0| < \varepsilon\} \\
\Longrightarrow &V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) = 0 + \cap_{i=1}^{k}\{|f_i^*(x)| < \varepsilon\} = x_0 + \cap_{i=1}^{k}\{|f_i^*(x)| < \varepsilon\} \\
\Longrightarrow &V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) = x_0 + V(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Demostremos la Ecuación (1.36), con $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned}
&V(\lambda x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \lambda\varepsilon) = \cap_{i=1}^{k}\{|f_i^*(\lambda x - \lambda x_0)| < \lambda\varepsilon\} = \cap_{i=1}^{k}\{|f_i^*(\lambda(x - x_0))| < \lambda\varepsilon\} \\
\Longrightarrow &V(\lambda x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \lambda\varepsilon) = \cap_{i=1}^{k}\{|\lambda f_i^*(x - x_0)| < \lambda\varepsilon\} = \cap_{i=1}^{k}\{|\lambda||f_i^*(x - x_0)| < \lambda\varepsilon\} \\
\Longrightarrow &V(\lambda x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \lambda\varepsilon) = \lambda V(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Ahora demostremos que la Topología Débil es de Hausdorff.

**Lema 1.6.15.** *La Topología débil es de Hausdorff.*

**Demostración:**
Sea $\tau_\omega$ la topología débil sobre el espacio $X$. Sean $U, W \in \tau_\omega$ y $x_0 \in U$, $y_0 \in W$ tales que $x_0 \neq y_0$. Luego, sean $f_i^* \in X^*$ tales que $f_i^*(x_0 - y_0) \neq 0$. Escogemos de la siguiente forma

$$\varepsilon = \min_k \frac{|f_k^*(x_0 - y_0)|}{2}, \text{ de lo cual tenemos que } \varepsilon > 0.$$

Como $x_0 \in U$ y $y_0 \in W$, entonces existe $V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon)$ y $V(y_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon)$ tales que

$$x_0 \in V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) = \bigcap \{x \in X : |f_k^*(x_0 - x)| < \varepsilon\},$$
$$y_0 \in V(y_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) = \bigcap \{x \in X : |f_k^*(y_0 - x)| < \varepsilon\}.$$

Demostremos que $V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) \cap V(y_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) = \emptyset$. Razonemos por contradicción. Supongamos que $z \in V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) \cap V(y_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon)$, esto significa que $|f_k^*(x_0 - z)| < \varepsilon$ y $|f_k^*(y_0 - z)| < \varepsilon$ por lo que

$$|f_k^*(x_0 - z)| + |f_k^*(y_0 - z)| < 2\varepsilon \Longrightarrow |f_k^*(x_0) - f_k^*(z)| + |f_k^*(z) - f_k^*(y_0)| < 2\varepsilon$$
$$\Longrightarrow |f_k^*(x_0) - f_k^*(z) + f_k^*(z) - f_k^*(y_0)| < 2\varepsilon; \text{ desigualdad del triangulo}$$
$$\Longrightarrow |f_k^*(x_0) + f_k^*(y_0)| < 2\varepsilon \Longrightarrow |f_k^*(x_0 + y_0)| < 2\varepsilon = 2\min_k \frac{|f_k^*(x_0 - y_0)|}{2} = \min_k |f_k^*(x_0 - y_0)|.$$

Por lo que $|f_k^*(x_0 + y_0)| < \min_k |f_k^*(x_0 - y_0)|$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) \cap V(y_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) = \emptyset$. Así $\tau_\omega$ es de Hausdorff. ■

Notemos que las vecindades débiles son bastante grandes en espacios de dimensión infinita, de hecho las vecindades básicas de 0, luego

$$V(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) \supset \bigcap_{i=0}^{k} \ker\ f_i^*, \tag{1.37}$$

y como siempre que $x \in \ker f^*$, también $\lambda x \in \ker f^*$, ya que en general $\cap_{i=1}^n \ker f_i^*$ es un conjunto no acotado en la norma ya que $\cap_{i=1}^n \ker f_i^*$ es un subespacio de $X$ distinto de $\{0\}$. Por lo tanto, la topología débil tiene menos abiertos que la de la norma (de ahí su nombre); pero a pesar de ello resulta que los elementos de $X^*$ son también $\omega$-continuos.

**Proposición 1.6.16.** *Si $X$ es un espacio normado, entonces $f^* \in X^*$ si y sólo si $f^* : (X, \sigma(X, X^*)) \longrightarrow \mathbb{K}$ es continua.*

**Demostración:**
Por la Definición 1.6.14 tenemos que $f^*$ es $\omega$-continuo. Si $g$ es un funcional lineal continuo cualquiera, $U = \{x \in X : |g(x)| < 1\}$, $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ son tales que $V(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) \subset U$, entonces por Ecuación (1.37) para toda $\lambda > 0$,

$$\bigcap_{i=1}^{k} \ker f_i^* \subset V(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \lambda\varepsilon) \subset \lambda U = \{x : |g(x)| < \lambda\}.$$

Por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^{k} \ker f_i^* \subset \ker g$. Pero curiosamente, si $\cap_{i=1}^{k} \ker f_i^* \subset \ker g$, resulta que $g$ es una combinación lineal de $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*$. Supongamos que $g(x) = 0$ para toda $x \in \ker g$. Definamos $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ por $\Phi(x) = (f_1^*(x), \ldots, f_n^*(x))$. Sea $E = \Phi X$, el cual es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$, ya que, si $\Phi(x), \Phi(y) \in E; \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
&\lambda\Phi(x) + \Phi(y) = \lambda(f_1^*(x), \ldots, f_n^*(x)) + (f_1^*(y) + \ldots, f_n^*(y)) \\
\Longrightarrow &\lambda\Phi(x) + \Phi(y) = (\lambda f_1^*(x), \ldots, \lambda f_n^*(x)) + (f_1^*(y), \ldots, f_n^*(y)) \\
\Longrightarrow &\lambda\Phi(x) + \Phi(y) = (f_1^*(\lambda x), \ldots, f_n^*(\lambda x)) + (f_1^*(y) + \ldots, f_n^*(y)) = (f_1^*(\lambda x + y), \ldots, f_n^*(\lambda x + y))
\end{aligned}$$

Así $\lambda\Phi(x) + \Phi(y) \in E$. Definamos la función lineal $\psi : E \longrightarrow \ker g$ por $\psi(f_1^*(x), \ldots, f_n^*(x)) = \psi(\Phi(x)) = g(x)$. Por tanto, $\psi$ está bien definida, ya que si $\Phi(x) = \Phi(y)$, pero por como hemos definido $\Phi$, obtenemos que $g(x) = g(y)$. Sea $\Psi$ una extensión lineal de $\Psi$ a $\mathbb{K}^n$. Como $\mathbb{K}^n$ es un espacio normado, cuya norma es definida por un producto punto, por el Teorema de representación de Riesz (veáse [4]), existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tales que,

$$\Psi(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,$$

y como $g = \Psi \circ \Phi$, obtenemos que $g(x) = \Psi(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^*(x)$. ■

**Lema 1.6.17.** *Sean $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ y $g$ funcionales lineales en $X$. Si $M = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0\}$, son equivalentes*

*(i) Existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $g = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$.*

*(ii) Existe $C < \infty$ tal que,*

$$|g(x)| \leq C \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)|, \text{ para toda } x \in X.$$

*(iii) $g(x) = 0$ para toda $x \in M$.*

**Demostración:**
*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*. Supongamos que existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $g = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$. Entonces

$$\begin{aligned}
&|g(x)| = |\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x)| \leq |\lambda_1 f_1(x)| + \ldots + |\lambda_n f_n(x)| \\
\Longrightarrow &|g(x)| \leq |\lambda_1||f_1(x)| + \ldots + |\lambda_n||f_n(x)| \leq |\lambda_1| \max_{1 \leq i \leq n} |f_i| + \ldots + |\lambda_n| \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)| \\
\Longrightarrow &|g(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|(n) \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)| \leq C \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)|; \ C = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|(n).
\end{aligned}$$

Por tanto, $|g(x)| \leq C \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)|$.

*(ii)* $\Longrightarrow$ *(iii)*. Sea $x \in M$, entonces $g(x) = \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x)$, pero, $f_i(x) = 0, \forall x \in M$, es decir, $g(x) = \lambda_1(0) + \ldots + \lambda_n(0) = 0$. Por lo que, $g(x) = 0$, para toda $x$ en $M$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Supongamos que $g(x) = 0$ para toda $x \in M$. Definamos $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ por $\Phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Sea $E = \Phi X$, sabemos que es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$, ya que, si $\Phi(x), \Phi(y) \in E$; $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\lambda\Phi(x) + \Phi(y) = \lambda(f_1(x), \ldots, f_n(x)) + (f_1(y) + \ldots, f_n(y)) \\
\Longrightarrow &\lambda\Phi(x) + \Phi(y) = (\lambda f_1(x), \ldots, \lambda f_n(x)) + (f_1(y) + \ldots, f_n(y)) \\
\Longrightarrow &\lambda\Phi(x) + \Phi(y) = (f_1(\lambda x), \ldots, f_n(\lambda x)) + (f_1(y), + \ldots, f_n(y)) \\
\Longrightarrow &\lambda\Phi(x) + \Phi(y) = (f_1(\lambda x + y), \ldots, f_n(\lambda x + y)).
\end{aligned}$$

Por lo que $\lambda\Phi(x)+\Phi(y) \in E$. Definimos la función lineal $\psi : E \longrightarrow M$ por $\psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \psi(\Phi(x)) = g(x)$. Por tanto, $\psi$ está bien definida, ya que si $\Phi(x) = \Phi(y)$ , por $(iii)$, obtenemos que $g(x) = g(y)$. Sea $\Psi$ una extensión lineal de $\Psi$ a $\mathbb{K}^n$, como $\mathbb{K}^n$ es un espacio normado, cuya norma es definida por un producto interno, por el Teorema de representación de Riesz (veáse [4]), existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tales que

$$\Psi(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \text{ y como } g = \Psi \circ \Phi,$$

obtenemos que $g(x) = \Psi(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)$. ■

**Corolario 1.6.18.** *Sea $X$ un espacio normado. Si $f^*, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^* \in X^*$ y $\varepsilon, \delta > 0$ son tales que $V(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) \subset V(f^*, \delta)$, entonces $f^*$ es combinación lineal de $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*$.*

**Demostración:**

Veremos que $\sum_{i=1}^{n} \ker f_i^* \subset \ker f^*$. Sabemos que si $x \in \cap_{i=1}^{k} \ker f_i^*$ , también $nx \in \cap_{i=1}^{k} \ker f_i^*$ para toda $n \in N$. Por lo tanto $|f^*(nx)| < \delta$, o equivalentemente, $|f^*(x)| < \frac{\delta}{n}$ para toda $n \in N$, lo cual prueba nuestra afirmación y por el Lema 1.6.17 $iii) \longrightarrow i)$, tenemos que $f^*$ es una combinación lineal de $f_i^*$ ■

Sea $X$ un espacio normado, entonces $X^*$ se puede ver como el espacio dual de $X$ y también como el espacio cuyo dual es $X^{**}$. Por lo tanto, además de las topologías de la norma y la débil $\sigma(X^*, X^{**})$, se puede definir otra importante topología en $X^*$.

**Definición 1.6.19.** *Sean $X$ un espacio normado y $X^*$ su dual. La topología débil estrella en $X^*$, denotada por $\sigma(X^*, X)$ o simplemente por $w^*$, es la topología que tiene como base local de $f_0^* \in X^*$ a los conjuntos de la forma*

$$V(f_0^*, x_1, x_2, \ldots. x_k, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} \{f^* \in X^* : |[f_0^* - f^*](x_i)| < \varepsilon\}, \text{ con } x_1, x_2, \ldots, x_k \in X \text{ y } \varepsilon > 0. \tag{1.38}$$

La topología débil estrella es también de Hausdorff y las vecindades $\omega^*$ tienen propiedades análogas a las presentadas en las Ecuaciones (1.35) y (1.36). Entonces las operaciones de espacio vectorial en $X^*$ son también $\omega^*$-continuas.

**Lema 1.6.20.** *La Topología débil estrella es de Hausdorff.*

**<u>Demostración:</u>**
Sea $\tau_{\omega^*}$ la topología débil estrella sobre el espacio $X$. Sean $U, W \in \tau_{\omega^*}$ y $f_0^* \in U$, $g_0^* \in W$ tales que $f_0^* \neq g_0^*$, $f_0^*(x_i) \neq 0$ y $g_0^*(x_i) \neq 0$. Hagamos

$$\varepsilon = \min_k \frac{|(f_0^* - g_0^*)(x_i)|}{2}, \text{ de donde } \varepsilon > 0.$$

Como $f_0^* \in U$ y $g_0^* \in W$, entonces existe $V(f_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon)$ y $V(g_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon)$ tales que,

$$f_0^* \in V(f_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) = \bigcap \{f^* \in X^* : |(f_0^* - f^*)(x_i)| < \varepsilon\},$$
$$g_0^* \in V(g_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) = \bigcap \{f^* \in Xj : |(f_0^* - f^*)(x_i)| < \varepsilon\}.$$

Demostremos que $V(f_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) \cap V(g_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) = \emptyset$. Razonemos por contradicción. Supongamos que $h^* \in V(f_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) \cap V(g_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon)$, esto significa que $|(f_0^* - h^*)(x_i)| < \varepsilon$ y $|(g_0^* - h^*)(x_i)| < \varepsilon$ por lo que

$$|(f_0^* - h^*)(x_i)| + |(g_0^* - h^*)(x_i)| < 2\varepsilon \Longrightarrow |f_0^*(x_i) - h^*(x_i)| + |-g_0^*(x_i) + h^*(x_i)| < 2\varepsilon$$
$$\Longrightarrow |f_0^*(x_i) - h^*(x_i) - g_0^*(x_i) + h_k^*(x_i)| < 2\varepsilon; \text{ desigualdad del triángulo}$$
$$\Longrightarrow |f_0^*(x_i) - g_0^*(x_i)| < 2\varepsilon \Longrightarrow |(f_0^* - g_0^*)(x_i)| < 2\varepsilon = 2\min_k \frac{|f_k^*(x_0 - y_0)|}{2} = \min_k |(f_0^* - g_0^*)(x_i)|.$$

Así $|(f_0^* - g_0^*)(x_i)| < min_k |(f_0^* - g_0^*)(x_i)|$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$V(f_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) \cap V(g_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) = \emptyset.$$

Entonces $\tau_{\omega^*}$ es de Hausdorff. ■

Observemos que cuando $X$ es reflexivo, coinciden las topologías débil y débil estrella (ver Teorema 1.8.1). De hecho esto caracteriza a los espacios reflexivos, lo que se verá más adelante en el Teorema 1.8.1. Además, sabemos que $\sigma(X^*, X) \subset \sigma(X^*, X^{**})$, cuando $X$ no es reflexivo la topología débil estrella es más gruesa que la topología débil.
Recordemos que una topología en un conjunto $X$ es metrizable si existe una métrica en $X$ que induce dicha topología, y que las topologías inducidas por métricas satisfacen el primer axioma de numerabilidad **1AN**, es decir, todo punto en $X$ tiene una base local numerable. Veremos que los únicos espacios normados cuya topología débil (débil estrella en caso de espacios duales) es metrizable, son los espacios de dimensión finita; esto nos da una diferencia sustancial entre las topologías débiles y de la norma, ya que todo espacio normado es métrico.

**Proposición 1.6.21.** *Sea $X$ un espacio de Banach,*

*(a) Si la topología $\omega$ en $X$ es metrizable, entonces $X$ tiene dimensión finita.*

*(b) Si la topología $\omega^*$ en $X^*$ es metrizable, entonces $X^*$ y consecuentemente $X$ tienen dimensión finita.*

**Demostración:**

Demostremos $a$). Como $\sigma(X, X^*)$ es metrizable, sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base local de 0. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $y^*_{n,1}, \ldots, y^*_{n,k} \in X^*$ y un racional $\varepsilon_n > 0$ tales que $V(y^*_{n,1}, y^*_{n,2}, \ldots, y^*_{n,k}, \varepsilon_n) \subset U_n$. Sea

$$M = \{f^*_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{y^*_{n,1}, y^*_{n,2}, \ldots, y^*_{n,k(n)}\right\}.$$

Entonces para toda vecindad débil $W$ de 0, existen $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ y $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ con $V(f^*_{n_1}, f^*_{n_2}, \ldots, f^*_{n_k}, \varepsilon) \subset W$. Sea $f^* \in X^*$, como $V(f^*, 1)$ es una vecindad débil de cero, existen $n_k$ y $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ con $V(f^*_1, f^*_2, \ldots, f^*_{n_k}, \varepsilon) \subset V(f^*, 1)$. Del Corolario 1.6.18, concluimos que $f^*$ es combinación lineal de $f^*_1, f^*_2, \ldots, f^*_{n_k}$. Luego, sea $F_m = span\{f^*_i\}_{i=1}^m$, entonces cada $F_m$ es un conjunto cerrado por ser un subespacio de dimensión finita de $X^*$, $\{f^*_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y lo anterior prueba que $X^* = \cup_{m\in\mathbb{N}} F_m$. Por el Teorema 1.5.13 (Teorema de Baire), existe $F_m$ con interior no vacío y entonces por el Lema 1.5.16, $X^* = F_m$ que tiene dimensión menor o igual que $m$; pero si $X^*$ tiene dimensión finita, $X$ también la tiene. Por lo que, $X$ es de dimensión finita.

Ahora demostremos $b$). Como $\sigma(X^*, X)$ es metrizable, sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base local de 0. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $y_{n,1}, \ldots, y_{n,k} \in X$ y un racional $\varepsilon_n > 0$ tales que $V(y_{n,1}, y_{n,2}, \ldots, y_{n,k}, \varepsilon_n) \subset U_n$. Sea

$$M = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{y_{n,1}, y_{n,2}, \ldots, y_{n,k(n)}\right\}.$$

Entonces para toda vecindad débil $W$ de 0, existen $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ y $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ con $V(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \varepsilon) \subset W$. Sea $x \in X$; como $V(x, 1)$ es una vecindad débil de cero, existen $n_k$ y $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ con $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}, \varepsilon) \subset V(x, 1)$. Del Corolario 1.6.18, concluimos que $x$ es combinación lineal de $x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}$. Luego, sea $F_m = span\{x_i\}_{i=1}^m$, entonces cada $F_m$ es un conjunto cerrado por ser un subespacio de dimensión finita de $X$, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y lo anterior prueba que $X = \cup_{m\in\mathbb{N}} F_m$. Por el Teorema 1.5.13 (Teorema de Baire), existe $F_m$ con interior no vacío y entonces por el Lema 1.5.16, $X = F_m$ que tiene dimensión menor o igual que $m$; pero si $X$ tiene dimensión finita $X^*$ también la tiene. Por tanto, $X^*$ es de dimensión finita. ■

Sea $X$ un espacio normado y $X^*$ su espacio dual. Cuando hagamos cualquier afirmación referente a la topología sin mencionar de cuál se trata, nos referiremos a la topología inducida por la norma (véase Definición 1.1.30). Por ejemplo, si decimos $A$ es cerrado nos referimos a cerrado con respecto a la norma y para decir que $A$ es cerrado en la topología débil diremos que $A$ es $\omega$-cerrado o $A$ es $\sigma(X, X^*)$-cerrado. Como antes, $\overline{A}$ denota la cerradura de $A$ en la norma; a la cerradura débil la denotaremos por $\overline{A}^{\omega}$ y a la cerradura débil estrella por $\overline{A}^{\omega^*}$.

En general la cerradura débil y la cerradura de un conjunto son diferentes. Sin embargo si un conjunto es convexo, ambas cerraduras coinciden. Esto lo probaremos en un contexto más general en la Proposición 2.4.16 en el capítulo 2, pues en su demostración se requiere una forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach en espacios vectoriales topológicos que se estudiará en dicho capítulo.

**Proposición 1.6.22.** *Sea $X$ un espacio normado. Si $A \subset X$ es convexo, entonces $\overline{A} = \overline{A}^{\omega}$.*

*En consecuencia un subconjunto convexo de $X$ es cerrado si y sólo si es débilmente cerrado.*

El resultado anterior nos permite construir sucesiones convergentes a 0 a partir de sucesiones débilmente convergentes a 0.

**Lema 1.6.23.** *Sean $X$ un espacio normado y $A \subset X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

*(i)* *$A$ es débilmente acotado.*

*(ii)* $\sup_{x\in A} |f^*(x)| < \infty$ *para toda* $f^* \in X^*$.

*(iii)* *$A$ es acotado.*

<u>**Demostración:**</u>
$(i) \Longrightarrow (ii)$. Supongamos que $A$ es débilmente acotado y que $f^* \in X^*$. Sea $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda A \subset V(f^*, 1) = \{x \in X : |f^*(x)| < 1\}.$$

Entonces si $x \in A, |f^*(\lambda x)| < 1$ y por lo tanto $\sup_{x\in A} |f^*(x)| \leq \infty$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Supongamos que para $f^* \in X^*, \sup_{x\in A} |f^*(x)| = M_{f^*}$. Sea $V$ una vecindad de 0 y $V(f_1^*, \ldots, f_n^*, \varepsilon) \in V$. Sea $V(f_1^*, \ldots, f_n^*, \varepsilon) \subset V$, entonces por definición de topología débil (Definición 1.6.14)

$$V(f_1^*, \ldots, f_n^*, \varepsilon) = \cap_{i=1}^{k} \{x \in X : |f_i^*(x)| < \varepsilon\},$$

entonces tenemos

$$V(f_1^*, \ldots, f_n^*, \varepsilon) = \cap_{i=1}^{k} \{x \in A : |f_i^*(x)| < \varepsilon\}.$$

Definamos $M_{f^*} = \sup_{x\in A} |f^*(x)|$, entonces $M_{f_i^*} = \sup_{x\in A} |f_i^*(x)|$. Si $x \in A$,

$$x \in A \Longrightarrow |f_i^*(x)| \leq \max_{1\leq i\leq n} M_{f_i^*} \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{\max_{1\leq i\leq n} M_{f_i^*}} |f_i^*(x)| < \varepsilon \Longrightarrow \lambda |f_i^*(x)| < \varepsilon.$$

Con $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{\max_{1\leq i\leq n} M_{f_i^*}}$. Pero sabemos que $\lambda x \in A$, así

$$\lambda x \in V(f_1^*, \ldots, f_n^*, \varepsilon) \Longrightarrow \lambda A \subset V(f_1^*, \ldots, f_n^*, \varepsilon).$$

$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$. Como $X^*$ es un espacio de Banach, podemos aplicar el principio del acotamiento uniforme (Teorema 1.5.17) a la familia de operadores $\{j(x) : x \in A\}$, donde $j$ es la inyección canónica de $X$ en $X^{**}$. Entonces

$$\sup_{x\in A} \|x\| = \sup_{x\in A} \|j(x)\| < \infty, \text{ si y sólo si, } \sup_{x\in A} |[j(x)]_{f^*}| = \sup_{x\in A} |f^*(x)| < \infty, \text{ para toda } f^* \in X^*.$$

Demostremos lo anterior.
"$\Longrightarrow$"
Sea $\sup_{x\in A}\|x\| = \sup_{x\in A}\|j(x)\| < \infty$. Sabemos que $[j(x)]_{f^*} = j(f^*)_{(x)} = f^*(j(x))$ y $|f^*(j(x))| \leq \|f^*\|\|j(x)\|$, entonces

$$\begin{aligned}|f^*(j(x))| \leq \|f^*\|\|j(x)\| &\Longrightarrow \sup_{x\in A}|f^*(j(x))| \leq \sup_{x\in A}\|f^*\|\|j(x)\| \\ &\Longrightarrow \sup_{x\in A}|f^*(j(x))| \leq \|f^*\|\sup_{x\in A}\|j(x)\|.\end{aligned}$$

Pero, $\sup_{x\in A}\|j(x)\| = \sup_{x\in A}\|x\|$, entonces

$$\sup_{x\in A}|f^*(j(x))| < \|f^*\|\sup_{x\in A}\|x\| \Longrightarrow \sup_{x\in A}|f^*(j(x))| < \infty.$$

Además $[j(x)]_{f^*} = f^*(j(x)) = f^*(x)$, por lo que,

$$\sup_{x\in A}|f^*(j(x))| = \sup_{x\in A}|f^*(x)| < \infty, \text{ para toda } x \in X^*.$$

■

Hasta aquí hemos estudiado los conjuntos $\omega$-acotados y los conjuntos $\omega$-cerrados y convexos, ¿qué pasará con los conjuntos $\omega$-compactos?. Supongamos que $K$ es un subconjunto $\omega$-compacto de un espacio normado $X$. Entonces $K$ es $\omega$-cerrado y por ende cerrado bajo la norma. Por otra parte, como toda $f^* \in X^*$ es $\omega$-continua, $f^*(K)$ es compacto, y por lo tanto acotado en $\mathbb{K}$. Consecuentemente por $(ii)$ y $(iii)$ del lema anterior, $K$ es $\omega$-acotado y también acotado bajo la norma. Hemos probado entonces que todo conjunto $\omega$-compacto es cerrado y acotado por la norma. Presentaremos un ejemplo que prueba que el recíproco es falso.

**Ejemplo 1.6.24.**
*Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de vectores unitarios en $c_0$ y $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de vectores unitarios en $\ell^1$, entonces $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es biortogonal a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, es decir,*

$$e_n^*(e_m) = \begin{cases} 0 & si \; n\neq m. \\ 1 & si \; n=m. \end{cases}$$

**Demostración:**
Para $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$. El conjunto $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto acotado, por el Ejemplo 1.2.8, $c_0$ adquiere la norma de $\ell^{\infty}$, por lo que $\|s_n\| = \text{máx}\{|e_1|, |e_2|, \ldots, |e_n|\} = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veremos que es $\omega$-cerrado pero que no es $\omega$-compacto. Probemos que $c_0 - \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $\omega$-abierto, es decir toda $V(x_0, e_i^*, \varepsilon) \subset c_0 - \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in c_0 - \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Definamos a $V(x_0, e_1^*, \ldots, e_n^*, \varepsilon) = \{x \in c_0 : \; |e_i^* - e_j^*(x - x_0)| < \varepsilon\}$, primero observemos que cada $x \in c_0$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores unitarios $e_i$.

Caso 1: Probemos que sucede si $x_0 = 0$. Aplicando la Definición 1.6.14, podemos tomar la siguiente vecindad alrededor de cero, $V(e_1^*, 1) = \{x \in c_0 : \ |e_1^*(x) < 1\}$, demostremos que $V \subset c_0 - \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $x \in V$, entonces

$$x \in V \Longrightarrow |e_1^*(x)| < 1 \Longrightarrow x \in c_0.$$

Pero si, $x \in c_0$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, pero por definición de combinación lineal $x$ tiene representación única, por lo que $x \neq \sum_{i=1}^{n} e_i$ es decir que, $x \in c_0 - \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por lo tanto, $V \subset c_0 - \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Caso 2: Ahora demostremos que sucede si $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Sea $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ y $x = \sum_{j=1}^{k} a_j e_j$, entonces

$$|e_i^*(x_0 - x)| = \left| e_i^* \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n - \sum_{j=1}^{k} a_j e_j \right) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} e_i^*(a_n e_n) - \sum_{j=1}^{k} e_i^*(a_j e_j) \right|.$$

Pero para cada $i \neq n$, $e_i^*(e) = 0$, al igual sí, $i \neq j$ y 1 en otro caso, entonces existe $a_n e_n$ tal que,

$$|e_i^*(a_n e_n)| = |a_n e_i^*(e_n)| = |a_n * 1| = |a_n|,$$

o con $j = i$, tal que

$$|1 - e_i^*(a_j e_j)| = |1 - a_j e_i^*(e_j)| = |1 - a_j * 1| = |1 - a_j|.$$

Si $a_n \neq 0, 1$, $a_j \neq 0, 1$ tenemos, $V(x_0, e_i^*, \varepsilon) = \{x \in c_0 : \ |e_i^*(x_0 - x) < \varepsilon\}$ con $\varepsilon = \text{mín}\{|a_n|, |1 - a_j|\}$. Podemos observar que sí $x \in V$, $x \in c_0$, pero $x \neq s_i$, con $1 \neq i < \infty$, por lo tanto, $V \subset c_0 - \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Caso 3: Si en el caso anterior, $a_n = 1$ y $a_j = 0$ ó $a_j = 1$ y $a_n = 0$, donde $n = i$, $i + 1 = j$, en cualquiera de los dos casos tenemos, $V(x_0, e_i^*, e_{i+1}^*, \varepsilon) = \{x \in c_0 - \{s_n\}_{n=1}^{\infty} : \ |(e_i^* - e_{i+1}^*)(x_0 - x)| < \varepsilon\}$, donde $\varepsilon = 1$, podemos observar que si $x \in V$, entonces $x \in c_0$ y $x \notin \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por lo tanto, $V \subset c_0 - \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como $c_0 - \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es abierto, por definición de complemento, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $\omega$-cerrado. Ahora bien, demostremos que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es $\omega$-compacto. Supongamos que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $\omega$-compacto, entonces existe una colección de vecindades que cubren a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ una cubierta para $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que,

$$V_n = \{x \in c_0 : \ |(e_n^* - e_{n+1}^*)(s_n - x)| < 1\},$$

podemos ver que cada $V_n$ corresponde a $s_n$ por lo cual, $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una cubierta para $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Supongamos que $s_m \in V_n$ con $m \neq n$, entonces

$$|(e_n^* - e_{n+1}^*)(s_n - s_m)| < 1.$$

Si $s_n < s_m$, entonces

$$\begin{aligned} |(e_n^* - e_{n+1}^*)(s_n - s_m)| < 1 &\Longrightarrow \left| (e_n^* - e_{n+1}^*) \left( \sum_{i=1}^{n} a_i e_i - \sum_{m=1}^{\infty} a_m e_m \right) \right| < 1 \\ &\Longrightarrow \left| [e_n^* - e_{n+1}^*] \left( - \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m e_m \right) \right| < 1. \end{aligned}$$

Pero en el caso 3 obtuvimos que el elemento $e^*_{n+1}$ corresponde a $-\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m e_m$. Pero $|-\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m e^*_{n+1}(e_m)| = |a_{n+1}| < 1$, entonces si $a_{n+1} = 1$, tenemos que $1 < 1$ y es una contradicción, por lo que lo supuesto es falso y $s_m \notin V_n$. De la misma forma si $s_n > s_m$, es decir no podemos tomar un sub-recubrimiento finito de $V_n$ que cubra a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ya que existirán $s_i$ que no estarán en $V_n$ por tanto lo supuesto es falso y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es $\omega$-compacto. ■

**Teorema 1.6.25.** ***(Banach-Alaoglu)***. *Para todo espacio normado $X$, la bola $B_{X^*}$ es $\omega^*$ compacta y en consecuencia todo subconjunto $\omega^*$-cerrado y acotado de $X^*$, es $\omega^*$-compacto.*

**Demostración:**

Dado $f^* \in B_{X*}$, para toda $x \in B_X$ se tiene que $|f^*(x)| \leq \|f^*\|\|x\| \leq 1$. Por lo tanto, para cada $x^* \in B_{X^*}$, $f^*(B_X) \subset D$, donde $D = \{\lambda \in \mathbb{K} \ : \ |\lambda| \leq 1\}$. Sea $\mathcal{D} = \prod_{x \in B_X} D = D^{B_X}$ con la topología producto. Como $D$ es compacto, por el Teorema de Tychonoff (véase [2]) se sigue que $\mathcal{D}$ es compacto. Definimos $F : B_{X^*} \longrightarrow \mathcal{D}$ mediante,

$$X^* \longrightarrow F(X^*) \text{ tal que } F(f^*)(x) = f^*(x),$$

para cada $x \in B_X$. Es decir que $F(f^*)$ es aquel elemento de $\mathcal{D}$ cuya coordenada $x$ es precisamente $f^*(x)$. Consideremos en $B_{X^*}$ la topología del subespacio denominada por $\omega^*$. Probaremos que $F$ es un homeomorfismo sobre su imagen y que la imagen de $B_{X^*}$ es cerrada en $\mathcal{D}$.

Primero probemos que $F$ es función. Tenemos que demostrar que si $f_1^* = f_2^*$, $\forall\ x \in B_X$, entonces $F(f_1^*(x)) = F(f_2^*(x))$, así para

$$f_1^*(x) = f_2^*(x) \Longrightarrow F(f_1^*(x)) = F(f_2^*(x)); \ \ \text{por definición de } F.$$

Ahora probemos que $F$ es inyectiva. Supongamos que $F(f_1^*) = F(f_2^*)$; probaremos que $f_1^* = f_2^*$, $\forall\ x \in B_X$, por lo que

$$F(f_1^*) = F(f_2^*) \Longrightarrow f_1^*(x) = f_2^*(x);\ \forall\ x \in B_X \Longrightarrow f_1^* = f_2^*.$$

Ahora probaremos que $F$ es un homeomorfismo sobre su imagen y que la imagen de $B_{X^*}$ es cerrada en $\mathcal{D}$. Sean $f_0^* \in B_{X^*}$ y $V = \cap_{i=1}^{n}\{f^* \in B_{X^*} : |f_0^*(x_i) - f^*(x_i)| < \varepsilon\}$ una vecindad $\omega^*$ de $f_0^*$ en $B_{X^*}$. Como $|f_0^*(x_i) - f^*(x_i)| = |F(f_0^*(x_i)) - F(f^*(x))$, tenemos que,

$$\begin{aligned} &V = \cap_{i=1}^{n}\{f^* \in B_{X^*} : |f_0^*(x_i) - f^*(x)| < \varepsilon\} \\ \Longrightarrow &F(V) = F(\cap_{i=1}^{n}\{f^* \in B_{X^*} : |f_0^*(x_i) - f^*(x)| < \varepsilon\}) \\ \Longrightarrow &F(V) = \cap_{i=1}^{n} F\{f^* \in B_{X^*} : |f_0^*(x_i) - f^*(x)| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Por lo que,

$$F(V) = \cap_{i=1}^{n}\{F(f^*) : \ f^* \in B_{X^*} \text{ y } |F(f_0^*(x_i)) - F(f^*(x_i))| < \varepsilon\}. \tag{1.39}$$

Y sabemos por la Proposición 1.1.29 inciso $b$), que $F(V)$ es abierto en $F(B_{X^*}) \cap \mathcal{D}$. Ahora bien observemos que, sí $F(V) \in \omega^*$, entonces

$$F(V) = \cap_{i=1}^{n}\{F(f^*) \in B_{X^*} : |[F(f_0^*)](x_i) - [F(f^*)](x)| < \varepsilon\} \in \omega^*$$

Pero $[F(f^*)](x) = f^*(x)$ por como se encuentra definida $F$, así

$$F(V) = \cap_{i=1}^{n}\{f^* \in B_{X^*} : |f_0^*(x_i) - f^*(x)| < \varepsilon\} \in \omega^*.$$

Además sabemos que $V = \cap_{i=1}^{n}\{f^* \in B_{X^*} : |f_0^*(x_i) - f^*(x)| < \varepsilon\}$, es decir, $V \in \omega^*$. Y así, aplicando la Definición 1.2.1, obtenemos que, $F$ es un homeomorfismo. Probaremos ahora que $F(B_{X^*})$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{D}$ y por ende compacto. Sea $g_0 \in \overline{F(B_{X^*})} \subset \mathcal{D}$, entonces

$$|g_0(x)| \leq 1 \text{ para toda } x \in B_X. \tag{1.40}$$

Sean $\tilde{g_0} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ y $\tilde{F} : B_{X^*} \longrightarrow X^*$ dados por $\tilde{g_0}(0) = 0$ y si $x \neq 0$ $\tilde{g_0}(x) = \|x\| g_0\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ y $\tilde{F}(f^*)(x) = f^*(x)$ para $x \in X$. Obtenemos que $\tilde{g_0}$ es lineal pues si $x_1, x_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ y $\varepsilon > 0$, por Ecuación (1.39) tenemos que, existe $f^* \in B_{X^*}$ tal que se satisfacen las siguientes tres desigualdades.
Si $x_1 \neq 0$ y $x_2 = 0$.

$$\begin{aligned}\left|[\tilde{F}(f)](x_1) - \tilde{g_0}(x_1)\right| < \varepsilon &\Longrightarrow \left|[\tilde{F}(f)]\left(\|x_1\|\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}\right)\right) - \tilde{g_0}\left(\|x_1\|\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}\right)\right)\right| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \|x_1\|\left|[\tilde{F}(f)]\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}\right) - g_0\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}\right)\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Si $x_2 \neq$ y $x_1 = 0$.

$$\begin{aligned}\left|[\tilde{F}(f)](x_2) - \tilde{g_0}(x_2)\right| < \varepsilon &\Longrightarrow \left|[\tilde{F}(f)]\left(\|x_2\|\left(\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\right) - \tilde{g_0}\left(\|x_2\|\left(\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\right)\right| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \|x_2\|\left|[\tilde{F}(f)]\left(\frac{x_2}{\|x_2\|}\right) - g_0\left(\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Si $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \neq 0$.

$$\begin{aligned}&\left|[\tilde{F}(f)](\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \tilde{g_0}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\right| < \varepsilon \\ \Longrightarrow &\left|[\tilde{F}(f)]\left(\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|}\right)\right) - \tilde{g_0}\left(\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|}\right)\right)\right| < \varepsilon \\ \Longrightarrow &\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|\left|[\tilde{F}(f)]\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|}\right) - g_0\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|}\right)\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ahora bien, si,

$$\begin{aligned}&|\tilde{g_0}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1\tilde{g_0}(x_1) - \lambda_2\tilde{g_0}(x_2)| \\ &= |\tilde{g_0}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1\tilde{g_0}(x_1) - \lambda_2\tilde{g_0}(x_2) - [\tilde{F}(f)](\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_1[\tilde{F}(f)](x_1) + \lambda_2[\tilde{F}(f)](x_2)| \\ &= |\tilde{g_0}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - [\tilde{F}(f)](\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_1[\tilde{F}(f)](x_1) - \lambda_1\tilde{g_0}(x_1) + \lambda_2[\tilde{F}(f)](x_2) - \lambda_2\tilde{g_0}(x_2)| \\ &\leq |\tilde{g_0}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - [\tilde{F}(f)](\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| + |\lambda_1[\tilde{F}(f)](x_1) - \lambda_1\tilde{g_0}(x_1)| + |\lambda_2[\tilde{F}(f)](x_2) - \lambda_2\tilde{g_0}(x_2)| \\ &\leq [\tilde{g_0} - \tilde{F}(f)](\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + |[\lambda_1[\tilde{F}(f)] - \lambda_1\tilde{g_0}](x_1)| + |[\lambda_2[\tilde{F}(f)] - \lambda_2\tilde{g_0}](x_2)| \\ &\leq \varepsilon + |\lambda_1|\varepsilon + |\lambda_2|\varepsilon = (1 + |\lambda_1| + |\lambda_2|)\varepsilon.\end{aligned}$$

Si $x_1 = 0$, ó $x_2 = 0$, ó $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ las desigualdades anteriores se cumplen, ya que $\varepsilon$ es arbitrario por lo que $\tilde{g_0}$ es lineal. De manera semejante se prueba que para $x \in B_X,\ g_0(x) = \|x\| g_0\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$, tenemos que, $\tilde{g_0} = g_0$, aplicando la Ecuación (1.40) obtenemos $\|\tilde{g_0}\| \leq 1$. Así, $g_0 = F(\tilde{g_0}) \in F(B_{X^*})$. Es decir, $F(B_{X^*})$ es cerrado y por lo tanto compacto. Como $F$ es un homeomorfismo, tenemos que $B_{X^*}$ es $\omega$-compacta. ■

**Definición 1.6.26.** *Un conjunto $X$ es separable si tiene un subconjunto denso y numerable.*

**Ejemplo 1.6.27.** *El espacio de funciones $C[0,1]$ donde $[0,1]$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es separable. (Definición 1.1.34).*

**<u>Demostración:</u>**
Demostraremos que el espacio $C[0,1]$ tiene un subconjunto denso y numerable. Denotemos a $\mathcal{P}$ como todos los polinomios restringidos en $[0,1]$. Sea

$$S = \{p \in \mathcal{P} : \text{Los coeficientes de } p \text{ son números racionales}\}.$$

Observemos que $S$ es numerable por como está definido y dado que $\mathbb{Q}$ es numerable. Basta probar que $S$ es denso en $C[0,1]$. Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \cdots, n$ arbitrario. Para cada $\varepsilon > 0$, como $\mathbb{Q}$ es denso podemos escoger algunos $b_j \in \mathbb{Q}$ tal que $|a_j - b_j| < \frac{\varepsilon}{n+1}$ para todo $j$. Luego, existe $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_j x^j \in S$, tenemos

$$|p(x) - q(x)| = \left| \sum_{j=0}^{n} a_j x^j - \sum_{i=0}^{n} b_j x^j \right| = |a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n - (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)|$$
$$\Longrightarrow |p(x) - q(x)| = |(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n|$$
$$\Longrightarrow |p(x) - q(x)| \leq |a_0 - b_0| + |a_1 - b_1||x| + \cdots + |a_n - b_n||x^n| = \sum_{j=0}^{n} |a_j - b_j||x^j|$$
$$\Longrightarrow |p(x) - q(x)| < (n+1)\frac{\varepsilon}{2(n+1)} = \varepsilon,$$

para todo $x$. Concluimos que $\|p - q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, para cualquier $f \in C[0,1]$ y $\varepsilon > 0$, podemos aplicar el Teorema de aproximación de Weierstrass para obtener un polinomio $p$ tal que $\|f - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ y entonces encontrar algún $q \in S$ tal que $\|p - q\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Así,

$$\|f - q\|_\infty = \|f - q - p + p\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty + \|p - q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, $S$ es denso en $C[0,1]$. Por tanto, $C[0,1]$ es separable. ■

**Ejemplo 1.6.28.** *El espacio $\ell^p$ con $1 \leq p < \infty$ es separable.*

**<u>Solución:</u>**
Sea $M$ el conjunto de todas las sucesiones $y$ de la forma $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, 0, 0, \cdots)$. Donde $n$ es cualquier número entero positivo y los $\eta_i$ son racionales. $M$ es numerable por como está

definido. Mostraremos que $M$ es denso en $\ell^p$. Sea $x = \{\xi_i\} \in \ell^p$ arbitrario. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $n$ (dependiente de $\varepsilon$) tal que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Porque a la izquierda tenemos el resto de una serie convergente. Como los racionales son densos en $\mathbb{R}$, para cada $\xi_i$ existe un racional $\eta_i$ cerca de él. Por lo tanto, podemos encontrar $y \in M$ que satisface que

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Resulta que

$$\|x-y\|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$$

Por lo que $\|x-y\|^p < \varepsilon^p$, así $\|x-y\| < \varepsilon$, entonces $M$ es denso en $\ell^p$. Por tanto, $\ell^p$ es separable. ■

En la Proposición 1.6.21 vimos que las topologías débiles en espacios normados de dimensión infinita nunca son metrizables. Sin embargo, si $X$ es separable, la restricción de la topología débil estrella a conjuntos acotados sí es metrizable, es más estos conjuntos son débil estrella separables, para ello, primero demostraremos los siguientes lemas.

**Lema 1.6.29.** *Sea $X$ un espacio normado y sea $A \subset X$ tal que si $f^*(x) = 0$ para toda $x \in A$, se tiene que $f^* = 0$. Entonces $\overline{spanA} = X$.*

**<u>Demostración:</u>**
Sabemos que $\overline{spanA} \subset X$, por lo que sólo demostraremos $X \subset \overline{spanA}$. Sea $x \in X$, supongamos que $x \notin \overline{spanA}$, entonces por Teorema 1.5.8, existe un funcional $f^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f^*(y) = 0$ para todo $y \in \overline{spanA} \supseteq A$ y $f^*(x) = 0$, así, $f^*(a) = 0$, para todo $a \in A$, entonces por hipótesis tenemos que $f^* = 0$, es decir $f(x) = 0$, esto es una contradicción, concluimos que lo supuesto es falso y $x \in \overline{spanA}$, pero $x \in X$, por lo tanto $X \subset \overline{spanA}$, por lo cual $\overline{spanA} = X$. ■

**Lema 1.6.30.** *Sean $X$ un espacio normado y $A \subset X$ un conjunto infinito numerable, entonces $\overline{spanA} = X$ es un subespacio separable de $X$.*

**<u>Demostración:</u>**
Sea $B = \{a + bi;\ a, b \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q}^2$. Sea

$$\begin{aligned} \Phi :& B \longrightarrow \mathbb{Q}^2 \\ & a + bi \rightsquigarrow (a, b). \end{aligned}$$

Probaremos que $\Phi$ es inyectiva para poder demostrar que $B$ es numerable dado que $\mathbb{Q}^2$ es numerable porque $\mathbb{Q}$ lo es. Sea $\Phi(a + bi) = \Phi(c + di)$, entonces

$$\Phi(a + bi) = \Phi(c + di) \Longrightarrow (a, b) = (c, d) \Longrightarrow a = c \ \wedge \ b = d.$$

Así $a + bi = c + di$. Por lo tanto, $\Phi$ es inyectiva, así $B$ es numerable. Sea $a = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $E = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i,\ \alpha_i \in B,\ a_i \in A\}$. Sabemos que $A$ es numerable y $B$ también, así $E$ es numerable, además tenemos que $E \subseteq spanA$ ya que sólo consideramos los racionales y además $E \subseteq \overline{spanA}$. Sea $x \in \overline{spanA}$, $\varepsilon > 0$ tal que $\exists\ y \in spanA :\ \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $y \in spanA$ tenemos que $y = \sum_{i=1}^{N} r_i a_i,\ r_i \in \mathbb{K}$, pero $\mathbb{C} = \overline{B}$, es decir existen escalares $\beta_i \in B$ con $i = 1, 2, \ldots, N$ tal que

$$|r_i - \beta_i| < \frac{\varepsilon}{2N \max \|a_i\|}.$$

Ahora, sea $x_0 = \sum_{i=1}^{N} \beta_i a_i \in E$, entonces

$$\|x - x_0\| \leq \|x - y\| + \|y - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{i=1}^{N} r_i a_i - \sum_{i=1}^{N} \beta_i a_i \right\| = \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i (r_i - \beta_i) \right\|$$

$$\Longrightarrow \|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{N} \|a_i\| |r_i - \beta_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \max \|a_i\| \sum_{i=1}^{N} |r_i - \beta_i|$$

$$\Longrightarrow \|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \max \|a_i\| \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N \max \|a_i\|} = \frac{\varepsilon}{2} + \max \|a_i\| \frac{N\varepsilon}{2N \max \|a_i\|}$$

$$\Longrightarrow \|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Entonces $x_0 \in B(x, \varepsilon) \cap E$, por lo que $B(x, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$, por tanto $x \in \overline{E}$, pero $x \in \overline{spanA}$, así $\overline{spanA} = \overline{E}$, es decir $E$ es un conjunto denso y numerable en $\overline{spanA}$, concluimos que $\overline{spanA}$ es separable, por Definición 1.6.26. ■

**Ejemplo 1.6.31.** *El espacio $c_0$ es separable.*

**<u>Solución:</u>**

Sea $A$ definido por $A = \{(0, \cdots, 0, 1^{(i)}, 0, \cdots) : i \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto de $c_0$. Vamos a demostrar $spanA$ es denso y que $A$ es numerable en $c_0$. $A$ es numerable por como lo hemos definido, ya que $i \in \mathbb{N}$ donde $\mathbb{N}$ es numerable podemos crear una función inyectiva de $\mathbb{N}$ a $A$. Falta probar que $\overline{spanA} = c_0$. Por como está definido $A$, se tiene que, las combinaciones lineales de los elementos de $A$ es igual al siguiente conjunto

$$spanA = \{x \in \ell^{\infty} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0,\ \forall n \geq m\}.$$

Ahora si $x \in c_0$ consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots) : n \in \mathbb{N}\}$, de donde $\lim_{n\longrightarrow\infty}\{y_n\} = x$. Por lo que $x \in \overline{spanA}$. Así $spanA$ es denso en $c_0$, por Lema 1.6.30 $c_0$ es separable. ■

**Definición 1.6.32.** *Una subbase $\mathcal{B}$ para una topología $(\mathcal{S})$ sobre $X$, es una colección de subconjuntos de $X$ cuya unión es igual a $X$. La topología generada por la subbase $(\mathcal{S})$ se define como la colección $\tau$ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $(\mathcal{S})$.*

**Ejemplo 1.6.33.** *El conjunto de semirectas $s = \{(-\infty, b), (a, +\infty) | a, b \in \mathbb{R}\}$ es subbase de la topología usual de $\mathbb{R}$.*

**Solución:**
En efecto es una subbase, ya que los intervalos (que son las bolas de $\mathbb{R}$) son intersecciones de dos semirrectas: $(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$. ■

**Teorema 1.6.34.** *Sea $X$ un espacio normado, entonces son equivalentes*

*i) Toda bola cerrada en $X^*$ es $\sigma(X^*, X)$ metrizable.*

*ii) $B_{X^*}$ es $\sigma(X^*, X)$ metrizable.*

*iii) $X$ es separable.*

*Además cualquiera de las condiciones anteriores implica:*

*iv) $B_{X^*}$ es $\omega^*$ separable.*

**Demostración:**
Probemos $i) \Longrightarrow ii)$. Por hipótesis tenemos que toda bola cerrada en $X^*$ es $\sigma(X^*, X)$ metrizable, por lo cual cada $B_{X^*}$ es metrizable.

Probemos $ii) \Longrightarrow iii)$. Supongamos que $B_{X^*}$ es $\sigma(X^*, X)$ metrizable, ya que todo espacio métrico es *1 AN* tiene una base local de 0 numerable $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como en la demostración de la Proposición 1.6.21, sea $A = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que para toda $\omega^*$ vecindad $U$ de 0, existen $k$ y $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ con $V(y_1, y_2, \ldots, y_k, \varepsilon) \subset U$, tal que $V(y_1, y_2, \ldots, y_k, \varepsilon) \subset V(x, 1)$, entonces por Corolario 1.6.18 tenemos que $x$ podemos escribirlo como combinación lineal de $y_i$, si $f^* \in B_{X^*}$, por Lema 1.6.17 tenemos que $f^*(y_n) = 0$ para todo $y_n \in A$, $f^* \in \cap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$. Por lo tanto por Lema 1.6.29 el espacio lineal generado por $A$ es denso en $X$ y por Lema 1.6.30 $X$ es separable.

Probemos $iii) \Longrightarrow i)$. Supongamos que $X$ es separable y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en $B_X$. Sean $f^*,\ g^* \in X^*$. Si $f^*(x_n) = g^*(x_n)$ para toda $n$, de la densidad de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $B_X$ obtenemos que $f^* = g^*$, lo cual significa que si $f^* \neq g^*$, existe $N$ tal que, $f^*(x_N) \neq g^*(x_N)$. Sea $mBX^*$ una bola cerrada en $X^*$, $m > 0$. Como $|f^*(x_n)| \leq m$ para toda $f^* \in mB_{X^*}$, y definamos

$$d(f^*, g^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f^* - g^*)(x_n)|,$$

una métrica en $mB_{X^*}$ que induce la topología $w^*$ en $mB_{X^*}$, concluimos que $mBX^*$ la bola cerrada en $X^*$ es $\sigma(X^*, X)$ metrizable.

Ahora demostremos $iii) \Longrightarrow iv)$. Supongamos que $X$ es un espacio normado real y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión densa en $X$. Veremos que la colección de vecindades:

$$W(x_n, I) = \{f^* \in B_{X^*} :\ f^*(x_n) \in I\}, \tag{1.41}$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $I \subset \mathbb{R}$ cualquier intervalo abierto con extremos racionales, es una subbase de la topología $\sigma(X, X^*)$. En efecto, dados $f_0^* \in B_{X^*}$, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, sean $a, b > 0$ con

$\max(a,b) < \frac{\varepsilon}{2}$, tales que $f_0^* - a,\ f_0^*(x) + b \in \mathbb{Q}$. Sea $I = (f_0^*(x) - a,\ f_0^*(x) + b)$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_n\| < \min(a,b)$. Entonces se comprueba fácilmente que,

$$f_0^* \in W(x_n, I) \subset V(f_0^*, x, \varepsilon) = \{f^* \in B_{X^*} :\ |(f^* - f_0^*)(x)| < \varepsilon\}.$$

Como la colección de vecindades de la forma $V(f_0^*, x, \varepsilon)$ es una subbase de la topología $\sigma(X^*, X)$ en $B_{X^*}$, hemos probado el resultado enunciado. Por lo tanto, las intersecciones de los conjuntos de la Ecuación (1.41) son una base numerable de la topología $\sigma(X^*, X)$ en $B_{X^*}$. Finalmente, eligiendo un elemento de cada una de esas vecindades, obtenemos una sucesión $\sigma(X^*, X)$ densa en $B_{X^*}$, por lo tanto $B_{X^*}$ es $\omega^*$-separable. Si $X$ es complejo reemplazamos el intervalo $I$ en la Ecuación (1.41) por $I \times iJ$, donde $I$ y $J$ son intervalos reales con extremos racionales y el resto de la prueba es análogo. ■

Recordemos que un espacio topológico $K$ es secuencialmente compacto si toda sucesión en $K$ tiene una subsucesión convergente a un punto en $K$. Como en espacios métricos coinciden las nociones de compacidad y compacidad secuencial, obtenemos del Teorema anterior y del Teorema 1.6.25 (Banach-Alaoglu) el siguiente corolario conocido como el Teorema de selección de Helly.

**Corolario 1.6.35.** *Si $X$ es un espacio normado separable, entonces toda sucesión acotada en $X^*$ tiene una subsucesión $\omega^*$-convergente.*

**Demostración:**
Del Teorema 1.6.25 (Banach-Alaoglu) tenemos que para todo espacio normado $X$, la bola $B_{X^*}$ es $\omega^*$-compacta y en consecuencia todo subconjunto $\omega^*$-cerrado y acotado de $X^*$ es $\omega^*$-compacto, luego por hipótesis $X$ es separable y del Teorema 1.6.34, se tiene que $B_{X^*}$ es $\omega^*$-separable/metrizable y como en todo espacio métrico, compacidad implica secuencialmente compacto, así la bola $B_{X^*}$ y todo subconjunto $\omega^*$-cerrado y acotado de $X^*$ es secuencialemte compacto, pero por definición de secuencialmente compacto. toda sucesión en la bola $B_{X^*}$ o en cualquier subconjunto $\omega^*$-cerrado y acotado de $X^*$ tiene una subsucesión convergente en él. Por lo que $X^*$ tiene una subsucesión $\omega^*$-convergente. ■

La condición de separabilidad en el corolario anterior no se puede omitir como lo demuestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.6.36.** *Sea $\ell^\infty$ el espacio normado de las sucesiones acotadas $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ con $x_n \in \mathbb{K}$ para $n = 1, 2, \ldots$, con la norma $\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$. Veremos que $\ell^\infty$ no es separable.*

**Demostración:**
Demostremos que $\ell^\infty$ no es separable, para ello consideremos el conjunto $A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, es decir $A$ es el conjunto de las sucesiones cuyos términos son ceros y unos, este conjunto no es numerable porque tiene cardinalidad $2^{|N|}$. Ahora tomemos $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Si $x \neq y$, entonces tienen una componente distinta (por ejemplo $x_i \neq y_i$ para algún $i$), entonces

$$\|x - y\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |1 - 0| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |1| = 1.$$

Es decir $\|\cdot\|_\infty$ induce la topología discreta. Ahora consideremos $\{B\left(a,\frac{1}{2}\right)\}_{x\in A}$ es decir, el conjunto de bolas centradas en los puntos de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y con radio $\frac{1}{2}$, este conjunto es un conjunto no numerable de abiertos que son disjuntos dos a dos, entonces este espacio no puede ser separable, ya que si tuvieramos un conjunto denso, tendríamos que tener un punto en cada una de las bolas de esta familia, pero estas son un conjunto no numerable y disjuntas, por lo cual el conjunto denso nunca sería numerable. Por lo que $\ell^\infty$ no es numerable. Del Teorema 1.6.25 (Banach-Alaoglu) obtenemos que por ser $\ell^\infty$ un espacio normado, la bola unitaria $B_{(\ell^\infty)^*}$ es $\omega^*$- compacta, y del Teorema 1.6.34 $(iii)\longrightarrow(ii)$, como $\ell^\infty$ no es separable, entonces no es $\omega^*$-metrizable, y como es un espacio métrico tampoco es $\omega^*$-secuencialmente compacto. Ahora veamos si es $\omega^*$-convergente. Sea $f_n\in(\ell^\infty)^*$ el n-ésima funcional coordenada, es decir $f_n(x)=x_n$. Entonces $|f_n(x)|=|x_n|\leq\|x\|_\infty$ para toda $x\in\ell^\infty$ y si $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ es la sucesión de vectores unitarios en $\ell^\infty$, $\|e_n\|_\infty=1$ y $|f_n(e_n)|=1$; por lo tanto $\|f_n\|=1$ para toda $n$. Si $\{f_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ es cualquier subsucesión, sea $x=(x_n)_n\in\ell^\infty$ dado por $x_{n_{2j}}=1$ y $x_n=0$ si $n\neq n_{2j}, j\in\mathbb{N}$. Entonces $f_{n_{2j}}(x)=1$ y $f_{n_{2j-1}}(x)=0$, y $\{f_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ no es $\omega^*$-convergente. ■

Cuando $X$ es reflexivo, ya demostramos que las topologías $\omega$ y $\omega^*$ coinciden en $X^{**}=X$, del Teorema 1.6.25 (Banach-Alaoglu) tenemos que $B_X$ es $\omega$-compacta, de donde se deduce el siguiente corolario.

**Corolario 1.6.37.** *Si $X$ es un espacio de Banach reflexivo y separable, entonces toda sucesión acotada tiene una subsucesión $\omega$-convergente.*

. **Demostración:**
Como $X$ es separable, por el Corolario 1.6.35 se tiene que toda sucesión acotada en $X^*$ tiene una subsucesión $\omega^*$-convergente. Pero además $X$ es reflexivo por lo que las topologías $\omega$ y $\omega^*$ coinciden en $X^{**}=X$, así toda sucesión acotada tiene una subsucesión $\omega$-convergente. ■

El resultado anterior es cierto aún sin la hipótesis de separabilidad, es decir, si $X$ es un espacio de Banach reflexivo, entonces toda sucesión acotada tiene una subsucesión $\omega$-convergente. Esto es consecuencia de que en todo espacio métrico son equivalentes: secuencialmente compacto, compacto, numerablemente compacto, es decir se asegura que un subconjunto de un espacio de Banach es $\omega$-compacto si y sólo si es $\omega$-secuencialmente compacto.

**Definición 1.6.38.** *Sea $X$ un espacio normado, $E$ un subconjunto de $X$ y $F$ un subconjunto de $X^*$. Sus aniquiladores $E^\perp$ y $F_\perp$ se definen como*

$$E^\perp=\{f^*\in X^*: f^*(x)=0 \text{ para toda } x\in E\},$$

$$F_\perp=\{x\in X: f^*(x)=0 \text{ para toda } f^*\in F\}.$$

**Ejemplo 1.6.39.** *Se consideran las transformaciones lineales $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$ definidas por $\delta_i(x_1,x_2,x_3)=x_i$ para $i=1,2,3$. Además los subconjuntos $E=\{(1,1,1),(1,2,1)\}$ y $F=\{f^*\in(\mathbb{R}^3)^*/f^*=a\delta_1+\delta_2\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $(\mathbb{R}^3)^*$ respectivamente. Encuentre $E^\perp$ y $F_\perp$.*

**<u>Solución:</u>**

Primero necesitamos el espacio dual de $\mathbb{R}^3$, así

$$
\begin{aligned}
&(\mathbb{R}^3)^* = \{f^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}/f^* \text{ es transformación lineal}\}\\
\Longrightarrow &(\mathbb{R}^3)^{=}\{f^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}/f^*(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\}\\
\Longrightarrow &(\mathbb{R}^3)^{=}\{f^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}/f^* = a\delta_1 + b\delta_2 + c\delta_3 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

En efecto $E$ y $F$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ y $(\mathbb{R}^3)^*$ respectivamente. Primero para $E = \{(1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$, encontraremos $E^{\perp}$. Por Definición 1.6.38 se tiene que

$$E^{\perp} = \{f^* \in X^* : f^*(x) = 0 \text{ para toda } x \in E\}.$$

Por lo que sea $f^* \in (\mathbb{R}^3)^*$ un funcional arbitrario, si $x = (1, 1, 1)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
f^*(x) = 0 \Longrightarrow &f^*(1, 1, 1) = 0 \Longrightarrow (a\delta_1 + b\delta_2 + c\delta_3)(1, 1, 1) = 0\\
\Longrightarrow &a\delta_1(1, 1, 1) + b\delta_2(1, 1, 1) + c\delta_3(1, 1, 1) = 0 \Longrightarrow a(1) + b(1) + c(1) = 0\\
\Longrightarrow &a + b + c = 0.
\end{aligned}
$$

De donde obtenemos la ecuación

$$a + b + c = 0. \tag{1.42}$$

Ahora si $x = (1, 2, 1)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
f^*(x) = 0 \Longrightarrow &f^*(1, 2, 1) = 0 \Longrightarrow (a\delta_1 + b\delta_2 + c\delta_3)(1, 2, 1) = 0\\
\Longrightarrow &a\delta_1(1, 2, 1) + b\delta_2(1, 2, 1) + c\delta_3(1, 2, 1) = 0 \Longrightarrow a(1) + b(2) + c(1) = 0\\
\Longrightarrow &a + 2b + c = 0.
\end{aligned}
$$

De donde obtenemos la ecuación

$$a + 2b + c = 0. \tag{1.43}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las Ecuaciones (1.42) y (1.43)

$$
\begin{aligned}
a + b + c &= 0,\\
a + 2b + c &= 0.
\end{aligned}
$$

De la Ecuación (1.42) se tiene que

$$a + b + c = 0 \Longrightarrow a + c = -b.$$

Sustituimos en la Ecuación (1.43) tenemos que

$$a + 2b + c = 0 \Longrightarrow -b + 2b = 0 \Longrightarrow b = 0.$$

Si $b = 0$ en la Ecuación (1.42) se tiene

$$a + b + c = 0 \Longrightarrow a + 0 + c = 0 \Longrightarrow a + c = 0 \Longrightarrow c = -a.$$

Por lo que,

$$f^* = a\delta_1 + b\delta_2 + c\delta_3 = a\delta_1 + 0\delta_2 - a\delta_3 = a\delta_1 - a\delta_3 = a(\delta_1 - \delta_3).$$

Así
$$E^{\perp} = \{f^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}/f^* = a(\delta_1 - \delta_3)\}.$$
Ahora para $F = \{f^* \in (\mathbb{R}^3)^*/f^* = a\delta_1 + \delta_2\}$, encontraremos $F_{\perp}$. Por Definición 1.6.38 se tiene que
$$F_{\perp} = \{x \in X : f^*(x) = 0 \text{ para toda } f^* \in F\}.$$
Sea $x \in \mathbb{R}^3$ arbitrario de la forma $x = (x_1, x_2, x_3)$ tenemos que para $f^* = a\delta_1 + \delta_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} f^*(x) = 0 \Longrightarrow & (a\delta_1 + \delta_2)(x_1, x_2, x_3) = 0 \Longrightarrow a\delta_1(x_1, x_2, x_3) + \delta_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ \Longrightarrow & ax_1 + x_2 = 0 \Longrightarrow x_2 = -ax_1. \end{aligned}$$

Por lo que $x = (x_1, -ax_1, x_3)$, así $F_{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^3/x = (x_1, -ax_1, x_3)\}$. ■

**Lema 1.6.40.** *$E^{\perp}$ y $F_{\perp}$ son espacios vectoriales.*

**Demostración:**
Primero demostremos que $E^{\perp}$ es un espacio vectorial. Demostremos que si $f, g \in E^{\perp}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, se cumplen

a) $f + g \in E^{\perp}$.

b) Existe un elemento cero en $E^{\perp}$, tal que $f + 0 = 0 + f = f$.

c) Para todo $f \in E^{\perp}$, existe un elemento $-f$, tal que $f + (-f) = 0$.

d) $\alpha f \in E^{\perp}$.

e) Para todo $f$, $1f = f$.

Demostremos $a$). Sea $f, g \in E^{\perp}$, $x \in E$ funcionales, probemos que $f + g$ está en $E^{\perp}$.
$$[f + g](x) = f(x) + g(x) = 0 + 0, \text{ ya que } x \in E.$$
Por lo que $f + g \in E^{\perp}$.

Demostremos $b$). Sabemos que $f \in E^{\perp}$ sí $f(x) = 0$, $\forall\ x \in E$, pero $0 \in X^*$ (0 como funcional), además $0(x) = 0$ para todo $x$ en $E$, por lo que $0 \in E^{\perp}$, así $[0 + f](x) = 0(x) + f(x) = f(x) \in E^{\perp}$.

Ahora probemos $c$). Por inciso anterior tenemos que, $0 \in E^{\perp}$ (0 como funcional), es decir, existe un $g \in E^{\perp}$ tal que, $f + g = 0$, entonces $g = -f$, así $f + (-f) = 0$, por lo que $-f \in E^{\perp}$.

Seguidamente demostremos $d$). Sea $\alpha$ un escalar cualquiera, $f$ un elemento de $E^{\perp}$ y $x$ un elemento de $E$, entonces
$$[\alpha f](x) = \alpha f(x) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, $\alpha f$ pertenece a $E^{\perp}$.

Por último, demostremos $e$). Sabemos que $f(x) = 0$ para todo $x \in E$, esto sí $f \in E^{\perp}$, pero por otra parte sabemos que, existe un funcional en $X^*$ tal que, $I(x) = x$, entonces $f(I(x)) = [fI(x)] = [If](x) = I(f(x)) = f(x) = 0$, es decir $I \in E^{\perp}$.

Ahora demostremos que $F_{\perp}$ es un espacio vectorial. Sea $x, y \in F_{\perp}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, demostraremos que se cumplen lo siguiente

a) $x + y = z \in F_{\perp}$.

b) Existe un elemento cero en $F_{\perp}$, tal que $x + 0 = 0 + x = x$.

c) Para todo $x \in F_{\perp}$, existe un elemento $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.

d) $\alpha x \in F_{\perp}$.

e) Para todo $x$, $1x = x$.

Demostremos $a$). Sea $x, y \in F_{\perp}$, $f \in F$, $f$ funcional, probemos que $x + y$ está en $F_{\perp}$.

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0, \text{ ya que } f \in F.$$

Por lo que, $x + y \in F_{\perp}$.

Demostremos $b$). Sabemos que $x \in F_{\perp}$ sí $f(x) = 0$, $\forall\, f \in F$, pero $0 \in X$ (0 como elemento), además $f(0) = 0$ para todo $f$ en $X^*$, entonces $f(0) = 0$, por lo que $0 \in F_{\perp}$.

Ahora probemos $c$). Por inciso anterior tenemos que, $0 \in f_{\perp}$ (0 como elemento), es decir, existe un $y \in F_{\perp}$ tal que, $x + y = 0$, así $y = -x$, entonces $x + (-x) = 0$ por lo que, $-x \in F_{\perp}$.

Seguidamente demostremos $d$). Sea $\alpha$ un escalar cualquiera, $x$ un elemento de $F_{\perp}$ y $x$ un elemento de $F$, entonces

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, $\alpha x$ pertenece a $F_{\perp}$.

Por último, demostremos $e$). Sabemos que $f(x) = 0$ para todo $f \in F$, esto sí $x \in F_{\perp}$, pero por otra parte sabemos que, existe un elemento en $X$ tal que, $1 \cdot x = x$, entonces $f(1 \cdot x) = [1f(x)] = 1[f(x)] = 1 \cdot 0 = 0$, es decir $1 \in F_{\perp}$. Dado que $E^{\perp}$ y $F_{\perp}$ cumplen las propiedades de espacios vectoriales, concluimos que ambos son espacios vectoriales. ■

Además, como $F_{\perp}$ es la intersección de los espacios nulos de los funcionales $f^*$ con $f^* \in F$, tenemos que es un subespacio cerrado de $X$. Por otro lado si $\{f_n^*\}_n \subset E^{\perp}$ y converge a $f^* \in X^*$, es decir $f_n^*(x) = 0$, $\forall\, x \in E$, entonces $f^*(x) = 0$, $\forall\, x \in E$, por lo que $f^* \in E^{\perp}$ y por tanto, $E^{\perp}$ es cerrado en $X^*$.

**Lema 1.6.41.** *Sea $X$ un espacio normado y $A$ un subconjunto de $X$ tenemos que $\overline{spanA} = (A^{\perp})_{\perp}$.*

<u>**Demostración:**</u>
Sabemos que $(A^{\perp})_{\perp} \subset \overline{spanA}$, así sólo demostraremos que $\overline{spanA} \subset (A^{\perp})_{\perp}$. Sea $A \subset X$, tenemos que

$$(A^{\perp})_{\perp} = \{x \in X : \ f(x) = 0, \ \forall \ f \in A^{\perp}\}.$$

Sea $x \in \overline{spanA}$. Como $x \in \overline{spanA}$, entonces existe $\{x_n\} \subset spanA$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Sea $f \in A^{\perp}$, como $f \in A^{\perp}$, entonces $f(a) = 0, \ \forall \ a \in A$. Por lo que, $x_n \in spanA$ así,

$$x_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} a_{n,i}; \ \ \alpha_{n,i} \in \mathbb{K} \text{ y } a_{n,i} \in A.$$

Luego, $f(x_n) = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} f(a_{n,i}) = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} \cdot 0 = 0$. Como $f$ es acotada ($f \in X^*$), $f$ es continuo de donde $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, pero $f(x_n) = 0, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ de donde, $f(x) = 0$, como $f$ es arbitrario en $A^{\perp}$ tenemos, $f(x) = 0, \ \forall \ f \in A^{\perp}$ por lo que $x \in (A^{\perp})_{\perp}$. Por tanto, $\overline{spanA} \subset (A^{\perp})_{\perp}$, como se dan las dos inclusiones, concluimos que $\overline{spanA} = (A^{\perp})_{\perp}$. ■

**Proposición 1.6.42.** *Sea $X$ un espacio normado. Si $X^*$ es separable, entonces $X$ es separable.*

<u>**Demostración:**</u>
Como $X^*$ es separable, sea $\{f_n^*\}_n$ una sucesión densa en $X^*$. Por definición de la norma de $f_n^*$, para cada $n$ existe $x_n \in S_X$ con $|f_n^*(x_n)| \geq \dfrac{3}{4}\|f_n^*\|$ por definición de supremo tenemos $\|f_n^*\| = \sup_{x \in S_x} |f_n^*(x)|$, sí tomamos $\varepsilon = \frac{1}{4}\|f_n^*\|$ obtenemos

$$|f_n^*(x)| \geq \|f_n^*\| - \varepsilon = \|f_n^*\| - \frac{1}{4}\|f_n^*\| = \frac{3}{4}\|f_n^*\|.$$

Sea ahora $f^* \neq 0$ en $X^*$ y $n$ tal que $\|f^* - f_n^*\| < \dfrac{1}{4}\|f^*\|$, entonces

$$\begin{aligned} &\|f_n^*\| \geq \|f^* - f^* + f_n^*\| = \|f^* - (f^* - f_n^*)\| \geq \|f^*\| - \|f^* - f_n^*\| \geq \|f^*\| - \frac{1}{4}\|f^*\| \\ \Longrightarrow &\|f_n^*\| \geq \frac{3}{4}\|f^*\|. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} &|f^*(x_n)| \geq |f_n^*(x_n) - f_n^*(x_n) + f^*(x_n)| = |f_n^*(x_n) - (f_n^*(x_n) - f^*(x_n))| \\ \Longrightarrow &|f^*(x_n)| \geq |f_n^*(x_n)| - |f_n^*(x_n) - f^*(x_n)| = |f_n^*(x_n)| - |f^*(x_n) - f_n^*(x_n)| \\ \Longrightarrow &|f^*(x_n)| \geq |f_n^*(x_n)| - |[f^* - f_n^*](x_n)| > \frac{3}{4}\|f^*\| - \frac{1}{4}\|f^*\| = \frac{1}{2}\|f^*\| > 0. \end{aligned}$$

Esto por la densidad de $X^*$, entonces $(\{x_n\}_n)^{\perp} = \{0\}$. Ahora bien por Lema 1.6.41, para un conjunto $A \subset X$, $\overline{spanA} = (A^{\perp})_{\perp}$, tenemos que $\overline{span\{x_n\}_n} = \Big((\{x_n\}_n)^{\perp}\Big)_{\perp} = \{0\}_{\perp} = X$. Por Lema 1.6.30 $\overline{spanA}$ es separable si $A$ es numerable, por lo tanto $X$ es separable. ■

**Ejemplo 1.6.43.** *El recíproco de la proposición anterior es falso, para ello analizaremos a el espacio $\ell^1$ y su dual $\ell^\infty$.*

**Demostración:**
Ya demostramos que $\ell^\infty$ no es separable (ver Ejemplo 1.6.36), sólo demostraremos que $\ell^1$ es separable. Para ello debemos demostrar que existe un subconjunto numerable $A$ de $\ell^1$ tal que $\ell^1 = \overline{spanA}$. Consideremos el conjunto $A = \{(0, \ldots, 0, 1^{(i)}, 0, \ldots) : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell^1$, se puede observar que $A$ es numerable por como lo hemos definido (dado que $\mathbb{N}$ es numerable), basta probar que $\ell^1 = \overline{spanA}$. Por como está definido $A$, se tiene que, las combinaciones lineales de los elementos de $A$ es igual al siguiente conjunto

$$spanA = \{x \in \ell^\infty : \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0, \forall n \geq m\}.$$

Ahora si $x \in \ell^1$ consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset spanA$, que verifica que, $y_i = (x_1, \ldots, x_i, 0, \ldots)$ donde $x_j$ es la componente j-ésima del punto $x \in \ell^1$. Vemos que efectivamente converge. Dado $\varepsilon > 0$, como

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{m=n}^{\infty} |x_n| = 0 \Longrightarrow \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sum_{i\geq m} |x_i| \leq \varepsilon.$$

Entonces tomamos este mismo $m \in \mathbb{N}$ y para él se verifica que

$$\|y_n - x\|_1 = \sum_{i>m} |x_i| \leq \varepsilon,\ \forall n \geq m.$$

Por lo que, $\overline{spanA} = \ell^1$, así $\ell^1$ es separable. El recíproco del teorema sería que $X$ es separable, entonces $X^*$ es separable. Hemos demostrado que el dual $\ell^1$ no es separable y que el espacio $\ell^1$ es separable, así la condición no se cumple. ■

## 1.7. ESPACIOS DUALES DE SUBESPACIOS Y ESPACIO COCIENTE

Sea $Y$ subespacio de un espacio normado $X$. Mostraremos, haciendo uso del aniquilador de $Y$, que el dual de $Y$ es un espacio cociente de $X^*$ y el dual de $X/Y$ es un subespacio de $X^*$. Por el Teorema 1.3.3 tenemos que si $Y$ es un subespacio cerrado de $X$, entonces el cociente $X/Y$ es también un espacio normado. Sea $q : X \longrightarrow X/Y$ la función cociente dada por $q(x) = \tilde{x}$ donde $\tilde{x} = x + Y$. Entonces, si $f \in (X/Y)^*$, tenemos que $f : X/Y \longrightarrow \mathbb{K}$ por lo que $f \circ q : X \longrightarrow \mathbb{K}$, y como la linealidad y continuidad de funciones se mantiene en la composición de funciones, así $f \circ q \in X^*$. Además, si $y \in Y$, observemos que $q(y) = 0, \forall y \in Y$, por lo que $(f \circ q)(y) = f(q(y)) = f(0) = 0$, así, $(f \circ q)(y) = 0$ por lo que $f \circ q \in Y^\perp$. Esto nos permite definir una función $\Phi : (X/Y)^* \longrightarrow Y^\perp$ mediante $\Phi(f) = f \circ q$; veremos que $\Phi$ establece una identificación entre dichos espacios.

**Teorema 1.7.1.** *Sean $X$ un espacio normado y $Y$ un subespacio cerrado de $X$. Entonces la función $\Phi : (X/Y)^* \longrightarrow Y^\perp$ definida anteriormente es un isomorfismo isométrico con respecto a las topologías $\sigma((X/Y)^*, X/Y)$ y $\sigma(X^*, X)$ restringida a $Y^\perp$.*

**Demostración:**
Nótese que $\Phi$ está bien definida, pues si $q \in Y^{\perp}$, sea $f : X/Y \longrightarrow Y^{\perp}$ dada por $f(\tilde{x}) = g(x)$; $f$ está bien definida porque $g(y) = 0$ para todo $y \in Y$. Observemos que $\Phi(f) = f \circ q$ es lineal dado que es la composición de funciones lineales. Ahora veamos si $\Phi$ es sobreyectiva, si $0 = \Phi(f) = f \circ q$, como $q$ es sobreyectiva, $f = 0$ y entonces $\Phi$ es sobreyectiva. Sea $\varepsilon > 0$; por el Teorema 1.3.3 ($d$), el conjunto $A = \{\tilde{x} : |f(\tilde{x})| < \varepsilon\}$ será abierto en $X/Y$ si y sólo si $q^{-1}(A)$ es abierto en $X$. Pero $q^{-1}(A) = \{x \in X : |g(x)| < \varepsilon\}$ es abierto al ser $g$ continua. Por lo tanto $f$ es continua y $\Phi$ es sobreyectiva pues $\Phi(f) = g$. Veremos que $\Phi$ es una isometría. Por el Teorema 1.3.3 ($b$), tenemos que $\|q\| \leq 1$, así $\|\Phi(f)\| = \|f \circ q\| \leq \|f\|\|q\| \leq \|f\|$. Ahora, recordemos que la norma en $X/Y$ está dada por

$$\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\|. \tag{1.44}$$

Por la definición de supremo (en $\|f\|$), dada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $\|\tilde{x_\varepsilon}\| \leq 1$ y $|f(x_\varepsilon)| > \|f\| - \varepsilon$. Además, por Ecuación (1.44), existe $y_\varepsilon \in Y$ con $\|x_\varepsilon + y_\varepsilon\| < 1 + \varepsilon$ y entonces

$$(1 + \varepsilon)\|f \circ q\| \geq |(f \circ q)(x_\varepsilon + y_\varepsilon)| = |f(\tilde{x_\varepsilon}) > \|f\| - \varepsilon.$$

Como la desigualdad es cierta para todo $\varepsilon > 0$, así $\Phi$ es una isometría. Veamos que $\Phi$ es un homeorfismo respecto a las topologías $\sigma((X/Y)^*, X/Y)$ y $\sigma(X^*, X)$ restringida a $Y^{\perp}$. Sea $\tilde{x} \in X/Y$ y $x \in X$ tal que $q(x) = \tilde{x}$. Entonces por lo anterior

$$\Phi(\{f \in (X/Y)^* : |f(\tilde{x})| < \varepsilon\}) = \{g \in Y^{\perp} : |g(x)| < \varepsilon\}.$$

Por lo tanto, $\Phi$ es un homeomorfismo. ■

Para estudiar el dual de un subespacio $Y$ de $X$, se requiere el siguiente lema.

**Lema 1.7.2.** *Sean $A$ y $B$ espacios vectoriales y $\varphi : A \longrightarrow B$ una función lineal sobreyectiva, entonces la función $\phi : A/\ker\varphi \longrightarrow B$, dada por $\phi(\tilde{a}) = \varphi(a)$ para $\tilde{a} = a + \ker\varphi$ es biyectiva.*

**Demostración:**
Primero probaremos que $\phi$ está bien definida, para ello demostraremos que sí $a = b$ con $a, b \in A/\ker\varphi$, entonces $\phi(a) = \phi(b)$.

$$\begin{aligned} a = b &\Longrightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Longrightarrow \varphi(a) + 0 = \varphi(b + 0) \Longrightarrow \varphi(a) + \varphi(c) = \varphi(b) + \varphi(c),\ c \in \ker\varphi \\ &\Longrightarrow \varphi(a + c) = \varphi(b + c),\ \text{ya que } \varphi \text{ es lineal} \Longrightarrow \varphi(\tilde{a}) = \varphi(\tilde{b}),\ \tilde{a} = a + c,\ \tilde{b} = b + c \\ &\Longrightarrow \phi(\tilde{a}) = \phi(\tilde{b}). \end{aligned}$$

Supongamos que $\phi(\tilde{a}) = 0$, entonces $\varphi(a) = 0$, es decir $a \in \ker\varphi$ y por ende $\varphi$ es inyectiva. Como para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) = b$, entonces $\phi(\tilde{a}) = \varphi(a) = b$, así $\phi$ es sobreyectiva. Por tanto, $\phi$ es biyectiva. ■

Si $f^* \in X^*$, entonces la restricción $f^*|_Y$ pertenece $Y^*$. Por otra parte, si $g^* \in Y^*$, por el Teorema de Hahn Banach (Teorema 1.5.7), existe una extensión de $g^*$ a $X$, entonces la función lineal $\psi : X^* \longrightarrow Y^*$ dada por

$$\psi(f^*) = f^*|_Y, \tag{1.45}$$

es sobreyectiva. Sea $f^* \in X^*$ tal que $\psi(f^*) = 0$, entonces $f^*(y) = 0$ para toda $y \in Y$, es decir $f^* \in Y^\perp$. Demostremos que, $Y^\perp \subset \ker \psi$. Primero definamos $Y^\perp$ y $\ker \psi$ como

$$Y^\perp = \{f \in Y^* : \ f(h) = 0, \ \forall\ h \in Y, \ Y \subset Y^*\} \text{ y } \ker \psi = \{g \in X^* : \ \psi(g) = 0_{Y^*}\}.$$

Sea $f \in Y^\perp$.

$$f \in Y^\perp \Longrightarrow f(h) = 0, \ h \in Y.$$

Pero $Y \subset Y^*$ por lo que

$$\psi(f) = f|_Y = 0_{Y^*} \Longrightarrow f \in X^* \Longrightarrow f \in \ker \psi.$$

Por tanto, $Y^\perp \subset \ker \psi$, así $\ker \psi = Y^\perp$, lo cual nos permite definir un isomorfismo entre $X^*/Y^\perp$ y $Y^*$.

**Teorema 1.7.3.** *Sea $Y$ un subespacio de un espacio normado $X$ y sea $\Psi : X^*/Y^\perp \longrightarrow Y^*$ la biyección lineal dada por*

$$\Psi(\widetilde{f^*}) = \psi(f^*),$$

*si $\widetilde{f^*} = f^* + Y^\perp$, donde $\psi$ está dada en la Ecuación (1.45). Entonces $\Psi$ es un isomorfismo isométrico. Además $\Psi$ es un homeomorfismo isométrico de $X^*/Y^\perp$ con la topología cociente $\tau$ inducida por $\sigma(X^*, X)$, en $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$.*

**Demostración:**

Por el Lema 1.7.2, obtenemos que $\Psi$ es lineal y una biyección. Primero demostraremos que $\Psi$ es una isometría. Sea $g^* \in Y^*$, entonces por el Teorema 1.5.7 (Hahn Banach), existe $f^* \in X^*$ con $f^*|_Y = g^*$ y $\|f^*\| = \|g^*\|$. De donde

$$\left\|\Psi(\widetilde{f^*})\right\| = \|\Psi(f^*)\| = \|f^*|_Y\| = \|g^*\| = \|f^*\| \geq \|f^* + Y^\perp\| = \left\|\widetilde{f^*}\right\|.$$

Además, si $h^* \in Y^\perp$, se tiene que

$$\left\|\Psi(\widetilde{f^*})\right\| = \|f^*|_Y\| = \|(f^* + h^*)|_Y\| \leq \|f^* + h^*\|.$$

Como esto se cumple para toda $h^* \in Y^\perp$, usando la definición de la norma cociente, tenemos que

$$\|g^*\| = \|\Psi(\widetilde{f^*})\| \leq \|\widetilde{f^*}\|.$$

Por lo que, $\Psi$ es una isometría. Ahora veremos si es un isomorfismo. Consideremos la función cociente $q : X^* \longrightarrow X^*/Y^\perp$, anteriormente definimos a $\Psi : X^*/Y^\perp \longrightarrow Y^*$ por lo que $\Psi \circ q : X^* \longrightarrow Y^*$, así observemos que $\psi = \Psi \circ q$. Ahora, sean $y_1, \ldots, y_k \in Y, \ \varepsilon > 0$, y

$$U = \{g^* \in Y^* : |g^*(y_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \ldots, k\}.$$

Entonces como $[\psi(f^*)](y_i) = f^*(y_i)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\Psi^{-1}(U) = \{\Psi(g^*): \ [\Psi^{-1}(g^*)](y_i) < \varepsilon\} \\
\Longrightarrow\ &\Psi^{-1}(U) = \{[\Psi^{-1}\Phi](\widetilde{f^*}) : |[\Psi^{-1}\Phi](\widetilde{f^*}(y_i))| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \ldots, k\} \\
\Longrightarrow\ &\Psi^{-1}(U) = \{\widetilde{f^*} : |[f^* + h^*](y_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \ldots, k\} \\
\Longrightarrow\ &\Psi^{-1}(U) = \{\widetilde{f^*} : |[f^*](y_i) + h^*(y_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \ldots, k,\ h^* \in Y^\perp\} \\
\Longrightarrow\ &\Psi^{-1}(U) = \{\widetilde{f^*} : |f^*(y_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \ldots, k\}.
\end{aligned}$$

Por definición de topología cociente, $\Psi^{-1}(U)$ es $\tau$-abierto si y sólo si $q^{-1}(\Psi^{-1}(U))$ es $\sigma(X^*, X)$-abierto en $X^*$. Pero,

$$\begin{aligned}
&q^{-1}(\Psi^{-1}(U)) = [q^{-1}\Psi^{-1}](U) = [\Psi \circ q]^{-1}(U) = \psi(U) \\
\Longrightarrow\ &q^{-1}(\Psi^{-1}(U)) = \{f^* \in X^* : |f^*(y_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \ldots, k\},
\end{aligned}$$

de donde $q^{-1}(\Psi{-}1(U))$ es $\omega^*$-abierto. Falta demostrar que $\Psi$ es un homeomorfismo, para ello probaremos que si $U$ es un $\tau$-abierto, entonces $\Psi(U)$ es $\sigma(Y^*, Y)$-abierto en $Y^*$. Pero $U$ es un $\tau$-abierto si y sólo si, existe un conjunto $V$, $\sigma(X^*, X)$-abierto en $X^*$, tal que $q(V) = U$. Consideremos los abiertos de la forma $U = q(V)$ con $V = \{f^* \in X^* : |f^*(x)| < \varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, pues estos elementos forman una subbase local de 0. Primero veremos que si $x \notin Y$, entonces $U = q(V) = X^*/Y^\perp$. En efecto si $x \notin Y$ y $\widetilde{f_0^*} \in X^*/Y^\perp$, sea $t : Y \bigoplus \overline{span x} \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$t(y + \lambda x) = f_0^*(y) + \lambda \frac{\varepsilon}{2},$$

y sea $f_1^* \in X^*$ una extensión de $t$. Entonces $f_1^* - f_0^* \in Y^\perp$, de donde $q(f_1^*) = f_1^* + f_0^* = \widetilde{f_0^*}$. Además, $f_1^*(x) = t(x) = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, por lo que $f_1^* \in V$. Por lo tanto, $q(V) = X^*/Y^\perp$ y como $\Psi$ es sobreyectiva, $\Psi(U) = \Psi(X^*/Y^\perp) = Y^*$ que es un conjunto $\omega^*$-abierto. Supongamos ahora que $x \in Y$, $f^* \in X^*$. Si $g^* = \Psi(\widetilde{f^*})$, entonces $g^*(x) = [\Psi(\widetilde{f^*})](x) = [f^*|_Y](x) = f^*(x)$, lo cual implica que $|f^*(x)| < \varepsilon$ si y sólo si $|g^*(x)| < \varepsilon$. Concluimos que $\Psi(U) = \Psi \circ q(V) = \{g^* \in Y^* : |g^*(x)| < \varepsilon\}$ es $\omega^*$-abierto, por Definición 1.6.14. ■

Como corolario, obtenemos que la topología débil en los subespacios de $X$, es la topología del subespacio inducida por $\sigma(X, X^*)$ en $Y$.

**Corolario 1.7.4.** *Si $Y$ es un subespacio de un espacio normado $X$, entonces $\sigma(Y, Y^*)$ es la topología inducida por $\sigma(X, X^*)$ en $Y$.*

**Demostración:**
Si $\Psi : X^*/Y^\perp \longrightarrow Y^*$ es el isomorfismo definido en el Teorema 1.7.3, entonces para toda $f^* \in X^*$, se tiene que si $\Psi(\widetilde{f^*}) = g^*$,

$$\{y \in Y : |g^*(y)| < \varepsilon\} = \{y \in Y : |[\Psi(\widetilde{f^*})](y)| < \varepsilon\} = \{x \in X : |f^*(x)| < \varepsilon\} \cap Y.$$

Por lo que, $\sigma(Y, Y^*)$ es la topología inducida por $\sigma(X, X^*)$ en $Y$. ■

## 1.8. REFLEXIVIDAD

En esta subsección daremos varias caracterizaciones de la reflexividad de espacios de Banach. De aquí en adelante, cuando haga falta, identificaremos a $B_X$ con su imagen $j(B_X)$ en $X^{**}$, llamándola de la misma forma. Esto se puede hacer gracias al Teorema 1.6.1. Como además,

$$\{\Gamma \in X^{**} : |\Gamma(f^*)| < \varepsilon\} \cap j(X) = \{j(x) \in X^{**} : |[j(x)](f^*)| < \varepsilon\} = j\{x \in X : |f^*(x)| < \varepsilon\}.$$

Diremos que la topología $\sigma(X, X^*)$ es la restricción de la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$ a $X$ o que $\sigma(X, X^*)$ es la topología inducida en X por $\sigma(X^{**}, X^*)$.

**Teorema 1.8.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach, entonces son equivalentes*

*(i) $X$ es reflexivo.*

*(ii) $B_X$ es $\sigma(X, X^*)$ compacta.*

*(iii) $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$.*

*(iv) $X^*$ es reflexivo.*

**Demostración:**
Antes de todo dejar claro que cuando un espacio $X$ es reflexivo, su topología $\sigma(X, X^*)$ coincide con la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$ de $X^{**}$ y por ser isométricamente isomorfos tenemos que $X = X^{**}$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Supongamos que $X$ es reflexivo. Por el Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema 1.6.25), $B_{X^{**}}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$ compacta en $X^{**}$, entonces como $X = X^{**}$,

$$B_{X^{**}} = X \text{ es } \sigma(X^{**} = X, X^*) \text{ compacta en } X = X^{**} \Longrightarrow B_X \text{ es } \sigma(X, X^*) \text{ compacta en X.}$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Supongamos que $B_X$ es $\sigma(X, X^*)$-compacta. Como un conjunto compacto en la topología restringida también lo es en la topología original, obtenemos que $B_X$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacta en $X^{**}$, luego como la topología débil estrella es de Hausdorff por Lema 1.6.20, tenemos que todo subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado en el espacio, por lo cual $B_X$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-cerrada en $X^{**}$. Por otra parte, por el Teorema de Goldstine (veáse [5]), $B_X$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$ densa en $B_{X^{**}}$, entonces tenemos que

$$B_X = \overline{B_X}^{\omega^*}, \text{ por ser } \omega^*\text{-cerrada} \Longrightarrow {B_X}^{\omega^*} = B_{X^{**}}, \text{ por ser densa} \Longrightarrow B_X = B_{X^{**}}.$$

Como $B_X$ es arbitrario concluimos que $X$ es reflexivo.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$. Supongamos que $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$. Del Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema 1.6.25) sabemos que

$$B_{X^*} \text{ es } \sigma(X^*, X) \text{ compacta} \Longrightarrow B_{X^*} \text{ es } \sigma(X^*, X^{**}) \text{ compacta.}$$

Luego aplicando $(ii) \Longrightarrow (i)$ a $X^*$, tenemos que $X^*$ es reflexivo.

$(iv) \Longrightarrow (i)$. Supongamos que $X^*$ es reflexivo, entonces $X^* = X^{***}$. Como $B_X$ es cerrada bajo la topología generada por la norma en $X^{**}$ y por la Proposición 1.6.22 $B_X$ es $\sigma(X^{**}, X^{***})$-cerrada en $X$, pero $\sigma(X^{**}, X^{***}) = \sigma(X^{**}, X^*)$ así obtenemos que $B_X$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-cerrada en $X^{**}$. Además por el Teorema de Goldstine (veáse [5]), $B_X$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$ densa en $B_{X^{**}}$, entonces tenemos que

$$B_X = \overline{B_X}^{\omega^*} = B_{X^{**}} \Longrightarrow B_X = B_{X^{**}}.$$

Como $B_X$ es arbitrario concluimos que $X$ es reflexivo.

$(i) \Longrightarrow (iii)$. Tenemos que $X$ es reflexivo, por lo cual $X = X^{**}$, entonces $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$. ■

Como es deseable, la reflexividad se hereda a subespacios.

**Corolario 1.8.2.** *Si $Y$ es un subespacio cerrado de un espacio de Banach reflexivo $X$, entonces $Y$ es reflexivo.*

**Demostración:**
Usando el Teorema 1.8.1, tenemos que $B_X$ es $\sigma(X, X^*)$-compacta, y como $B_Y = B_X \cap Y$, del Corolario 1.7.4 tenemos que, $\sigma(Y, Y^*)$ es la topología inducida por $\sigma(X, X^*)$ en Y, entonces $B_Y$ es $\sigma(Y, Y^*)$-compacta, luego nuevamente por el Teorema 1.8.1, obtenemos que $Y$ es reflexivo. ■

**Ejemplo 1.8.3.** *Sea $c_0$ el espacio de las sucesiones convergentes a cero, demostraremos que $\ell^\infty$ no es reflexivo.*

**Demostración:**
En el Ejemplo 1.1.44 demostramos que $c_0$ es un subespacio cerrado de $\ell^\infty$ y en el Ejemplo 1.6.8 demostramos que $c_0$ no es reflexivo luego, por Teorema 1.8.2 tenemos que $\ell^\infty$ no es reflexivo. ■

Si $X$ es un espacio de Banach, se dirá que un funcional $f^* \in X^*$ alcanza su norma si existe $x_0 \in B_X$ tal que $f^*(x_0) = \|f^*\|$. Errett Albert Bishop y Robert Ralph Phelps probaron en 1961 que el conjunto de funcionales que alcanzan su norma es denso en $X^*$, sin embargo la demostración está fuera del alcance de este proyecto. En el caso en que el espacio es reflexivo, la conclusión es mas fuerte y la prueba es más fácil.

**Corolario 1.8.4.** *Sea $X$ un espacio de Banach reflexivo. Todo funcional continuo en $X$ alcanza su norma.*

**Demostración:**
Sea $f^* \in X^*$, como $X$ es reflexivo por el Teorema 1.8.1 $B_X$ es $\omega$-compacta. Por otro lado, $f^*$ restringida a $B_X$ es $\omega$-continua. Usaremos el siguiente hecho de que $f^*$ continuo $\Longleftrightarrow$ $|f^*(x)| \leq M\|x\|$ $\forall x \in X$, entonces $|f^*(x)| \leq M\|x\| \Longrightarrow |f^*(x)| \leq M$, ya que $\|x\| \leq 1$. Luego tenemos que $\|f^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f^*(x)| = M$. Entonces, existe $x_0 \in B_X$ tal que

$$|f^*(x_0)| = M \Longrightarrow |f^*(x_0)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f^*(x)| \Longrightarrow |f^*(x_0)| = \|f^*\|.$$

Reemplazando, $x_0$ por $-x_0$ en el caso real y por $e^{i\theta}x_0$ en el caso complejo, obtenemos el mismo resultado, así

<u>Caso Real</u>. Sea $-x_0 \in B_X$.

$$|f^*(-x_0)| = M \Longrightarrow |-f^*(x_0)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f^*(x)| \Longrightarrow |f^*(x_0)| = \|f^*\|.$$

<u>Caso Complejo</u>. Sea $e^{i\theta}x_0 \in B_X$.

$$|f^*(e^{i\theta}x_0)| = M \Longrightarrow |e^{i\theta}f^*(x_0)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f^*(x)| \Longrightarrow |e^{i\theta}||f^*(x_0)| = \|f^*\|$$
$$\Longrightarrow 1 \cdot |f^*(x_0)| = \|f^*\| \Longrightarrow |f^*(x_0)| = \|f^*\|.$$

■

Robert Clarke James probó en 1957, el recíproco del corolario anterior, es decir, demostró que sí un espacio de Banach es tal que todo funcional continuo en el alcanza su norma, entonces es reflexivo (veáse [3]).

**Ejemplo 1.8.5.** *Veamos un ejemplo en el que no se alcanza la norma. Sea*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}x_k \text{ con } x \in c_0.$$

*Demostraremos que $F$ no alcanza su norma.*

**<u>Demostración:</u>**
Probemos primero que $F$ es lineal, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y \in c_0$, entonces

$$F(\beta x + \alpha y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}(\beta x_k + \alpha y_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(2^{-k+1}\beta x_k + 2^{-k+1}\alpha y_k)$$
$$\Longrightarrow F(\beta x + \alpha y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}\beta x_k + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}\alpha y_k = \beta \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}x_k + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}y_k$$
$$\Longrightarrow F(\beta x + \alpha y) = \beta F(x) + \alpha F(y).$$

Por tanto, $F$ es lineal. Veamos que $F$ es continuo, como es lineal sabemos que $F$ continuo $\Longleftrightarrow |F(x)| \leq M\|x\| \ \forall x \in l_1$ y donde $M$ es constante. Pero tenemos que

$$|F(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |2^{-k+1}x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq \|x\|_{c_0},$$

luego $F$ es continuo. Ahora calculemos su norma. Si $x \in c_0$ tal que $\|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|x\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \leq 1 \Longrightarrow |x_k| \leq 1$, por tanto

$$|F(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |2^{-k+1}||x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = 2.$$

Por lo cual, $\|F\| \leq 2$. Por otro lado, si tomamos $\rho_i = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{i-veces}, 0, 0, \ldots) \in c_0 \Longrightarrow \|\rho_i\| = 1$, luego

$$|F(\rho_i)| = \left|\sum_{k=1}^{i} 2^{-k+1}\right| = \frac{1 - 2^{-i+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{2}{2^i}\right).$$

$|F(\rho_i)| \longrightarrow 2$ cuando $i \longrightarrow \infty$, entonces se tiene que $\|F\| = 2$. Ahora veamos que no se alcanza la norma. Si $x \in c_0 \Longrightarrow \text{lím}_k x_k \longrightarrow 0$. Luego, existe $k_0$ tal que si $k \geq k_0 \Longrightarrow |x_k| < \frac{1}{2} < 1$. Luego, si $x \in c_0$ tal que $\|x\| \leq 1$, tenemos que

$$|F(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |2^{-k+1}||x_k| = \sum_{k=1}^{k_0} |2^{-k+1}||x_k| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |2^{-k+1}||x_k|$$

$$\Longrightarrow |F(x)| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+2} = 2.$$

Donde en la última desigualdad estamos utilizando que $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |2^{-k+1}||x_k| < \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k+1}$, ya que $|x_k| < 1$, $\forall k > k_0$. En conclusión tenemos que, $F$ no alcanza su norma. $\blacksquare$

Usando el Corolario 1.8.4 es mas sencillo demostrar que $C[0, 1]$ no es reflexivo, detallamos la demostración a continuación.

**Ejemplo 1.8.6.** *El espacio $C[0, 1]$ de funciones continuas en $[0, 1]$ no es reflexivo.*

**Demostración:**
Para demostrar que $C[0, 1]$ no es reflexivo haremos uso del Corolario 1.8.4, el cual dice que todo espacio de Banach reflexivo alcanza su norma. Así, bastará probar que $C[0, 1]$ con la norma $\|h\| = \text{máx}_{t \in J} |h(t)|$ no es reflexivo, es suficiente encontrar un funcional lineal que no esté alcanzando la norma. Podemos definir

$$x'(f) := \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt.$$

Demostraremos que $x'$ es lineal, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $f, g \in C[0, 1]$, entonces

$$x'(\alpha f + \beta g) = \int_0^{\frac{1}{2}} [\alpha f + \beta g](t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 [\alpha f + \beta g](t)dt$$

$$\Longrightarrow x'(\alpha f + \beta g) = \int_0^{\frac{1}{2}} ([\alpha f](t) + [\beta g](t))dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 ([\alpha f](t) + [\beta g](t))dt$$

$$\Longrightarrow x'(\alpha f + \beta g) = \int_0^{\frac{1}{2}} [\alpha f](t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} [\beta g](t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 [\alpha f](t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 [\beta g](t)dt$$

$$\Longrightarrow x'(\alpha f + \beta g) = \int_0^{\frac{1}{2}} [\alpha f](t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 [\alpha f](t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} [\beta g](t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 [\beta g](t)dt$$

$$\Longrightarrow x'(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt-\alpha\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt+\beta\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt-\beta\int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)dt$$
$$\Longrightarrow x'(\alpha f+\beta g)=\alpha\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt\right)+\beta\left(\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)dt\right)$$
$$\Longrightarrow x'(\alpha f+\beta g)=\alpha x'(f)+\beta x'(g).$$

Ahora demostraremos que $|x'(f)|\leq\|f\|$, luego

$$|x'(f)|=\left|\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt\right|\leq\left|\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt\right|=\left|\int_0^1 f(t)dt\right|,$$

por lo que $|x'(f)|\leq\left|\int_0^1 f(t)dt\right|$. Como $[a,b]\times[a,b]$ es un rectángulo, existen $m,M\in\mathbb{R}$ tales que $m(b-a)\leq\int_a^b f(t)dt\leq M(b-a)$, por lo que

$$|x'(f)|\leq\left|\int_0^1 f(t)dt\right|\leq M(1-0)=M.$$

Si tomamos a $M=\max_{t\in[0,1]}|f(t)|$ obtenemos que

$$|x'(f)|\leq\max_{t\in[0,1]}|f(t)|=\|f\|.$$

Luego, como $x'$ es lineal y $|x'(f)|\leq\|f\|$, por Teorema 1.2.2 tenemos que, $x'$ es continuo, y además

$$\|f\|=\max_{t\in[0,1]}|f(t)|=1.$$

Esto sucede dado que la imagen más grande que puede tomar $f$ en el intervalo $[0,1]$ es 1. Por lo tanto, $x'$ es continuo y $\|x\|\leq 1$. Para ver que la norma es de hecho 1, para $n\in\mathbb{N}$, sea $f_n$ definido por

$$f_n(x)=\begin{cases} 1, & x\in\left[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right) \\ mx+b, & x\in\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) \\ -1, & x\in\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1\right). \end{cases}$$

Podemos observar que $\|f_n\|=1$ si $n\longrightarrow\infty$, dado que si $x\in\left[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)$ se tiene que $|f_n|=|1|=1$, por lo que $|f_n|=1$. Luego, si $x\in\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)$ tenemos que $f_n$ es lineal por lo que puede ser decreciente o creciente; si es decreciente $m<0$ y $|f_n(x)|=\left|f_n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\right|=|m/2-m/n+b|=|m/2+b|\leq 1$ y si es creciente $m>0$ y $|f_n(x)|=\left|f_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\right|=|m/2+m/n+b|=|m/2+b|\leq 1$. Por último, si $x\in\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1\right)$ tenemos que $|f_n(x)|=|-1|=1$, por lo que,

$$\|f_n\|=\max_{t\in[0,1]}|f(t)|=\max\{1,|m/2-m/n+b|,|m/2+m/n+b|,1\}=1.$$

Luego, si $n \longrightarrow \infty$ las siguientes integrales coinciden.

$$\begin{aligned}
x'(f_n) &= \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f_n(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} f_n(t)dt - \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 f_n(t)dt \\
\Longrightarrow x'(f_n) &= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} 1dt - \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 -1dt = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 dt = t|_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} + t|_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 \\
\Longrightarrow x'(f_n) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - 0 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Por lo que, $\|f_n\| = 1$ y $x'(f_n) = 1 - \frac{2}{n}$. Ahora tenemos que demostrar que no podemos encontrar un $f \in C[0,1]$ tal que $x'(f) = 1$ y $\|x'(f)\| = 1$. Sea $f$ continuo y $\|f\| = 1$, tenemos que demostrar que $x'(f) \neq 1$ para algún $\varepsilon > 0$ fijo existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(1/2)| \leq \varepsilon$ siempre que $|t - 1/2| \leq \delta$. Como

$$x'(f) = \int_0^{\frac{1}{2}-\delta} f(t)dt + \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}+\delta}^1 f(t)dt. \tag{1.46}$$

Podemos suponer que $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2 - \delta]$ y $f(x) = -1$ si $x \in [1/2 + \delta, 1]$, por lo que

$$\begin{aligned}
x'(f) &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}-\delta} f(t)dt + \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}+\delta}^1 f(t)dt \\
\Longrightarrow x'(f) &= \int_0^{\frac{1}{2}-\delta} 1dt + \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} (mt+b)dt - \int_{\frac{1}{2}+\delta}^1 -1dt = \int_0^{\frac{1}{2}-\delta} dt + \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} (mt+b)dt + \int_{\frac{1}{2}+\delta}^1 dt \\
\Longrightarrow x'(f) &= t|_0^{\frac{1}{2}-\delta} + \left(\frac{m}{2}t^2 + bt\right)\Big|_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} + t|_{\frac{1}{2}+\delta}^1 \\
\Longrightarrow x'(f) &= \frac{1}{2} - \delta - 0 + \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}+\delta\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^2 \\
&\quad - b\left(\frac{1}{2}-\delta\right) + 1 - \frac{1}{2} - \delta \\
\Longrightarrow x'(f) &= 1 - 2\delta + \frac{m}{2}\left(\frac{1}{4}+\delta+\delta^2\right) + \frac{b}{2} + b\delta - \frac{m}{2}\left(\frac{1}{4}-\delta+\delta^2\right) \\
&\quad - \frac{b}{2} + b\delta \\
\Longrightarrow x'(f) &= 1 - 2\delta + \frac{m}{8} + \frac{m\delta}{2} + \frac{m\delta^2}{2} + 2b\delta - \frac{m}{8} + \frac{m\delta}{2} - \frac{m\delta^2}{2} = 1 - 2\delta + m\delta + 2b\delta.
\end{aligned}$$

Así de la Ecuación (1.46) tenemos que,

$$x'(f) = 1 - 2\delta + m\delta + 2b\delta. \tag{1.47}$$

Como $\delta > 0$ se tiene que $x'(f) \neq 1$, además de la Ecuación (1.47) se obtiene que,

$$|x'(f)| = |1 - 2\delta + m\delta + 2b\delta| \leq 1 - 2\delta + 2\delta|f(1/2)| + 2\delta\varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon < 1 - |f(1/2)|$ en la ecuación anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} &|x'(f)| \leq 1 - 2\delta + 2\delta|f(1/2)| + 2\delta\varepsilon < 1 - 2\delta + 2\delta|f(1/2)| + 2\delta(1 - |f(1/2)|) \\ \Longrightarrow &|x'(f)| < 1 - 2\delta + 2\delta|f(1/2)| + 2\delta - 2\delta|f(1/2)| = 1 \end{aligned}$$

Por lo que $|x'(f)| < 1$, así $x'(f)$ no alcanza su norma y por el Corolario 1.8.4, $C[0,1]$ no es reflexivo. ■

# 1.9. CONTINUIDAD DÉBIL Y OPERADORES ADJUNTOS

Los funcionales lineales continuos son débilmente continuos. ¿Qué pasará con la continuidad débil de operadores entre espacios normados de dimensión finita? Antes que nada aclararemos qué queremos decir con continuidad débil de operadores.

**Definición 1.9.1.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ es débilmente continuo, si es continuo con respecto a las topologías $\sigma(X, X^*)$ y $\sigma(Y, Y^*)$. Un operador $S : X^* \longrightarrow Y^*$ es débilmente estrella continuo, si es continuo con respecto a las topologías $\sigma(X^*, X^{**})$ y $\sigma(Y^*, Y^{**})$.*

Veremos que igual que en el caso de los funcionales, los operadores son continuos si y sólo si son débilmente continuos.

**Proposición 1.9.2.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ lineal. $T$ es continuo bajo la norma si y sólo si es $\omega$-continuo.*

**Demostración:**
"$\Longrightarrow$"
Supongamos que $T$ es norma continuo. Sean $x \in X, \varepsilon > 0$ y $g_1^*, \ldots, g_k^* \in Y^*$, es decir cada $g_i^* : Y \longrightarrow \mathbb{K}$. Entonces si $f_i^* = g_i^* \circ T : X \longrightarrow \mathbb{K}$, se tiene que $f_i^* \in X^*$ para toda $i = 1, \ldots, k$ y $T(V(x, f_1^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon)) \subset V(Tx, g_1^*, \ldots, g_k^*, \varepsilon)$. Es decir $T$ es $\omega$-continuo.

"$\Longleftarrow$"
Supongamos que $T$ es $\omega$-continuo, entonces de la Proposición 1.6.16 se tiene que para toda $g^* \in Y^*$, donde $g^* : (Y, \sigma(X, X^*)) \longrightarrow \mathbb{K}$ es $\omega$-continua, y como la composición de funciones continuas es continua obtenemos que $g^* \circ T : (X, \sigma(X, X^*)) \longrightarrow \mathbb{K}$ es $\omega$-continua. Aplicando la Proposición 1.6.16 nuevamente, $g^* \circ T \in X^*$. Ahora, si $x \in B_X$, para toda $g^* \in Y^*$

$$|g^*(Tx)| = |(g^* \circ T)\, x| \leq \|g^* \circ T\|,$$

y por el Lema 1.6.23 $(ii) \longrightarrow (i)$, se tiene que $T(B_X)$ es acotado bajo la norma. Por lo que $T$ es continuo bajo la norma. ■

Veremos que a cada operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ entre espacios normados también se le puede asociar un operador $T^\times \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$, llamado *el adjunto o transpuesto de $T$*, y estudiaremos la relación entre los operadores y sus adjuntos.

**Teorema 1.9.3.** *Si $X$ e $Y$ son espacios normados, entonces para cada $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ existe un único $T^{\times} \in \mathcal{B}(Y^*,X^*)$ tal que para toda $x \in X$ y para toda $g^* \in Y^*$,*

$$g^*(Tx) = (T^{\times}g^*)(x), \tag{1.48}$$

*y*

$$\|T^{\times}\| = \|T\|. \tag{1.49}$$

**Demostración:**

Dado $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, definimos $T^{\times} : Y^* \longrightarrow X^*$ por $T^{\times}g^* = g^* \circ T$, como $g^* : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ y $T : X \longrightarrow Y$ se tiene que $g^* \circ T : X \longrightarrow \mathbb{K}$ por lo que $g^* \circ T = T^{\times}g^* \in X^*$, y si $x \in X$ tenemos que

$$(T^{\times}g^*)(x) = (g^* \circ T)(x) = g^*(Tx),$$

es decir se cumple la Ecuación (1.48). Además, si $g_1^*, g_2^* \in Y^*$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ y $x \in X$, probaremos que $T^{\times}$ es lineal

$$\begin{aligned}
&[T^{\times}(\alpha_1 g_1^* + \alpha_2 g_2^*)](x) = [(\alpha_1 g_1^* + \alpha_2 g_2^*) \circ T](x) = [\alpha_1 g_1^* + \alpha_2 g_2^*](Tx)\\
\Longrightarrow &[T^{\times}(\alpha_1 g_1^* + \alpha_2 g_2^*)](x) = [\alpha_1 g_1^*](Tx) + [\alpha_2 g_2^*](Tx) = \alpha_1[g_1^*](Tx) + \alpha_2[g_2^*](Tx)\\
\Longrightarrow &[T^{\times}(\alpha_1 g_1^* + \alpha_2 g_2^*)](x) = \alpha_1[g_1^* \circ T](x) + \alpha_2[g_2^* \circ T](x) = \alpha_1[T^{\times}g_1^*](x) + \alpha_2[T^{\times}g_2^*](x).
\end{aligned}$$

De donde $T^{\times}$ es lineal. Por otra parte, usando el Corolario 1.5.10, obtenemos

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow &\|T^{\times}\| = \sup\{\|T^{\times}g^*\| : \|g^*\| \leq 1\} = \sup\{|[T^{\times}y^*](x)| : \|g^*\| \leq 1, \|x\| \leq 1\}\\
\Longrightarrow &\|T^{\times}\| = \sup\{|[g^* \circ T](x)| : \|g^*\| \leq 1, \|x\| \leq 1\} = \sup\{|g^*(Tx)| : \|g^*\| \leq 1, \|x\| \leq 1\}\\
\Longrightarrow &\|T^{\times}\| = \|T\|.
\end{aligned}$$

La unicidad de $T^{\times}$ es consecuencia de la Ecuación (1.48). ■

**Ejemplo 1.9.4.** *Si $I_X$ denota la identidad en $X$, entonces $I_X^{\times} = I_{X^*}$. Donde $I_X^{\times} : X^* \longrightarrow X^*$, $I_X : X \longrightarrow X$ y $I_{X^*} : X^* \longrightarrow X^*$*

**Demostración:**

Supongamos que $X$ es un espacio normado, entonces por el Teorema 1.9.3, tenemos que para $I_X \in \mathcal{B}(X)$, existe un único $I_X^{\times} \in \mathcal{B}(X^*)$ tal que para toda $x \in X$ y para toda $g^* \in X^*$, $\|{I_X}^{\times}\| = \|I_X\|$ y $g^* I_X = I^{\times}g^*$, como

$$[I_X^{\times}g^*](x) = [g^* I_X](x) = g^*(I_X(x)) = g^*(x) = [I_{X^*}g^*](x).$$

Por lo que, $I_X^{\times} = I_{X^*}$. ■

**Proposición 1.9.5.** *Sean $X, Y$ espacios normados, $T, S \in B(X,Y)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces $(\alpha T + \beta S)^{\times} = \alpha T^{\times} + \beta S^{\times}$.*

**Demostración:**

Sean $X$ e $Y$ espacios normados, $x \in X, g^* \in Y^*, T, S \in B(X,Y)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&((\alpha T + \beta S)^{\times} g^*)(x) = g^*((\alpha T + \beta S)x); \text{ Teorema 1.9.3} \\
\Longrightarrow &((\alpha T + \beta S)^{\times} g^*)(x) = g^*((\alpha T)(x) + (\beta S)(x)) = g^*(\alpha T(x)) + g^*(\beta S(x)) \\
\Longrightarrow &((\alpha T + \beta S)^{\times} g^*)(x) = \alpha g^*(T(x)) + \beta g^*(S(x)) = (\alpha g^* T)(x) + (\beta g^* S)(x) \\
\Longrightarrow &((\alpha T + \beta S)^{\times} g^*)(x) = (\alpha T^{\times} g^*)(x) + (\beta S^{\times} g^*)(x).
\end{aligned}$$

Por lo que, $(\alpha T + \beta S)^{\times} = \alpha T^{\times} + \beta S^{\times}$. ■

Si $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, $\mathcal{R}(T)$ y $\ker(T)$ denotarán el rango y el espacio nulo de $T$, respectivamente.

**Teorema 1.9.6.** *Si $X$ e $Y$ son espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$,entonces*

$$\ker(T^{\times}) = \mathcal{R}(T)^{\perp} \ y \ \ker(T) = \mathcal{R}(T^{\times})_{\perp}.$$

*Si $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, su adjunto $T^{\times} \in \mathcal{B}(X^*, Y^*)$ y entonces existe el adjunto de $T^{\times}$, denotado por $T^{\times\times}$, que pertenece a $\mathcal{B}(X^{**}, Y^{**})$.*

**Demostración:**

Demostraremos primero que $\ker(T^{\times}) = \mathcal{R}(T)^{\perp}$.

"$\subseteq$"

Sea $u \in \ker(T^{\times})$, esto es, $T^{\times}u = 0$. Mostraremos que $u \in \mathcal{R}(T)^{\perp}$, esto es, $u(w) = 0$ para toda $w \in \mathcal{R}(T)$. Sea $w \in \mathcal{R}(T)$. Por la definición de $\mathcal{R}(T)$, existe un $v \in X$ tal que $w = Tv$. Ahora, $u(w) = u(Tv) = T^{\times}u(v) = 0(v) = 0$. Así, $u \in \mathcal{R}(T)^{\perp}$.

"$\supseteq$"

Sea $u \in \mathcal{R}(T)^{\perp}$, es decir, $y \in Y^*$ y $u(w) = 0$ para todo $w \in \mathcal{R}(T)$. Mostraremos que $u \in \ker(T^{\times})$, es decir, $T^{\times}(u) = 0$. Para demostrarlo, probaremos que $T^{\times}u(v) = 0$ para toda $v \in X$. Luego $T^{\times}u(v) = u(Tv) = 0$, ya que $Tv \in \mathcal{R}(T)$, por lo que $u \in \ker(T^{\times})$. Por tanto, $\ker(T^{\times}) = \mathcal{R}(T)^{\perp}$.

Ahora demostraremos que $\ker(T) = \mathcal{R}(T^{\times})_{\perp}$.

"$\subseteq$"

Sea $u \in \ker(T)$, esto es, $Tu = 0$. Mostraremos que $u \in \mathcal{R}(T^{\times})_{\perp}$, esto es, $w(u) = 0$ para toda $w \in \mathcal{R}(T^{\times})$. Sea $w \in \mathcal{R}(T^{\times})$. Por la definición de $\mathcal{R}(T^{\times})$, existe un $v \in X^*$ tal que $w = T^{\times}v$. Ahora, $w(u) = T^{\times}v(u) = v(Tu) = V(0) = 0$. Así, $u \in \mathcal{R}(T^{\times})_{\perp}$.

"$\supseteq$"

Sea $u \in \mathcal{R}(T^{\times})_{\perp}$, es decir, $u \in X^*$ y $W(u) = 0$ para todo $w \in \mathcal{R}(T^{\times})$. Mostraremos que $u \in \ker(T)$, es decir, $Tu = 0$. Para demostrarlo, probaremos que $V(Tu) = 0$ para toda $v \in Y^*$. Luego $v(Tu) = T^{\times}v(u) = 0$, ya que $T^{\times}v \in \mathcal{R}(T^{\times})$, por lo que $u \in \ker(T)$. Por tanto, $\ker(T) = \mathcal{R}(T^{\times})_{\perp}$. ■

**Proposición 1.9.7.** *Si $X, Y$ y $Z$ son espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$, entonces*

*a)* *$T^{\times\times}|_X = T$, es decir $T^{\times\times}(j_X(x)) = j_Y(Tx)$, donde $j_X$ es la inyección canónica de $X$ en $X^{**}$ y $j_Y$ la de $Y$ en $Y^{**}$.*

*b)* *$(S \circ T)^{\times} = T^{\times} \circ S^{\times}$.*

*c)* *$T$ es invertible si y sólo si $T^{\times}$ es invertible y $(T^{-1})\times = (T^{\times})^{-1}$.*

**Demostración:**
Primero demostremos $a$). Sea $x \in X, g^* \in Y^*$, cualesquiera

$$\begin{aligned}
&T^{\times\times}[j_X(g^*)](x) = j_X[T^{\times}(g^*)](x); \text{ por Teorema 1.9.3}\\
\Longrightarrow &T^{\times\times}[j_X(g^*)](x) = [T^{\times}g^*](x) = g^*[Tx]; \text{ por Teorema 1.9.3}\\
\Longrightarrow &T^{\times\times}[j_X(g^*)](x) = j_Y[Tx]g^*.
\end{aligned}$$

Por tanto, $[T^{\times\times}j_X](x) = j_Y[Tx]$.

Ahora demostremos $b$). Sea $z^* \in Z^*, x \in X$, tenemos

$$\begin{aligned}
&S[T^{\times}z^*](x) = z^*[STx], \text{ por Teorema 1.9.3}\\
\Longrightarrow &S[T^{\times}z^*](x) = S^{\times}[z^*(Tx)] = [T^{\times}S^{\times}]z^*(x).
\end{aligned}$$

Por tanto, $S[T^{\times}z^*](x) = [T^{\times}S^{\times}]z^*(x)$.

Demostremos $c$).
"$\Longrightarrow$"
Supongamos que $T$ es invertible y $(T^{-1})$. Usando $b$) tenemos

$$T^{\times}(T^{-1})^{\times} = (T^{-1}T)^{\times} = I_X^{\times} = I_{X^*} \quad \text{y} \quad (T^{-1})^{\times}T^{\times} = (T[T^{-1}])^{\times} = I_Y^{\times} = I_{Y^*}.$$

Por lo tanto, $T^{\times}$ es invertible y $(T^{-1})^{\times} = (T^{\times})^{-1}$.

"$\Longleftarrow$"
Supongamos ahora que $T^{\times}$ es invertible. Veremos ahora que existe un $C$ tal que para $x \in X$,

$$\|Tx\| \geq C\|x\|. \tag{1.50}$$

Supongamos que la Ecuación (1.50) no se cumple, entonces existiría una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que $\|x_n\| = 1$ y tal que $\|Tx_n\| < \dfrac{1}{n^2}$ para $n = 1, 2, ....$ Pero entonces, $\|nx_n\| = n$ y $\|Tnx_n\| < \frac{1}{n}$. Por otro lado, como $T^{\times}$ es sobreyectiva, si $h \in X^*$, existe $y^* \in Y^*$ tal que $T^{\times}y^* = h$ y por tanto

$$\begin{aligned}
&h(nx_n) = [T^{\times}y^*](nx_n) = y^*[T(nx_n)] \leq \|y^*[T(nx_n)]\|; \text{ por Proposición 1.9.2}\\
\Longrightarrow &h(nx_n) \leq \|y^*\|\|T(nx_n\| < \left\|y^*\left(\frac{1}{n}\right)\right\| = \|y^*\|\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\|y^*\|}{n}.
\end{aligned}$$

Lo cual implica que $\{nx\}_{n=1}^{\infty}$ es $\omega$-convergente a 0 y se sabe que toda sucesión convergente es de Cauchy, además que toda sucesión de Cauchy es acotada, por lo que, $\{nx_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada bajo la norma, pero esto es una contradicción. Por tanto, lo supuesto es falso y se cumple la Ecuación (1.50). Ahora bien, de la Ecuación (1.50) tenemos que $T$ es inyectiva y que $\mathcal{R}(T)$ es un conjunto cerrado. Si $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{R}(T)$ que converge a $y \in Y$, entonces tenemos

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{C}\|Tx_n - Tx_m\|.$$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $X$ que converge a algún $x \in X$ y tenemos que $Tx = y$. Por otra parte, usando el Teorema 1.9.5, como $T^{\times}$ es invertible, $\{0\} = \ker(T^{\times}) = \mathcal{R}(T)^{\perp}$, luego por Lema 1.6.29, $\mathcal{R}(T)$ es denso en $Y$. Y por lo tanto, $T$ es sobreyectivo y por el Teorema 1.5.20, tenemos que $T$ es invertible. ■

Los operadores continuos bajo la norma entre espacios duales, aunque son $\omega$-continuos, no tienen porque ser $\omega^*$-continuos, sin embargo si son adjuntos de algún operador, sí lo son.

**Ejemplo 1.9.8.** *Sea $T:\ \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} x_i,$$

*para $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Demostremos que $T$ es $\omega$ continuo pero no es $\omega^*$-continuo.*

**Demostración:**
Como $T$ es un operador lineal que está definido en $\ell^1$ decimos que, $T$ es continuo bajo la norma, por ser acotado. Ahora bien, como $T$ es continuo bajo la norma, por Proposición 1.9.2, $T$ es $\omega$-continuo. Además, si vemos a $\ell^1$ como el espacio dual de $c_0$ y tomamos a $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \ell^1$ la sucesión de elementos definida por

$$Te_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i;\ \ e_i = \{x_i\} \subset \ell^1,$$

tal que $e_i = 1$ en la i-ésima posición y 0 en otro caso, entonces tenemos que $e_i \xrightarrow[\omega^*]{} 0$ , pero sabemos que $Te_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1$ para $i \in \mathbb{N}$. Ahora bien tenemos que $T$ será $\omega^*$-continuo si,

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} Te_i = T0 = 0,$$

pero, $Te_i = 1$, entonces $\lim_{i\longrightarrow\infty} Te_i = \lim_{i\longrightarrow\infty} 1 = 1 \neq T0 = 0$, por lo que concluimos que $T$ no es $\omega^*$-continuo. ■

**Proposición 1.9.9.** *Si $X$ e $Y$ son espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, entonces $T^{\times}$ es $\omega^*$-continuo.*

**Demostración:**
Sea $f \in Y^*, \varepsilon > 0,\ x_1, x_2, ..., x_n \in X$ y $y_i = Tx_i$ para toda $i = 1, ..., k$, entonces tenemos que, $[T^{\times}f](x_i) = f[Tx_i]$, por Teorema 1.9.3, $[T^{\times}f](x_i) = f(y_i)$, ya que $Tx_i = y_i$ esto para toda $i = 1, ..., k$ y por tanto, $T^{\times}(V(f, y_1, ..., y_k, \varepsilon)) \subset V(T^{\times}f, x_1, ..., x_k, \varepsilon)$, es decir $T^{\times}$ es $\omega^*$-continuo. ■

# Capítulo 2

# ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS

## 2.1. ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS

Una de las propiedades importantes de la topología inducida por la norma (véase Definición 1.1.30) es que la suma y el producto por un escalar resultan ser funciones continuas, característica que comparten las topologías débil y débil estrella. La abstracción de esta propiedad da pie a la definición de espacio vectorial topológico, objeto de estudio de este capítulo. Como en los capítulos anteriores, trabajaremos con espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ denotará a los reales o a los complejos indistintamente.

**Definición 2.1.1.** *Un espacio vectorial topológico* $(X, \tau)$ *es un espacio vectorial* $X$ *sobre* $\mathbb{K}$ *junto con una topología* $\tau$ *en* $X$ *tal que la función dada por:*

$$(x, y) \longrightarrow x + y,$$

*es continua de* $X \times X \longrightarrow X$ *y la función dada por*

$$(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x,$$

*es continua de* $\mathbb{K} \times X \longrightarrow X$*, donde en* $X \times X$ *y* $\mathbb{K} \times X$ *se toman las topologías producto respectivas.*

Se suele decir que $X$ es un espacio vectorial topológico, sin mencionar explícitamente la topología $\tau$. Evidentemente todo subespacio vectorial de un espacio vectorial topológico es a su vez un espacio vectorial topológico si se considera en él la topología inducida. Dada la continuidad de las operaciones en un espacio vectorial topológico, es suficiente conocer una base local de 0, pues una base local de cualquier otro punto es la traslación de la base local de 0 a ese punto. En otras palabras, igual que en los espacios normados, la topología es invariante bajo traslaciones tal y como se muestra a continuación.

**Proposición 2.1.2.** *Sea* $X$ *un espacio vectorial topológico sobre* $\mathbb{K}$*. Entonces* *i) Si $y \in X$, el operador $T_y : X \longrightarrow X$ dado por $T_y(x) = y + x$, es un homeomorfismo de $X$ sobre $X$.*

*ii) Si $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$, el operador $S_\lambda : X \longrightarrow X$ dado por $S_\lambda(x) = \lambda x$, es un homoemorfismo de $X$ sobre $X$.*

**Demostración:**
Probaremos $i$). La continuidad de la suma (Proposición 1.1.48), implica que $T_y$ es continuo para toda $y \in X$ y además $T_y(x) = y + x$, pero $T_y^{-1}(x) = -y + x = x + (-y) = T_{-y}(x)$, pero sabemos que $T$ es continuo para toda $y \in X$, entonces $T^{-1}$ es continuo, por definición $T$ es un homeomorfismo de $X$ sobre $X$.

Probemos $ii$). Sabemos que por Proposición 1.1.48, $S_\lambda$ es continua para toda $\lambda$, además si $\lambda \neq 0$, tenemos que $S_\lambda^{-1}(x) = (\lambda x)^{-1} = \lambda^{-1} x^{-1} = \lambda^{-1} y = S_{\lambda^{-1}}$ donde $y = x^{-1}$ y por lo tanto $S_\lambda$ es un homeomorfismo de $X$ sobre $X$. ■

De la proposición anterior obtenemos que si $U \subset X$ es abierto (respectivamente cerrado), entonces $x + U$ y $\lambda U$ son abiertos (respectivamente cerrados) para toda $x \in X$ y para toda $\lambda \in \mathbb{K}$. Además, si $U \subset X$ es abierto y $A \subset X$ es cualquier conjunto, $A + U = \cup_{x \in A}(x + U)$ es abierto. En cambio si $F \subset X$ es cerrado, $A + F$ no tiene porque ser cerrado, ni aún en el caso en que $A$ también sea cerrado.

**Ejemplo 2.1.3.** *Sea*

$$A = \{(x, e^{-x^2}) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0, \infty)\} \quad y \quad F = \{(x, e^{-x^2}) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in (-\infty, 0]\}.$$

*Demostremos que* $(0,0) \in \overline{A + F}$ *pero* $(0,0) \notin A + F$.

**Demostración:**
Sabemos que, $A + F = \cup_{x \in A}(x + F)$, es decir $A + F = \{z = x + y : \ x \in A, y \in F\}$. Supongamos que $(0,0) \in A + F$.

$$(0,0) \in A + F \Longrightarrow (0,0) = (x, e^{-x^2}) + (y, e^{-y^2}) = (x + y, e^{-x^2} + e^{-y^2}).$$

Pero por igualdad tenemos que $0 = x + y$ y $0 = e^{-x^2} + e^{-y^2}$, así, $x = -y$ y $e^{-x^2} = -e^{-y^2}$, respectivamente. Pero $e^{-x^2}$ siempre es positivo, por lo cual $e^{-x^2} + e^{-y^2}$ no será cero, a menos que $x$ e $y$ tiendan al infinito. Por tanto, $(0,0) \notin A + F$. Ahora bien, sabemos que $\overline{A + F}$ contiene todos sus puntos de acumulación, y por lo anterior $\lim_{x \longrightarrow \infty}(e^{-x^2}) = 0$ y $\lim_{y \longrightarrow \infty}(e^{-y^2}) = 0$. Y así, concluimos que $(0,0) \in \overline{A + F}$. ■

**Proposición 2.1.4.** *Sea $X$ un espacio normado topológico.*

*a) Si $A, B \subset X$ son conjuntos compactos, entonces $A + B$ es compacto.*

*b) Sean $A, B \subset X$ con $A$ cerrado y $B$ compacto, entonces $A + B$ es un conjunto cerrado.*

**Demostración:**
Primero demostremos $a$). Sea $\varphi : X \times X \longrightarrow X$ dada por $\varphi(x,y) = x + y$. Por definición de espacio vectorial topológico (Definición 2.1.1), $\varphi$ es continua y entonces $A + B = \varphi(A, B)$ es un conjunto compacto por ser la imagen continua de un conjunto compacto.

Ahora demostremos $b$). Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ y $z_\alpha \in B$. Como por hipótesis tenemos que $B$ es compacto, tenemos que, $\{z_\alpha\}_{\alpha \in D}$ tiene una subred convergente, digamos $z_\beta \longrightarrow z \in B$. Por la continuidad de la suma y el producto por escalares, $y_\beta = x_\beta - z_\beta \longrightarrow x - z = y$ y $y \in A$ pues $A$ es cerrado. Entonces $x \in A + B$, de donde $A + B$ es un conjunto cerrado. ■

Sabemos que es suficiente conocer una base local de 0 para conocer la topología de un espacio vectorial topológico. Veremos que existen bases locales cuyos elementos son conjuntos "bonitos" (en cierto sentido, los veremos más adelante), los cuales definiremos a continuación.

**Definición 2.1.5.** *Sea $X$ un espacio normado vectorial. Sea $A \subset X$, se cumple que*

1. *$A$ es un conjunto simétrico, si $A = -A$.*
2. *$A$ es un conjunto balanceado, si $\lambda A \subset A$ para toda $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$.*
3. *$A$ es un conjunto absorbente, si para toda $x \in X$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$, con $\lambda > 0$, tal que $\lambda x \in A$.*

*Diremos que un conjunto $U \subset X$ absorbe a $B \subset X$, si existe $\lambda \in \mathbb{K}$, con $\lambda > 0$, tal que $\lambda B \subset U$.*

Podemos observar que los conjuntos absorbentes o balanceados contienen a 0 y un conjunto balanceado es simétrico. Notemos también que las bolas en espacios normados y las vecindades débil y débil estrella son conjuntos balanceados y absorbentes.

**Lema 2.1.6.** *Los conjuntos absorbentes o balanceados contienen a 0 y un conjunto balanceado es simétrico.*

**Demostración:**
Si $A$ es absorbente, como $0 \in X$, existe $0 < \alpha = 2$, por ejemplo, tal que $\lambda \cdot 0 = 0 \in A$, siempre que $|\lambda| < \alpha$.

Si $A$ es balanceado, para todo escalar $\lambda$, tal que $|\lambda| \leq 1,\ 0 = \lambda \cdot 0 \in A$.

Si $A$ es balanceado, para todo escalar $\lambda$, tal que $|\lambda| \leq 1$, $\lambda A \subset A$, así sí $\lambda = -1$, como: $|\lambda| = |-1| = 1$, cumple la definición por lo que $\lambda A = -1A = -A \subset A$, luego: $a \in A \Longrightarrow a = -1(-a) \in -A \Longrightarrow a \in -A \Longrightarrow A \subset -A$, por lo que $A = -A$, es decir $A$ es simétrico. ■

**Lema 2.1.7.** *Las bolas en espacios normados y las vecindades débil y débil estrella son conjuntos balanceados y absorbentes.*

**Demostración:**

Se definió las bolas en espacios normados como

$$B_\rho(\lambda) = \{x \in X : \ \rho(x) < \lambda\} \quad \text{y} \quad B_\rho(\varepsilon) = \{x \in X : \ \rho(x) < \varepsilon\}.$$

Demostraremos que $B_\rho(\lambda)$ es balanceado. Por Teorema 1.1.46, $B_\rho(\lambda)$ es convexo, es decir, para $x, y \in B_\rho(\lambda)$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ obtenemos,

$$\rho(\varepsilon x + (1-\varepsilon)y) \leq \varepsilon\rho(x) + (1-\varepsilon)\rho(y) \leq \varepsilon\lambda + (1-\varepsilon)\lambda = \lambda.$$

Además, $\rho(\alpha x) = |\alpha| x$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, por lo que $|\alpha| \leq 1$ implica, $\rho(\alpha x) = \alpha x \leq \lambda$. Por lo tanto $B_\rho(\lambda)$ es balanceado.

Demostraremos que $B_\rho(\lambda)$ es absorbente. Ahora sí,

$$\rho(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \in B_\rho(\varepsilon); \ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Suponiendo que $\rho(x) > 0$, obtenemos que para todo $\lambda > 0$,

$$\rho\left(\frac{\varepsilon}{\rho(x)+1} x\right) = \frac{\varepsilon}{\rho(x)+1}\rho(x) < \lambda.$$

Por lo que, $B_\rho(\lambda)$ es absorbente.

Hemos demostrado anteriormente que en las vecindades débiles $V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon)$ y en las débiles estrella $V(f_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon)$ se cumple que

$$V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \lambda\varepsilon) = \lambda V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) \text{ sí } \lambda > 0,$$

$$V(f_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \lambda\varepsilon) = \lambda V(f_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) \text{ sí } \lambda > 0.$$

Por lo tanto, las vecindades débiles y débiles estrella son balanceadas y absorbentes. ■

**Proposición 2.1.8.** *Si $(X;\tau)$ es un espacio vectorial topológico y $U$ es una vecindad de $0$, existe $W \in \tau$ vecindad de $0$ balanceada tal que $W + W \subset U$; en particular $W \subset U$.*

**Demostración:**

Por la continuidad del producto por escalar (Proposición 1.1.48), para toda vecindad $U$ de 0, existe $\varepsilon > 0$ y $V \in \tau$, con $V$ vecindad de 0, tales que $|\lambda| < \varepsilon$, entonces $\lambda V \subset U$. Definamos $W_0 = \cap_{\lambda:|\lambda|<\varepsilon} \lambda V \in \tau$, una vecindad balanceada de cero con $W_0 \subset U$. Ahora bien por Proposición 1.1.48, la suma es continua y $0 + 0 = 0$, entonces existen $U_1, U_2 \in \tau$ vecindades de 0 tales que $U_1 + U_2 \subset U$. Sean entonces $W_1 \subset U_1$ y $W_2 \subset U_2$ vecindades balanceadas de 0. Si $W = W_1 \cap W_2$, entonces tenemos que $W \in \tau$ es balanceada y $W + W \subset W_1 + W_2 \subset U_1 + U_2 \subset U$. Por tanto, $W + W \subset U$. ■

**Teorema 2.1.9.** *Si $(X,\tau)$ es un espacio vectorial topológico, existe una base local de vecindades de $0$, que denotaremos por $\mathcal{V}$, tal que* *i) Toda $U \in \mathcal{V}$ es balanceada y absorbente.*

*ii) Si $U, V \in \mathcal{V}$, entonces existe $W \in \mathcal{V}$ con $W \subset U \cap V$.*

*iii) Si $U \in \mathcal{V}$ y $u \in U$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset u + U$.*

*iv) Si $U \in \mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V + V \subset U$.*

*v) Si $U \in \mathcal{V}$, entonces $\frac{1}{n}U \in \mathcal{V}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

*Recíprocamente, si $X$ es un espacio vectorial y $V$ es una familia no vacía de subconjuntos de $X$ que satisfacen las propiedades de i) a v) anteriores, existe una topología $\tau$ tal que $X$ es un espacio vectorial topológico y $V$ es una base local de vecindades de* $0$.

**<u>Demostración:</u>**
Probemos $i$). Veremos que toda vecindad $W$ de 0 es absorbente. Dada $x \in X$, definimos $\psi_x : \mathbb{K} \longrightarrow X$ por $\psi_x(\lambda) = \lambda x$ que es continua por Proposición 1.1.48, por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|\lambda| < \varepsilon$, entonces $\lambda x < \varepsilon x$, por lo que $\psi_x(\lambda) \in W$ donde $W$ es una vecindad de 0 y por ende, existe $\mu > 0$ tal que $\mu x \in W$, y por Definición 2.1.5 $W$ es absorbente. Sea $\mathcal{V} = \{U : U \text{es una vecindad balanceada de } 0\}$ y sea $A$ una vecindad de 0 cualquiera. Por la Proposición 2.1.8, existe una vecindad $W$ de 0 balanceada con $W \subset A$. Además sabemos que la intersección de dos conjuntos balanceados es nuevamente balanceado, así $\mathcal{V}$ es una base local de 0 cuyos miembros son balanceados y absorbentes.

Probemos $ii$). Se cumple por propiedad de base local. (Definición 1.6.12)

Probemos $iii$). Sean $U \in \mathcal{V}$ y $u \in U$. Por Definición 2.1.5, un conjunto balanceado es simétrico, por lo que $U$ es simétrico, $u + U$ es una vecindad de 0, y entonces por lo anterior, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset u + U$.

Ahora demostremos $iv$). Se cumple por la Proposición 2.1.8.

Demostremos $v$). Sabemos que $U$ es absorbente y balanceado por inciso $i$), por Definición 2.1.5, $\lambda U \subset U$, si $\lambda = \frac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple $v$).

Ahora bien, recíprocamente, sea $X$ un espacio vectorial con una colección de conjuntos $\mathcal{V}$ que satisfaga $i$) a $v$). Como toda $U \in \mathcal{V}$ es simétrica, resulta que $0 \in U$. Sea

$$\mathcal{B} = \{x + U;\ x \in X,\ U \in \mathcal{V}\}.$$

Supongamos que $(x + U) \cap (y + V) \neq \emptyset$ y que $z \in (x + U) \cap (y + V)$, con $V \in \mathcal{V}$. Entonces $(x - z) \in U$ y $(y - z) \in V$. Por $iii$), existen $W_1, W_2 \in \mathcal{V}$ tales que

$$W_1 \subset (x - z) + U \text{ y } W_2 \subset (y - z) + V$$

y por $ii$), existe $W \in \mathcal{V}$ con $W \subset W_1 \cap W_2$. Por lo tanto $z + W \subset (x + U) \cap (y + V)$. Es decir $\mathcal{B}$ es base de una topología $\tau$ en $X$ y de $ii$) y $iii$) obtenemos que $\mathcal{V}$ es una base local de 0 en $\tau$. Comprobaremos ahora que las operaciones de espacio vectorial son continuas, es decir, suma y producto escalar. Para ello usaremos la siguiente definición de continuidad, $f: X \longrightarrow Y$ es continua en $x \in Y$ sí, $\forall\, V(f(x)),\ \exists\, U(x);\ f(U) \subset V$. Sean $x, y \in X, U \in \mathcal{V}$ y sea $V \in \mathcal{V}$ tal que $V + V \subset U$. Esto se puede por $iv$). Sea $x + y + U$ una vecindad de $f(x, y) = x + y$, luego tomando a $U = (x + V) \times (y + V)$ tenemos,

$$f(U) = (x + V) + (y + V) = x + y + V + V \subset x + y + U,$$

lo que demuestra la continuidad de la suma. Sean $x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ y $U \in \mathcal{V}$. Tomamos $V \in \mathcal{V}$ con $V + V \subset U$, $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon x \in V$, $A = \{\gamma \in \mathbb{K}; |\lambda - \gamma| < \varepsilon\}$ y $n \in \mathbb{N}$ con $\dfrac{1}{n} < \frac{1}{|\lambda|+\varepsilon}$. Entonces por $v$) y $i$), si $\gamma \in A$, tenemos que,

$$\gamma\left(x + \frac{1}{n}V\right) = \gamma x + \frac{\gamma}{n}V = \lambda x + (\gamma - \lambda)x + \frac{\gamma}{n}V \subset \lambda x + V + V \subset \lambda x + U,$$

esto prueba la continuidad del producto por escalar. ■

A parte de las propiedades anteriores, en un espacio vectorial topológico la topología tiene otra característica notable.

**Proposición 2.1.10.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio vectorial topológico y $U \in \tau$, vecindad de 0. Entonces existe $V \in \tau$, vecindad balanceada de 0, tal que $\overline{V} \subset U$.*

**Demostración:**
Sea $U \in \tau$ vecindad de 0, entonces existe $V \in \tau$, vecindad balanceada de 0, por Teorema 2.1.9, tal que $V + V \subset U$. Veremos que $\overline{V} \subset U$. Sea $y \in \overline{V}$, entonces $(y + V) \cap V \neq \emptyset$ y $z \in (y + V) \cap V$, entonces $z \in V$ por lo que, existe $v \in V$ tal que $z = y + v$, esto implica que $y \in V + V \subset U$, pero $y \in \overline{V}$, por lo tanto $\overline{V} \subset U$. ■

**Ejemplo 2.1.11.** *Los espacios normados y los espacios que se obtienen de los espacios normados, al dotarlos de la topología débil o de la topología débil estrella, son espacios vectoriales topológicos.*

**Proposición 2.1.12.** *Sea $X$ un espacio vectorial topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

*i)* $X$ *es de Hausdorff.*

*ii)* $\{0\}$ *es cerrado.*

*iii)* *Todos los conjuntos unipuntuales de* $X$ *son cerrados.*

*iv)* $\{0\} = \cap\{V :\ V$ *es una vecindad de* $0\}$.

**Demostración:**
$i) \Longrightarrow ii)$. Supongamos que $X$ es de Hausdorff, entonces tenemos que todo punto $x \in X, x \neq 0$ tiene una vecindad $U$ con $0 \notin U$, entonces $X - \{0\}$ es abierto, por tanto $\{0\}$ es cerrado.

$ii) \Longrightarrow iii)$. Supongamos que $\{0\}$ es cerrado. Sea $x \in X$ y $T_x y = x + y;\ \forall\, y \in X$, por la

Proposición 2.1.2, $T_x$ es un homeomorfismo, ahora bien, si $y = 0$ tenemos $T_x(0) = x + 0 = x$, como $T_x$ es un homeomorfismo tenemos que $T_x$ es continua, por lo que si $y$ es cerrado, entonces $T_x(\{y\})$ es cerrado, como $\{0\}$ es cerrado, $T_x(\{0\}) = \{x\}$ es cerrado, concluimos que todos los conjuntos unipuntuales de $X$ son cerrados.

$iii) \implies iv)$. Supongamos que todos los conjuntos unipuntuales de $X$ son cerrados. Sea $x \in X, x \neq 0$, por hipótesis $\{x\}$ es cerrado, entonces $X - \{x\}$ es una vecindad de 0, luego tenemos que $x \notin \cap\{V : V \text{ es una vecindad de } 0\}$.

$iv) \implies i)$. Supongamos que $\{0\} = \cap\{V : V \text{ es una vecindad de } 0\}$. Sea $x \in X, x \neq 0$ y $V$ una vecindad de 0 tal que $x \notin V$, por el Teorema 2.1.9, existe una vecindad $U$ de 0, simétrica tal que $U + U \subset V$, veremos que $U \cap (x + U) = \emptyset$. Supongamos que $y \in U \cap (x + U)$, entonces tenemos que, existe $z \in U$ con $y = x + z$, de donde $x = y - z \in U + (-U) \subset V$, esto es una contradicción por lo que $U \cap (x + U) = \emptyset$. ■

**Proposición 2.1.13.** *Sean $X$ un espacio vectorial topológico y $C$, $F$ subconjuntos de $X$, con $C$ compacto, $F$ cerrado y $C \cap F = \emptyset$. Entonces existe una vecindad $U$ de 0 tal que*

$$(C + U) \cap (F + U) = \emptyset.$$

**Demostración:**
Si $C = \emptyset$ y $F$ un conjunto cerrado de $X$, entonces $C + U = \cup_{x \in C}(x + U) = \emptyset$, por lo que $(C + U) \cap (F + U) = \emptyset \cap (F + U) = \emptyset$, esto es lo que se deseaba demostrar.

Sea $C \neq \emptyset$ compacto, $F$ cerrado en $X$ y $x \in C$. Como $F$ es cerrado por Teorema 2.1.9, existe una vecindad simétrica de cero $U_x$ tal que $x + U_x + U_x + U_x \subset X - F$, es decir $(x + U_x + U_x + U_x) \cap F = \emptyset$, y como $U_x = -U_x$ por ser vecindad simétrica de cero, obtenemos que $(x + U_x + U_x) \cap (F + U_x) = \emptyset$. Dado que $C$ es compacto, existe un número finito de puntos $x_1, x_2, ..., x_k$ en $C$ tal que $C \subset \cup_{i=1}^{k}(x_i + U_{x_i})$. Sea $U = \cap_{i=1}^{k} U_{x_i}$, entonces $C + U \subset \cup_{i=1}^{k}(x_i + U_{x_i}) + U \subset \cup_{i=1}^{k}(x_i + U_{x_i} + U_{x_i})$, y así $(C + U) \cap (F + U) = \emptyset$. ■

## 2.2. OPERADORES LINEALES

Ahora nos dedicaremos al estudio de las funciones lineales continuas entre espacios vectoriales topológicos que, a semejanza del caso de espacios normados, llamaremos operadores lineales. Un isomorfismo, igual que antes, será un operador lineal biyectivo y bicontinuo (es decir, es un homeomorfismo lineal), y un funcional lineal es una función lineal continua de un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$.

**Lema 2.2.1.** *Sean $X$, $Y$ espacios vectoriales y $T : X \longrightarrow Y$ una función lineal.*

*(i) Si $A \subset X$ es convexo, balanceado o un subespacio de $X$, entonces $T(A)$ es convexo, balanceado o un subespacio de $Y$, respectivamente.*

*(ii) Si $B \subset Y$ es convexo, balanceado o un subespacio de $Y$, entonces $T^{-1}(B)$ es convexo, balanceado o un subespacio de $X$, respectivamente.*

**Demostración:**
Sean $X, Y$ espacios vectoriales y $T : X \longrightarrow Y$ una función lineal. Sea $A \subset X$ y $B \subset Y$.

Probaremos $(i)$. Supongamos que $A$ convexo, entonces para todo $\lambda \in [0,1]$ tenemos que

$$\lambda A + (1-\lambda)A \subset A \Longrightarrow T(\lambda A + (1-\lambda)A) \subset T(A) \Longrightarrow \lambda T(A) + (1-\lambda)T(A) \subset T(A)$$

Por Definición **??**, $T(A)$ es convexo. Ahora supongamos que $A$ es balanceado, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$ se tiene que

$$\lambda A \subset A \Longrightarrow T(\lambda A) \subset T(A) \Longrightarrow \lambda T(A) \subset T(A).$$

Por Definición 2.1.5, $T(A)$ es balanceado. Por último, supongamos que $A$ es un subespacio de $X$.

$$A \text{ subespacio de } X \Longrightarrow A \text{ cumple con los axiomas de espacio.}$$

Verifiquemos que $T(A)$ es un subespacio de $Y$ es decir, cumple ser cerrado para la suma y producto escalar. Sea $A$ subespacio de $X$ y $\alpha$ un escalar, demostraremos que $T(x) + T(y) \in T(A)$ Sean $x, y \in A$, entonces

$$x, y \in A \Longrightarrow T(x), T(y) \in T(A).$$

Por otro lado, si $x, y \in A$ entonces

$$x + y \in A \Longrightarrow T(x+y) \in T(A) \Longrightarrow T(x+y) = T(x) + T(y) \in T(A).$$

Ya que $T$ es lineal podemos confirmar que es cierto lo anterior. Ahora demostremos que, $\alpha T(x) \in T(A)$. Tenemos que

$$\alpha x \in A \Longrightarrow T(\alpha x) \in T(A) \Longrightarrow \alpha T(x) \in T(A).$$

Por tanto, $T(A)$ es subespacio de $Y$.

Prueba $(ii)$. Supongamos que $B$ es convexo, entonces para todo $\lambda \in [0,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda B + (1-\lambda)B \subset B &\Longrightarrow T^{-1}(\lambda B + (1-\lambda)B) \subset T^{-1}(B)\\ &\Longrightarrow \lambda T^{-1}(B) + (1-\lambda)T^{-1}(B) \subset T^{-1}(B).\end{aligned}$$

Por tanto, $T^{-1}B$ es convexo. Ahora supongamos que $B$ es balanceado, entonces

$$\begin{aligned}x \in T^{-1}B &\Longrightarrow Tx \in B \Longrightarrow \exists\ |\lambda| \leq 1;\ \lambda Tx \in B;\ \text{por Definición 2.1.5}\\ &\Longrightarrow T\lambda x \in B \Longrightarrow \lambda x \in T^{-1}B.\end{aligned}$$

Por Definición 2.1.5, $T^{-1}B$ es balanceado. Por último, supongamos que $B$ subespacio de $Y$.

$$B \text{ subespacio de } Y \Longrightarrow B \text{ cumple con los axiomas de espacio.}$$

Verifiquemos que $T^{-1}(B)$ es subespacio de $X$, es decir cumple la propiedad de suma y producto escalar. Sea $B$ subespacio de $Y$ y $\alpha$ un escalar. Demostraremos que, $T^{-1}(x) + T^{-1}(y) \in T(B)$. Sean $x, y \in T^{-1}B$.

$$x, y \in T^{-1}B \Longrightarrow Tx, Ty \in B \Longrightarrow T(x+y) \in B \Longrightarrow x + y \in T^{-1}B.$$

Por tanto, $T^{-1}B$ cumple ser cerrado para la suma. Seguidamente probaremos que $\alpha T^{-1}(x) \in T^{-1}(B)$. Sean $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in T^{-1}B$, entonces

$$x \in T^{-1}(B) \Longrightarrow Tx \in B \Longrightarrow \alpha Tx \in B \Longrightarrow T\alpha x \in B \Longrightarrow \alpha x \in T^{-1}B.$$

Por lo que, $T^{-1}B$ cumple el producto por escalar. Por tanto, $T^{-1}(B)$ es subespacio de $X$. ■

## 2.3. SUBESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA

Sabemos que en los espacios de dimensión finita todas las normas son equivalentes y veremos que de hecho en estos espacios todas las topologías de Hausdorff de espacio vectorial topológico son equivalentes. Mencionaremos uno de los resultados sobre subespacios de codimensión 1 en espacios vectoriales topológicos.

**Lema 2.3.1.** *Sean $X$ un espacio vectorial topológico y $H \subset X$ un subespacio de codimensión 1 (ver Lema 1.4.22) de $X$. Entonces $H$ es cerrado o es denso en $X$.*

**Demostración:**
Sean $H \subset X$ un subespacio de codimensión 1 de $X$. Supongamos que $X = H \bigoplus_a span\{x_0\}$ con $x_0 \in X$ tal que $\overline{H} \neq H$. Sea $w \in \overline{H} - H \Longrightarrow w = h + \mu x_0;\ h \in H, \mu \in \mathbb{K}, \mu \neq 0$. Si $x \in X,\ x = z + \lambda x_0;\ z \in H,\ \lambda \in \mathbb{K}$. Entonces tenemos que

$$x = z - \frac{\lambda}{\mu}h + \frac{\lambda}{\mu}h + \lambda x_0 = z - \frac{\lambda}{\mu}h + \frac{\lambda}{\mu}h + \frac{\lambda}{\mu}\mu x_0 = z - \frac{\lambda}{\mu}h + \frac{\lambda}{\mu}(h + \mu x_0) = z - \frac{\lambda}{\mu}h + \frac{\lambda}{\mu}w.$$

Así, $X = H \bigoplus_a span\{w\} \subset \overline{H} \subset X$, pero por Lema 1.4.24 $\overline{H} = H$ ó $\overline{H} = X$, es decir $H$ es cerrado o denso en $X$. ■

## 2.4. ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

Dentro de los espacios vectoriales topológicos son de particular interés aquéllos que tienen bases locales de vecindades convexas pues su topología está dada por una familia de seminormas que los hace más manejables. Sea $E$ un espacio vectorial. Recordemos que $C \subset E$ es un conjunto convexo, si para todo $x, y \in C$ y toda $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$, y que la envolvente convexa de un conjunto $A \subset E$ se define como

$$convA = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \colon x_i \in A,\ 0 \leq \lambda_i,\ i = 1, \ldots, k,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, k \in N \right\}.$$

Veremos que en los espacios vectoriales topológicos, existe una estrecha relación entre las seminormas y las vecindades convexas ya que a cada conjunto convexo, balanceado y absorbente $A$ en un espacio vectorial $E$ se le puede asociar una seminorma en $E$.

**Definición 2.4.1.** *Sean $E$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $A \in E$ convexo y absorbente. La funcional subaditiva de Minkowski $\mu A$ de $A$ se define por*

$$\mu_A(x) = inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda}x \in A\right\},$$

*para toda $x \in E$.*

Notemos que como $A$ es absorbente, $\mu_A(x) < \infty$ para toda $x \in E$, veremos que si $A$ es balanceado, entonces $\mu_A$ es una seminorma.

**Teorema 2.4.2.** *Sean $E$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $A \subset E$ convexo y absorbente. Sean $x, y \in E$ y $\lambda > 0$*

$(a)$ *Si $\lambda > \mu_A(x)$, entonces $\frac{1}{\lambda}x \in A$.*

$(b)$ *$\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.*

$(c)$ *$\mu_A(\lambda x) = \lambda\mu_A(x)$.*

$(d)$ *Si $A$ es balanceado, entonces $\mu_A$ es una seminorma.*

$(e)$ *Si $B = \{x \in E : \mu_A(x) < 1\}$ y $C = \{x \in E : \mu_A(x) \leq 1\}$, entonces $B \subset A \subset C$ y $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.*

**<u>Demostración:</u>**
Probaremos el literal $(a)$. Si $\lambda > \mu_A(x)$ por Definición 2.4.1, existe $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda > \mu > \mu_A(x)$ y $\frac{1}{\lambda}x \in X$. Como $A$ es absorbente, entonces $0 \in A$ (ver comentario después de la Definición 2.1.5) y como $A$ es convexo,

$$\frac{1}{\lambda}x = \frac{1}{\lambda}\frac{\mu}{\mu}x + 0 = \frac{\mu}{\lambda}\frac{1}{\lambda}x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)0 \in A.$$

Por lo que $\frac{1}{\lambda}x \in A$.

Probaremos el literal $(b)$. Supongamos que $\mu_A(x) < \gamma$, $\mu_A(y) < \lambda$ y que $\upsilon = \gamma + \lambda$. Entonces por literal $(a)$, $\frac{1}{\lambda}y$, $\frac{1}{\gamma}x \in A$ y como $A$ es convexo obtenemos que,

$$\frac{1}{\upsilon}(x+y) = \frac{1}{\upsilon}x + \frac{1}{\upsilon}y = \frac{1}{\upsilon}\frac{\gamma}{\gamma}x + \frac{1}{\upsilon}\frac{\lambda}{\lambda}y = \frac{\gamma}{\upsilon}\left(\frac{1}{\gamma}x\right) + \frac{\lambda}{\upsilon}\left(\frac{1}{\lambda}y\right) \in A.$$

Entonces $\frac{1}{\upsilon}(x+y) \in A$ por lo que $\mu_A(x+y) \leq \upsilon = \gamma + \lambda$. Como $\gamma$ y $\lambda$ son positivos tenemos que $\inf\{\lambda + \gamma\} = \inf\{\lambda\} + \inf\{\gamma\}$, pero

$$\mu_A(x+y) \leq \inf\{\lambda + \gamma\} = \inf\{\lambda\} + \inf\{\gamma\} = \mu_A(x) + \mu_A(y).$$

Por tanto, $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

Para el literal $(c)$. Sea $\lambda > 0$, entonces

$$\mu_A(\lambda x) = \inf\left\{\gamma > 0 : \frac{1}{\gamma}\lambda x \in A\right\} = \lambda \inf\left\{\gamma > 0 : \frac{1}{\gamma}x \in\right\} = \lambda\mu_A(x).$$

Así, $\mu_A(\lambda x) = \lambda\mu_A(x)$.

En el literal $(d)$. Supongamos que $A$ es balanceado y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces tenemos que $\frac{1}{\gamma}\lambda x \in A$ si y sólo si $\frac{1}{\gamma}|\lambda|x \in A$, luego por los literales $(c)$ y $(d)$ se obtiene que $\mu_A$ es una seminorma.

Para el literal $(e)$. Primero probaremos que $B$ es convexo y absorbente. Si $0 < \lambda < 1$ y $x, y \in B$, entonces

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \mu_A(\lambda x) + \mu_A((1-\lambda)y) = \lambda\mu_A(x) + (1-\lambda)\mu_A(y) < 1,$$

y por lo tanto, $B$ es convexo. Sea $x \in E$; si $\lambda > \mu_A(x)$ por literal $(c)$ se tiene que $\mu_A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) < 1$, de donde $B$ es absorbente. Ahora probaremos que $C$ es convexo y absorbente. Si $0 \leq \lambda \leq 1$ y $x, y \in C$, entonces

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \mu_A(\lambda x) + \mu_A((1-\lambda)y) = \lambda\mu_A(x) + (1-\lambda)\mu_A(y) \leq 1,$$

y por lo tanto, $C$ es convexo. Sea $x \in E$; si $\lambda > \mu_A(x)$ por literal $(c)$ se tiene que, $\mu_A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \leq 1$, de donde $C$ es absorbente. Ahora bien, si $x \in E$ es tal que $\mu_A(x) < 1$, por $(a)$ obtenemos que $x \in A$. Por otro lado, si $x \in A$, entonces $\mu_A(x) \leq 1$. Por lo tanto, $B \subset A \subset C$ de donde para toda $x \in E$,

$$\mu_C(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

Supongamos ahora que $\mu_C(x) < \gamma < \mu_A(x)$. Entonces por $(a)$, $\frac{1}{\gamma}x \in C$ y de la definición de $C$ se sigue que $\mu_A\left(\frac{1}{\gamma}x\right) \leq 1$, por lo que $\frac{1}{\gamma}\mu_A(x) \leq 1$ y así $\mu_A(x) \leq \gamma$. Esto implica que $\mu_A(x) \leq \gamma < \mu_A(x)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\mu_A(x) \leq \mu_C(x).$$

Similarmente, supongamos que $\mu_A(x) < \lambda < \mu_B(x)$. Entonces por $(a)$, $\frac{1}{\lambda}x \in B$ y de la definición de $B$ se sigue que $\mu_A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) < 1$, por lo que $\frac{1}{\lambda}\mu_A(x) < 1$ y así $\mu_A(x) < \lambda$. Esto implica que $\mu_B(x) \leq \lambda < \mu_B(x)$, lo cual es una contradicción . Por lo tanto

$$\mu_B(x) \leq \mu_A(x).$$

Por lo que, $\mu_B(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_C(x)$ y así,

$$\mu_B(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_C(x),$$

y finalmente obtenemos que:

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

■

El siguiente lema es en cierto modo el recíproco del inciso $(d)$ del Teorema 2.4.2 y de hecho es el recíproco si el conjunto $A$ de dicho inciso es abierto.

**Lema 2.4.3.** *Toda seminorma $\rho$ en un espacio vectorial $E$ es el funcional subaditivo de Minkowski de un conjunto absorbente, convexo y balanceado. Mas precisamente, $\rho = \mu_B$, donde $B = \{x \in E : \rho(x) < 1\}$.*

**Demostración:**

Primero probaremos que $B$ es convexo y absorbente. Si $0 < \lambda < 1$ y $x, y \in B$, entonces

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \mu_A(\lambda x) + \mu_A((1-\lambda)y) = \lambda\mu_A(x) + (1-\lambda)\mu_A(y) < 1,$$

y por lo tanto, $B$ es convexo. Sea $x \in E$; si $\lambda > \mu_A(x)$ por literal $(c)$ del Teorema 2.4.2, se tiene que $\mu_A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) < 1$, de donde $B$ es absorbente. Ahora si $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$ y $x \in B$, entonces $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x) < 1$, luego por Definición 2.1.5, $B$ es balanceado. Sea $x \in E$. Si $\lambda > \rho(x)$, entonces $1 > \frac{1}{\lambda}\rho(x)$ y asi $\rho\left(\frac{1}{\lambda}x\right) < 1$, de donde $\mu_B(x) \leq \lambda$. Por lo tanto, $\mu_B(x) \leq \rho(x)$. Por otra parte, si $0 < \lambda \leq \rho(x)$, tenemos que $1 \leq \rho\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$, de donde $\frac{1}{\lambda}x \notin B$. Por ende $\mu_B \geq \lambda$ y entonces $\rho(x) \leq \mu_B(x)$. Por lo tanto, $\rho = \mu_B$. ■

**Lema 2.4.4.** *Sean $X$ un espacio vectorial topológico, $A$ un conjunto convexo absorbente y $\mu_A$ su funcional subaditiva de Minkowski. Entonces*

$(a)$ *Si $A$ es abierto, $A = \{x \in X : \mu_A(x) < 1\}$.*

$(b)$ *Si $A$ es cerrado, $A = \{x \in X : \mu_A(x) \leq 1\}$.*

**Demostración:**

Para el literal $(a)$. Sea $B = \{x \in X : \mu_A(x) < 1\}$, así para $x \in B$, por el Teorema 2.4.2 $(a)$; como $1 > \mu_A(x)$, entonces $x \in A$, así $B \subset A$. Ahora supongamos que $A$ es abierto y sea $x \in A$. Por la continuidad de la función $f(\lambda) = \lambda x$ , existe $\lambda > 1$ tal que $\lambda x \in A$, por la definición de $A$ tenemos que $\mu_A(\lambda x) < 1$, por lo que $\lambda\mu_A(x) < 1$ y así $\mu_A(x) \leq \frac{1}{\lambda}$. De ahí obtenemos que $\mu_A(x) \leq \frac{1}{\lambda} < 1$ es decir $x \in B$ y así $A \subset B$. Consecuentemente $A = B$.

Para el literal $(b)$. Si $C = \{x \in X : \mu_A(x) \leq 1\}$, así para $x \in C$, por el Teorema 2.4.2 $(a)$; como $1 \geq \mu_A(x)$, entonces $x \in A$, así $C \subset A$. Ahora supongamos que $A$ es cerrado y que $x \notin A$. Por la continuidad de la función $f(\lambda) = \lambda x$, existe $\lambda < 1$ tal que $\lambda x \notin A$, de donde por la definición de $A$ se tiene que $\mu_A(\lambda x) \geq 1$, entonces $\lambda\mu_A(x) \geq 1$ y así $\mu_A(x) \geq \frac{1}{\lambda}$. De ahí obtenemos que $\mu_A(x) \geq \frac{1}{\lambda} > 1$ es decir $x \in A$ por lo que $C \subset A$. Por lo tanto $A = C$. ■

El resultado fundamental de esta sección se resume en los dos teoremas siguientes.

**Teorema 2.4.5.** *Sean $X$ un espacio localmente convexo y $\mathcal{V}$ una base local de $0$ compuesta por vecindades abiertas, convexas y balanceadas. Entonces la familia de los funcionales de Minkowski asociadas a los elementos de $\mathcal{V}$,*

$$\mathcal{P} = \{\mu_U : U \in \mathcal{V}\},$$

*es una familia de seminormas continuas y toda $U \in \mathcal{V}$ es de la forma $\{x \in X : \mu_U(x) < 1\}$. Además, si $X$ es de Hausdorff, $\mathcal{P}$ **separa puntos** de $X$, es decir $\forall\ x \neq 0$, existe $\rho \in \mathcal{P}$ tal que $\rho(x) \neq 0$.*

**Demostración:**

Primero probaremos que la familia $\mathcal{P}$ es una familia de serminormas continuas y que toda $U \in \mathcal{V}$ es de la forma $\{x \in X : \mu_U(x) < 1\}$. Sea $U \in \mathcal{V}$. Como $U$ es convexa, balanceada y absorbente, por el Teorema 2.4.2 $(d)$, obtenemos que $\mu_U$ es una seminorma. Sea $\gamma > 0$; por el Lema 1.1.37 $(b)$, tenemos que si $x - y \in \gamma U$, entonces

$$|\mu_U(x) - \mu_U(y)| \leq \mu_U(x - y) \leq \gamma,$$

por lo que $\mu_U$ es continua. Además como $U$ es abierto, por el Lema 2.4.4 $(a)$, se tiene que $U = \{x \in X : \mu_U(x) < 1\}$. Ahora probaremos que si $X$ es Hausdorff, entonces $\mathcal{P}$ separa puntos de $X$. Supongamos ahora que $X$ es de Hausdorff. Entonces si $x \in X$, $x \neq 0$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \notin V$. Como $x \notin V$ se tiene que $\mu_V(x) \geq 1$, así $\mu_V(x) \neq 0$ para $V \in \mathcal{P}$ por lo que la familia $\mathcal{P}$ separa puntos de $X$. ■

A diferencia de los espacios normados, donde el conjunto de bolas abiertas con centro 0 es una base local de 0, si $\mathcal{P}$ es una familia de seminormas en un espacio vectorial $E$, las vecindades de la forma

$$V\left(\rho, \frac{1}{n}\right) = \left\{x \in E : \rho(x) < \frac{1}{n}\right\}, \tag{2.1}$$

en general no constituyen una base local de 0 de una topología de un espacio vectorial topológico Hausdorff. El siguiente ejemplo es una muestra de ello.

**Ejemplo 2.4.6.** *Sean $X = \mathbb{K}^2$ y $\mathcal{P} = \{\rho_1, \rho_2\}$, donde $\rho_i(x_1, x_2) = |x_i|$, es un contraejemplo del Teorema 2.4.5.*

**Demostración:**

Primero probaremos que $\rho_i$ es una seminorma. Sean $x, y \in \mathbb{K}^2$ con $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces si $i = 1$, para la suma tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \rho_1(x + y) = \rho_1\left((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\right) = \rho_1(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = |x_1 + y_1| \\
&\Longrightarrow \rho_1(x + y) \leq |x_1| + |y_1|; \text{ por desigualdad triangular.} \\
&\Longrightarrow \rho_1(x + y) \leq \rho_1(x) + \rho_1(y).
\end{aligned}$$

Para el producto escalar,

$$\rho_1(\alpha x) = \rho_1(\alpha(x_1 + x_2)) = \rho_1((\alpha x_1, \alpha x_2)) = |\alpha x_1| = |\alpha||x_1| = |\alpha|\rho_1(x).$$

Análogamente es para $i = 2$. Ahora probaremos que $\mathcal{P}$ separa puntos de $\mathbb{K}^2$ (Teorema 2.4.5). Sea $x \in \mathbb{K}^2$ con $x = (x_1, x_2)$ $(x \neq 0)$, así $x_1 \neq 0$ ó $x_2 \neq 0$ luego para $i = 1$ sólo consideremos $x_1 \neq 0$ ya que $x_2 \neq 0$ no nos proporciona el resultado deseado, tenemos que

$$\rho_1(x) = \rho_1(x_1, x_2) = |x_1| \neq |0| = 0,$$

de manera similar para $i = 2$ si $x_2 \neq 0$ se tiene

$$\rho_2(x) = \rho_2(x_1, x_2) = |x_2| \neq |0| = 0.$$

Por lo que $\mathcal{P}$ separa puntos de $\mathbb{K}^2$. Además, la bola unitaria en $X$ no contiene ningún conjunto $V(\rho_i, \frac{1}{n})$. Entonces como todas las topologías Hausdorff de espacio vectorial son equivalentes en $\mathbb{K}^2$, $\{V\left(\rho_i, \frac{1}{n}\right) : i = 1, 2\}_{n=1}^{\infty}$ no puede ser una base local de 0 para una de estas topologías. ■

En cambio si $\mathcal{B}$ es la colección de todas las intersecciones finitas de los conjuntos $V(\rho, \frac{1}{n})$ con $\rho \in \mathcal{P}$ y $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}$ sí es una base local de 0 de una topología de espacio vectorial topológico.

**Teorema 2.4.7.** *Sea $\mathcal{P}$ una familia de seminormas en un espacio vectorial $X$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base local de 0 para una topología $\tau$ de espacio vectorial topológico en $X$ cuyos elementos son convexos y balanceados y tal que toda $\rho \in \mathcal{P}$ es continua. Además, si $\mathcal{P}$ separa puntos de $X$ la topología $\tau$ es de Hausdorff. Diremos que $\tau$ es la **topología generada** por $\mathcal{P}$.*

**Demostración:**

Veremos que $\mathcal{B}$ satisface las condiciones del Teorema 2.1.9, para así asegurar la existencia de la base local de 0. Recordemos que $\mathcal{B}$ es la colección de todas las intersecciones finitas de los conjuntos $V(\rho, \frac{1}{n})$ con $\rho \in \mathcal{P}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Para $(i)$, por el Lema 2.4.3, los elementos de $\mathcal{B}$ son convexos, blanceados y absorbentes.

Luego como $\mathcal{B}$ es una base local, por Definición 1.6.12, si $U, V \in \mathcal{B}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{B}$, por lo que cumple $(ii)$.

Para probar $(iii)$, sean $v \in \cap_{i=1}^{r} V(\rho_i, \frac{1}{n_i})$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m} < \min_{1 \leq i \leq r} \left( \frac{1}{n_i} - \rho_i(v) \right).$$

Entonces si $z \in \cap_{i=1}^{r} V(\rho_i, \frac{1}{m})$ por Ecuación (2.1), se cumple que

$$\rho_i(z) < \frac{1}{m} < \min_{1 \leq i \leq r} \left( \frac{1}{n_i} - \rho_i(v) \right),$$

de donde $\rho_i(z) < \frac{1}{n_i} - \rho_i(v)$ así $\rho_i(z) + \rho_i(v) < \frac{1}{n_i}$, pero,

$$\rho_i(z - v) \leq \rho_i(z + v) < \rho_i(z) + \rho_i(v).$$

Por lo que, $\rho_i(z - v) < \frac{1}{n_i}$ para $i = 1, \cdots, r$. Luego por la Ecuación (2.1), $z - v \in \cap_{i=1}^{r} V(\rho_i, \frac{1}{n_i})$ por tanto, $z \in v + \cap_{i=1}^{r} V(\rho_i, \frac{1}{n_i})$.

Ahora para $(iv)$, debemos probar que

$$\bigcap_{i=1}^{r} V\left(\rho_i, \frac{1}{2n_i}\right) + \bigcap_{i=1}^{r} V\left(\rho_i, \frac{1}{2n_i}\right) \subset \cap_{i=1}^{r} V\left(\rho_i, \frac{1}{n_i}\right).$$

Para ello sea $z \in \bigcap_{i=1}^{r} V\left(\rho_i, \frac{1}{2n_i}\right) + \bigcap_{i=1}^{r} V\left(\rho_i, \frac{1}{2n_i}\right)$, por lo que para todo $i = 1, \cdots, r$, existen $x, y \in \bigcap_{i=1}^{r} V\left(\rho_i, \frac{1}{2n_i}\right)$, $\bigcap_{i=1}^{r} V\left(\rho_i, \frac{1}{2n_i}\right)$ respectivamente, tales que $\rho(z) = \rho(x) + \rho(y)$, luego, por Ecuación (2.1) se tiene que $\rho(z) = \rho(x) + \rho(y) < \frac{1}{2n_i} + \frac{1}{2n_i} = \frac{1}{n_i}$, por lo que $z \in \bigcap_{i=1}^{r} V\left(\rho_i, \frac{1}{n_i}\right)$, es decir se cumple $(iv)$.

Por último, para $(v)$, por el literial $(i)$ como $U$ es absorbente y balanceado se cumple que para $n \in \mathbb{N}$ $nU \in \mathcal{B}$ por lo que $\frac{1}{n}U \in \mathcal{B}$. Como cumple los literales del Teorema 2.1.9, existe una topología $\tau$ de espacio vectorial topológico tal que $\mathcal{B}$ es una base local de vecindades de 0. Sean ahora $\rho \in \mathcal{P}$, $x \in X$ y $y \in x + V\left(\rho, \frac{1}{n}\right)$. Como,

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y) < \frac{1}{n},$$

$\rho$ es continua en $x$. Finalmente, si $\mathcal{P}$ separa puntos, dado $x \in X$, $x \neq 0$, sea $\rho \in \mathcal{P}$ con $\rho(x) > 0$. Entonces si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\rho(x) > \frac{1}{n}$, $x \notin V\left(\rho, \frac{1}{n}\right)$, por la Proposición 2.1.12 $(iv) \longrightarrow (i)$, $X$ es Hausdorff. ■

Según la Proposición 2.4.5 a partir de una base local $\mathcal{V}$ de una topologia $\tau$ de espacio vectorial localmente convexo podemos obtener una familia de seminormas $\mathcal{P}$ y segun el Teorema 2.4.7, $\mathcal{P}$ genera una topología $\tau'$. ¿Serán iguales $\tau$ y $\tau'$? Resulta que sí son iguales. Como toda $\rho \in \mathcal{P}$ es $\tau$ continua obtenemos que $V\left(\rho, \frac{1}{n}\right) \in \tau$ y por lo tanto, $\tau' \subset \tau$. Por otra parte si $U \in \tau$ y $\rho = \mu_U$, entonces $U = V(\rho, 1) \in \tau'$, de donde $\tau \subset \tau'$. Así, $\tau = \tau'$.

**Ejemplo 2.4.8.** *En el espacio vectorial real, definimos al conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ por*

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \textit{ es continua}\},$$

*con la norma $\rho_n(f) = sup_{x\in[-n,n]}|f(x)|$, para $n = 1, 2, \ldots$. Probaremos que $\mathcal{P} = \{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de seminormas.*

**<u>Demostración:</u>**
Probemos que $\mathcal{P}$ es una familia de seminormas, para ello probemos que $\rho_n$ es una seminorma. Primero probaremos que $\rho_n(f + g) \leq \rho_n(f) + \rho_n(g)$. Sean $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, entonces

$$\rho_n(f+g) = \sup_{x\in[-n,n]}\{|(f+g)(x)|\} = \sup_{x\in[-n,n]}\{|f(x)+g(x)|\} \leq \sup_{x\in[-n,n]}\{|f(x)|+|g(x)|\}$$
$$\Longrightarrow \rho_n(f+g) \leq \sup_{x\in[-n,n]}\{|f(x)|\} + \sup_{x\in[-n,n]}\{|g(x)|\} = \rho_n(f) + \rho_n(g).$$

Ahora pobaremos que $\rho_n(\alpha f) = |\alpha|\rho_n(f)$. Sean $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

$$\rho_n(\alpha f) = \sup_{x\in[-n,n]}\{|\alpha f(x)|\} = \sup_{x\in[-n,n]}\{|\alpha||f(x)|\} = |\alpha| \sup_{x\in[-n,n]}\{|f(x)|\} = |\alpha|\rho_n(f).$$

Por tanto, $\mathcal{P}$ es una familia de seminormas. ■

**Ejemplo 2.4.9.** *Si $X$ es un espacio normado, la topología débil en $X$ está generada por la familia de seminormas $\{\rho_{f^*}(x) : \rho_{f^*}(x) = |f^*(x)|; f^* \in X^*\}$ y la topología débil estrella en $X$ está generada por la familia de seminormas $\{\rho_x(f^*) : \rho_x(f^*) = |f^*(x)|; x \in X\}$.*

**Demostración:**
Sea $\tau_\omega$ la topología débil de $X$, que tiene una base local de la forma

$$V(x_0, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in X : |f_i^*(x - x_0)| < \varepsilon\},$$

y sea $\tau_{\rho_{f^*}}$ la topología generada por las seminormas. Probemos que $\tau_\omega = \tau_{\rho_{f^*}}$.

"$\tau_{\rho_{f^*}} \subset \tau_\omega$".
Sea $x \in X$ y $U \in \tau_{\rho_{f^*}}$ tal que $x \in U$. $x \in U \Longrightarrow \exists\, \varepsilon_i > 0$ tal que $B_{\rho_{f_i^*}}(x, \varepsilon_i) \subset U$ que contiene a $x$, ya que $\rho_{f^*}(x) = |f^*(x)|$; $\forall f^* \in X^*$, para $i = 1, 2, \ldots, k$ tenemos que

$$\begin{aligned} &x \in B_{\rho_{f_i^*}}(x, \varepsilon_i) = \{y \in X : |f_i^*(x - y)| < \varepsilon_i\} \\ \Longrightarrow &x \in \bigcap_{i=1}^{k} B_{\rho_{f_i^*}}(x, \varepsilon_i) = \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X : |f_i^*(x - y)| < \varepsilon_i\} = \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X : |f_i^*(x - y)| < \varepsilon_i\}. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon = \text{máx}\{\varepsilon_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X : |f_i^*(x - y)| < \varepsilon_i\} \Longrightarrow x \in V(x, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon) \Longrightarrow U \in \tau_\omega.$$

Por tanto, $\tau_{\rho_{f^*}} \subset \tau_\omega$.

"$\tau_\omega \subset \tau_{\rho_{f^*}}$"
Sea $x \in X$, $U \in \tau_\omega$ tal que $x \in U$. $x \in U \Longrightarrow \exists f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*$ y $\varepsilon_i > 0$ tal que $x \in V(x, f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*, \varepsilon_i)$, así para todo $i = 1, \ldots, k$ se tiene que

$$\begin{aligned} &x \in \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X : |f_i^*(x - y)| < \varepsilon\} \Longrightarrow x \in \{y \in X : |f_i^*(x - y)| < \varepsilon\} \\ \Longrightarrow &x \in \{y \in X : \rho_{f_i^*} < \varepsilon\} \Longrightarrow x \in B_{\rho_{f_i^*}}(x, \varepsilon) \Longrightarrow U \in \tau_{\rho_{f^*}}. \end{aligned}$$

Por lo que $\tau_\omega \subset \tau_{\rho_{f^*}}$, así $\tau_\omega = \tau_{\rho_{f^*}}$. Sea $\tau_{\omega^*}$ la topología débil estrella de $X^*$, tiene una base local de la forma

$$V(f_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{f^* \in X^* : |(f_0^* - f^*)(x)| < \varepsilon\},$$

y sea $\tau_{\rho_x}$ la topología generada por las seminormas. Probemos que $\tau_{\omega^*} = \tau_{\rho_x}$.

"$\tau_{\rho_x} \subset \tau_{\omega^*}$".
Sea $U \in \tau_{\rho_x} \Longrightarrow \varepsilon_i > 0$ tal que $B_{\rho_{x_i}}(f^*, \varepsilon) \subset U$ como $\rho_x(f^*) = |f^*(x)|$; $\forall x \in X$, tenemos que $f^* \in B_{\rho_{x_i}}(f^*, \varepsilon_i) = \{g^* \in X^* : |(y^* - f^*)(x)| < \varepsilon_i\}; i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces $f^* \in \bigcap_{i=1}^{k} B_{\rho_{x_i}}(f^*, \varepsilon_i) = \bigcap_{i=1}^{k} \{g^* \in f^* : |(g * - f*)(x_i)| < \varepsilon_i\}$; $i = 1, 2, \ldots, k$. Sea

$\varepsilon = \text{máx}\{\varepsilon_i\}$; $i = 1, 2, \ldots, k$, tenemos que

$$f^* \in \bigcap_{i=1}^{k} \{g^* \in X^* : |(g * -f*)(x_i)| < \varepsilon\} \Longrightarrow f^* \in V(f^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) \Longrightarrow U \in \tau_{\omega^*}.$$

Por tanto, $\tau_{\rho_x} \subset \tau_{\omega^*}$.

"$\tau_{\omega^*} \subset \tau_{\rho_x}$'".
Sea $U \in \tau_{\omega^*}$ $f^* \in U \Longrightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ y $\varepsilon > 0$ tal que $x^* \in V(f^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) \subset U$, luego para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene que

$$f^* \in \bigcap_{i=1}^{k} \{g^* \in X^* : |(f^* - g^*)(x_i)| < \varepsilon\} \Longrightarrow f^* \in \{g^* \in X^* : |(f^* - g^*)(x_i)| < \varepsilon\}$$
$$\Longrightarrow f^* \in \{g^* \in X^* : \rho_{x_i}(f^*) < \varepsilon\} \Longrightarrow f^* \in B_{\rho_{x_i}}(f^*, \varepsilon) \Longrightarrow U \subset \tau_{\rho_x}.$$

Por tanto, $\tau_{\omega^*} \subset \tau_{\rho_x}$, así $\tau_{\omega^*} = \tau_{\rho_x}$. ■

Los teoremas geométricos de Hahn-Banach requieren la noción de hiperplano que damos a continuación.

**Definición 2.4.10.** *$M$ es un hiperplano en un espacio vectorial $X$ si existen un subespacio $Y$ de codimensión 1 en $X$ y un elemento $x \in X$ tales que $M = x + Y$.*

Por la Proposición 1.4.23, $Y$ es un subespacio de codimensión 1 en un espacio vectorial $X$ sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si, existe una función lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $Y = \ker f$, luego, $H$ es un hiperplano en $X$ si y sólo si existen una función lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que

$$H = \{x \in X : f(x) = \lambda\}.$$

Observemos que si $0 \in H$, entonces $\lambda = 0$.

**Proposición 2.4.11.** *Sean $X$ un espacio vectorial topológico real, $x_0 \in X$ y $A \subset X$ un conjunto abierto y convexo no vacío tal que $x_0 \notin A$. Entonces existe un hiperplano $H$ cerrado de $X$ tal que $x_0 \in H$ y $H \cap A = \emptyset$.*

**Demostración:**
Haciendo una traslación si es necesario, podemos suponer que $0 \in A$. Sea $\rho = \mu_A$ el funcional subaditivo de Minkowski de $A$. Por el Teorema 2.4.2 $(c)$, $\rho$ es una función sublineal no negativa tal que $\rho(\lambda a) = \lambda\rho(a)$ si $\lambda > 0$. Además por el Lema 2.4.4 como $A$ es abierto, $A = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$, y como $x_0 \notin A$, entonces

$$\rho(x_0) \geq 1. \tag{2.2}$$

Sean $Y = \overline{span x_0}$ y $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para $\lambda \in \mathbb{R}$ por $f(\lambda x_0) = \lambda\rho(x_0)$. Entonces si $\lambda \geq 0$, $f(\lambda x_0) = \rho(\lambda x_0)$ y si $\lambda < 0$, usando la Ecuación (2.2), obtenemos

$$f(\lambda x_0) = \lambda\rho(x_0) \leq \lambda < 0 \leq \rho(\lambda x_0).$$

Consecuentemente para toda $y \in Y$, $f(y) \leq \rho(y)$ y aplicando el Teorema 1.5.5, existe una extensión lineal de $f$, $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\tilde{f} \leq \rho$. Sea

$$H = \{x \in X : \tilde{f}(x) = \rho(x_0)\}.$$

Entonces $H$ es un hiperplano que contiene a $x_0$ y es ajeno al conjunto abierto $A$, pues $\rho(a) < 1$ para toda $a \in A$, de donde $H$ no es denso en $X$. Por lo tanto, del Lema 2.3.1 se obtiene que, $H$ es cerrado en $X$. ■

**Definición 2.4.12.** *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un funcional, diremos que $f$ es abierto si, para cada conjunto abierto $U$ de $X$, $f(U)$ es abierto en $Y$.*

**Proposición 2.4.13.** *Si $X$ es un espacio vectorial topológico, entonces todo funcional lineal distinto de cero es abierto.*

**Demostración:**
Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal con $\emptyset \neq U \subset X$ abierto, queremos probar que $f(U)$ es abierto.
Sea $y \in f(U)$

$$\begin{aligned} y \in f(U) &\Longrightarrow \exists\, x \in U, \text{ tal que } f(x) \neq y \\ &\Longrightarrow \text{existe una vecindad abierta de cero } V \text{ tal que } x \in x + V \subset U. \end{aligned}$$

Así, por Proposición 2.1.10, existe $W \subset X$ una vecindad balanceada de cero tal que $W \subset \overline{W} \subset V$. Por Lema 2.2.1, $f(W)$ es balanceado. Por Proposición 2.1.8, existe $S \subset X$, una vecindad balanceada de cero tal que $S \subset f(W)$ y como $S$ es una vecindad de cero, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(0, \varepsilon) \subset S \subset f(W)$, luego $y \in y + B(0, \varepsilon) \subset +S \subset f(V) \subset f(U)$.
Luego, $B(y, \varepsilon) \subset f(W)$ y así $f(U)$ es abierto. ■

**Teorema 2.4.14 (Hahn-Banach geométrico real).** *Sean $X$ un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ y $A$ y $B$ subconjuntos convexos no vacíos de $X$ con $A \cap B = \emptyset$. Entonces*

(*a*) *Si $A$ es abierto, existe un hiperplano cerrado $H$ que separa a $A$ y $B$, es decir existen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua y $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que para toda $a \in A$ y $b \in B$:*

$$f(a) < \alpha \leq f(b),$$

*y $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$.*

(*b*) *Si $A$ y $B$ son abiertos, la separación es estricta, es decir existen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua y $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que para toda $a \in A$ y $b \in B$:*

$$f(a) < \alpha < f(b).$$

(*c*) *Si $X$ es localmente convexo, $A$ es compacto y $B$ es cerrado, $A$ y $B$ se pueden separar fuertemente, es decir existen $f$ lineal y continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que para toda $a \in A$ y $b \in B$:*

$$f(a) < \alpha < \beta < f(b).$$

**Demostración:**

Primero demostraremos el literal $(a)$. Como $B-A=\{b-a : a\in A \text{ y } b\in B\}$ es un conjunto abierto, convexo y no contiene a 0, ya que $B-A=-A+B$ y la traslación de un abierto es abierto. Así, $B-A$ es convexo dado que, para $x=b_1-a_1,\ y=b_2-a_2\in B-A$ y $\lambda\in[0,1]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&x+(1-\lambda)y = b_1-a_1+(1-\lambda)(b_2-a_2)=b_1-a_1+b_2-a_2-\lambda b_2+\lambda a_2\\
\Longrightarrow &x+(1-\lambda)y=(b_1+b_2-\lambda b_2)-(a_1+a_2-\lambda a_2)\\
\Longrightarrow &x+(1-\lambda)y=(b_1+(1-\lambda)b_2)+(a_1+(1-\lambda)a_2)\in B-A.
\end{aligned}$$

Luego, sí $0\in A,B$, entonces $0\notin A^c$ y así $0\notin B\cap A^c$, por tanto no contiene a 0. Por la Proposición 2.4.11, existe un hiperplano cerrado $H$ tal que $0\in H$ y $H\cap(B-A)=\emptyset$. Entonces, existe $f : X\longrightarrow\mathbb{R}$ función lineal y continua tal que $H=\{x : f(x)=0\}$. Por lo tanto, $f(b-a)\neq 0$ para toda $a\in A$ y $b\in B$. Supongamos que existen, $c_1$ y $c_2\in B-A$ tales que $f(c_1)>0$ y $f(c_2)<0$ y sea,

$$\lambda=\frac{-f(c_2)}{f(c_1)-f(c_2)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&f(\lambda c_1+(1-\lambda)c_2)=\lambda f(c_1)+f(c_2)-\lambda f(c_2)\\
\Longrightarrow &f(\lambda c_1+(1-\lambda)c_2)=\frac{-f(c_2)}{f(c_1)-f(c_2)}f(c_1)+f(c_2)-\frac{-f(c_2)}{f(c_1)-f(c_2)}f(c_2)\\
\Longrightarrow &f(\lambda c_1+(1-\lambda)c_2)=\frac{-f(c_2)f(c_1)}{f(c_1)-f(c_2)}+f(c_2)+\frac{(f(c_2))^2}{f(c_1)-f(c_2)}\\
\Longrightarrow &f(\lambda c_1+(1-\lambda)c_2)=\frac{-f(c_2)f(c_1)+(f(c_1)-f(c_2))f(c_2)+(f(c_2))^2}{f(c_1)-f(c_2)}\\
\Longrightarrow &f(\lambda c_1+(1-\lambda)c_2)=\frac{-f(c_2)f(c_1)+f(c_2)f(c_1)-(f(c_2))^2+(f(c_2))^2}{f(c_1)-f(c_2)}=0,
\end{aligned}$$

y como $B-A$ es convexo, $\lambda c_1+(1-\lambda)c_2\in B-A$, lo cual contradice el hecho de que $H\cap(B-A)=\emptyset$. Por lo tanto, podemos suponer que $f(b-a)>0$, o equivalente, que $f(b)>f(a)$ para toda $a\in A$ y $b\in B$. Como $A$ es un conjunto abierto y convexo y todo funcional lineal es abierto (por Proposición 2.4.13), como es convexo $f(A)$ es un intervalo abierto y acotado en $\mathbb{R}$. Entonces si $a\in A$, con $\alpha=sup\{f(x) : x\in A\}$, $f(a)<\alpha$, es decir, para toda $a\in A$, $b\in B$, $f(a)<\alpha\leq f(b)$.

Ahora probaremos el literal $(b)$. Supongamos ahora que $A$ y $B$ son ambos abiertos. Entonces $f(B)$ también es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y por ende si $\alpha$ es como en $(a)$, entonces $f(a)<\alpha<f(b)$, para toda $a\in A$ y $b\in B$.

Por último, para el literal $(c)$. Supongamos que $X$ es localmente convexo, $A$ es compacto y $B$ es cerrado. Por la Proposición 2.1.13, existe una vecindad $U$ de 0, tal que $(A+U)\cap(B+U)=\emptyset$.

Como $X$ es localmente convexo, podemos suponer que $U$ es convexo. Entonces $A+U$ y $B+U$ son conjuntos abiertos y convexos y aplicando el literal $(b)$, sabemos que existe $f$ lineal y continua tal que $f(A+U)$, $f(B+U)$ son intervalos abiertos ajenos. Como además $f(A)$ es compacto, $f(A)$ es un intervalo cerrado y acotado contenido en $f(A+U)$, por lo que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tales que $f(a) < \alpha < \beta < f(b)$ ■

Enunciaremos ahora el teorema anterior en el caso de que $X$ es un espacio vectorial complejo.

**Corolario 2.4.15.** *(Hahn-Banach geométrico complejo) Sean $X$ un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}$ y $A, B$ subconjuntos convexos no vacíos de $X$ con $A \cap B = \emptyset$. Entonces*

$(a)$ *Si $A$ es abierto, existen $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal y continua y $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que para toda $a \in A$ y $b \in B$:*

$$ReF(a) < \alpha \leq ReF(b).$$

$(b)$ *Si $A$ y $B$ son abiertos, existen $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal y continua y $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que para toda $a \in A$ y $b \in B$:*

$$ReF(a) < \alpha < ReF(b).$$

$(c)$ *Si $X$ es localmente convexo, si $A$ es compacto y $B$ es cerrado, existen $F$ lineal y continua $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que para toda $a \in A$ y $b \in B$:*

$$ReF(a) < \alpha < \beta < ReF(b).$$

**Demostración:**

Primero demostraremos el literal $(a)$. Por el Teorema 2.4.14 $(a)$, existen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < \alpha \leq f(b)$ y por el Teorema 1.5.7, existe una extensión lineal-continua $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Definimos a $F$ por $F(x) = f(x) - if(ix)$, probaremos que $F$ es lineal. Sean $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned}
&F(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y) - if(i(\alpha x + \beta y)) = f(\alpha x) + f(\beta y) - i[f(i(\alpha x) + i(\beta y))] \\
\Longrightarrow &F(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) - i[f(i\alpha x) + f(i\beta y)] = \alpha f(x) + \beta f(y) - if(i\alpha x) - if(i\beta y) \\
\Longrightarrow &F(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) - if(i\alpha x) + \beta f(y) - if(i\beta y) = \alpha f(x) - \alpha i f(ix) + \beta f(y) - \beta i f(iy) \\
\Longrightarrow &F(\alpha x + \beta y) = \alpha(f(x) - if(ix)) + \beta(f(y) - if(iy)) = \alpha F(x) + \beta F(y).
\end{aligned}$$

Por lo que, $F$ es lineal. Luego $F$ es continua dado que es la suma de dos funciones continuas. Ahora $F(a) = f(a) - if(ia)$, de donde $ReF = f(a)$ pero $f(a) < \alpha$ por lo que $ReF(a) < \alpha$. De manera similar, $F(b) = f(b) - if(ib)$, de donde $ReF(b) = f(b)$ pero $\alpha \leq f(b)$ así, $\alpha \leq ReF(b)$. Entonces, concluimos que $ReF(a) < \alpha \leq ReF(b)$.

Ahora continuaremos con el literal $(b)$. Por el Teorema 2.4.14 inciso $(b)$, existen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < \alpha < f(b)$ y por el Teorema 1.5.7, existe una extensión lineal-continua $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ definimos a $F$ igual que en el inciso anterior, por lo que $F$ es lineal y continua. Luego $F(a) = f(a) - if(ia)$, de donde $ReF = f(a)$ pero $f(a) < \alpha$ por lo que $ReF(a) < \alpha$. De manera similar, $F(b) = f(b) - if(ib)$, de donde $ReF(b) = f(b)$ pero $\alpha < f(b)$ así, $\alpha < ReF(b)$. Por tanto, $ReF(a) < \alpha < ReF(b)$.

Por último, para el literal $(c)$. Por el Teorema 2.4.14 inciso $(c)$, existen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < \alpha < \beta < f(b)$ y por el Teorema 1.5.7, existe una extensión lineal-continua $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$, como en el inciso $(a)$ por lo que $F$ es lineal y continua. Luego $F(a) = f(a) - if(ia)$, de donde $ReF = f(a)$ pero $f(a) < \alpha < \beta$ por lo que $ReF(a) < \alpha < \beta$. De manera similar, $F(b) = f(b) - if(ib)$, de donde $ReF(b) = f(b)$ pero $\beta < f(b)$ así, $\beta < ReF(b)$. Por lo que, $ReF(a) < \alpha < \beta < ReF(b)$. ■

**Proposición 2.4.16.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio localmente convexo. Si $A \subset X$ es convexo, entonces $\overline{A} = \overline{A}^{\omega}$. En consecuencia un subconjunto convexo de $X$ es cerrado si y sólo si es débilmente cerrado.*

**<u>Demostración:</u>**
Como la cerradura de un conjunto $A$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a $A$ y $\sigma(X, X^*) \subset \tau$, tenemos que $\overline{A} \subset \overline{A}^{\omega}$. Para ver la otra inclusión, sea $x \notin \overline{A}$. Por el Corolario 2.4.15 inciso $(c)$, existen $f^* \in X^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$Ref^*(a) < \alpha < \beta < Ref^*(x); \qquad \text{para toda } a \in \overline{A}.$$

Si $C = \{y \in X : Ref^*(y) \leq \alpha\}$, entonces $\overline{A} \subset C$. Como $f^*$ es débilmente continua, $C$ es débilmente cerrado. Por lo tanto $\overline{A}^{\omega} \subset C$ y como $x \notin C$, esto implica que $x \notin \overline{A}^{\omega}$, y consecuentemente $\overline{A}^{\omega} \subset \overline{A}$. Por tanto, $\overline{A} = \overline{A}^{\omega}$. ■

# Capítulo 3

# GEOMETRÍA EN ESPACIOS DE BANACH

## 3.1. BASES DE SCHAUDER

En el estudio de los espacios vectoriales el concepto de bases de Hamel está ligado únicamente a la estructura vectorial del espacio, pero, en el caso de los espacios de Banach tenemos una estructura más rica. Para explicar lo que queremos decir, supongamos que $\{x_i\}_{i\in A}$ es una base de Hamel en un espacio de Banach real $X$ y $x \in X$, entonces $x = \sum_{i\in A} a_i x_i$ donde $\{a_i\}_{i\in A} \subset R$ y $a_i = 0$ excepto para un conjunto finito de índices. Si existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $z_n = \sum_{i\in A} a_i^{(n)} x_i$, donde $a_i^{(n)} \in R$ es cero excepto para un conjunto finito de $i \in A$ y $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n = x$, en general no es cierto que la sucesión $\{a_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $a_i$ lo cual será deseable. Por ejemplo, si $X$ es el espacio de Banach $\ell^{\infty}$ definido en el capítulo 2 y denotamos por $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a la sucesión

$$\begin{aligned}
f_1 &= (1, 1, ..., 1, ...)\\
f_2 &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \dots\right)\\
f_3 &= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}, \dots\right)\\
&\vdots\\
f_n &= \left(0, 0, \dots, 0_{n-2}, \frac{1}{2^{n-2}}, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Podemos ver que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente, ya que para la ecuación $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$, la única solución es la trivial, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Luego, la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ que definiremos mediante

$$y_n = f_1 - \sum_{i=2}^{n+1} f_i.$$

Demostremos que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 en $\ell^{\infty}$. Para ello evaluemos primero,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(f_1 - \sum_{i=2}^{n+1} f_i\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty}(f_1) - \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\sum_{i=2}^{n+1} f_i\right) = f_1 - \sum_{i=2}^{\infty}(f_i)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = f_1 - \left(\sum_{i_1=2}^{\infty}\xi_{i_1}, \sum_{i_2=2}^{\infty}\xi_{i_2}, \dots, \sum_{i_2=2}^{\infty}\xi_{i_k}, \dots\right),$$

donde $\xi_{i_k}$ es la $k-$ésima coordenada de $f_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i_1=2}^{\infty}\xi_{i_1} &= 1+0+0+\cdots = 1\\
\sum_{i_2=2}^{\infty}\xi_{i_2} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+0+\cdots = 1\\
\sum_{i_2=2}^{\infty}\xi_{i_2} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0+0+\cdots = 1\\
\sum_{i_2=2}^{\infty}\xi_{i_2} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+0+\cdots = 1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Demostremos que

$$\sum_{i_k=2}^{\infty}\xi_{i_k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{k-3}}+\frac{1}{2^{k-2}}+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}}+0+0+\cdots = 1$$

Comencemos con sumar el elemento $k$ con el elemento $k-1$ de la sumatoria y resultará,

$$\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}\cdot 2^{-1}} = \frac{1}{2^{k-2}}.$$

Al resultado le sumamos el elemento $k-2$ de la sumatoria y nos resultará,

$$\frac{1}{2^{k-2}}+\frac{1}{2^{k-2}} = \frac{2}{2^{k-2}} = \frac{1}{2^{k-2}\cdot 2^{-1}} = \frac{1}{2^{k-3}}.$$

De igual manera hacemos con el elemento $k-3$ de la sumatoria y resultará el mismo valor del elemento $k-4$, por lo que siguiendo el mismo procedimiento $k-2$ veces llegaremos a la ultima suma que resultara ser $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, por lo tanto $\sum_{i_k=2}^{\infty}\xi_{i_k}=1$, de donde,

$$\left(\sum_{i_1=2}^{\infty}\xi_{i_1}, \sum_{i_2=2}^{\infty}\xi_{i_2}, \dots, \sum_{i_2=2}^{\infty}\xi_{i_k}, \dots\right) = (1,1,\dots,1,1,\dots) = f_1,$$

entonces $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n = f_1 - f_1 = 0$.

# Generalidades

En este capítulo a las bases de Schauder llamaremos bases simplemente, pues serán la únicas que manejaremos. Cabe mencionar, que a diferencia de las bases de Hamel, no es cierto que todo espacio de Banach tenga una base de Schauder, lo cual veremos más adelante. Anteriormente definimos lo que es una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que es una base de Schauder de la cerradura del espacio vectorial generado por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, se llama una sucesión básica.

**Definición 3.1.1.** *Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $X$ que es una base de Schauder de la cerradura del espacio vectorial generado por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, se llama una sucesión básica. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica y existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{1}{M} \leq \|x_n\| \leq M,$$

*entonces la sucesión se llama **seminormalizada**; si $\|x_n\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión se llama **normalizada**.*

Esta definición nos permite identificar a todo espacio de Banach con base con un espacio de sucesiones, haciendo corresponder a $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$; si la base además es seminormalizada, la sucesión converge a cero.

**Lema 3.1.2.** *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica seminormalizada en un espacio de Banach $X$, y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$, entonces*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0.$$

**Demostración:**

Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$ y supongamos que $\dfrac{1}{M} < \|x_n\| < M$. Consideremos la siguiente sucesión $\{\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\}_{m=1}^{\infty}$, la cual escrita de otra manera es la sucesión,

$$\{a_1x_1,\ (a_1x_1 + a_2x_2), \ldots, (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_ix_i)\},$$

la cual converge a $x$ cuando $m$ tiende a infinito, de donde $\{\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy, es decir dado $\varepsilon > 0$, existe $N$ tal que si $m \geq n > N$ tenemos,

$$\left\|\sum_{i=n}^{m} a_i x_i\right\| < \varepsilon.$$

En particular si $n = m > N$, $|a_n|\|x_n\| < \varepsilon$ y de aquí, si $n > N$,

$$\frac{1}{M}|a_n| < |a_n|\|x_n\| < \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{M}|a_n| < \varepsilon \Longrightarrow |a_n| < M\varepsilon.$$

De lo cual se sigue que $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$. ∎

**Ejemplo 3.1.3.** *Demostremos que la sucesión* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *donde* $e_n = \{e_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que,*

$$e_n^{(j)} = \begin{cases} 0, & si\ n{\neq}j, \\ 1, & si\ n{=}j, \end{cases}$$

*es una base de Schauder para* $c_0$ *tal que es una sucesión básica normalizada en* $\ell^{\infty}$*.*

<u>**Demostración:**</u>
Sea $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Debemos demostrar que $\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\|_{\infty} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y que los $x'_k$ son únicos, como $x \in c_0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N\ |x_n| < \varepsilon$, entonces $\sup_{n \geq N} |x_n| \leq \varepsilon$, así

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x'_n e_n - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| = \sup \left| \sum_{n=1}^{\infty} x'_n e_n - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right|,$$

pero para $j \neq n$, $e_n^{(j)} = 0$, si $j = n$, $e_n = 1$, entonces

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| = \sup_{j \geq n+1} |x_n| \leq \varepsilon, \quad \forall\ n \geq N.$$

Ahora, veamos que la representación es unica. Supongamos que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de escalares tales que,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \text{ en la norma de } c_0, \tag{3.1}$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n \text{ en la norma de } c_0. \tag{3.2}$$

Dado $\varepsilon > 0$ (por las Ecuaciones (3.1) y (3.2)), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\|x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\ n \geq N$. Entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) e_k \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k + x - x \right\|_{\infty}$$

$$\Longrightarrow \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) e_k \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k - x + x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|_{\infty}.$$

Aplicando la desidualdad del triángulo tenemos,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) e_k \right\|_{\infty} \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_{\infty} + \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

siempre que $n \geq N$. Así, para cada $k \in \mathbb{N}$ $|\alpha_k - \beta_k| < \varepsilon$, $\forall\ \varepsilon > 0$, entonces concluimos que $\alpha_k = \beta_k$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$. Así cada $x'_k$ es único, dado que se cumple la Definición 1.6.2, concluimos que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para $c_0$. Como $\ell^{\infty}$ no es separable, $\ell^{\infty}$ no tiene una base de schauder, probaremos que dicha base es una sucesión básica normalizada en $\ell^\infty$. Aplicando la Definición 3.1.1,

$$\|e_n\|_\infty = \sup |e_n^{(j)}| = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión básica normalizada en $\ell^\infty$. ■

Hay otras maneras equivalentes para definir una base, pero para poder hacerlo, primero necesitamos el lema siguiente.

**Lema 3.1.4.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en un espacio de Banach $X$ tal que $x_n \neq 0$ para toda $n$ y sea*

$$Y = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K} : \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \text{ es convergente} \right\}.$$

*Entonces $Y$ equipado con la norma $|||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = \sup_N \left\|\sum_{n=1}^N a_n x_n\right\|$ es un espacio de Banach.*

**Demostración:**
Si $y = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in Y$, por la definición de este espacio, dada $\varepsilon > 0$, existe $L \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > L$, $\|\sum_{i=n}^\infty a_i x_i\| < \varepsilon$, de manera que si $N > L$, $\left\|\sum_{i=1}^N a_i x_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^L a_i x_i\right\| + \varepsilon$. Consecuentemente $|||\cdot|||$ está bien definida. Probemos que $|||\cdot|||$ define una norma en $Y$. Demostremos que $|||\cdot||| > 0$. Sabemos que

$$\left\|\sum_{n=1}^N a_n x_n\right\| > 0 \Longrightarrow \sup_N \left\|\sum_{n=1}^N a_n x_n\right\| > 0 \Longrightarrow |||\{a_n\}_{n\in N}||| > 0.$$

Ahora demostremos que $|||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = 0 \Longleftrightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$.
"$\Longrightarrow$"
Sea $|||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = 0$, entonces

$$|||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = 0 \Longrightarrow \sup_N \left\|\sum_{n=1}^N a_n x_n\right\| = 0 \Longrightarrow \left\|\sum_{n=1}^N a_n x_n\right\| = 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^N a_n x_n = 0; \text{ para } N \in \mathbb{N}.$$

Entonces $a_1x_1 = 0$, $a_1x_1 + a_2x_2 = 0, \ldots, a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$. Además, como cada $x_n \neq 0$, entonces tenemos que $a_1 = 0$, consecuentemente, $a_2 = 0$ y asi sucesivamente todos los $a_n = 0$. Por lo tanto $\{a_n\}_{n=1}^\infty = 0$.

"$\Longleftarrow$"
Ahora sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty = 0$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$\{a_n\}_{n=1}^\infty = 0 \Longrightarrow a_n x_n = 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^N a_n x_n = 0 \Longrightarrow \left\|\sum_{n=1}^N a_n x_n\right\| = 0 \Longrightarrow \sup_N \left\|\sum_{n=1}^N a_n x_n\right\| = 0$$
$$\Longrightarrow |||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = 0.$$

Ahora demostremos que se cumple que $|||\alpha\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = |\alpha|\, |||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}|||$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$ Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que

$$|||\alpha\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = |||\{\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = \sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} \alpha a_n x_n\right\| = \sup_N \left\|\alpha \sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right\|$$

$$\Longrightarrow |||\alpha\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = \sup_N |\alpha| \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right\| = |\alpha| \sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right\| = |\alpha|\, |||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}|||\,.$$

Por tanto, $|||\alpha\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = |\alpha|\, |||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}|||\,.$

Por último, demostremos se cumple la desigualdad del triángulo. Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in Y$, tenemos

$$|||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = |||\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = \sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} (a_n + b_n) x_n\right\|$$

$$\Longrightarrow |||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| = \sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} (a_n x_n + b_n x_n)\right\| = \sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n + \sum_{n=1}^{N} b_n x_n\right\|$$

$$\Longrightarrow |||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| \leq \sup_N \left(\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right\| + \left\|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\right\|\right)$$

$$\Longrightarrow |||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| \leq \sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right\| + \sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\right\| = |||\{a_n\}_{n\in N}||| + |||\{b_n\}_{n\in N}|||\,.$$

Por lo tanto, $|||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}||| \leq |||\{a_n\}_{n\in N}||| + |||\{b_n\}_{n\in N}|||\,$. Por lo que $|||\cdot|||$ define una norma en $Y$.

Sea ahora $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(Y, |||\cdot|||)$ donde $y_m = \left\{a_n^{(m)}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $r, m > M$, tenemos,

$$\sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} \left(a_n^{(r)} - a_n^{(m)}\right) x_n\right\| < \varepsilon.$$

En particular, se tiene que para cada $n$, $\left|a_n^{(r)} - a_n^{(m)}\right| < \frac{2}{\|x_n\|}$, siempre que $r, m > M$, y por consiguiente $\{a_n^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy que converge a un límite que llamaremos $a_n$. Sea $y = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces si $m > M$ y $M_1 > M$ es tal que para $p, k > M_1$ tenemos que $\left\|\sum_{n=p+1}^{k} a_n^{(m)} x_n\right\| < \varepsilon$, entonces

$$\left\|\sum_{n=p+1}^{k} a_n x_n\right\| = \left\|\sum_{n=p+1}^{k} a_n x_n + \sum_{n=1}^{k} a_n^{(m)} x_n - \sum_{n=1}^{k} a_n^{(m)} x_n\right\|.$$

Luego tenemos las siguientes igualdades,

$$\sum_{n=p+1}^{k} a_n x_n = \sum_{n=1}^{k} a_n x_n - \sum_{n=1}^{p} a_n x_n, \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{k} a_n^{(m)} x_n = \sum_{n=1}^{p} a_n^{(m)} x_n + \sum_{n=p+1}^{k} a_n^{(m)} x_n.$$

Nos resulta la siguiente expresión.

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} a_n x_n - \sum_{n=1}^{p} a_n x_n - \sum_{n=1}^{k} a_n^{(m)} x_n + \sum_{n=1}^{p} a_n^{(m)} x_n + \sum_{n=p+1}^{k} a_n^{(m)} x_n \right\|.$$

Agrupando tenemos,

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} (a_n - a_n^{(m)}) x_n + \sum_{n=p+1}^{k} a_n^{(m)} x_n + \sum_{n=1}^{p} (a_n^{(m)} - a_n) x_n \right\|,$$

luego, por desigualdad del triángulo tenemos que,

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{n=p+1}^{k} a_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{k} (a_n - a_n^{(m)}) x_n \right\| + \left\| \sum_{n=p+1}^{k} a_n^{(m)} x_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{p} (a_n^{(m)} - a_n) x_n \right\| \\ \Longrightarrow &\left\| \sum_{n=p+1}^{k} a_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{k} (a_n - a_n^{(m)}) x_n \right\| + \left\| \sum_{n=p+1}^{k} a_n^{(m)} x_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{p} (a_n - a_n^{(m)}) x_n \right\| \\ \Longrightarrow &\left\| \sum_{n=p+1}^{k} a_n x_n \right\| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

de esto tenemos que $y$ pertenece a $Y$. Ahora consideremos el hecho de que $\left\{ a_n^{(m)} \right\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy que converge a $a_n$, por lo que $\lim_m a_n^{(m)} = a_n$, además,

$$\lim_m y_m = \lim_m \{a_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \lim_m a_n^{(m)} \right\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = y,$$

ya que la sucesión de cauchy dada converge a $y \in Y$ con la norma dada. Así concluimos que, $Y$ es completo. ■

**Corolario 3.1.5.** *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$. Sea $|||\cdot|||$ la norma definida en el Lema 3.1.4, como*

$$|||x||| = \sup_N \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \right\|.$$

*Entonces existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\|$.*

**Demostración:**

Primeramente, por definición de supremo tenemos que $\|x\| \leq |||x|||$. Definamos ahora $T : (X, |||\cdot|||) \longrightarrow (X, |||\cdot|||)$ como $Tx = x$, podemos observar que $T$ es un operador biyectivo y continuo ya que es el operador identidad. Haciendo uso del teorema de la función inversa, tenemos que $T^{-1}$ es también un operador continuo, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|||x||| = |||T^{-1}x||| \leq M|||x||| = M \sup_N \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \right\|,$$

pero tenemos que $\|x\| = \|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\| = \sup_N \left\|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right\|$, entonces $|||x||| \leq M\|x\|$. Por tanto, se cumple que $\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\|$. ■

**Definición 3.1.6.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Diremos que un operador $P : X \longrightarrow X$ es una proyección acotada si $P$ es un operador acotado tal que $P \circ P = P$.*

Observemos que si $P \neq 0$ y $x \in X$, $\|Px\| = \|PPx\| \leq \|P\|\|Px\|$, es decir $\|P\| \geq 1$.

**Lema 3.1.7.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $P : X \longrightarrow X$ una proyección acotada, entonces $PX$ es un subespacio cerrado de $X$.*

**Demostración:**
Para probar que es cerrado debemos probar que $\overline{PX} = PX$, dado que $PX \subset \overline{PX}$, solo queda probar la otra inclusión.

"$\overline{PX} \subset PX$".
Sea $x \in \overline{PX}$, entonces existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que $Px_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x \in X$. Como $P$ es continua, tenemos que

$$PPx_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} Px,$$

pero $Px_n = PPx_n$, entonces

$$Px_n \underset{n\longrightarrow\infty.}{\longrightarrow} Px$$

Luego, tenemos que $x = Px$ ya que los límites de convergencia son únicos. Por lo que $x \in PX$. Por lo que $\overline{PX} \subset PX$, así $\overline{PX} = PX$. Por tanto, $PX$ es cerrado. ■

El concepto de base de Schauder está íntimamente ligado con el de cierta sucesión de proyecciones.

**Proposición 3.1.8.** *Sea $X$ un espacio de Banach con una base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces los operadores $P_n$ dados para cada $n$ por*

$$P_n \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

*para toda $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$, son unas proyecciones acotadas y*

$$\sup_n \|P_n\| < \infty.$$

*Al número $\sup_n \|P_n\|$ se le llama* ***la constante de base*** *de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y a las proyecciones $P_n$ se les llama* ***las proyecciones asociadas a la base****. Además, si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, entonces*

$$x = \lim_{n\longrightarrow\infty} P_n x.$$

**Demostración:**
Por Definición 3.1.6, tenemos que $P_n \circ P_n = P_n$. Sean $|||\cdot|||$ y $M$ como en el Corolario 3.1.5. Entonces

$$\left\|Pn\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\| \leq \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right|\right|\right| \leq M\left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right\|$$

$$\Longrightarrow \left\|Pn\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right\| \leq M\left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right\| \Longrightarrow \frac{\|Pn\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\|}{\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\|} \leq M \Longrightarrow \|P_n\| \leq M.$$

Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_ix_i$, entonces $P_nx = P_n\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i = \sum_{i=1}^{n}a_ix_i$, así tenemos que,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{n}a_ix_i = \lim_{n\longrightarrow\infty}P_nx.$$

Esto demuestra la segunda afirmación. ■

**Lema 3.1.9.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en un espacio de Banach con constante de base $K$. Entonces si $x = \sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n \in \overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$,*

$$|a_n|\|x_n\| \leq 2K\|x\|.$$

*Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ además es seminormalizada y para cada $n$ se tiene*

$$\frac{1}{M} \leq \|x_n\| \leq M,$$

*entonces*

$$\sup_n |a_n| \leq 2KM\|x\|.$$

**Demostración:**
Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$, por Definición 3.1.6, tenemos

$$\|P_nx\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\| \leq K\|x\| \quad \text{y} \quad \|P_{n-1}x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n-1}a_ix_i\right\| \leq K\|x\|.$$

Entonces para cada $n \geq 1$, si tomamos $\sum_{i=1}^{0}a_ix_i = 0$. Ahora consideremos la expresión $|a_n|\|x_n\| = \|a_nx_n\|$, así tenemos que,

$$|a_n|\|x_n\| = \|a_nx_n\| = \left\|a_nx_n + \sum_{i=1}^{n-1}a_ix_i - \sum_{i=1}^{n-1}a_ix_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i - \sum_{i=1}^{n-1}a_ix_i\right\|$$

$$\Longrightarrow |a_n|\|x_n\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i + \left(-\sum_{i=1}^{n-1}a_ix_i\right)\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\| + \left\|-\sum_{i=1}^{n-1}a_ix_i\right\|$$

$$\Longrightarrow |a_n|\|x_n\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n-1}a_ix_i\right\| = \|P_nx\| + \|P_{n-1}x\| \leq K\|x\| + K\|x\| = 2K\|x\|.$$

Por lo cual $|a_n|\|x_n\| \leq 2K\|x\|$. Para cada n tenemos $\frac{1}{M} \leq \|x_n\|$, entonces $1 \leq M\|x_n\|$. Por lo que si $|a_n|\|x_n\| \leq 2K\|x\|$, entonces $|a_n|\|x_n\| \leq 2KM\|x\|\|x_n\|$, esto implica que $|a_n| \leq 2KM\|x\|$ y como es para cada $n$, entonces $\sup_n |a_n| \leq 2KM\|x\|$. ■

El lema anterior lo podemos interpretar de la siguiente manera si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en $X$ y si para cada $n$ definimos $f_n : \overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante

$$f_n \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = a_n,$$

o equivalentemente mediante,

$$f_n(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = n, \\ 0 \text{ si } i \neq n. \end{cases}$$

Entonces $f_n$ es un funcional acotado con,

$$\|f_n\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(f_n) \\ x_n \neq 0}} \frac{|f_n(x)|}{\|x_n\|}.$$

El mayor valor que puede tomar $f_n = a_n$ por lo que,

$$\|f_n\| = \sup_n \frac{|a_n(x)|}{\|x_n\|} \leq \frac{2KM\|x\|}{\|x_n\|}.$$

A los funcionales $f_n : \overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \longrightarrow \mathbb{R}$ se les denota por $f_n^*$, $n = 1, 2, \ldots,$ y se les llama **funcionales coeficiente** o **funcionales biortogonales asociadas a la sucesión** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. De lo anterior es claro que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base en $X$ y $x \in X$, entonces podemos escribir

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) x_n.$$

**Lema 3.1.10.** *Si $X$ es un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y si $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión en $X$ tal que $\lim\limits_{m \longrightarrow \infty} z_m = x \in X$, entonces*

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} f_n^*(z_m) = f_n^*(x).$$

**Demostración:**

La demostración queda casi inmediata ya que $\lim\limits_{m \longrightarrow \infty} z_m = x \in X$, entonces

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} f_n^*(z_m) = f_n^*\left(\lim_{m \longrightarrow \infty} z_m\right) = f_n^*(x).$$

Por tanto, $\lim\limits_{m \longrightarrow \infty} f_n^*(z_m) = f_n^*(x)$. ■

El hecho de que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea una base o no, queda determinado por su comportamiento en los subespacios $span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ como muestra el teorema siguiente.

**Teorema 3.1.11.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach $X$. Entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $X$ si y sólo si se satisfacen las siguientes tres condiciones*

1. *$x_n \neq 0$ para toda $n \in N$.*

2. *Existe $M \geq 1$ tal que para toda sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{K}$, si $n < m$,*
$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

3. *$\overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} = X$.*

**Demostración:**

"$\Longrightarrow$"

Supongamos primero que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base. Como cada elemento se puede expresar de manera única en términos de los elementos de la base, entonces supongamos que existe un elemento de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_i = 0$, si representamos $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_ix_i + \cdots$ tenemos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es única, ya que $a_i$ puede tomar cualquier valor y siempre cumplir, esto genera una contradicción, por lo cual todo elemento de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que $x_i \neq 0$. Luego, para probar que $\overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} = X$, sólo basta probar que $X \subset \overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}}$, dado que $\overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \subset X$. Sea $x \in X$, entonces
$$\exists\ \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ tal que } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \Longrightarrow x = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \Longrightarrow x \in \overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}}.$$
Por tanto, $X \subset \overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}}$, así $\overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} = X$. Por otro lado, si $\{a_i\}_{i=1}^{m}$ es una sucesión contenida en $\mathbb{K}$, $n < m$, $M$ la constante de base de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de las proyecciones asociadas a la base descritas en la Proposición 3.1.8, entonces
$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \left\| P_n \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \Longrightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

"$\Longleftarrow$"

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que se satisfacen literal (1), literal (2) y literal (3). Sea $y = \sum_{n=1}^{r} a_n x_n \in span\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = Y$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos $Q_m : Y \longrightarrow Y$ como $Q_m y = \sum_{n \leq m} a_n x_n$, luego, por literal (2) tenemos que
$$\|Q_m y\| \leq \|y\|. \tag{3.3}$$
De esto tenemos que $Q_m$ es continua y, como por literal (3), $Y$ es denso en $X$, de donde $Q_m$ se puede extender de manera continua a todo $X$; continuaremos llamando $Q_m$ a esta extensión. Ahora por literal (3), tenemos que, para cada $x \in X$ existe una sucesión $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $z_k = \sum_{n=1}^{N_k} a_n^{(k)} x_n$, con $\left\{a^{(k)}\right\}_{n=1}^{N_k} \subset \mathbb{K}$ y tal que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} z_k = x$, de lo cual tenemos $\|x - z_x\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} Q_m z_k = Q_m x$ para cada $m$ y si convenimos que $Q_0 \equiv 0$, entonces
$$\lim_{k \longrightarrow \infty} (Q_m - Q_{m-1}) z_k = (Q_m - Q_{m-1}) x \in \overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}},$$

lo cual por literal (1), significa que, para cada $m$, existe

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} a_m^{(k)} = a_m. \tag{3.4}$$

Luego, probaremos que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n. \tag{3.5}$$

De la Ecuación (3.3) obtenemos lo siguiente $\|Q_m(x - z_k)\| \leq M\|x - z_k\|$. Sean $\varepsilon > 0$ y $k_0$ tales que para $k \geq k_0$, tenemos $\|x - z_k\| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Así,

$$\|Q_m(x - z_k)\| \leq M\|x - z_k\| < \frac{M\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.6}$$

Además por la definición de $z_{k_0}$, si $m \geq N_{k_0}$ , entonces

$$z_{k_0} = \sum_{n=1}^{N_{k_0}} a_n^{(k_0)} x_n = \sum_{n\leq m} a_n^{(k_0)} x_n = Q_m z_{k_0}.$$

De esto también tenemos que

$$z_{k_0} - Q_m z_{k_0} = 0 \Longrightarrow \|z_{k_0} - Q_m z_{k_0}\| = 0. \tag{3.7}$$

De las Ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) resulta que si $m \geq N_{k_0}$,

$$\begin{aligned} &\|x - Q_m x\| = \|x - z_{k_0} + z_{k_0} - Q_m z_{k_0} + Q_m z_{k_0} - Q_m x\| \\ \Longrightarrow &\|x - Q_m x\| \leq \|x - z_{k_0}\| + \|z_{k_0} - Q_m z_{k_0}\| + \|Q_m z_{k_0} - Q_m x\| < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora sólo queda demostrar que tiene una representación única. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0$, por literal (2) tenemos

$$\begin{aligned} &|a_n|\|x_n\| = \|a_n x_n\| = \left\| a_n x_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \\ \Longrightarrow &|a_n|\|x_n\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| + M \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| = 2M \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo que, $|a_n|\|x_n\| = 0 \Longrightarrow |a_n| = 0 \Longrightarrow a_n = 0$, dado que $x_n \neq 0$ para cada $n$. ■

**Corolario 3.1.12.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en un espacio de Banach $X$. Entonces toda subsucesión $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es también una sucesión básica.*

**Demostración:**

Probemos que $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ cumple con las condiciones del Teorema 3.1.11.

Para el literal 1.. Dado que $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces todo $x_{k_n} \neq 0$.

Luego, para el literal 2.. Tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base, por lo que cumple el literal (2), sea $\{a_{k_i}\}_{i=1}^{m}$ una sucesión contenida en $\mathbb{K}$, $n < m$ y sea $M$ la constante base de $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de proyecciones asociadas a la base descrita en la Proposición 3.1.8, entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_{k_i} x_{k_i} \right\| = \left\| P_n \sum_{i=1}^{m} a_{k_i} x_{k_i} \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{m} a_{k_i} x_{k_i} \right\|.$$

Por último, para el literal 3.. Sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} \exists\ \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ tal que } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \Longrightarrow & x = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \Longrightarrow x = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{k_n} x_{k_n} \\ \Longrightarrow & x \in \overline{span\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\overline{span\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}} = X$, como $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ cumple con los literales (1), (2) y (3) tenemos, por el Teorema 3.1.11, que $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es base de Schauder y por Definición 3.1.1 es una sucesión básica. ■

A partir de una sucesión básica dada se pueden construir otras sucesiones básicas llamadas bases bloque.

**Corolario 3.1.13.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en $X$ con constante de base $K$. Sean $0 = m_1 < m_2 < \dots$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ y $u_j \neq 0$ dada por*

$$u_j = \sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} a_i x_i.$$

*Entonces la sucesión $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión básica llamada **base bloque** de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, cuya constante de base es menor o igual a $K$.*

**Demostración:**

Probemos que $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ cumple con las condiciones del Teorema 3.1.11.

Para el literal 1.. Por hipótesis $u_j \neq 0$; $\forall j$.

Ahora para el literal 2.. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base de $X$, entonces cumple con el literal (2) del Teorema 3.1.11, por lo que para una constante de base $K$ y $r < s$, tenemos que,

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{s} a_i x_i \right\|, \tag{3.8}$$

pero,

$$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = a_1x_1 + \cdots + a_{m_2}x_{m_2} + a_{m_2+1}x_{m_2+1} + \cdots + a_{m_3}x_{m_3} + \cdots + a_{(m_k=r)}x_{(m_k=r)}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i x_i = \sum_{i=m_1+1}^{m_{1+1}} a_i x_i + \sum_{i=m_2+1}^{m_{2+1}} a_i x_i + \cdots + \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k=r} a_i x_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i x_i = \sum_{j=1}^{k} u_j.$$

De igual manera para,

$$\sum_{i=1}^{s} a_i x_i = a_1x_1 + \cdots + a_{m_2}x_{m_2} + a_{m_2+1}x_{m_2+1} + \cdots + a_{m_3}x_{m_3} + \cdots + a_{(m_t=s)}x_{(m_t=s)}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{s} a_i x_i = \sum_{i=m_1+1}^{m_{1+1}} a_i x_i + \sum_{i=m_2+1}^{m_{2+1}} a_i x_i + \cdots + \sum_{i=m_{t-1}+1}^{m_t=s} a_i x_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_t$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{s} a_i x_i = \sum_{j=1}^{t} u_j.$$

De la Ecuación (3.8), con $k < t$ tenemos que $\left\| \sum_{j=1}^{k} u_j \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{t} u_j \right\|.$

Por último, para el literal 3.. Probemos $\overline{span\{u_j\}_{j=1}^{\infty}} = X$. Sea $x \in X$, entonces

$$\exists\ \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ tal que } x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \Longrightarrow x = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Longrightarrow x = \lim_{k\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{k} u_j$$
$$\Longrightarrow x \in \overline{span\{u_j\}_{j=1}^{\infty}}.$$

Por lo que, $\overline{span\{u_j\}_{j=1}^{\infty}} \supset X$, así $\overline{span\{u_j\}_{j=1}^{\infty}} = X$, de esta manera $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ cumple con los literales del Teorema 3.1.11 por lo cual es una sucesión básica. ■

**Ejemplo 3.1.14.** *Los ejemplos más fáciles de espacios de Banach con base son los espacios $\ell^p$ para $1 \leq p < 0$ y el espacio $c_0$, que se definieron en el capítulo 2. En estos espacios es trivial verificar que la sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores unitarios, donde $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, con 1 en la posición n-esima, es una base monótona. A dicha sucesión se le suele llamar la base canónica del espacio en cuestión. Denotemos por $X$ ya sea al espacio $\ell^p$ con $1 < p < 0$ o al espacio $c_0$. Sea $\{g_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como*

$$g_n^*(e_m) = \begin{cases} 1 \ si \ m = n \\ 0 \ si \ m \neq n \end{cases},$$

*por la Proposición 1.6.9, $g_n^*$ se puede identificar con el elemento*

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell^q,$$

*donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $X = \ell^p$ y $q = 1$ si $X = c_0$. Por lo tanto, $\{g_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ resulta ser la base canónica de $\ell^q$.*

Más adelante estudiaremos otros espacios con base, como por ejemplo el espacio C[0,1] de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ y el espacio de James. Anteriormente vimos que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base en $X$ y $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de proyecciones asociadas a la base definidas en la Proposición 3.1.8, entonces $\sup_n \|P_n\| < \infty$. Mostraremos a continuación que el inverso de esta afirmación también es cierto.

**Corolario 3.1.15.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores linealmente independientes en un espacio de Banach $X$. Si definimos la proyección $P_n : span\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \longrightarrow X$ mediante*

$$P_n \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \ si \ m \leq n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ si \ n < m \end{cases},$$

*y se satisface que $\sup_n \|P_n\| = M < \infty$, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica.*

**Demostración:**
Sea $m > n$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| = \left\|P_n \sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \Longrightarrow \left\|P_n \sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$
$$\Longrightarrow \frac{\|P_n \sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|}{\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|} \leq M \Longrightarrow \sup_{\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \neq 0} \frac{\|P_n \sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|}{\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|} \leq M \Longrightarrow \|P_n\| \leq M$$
$$\Longrightarrow \sup_n \|P_n\| \leq M.$$

Luego, por el Teorema 3.1.11 tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica. Así queda demostrado el corolario. ■

**Teorema 3.1.16.** *Una sucesión $\{x_n\}_{i=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach $X$ es una base si y sólo si,*

1. *$x_n \neq 0$ para toda $n$.*
2. *Existe una constante $0 < K \leq 1$ tal que, para toda $n$,*

   $$\inf\{\|x - y\| : x \in S_n, y \in X_n\} = dist(S_n, X_n) \geq K,$$

   *donde $S_n = \{x \in \overline{span\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}} : \|x\| = 1\}$ y $X_n = \overline{span\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}}$.*
3. *$\overline{span\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}} = X$.*

**Demostración:**
"$\Longrightarrow$"
Supongamos primero que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $X$. Entonces por el Teorema 3.1.11 se satisfacen los literales (1) y (3). Ahora, supongamos que para cada $n$, $P_n$ es la proyección asociada a la base, entonces $I - P_n$ también es una proyección continua, y por lo tanto, si usamos el Lema 3.1.7, $(I - P_n)X$ es un subespacio cerrado de $X$. Luego, como $span\{x_i\}_{n+1}^{\infty} \subset$

$(I-P_n)X$, entonces $X_n \subset (I-P_n)X$ y como $P_nX = \overline{span\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}}$ , tenemos que $S_n$ es la esfera unitaria de $P_nX$. Además sabemos que $1 \leq \sup_n \|P_n\| < \infty$, de donde existe $K = (\sup_n \|P_n\|)^{-1}$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
dist(S_n, X_n) &= \text{ínf}\{\|x-y\| : x \in P_nX,\ \|x\| = 1,\ y \in X_n\} \\
&\geq \text{ínf}\{\|x-y\| : x \in P_nX, \|x\| = 1,\ y \in (I-P_n)X\} \\
&\geq K\,\text{ínf}\{\|P_n(x-y)\| : x \in P_nX, \|x\| = 1, y \in (I-P_n)X\} \\
&= K\,\text{ínf}\{\|P_n(x) - P_n(y)\| : x \in P_nX, \|x\| = 1, y \in (I-P_n)X\} \\
&= K\,\text{ínf}\{\|x - P_n(x - P_n(x))\| : x \in P_nX, \|x\| = 1, y \in (I-P_n)X\} \\
&= K\,\text{ínf}\{\|x - P_n(x-x)\| : x \in P_nX, \|x\| = 1, y \in (I-P_n)X\} \\
&= K\,\text{ínf}\{\|x - P_n(0)\| : x \in P_nX, \|x\| = 1, y \in (I-P_n)X\} \\
&= K\,\text{ínf}\{\|x\| : x \in P_nX, \|x\| = 1\} = K. \\
\Longrightarrow dist(S_n, X_n) &\geq K\,\text{ínf}\{\|x\| : x \in P_nX, \|x\| = 1\} = K.
\end{aligned}
$$

"$\Longleftarrow$"

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que satisface los literales (1), (2) y (3). Como los literales (1) y (3) son las mismas condiciones en ambos teoremas, basta ver que con las hipótesis de este teorema, se satisface el literal (2) del Teorema 3.1.11. Sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ y sean $n, m$ dos naturales con $n < m$. Si suponemos que $dist(S_n, X_n) \geq K > 0$ y $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=n+1}^{m} a_i x_i\right\| \\
\Longrightarrow &\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| = \left\|\frac{1}{\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \frac{1}{\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|}\sum_{i=n+1}^{m} a_i x_i\right\| \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \\
\Longrightarrow &\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \geq K \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|, \text{ por literal 2.}
\end{aligned}
$$

Si por otro lado $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, se tiene que $\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\| \geq \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| = 0$, ahora, tomemos $M = K^{-1}$ y así tenemos que

$$
\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \geq K \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \Longrightarrow K^{-1}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \geq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \Longrightarrow M \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \geq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|.
$$

Se satisface el literal (2), del Teorema 3.1.11 y por consiguiente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base. ■

**Lema 3.1.17.** *Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una sucesión finita de vectores linealmente independientes con constante de base $M$ en un espacio de Banach $X$ de dimensión infinita. Entonces dada $\varepsilon > 0$, existe $x_{n+1} \in X$ tal que $x_{n+1} \notin \overline{span\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}}$ y tal que la sucesión $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ tiene constante de base menor o igual que $M(1+\varepsilon)$.*

**<u>Demostración:</u>**

Sea $X_n = \overline{span\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}}$ y sea $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. 5Como $X_n$ es dimensión finita, $S_n = \{x \in X :$

$\|x\| = 1\}$ es compacto en este espacio y por ende existen $z_1, z_2, \ldots, z_N \in S_n$ tales que

$$S_n \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(z_i, \varepsilon'),$$

donde $B(z, \varepsilon')$ representa a la bola abierta con centro en $z$ y radio $\varepsilon'$. Para $i = 1, 2, \ldots, N$, sea $T_i \in X^*$ tal que $\|T_i\| = 1$ y $T_i z_i = 1$; la existencia de estas $T_i$ la garantiza el Teorema de Hahn-Banach. Como la codimensión del espacio nulo de cada $T_i$ es uno esto por la Proposición 1.4.23, así la dimensión de $X$ es infinita, existe $x_{n+1} \in \cap_{i=1}^{N} \ker T_i$ tal que $x_{n+1} \neq 0$ y $\|x_{n+1}\| = 1$. Por otro lado, siempre que $z \in B(z_i, \varepsilon')$ se tiene que $1 - |T_i z| \leq |T_i z_i - T_i z| \leq \varepsilon'$, y consecuentemente,

$$\|T_i z\| \geq 1 - \varepsilon' = \frac{1}{1+\varepsilon}. \tag{3.9}$$

De aquí, como $T_i(x_{n+1}) = 0$, tenemos que $x_{n+1} \notin B(z_i, \varepsilon')$, $\forall i = 1, 2, \ldots, N$ por lo que $x_{n+1} \notin S_n$. Veremos ahora que la constante de base de $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ es a lo más $M(1+\varepsilon)$. Verificaremos primero que si $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ pertenecen a $\mathbb{K}$, entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq (1+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i \right\|. \tag{3.10}$$

Entonces podemos suponer que $\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \| = 1$, ya que si la Ecuación (3.10) es cierto en este caso, se cumple que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \|} x_i \right\| \leq (1+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \|} x_i + \frac{a_{n+1}}{\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \|} x_{n+1} \right\|.$$

Sea $i_0 \leq N$ tal que,

$$\begin{aligned} \left\| z_{i_0} - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \geq \varepsilon' \Longrightarrow \|z_{i_0}\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \geq \varepsilon' \Longrightarrow 1 - \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \geq \varepsilon' \\ \Longrightarrow 1 - \varepsilon' \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \Longrightarrow 1 - \varepsilon' \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|. \end{aligned}$$

Por Ecuación (3.9), tenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i \right\| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \geq \frac{\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|}{1+\varepsilon} \Longrightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i \right\| (1+\varepsilon) \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|.$$

Sean ahora $r$ y $m$ con $r < m \leq n+1$. Si $m < n+1$, entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|,$$

y si $m = n+1$, tenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq M(1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right\|,$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

**Corolario 3.1.18.** *Todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica.*

**Demostración:**
Esto se concluye usando inducción y aplicando el Teorema 3.1.11 y el Lema 3.1.17. Empezamos eligiendo una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $n > 0$ para $n = 1, 2, \ldots$ y

$$M = \prod_{i=1}^{\infty}(1+\varepsilon_i) < \infty.$$

(Por ejemplo $\varepsilon_n = e^{\frac{1}{n^2}} - 1$). Tomamos un elemento $x_1 \in X$, $x_1 \neq 0$; $\{x_1\}$ tiene constante de base igual a 1. Por el método descrito en el Lema 3.1.17, encontramos $x_2$ linealmente independiente de $x_1$, de manera que la constante de base de $\{x_1, x_2\}$ es menor o igual a $1+\varepsilon_1$. Suponiendo que ya tenemos a $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con constante de base menor o igual a $\prod_{i=1}^{n-1}(1+\varepsilon_i)$, aplicando nuevamente el Lema 3.1.17, obtenemos $x_{n+1}$ linealmente independiente de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que la constante de base de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ es menor o igual a $\prod_{i=1}^{n}(1+\varepsilon_i)$. Así, encontramos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisface

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\|,$$

siempre que $m < r$, y con esto se cumple el literal (2) del Teorema 3.1.11, también por como se han construido los elementos de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\forall i = 1, 2, \ldots$ $x_i \neq 0$ y además $span\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = X$, con esto se cumplen los literales (1) y (3) del Teorema 3.1.11, lo cual implica que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica. ■

Una vez que ya se sabe que un espacio de Banach tiene una base, sera ésta única, o tal vez salvo equivalencias en el siguiente sentido:

**Definición 3.1.19.** *Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach dos sucesiones básicas $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ son equivalentes si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge en $X$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge en $Y$.*

**Lema 3.1.20.** *Dos sucesiones básicas $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes si y sólo si, existe $K$ tal que para toda $m \in \mathbb{N}$ y toda $\{a_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{K}$,*

$$\frac{1}{K}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right\|_Y \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|_X \leq K\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right\|_Y. \tag{3.11}$$

**Demostración:**

"$\Longrightarrow$"

Supongamos al revés que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes. Definimos $T : \overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \longrightarrow \overline{span\{y_i\}_{i=1}^{\infty}}$ mediante

$$T\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n, \text{ para cada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in [x_i]_{n=1}^{\infty}.$$

Probemos que $T$ es cerrada. Supongamos que,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} x_n \in \overline{span\{x_i\}_{i=1}^{\infty}}$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} y_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n \in \overline{span\{y_i\}_{i=1}^{\infty}}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} x_n \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} y_n \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$.

Entonces por el Lema 3.1.10, $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty} a_j^{(m)} = a_j$ y $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty} a_j^{(m)} = b_j$ lo cual significa que $a_j = b_j$ para cada $j$. Podemos pues aplicar el teorema de la gráfica cerrada, concluyendo que $T$ es un operador continuo. De la misma manera se obtiene que $T^{-1}$ es un operador continuo y esto nos da el resultado deseado. ■

**Ejemplo 3.1.21.** *Ya mencionamos que la sucesión de vectores unitarios $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde*

$$e_n = (0, 0, 0, \ldots, \underset{n}{1}, 0, 0, \ldots),$$

*es una base en $c_0$. Sin embargo si tomamos las sumas parciales $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $\xi_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$, ésta no es equivalente a la base canónica. Primero comprobaremos que efectivamente es base:*

*(i) Como $e_1 = \xi_1$ y $e_i = \xi_i - \xi_{i-1}$ para $i > 1$, probemos que $\overline{span\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}} = c_0$.*

*(ii) Sea $n > m$. Entonces*

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i\xi_i\right\| = \sup_{r\leq m}\left|\sum_{i=r}^{m} a_i\right| = \sup_{r\leq m}\left\|\sum_{i=r}^{n} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i\right\| \leq 2\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\xi\right\|.$$

*Por el Teorema 3.1.11, se obtiene que $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ en base. Esta base no es equivalente a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, ya que por ejemplo*

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} e_n\right\| = 1, \textit{ pero } \left\|\sum_{n=1}^{m} \xi_n\right\| = m,$$

*de manera que no se puede satisfacer la Ecuación (3.11) del lema anterior.*

La situación del ejemplo anterior es general, ya que se puede probar que en un espacio de Banach cualquiera de dimensión infinita que tiene una base, siempre hay una infinidad de bases normalizadas no equivalentes entre sí. Por otro lado, las bases de Schauder tienen cierta propiedad de estabilidad, en el sentido de que si tomamos vectores cercanos a los de la base, nuevamente obtenemos una base, equivalente a la primera. La demostración de este hecho requiere del siguiente lema.

**Lema 3.1.22.** *Sean $X$ un espacio de Banach, $Y$ un subespacio cerrado de $X$ y $T : Y \longrightarrow X$ un operador acotado tal que $\|T\| < 1$. Entonces si $I_Y$ denota a la identidad en $Y$, $I_Y - T$ es invertible y*

$$\left\|(I_Y - T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|} \tag{3.12}$$

*Además, si $Y = X$, $I_X - T$ es un isomorfismo de $X$ en $X$.*

**Demostración:**
Sea $y \in Y$ con $y \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\|(I_Y - T)y\|}{\|y\|} &= \frac{\|y\| - \|(I_Y - T)y\|}{\|y\|} \leq \frac{\|y - I_Y(y) + Ty\|}{\|y\|} = \frac{\|y - y + Ty\|}{\|y\|} \\ \Longrightarrow 1 - \frac{\|(I_Y - T)y\|}{\|y\|} &\leq \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \frac{\|T\|\|y\|}{\|y\|} = \|T\|. \end{aligned}$$

Consiguientemente $\|I_Y - T\|\|y\| \geq \|(I_Y - T)y\| \geq (1 - \|T\|)\|y\|$, lo que demuestra la Ecuación (3.12). Supongamos ahora que $Y = X$ y sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$, donde para $n > 1$, $T^n = T^{n-1} \circ T$ y $T_0 = I_X$. Como $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, para toda $n > m$,

$$\|S_n - S_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|T\|^k.$$

Por lo tanto, ya que $\|T\| < 1$, $S_n$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $B(X)$, y la sucesión converge a un operador acotado $S$. Ahora bien, como $\left\|T^k\right\| \longrightarrow 0$, entonces $T^k \longrightarrow 0$ y al pasar al límite en la expresión siguiente obtenemos

$$(I_X - T)S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=1}^{n+1} = I_X - T^{n+1} = S_n(I_X - T),$$

obtenemos que $(I_X - T)S = I_X = S(I_X - T)$, lo cual implica que $I_X - T$ es invertible y sobreyectiva. ■

**Teorema 3.1.23.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica seminormalizada con constante de base $K$ tal que para $n = 1, 2, \ldots$*

$$\frac{1}{M} \leq \|x_n\| \leq M.$$

*(i) Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en $X$ tal que,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{2KM}. \tag{3.13}$$

*Entonces $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica equivalente a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Es más, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $X$, también $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ lo es.*

*(ii) Supongamos que existe una proyección acotada sobre* $\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$*, es decir,*

$$P : X \longrightarrow \overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}.$$

*Si* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión en* $X$ *tal que,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{8KM\|P\|}, \tag{3.14}$$

*entonces existe una proyección* $Q : X \longrightarrow \overline{span\{y_n\}_{n=1}^{\infty}}$.

**<u>Demostración:</u>**

Primero probaremos $(i)$. Sea $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de las funcionales biortogonales asociadas a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y sea $T : \overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} \longrightarrow X$ dado para cada $x \in \overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ por

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) y_n.$$

$T$ está bien definida ya que, por el Lema 3.1.9, tenemos

$$\sup_n |f_n^*(x)| \leq 2KM\|x\|,$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=m}^{r} f_n^*(x) y_n\right\| &\leq \left\|\sum_{n=m}^{r} f_n^*(x)(y_n - x_n)\right\| + \left\|\sum_{n=m}^{r} f_n^*(x) x_n\right\| \\
&\leq \sum_{n=m}^{r} |f_n^*(x)| \|y_n - x_n\| + \left\|\sum_{n=m}^{r} f_n^*(x) x_n\right\| \\
&\leq 2KM\|x\| \sum_{n=m}^{r} \|y_n - x_n\| + \left\|\sum_{n=m}^{r} f_n^*(x) x_n\right\|.
\end{aligned}$$

Como por hipótesis tanto $\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) x_n\|$ como $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - x_n\|$ convergen, $\{\sum_{n=1}^{r} f_n^*(x) y_n\}_{r=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy que por lo tanto converge. Observemos que $T\left(\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}\right) \subset \overline{span\{y_n\}_{n=1}^{\infty}}$ y que

$$\|x - Tx\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n^*(x)| \|x_n - y_n\| \leq 2KM\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|. \tag{3.15}$$

Consecuentemente de la Ecuación (3.13) tenemos, $\left\|I_{\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}} - T\right\| < 1$ y por el lema anterior, existe $T^{-1} : T(\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}) \longrightarrow \overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ y es continuo. Además,

$$\|T\| < 1 + \left\|I_{\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}}\right\| = 2. \tag{3.16}$$

Tenemos,

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| \leq \|T^{-1}\| \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|T\| \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|, \tag{3.17}$$

lo cual prueba que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes. De aquí es inmediato que como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface los literales (1) y (2) del Teorema 3.1.11, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ también los satisface y es por lo tanto una sucesión básica. Además la Ecuación (3.17) también prueba que $T\left(\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}\right) = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^{\infty}}$, entonces si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ también lo es ya que en este caso el lema anterior implica que $T$ es sobreyectivo. Con esto queda demostrado $(i)$.

Ahora para $(ii)$. Supongamos ahora que $P : X \longrightarrow \overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ es una proyección y que se cumple la Ecuación (3.14). Si $y \in Y = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^{\infty}} \subset X$,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = T \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = TP \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, usando el hecho de que $\sup_n |a_n| \leq 2KM\|x\|$ y usando la Ecuación (3.16), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|TPy - y\| &= \left\|TP\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n - TP\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| = \left\|TP\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right)\right\| \\
\Longrightarrow \|TPy - y\| &= \left\|TP\sum_{n=1}^{\infty}(a_n y_n - a_n x_n)\right\| = \left\|TP\sum_{n=1}^{\infty} a_n(y_n - x_n)\right\| \\
\Longrightarrow \|TPy - y\| &\leq \|T\|\|P\|\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\|y_n - x_n\| \leq 2KM\|T\|\|P\|\|x\|\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n - x_n\| \leq \frac{1}{2}\|x\|.
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\|TPy - y\| \leq \frac{1}{2}\|x\|. \tag{3.18}$$

Por otro lado, de las Ecuaciones (3.14), (3.15) y además de que la norma de una proyección es mayor o igual a 1, tenemos

$$\|x - Tx\| \leq 2KM\|x\|\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n - y_n\| \leq \frac{2KM\|x\|}{8KM\|P\|} \leq \frac{1}{4}\|x\|.$$

Así,

$$\|x - Tx\| \leq \frac{1}{4}\|x\|, \tag{3.19}$$

y de aquí,

$$\|x\| - \|Tx\| \leq \|x - Tx\| \leq \frac{1}{4}\|x\| \Longrightarrow \|x\| - \frac{1}{4}\|x\| \leq \|Tx\| \Longrightarrow \frac{3}{4}\|x\| \leq \|Tx\|$$
$$\Longrightarrow \|x\| \leq \frac{4}{3}\|Tx\| = \frac{4}{3}\|y\|.$$

Por lo que,

$$\|x\| \leq \frac{4}{3}\|y\|. \tag{3.20}$$

Ahora de las Ecuaciones (3.18) y (3.20), tenemos que

$$\|TPy - y\| \leq \frac{1}{2}\|x\| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\|y\|\right) = \frac{2}{3}\|y\|.$$

Entonces si $S = TP|_Y$ e $I_Y$ denota la identidad en $Y$, $\|S - I_Y\| < 1$ y por lo tanto, como $TP(X) \subset Y$, usando nuevamente el Lema 3.1.22, se tiene que $S : Y \longrightarrow Y$ tiene inverso. Si consideramos ahora a $Q = S^{-1}TP$, Q es un operador con dominio $X$ y con rango $Y$ tal que para $x \in X$, $Q^2x = S^{-1}TPS^{-1}TPx = S^{-1}TPx$, lo cual demuestra que $Q$ es una proyección de $X$ sobre $Y$. ■

Como una aplicación del resultado anterior probaremos el siguiente teorema que es muy usado en el estudio de los subespacios complementados de un espacio de Banach.

**Teorema 3.1.24.** *Sea $X$ un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces si $F$ es un subespacio cerrado de $X$ de dimensión infinita, existe una base bloque normalizada $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $X$ y existe un subespacio de dimensión infinita $G$ de $F$ que tiene una base normalizada $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_j - y_j\| < \varepsilon.$$

**Demostración:**
Sea $K$ la constante de base de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Primero probaremos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe en $F$ un elemento $y \neq 0$ de la forma

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_j x_j. \tag{3.21}$$

Supongamos que esto es falso. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $y \in F$, $y \neq 0$ se tiene que $P_n y \neq 0$, donde $P_n : X \longrightarrow \overline{span\{x_j\}_{j=1}^{n}}$ es la proyección asociada a la base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida en la Proposición 3.1.8. Por lo tanto $P_n|_F$ es inyectiva, o sea que $F$ es isomorfo a un subespacio de $\overline{span\{x_j\}_{j=1}^{n}}$ contradiciendo el hecho de que $F$ tiene dimensión infinita. Sean $0 < \varepsilon < 1$, $m_1 = 0$ y $y \in F$ con $\|y_1\| = 1$, $y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} x_n$. Como esta serie es convergente, existe $m_2 > m_1$ tal que,

$$\left\| \sum_{n=m_2+1}^{\infty} a_n^{(1)} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2^3 K}.$$

Por la Ecuación (3.21) podemos hallar en $F$ un elemento $y_2$ tal que $\|y_2\| = 1$ y $y_2$ es de la forma

$$y_2 = \sum_{n=m_2+1}^{\infty} a_n^{(2)} x_n.$$

Sea $m_3$ tal que,

$$\left\| \sum_{n=m_3+1}^{\infty} a_n^{(2)} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2^4 K}.$$

De esta manera construiremos inductivamente una sucesión $\{y_j\}_{j=1}^{\infty} \subset F$ con $\|y_1\| = 1$, y una sucesión $\{m_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ tales que $0 < m_1 < m_2 < \ldots$,

$$y_1 = \sum_{n=m_{j+1}+1}^{\infty} a_n^{(j)} x_n \text{ y } \left\| \sum_{n=m_{j+1}+1}^{\infty} a_n^{(j)} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2^{j+2} K}. \tag{3.22}$$

Definamos para $j = 1, 2, \ldots$,

$$v_j = \sum_{n=m_j+1}^{m_{j+1}} a_n^{(j)} x_n;$$

como $\|y_j\| = 1$, por Ecuación (3.22) $v_j \neq 0$. Sea $u_j = \frac{v_j}{\|v_j\|}$. Entonces por Ecuación (3.22) tenemos

$$|\|y_j\| - \|v_j\|| \leq \|y_j - v_j\| \Longrightarrow |1 - \|v_j\|| \leq \|y_j - v_j\| < \frac{\varepsilon}{2^{j+2} K}$$

Y además,

$$\begin{aligned}
&\|y_j - u_j\| \leq \|y_j - v_j\| + \|v_j - u_j\| = \|y_j - v_j\| + \left\| v_j - \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\| \\
\Longrightarrow &\|y_j - u_j\| \leq \|y_j - v_j\| + \left\| \frac{v_j(\|v_j\| - 1)}{\|v_j\|} \right\| = \|y_j - v_j\| + \left\| v_j \frac{(\|v_j\| - 1)}{\|v_j\|} \right\| \\
\Longrightarrow &\|y_j - u_j\| \leq \|y_j - v_j\| + \frac{\|v_j\|}{\|v_j\|} |\|v_j\| - 1| = \|y_j - v_j\| + |1 - \|v_j\|| < \frac{\varepsilon}{2^{j+2} K} + \frac{\varepsilon}{2^{j+2} K} \\
\Longrightarrow &\|y_j - u_j\| < \frac{2\varepsilon}{2^{j+2} K} = \frac{\varepsilon}{2^{j+1} K}.
\end{aligned}$$

Como $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base bloque de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, por el Corolario 3.1.13 es una sucesión básica con constante de base menor o igual que $K$. Usando el Teorema 3.1.23, tenemos que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica equivalente a $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ y tomando $G = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^{\infty}}$ termina la demostración del teorema. ■

Otra aplicación del Teorema 3.1.23, cuya demostración es parecida a la del teorema anterior, y sin embargo está enfocada en otra dirección, nos la da el lema siguiente. Este resultado es de especial interés para nosotros, pues va a ser la clave en la prueba de que los espacios $\ell^p$ no son isomorfos entre sí.

**Lema 3.1.25.** *Sea $X$ un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión seminormalizada débilmente convergente a 0 en $X$, entonces $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión equivalente a una base bloque de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

**Demostración:**

Supongamos que para $n = 1, 2, \ldots,$

$$\frac{1}{M} \leq \|y_n\| \leq M.$$

Sea $K$ la constante de base de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y sea $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ con $\varepsilon_n > 0$ para $n = 1, 2, \ldots$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \frac{1}{2KM}.$$

Sean $n_1 = 1$, $m_1 = 0$ y $m_2$ tales que:

$$\left\| y_1 - \sum_{j=1}^{m_2} f_j^*(y_j) x_j \right\| < \varepsilon_1.$$

Por hipótesis tenemos que $y_n$ converge débilmente a 0, existe $n_2 > n_1$ tal que para $i = 1, 2, ..., m_2$,

$$|f_i^*(y_{n_2})| < \frac{\varepsilon_2}{2\sum_{j=1}^{m_2} \|x_j\|}. \tag{3.23}$$

Además, existe $m_3 > m_2$ con,

$$\left\| y_{n_2} - \sum_{j=1}^{m_3} f_j^*(y_{n_2}) x_j \right\| < \frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{3.24}$$

De las Ecuaciones (3.23) y (3.24) obtenemos,

$$\begin{aligned}
\left\| y_{n_2} - \sum_{j=m_2+1}^{m_3} f_j^*(y_{n_2}) x_j \right\| &= \left\| y_{n_2} - \sum_{j=1}^{m_3} f_j^*(y_{n_2}) x_j + \sum_{j=1}^{m_3} f_j^*(y_{n_2}) x_j - \sum_{j=m_2+1}^{m_3} f_j^*(y_{n_2}) x_j \right\| \\
&\leq \left\| y_{n_2} - \sum_{j=1}^{m_3} f_j^*(y_{n_2}) x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{m_3} f_j^*(y_{n_2}) x_j - \sum_{j=m_2+1}^{m_3} f_j^*(y_{n_2}) x_j \right\| \\
&< \frac{\varepsilon_2}{2} + \left\| \sum_{j=1}^{m_2} f_j^*(y_{n_2}) x_j \right\| \leq \frac{\varepsilon_2}{2} + |f_j^*(y_{n_2})| \sum_{j=1}^{m_2} \|x_j\| \\
&< \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2\sum_{j=1}^{m_2} \|x_j\|} \sum_{j=1}^{m_2} \|x_j\| = \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{2\varepsilon_2}{2} = \varepsilon_2.
\end{aligned}$$

Procediendo inductivamente construimos dos sucesiones crecientes $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que,

$$\begin{aligned}
&\|y_{n_i}\| - \left\| \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} f_j^*(y_{n_i}) x_j \right\| \leq \left\| y_{n_i} - \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} f_j^*(y_{n_i}) x_j \right\| < \varepsilon_i \\
\Longrightarrow &\|y_{n_i}\| - \left\| \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} f_j^*(y_{n_i}) x_j \right\| < \varepsilon_i.
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\|y_{n_i}\| - \varepsilon_i < \left\| \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} f_j^*(y_{n_i}) x_j \right\|. \tag{3.25}$$

Si $u_i = \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} f_j^*(y_{n_i}) x_j$, entonces por las hipótesis y por Ecuación (3.25),

$$M - \frac{1}{2KM} \leq M - \varepsilon_i \leq \|u_i\| \leq M + \varepsilon_i \leq M + \frac{1}{2KM},$$

y además

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_{n_i} - u_i\| < \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{1}{2KM}.$$

Como por el Corolario 3.1.13 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica con constante de base menor o igual que $K$, podemos aplicar el Teorema 3.1.23, para obtener que $\{y_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ es equivalente a $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$. ■

## 3.2. BASES REDUCTORAS Y ACOTADAMENTE COMPLETAS

La existencia de una base de Schauder en un espacio de Banach por sí sola no nos da mucha información acerca de la estructura del espacio; sin embargo si la base posee ciertas propiedades adicionales, podemos conocer más a fondo el espacio, por ejemplo podemos saber si es reflexivo o si contiene como subespacio a alguno de los espacios $\ell^p$ o $c_0$. Nos planteamos primero la siguiente pregunta ¿Será cierto que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base, entonces la sucesión $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en el espacio dual de las funcionales biortogonales asociadas es también una base? La respuesta evidentemente es no, pues para que $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ fuera una base en $X^*$, este espacio debería ser separable y esto no siempre es cierto. Si tomamos por ejemplo el espacio $\ell^1$ con la base canónica, su dual $\ell^\infty$ no es separable. Sin embargo $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ siempre es una sucesión básica en $X^*$.

**Lema 3.2.1.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base en un espacio de Banach $X$ con constante de base $K$. Entonces la sucesión de funcionales biortogonales $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$, es una sucesión básica con constante de base menor o igual a $K$ y las proyecciones asociadas a esta sucesión son $P_n^*|_{\overline{span\{f_i^*\}_{i=1}^{\infty}}}$, $n = 1, 2, \ldots$, donde $P_n^*$ es el operador adjunto a la proyección $P_n$.*
*Además, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, es decir si $K = 1$, se tiene que para $f^* \in X^*$,*

$$\|f^*\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n^* f^*\| = \sup_n \|P_n^* f^*\|.$$

**Demostración:**
Del Lema 3.1.9 sabemos que $f_n^*$ es una funcional acotada. Sean $P_n : X \longrightarrow X$, $n = 1, 2, \ldots$

las proyecciones asociadas a la base. Entonces por el Teorema 1.9.3, los operadores adjuntos $P_n^* : X^* \longrightarrow X^*$ son acotados y $\|P_n^*\| = \|P_n\|$ . Por lo tanto,

$$\sup_n \|P_n^*\| = \sup_n \|P_n\| = K. \tag{3.26}$$

Además si $f^* \in X^*$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$,

$$P_n^*(f^*(x)) = f^*(P_n(x)) = f^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f^*(x_i)$$

$$\Longrightarrow P_n^*(f^*(x)) = \sum_{i=1}^{n} f^*(x_i) f_i^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right);\ a_i = f_i^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f^*(x_i) f_i^*(x).$$

Lo cual significa que,

$$P_n^* f^* = \sum_{i=1}^{n} f^*(x_i) f_i^*, \tag{3.27}$$

es decir,

$$P_n^*(f^*) \subset \overline{span\{f_i^*\}_{i=1}^{\infty}}. \tag{3.28}$$

En particular, si $\sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i^* \in \overline{span\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}}$, de la Ecuación (3.27) se deduce que,

$$P_n^* \sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i^* = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i^*,$$

y de aqui, de las Ecuaciones (3.26), (3.28) se concluye que,

$$\sup_n \left\| P_n^*|_{\overline{span\{f_i^*\}_{i=1}^{\infty}}} \right\| \leq K.$$

Del Corolario 3.1.15, se sigue ahora que $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica cuya constante de base es menor o igual a $K$. Supongamos ahora que $K = 1$. Sean $\varepsilon > 0$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$ con $\|x\| = 1$ tales que $|f^*(x)| > (1-\varepsilon)\|f^*\|$. Como $f^*$ es continua, $f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f^*(x_n)$ y existe $N$ tal que si $n > N$,

$$\left|\sum_{i=n}^{\infty} a_i f^*(x_i)\right| < \varepsilon \|f^*\|.$$

Consecuentemente,

$$(1-\varepsilon)\|f^*\| < |f^*(x)| \leq |(P_n^*)(x)| + |\sum_{i=n}^{\infty} a_i f^*(x_i)| \leq \|P_n^* f^*\| + \varepsilon \|f^*\|.$$

De donde,

$$(1-\varepsilon)\|f^*\| \leq \|P_n^* f^*\| + \varepsilon \|f^*\|. \tag{3.29}$$

De la Ecuación (3.29) y como $K = 1$, se tiene que para $n > N$, $(1-2\varepsilon)\|f^*\| \leq \|P_n^* f^*\| \leq \|f^*\|$. Por lo tanto, $\|f^*\| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|P_n^* f^*\|$, pero por ser $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ monótona, $\|P_n^* f^*\| \leq \|P_{n+1}^* f^*\|$ y esto implica que $\|f^*\| = \sup_n \|P_n^* f^*\|$, lo cual termina la prueba. ■

**Ejemplo 3.2.2.** *Consideremos el espacio $c_0$ con la base sumante $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, definido en el Ejemplo 3.1.14, cuyo dual es el espacio $\ell^1$ que es separable.*

**Demostración:**
Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores unitarios, $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ con 1 en la posición $n-$ésima. Ahora sea $\{g_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$g_n^*(e_m) = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m \neq n \end{cases},$$

de igual manera podemos indentificar $g_n^*$ con $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^1$. Sea $h_n^* = g_n^* - g_{n+1}^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) - (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, como $\{g_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es la base canónica de $\ell^1$. Por lo tanto, $h_n^*$ es el elemento $(0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots) \in \ell^1$ y su norma es 2. Veremos que $g_1^* \notin \overline{span\{h_n^*\}_{n=1}^{\infty}}$. Supongamos que $g_1^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i^*$. Entonces $g_1^*(e_1) = 1 = a_1$ y si $n > 1$, $0 = e_1^*(e_n) = a_n - a_{n-1}$, de donde $a_n = 1$ para $n = 1, 2, \dots$; pero por el Lema 3.1.2, la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ debería converger a 0. Lo cual es una contradicción, entonces lo supuesto es falso. Por lo que hemos demostrado que $\{h_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ no es base de $\ell^1$. ∎

A continuación nos da una condición necesaria y suficiente para que la sucesión básica $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ sea una base para $X^*$.

**Teorema 3.2.3.** *Sea $X$ un espacio de Banach con una base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces la sucesión de funcionales biortogonales $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $X^*$ si y sólo si para cada $f^* \in X$*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| f^*|_{\overline{span\{x_i\}_{i=n}^{\infty}}} \right\| = 0. \tag{3.30}$$

*Cuando una base satisface la Ecuación (3.30), se le llama* ***base reductora****.*

**Demostración:**
"$\Longrightarrow$"
Si $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $X^*$, entonces para cada $f^* \in X^*$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f^* - P_n^* f^*\| = 0. \tag{3.31}$$

Sea $y \in \overline{span\{x_i\}_{i=n}^{\infty}}$. Entonces como $P_{n-1} y = 0$,

$$|f^*(y)| = |f^*(y) - 0| = |f^*(y) - f^*(0)| = |f^*(y) - f^*(P_{n-1}(y))| = |f^*(y) - (P_{n-1}^* f^*)(y)|$$
$$\Longrightarrow |f^*(y)| = |(f^* - P_{n-1}^* f^*)(y)| \leq \|f^* - P_{n-1}^* f^*\| \|y\|.$$

Esto implica que,

$$\left\| f^*|_{\overline{span\{x_i\}_{i=n}^{\infty}}} \right\| \leq \left\| f^* - P_{n-1}^* f^* \right\|,$$

y de la Ecuación (3.31) se obtiene que,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| f^*|_{\overline{span\{x_i\}_{i=n}^{\infty}}} \right\| = 0.$$

"$\Longleftarrow$"
Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que se satisface la Ecuación (3.30) y así $f^* \in X^*$, entonces para toda $x \in X$ con $\|x\| = 1$,

$$|(f^* - P^* f^*(x))| = |f^*((I - P_n)(x))| = |f^*|_{\overline{span\{x_i\}_{i=n}^{\infty}}}((I - P_n)(x))|$$
$$\Longrightarrow |(f^* - P^* f^*(x))| \leq \left\| f^*|_{\overline{span\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}}} \right\| \|I - P_n\| \leq \left\| f^*|_{\overline{span\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}}} \right\| (1 + K),$$

donde $K$ es la constante de base de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Concluimos así que,

$$\lim_n \|f^* - P_n^* f^*\| \leq \lim_n \left\| f^*|_{\overline{span\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}}} \right\| (1 + K) = 0 \Longrightarrow \lim_n \|f^* - P_n^* f^*\| = 0.$$

Así, $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $X^*$. ■

**Ejemplo 3.2.4.** *El Ejemplo 3.1.14 muestra que las bases canónicas en $c_0$ y en $\ell^p$, $1 < p < \infty$, son reductoras ya que* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|g^*|_{\overline{span\{x_i\}_{i=n}^{\infty}}}\| = 0$.

Ahora surge una pregunta ¿cuándo una base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach $X$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a una base? Desde luego para ello se necesita que $X$ sea el espacio Dual de algún espacio de Banach.

**Teorema 3.2.5.** *Si $X$ es una espacio de Banach con una base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que,*

*(*) siempre que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ es tal que $\sup_n \|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\| < \infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ también converge,*

*entonces $X$ es isomorfo al dual del espacio $\overline{span\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}} \subset X^*$. A una base que cumple la propiedad $(*)$ se le llama **base acotadamente completa**.*

<u>**Demostración:**</u>
Sean $Y = \overline{span\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}}$ y $J : X \longrightarrow Y^*$ dada por

$$(J(x))(y) = y(x), \tag{3.32}$$

para toda $y \in Y$, $x \in X$. Es decir $J(x) = j(x)|_Y$, donde $j$ es la inyección canónica de $X$ en $X^{**}$. En consecuencia $\|J\| \leq \|j\| = 1$. Por otro lado sean $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$, $n \in \mathbb{K}$ y $g^* \in X^*$ con $\|g^*\| = 1$ y $g^*(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|$. Por Ecuación (3.27) sabemos que $P_n^* g^* \in Y$ y que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = P_n^* g^* \left( \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = \left( J \left( \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) \right) (P_n^* g^*) \leq \left\| J \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| K,$$

donde $K$ es la constante de base de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$; consecuentemente $\|x\| \leq K \|Jx\|$ y

$$\frac{1}{K} \|x\| \leq \|Jx\| \leq \|x\|. \tag{3.33}$$

Por lo tanto, $J$ es inyectiva y probaremos que es sobre $Y^*$. Observemos que,

$$(J(x_i)(f_n^*)) = f_n^*(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = i \\ 0 \text{ si } n \neq i \end{cases}$$

Es decir $\{J(x_n)\}_{n=1}^\infty$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociada a $\{f_n^*\}_{n=1}^\infty$ en $Y^*$. Sea $y^* \in Y^*$. Si $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ denota a la sucesión de proyecciones asociadas a $\{f_n^*\}_{n=1}^\infty$ es menor o igual a $K$ que $\|Q_n\| = \|Q_n^*\| \leq K$. Por lo tanto, para toda $y \in Y$ con $y = \sum_{i=1}^\infty (J(x_i)(y))f^*$,

$$Q_n^* y^*(y) = y^*(Q_n y) = \sum_{i=1}^n [J(x_i)](y) y^*(f_i^*) = \left[\sum_{i=1}^n y^*(f_i^*) J(x_i)\right](y),$$

es decir, $Q_n^* y^* = \sum_{i=1}^n y^*(f_i^*) J(x_i)$, y $\| \sum_{i=1}^n J(x_i) y^*(f_i^*)\| \leq \|Q_n^*\| \|y^*\|$. De esto y de la Ecuación (3.33) se tiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^n y^*(f_i^*) x_i \right\| \leq K^2 \|y^*\|.$$

Como la base es acotadamente completa, $x = \sum_{i=1}^\infty y^*(f_i^*) x_i \in X$ y además tenemos que $Jx = J(\sum_{i=1}^\infty y^*(f_i^*) x_i) = y^*$. Con esto probamos que $J$ es sobreyectiva y que $X$ es isomorfo a $Y^*$.

OBSERVACIÓN: La propiedad de que la base $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es acotadamente completa sólo se usó en el último párrafo, de manera que siempre que $X$ tiene una base $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, es cierto que $X$ es isomorfo a un subespacio del dual de $\overline{span\{f_n^*\}_{n=1}^\infty}$. ■

**Ejemplo 3.2.6.** *La base canónica en $c_0$ no es acotadamente completa, ya que por ejemplo,*

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^m e_i \right\| = 1,$$

*pero tenemos que esta serie no es convergente en $c_0$, pues la sucesión $\{1, 1, 1, \dots\}$ no pertenece a $c_0$. La base canónica en $\ell^p$ con $1 \leq p < \infty$ es acotadamente completa ya que,*

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^m e_i \right\| = 1,$$

*y la sucesión $\{1, 1, 1, \dots\}$ pertenece a $\ell^p$.*

Ahora surge la siguiente interrogante, ¿Qué pasa si una base de $X$ es simultáneamente reductora y acotadamente completa? En tal caso el espacio resulatará ser reflexivo y también si un espacio con base es reflexivo, entonces la base es reductora y acotadamente completa. Pero, antes de probar lo anterior mencionado, daremos un primer paso con el siguiente teorema, que nos permite representar al doble dual de un espacio con base reductora como un espacio de sucesiones.

**Teorema 3.2.7.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una base reductora en un espacio de Banach $X$. Entonces el espacio $X^{**}$ es isomorfo al espacio $\mathcal{X}$ definido por,*

$$\mathcal{X} = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K} : \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| < \infty \right\},$$

*con la norma,*

$$\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\mathcal{X}} = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|.$$

*La identificación está dada por,* $\Gamma \longleftrightarrow \{\Gamma(f_1^*), \Gamma(f_2^*) \dots\} = x$*. Si además* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es monótona, entonces* $\|\Gamma\| = \|x\|_{\mathcal{X}}$ *.*

**Demostración:**

Primeramente hagamos la constante de base de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es 1, ya que la norma en $X$ dada por $|||x||| = \sup_n \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|$ para $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$, es equivalente a la norma $\|\cdot\|$ y con respecto a ella la base es claramente monótona (ver Corolario 3.1.5). Sea $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de las proyecciones asociadas a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces por ser $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ base reductora, $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $X^*$. Sea $j$ la inyección canónica; recordemos que $j$ es una isometría y que $\{j(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociada a la base $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ (ver Teorema 3.2.5). Por el Lema 3.2.1 la base $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y para cada $f^* \in X^{**}$,

$$P_n^{**}\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \Gamma(f_i^*) j(x_i), \quad \text{y} \quad \sup_n \|P_n^{**}\Gamma\| = \|\Gamma\|.$$

Esto quiere decir que si $T : X^{**} \longrightarrow (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ está dado por $T\Gamma = \{\Gamma(f_1^*), \Gamma(f_2^*), \dots\} = x$. Probemos que $T$ es una isometría. Primero demostremos que $T$ es sobreyectiva. Supongamos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ es tal que,

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty.$$

Entonces la sucesión $\{\sum_{i=1}^{n} a_i j(x_i)\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada en $X^{**}$. Consideremos en $X^{**}$ la topología $\omega^*$. Como se comentó en la sección de Reflexividad, en esta topología, $\Gamma_n \underset{\omega^*}{\longrightarrow} \Gamma$ si y sólo si, para toda $f^* \in X^*$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \Gamma_n(f^*) = \Gamma(f^*). \tag{3.34}$$

Por el Teorema de Banach-Alaoglu 1.6.25, la sucesión $\{\sum_{i=1}^{n} a_i j(x_i)\}_{n=1}^{\infty}$ está contenida en un conjunto $\omega^*-$compacto y por lo tanto tiene un subsucesión $\omega^*-$convergente. Supongamos que $\Gamma \in X^{**}$ es tal que,

$$\sum_{i=1}^{m_n} a_i j(x_i) \underset{\omega^*}{\longrightarrow} \Gamma.$$

Entonces de la Ecuación (3.34) para toda $f^* \in X^*$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_n} a_i f^*(x_i) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^{m_n} a_i j(x_i) \right] (f^*) = \Gamma(f^*).$$

En particular si $f^* = f_n^*$ para alguna $n$, obtenemos que, $\Gamma(f_n^*) = a_n$, lo cual implica que $T\Gamma = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y termina la demostración del teorema. ■

Como ya vimos que $T$ es inyectiva y además toda subsucesión que sea $\omega^*$-convergente de

$\{\sum_{i=1}^{n} a_i j(x_i)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al mismo límite y en particular $\{\sum_{i=1}^{n} a_i j(x_i)\}_{n=1}^{\infty}$ converge en la topología $\omega^*$. Combinando los conceptos de base acotadamente completa y reductora obtenemos finalmente la siguiente caracterización de los espacios reflexivos con base.

**Teorema 3.2.8.** *Sea $X$ un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $X$ es reflexivo si y sólo si la base es a la vez reductora y acotadamente completa.*

__**Demostración:**__

"$\Longleftarrow$"

Supongamos primero que $X$ es reflexivo. Ahora supongamos que su base no es reductora. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es reductora, existe $f^* \in X^*$ tal que $\left\| f^*|_{\overline{span\{x\}_{i=n}^{\infty}}} \right\|$ no tiende a cero. Como $\left\{ \left\| f^*|_{\overline{span\{x\}_{i=n}^{\infty}}} \right\| \right\}$ es decreciente, existen $\varepsilon > 0$ y para $n = 1, 2, \ldots$ $y_n \in \overline{span\{x\}_{i=n}^{\infty}}$ tales que,

a) $\|y_n\| = 1$.

b) $f^*(y_n) > \varepsilon$, para $n = 1, 2, \ldots$.

Por el Corolario 1.6.37, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es débilmente convergente; sea $y = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(y) x_n$ su límite. Entonces $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_m^*(y_n) = f_m^*(y)$ para cada $m$. Pero $f_m^*(y_n) = 0$ si $n > m$, de modo que $f_m^*(y) = 0$ para cada $m$, y esto implica que $y = 0$, lo cual contradice **b)**, probando así que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es reductora. Estamos ahora en la situación del Teorema 3.2.7, por lo tanto, si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ es tal que,

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty,$$

entonces existe $\Gamma \in X^{**}$ con $\Gamma(f_i^*) = a_i$, para cada $i$. Sea $j$ la inyección canónica de $X$ en $X^{**}$. Como $X$ es reflexivo, $\{j(x_n)\}._{n=1}^{\infty}$ es base de $X^{**}$, de donde $\Gamma$ se puede expresar como $\Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} b_n j(x_n)$ y tenemos que $a_n = bn$ para toda $n$. Por ende $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge en $X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa.

"$\Longrightarrow$"

Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora y acotadamente completa de $X$. Para ver que $X$ es reflexivo hay que probar que si $\Gamma \in X^{**}$, existe $x \in X$ tal que $j(x) = \Gamma$. Sea pues $\Gamma \in X^{**}$, entonces por el Teorema 3.2.7,

$$\sup_n \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(f_i^*) x_i \right\| < \infty,$$

y por ser $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotadamente completa, $\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(f_n^*) x_n \in X$. Por lo tanto,

$$\Upsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(f_n^*) j(x_n) \in X^{**},$$

y como $\Upsilon(f_n^*) = \Gamma(f_n^*)$ para cada $n$, y $\{f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es base de $X^*$, $\Upsilon = \Gamma$, o sea que,

$$\Gamma = j\left(\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(f_n^*) x_n\right),$$

lo que completa la prueba. ■

**Ejemplo 3.2.9.** *Los espacios $\ell^p$ con $1 < p < \infty$ son reflexivos, por el teorema anterior tenemos que la base canónica y cualquier otra base en estos espacios es a la vez reductora y acotadamente completa.*

# 3.3. BASES INCONDICIONALES

Las bases incondicionales nos permiten conocer más a fondo los espacios que las poseen. Esta definición está muy ligada a la de series incondicionalmente convergentes en un espacio de Banach.

**Definición 3.3.1.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach. Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente, si para cualquier permutación $\pi$ una función biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge.*

**Proposición 3.3.2.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach $X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

*(i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente.*

*(ii) Para toda $\varepsilon > 0$, existe un entero $N$ tal que $\|\sum_{i\in\sigma} x_i\| < \varepsilon$ para todo conjunto finito $\sigma \subset \mathbb{N}$ con $\min \sigma > N$.*

*(iii) La serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ converge para cualquier sucesión de naturales $n_1 < n_2 < \dots$.*

*(iv) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ converge para cualquier sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\theta_n = \pm 1$ para $n = 1, 2, \dots$.*

**Demostración:**
Demostraremos que $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i)$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Supongamos que $(ii)$ es falso. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\sigma_1 \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\left\|\sum_{i\in\sigma} x_i\right\| \geq \varepsilon$ y también para toda $n$, existe un conjunto finito $\sigma_n \subset \mathbb{N}$ tal que para $n = 2, \dots,$

$$\max \sigma_n < \min \sigma_{n+1} = p_{n+1} \text{ y } \left\|\sum_{i\in\sigma} x_i\right\| \geq \varepsilon. \tag{3.35}$$

Si $r_n + 1$ denota la cardinalidad de $\sigma_n$, como,

$$p_n + r_n \leq \max \sigma_n < p_{n+1},$$

existe una permutación $\pi$ de $\mathbb{N}$ tal que para $n = 1, 2, \ldots,$

$$\pi^{-1}(\sigma_n) = \{p_n, p_n + 1, \ldots, p_n + r_n\}.$$

Para lo cual tenemos que para $n > m \geq N$,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{\pi(k)} - \sum_{k=1}^{m} x_{\pi(k)} \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_{\pi(k)} \right\| \geq \varepsilon.$$

Por lo cual $\left\{\sum_{k=1}^{n} x_{\pi(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$no es de Cauchy, lo cual genera una contradicción, así lo supuesto es falso por tanto, se cumple $ii$).

$(ii) \implies (iii)$. Dado que $(ii)$ implica que $\{\sum_{i=1}^{m} x_{n_i}\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Entonces para cualquier sucesión de naturales $n_1 < n_2 < \ldots$, $\{\sum_{i=1}^{m} x_{n_i}\}_{m=1}^{\infty}$ converge ya que $X$ es de Banach.

$(iii) \implies (iv)$. Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ converge para cualquier sucesión de naturales $n_1 < n_2 < \ldots$ y sea $\{\theta_n\}_{n}^{\infty}$ con $\theta_n = \pm 1$ para $n = 1, 2, \ldots$ Sea

$$\{n_i : i = 1, 2, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} : \theta_n = 1\},$$

con $n_1 < n_2 < \ldots$ y sea

$$\{m_i : i = 1, 2, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} : \theta_n = -1\},$$

con $m_1 < m_2 < \ldots$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N$ tal que si $i > j > N$, entonces

$$\left\| \sum_{k=j}^{i} x_{n_k} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left\| \sum_{k=j}^{i} x_{m_k} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, si $m > n > \text{máx}\{n_N, m_N\}$

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \theta_k x_k \right\| = \left\| \sum_{k=j}^{m} \theta_k x_k - \sum_{k=j}^{n} \theta_k x_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=j}^{i} x_{n_k} \right\| + \left\| \sum_{k=j}^{i} x_{m_k} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, $\{\sum_{k=1}^{n} \theta_k x_k\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy que por lo tanto converge.

$(iv) \implies (ii)$. Supongamos que se satisface $(iv)$ pero no se cumple $(ii)$. Sea $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ como en la Ecuación (3.35). Sea

$$\theta_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in \sigma_n \text{ para alguna } n \\ -1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i$ convergen, entonces

$$2 \sum_{i \in \cup_n \sigma_n} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i,$$

debería converger, pero esto contradice la Ecuación (3.35). Por lo tanto lo supuesto es falso y se cumple lo que queríamos probar.

*(ii)* $\implies$ *(i)*. Sean $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una permutación de los naturales y $\varepsilon > 0$. Sea $N$ tal que si $\sigma$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $\min \sigma > N$, se tiene que $\| \sum_{i\in\sigma} x_i \| < \varepsilon$.
Sea $M = \max\{i \in \mathbb{N} : \pi(i) \leq N\}$. Entonces si $m > n > M$,

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} x_{\pi(i)} \right\| < \varepsilon,$$

lo cual significa que $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y consecuentemente converge.
■

**Corolario 3.3.3.** *Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie incondicionalmente convergente en un espacio de Banach $X$, entonces existe $x \in X$ tal que para toda permutación $\pi$ de $\mathbb{N}$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x.$$

**Demostración:**
Sean $\pi$ una permutación de los naturales y $\varepsilon > 0$. Sea $N$ tal que se satisfaga *(ii)* de la Proposición 3.3.2 y sea $M = \max\{i \in \mathbb{N} : \pi(i) \leq N\}$, entonces si $n > M$ tenemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{\pi(i)}) \right\| = \left\| \sum_{i=N+1}^{n} x_i - \sum_{\substack{i\leq M \\ \pi(i)>N}} x_{\pi(i)} \right\| \leq 2\varepsilon.$$

Y esto prueba lo que queríamos demostrar. ■

**Definición 3.3.4.** *Una base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach $X$ se llama base incondicional, si para toda $x \in X$ su expansión $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ en términos de la base, converge incondicionalmente.*

De la Proposición 3.3.2, se deducen las siguientes definiciones equivalentes de base incondicional.

**Teorema 3.3.5.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

*(i)* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión básica incondicional.*

*(ii) Para todo subconjunto $\sigma$ de $\mathbb{N}$ la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ implica la convergencia de $\sum_{i\in\sigma} a_i x_i$.*

*(iii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n$ converge para toda sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $\theta_n = \pm 1$ para $n = 1, 2, \ldots$.*

*(iv) Si $|b_n| \leq |a_n|$ para toda $n$, la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$.*

**<u>Demostración:</u>**
Primero demostremos $(i) \Longrightarrow (iii)$. Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica incondicional, entonces por definición, para toda $x \in X$ su expansión $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ en términos de la base, converge incondicionalmente. Luego, por literal $(iv)$ de la Proposicióón 3.3.2 tenemos que, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n$ converge para cualquier sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\theta_n = \pm 1$ para $n = 1, 2, \ldots$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n$ converge para cualquier sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\theta_n = \pm 1$ para $n = 1, 2, \ldots$. Tenemos por el literal $(i)$ de la Proposición 3.3.2, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es incondicionalmente convergente, lo cual implica por definición que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica incondicional.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Supongamos que para todo subconjunto $\sigma$ de $\mathbb{N}$ la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ implica la convergencia de $\sum_{i \in \sigma} a_i x_i$, entonces se cumple el literal $(ii)$ de la Proposición 3.3.2, el cual al mismo tiempo implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n$ converge para cualquier sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\theta_n = \pm 1$ para $n = 1, 2, \ldots,$

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica incondicional, entonces por definición, para toda $x \in X$ su expansión $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ en términos de la base, converge incondicionalmente. Luego, por literal $(ii)$ y $(iii)$ de la Proposición 3.3.2, tenemos que, para todo subconjunto $\sigma$ de $\mathbb{N}$ la serie $\sum_{i \in \sigma} a_i x_i$ converge.

$(iv) \Longrightarrow (iii)$. Supongamos que se cumple $(iv)$. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\theta_n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\theta_n = \pm 1$ para $n = 1, 2, \ldots$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge. Luego, por propiedad del módulo en los reales tenemos que $|\theta_n a_n| \leq |a_n|$, para toda $n$, entonces dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge, esto implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n$ también converge.

$(i) \Longrightarrow (iv)$. Sea $\pi$ una permutación de $\mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$, también $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} x_{\pi(n)} \in X$, de manera de que si $f^* \in X^*$, se satisface tanto $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n f^*(x_n)| < \infty$ como el hecho que $|\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} f^*(x_{\pi(n)})| < \infty$, así, por definición la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f^*(x_n) \subset \mathbb{K}$ es incondicionalmente convergente, y como en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ la convergencia incondicional de series es equivalente a la convergencia absoluta, tenemos que

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n f^*(x_n)| < \infty.$$

Sea ahora $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $|b_n| \leq |a_n|$. Entonces para todo subconjunto finito $\sigma$ de $\mathbb{N}$,

$$\left| f^* \left( \sum_{n \in \sigma} b_n x_n \right) \right| = \left| \sum_{n \in \sigma} f^*(b_n x_n) \right| \leq \sum_{n \in \sigma} |b_n f^*(x_n)| = \sum_{n \in \sigma} |b_n| \, |f^*(x_n)|$$

$$\Longrightarrow \left| f^* \left( \sum_{n \in \sigma} b_n x_n \right) \right| \leq \sum_{n \in \sigma} |a_n| \, |f^*(x_n)| = A,$$

lo cual, por el principio de acotamiento uniforme aplicado a la familia

$$\mathcal{G} = \left\{ j\left(\sum_{n\in\sigma} b_n x_n\right) : |b_n| \leq |a_n| \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ y } \sigma \text{ es finito} \right\},$$

donde $j$ es la inyección canónica de $\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ en $\left(\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}\right)^{**}$ y lo cual implica que

$$\sup\left\{ \left\| \sum_{n\in\sigma} b_n x_n \right\| : |b_n| \leq |a_n| \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ y } \sigma \text{ es finito} \right\} < \infty. \tag{3.36}$$

Si para $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$ definimos,

$$\left|\left|\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right|\right|\right|_1 = \sup\left\{ \left\| \sum_{n\in\sigma} b_n x_n \right\| : |b_n| \leq |a_n| \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ y } \sigma \text{ es finito} \right\} \tag{3.37}$$

Podemos ver que $\left(\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}, |||\cdot|||\right)$ es un espacio normado completo, dado que si nos damos una sucesión de Cauchy en $\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ esta sucesión converge, ya que se cumple $\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} \subset X$ y por ser $\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ cerrado, tenemos que la sucesión converge en el subespacio $\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$. Y además $\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\| \leq |||\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n|||_1$. Ahora consideremos el siguiente operador, $T : (\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}, |||\cdot|||_1) \longrightarrow (\overline{span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}, \|\cdot\|)$ el cual está dado por

$$T\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n,$$

dado que $T$ es el operador identidad, se tiene que $T$ es biyectivo y continuo y, aplicando el teorema de la función inversa, resulta que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in X$,

$$\|x\| \leq |||x|||_1 \leq C\|x\|. \tag{3.38}$$

Por lo anterior, si $\varepsilon < 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m > N$,

$$\left\| \sum_{r=1}^{m} b_r x_r \right\| \leq \left|\left|\left| \sum_{r=m}^{n} a_r x_r \right|\right|\right|_1 < \varepsilon.$$

Es decir $\{\sum_{r=1}^{m} b_r x_r\}_{m=1}^{n}$ es una sucesión de Cauchy en $X$ y por ende convergente. Así, queda demostrado el teorema. ■

**Corolario 3.3.6.** *Sean $X$ un espacio de Banach con base incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\sigma$ un subconjuto finito de los naturales. Dada $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ definimos $P_\sigma x = \sum_{n\in\sigma} a_n x_n$. Entonces $P_\sigma$ es una proyección y*

$$\sup\{\|P_\sigma\| : \sigma \subset \mathbb{N}, \sigma \textit{ finito}\} < \infty.$$

**Demostración:**
Primeramente tenemos que,

$$P_\sigma \circ P_\sigma x = P_\sigma \left( \sum_{n\in\sigma} a_n x_n \right) = \sum_{n\in\sigma} a_n x_n = P_\sigma x,$$

por lo que $P_\sigma$ es una proyección. Ahora como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional tenemos por la Ecuación (3.36) en el Teorema 3.3.5 que,

$$\sup\{\|P_\sigma\| : \sigma \subset \mathbb{N}, \sigma \text{ finito}\} < \infty.$$

Así, queda demostrado el corolario. ■

**Corolario 3.3.7.** *Sean $X$ un espacio de Banach con base incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si para cada sucesión $\theta = \{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde para $n = 1, 2, \ldots$ $\theta_n = \pm 1$, definimos $M_\theta : X \to X$ mediante*

$$M_\theta \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n,$$

*entonces $m_\theta$ es un operador acotado y $\sup_\theta \|M_\theta\| < \infty$. Al número $K = \sup_\theta \|M_\theta\|$ se le llama la **constante de incondicionalidad** de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Además si definimos en $X$,*

$$\left|\left|\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right|\right|\right|_0 = \sup_\theta \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n \right\|,$$

*$|||\cdot|||_0$ es una norma equivalente a la norma $\|\cdot\|$ en $X$ tal que,*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \le \left|\left|\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right|\right|\right|_0 \le K \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|. \tag{3.39}$$

**Demostración:**
Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional, por las Ecuaciones (3.36) y (3.37), también aplicando el teorema de la función inversa como en la demostración de la Ecuación (3.38) tenemos que,

$$\left|\left|\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right|\right|\right|_0 = \sup_\theta \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n \right\|,$$

y también

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \le \left|\left|\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right|\right|\right|_0 \le K \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|,$$

esto demuestra que las normas son equivalente y consecuentemente queda demostrado el corolario. ■

En el siguiente lema demostraremos que una base seminormalizada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la base normalizada $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}_{n=1}^{\infty}$, utilizando el hecho de que la base es incondicional.

**Lema 3.3.8.** *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional seminormalizada en un espacio de Banach $X$, entonces $\left\{\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una base equivalente a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

**Demostración:**
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \|x_n\| \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Supongamos que si $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{M} \leq \|x_n\| \leq M$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} M a_n x_n \in X$, y como $\left|\dfrac{a_n}{\|x_n\|}\right| \leq M|a_n|$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es incondicional,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x_n}{\|x_n\|} \in X.$$

Por otro lado, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{x_n}{\|x_n\|} \in X$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} M a_n \dfrac{x_n}{\|x_n\|} \in X$ y como $|a_n \|x_n\|| \leq M|a_n|$ y $\left\{\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es incondicional,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a \|x_n\| \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

De esta manera $\left\{\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional. ∎

**Ejemplo 3.3.9.** *Los ejemplos más sencillos de bases incondicionales son las bases canónicas $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ de los espacios $\ell^p$, $1 \leq p < \infty$ y de $c_0$. Sin embargo la base de sumas parciales $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $c_0$ donde $\xi_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$, no es incondicional, pues por ejemplo $\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\| = n$ y $\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \xi_i\| = 1$ de manera que para toda $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, si $n \geq K$*

$$K = K\left\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\xi_i\right\| \leq n = \left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\| \leq \sup_{\theta_i=\pm1}\left\|\sum_{i=1}^{n}\theta_i\xi_i\right\|,$$

*esto se dá por la Ecuación (3.39) y del Corolario 3.3.7.*

**Teorema 3.3.10.** *Sea $X$ un espacio de Banach con una base incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces tenemos que, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora si y sólo si $X$ no tiene ningún subespacio cerrado isomorfo a $\ell^1$, es decir si y sólo si no existe ningún operador lineal acotado biyectivo entre un subespacio cerrado de $X$ y $\ell^1$.*

**Demostración:**
Sea $||| \cdot |||_1$ la norma en $X$ es la norma definida en la Ecuación (3.37) del Teorema 3.3.5.

“$\Longrightarrow$”
Supongamos que $\ell^1$ es isomorfo a un subespacio cerrado $F$ de $X$, entonces por el Teorema 1.7.3, $F^*$ se puede identificar con $X^*/F^\perp$. Como $F^*$ no es separable, $X^*$ tampoco lo es y por lo tanto los funcionales biortogonales $\{f_n^*\}_{n=1}^\infty$ asociadas a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ no pueden ser base de $X^*$, es decir $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ no es base reductora.

“$\Longleftarrow$”
Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ no es base reductora. Como $\left\{\left|\left|\left|f^*|_{\overline{span\{x_i\}_{i=n}^\infty}}\right|\right|\right|_1\right\}_n$ es decreciente, existen $\varepsilon > 0$ y $f^* \in X^*$, que podemos suponer tiene norma 1, tal que,

$$\left|\left|\left|f^*|_{\overline{span\{x_i\}_{i=k}^\infty}}\right|\right|\right| > \varepsilon > 0. \tag{3.40}$$

Ahora probaremos que existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ y una sucesión $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ con $y_k \in \overline{span\{x_i\}_{i=n_k}^{n_{k+1}-1}}$, $|||y_k|||_1 = 1$ y tal que $f^*(y_k)$ es real y $f^*(y_k) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ De la Ecuación (3.40) se obtiene una sucesión $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ tal que,

$$z_k = \sum_{i=k}^\infty a_i^{(k)} x_i, \; |||z_k|||_1 = 1, \; |f^*(z_k)| > \varepsilon. \tag{3.41}$$

Ahora construiremos las sucesiones de la siguiente manera. Sea $n_1 = 1$; como la serie para $z_1$ es convergente, existe $n_2 > n_1$ tal que,

$$\left|\left|\left|\sum_{i=n_2}^\infty a_i^{(1)} x_i\right|\right|\right|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, sea

$$y_1 = \frac{e^{i\theta_1} \sum_{i=n_1}^{n_2-1} a_i^{(1)} x_i}{\left|\left|\left|\sum_{i=n_1}^{n_2-1} a_i^{(1)} x_i\right|\right|\right|_1},$$

donde $\theta_1$ es tal que $f^*(y_1) \geq 0$. Supongamos que ya constuimos $\theta_1$, $\theta_2$, $\ldots, \theta_k \in [0, 2\pi)$, $y_1$, $\ldots, y_k \in X$ y $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k+1}$ tales que para $j = 1, \ldots, k$,

*i)* $\left|\left|\left|\sum_{i=n_{j+1}}^\infty a_i^{(n_j)} x_i\right|\right|\right|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$,

*ii)* $y_j = \dfrac{e^{i\theta_j} \sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} a_i^{(n_j)} x_i}{\left|\left|\left|\sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} a_i^{(n_j)} x_i\right|\right|\right|_1}$, donde $\theta_j$ es tal que $f^*(y_j) \geq 0$.

Como la serie para $z_{n_{k+1}}$ es convergente, existe $n_{k+2} > n_{k+1}$ tal que,

$$\left|\left|\left|\sum_{i=n_{k+2}}^\infty a_i^{(n_{k+1})} x_i\right|\right|\right|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea

$$y_{k+1} = \frac{e^{i\theta_{k+1}} \sum_{i=n_{k+1}}^{n_{k+2}-1} a_i^{(n_{k+1})} x_i}{\left|\left|\left| \sum_{i=n_{k+1}}^{n_{k+2}-1} a_i^{(n_{k+1})} x_i \right|\right|\right|_1},$$

donde $\theta_{k+1}$ es tal que $f^*(y_{k+1}) \geq 0$. Como $\left|\left|\left| z_{n_j} \right|\right|\right| = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$ se tiene que,

$$0 < \left|\left|\left| \sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} a_i^{(n_j)} x_i \right|\right|\right|_1 \leq \left|\left|\left| z_{n_j} - \sum_{i=n_{j+1}}^{\infty} a_i^{(n_j)} x_i \right|\right|\right|_1 \leq |||z_{n_j}|||_1 - \left|\left|\left| \sum_{i=n_{j+1}}^{\infty} a_i^{(n_j)} x_i \right|\right|\right|_1$$

$$\Longrightarrow 0 < \left|\left|\left| \sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} a_i^{(n_j)} x_i \right|\right|\right|_1 \leq |||z_{n_j}|||_1 = 1$$

Ya que $y_k \in \overline{span\{x_i\}_{i=n_k}^{n_{k+1}-1}}$, $|||y_k|||_1 = 1$, usando la Ecuación (3.41), $(i)$ y $(ii)$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
f^*(y_k) =& \frac{1}{\left|\left|\left| \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(n_k)} x_i \right|\right|\right|_1} \left| f^* \left( \sum_{i=n_k}^{\infty} a_i^{(n_k)} x_i - \sum_{i=n_{k+1}}^{\infty} a_i^{(n_k)} x_i \right) \right| \\
\geq& \frac{1}{\left|\left|\left| \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(n_k)} x_i \right|\right|\right|_1} \left( \left| f^* \left( \sum_{i=n_k}^{\infty} a_i^{(n_k)} x_i \right) \right| - \left| f^* \left( \sum_{i=n_{k+1}}^{\infty} a_i^{(n_k)} x_i \right) \right| \right) \\
\geq& \frac{1}{\left|\left|\left| \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(n_k)} x_i \right|\right|\right|_1} \left( \varepsilon - \left| f^*(z_{n_{k+1}}) \right| \right) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Luego, si $\{a_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{i=1}^m |a_i| \geq \left|\left|\left| \sum_{i=1}^m a_i y_i \right|\right|\right|_1 = \left|\left|\left| \sum_{i=1}^m |a_i| y_i \right|\right|\right|_1 \geq f^* \left( \sum_{i=1}^m |a_i| y_i \right) \geq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^m |a_i|,$$

es decir que el subespacio $\overline{span\{y_i\}_{i=1}^{\infty}}$ de $X$ es isomorfo a $\ell^1$ mediante el isomorfismo $T(y_i) = e_i$, donde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la base canónica de $\ell^1$, con esto queda demostrado el teorema. ■

**Teorema 3.3.11.** *Sea $X$ un espacio de Banach con base incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Entonces si $X$ no contiene un subespacio cerrado isomorfo a $c_0$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa.*

**Demostración:**

"$\Longleftarrow$"

Nuevamente supongamos que $X$ esta dotado con la norma $|||\ldots|||_1$. Supongamos que la base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotadamente completa. Entonces existe una sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ tal que,

$$\sup_n \left|\left|\left| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right|\right|\right|_1 < \infty,$$

pero $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ no converge.

"$\Longrightarrow$"
Igualmente sin perder generalidad, supongamos que $\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right|\right|\right|_1 < 1$ para toda $m$. Entonces si $A \subset \mathbb{N}$ es un conjunto finito, por definición de la norma $|||\cdot|||$ tenemos,

$$\left|\left|\left|\sum_{i\in A} a_i x_i\right|\right|\right|_1 < 1. \tag{3.42}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ no converge, por lo que tampoco es Cauchy, entonces podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ y dos sucesiones de naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $n_k < m_k < n_{k+1}$ y

$$\left|\left|\left|\sum_{i=n_k}^{m_k} a_i x_i\right|\right|\right|_1 > \varepsilon. \tag{3.43}$$

Sea $y_k = \sum_{i=n_k}^{m_k} a_i k_i$, entonces de la Ecuación (3.42) obtenemos que si,

$$A = \bigcup_{k=1}^{r} \{i \in \mathbb{N} : \ n_k \geq i \geq m_k\},$$

entonces

$$\left|\left|\left|\sum_{k=1}^{r} y_k\right|\right|\right|_1 = \left|\left|\left|\sum_{i\in A} a_i x_i\right|\right|\right|_1 < 1. \tag{3.44}$$

Si $\{b_k\}_{k=1}^{r} \subset \mathbb{K}$, usando nuevamente la definición de $|||\cdot|||_1$, por las Ecuaciones (3.43), (3.44), se tiene que,

$$\varepsilon \sup_k |b_k| < \sup_k |b_k| |||y_k|||_1 = \sup_k |||b_k y_k|||_1 \leq \left|\left|\left|\sum_{k=1}^{r} b_k y_k\right|\right|\right|_1 = \left|\left|\left|\sum_{k=1}^{r} |b_k| y_k\right|\right|\right|_1$$
$$\Longrightarrow \varepsilon \sup_k |b_k| < \sup_k |b_k| \left|\left|\left|\sum_{k=1}^{r} y_k\right|\right|\right|_1 < \sup_k |b_k|.$$

Entonces si definimos $T : \overline{span\{y_k\}_{k=1}^{\infty}} \longrightarrow c_0$ mediante $Ty_k = e_k$, donde $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es la base canónica de $c_0$, $T$ es un isomorfismo. Así, queda terminada la prueba. ■

Los dos teoremas anteriores tienen como consecuencia el siguiente resultado, debido también a James, que caracteriza a los espacios reflexivos con base incondicional.

**Teorema 3.3.12.** *Sea $X$ un espacio de Banach con base incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $X$ es reflexivo si y sólo si no contiene ningún subespacio cerrado isomorfo a $\ell^1$ ni a $c_0$.*

**Demostración:**
Si $X$ contuviese a $c_0$ o a $\ell^1$, no podría ser reflexivo ya que ninguno de estos dos espacios lo es, y como los subespacios cerrados de espacios reflexivos también son reflexivos por Corolario 1.8.2. Si $X$ no contiene ni a $\ell^1$ ni a $c_0$, por los dos teoremas anteriores $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ resulta ser tanto base reductora como acotadamente completa, y por el Teorema 3.2.8, $X$ es reflexivo. ■

## 3.4. EL ESPACIO J DE JAMES

En esta sección hablaremos de un espacio que no es tan conocido como los espacios $\ell^p$ y $C[0,1]$, el espacio $J$ de James. Este espacio apareció en un trabajo de Robert Clarke James en 1950 como un contraejemplo a una pregunta de Stefan Banach. Desde ese entonces para acá, el espacio ha probado ser una de las fuentes más ricas de contraejemplos para varios de los problemas que han ocupado a los expertos en espacios de Banach. Como varios de estos temas son muy especializados, no podremos tratarlos aquí, pero sí hablaremos de la propiedad esencial de $J$, veremos que es un espacio isométrico a su doble dual, que sin embargo no es igual a su doble dual y que de hecho tiene codimensión 1 en él.

**Definición 3.4.1.** *El espacio $J$ de James es el espacio de las sucesiones reales $x = (a_1, a_2, \ldots)$ tales que $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$ y tales que*

$$\|x\|_J = \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |a_{k_{2i-1}} - a_{k_{2i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} < \infty, \tag{3.45}$$

*donde el supremo se toma sobre todos los posibles valores de $n$ y sobre todas las posibilidades de sucesiones finitas $k_1 < k_2 < \ldots < k_{2n}$ de números naturales. Otra notación para la norma de $J$ de James es la siguiente:*

$$\|x\|_J = \sup \left\{ \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{n} (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 - (a_{p_{n+1}} - a_{p_1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} < \infty,$$

*donde el supremo se toma sobre todos los posibles valores de $n$ y sobre todas las posibilidades de sucesiones finitas $p_1 < p_2 < \ldots < p_{n+1}$ de números naturales.*

Demostremos que la Ecuación (3.45), define una norma. Sea $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Primero demostremos que $\|x\|_J > 0$. Sabemos que,

$$\|x\|_J = \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} < \infty,$$

pero, $|\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 > 0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 > 0 \Longrightarrow \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} > 0.$$

Por tanto, $\|x\|_J > 0$.

Demostremos que, $\|x\|_J = 0$, si y sólo si, $x = 0$.

“$\Longrightarrow$”
Supongamos que $\|x\|_J = 0$, por lo que

$$\|x\|_J = 0 \Longrightarrow \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 = 0$$
$$\Longrightarrow |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 = 0 \Longrightarrow |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}| = 0 \Longrightarrow \xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}} = 0 \Longrightarrow \xi_{k_{2i-1}} = \xi_{k_{2i}},$$

pero, $\lim_{n\longrightarrow\infty} \xi_n = 0$, entonces $\xi_n = 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $x = 0$.

“$\Longleftarrow$”
Supongamos que $x = 0$, así para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$x = 0 \Longrightarrow \xi_n = 0 \Longrightarrow \xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}} = 0 \Longrightarrow |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}| = 0 \Longrightarrow |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 = 0$$
$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 = 0 \Longrightarrow \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = 0 \Longrightarrow \|x\|_J = 0.$$

Por tanto, $\|x\|_J = 0$. Ahora demostremos que, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, con $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\|\alpha x\|_J = \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |\alpha\xi_{k_{2i-1}} - \alpha\xi_{k_{2i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |\alpha(\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$
$$\Longrightarrow \|\alpha x\|_J = \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |\alpha|^2|\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$
$$\Longrightarrow \|\alpha x\|_J = |\alpha|\|x\|_J.$$

Por lo que $\|\alpha x\|_J = |\alpha|\|x\|_J$. Por último, demostraremos que la Ecuación (3.45), define una norma, probaremos que cumple la propiedad triángular. Sea $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$, probaremos que, $\|x + y\|_J \leq \|x\|_J + \|y\|_J$.

$$\|x + y\|_J = \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |(\xi_{k_{2i-1}} + \eta_{k_{2i-1}}) - (\xi_{k_{2i}} + \eta_{k_{2i}})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$
$$\Longrightarrow \|x + y\|_J = \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} + \eta_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}} - \eta_{k_{2i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$
$$\Longrightarrow \|x + y\|_J = \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}} + \eta_{k_{2i-1}} - \eta_{k_{2i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$
$$\Longrightarrow \|x + y\|_J = \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |(\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}) + (\eta_{k_{2i-1}} - \eta_{k_{2i}})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

aplicando la desigualdad de Minkowski, Ecuación (1.1), tenemos

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_J &\leq \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |(\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^{n} |(\eta_{k_{2i-1}} - \eta_{k_{2i}})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |(\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} + \sup_n \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n} |(\eta_{k_{2i-1}} - \eta_{k_{2i}})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&= \|x\|_J + \|y\|_J.
\end{aligned}$$

Como $\|\cdot\|_J$, cumple las cuatro propiedades de norma, concluimos que, $\|\cdot\|_J$ define una norma.

**Proposición 3.4.2.** *El espacio $J$ de James es completo.*

<u>**Demostración:**</u>

Sea $\{x_n\} \subset J$ una sucesión de Cauchy donde $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots)$, así dado $\delta > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall\ m, n > N$,

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\|_J &= \|(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots) - (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots)\| = \|(\xi_1^{(m)} - \xi_1^{(n)}, \xi_2^{(m)} - \xi_2^{(n)}, \ldots)\| \\
&= \sup_{r \in \mathbb{Z}^+} \left\{ \left( \sum_{i=1}^{r} |(\xi_{k_{2i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{2i-1}}^{(n)}) - (\xi_{k_{2i}}^{(m)} - \xi_{k_{2i}}^{(n)})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} < \delta.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\|x_m - x_n\|_J{}^2 = \sup_{r \in \mathbb{Z}^+} \left\{ \left( \sum_{i=1}^{r} |(\xi_{k_{2i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{2i}}^{(m)}) - (\xi_{k_{2i-1}}^{(n)} - \xi_{k_{2i}}^{(n)})|^2 \right) \right\} < \delta^2.$$

Luego, $\forall\ r \in \mathbb{Z}^+$,

$$\sum_{i=1}^{r} \left|(\xi_{k_{2i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{2i}}^{(m)}) - (\xi_{k_{2i-1}}^{(n)} - \xi_{k_{2i}}^{(n)})\right|^2 \leq \sup_{r \in \mathbb{Z}^+} \left\{ \left( \sum_{i=1}^{r} \left|(\xi_{k_{2i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{2i}}^{(m)}) - (\xi_{k_{2i-1}}^{(n)} - \xi_{k_{2i}}^{(n)})\right|^2 \right) \right\} < \delta^2 \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{r} \left|(\xi_{k_{2i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{2i}}^{(m)}) - (\xi_{k_{2i-1}}^{(n)} - \xi_{k_{2i}}^{(n)})\right|^2 < \delta^2 \\
&\Longrightarrow \left|(\xi_{k_{2i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{2i}}^{(m)}) - (\xi_{k_{2i-1}}^{(n)} - \xi_{k_{2i}}^{(n)})\right|^2 < \delta^2, \quad \forall\ i = 1, \ldots, r \\
&\Longrightarrow \left|(\xi_{k_{2i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{2i}}^{(m)}) - (\xi_{k_{2i-1}}^{(n)} - \xi_{k_{2i}}^{(n)})\right| < \delta, \quad \forall\ m, n > N.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si fijamos un $i$ tenemos que $\{\xi_{k_{2i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{2i}}^{(m)}\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, luego $\{\xi_{k_{2i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{2i}}^{(m)}\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$ converge a $\gamma_{k_{2i-1}} - \gamma_{k_{2i}}$, sea $x = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$, probaremos que $x \in J$.

$$\|x\|_J = \sup_{r \in \mathbb{Z}^+} \left\{ \left( \sum_{i=1}^{r} \left|(\xi_{k_{4i-3}}^{(m)} - \xi_{k_{4i-2}}^{(m)}) - (\xi_{k_{4i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{4i}}^{(m)})\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Como $\{\xi_{k_{2i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{2i}}^{(m)}\}_{m\in\mathbb{Z}^+}$ converge a $\gamma_{k_{2i-1}} - \gamma_{k_{2i}}$, cuando $m \longrightarrow \infty$, tenemos

$$\|x\|_J = \sup_{r\in\mathbb{Z}^+}\left\{\left(\sum_{i=1}^{r}\left|\lim_{m\longrightarrow\infty}(\xi_{k_{4i-3}}^{(m)} - \xi_{k_{4i-2}}^{(m)}) - \lim_{m\longrightarrow\infty}(\xi_{k_{4i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{4i}}^{(m)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Por continuidad y propiedad de límite se tiene que,

$$\|x\|_J = \lim_{m\longrightarrow\infty}\sup_{r\in\mathbb{Z}^+}\left\{\left(\sum_{i=1}^{r}\left|(\xi_{k_{4i-3}}^{(m)} - \xi_{k_{4i-2}}^{(m)}) - (\xi_{k_{4i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{4i}}^{(m)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Aplicando la Ecuación (3.46), tenemos

$$\begin{aligned}
&\|x\|_J = \lim_{m\longrightarrow\infty}\sup_{r\in\mathbb{Z}^+}\left\{\left(\sum_{i=1}^{r}\left|(\xi_{k_{4i-3}}^{(m)} - \xi_{k_{4i-2}}^{(m)}) - (\xi_{k_{4i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{4i}}^{(m)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\
\Longrightarrow &\|x\|_J \leq \lim_{m\longrightarrow\infty}\left[\sup_{r\in\mathbb{Z}^+}\left\{\left(\sum_{i=1}^{r}\left|(\xi_{k_{2i-1}}^{(m)} - \xi_{k_{2i}}^{(m)}) - (\xi_{k_{2i-1}}^{(n)} - \xi_{k_{2i}}^{(n)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right]\\
\Longrightarrow &\|x\|_J \leq \lim_{m\longrightarrow\infty}\max_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{r}\delta = \delta < \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto, $x \in J$. Ahora demostraremos que, $\{x_n\} \longrightarrow x$, es decir $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n - x\|_J = 0$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n - x\|_J = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sup_{r\in\mathbb{Z}^+}\left\{\left(\sum_{i=1}^{r}\left|(\xi_{k_{2i-1}}^{(n)} - \gamma_{k_{2i-1}}) - (\xi_{k_{2i}}^{(n)} - \gamma_{k_{2i}})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\
\Longrightarrow &\lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n - x\|_J = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sup_{r\in\mathbb{Z}^+}\left\{\left(\sum_{i=1}^{r}\left|(\xi_{k_{2i-1}}^{(n)} - \xi_{k_{2i}}^{(n)}) - (\gamma_{k_{2i-1}} - \gamma_{k_{2i}})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\
\Longrightarrow &\lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n - x\|_J = \sup_{r\in\mathbb{Z}^+}\left\{\left(\sum_{i=1}^{r}\left|\lim_{n\longrightarrow\infty}(\xi_{k_{2i-1}}^{(n)} - \xi_{k_{2i}}^{(n)}) - \lim_{n\longrightarrow\infty}(\gamma_{k_{2i-1}} - \gamma_{k_{2i}})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\
\Longrightarrow &\lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n - x\|_J = \sup_{r\in\mathbb{Z}^+}\left\{\left(\sum_{i=1}^{r}\left|(\gamma_{k_{2i-1}} - \gamma_{k_{2i}}) - (\gamma_{k_{2i-1}} - \gamma_{k_{2i}})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\
\Longrightarrow &\lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n - x\|_J = 0.
\end{aligned}$$

Así, $x_n \longrightarrow x$, por Definición 1.1.7 $J$ es completo. Y como es un espacio normado completo por Definición 1.1.38 es un espacio de Banach. ■

**Teorema 3.4.3.** *La sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $e_n = \left\{0, 0, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right\}$, es una base monótona y reductora en $J$.*

**Demostración:**

Primero probemos que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base monótona. Según la definición de la norma de $J$, tenemos que $\|e_n\| = 1$ para $n = 1, 2, ...$ y cualquier suma de las que se usan para poder definir $\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\|$ también se usan para poder definir de $\left\|\sum_{i=1}^{m+1} a_i e_i\right\|$, de donde

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m+1} a_i e_i\right\|$$

y por lo tanto $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base monótona. Ahora probemos que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es reductora. Supongamos ahora que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es reductora. Entonces existe $f^* \in X^*$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f^*\|_n \neq 0,$$

donde $\|f^*\|_n$ es la norma de $f^*|_{\overline{span\{e_i\}_{n=1}^{\infty}}}$, es decir de $f^*$ restringida al subespacio $\overline{span\{e_i\}_{n=1}^{\infty}}$. Por lo tanto, existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{n_k\}_{n=1}^{\infty}$ de naturales con $n_k < n_{k+1}$, para $k = 1, 2, \ldots$ tales que $\|f^*\|_{n_k} > \varepsilon$. Esto implica la existencia de una sucesión $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset J$ con $\|z_k\| = 1$, y definida de la siguiente manera,

$$z_k = \sum_{i=n_k}^{\infty} g_i^*(z_k) e_i,$$

tal que $f^*(z_k) > \varepsilon$, donde $\{g_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a $\{e_i\}_{n=1}^{\infty}$. Construiremos a partir de $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ de manera que $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{y_k}{k}$ converja en $J$ pero $f^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{y_k}{k}\right)$ no converja y esto nos proporcionará la contradicción que buscamos. Sean $m_1 = n_1$. Como $\sum_{i=n_1}^{\infty} g^*(z_1) e_i \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} z_1$, existe $n_r > m_1$ tal que

$$f^*\left(\sum_{i=m_1}^{n_r - 1} g^*(z_1) e_i\right) > \varepsilon,$$

Si $m_2 = n_r$ y $y_1 = \dfrac{\sum_{i=m_1}^{m_2-1} g_i^*(z_1) e_i}{\left\|\sum_{i=m_1}^{m_2-1} g_i^*(z_1) e_i\right\|}$, donde $\left\|\sum_{i=m_1}^{m_2-1} g_i^*(z_1) e_i\right\| \leq 1$, $\|y_1\| = 1$ y $f^*(y_1) > \varepsilon$. Supongamos que hemos construido $m_1 < m_2 < \cdots < m_{k+1}$ y $y_1, \ldots, y_k$ tales que $\{m_i\}_{i=1}^{k+1} \subset \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ y

$$y_k = \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} g_i^*(y_k) e_i, \ \|y_k\| = 1 \text{ y } f^*(y_k) > \varepsilon.$$

Si $m_{k+1} = n_j$, como $\sum_{i=n_j}^{n} g_i^*(z_j) e_i \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} z_j$, existe $n_j' > n_j$ tal que,

$$f^*\left(\sum_{i=n_j}^{n_j'-1} g_i^*(z_j) e_i\right) > \varepsilon.$$

Sean $m_{k+2} = n'_j$ y $y_{k+1} = \dfrac{\sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} g_i^*(z_j)e_i}{\left\|\sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} g_i^*(z_j)e_i\right\|}$. Tenemos que

$$\|y_{k+1}\| = \left\| \frac{\sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} g_i^*(z_j)e_i}{\left\|\sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} g_i^*(z_j)e_i\right\|} \right\| = \frac{\left\|\sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} g_i^*(z_j)e_i\right\|}{\left\|\sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} g_i^*(z_j)e_i\right\|} = 1.$$

Con $f^*(y_{k+1}) > \varepsilon$. Veremos que $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{y_k}{k}$ converge en $J$. Al calcular una suma para aproximar la norma de este elemento, cada término es de uno de los tres tipos siguientes:

1. Puede ser de la forma
$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{k} - \frac{b}{k}\right)^2,$$
donde $a = g_j^*(y_k)$ y $b = g_r^*(y_k)$ para alguna $k$, $j$ y $r$, en cuyo caso este sumando es uno de los sumandos que aproxima $\dfrac{\|y_k\|^2}{k^2}$.

2. Puede ser del tipo
$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{k} - \frac{b}{k+m}\right)^2,$$
donde $a = g_j^*(y_k)$ para alguna $k$ y $j$, y $b = g_r^*(y_{k+m})$ para alguna $m$ y $r$. En este caso:
$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{k} - \frac{b}{k+m}\right)^2 \leq \frac{a^2}{k^2} + \frac{b^2}{(k+m)^2},$$
y puede haber a lo más un término de este estilo para cada $k$.

3. El último término puede ser de la forma:
$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{k} - \frac{b}{k-m}\right)^2 \leq \frac{a^2}{k^2} + \frac{b^2}{(k-m)^2},$$
donde $a = g_j^*(y_K)$ para alguna $k$ y $j$ y $b = g_r^*(y_{k-m})$ para alguna $m \geq 0$ y para alguna $r$.
De esto se deduce que,
$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k}\right\|^2 \leq 5\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|y_k\|^2}{k^2} = 5\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \infty.$$
Pero,
$$f^*\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{k}\right) > \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

de esta manera $f^*\left(\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{y_k}{k}\right)$ no converge. Con esto finalizamos la prueba de que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora, lo cual implica que $\{g_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ una base de $J^*$. ■

El siguiente teorema es el principal de esta sección pues es el que nos da la propiedad de que $J$ es isométrico a su doble dual, mas no "igual" a su doble dual pues tiene codimensión 1 en $J^{**}$. Veremos que para cada $k$, existe un espacio isométrico a su doble dual pero con codimensión $k$ en él; estos espacios se llaman **cuasireflexivos de orden k**. Aquí únicamente daremos la demostración de que $J$ es cuasirreflexivo de orden 1.

**Teorema 3.4.4.** *El espacio $J$ es isométrico a $J^{**}$ y es cuasireflexivo de orden 1, es decir el espacio $j(J)$ , donde $j$ es la inyección canónica de $J$ en $J^{**}$, tiene codimensión 1.*

**Demostración:**

Por el Teorema 3.4.3, tenemos que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora y monótona, y ademas por el Teorema 3.2.7, sabemos que $J^{**}$ es isométrico al espacio $\mathcal{X}$ de las sucesiones reales $x=(a_1,a_2,\dots)$ tales que,

$$\|x\| = \sup_m \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right\| < \infty,$$

mediante la identificación $T : J^{**} \longrightarrow \mathcal{X}$ dada por

$$T\Gamma = (\Gamma(g_1^*), \Gamma(g_2^*), \dots). \tag{3.47}$$

Veremos que, para toda $x \in \mathcal{X}$, existe $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n$. Si esto no es cierto, existen $x \in \mathcal{X}$, $x = (a_1, a_2, \dots)$, $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ de tal modo que $\left|a_{m_{n+1}} - a_{m_n}\right| > \varepsilon$ para $n = 1, 2, \dots$. Sea $M = \|x\|$ y sea $L \in \mathbb{N}$ tal que $L\varepsilon^2 > 2M^2$. Entonces

$$2M^2 \geq 2\left\|\sum_{i=1}^{L} a_i e_i\right\|^2 \geq \sum_{n=1}^{L}\left(a_{m_{n+1}} - a_{m_n}\right)^2 > L\varepsilon^2 > 2M^2, \tag{3.48}$$

la cual es una contradicción. Definamos $S : \mathcal{X} \longrightarrow J$ como sigue, si $x = (a_1, a_2, \dots) \in \mathcal{X}$ y $\lambda = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n$, $Sx = -\lambda e_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(a_{i-1} - \lambda)e_i$. Probemos que $S$ es inyectiva. Supongamos que $x_1 \neq x_2$. Sean $x_1 = (a_1, a_2, \dots)$ y $x_2 = (b_1, b_2, \dots)$, con $\lambda = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n$ y $\lambda' = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n$.

$$\begin{aligned}
x_1 \neq x_2 &\Longrightarrow -\lambda e_1 - (-\lambda' e_i) \neq 0 \Longrightarrow -\lambda e_1 - (-\lambda' e_1) + \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1}e_i - \sum_{i=2}^{\infty} b_{i-1}e_i \neq 0 \\
&\Longrightarrow -\lambda e_1 - (-\lambda' e_1) + \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1}e_i - \sum_{i=2}^{\infty} b_{i-1}e_i - \sum_{i=2}^{\infty} \lambda e_i + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda' e_i \neq 0 \\
&\Longrightarrow -\lambda e_1 - (-\lambda' e_1) + \sum_{i=2}^{\infty}(a_{i-1}e_i - \lambda e_i) - \sum_{i=2}^{\infty}(b_{i-1}e_i - \lambda' e_i) \neq 0 \\
&\Longrightarrow -\lambda e_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(a_{i-1}e_i - \lambda e_i) - \left(-\lambda' e_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(b_{i-1}e_i - \lambda' e_i)\right) \neq 0 \\
&\Longrightarrow -\lambda e_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(a_{i-1}e_i - \lambda e_i) \neq -\lambda' e_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(b_{i-1}e_i - \lambda' e_i) \Longrightarrow Sx_1 \neq Sx_2.
\end{aligned}$$

Por lo que $S$ es inyectiva. Ahora, demostremos que $S$ es una isometría. Sea $x = (a_1, a_2, \dots)$ y $\lambda = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n$, entonces $Sx = (-\lambda, a_1 - \lambda, a_2 - \lambda, \dots)$ con $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n - \lambda = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|Sx\| &= \sup\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(a_{i+1}-\lambda-a_i+\lambda)^2+(a_{m+1}-\lambda-a_1+\lambda)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
\Longrightarrow \|Sx\| &= \sup\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(a_{i+1}-a_i)^2+(a_{m+1}-a_1)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
\Longrightarrow \|Sx\| &= \sup\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(a_{i+1}-a_i)^2+(a_{m+1}-a_1)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
\Longrightarrow \|Sx\| &= \sup\left(\frac{1}{2}\left(2\left\|\sum_{i=1}^{m}a_ie_i\right\|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \text{; por la Ecuación (3.48)}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \|Sx\| = \sup\left(\left\|\sum_{i=1}^{m}a_ie_i\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_m\left\|\sum_{i=1}^{m}a_ie_i\right\| = \|x\|.
$$

Por tanto, $S$ es una isometría. Ahora, probemos que es sobreyectiva. Sea $y \in J$.

$$
y \in J \Longrightarrow y = (j_1, j_2, \dots);\ \text{con } \lim_{n\to\infty} j_n = 0.
$$

Luego, sin pérdida de generalidad hagamos

$$
\begin{aligned}
j_1 &= -\lambda\\
j_2 - j_1 &= a_1\\
j_3 - j_1 &= a_2\\
&\vdots\\
j_i - j_1 &= a_{i-1}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&j_1 = -\lambda\\
&j_2 = a_1 + j_1 = a_1 - \lambda\\
&j_3 = a_2 + j_1 = a_1 - \lambda\\
&\ \vdots\\
&j_i = a_{i-1} + j_1 = a_1 - \lambda\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

De ahí tenemos que $y = (j_1, j_2, \dots) = (-\lambda, a_1-\lambda, a_2-\lambda, \dots, a_i-\lambda, \dots)$. Ahora consideremos la sucesión $x = (a_1, a_2, \dots)$. Observemos que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} j_n = 0$, entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(a_n - \lambda) = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n - \lambda = 0,$$

de esto tenemos que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \lambda$ y además como $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base, podemos reescribir $y$ de la siguiente manera,

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} j_i e_i = j_1 e_1 + \sum_{i=2}^{\infty} j_i e_i = -\lambda e_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(a_i - \lambda)e_i = Sx.$$

Por tanto, $S$ es sobreyectiva. Consecuentemente, la siguiente composición

$$T^{-1} \circ S^{-1} : J \longrightarrow J^{**}, \tag{3.49}$$

es un isomorfismo isométrico. Procedemos ahora a la prueba de que $j(J)$ tiene codimensión 1 en $J^{**}$. Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ pertenece a $J$ y si definimos $U : J \longrightarrow \mathcal{X}$ mediante, $Ux = (a_1, a_2, \dots)$, $U$ está bien definida dado que $\sup \|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\| \leq \|x\| < \infty$. Además $T^{-1}U = j$. En efecto, si $x^{**} = T^{-1}(a_1, a_2, \dots)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(g_n^*) = a_n$. Como $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora, $\{g_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es base $J^*$ y si tenemos que $f^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n^* \in J^*$ con $b_n = f^*(e_n)$ y

$$\left(T^{-1}Ux\right)(f^*) = \Gamma(f^*) = \Gamma\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n^*\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Gamma(g_n^*) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n = f^*(x) = j(x)(f^*).$$

Como $x = (a_1, a_2, \dots) \in \mathcal{X}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$ y además $\|x\| = \sup_m \|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\| < \infty$, entonces por Definición 3.4.1, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ pertenece a $J$, es decir $x = Ux$.
Sea $\Gamma \in \mathcal{X}^{**}$ con $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \Gamma(g^*) = \lambda$. Podemos escribir

$$\Gamma = (\Gamma - \lambda\xi) + \lambda\xi$$

donde $\xi$ es el funcional dado por $\xi(g^*) = 1$ para $n = 1, 2, \dots$ Por lo anterior, $T(\Gamma - \lambda\xi) = Ux$ para alguna $x \in J$ y por tanto

$$\Gamma - \lambda\xi = j(x).$$

Por otra parte, si

$$0 = \varrho + \mu\xi,$$

donde $\varrho = j(x)$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in J$, entonces

$$0 = ST\varrho + \mu ST\xi = \mu S\left(T\xi\right) + S\left(T\varrho\right)) = \mu S\left(\xi(g_1^*), \xi(g_2^*), \dots\right) + S\left(\varrho(g_1^*), \varrho(g_2^*), \dots\right)$$

$$\Longrightarrow 0 = \mu S\left(1, 1, \dots\right) + S\left(a_1, a_2, \dots\right) = \mu(-e_1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} e_n,$$

de aquí se deduce que $\mu = a_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots$ De todo esto concluimos que

$$J^{**} = j(J) \bigoplus span(\xi),$$

donde $span(\xi)$ es el espacio generado por el funcional $\xi$. ■

Los resultados anteriores nos ayudan a probar que la base canónica en $J$ no es incondicional.

**Lema 3.4.5.** *$J$ no contiene ni a $c_0$ ni a $\ell^1$ y por esto la base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es incondicional. Es más, $J$ no tiene ninguna base incondicional.*

**Demostración:**

Como $J$ es isomorfo a $J^{**}$ y además, tanto $J$ como $J^*$ tienen base de Schauder, esto implica que los tres espacios son separables. Pero ni $c_o^{**}$ ni $(\ell^1)^{**}$ son separables por lo tanto, $c_0$ y $(\ell^1)$ no pueden ser subespacios de $J$. Como $J$ no es reflexivo y no contiene ni a $c_o$ ni a $(\ell^1)$, por el Teorema 3.3.12, concluimos que ni $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ni ninguna otra base de $J$ pueden ser incondicionales. ■

# Bibliografía


[1] Teorema de completación (2.4-2), Kreyszig

[2] Teorema de Tychonoff (37.3), J James Munkres

[3] R. Holmes, “Geometric Functional Analysis and its Applications”, Springer-Verlag 1975.

[4] Teorema de Riesz, Kreyszig pág. 188

[5] Teorema de Goldstine, pág. 207, Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach / H. Fetter Nathansky, B. Gamboa de Buen.