UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

SECCIÓN DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADO:

OPERADORES HIPERCÍCLICOS Y EL CRITERIO DE HIPERCICLICIDAD

PRESENTADO POR:

SUSANA NOEMI RODRÍGUEZ GARCÍA

EMELY YESSENIA MORALES ALFARO

PARA OBTAR AL GRADO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICA

DOCENTE ASESOR:

LIC. JOSÉ FREDY VÁSQUEZ VÁSQUEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, NOVIEMBRE DE 2019

SAN MIGUEL **EL SALVADOR** **CENTROAMÉRICA**

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

MSC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

RECTOR

PHD. RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ

VICE - RECTOR ACADÉMICO

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA

VICE - RECTOR ADMINISTRATIVO

ING. FRANCISCO ALARCÓN

SECRETARIO GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

FISCAL GENERAL

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ

DECANO

LIC. OSCAR VILLALOBOS

VICE - DECANO

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA

SECRETARIO INTERINO

Índice general

Agradecimientos

Por Susana Noemi Rodríguez García.

Quiero agradecer primeramente a Dios, por no abandonarme a lo largo de estos años. Me ha dado la fortaleza necesaria para poder afrontar situaciones complicadas, con las cuales no creí poder seguir adelante; pero que me han ayudado a crecer como persona, y a ser quién soy ahora.

Agradezco a mis padres, Susana Argueta y José Rodríguez, por apoyarme y aconsejarme en todo momento que lo necesite. Por el sacrificio que juntos hicieron para poder verme cumplir una de las metas académicas más significativas de mi vida. También, debo agradecer a mis hermanos que siempre estuvieron presentes cuando los necesite.

Gracias al Licenciado José Fredy Vásquez, por estar dispuesto a ser docente asesor en este trabajo de grado, por todo el tiempo que dedico a este proyecto, por todos los consejos y correcciones que me dio para poder culminarlo con éxito.

Así también agradezco a los licenciados de matemática que me apoyaron y animaron en todo este proceso. Sus palabras de apoyo y consejos los tengo presentes hasta el momento.

Muchas gracias a mi compañera y amiga Emely Yessenia Morales Alfaro, porque a pesar de que fue difícil el proceso, se mantuvo conmigo hasta el final. Por la amistad y aprecio que me ha tenido a lo largo de estos ocho años, lo cual nos llevó a formar este equipo.

Para finalizar, quiero agradecer grandemente a algunos de mis compañeros y compañeras de la carrera, más que eso, amigos y amigas que me apoyaron a lo largo de estos años incluso en este trabajo de grado. Los buenos momentos y las dificultades que afrontamos juntos siempre los tendré presente, gracias por formar parte de este trayecto.

Por Emely Yessenia Morales Alfaro.

Primeramente, agradecer a Dios por guiarme a lo largo de toda mi vida, gracias por darme la fuerza en momentos de dificultad, para no decaer cuando todo parecía complicado e imposible.

Gracias a mis padres, Nery Morales y Telma Alfaro, por su dedicación y sacrificio en todos estos años, por confiar en este sueño, por sus consejos y apoyo en cada etapa de este proyecto.

Agradezco infinitamente a mi hermana, Delmy Morales Alfaro, por estar siempre conmigo apoyándome y aconsejándome a lo largo de mi carrera y en vida en general.

Gracias a mi Director de Tesis, Licenciado José Fredy Vásquez, por creer en este proyecto y en mí, por guiarme en cada etapa de esta tesis, gracias a sus consejos y correcciones hoy puedo culminar este trabajo.

Infinitas gracias a mi mejor amiga y compañera de tesis, Susana Noemi Rodríguez García, por siempre confiar en mí, por nunca abandonarme y brindarme su paciencia a lo largo de estos 8 años de amistad.

Gracias a todas las personas que estuvieron apoyándome a lo largo de mi carrera, licenciados, compañeros y amigos.

Resumen

El presente trabajo de grado fue desarrollado con la finalidad de dar a conocer un poco más sobre temas relevantes del análisis funcional, y de provecho para el lector.
El objetivo general es el desarrollar la teoría elemental de los operadores hipercíclicos y el criterio de hipercíclicidad con el fin de aportar otros conocimientos a los estudiantes de Licenciatura en Matemática en el área de análisis funcional. Esto se llevará a cabo desde el momento en el cual ellos tengan acceso al material, que será entregado a la universidad. Así también se enuncian y demuestran de manera clara los principales conceptos sobre los operadores hipercíclicos. Se muestran y explican algunos ejemplos de operadores hipercíclicos para facilitar la comprensión de la teoría.
Y se explica la importancia del criterio de hipercíclicidad, dado que es la principal herramienta para demostrar que un operador es hiperciclico.
En el primer capítulo presentamos los conceptos básicos y necesarios para la comprensión de lo que son operadores hipercíclicos, dado que es muy importante tener unas buenas bases para poder aprovechar todo lo impartido a lo largo del capítulo dos.
En el segundo capítulo, abordamos el tema de investigación en sí, dado que con conocimientos básicos la comprensión de dicho tema se vuelve un poco más accesible.

Introducción

El estudio de la dinámica de operadores lineales definidos en espacios de Banach o de Fréchet; es una rama moderna del análisis funcional que ha surgido a partir del trabajo de muchos autores. En los últimos años, el estudio de la hiperciclicidad de operadores ha tenido un desarrollo importante y actualmente se sigue investigando acerca de dicho tema, es por ello que no hay material bibliográfico en la biblioteca de la Universidad de El Salvador. Si bien en internet se encuentra información respecto a dicho tema, esta puede llegar a confundir dado que la mayoría de información se encuentra en un idioma diferente al español. Es debido a ello que el presente trabajo pretende ser de utilidad para el estudio de dicho tema.

Para dar una idea acerca del tema, podemos decir que este se centra en el comportamiento de las sucesivas iteraciones de un operador lineal. En otras palabras, se estudian sistemas dinámicos discretos asociados a operadores lineales.

Cuando un operador admite órbitas densas se dice hipercíclicos. La palabra hipercíclico tiene su origen en la noción de "Operador cíclico" ligado al problema del subespacio invariante.

En este caso, los operadores hipercíclicos están ligados al problema de existencia de subconjuntos invariantes: ¿Dado un operador lineal $T : X \longrightarrow X$, es posible encontrar un subconjunto cerrado no trivial F tal que $T(F) \subset F$?

Tomamos a bien desarrollar dicha investigación dado que no se desarrollan estudios de dicho tema durante las materias impartidas en la carrera de Licenciatura en matemática, por ello nuestro interés de compartir los conocimientos obtenidos con los demás estudiantes de la carrera.

El presente trabajo está enfocado principalmente como su nombre lo dice, en operadores hipercíclicos y en el criterio de hiperciclicidad, pero para ello empezaremos abordando con una pequeña reseña histórica para mayor comprensión del surgimiento de dicho tema en la matemática moderna. Así como también conceptos, teoremas y propiedades que se necesitarán conocer para la comprensión de este.

Los primeros ejemplos de operadores hipercíclicos fueron obtenidos por G. B. Birkhoff y G. R. MacLane vectores y operadores hipercíclicos aparecen por primera vez en los trabajos de Birkhoff, MacLane y Rolewicz.

En 1929 G. B. Birkhoff estableció un interesante resultado sobre las órbitas de funciones por operadores traslación en el conjunto de las funciones enteras. Concretamente si consideramos el espacio de Fréchet $H(C)$ dotado de la topología de convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos del plano complejo, y el operador traslación $T_a : H(C) \longrightarrow H(C)$ definido como

$$T_a f(z) = f(z + a) \text{ con } f \in H(C),\ z \in C,\ a \in C$$

Birkhoff demostró que si $a \neq 0$, entonces existe una función $f \in H(C)$ cuya órbita $\{T^n\}_{n=0}^{\infty}$ es densa en $H(C)$. Este resultado se puede interpretar de varias maneras, por un lado nos asegura la existencia de una función "universal"que, en todo conjunto compacto, sus traslaciones se aproximan a cualquier función entera tanto como se desee; par otro lado, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos obtenemos que el operador traslación es transitivo.

En 1952 G. R. MacLane demuestra que el operador derivada $D : H(C) \longrightarrow H(C)$ también es hipercíclico. El estudio de los operadores hipercíclicos en espacios de Hilbert apareció por primera vez en 1969 de la mano de S. Rolewicz, quien prueba que si σ es el operador "backward shift" en l^2 definido como $\sigma(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots)$, entonces λ_σ es hipercíclico para todo número complejo λ de módulo mayor que la unidad.

En 1982 C. Kitai obtuvo en su tesis doctoral, una condición suficiente de hiperciclicidad, conocida como criterio de hiperciclicidad, probablemente el inicio de su estudio de manera sistemática. Lamentablemente este resultado nunca fue publicado y en 1987 R. M. Gethner y J. H. Shapiro demuestran el mismo criterio. Además, utilizando este criterio deducen los resultados citados de Birkhoff, Maclane y Rolewicz de forma casi automática, J. P. Bes mejora el resultado de Gethner, Shapiro y Kitai al imponer unas condiciones más débiles al criterio de hiperciclicidad.

Es preciso mencionar uno de los más recientes e importantes resultados de hiperciclicidad, obtenido independientemente por L. Bernal y S. I Ansari , el cual asegura que en todo espacio de Banach separable de dimensión infinita se puede definir un operador hipercíclico.

Justificación

La matemática moderna se divide en diversas áreas que se organizan según sus usos, dichas áreas se pueden auxiliar una de otra para llevar a cabo estudios con la finalidad de obtener resultados enfocados en una de ellas. En está ocasión queremos implementar el uso de sistemas dinámicos y topología para estudiar un fenómeno que se considera una rama moderna del análisis funcional dado que sus inicios se remontan a finales del siglo XX y su desarrollo se sigue estudiando en la actualidad. Estamos hablando de operadores hipercíclicos y el criterio de hiperciclicidad. Diremos que un operador lineal es hipercíclico si admite órbitas densas. El criterio de hiperciclicidad es la principal herramienta para probar que un operador es hipercíclico, dado que la mayoría de operadores hipercíclicos satisfacen este criterio. La importancia de los operadores hipercíclicos está históricamente motivada por el estudio de los espacios invariantes, así como por el problema del subespacio invariante. ¿Es cierto que en un espacio de Banach todo operador acotado admite un subespacio propio cerrado e invariante?. Para nuestro estudio los operadores hipercíclicos están ligados al problema de existencia de subconjuntos invariantes. ¿Dado un operador lineal $T : X \longrightarrow X$ es posible encontrar un subconjunto cerrado no trivial F tal que $T(F) \subset F$? Donde X es un espacio de Fréchet, separable e infinito y el operador $T : X \longrightarrow X$ es lineal y continuo.

Objetivos

Objetivo General:

- Desarrollar la teoría elemental de los operadores hipercíclicos y el criterio de hiperciclicidad con el fin de aportar otros conocimientos a los estudiantes de Licenciatura en Matemática en el área de análisis funcional.

Objetivos Específicos:

- Enunciar y demostrar de manera clara los principales conceptos sobre los operadores hipercíclicos.

- Mostrar y explicar algunos ejemplos de operadores hipercíclicos para facilitar la comprensión de la teoría.

- Explicar la importancia del criterio de hiperciclicidad.

Capítulo 1

Base teórica.

1.1. Teoría básica de análisis funcional y topología.

A lo largo de esta sección recogeremos algunos resultados clásicos de análisis funcional y topología, con el propósito de incluir todos los conceptos necesarios para la comprensión de las secciones posteriores.

Definición 1.1. 1 *Un espacio métrico es un par* (X, d)*, donde* X *es un conjunto y* d *es una métrica sobre* X *(o función distancia sobre* X*), es decir, una función definida sobre* $X \times X$ *tal que, para todo* $x, y, z \in X$ *se tiene:*

- $d(x, y) \geq 0$.
- $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Un subespacio $(Y, \tilde{d})$ de (X, d) se obtiene tomando un subconjunto $Y \subset X$ y restringiendo d a $Y \times Y$, así la métrica en Y es la restricción $\tilde{d} = d|_{Y \times Y}$, $\tilde{d}$ es llamada métrica inducida sobre Y por d.

A continuación, presentamos unos ejemplos de espacios métricos con los cuales estamos familiarizados.

Ejemplo 1.1. 2 *La recta Real $\mathbb{R}$, este es el conjunto de todos los números reales, tomados con la métrica usual definida por:*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

■

Ejemplo 1.1. 3 *El espacio de sucesiones l^∞. Como conjunto X tomemos el conjunto de todas las sucesiones acotadas de números complejos, es decir, todo elemento de X es una sucesión compleja $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ abreviando $x = (\xi_i)$ tal que para toda $i \in \mathbb{N}$ se tiene $|\xi_i| \leq c_x$ donde c_x es un número real el cual puede depender de x, pero no depende de i. Elegimos la métrica definida por*

$$d(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i|$$

Donde $y = (\eta_i) \in X$. ■

Ejemplo 1.1. 4 *El espacio de funciones $C[a, b]$. Como conjunto X tomamos el conjunto de todas las funciones de valor real que dependen de una variable real t y son definidas y continuas en un intervalo cerrado $J = [a, b]$. Eligiendo la métrica definida por*

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

■

Ejemplo 1.1. 5 *El espacio l^p, el espacio de las sucesiones de Hilbert l^p. Sea $p \geq 1$ un número real fijo. Por definición cada elemento en el espacio l^p es una sucesión $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, ...)$ de números tales que $|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + ...$ converge, así*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$$

y la métrica esta definida por

$$d(x, y) = (\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p)^{\frac{1}{p}}$$

donde $y = (\eta_j)$ y $\sum_{j \in \mathbb{N}} |\eta_j|^p < \infty$.

En el caso de $p = 2$ tenemos el famoso espacio de sucesiones de Hilbert l^2 con métrica definida por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^2}.$$

■

Sea X un espacio métrico. Dado un punto $x_0 \in X$ y un número real $r > 0$, se pueden encontrar tres tipos de conjuntos:

- $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_o) < r\}$ Bola abierta.
- $\tilde{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ Bola cerrada.
- $S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$ Esfera.

En los tres casos, x_0 es llamado centro y r el radio.

Un subconjunto M de un espacio métrico X se dice que es abierto si contiene una bola sobre cada uno de sus puntos. Por otra parte, decimos que un subconjunto K de X es cerrado si su complemento en X es abierto, es decir, si $K^C = X - K$ es abierto.

Definición 1.1. 6 *Una topología sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

- *$\emptyset$ y X están en τ.*
- *La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ.*
- *La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ.*

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama espacio topológico.

Sea (X, τ) un espacio métrico. Dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$B_X(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

es la ε-bola abierta en X, centrada en x.

Un conjunto $N \subset X$ es llamado una ε-vecindad de $x \in X$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que, $B(x, \varepsilon) \subset N$.

Si (X, d) es un espacio métrico, entonces la colección de conjuntos de la forma:

$$B_d = \{B_X(x, \varepsilon) : x \in X \varepsilon > 0\}$$

es una base para una topología τ_d en X. Por lo tanto, todo espacio métrico puede verse como un espacio topológico, en donde los abiertos son las uniones de las bolas abiertas.

Definición 1.1. 7 *Sea $X = (X, d)$ e $Y = (Y, \tilde{d})$ espacios métricos. Un mapeo $T : X \to Y$ se dice que es continuo en un punto $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, $\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$ para todo x que satisfaga $d(x, x_0) < \delta$.*

Se dice que T es continua si es continua en todo punto de X.

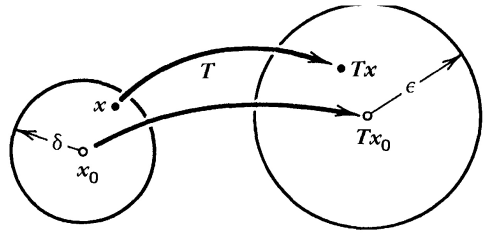

Figura 1.1: Forma ilustrativa de un mapeo continuo.

Teorema 1.1. 8 *Un mapeo T de un espacio métrico X sobre un espacio métrico Y es continuo si y sólo si la imagen inversa de cualquier subconjunto abierto de Y es un subconjunto abierto de X.*

Demostración.

Sea $T : X \to Y$, con (X, d), $(Y, \tilde{d})$ espacios métricos.

"$\Longrightarrow$"

Sea $S \subset Y$ abierto.

Definamos a S_0 como la imagen inversa de S, es decir, $T^{-1}S = S_0$.

Supongamos que $S_0 \neq \emptyset$, ya que si $S_0 = \emptyset$, S_0 es abierto.

Tomemos $x_0 \in S_0$ arbitrario.

Sea $y_0 = Tx_0$, como S es abierto, contiene una ε-vecindad N de y_0

$$y_0 \in N \subset S$$

$$Tx_0 \in N \subset S$$

$$T^{-1}Tx_0 \in T^{-1}N \subset T^{-1}S = S_0$$

$$x_0 \in T^{-1}N \subset S_0$$

llamemos $T^{-1}N = N_0$

$$x_0 \in N_0 \subset S_0$$

Por lo que S_0 es abierto, para x_0 arbitrario.

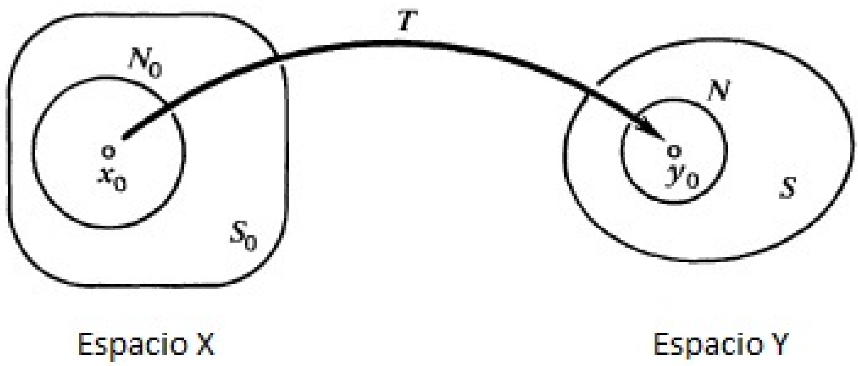

Figura 1.2: Ilustración de la primera parte de la prueba

" $\Longleftarrow$ "

Sea $x_0 \in X$ arbitrario.

Sea N una ε-vecindad de Tx_0 es decir, existe una bola $B(Tx, \varepsilon)$ tal que,

$$Tx_0 \in B(Tx, \varepsilon) \subset N$$

lo que implica que,

$$\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

Sea $N_0 \subset X$, definido como, $N_0 = T^{-1}(N)$, por hipótesis, N_0 es abierto.

Teníamos que,

$$Tx_0 \in N$$

$$x_0 \in T^{-1}Tx_0 \subset T^{-1}(N) = N_0$$

como N_0 es abierto, contiene una δ-vecindad de x_0, es decir, existe una bola $B(x, \delta)$ tal que,

$$x_0 \in B(x, \delta) \subset N_0$$

lo que implica que,

$$d(x, x_0) < \delta$$

por lo que, se satisface la definición de continuidad, para x_0 arbitrario. ■

Sea M un subconjunto de un espacio métrico X. Entonces, un punto x_0 de X es llamado punto de acumulación de M si toda vecindad de x_0 contiene al menos un punto $y \in M$ distinto de x_0, cabe aclarar que el punto x_0 puede o no pertenecer a M. El conjunto que contiene todos los puntos de M y sus puntos de acumulación es llamado clausura de M y lo denotamos por $\overline{M}$, y este es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a M.

Con lo anterior, podemos formular un concepto que será fundamental en el siguiente capítulo.

Definición 1.1. 9 *Un subconjunto M de un espacio métrico X se dice que es denso en X si*

$$\overline{M} = X.$$

Por lo tanto, si M es denso en X, entonces, toda bola en X, no importa que tan pequeña sea, contendrá puntos de M.

Lema 1.1. 10 *Un subconjunto D de un espacio métrico X es denso si y sólo si para cada conjunto abierto $U \neq \emptyset$ tenemos $U \cap D \neq \emptyset$.*

Demostración.

Sea X un espacio métrico y $D \subset X$.

“ $\Longleftarrow$ ”

Si D no es denso en X, entonces $\overline{D} \subsetneq X$, y por lo tanto, tomemos $U = X - \overline{D}$, claramente U es abierto y distinto de vacío. También vemos que $U \cap \overline{D} = \emptyset$ y como $D \subset \overline{D}$, es evidente $D \cap U = \emptyset$.

“ $\Longrightarrow$ ”

Si existe un subconjunto abierto no vacío U tal que, $U \cap D = \emptyset$, entonces, $D \subseteq X - U \subsetneq X$. Vemos que $X - U$ es cerrado, se sigue que $\overline{D} \subseteq X - U \subsetneq X$. Esto nos dice que D no es denso en X. ■

Definición 1.1. 11 *Decimos que un espacio X es separable si tiene un subconjunto denso y numerable.*

Una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X, d) es convergente si existe un $x \in X$ tal que,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

x es llamado el límite de (x_n).

Otra forma de definir una sucesión convergente es la siguiente:

Sea (x_n) una sucesión en un espacio métrico X, si (x_n) converge a x, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que todo x_n con $n > N$ se encuentra en una ε-vecindad de x, es decir, $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n > N$.

Definición 1.1. 12 *Una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X, d) se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

para todo $m, n > N$.

Decimos que un espacio X es completo si toda sucesión de Cauchy converge en X.

Ejemplo 1.1. 13 *La recta real es completa.*

Demostración.

En el ejemplo 1.1.2 podemos ver que sobre la recta real podemos definir una métrica,

$$d(x, y) = |x - y|$$

Sabemos por el criterio de convergencia de Cauchy, una sucesión de números reales es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ es completo. ■

Ejemplo 1.1. 14 *Los números complejos son completos.*

Demostración.

Sobre los números complejos, podemos definir una métrica dada por:

$$d(x, y) = |x - y|$$

con $x, y \in \mathbb{C}$.

Sea (z_n) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Podemos escribir a (z_n) como $(z_n) = (x_n) + i(y_n)$, donde (x_n) y (y_n) son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Pero por el ejemplo anterior, $\mathbb{R}$ es completo, por lo que, $x_n \to x$ y $y_n \to y$.

Por propiedades de límite tenemos que,

$$z_n = x_n + iy_n \to x + iy = z$$

Por tanto, $\mathbb{C}$ es completo. ■

Ejemplo 1.1. 15 *El espacio ℓ^p es completo.*

Demostración.

Por definición cada elemento en el espacio ℓ^p es una sucesión $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, ...)$ de números tales que $|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + ...$ converge, así

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$$

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en el espacio ℓ^p, con, $x_m = (x_i^m)$, donde m representa el elemento m-ésimo de sucesiones de x_n. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que, para todo $m, n > N$ se tiene:

$$\|x^n - x^m\| < \varepsilon$$

Esto implica que, cada una de las sucesiones (x_k^n) es de Cauchy en $\mathbb{K}$, puesto que,

$$|x_k^n - x_k^m| \leq \|x^n - x^m\| < \varepsilon$$

luego, convergen al ser $\mathbb{K}$ completo.

Sea $x = (x_i), i \in \mathbb{N}$, el vector de los límites. Debemos probar que dicho punto está en ℓ^p y que es el límite de la sucesión.

Al ser (x^n) de Cauchy, para todo ε por ejemplo, $\varepsilon = 1$, existe n_0 tal que, para todo $n, m \geq n_0$ y para todo N se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i^n - x_i^m|^p \leq \|x^n - x^m\|^p < 1$$

En la suma finita podemos hacer $n \to \infty$ y se tiene una acotación para todo $m \geq n_0$ y para todo N:

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - x_i^m|^p \leq 1$$

y por lo tanto, es cierta cuando $N \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^m|^p < 1$$

de esta forma, hemos demostrado que $x - x^m$ está en l^p cuando $m \geq n_0$. Pero $x^m \in \ell^p$, luego $x \in \ell^p$, por ser espacio vectorial.

Vamos a probar ahora que es el límite de la sucesión. Hacemos lo mismo que antes con ε arbitrario:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^m|^p < \varepsilon$$

para $m \geq n_0$, luego,

$$\|x - x^m\|^p < \varepsilon$$

La demostración es valida para cualquier p. Por lo tanto, ℓ^p es completo. ■

Ejemplo 1.1. 16 *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.*

Demostración.

Sea (x_n) una sucesión convergente en un espacio métrico (X, d).

Por definición sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n > N$.

Luego por desigualdad triangular para $n, m > N$:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m)$$

Por lo que:

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto, (x_n) es de Cauchy. ■

Teorema 1.1. 17 *(Clausura). Sea M un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X, d) y $\overline{M}$ su clausura, entonces, $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión (x_n) en M tal que, $x_n \to x$.*

Demostración.

Sea X un espacio métrico y $M \subset X$, no vacío.

" $\Longrightarrow$ "

Sea $x \in \overline{M}$, por definición, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$.

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $B(x, \frac{1}{n}) \cap M \neq \emptyset$.

Sea $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap M$.

Tenemos que $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$, es decir, $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Aplicando límite tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) \to 0$, además, $(x_n) \subset M$, ya que $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap M$.

Por tanto, $x_n \to x$.

" $\Longleftarrow$ "

Por hipótesis, existe una sucesión $(x_n) \subset M$ tal que, $x_n \to x$, entonces, cualquier ε-vecindad centrada en x contiene algunos elementos x_n de la sucesión.

<u>Caso 1:</u> Si $x \in M$.

Sabemos que $M \subset \overline{M}$, por lo que, $x \in \overline{M}$.

<u>Caso 2:</u> Si $x \notin M$.

Entonces, toda ε-vecindad centrada en x contiene algún punto de M distinto de x, puesto que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$, por lo que, x es un punto de acumulación de M y por lo tanto, $x \in \overline{M}$.

$\blacksquare$

Teorema 1.1. 18 *(Conjunto cerrado).Sea M un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X, d), entonces, M es cerrado si y sólo si para $x_n \in M$, $x_n \to x$ implica que, $x \in M$.*

Demostración.

Sea (X, d) un espacio métrico y $M \subset X$, no vacío.

" $\Longrightarrow$ "

Por hipótesis, M es cerrado, es decir $M = \overline{M}$.

Por el teorema anterior, se sigue que, para un $x_n \in (x_n) \subset M$ tal que, $x_n \to x$ implica que $x \in \overline{M} = M$.

Por tanto, $x \in M$.

" $\Longleftarrow$ "

Ahora bien, por hipótesis se tiene que, para $x_n \in M$, $x_n \to x$ implica que, $x \in M$. Probaremos que M es cerrado, es decir, $M = \overline{M}$.

Sabemos que $M \subset \overline{M}$. Resta probar que $\overline{M} \subset M$

Sea $x \in \overline{M}$, por teorema anterior, existe una sucesión (x_n) en M, es decir, $x_n \in (x_n) \subset M$ tal que, $x_n \to x$. Pero por hipótesis esto implica que, $x \in M$.

Por lo que, $\overline{M} \subset M$.

Por tanto, $M = \overline{M}$. ■

Teorema 1.1. 19 *(Subespacio completo). Un subespacio M de un espacio métrico completo X es completo si y sólo si es cerrado en X.*

Demostración.

Sea $M \subset X$, X completo.

“ $\Longrightarrow$ ”

Por hipótesis M es completo, probaremos que M es cerrado, es decir, $M = \overline{M}$.

Sabemos que $M \subset \overline{M}$. Resta probar que $\overline{M} \subset M$.

Sea $x \in \overline{M}$. Por teorema 1.1. 12, para todo $x \in X$ existe una sucesión (x_n) en M, tal que, $x_n \to x$. Por teorema 1.1. 13, toda sucesión convergente es de Cauchy, por lo que, (x_n) es de Cauchy. Pero M es completo, por definición, toda sucesión de Cauchy converge en M, es decir, $x \in M$ Por lo que, $\overline{M} \subset M$.

Por tanto, $\overline{M} = M$.

“ $\Longleftarrow$ ”

Por hipótesis M es cerrado.

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en M, como M es subespacio de X, también, (x_n) es una sucesión de Cauchy en X y como X es completo, entonces, dicha sucesión converge. Supongamos que su límite es x.

Entonces, (x_n) es una sucesión en M tal que, $x_n \to x$, por teorema 1.1. 12, se tiene, $x \in \overline{M}$. Como M es cerrado, $x \in M = \overline{M}$, por teorema anterior $x_n \to x$ con $x \in M$, es decir, (x_n) converge en M.

Como (x_n) es una sucesión de Cauchy arbitraria, se concluye que M es completo.

■

Teorema 1.1. 20 *(Mapeo continuo).Un mapeo $T : X \to Y$ de un espacio métrico (X, d) sobre un espacio métrico $(Y, \tilde{d})$ es continuo en un punto $x_0 \in X$ si y sólo si $x_n \to x_0$ implica que, $Tx_n \to Tx_0$.*

Demostración.

" $\Longrightarrow$ "

Por hipótesis $T : X \to Y$ es continuo en un punto x_0, por definición de mapeo continuo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $d(x, x_0) < \delta$ implica que, $\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$.

Sea (x_n) una sucesión tal que, $x_n \to x_0$. Entonces, por definición de convergencia, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$ se tiene $d(x_n, x_0) < \delta$.

Entonces, por definición de mapeo continuo, esto implica que, para todo $n > N$,

$$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$$

lo que por definición de convergencia se tiene $Tx_n \to Tx_0$

" $\Longleftarrow$ "

Por hipótesis tenemos que $x_n \to x_0$ implica que, $Tx_n \to Tx_0$.

Probaremos que T es continua en x_0.

Supongamos que T no es continua en x_0.

Entonces, existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe un $x \neq x_0$ que satisface que,

$$d(x, x_0) < \delta$$

pero

$$\tilde{d}(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon$$

Como es para todo $\delta > 0$, tomemos $\delta = \frac{1}{n}$, existe un x_n que satisface $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ pero $\tilde{d}(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon$, por definición de convergencia, tenemos que, $x_n \to x_0$ pero (Tx_n) no converge a Tx_0. Lo cual contradice la hipótesis.

Por tanto, T es continua. $\blacksquare$

Definición 1.1. 21 *(Compacidad). Se dice que un espacio métrico X es compacto si cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

Se dice que un subconjunto M de X es compacto si M es compacto considerado como un subespacio de X, es decir, si cada sucesión en M tiene una subsucesión convergente cuyo límite es un elemento de M.

Teorema 1.1. 22 *(Mapeo continuo). Sean X e Y espacios métricos y $T : X \to Y$ un mapeo continuo. Entonces, la imagen de un subconjunto compacto M de X bajo T es compacto.*

Demostración.

Sean X, Y espacios métricos y $T : X \to Y$ un mapeo continuo.

Sea $M \subset X$ compacto.

Sea cada (y_n) una sucesión en la imagen $T(M) \subset Y$.

Ya que $y_n \in T(M)$, tenemos que, $y_n = T(x_n)$, para algún $x_n \in M$.

Como M es compacto, por definición de compacidad (x_n) contiene una subsucesión (x_{n_k}) que converge en M.

$T(x_{n_k})$ es una subsucesión de (y_n) que converge en $T(M)$ esto por teorema 1.1. 16 puesto que T es continua. Por definición de compacidad, como cada sucesión (y_n) en la imagen $T(M) \subset Y$ contiene una subsucesión que converge en $T(M)$ entonces, $T(M)$ es compacto. ∎

Teorema 1.1. 23 *(Completación de espacios métricos.). Para todo espacio métrico $X = (X, d)$ existe un espacio métrico completo $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$ el cual tiene un subespacio W que es isométrico con X y denso en $\hat{X}$. Este espacio $\hat{X}$ es único salvo isometrías, es decir, si $\tilde{X}$ es un espacio métrico completo que tiene un subespacio denso $\tilde{W}$ isométrico con X, entonces $\tilde{X}$ y $\hat{X}$ son isométricos.*

Podemos encontrar una prueba detallada de este teorema en el libro de Introductory functional analysis with applications de Erwin Kreyszig, página 41-45.

Definición 1.1. 24 *Un espacio vectorial o espacio lineal sobre un campo $\mathbb{K}$ es un conjunto no vacío X de elementos llamados vectores dotado de dos operaciones algebraicas.*

- *La adicción de vectores $+ : X \times X \to X$ asocia con cada par (x, y) de vectores un vector $x+y$, llamado suma, la adición de vectores es conmutativa y asociativa, es decir, para todos los vectores $x, y, z \in X$ se tiene:*

  $$x + y = y + x$$

  $$x + (y + z) = (x + y) + z$$

  Además, existe un vector 0, llamado vector cero, tal que, para cada $x \in X$ se cumple:

  $$x + 0 = x$$

  Y para todo vector x existe un vector $-x$, tal que, para todos vectores tenemos:

  $$x + (-x) = 0$$

- *La multiplicación por escalar, $* : \mathbb{K} \times X \to X$ asocia con cada vector x y escalar un vector αx, de tal manera, que para todos los vectores $x, y, z \in X$ y escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tenemos:*

  $$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

  $$1x = x$$

Y las leyes distributivas:

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

Un subespacio de un espacio vectorial X es un subconjunto no vacío Y de X tal que, para todo $y_1, y_2 \in Y$ y todos los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se tiene $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$.

Por lo tanto, Y es en sí mismo un espacio vectorial, siendo las dos operaciones algebraicas inducidas desde X.

Definición 1.1. 25 *Una norma en un espacio vectorial real o complejo X es una función de valor real en X, tal que, para $x \in X$ se denota por $\|x\|$ y tiene las siguientes propiedades:*

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

donde $x, y \in X$ y α es algún escalar.

Un espacio normado X es un espacio vectorial con una norma definida, dicha norma define una métrica d en X la cual esta dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

donde $x, y \in X$.

Definición 1.1. 26 *(Espacio de Banach). Un espacio de Banach es un espacio normado completo bajo la métrica inducida por la norma.*

Ejemplo 1.1. 27 $\mathbb{C}$ *es un espacio de Banach.*

Demostración.

Probemos que $\mathbb{C}$ es un espacio normado, con la función definida por:

$$\|z\| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Para $z = a + bi$.

- $\|x\| \geq 0$

  Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

  Tenemos que:

  $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

  por lo que, $\|z\| \geq 0$.

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$

  Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

  Sabemos que: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

  $\|z\| = |z| = 0$

  $\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff a^2 + b^2 = 0$, para $a, b \in \mathbb{R}$

  Pero esto es posible si y sólo si $a = b = 0$

  Por lo que, $z = 0 + 0i$.

  Por tanto, $\|z\| = 0 \iff z = 0$.

- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

  Sea $z \in \mathbb{C}, z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$

  Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces, $\alpha z = \alpha a + \alpha bi$

  Por lo que tenemos:

$$|\alpha z| = \sqrt{(\alpha a)^2 + (\alpha b)^2} = \sqrt{\alpha^2(a^2 + b^2)} = |\alpha|\sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha||z|$$

  Por tanto, $\|\alpha z\| = |\alpha|\|z\|$.

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

  Sea $z, w \in \mathbb{C}, z = a+bi,\ \ w = c+di$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se tiene que, $z+w = (a+c)+(b+d)i$:

$$|z + w| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$$

  $\Rightarrow |z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)}$

  $= (z + w)(\bar{z} + \bar{w})$

  $= z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + w\bar{z}$

  $= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}$

  $= |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\bar{w})$

  $\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}|$, propiedad de los complejos.

  $\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\bar{w}|$, por desigualdad de Cauchy.

  $= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|$

  $= (|z| + |w|)^2$

  Por tanto: $\|z + w\| = |z + w| \leq |z| + |w| = \|z\|\|w\|$

Por tanto, $\mathbb{C}$ es un espacio normado, ahora bien, anteriormente en un ejemplo demostramos que $\mathbb{C}$ es completo, por lo que, $\mathbb{C}$ es un espacio de Banach. ■

Teorema 1.1. 28 *(Subespacio de un espacio de Banach). Un subespacio Y de un espacio X de Banach es completo si y sólo si el conjunto Y es cerrado en X.*

Demostración.

Sea X un espacio de Banach.

Por definición de espacio de Banach, X es un espacio normado completo bajo la métrica inducida por la norma, esto implica que, X es un espacio métrico completo.

Ahora bien, por teorema del subespacio completo, un subespacio Y de un espacio métrico completo X es completo si y sólo si Y es cerrado en X.

Por lo tanto, un subespacio Y es completo en un espacio de Banach X si y sólo si es cerrado en X.

$\blacksquare$

Retomando la definición de densidad, enunciaremos su equivalente en espacios normados.

Definición 1.1. 29 *(Densidad en espacios normados). Sea X un espacio normado. Un subconjunto D de X es denso en X si para todo punto $y \in X$ y todo real $\varepsilon > 0$, existe un punto $z \in D$ tal que, $\|y - z\| \leq \varepsilon$, diremos entonces, que D es denso en X, en el sentido de la norma.*

Definición 1.1. 30 *(Seminorma). Sea X un espacio vectorial. Llamamos seminorma sobre X a una aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ que verifica:*

- *Es homogénea, es decir, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$*
- *Es subaditiva, es decir, cumple la propiedad triangular. esto es, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in X$.*

Dado cualquier $x \in X$ es fácil ver que $p(0) = 0$, ya que,

$$p(0) = p(0.x) = 0.p(x) = 0$$

También, podemos verificar que, $p(x) \geq 0$, vemos que:

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = p(x) + |-1|p(x) = p(x) + p(x) = 2p(x)$$

En particular, toda norma es seminorma, pero al revés no necesariamente.

En el caso de los espacios vectoriales, en particular espacios normados, un mapeo es llamado un operador.

Definición 1.1. 31 *(Operador lineal). Un operador lineal T es un operador tal que:*

- *El dominio $\mathcal{D}(T)$ de T es un espacio vectorial y el rango $\mathcal{R}(T)$ se encuentra en un espacio vectorial sobre el mismo campo.*

- *Para todo $x, y \in \mathcal{D}(T)$ y escalar α se tiene:*

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

El espacio nulo de T es el conjunto de todas $x \in \mathcal{D}(T)$ tal que, $Tx = 0$ y se denota por $\mathcal{N}(T)$.

Ejemplo 1.1. 32 *(Operador identidad). El operador identidad $I : X \to X$ está definido por $Ix = x$, para todo $x \in X$.* ■

Ejemplo 1.1. 33 *(Operador cero). El operador cero $0 : X \to Y$ definido por $0x = 0$ para todo $x \in X$.* ■

Sea T un operador lineal, verificaremos que el rango $\mathcal{R}(T)$ es un espacio vectorial.

Sean $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$, definamos $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$ para algunos $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$. Por definición de un operador lineal, el dominio de T es un espacio vectorial, es decir, para $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ y escalares α, β, la combinación lineal, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{D}(T)$. Tenemos que:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in \mathcal{R}(T)$$

Por la linealidad de T se tiene,

$$\alpha T x_1 + \beta T x_2 \in \mathcal{R}(T)$$

Como habíamos definido $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$, sustituimos:

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$$

Para $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ arbitrarios, por lo tanto, afirmamos que, $\mathcal{R}(T)$ es un espacio vectorial.

Ahora demostremos que el espacio nulo $\mathcal{N}(T)$ es un espacio vectorial.

Sean $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$ arbitrarios. Por definición de espacio nulo $Tx_1 = Tx_2 = 0$.

Sean α, β escalares, por la linealidad de T tenemos:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

Por lo que, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{N}(T)$. Por tanto, $\mathcal{N}(T)$ es un espacio vectorial.

Definición 1.1. 34 *(Operador lineal acotado). Sean X e Y espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ un operador lineal, donde $\mathcal{D}(T) \subset X$. El operador T se dice acotado si existe un número real c tal que, para todo $x \in \mathcal{D}(T)$,*

$$||Tx|| \leq c||x||.$$

La norma de un operador lineal T es denotada por

$$||T|| = \sup_{x \in \mathcal{D}(T), x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||}$$

Otra forma alternativa para la norma de T es:

$$||T|| = \sup_{x\in\mathcal{D}(T), ||x||=1} ||Tx||$$

Un funcional es un operador cuyo rango se encuentra en la recta real $\mathbb{R}$ o en el plano complejo $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. 35 *(Funcional lineal). Un funcional lineal f es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial X y rango en el campo escalar $\mathbb{K}$ de X, es decir,*

$$f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{K}$$

donde, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si X es real y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si X es complejo.

Definición 1.1. 36 *(funcional lineal acotado). Un funcional lineal acotado f es un operador lineal acotado con rango en el campo escalar del espacio normado X en cuyo dominio $\mathcal{D}(f)$ se encuentra. Es decir, existe un numero c tal que, para todo $x \in \mathcal{D}(f)$*

$$|f(x)| \leq c\|x\|$$

Ademas, definimos la norma de f cómo

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathcal{D}(f), x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

o

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathcal{D}(T), ||x||=1} |f(x)|.$$

Es de gran importancia saber que el conjunto de todos los funcionales lineales definidos en un espacio vectorial X se pueden convertir en un espacio vectorial, dicho espacio está denotado por X^* y es llamado Espacio dual algebraico de X.

Sus operaciones algebraicas como espacio vectorial están definidas de la siguiente manera.

La suma $f_1 + f_2$ de dos funcionales f_1 y f_2 es el funcional f, cuyo valor para todo $x \in X$ es

$$s(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

El producto de un escalar α y un funcional f, αf es el funcional p cuyo valor en $x \in X$ es

$$p(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Ahora bien, podemos considerar el dual algebraico de X^*, cuyos elementos son los funcionales lineales definidos en X^*, lo denotaremos por X^{**} y lo llamaremos segundo espacio dual algebraico de X.

De aquí, obtenemos una importante relación entre X y X^{**}.

Podemos obtener un $g \in X^{**}$, que es un funcional lineal definido en X^*, escogiendo un $x \in X$ fijo y haciendo,

$$g(f) = g_x(f) = f(x)$$

para $x \in X$ fijo y $f \in X^*$ variable.

El subíndice x es un recordatorio de como obtuvimos g usando cierto x fijo, g_x es lineal, podemos verlo a continuación.

Sea $x \in X$ fijo arbitrario, sean $f_1, f_2 \in X*$ Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tenemos:

$$g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2)$$

Por lo tanto, g_x es un elemento de X^{**}.

Teorema 1.1. 37 *(Dimensión de X^*). Sea X un espacio vectorial n-dimensional y $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de X, entonces, $F = \{f_1, ..., f_n\}$ dado por*

$$f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & si \;\; j \neq k \\ 1 & si \;\; j = k \end{cases}$$

es una base del dual algebraico X^* de X y $dimX^* = dimX = n$.

Podemos encontrar una prueba de dicho teorema en el libro Introductory functional analysis with applications de Erwin Kreyszig, pagina 114-115.

Sea X un espacio normado complejo y $T : \mathcal{D}(T) \to X$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$, con T asociamos el operador $T_\lambda = T - \lambda I$, donde, λ es un número complejo e I es el operador identidad en $\mathcal{D}(T)$. Si T_λ tiene inversa, lo denotaremos por

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$$

le llamaremos operador resolvente de T.

Definimos el conjunto resolvente $\rho(T)$ como el conjunto de todos los valores complejos λ tales que, $R_\lambda(T)$ existe, es un operador acotado y esta definido en un conjunto que es denso en X.

Definición 1.1. 38 *(Espectro). Sea X un espacio normado complejo y $T : \mathcal{D}(T) \to X$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$. El conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ se denomina espectro de T y a los elementos en $\sigma(T)$ se les denomina valores espectrales.*

El conjunto $\sigma(T)$ se divide en tres conjuntos separados de la siguiente manera:

- El espectro puntual o espectro discreto $\sigma_p(T)$ es el conjunto de valores λ tales que, $R_\lambda(T)$ no existe.

- El espectro continuo $\sigma_c(T)$ es el conjunto de valores λ tales que, $R_\lambda(T)$ existe y está definido en un conjunto que es denso en X, pero no es acotado.

- El espectro residual $\sigma_r(T)$ es el conjunto de valores λ tales que, $R_\lambda(T)$ existe (puede estar acotado o no) y el dominio $R_\lambda(T)$ no es denso en X.

Sea X un espacio de Banach complejo, definimos a $B(X,X)$ como el conjunto de todos los operadores lineales $T : X \to X$ tales que, T es acotado.

Definición 1.1. 39 *(Radio espectral). El radio espectral $r_\sigma(T)$ de un operador $T \in B(X,X)$ en un espacio de Banach complejo X es el radio*

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

de el disco cerrado más pequeño centrado en el origen del $\lambda - plano$ complejo y contiene a $\sigma(T)$.

Ejemplo 1.1. 40 *Calculemos el radio espectral del siguiente operador:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Primero, encontremos los elementos de $\sigma(A)$, para ello resolveremos la ecuación $det(A - \lambda I) = 0$.

Tenemos que:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Ahora, veamos su determinante.

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 28$$

Resolviendo la ecuación $det(A - \lambda I) = 0$, tenemos que:

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -4$$

Por lo que, $\sigma(A) = \{7, -4\}$

Ahora bien, el radio espectral está definido como:

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Y tenemos que $|7| = 7$ y $|-4| = 4$

Por lo que, $r_\sigma(A) = 7$. ■

Otra definición equivalente del radio espectral es la siguiente:

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

Teorema 1.1. 41 *Un operador lineal en un espacio normado complejo de dimensión finita tiene al menos un autovalor.*

Podemos encontrar una prueba de dicho teorema en el libro Introductory functional analysis with applications de Erwin Kreyszig, pagina 367.

Definición 1.1. 42 *(Operador Compacto). Sean X e Y espacios normados. Un operador $T : X \to Y$ es llamado operador lineal compacto o completamente continuo si T es lineal y si para todo* *subconjunto acotado M de X, la imagen $T(M)$ es relativamente compacto, es decir, $\overline{T(M)}$ es compacto.*

Un operador lineal compacto $T : X \to X$ en un espacio normado X tiene las siguientes propiedades:

- El conjunto de autovalores de T es numerable.
- $\lambda = 0$ es el único punto de acumulación posible de este conjunto.
- Todo valor espectral $\lambda \neq 0$ es un autovalor.
- Si X es de dimensión infinita, entonces, $0 \in \sigma(T)$.
- Para $\lambda \neq 0$, el espacio nulo de $T_\lambda, T_\lambda^2, \ldots$ es de dimensión finita y los rangos de estos operadores son cerrados.
- Para $\lambda \neq 0$ la dimensión de todos los autoespacios de T es finita.

Podemos encontrar una breve explicación de dicho apartado en el libro Introductory functional analysis with applications de Erwin Kreyszig.

Teorema 1.1. 43 *(Criterio de compacidad). Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal, entonces, T es compacto si y sólo si el mapeo de toda sucesión acotada (x_n) en X sobre una sucesión (Tx_n) en Y tiene una subsucesión convergente.*

Demostración.

"$\Longrightarrow$"

Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal.

Sea la sucesión acotada (x_n) en X por hipótesis T es compacto, por definición de operador compacto, la clausura de (Tx_n) en Y es compacto, por definición de compacidad (Tx_n) tiene una subsucesión convergente.

" $\Longleftarrow$ "

Supongamos que toda sucesión acotada $(x_n) \in X$ contiene una subsucesión (x_{n_k}) tal que, (Tx_{n_k}) converge en Y.

Sea $B \subset X$ cerrado y sea (y_n) una sucesión en $T(B)$.

Entonces, $y_n = Tx_n$ para algún, $x_n \in B$ y (x_n) es acotada, por lo que B es acotado. Por hipótesis (Tx_n) tiene una subsucesión convergente, por tanto, $\overline{T(B)}$ es compacto, por definición de compacidad, ya que, (y_n) en $T(B)$ es arbitrario. Por definición de operador compacto, afirmamos que T es compacto. ■

Si X es de dimensión finita, el operador T compacto, tiene representación por matrices y esta claro que 0 puede o no pertenecer a $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, es decir, si $dimX < \infty$ podemos tener que, $0 \in \sigma(T)$, entonces, $0 \in \rho(T)$. Por otra parte, si $dimX = \infty$, entonces, deberíamos tener que $0 \in \sigma(T)$ y los siguientes casos son posibles

$$0 \in \sigma_p(T), \;\; 0 \in \sigma_c(T), \;\; 0 \in \sigma_r(T)$$

Teorema 1.1. 44 *(Categoría de Baire). Si X es un espacio métrico completo, entonces, toda intersección numerable de abiertos densos es densa en X.*

Para ver la prueba detallada de este teorema, consultar el libro Introductory functional analysis with applications de Erwin Kreyszig, pagina 247- 248.

Definición 1.1. 45 *(Subespacio T-invariante). Decimos que A es un subespacio invariante bajo un operador $T : X \to X$ o que A es un subespacio $T - invariante$ si:*

- *A es un subespacio vectorial no vacío contenido en X*
- *A es cerrado en X*
- *$T(A) = \{Tx : x \in A\} \subset A$.*

Definición 1.1. 46 *Si X es un conjunto, una base para una topología sobre x es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, llamados elementos básicos, tales que:*

- *Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico de $\mathcal{B}$ que contiene a x*
- *Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1, B_2, entonces, existe un elemento básico B_3 que contiene a x y $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Definición 1.1. 47 *Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los intervalos abiertos en la recta real,*

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$

la topología generada por B se le denomina topología usual.

Definición 1.1. 48 *Sean X, Y espacios topológicos. La topología producto sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde, U es un subconjunto abierto de X y V un subconjunto abierto de Y.*

Definición 1.1. 49 *Sea X un conjunto, la colección de todos los subconjuntos U de X tales que, $X - U$ es finito o es todo X es llamada topología de los complementos finitos.*

Sea $\mathcal{P}$ una familia de seminormas sobre un espacio vectorial X, se supone que:

- $\mathcal{P}$ separa puntos o es separante si, dado $x \in X - 0$, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que, $p(x) > 0$.
- $\mathcal{P}$ es filtrante si, dadas $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que, $p_i \leq p$ para $i = 1, 2$.

Teorema 1.1. 50 *Para cada $x_0 \in X$, cada $\varepsilon > 0$ y cada $p \in \mathcal{P}$, denotamos*

$$V(x_0, \varepsilon, p) = \{x \in X : p(x - x_0) < \varepsilon\}$$

Entonces, las familias $\mathcal{F}_{x_0} = \{V(x_0, \varepsilon, p) : \varepsilon > 0, p \in \mathcal{P}\}$ con $x_0 \in X$ definen una topología τ sobre X para la que cada $\mathcal{F}_{x_0}$ es una base de entornos de x_0.

Demostración.

Sea X un espacio vectorial.

Sea $x_0 \in X$, es evidente que $x_0 \in V(x_0, \varepsilon, p)$ para todos los x_0, ε, p, así, se cumple la primera parte de la definición de base.

Ahora bien, sean $B_1 = V(x_0, \varepsilon, p_1)$ y $B_2 = (x_0, \delta, p_2)$, y dado $y_0 \in B_1 \cap B_2$, tenemos que encontrar un B_3 tal que, $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Por filtrancia, existe un $p_3 \in \mathcal{P}$ tal que, $p_3 \geq p_2, p_1$. Como $y_0 \in B_1$ se cumple que $p_1(y_0 - x_0) < \varepsilon$ análogamente, $y_0 \in B_2$, se satisface que $p_2(y_0 - x_0) < \delta$

Si tomamos $\alpha = min\{\varepsilon - p_1(y_0 - x_0), \delta - p_2(y_0 - x_0)\}$ se ve usando la desigualdad triangular que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ con lo cual se cumple la segunda parte de la definición de base.

■

Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X decimos que:

- A es convexo si $tA + (1-t)A \subset A$, para todo $0 \leq t \leq 1$, es decir, pedimos que $tx + (1-t)y \in A$ para todo par $x, y \in A$ y todo $t \in [0, 1]$

- A es balanceado si $\alpha A \subset A$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que, $|\alpha| \leq 1$, es decir, para todo $x \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que, $|\alpha| \leq 1$, tenemos que, $\alpha x \in A$

- A es absorbente si para cada $x \in X$ existe $\alpha > 0$ tal que, $\lambda x \in A$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq \alpha$.

Definición 1.1. 51 *Se dice que dos puntos x e y de un espacio topológico X cumplen la propiedad de Hausdorff si existen dos entornos U_x de x y U_y de y tales que, $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. Se dice que un espacio topológico es un espacio de Hausdorff o T_2 si todo par de puntos distintos del espacio verifican la propiedad de Hausdorff.*

Teorema 1.1. 52 *Un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff.*

Demostración.

Sea X un espacio de Hausdorff.

Sean x, y dos puntos del subespacio Y de X. Si U, V son entornos disjuntos en X tales que, $x \in U$, $y \in V$, entonces, $U \cap Y$ y $V \cap Y$, son entornos disjuntos de x, y en Y respectivamente.

$\blacksquare$

Definición 1.1. 53 *Se dice que un espacio vectorial topológico X es localmente convexo si es Hausdorff y todo entorno de un punto $x \in X$ contiene un entorno convexo de x.*

Los subespacios de un espacio localmente convexo son en si mismos espacios localmente convexos.

Los espacios localmente convexos están estrechamente ligados con las seminormas, que son funciones que conservan, excepto una, las propiedades que tiene una norma, por lo que mantienen cierta relación con los espacios métricos.

Denotamos por $\mathcal{N}_0(X)$ a la familia de vecindades de 0 en un espacio vectorial X.

Teorema 1.1. 54 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y $V \in \mathcal{N}_0(X)$, V abierto, balanceado y convexo. Entonces, existe una única seminorma $p \in X$ tal que,*

$$V = \{x \in X : p(x) < 1\}$$

Demostración.

Sea X un espacio vectorial topológico.

Sea $V \in \mathcal{N}_0(X)$, abierto, balanceado y convexo.

Sea $\rho = \mu_v$, donde,

$$\rho = \mu_v : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$x \longrightarrow \mu_v(x) = \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in V\}$$

Esta función es la *funcional subaditiva de Minkowski de V*.

Probemos que μ_v esta bien definida.

Sea $x, y \in X$, supongamos que $\mu_v(x) \neq \mu_v(y)$

$\Longrightarrow \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in V\} \neq \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$

Entonces, existe $t > 0$ tal que, $t^{-1}x \in V$ pero $t^{-1}y \notin V$.

Por lo que $x \neq y$.

Probemos que μ_v es seminorma.

$\mu_v(\lambda x) = |\lambda|\mu_v(x)$.

Sea $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\mu_v(\lambda x) = \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}(\lambda x) \in V\} = |\lambda| \,\text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in V\} = |\lambda|\mu_v(x)$$

Por tanto, $\mu_v(\lambda x) = |\lambda|\mu_v(x)$

$\mu_v(x + y) \leq \mu_v(x) + \mu_v(y)$

Sea $x, y \in X$.

$$\mu_v(x + y) = \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}(x + y) \in V\} = \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x + t^{-1}y \in V\}$$

$$\leq \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in V\} + \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$$

$$= \mu_v(x) + \mu_v(y)$$

Por tanto, $\mu_v(x + y) \leq \mu_v(x) + \mu_v(y)$

Por lo que, $\rho = \mu_v$ es una seminorma.

Ahora, probemos que $V = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$

$$\{x \in X : \rho(x) < 1\} \subset V$$

Sea $x \in X$ tal que, $\rho(x) < 1$, es decir, $\mu_v(x) < 1$, entonces, $\text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in V\} < 1$

Entonces existe $0 < t < 1$ con $t^{-1}x \in V$.

Cómo V es convexo, $t(t^{-1}x) + (1 - t)0 \in V$, ya que, $V \in \mathcal{N}_0(x)$

$\Rightarrow x + 0 \in V$

$\Rightarrow x \in V$

Por lo que, $\{x \in X : \rho(x) < 1\} \subset V$

$$V \subset \{x \in X : \rho(x) < 1\}$$

Sea $y \in V$ arbitrario, para esta y fija consideremos

$$\phi : (0, \infty) \to X$$

$$t \to \phi(t) = t^{-1}y$$

Vemos que ϕ es continua sobre $(0, \infty)$, por lo que al ser V abierto, por definición de continuidad $\phi^{-1}(V)$ es abierto, donde. $\phi^{-1}(V)$ se define como

$$\phi^{-1}(V) = \{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$$

Ahora bien, como $y \in V$, tenemos que, $1 \in \phi^{-1}(V)$, por tanto, existe $1 > \varepsilon > 0$, tal que, $1 - \varepsilon \in \phi^{-1}(V)$.

Cómo $\rho(y) = \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$ tenemos que,

$$\rho(y) \leq 1 - \varepsilon < 1$$

para $y \in V \subset X$, entonces, $\rho(y) < 1$, por lo que, $y \in \{x \in X : \rho(x) < 1\}$

Por tanto, $V \subset \{x \in X : \rho(x) < 1\}$.

Con lo que se concluye que, $V = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$

Resta demostrar la unicidad de dicha seminorma.

Sabemos que ρ esta definida cómo, $\rho : X \to [0, \infty)$.

supongamos que existe $q : X \to [0, \infty)$, tal que,

$$\{x \in X : \rho(x) < 1\} = \{y \in X : q(y) < 1\}$$

Entonces,

$$\{x \in X : \rho(x) < r\} = \{y \in X : q(y) < r\}$$

Para cualquier $1 > r > 0$

Sea $x \in X$ y definamos $\alpha = \rho(x)$.

Sabemos que para todo $\delta > 0$ se cumple que

$$\rho(x) < \rho(x) + \delta = \alpha + \delta$$

Por lo anterior, se cumple que, $q(x) < \alpha + \delta$ para todo $\delta > 0$

$\Rightarrow q(x) \leq \alpha = \rho(x)$

De forma análoga.

Sea $y \in X$ y definimos $\beta = q(y)$.

Sabemos que para todo $\delta > 0$ se cumple que,

$$q(y) < q(y) + \delta = \beta + \delta$$

Por lo anterior, se cumple que, $\rho(y) < \beta + \delta$ para todo $\delta > 0$

$\Rightarrow \rho(y) \leq \beta = q(y)$

Por tanto, $\rho(x) = q(x)$, para todo $x \in X$.

$\blacksquare$

El teorema anterior es de suma importancia ya que en cualquier espacio se puede definir una topología usando una familia de seminormas de la siguiente manera:

Sea X un espacio vectorial y $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de seminormas en X.

Definimos $B_{\alpha,r} = \{x : \rho_\alpha(x) < r\}$, para todo $\alpha \in I$ y para todo $r > 0$ y tomamos $\mathcal{N}_0(X)$ de manera que, $V \in \mathcal{N}_0(X)$ si y solo si existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ y $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}^+$ tales que, $\bigcap_{i=1}^n B_{\alpha_i,r_i} \subset V$.

Notemos que $B_{\alpha,r} \in \mathcal{N}_0(X)$, por consiguiente $\bigcap_{i=1}^n B_{\alpha_i,r_i} \in \mathcal{N}_0(X)$.

Teorema 1.1. 55 *Sea (X,τ) un espacio vectorial topológico, X es un espacio vectorial localmente convexo si y sólo si existe $\{p_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de seminormas que determinan a τ.*

Demostración.

"$\Longrightarrow$"

Vamos a probar primero que dado un espacio localmente convexo podemos dar una familia de seminormas que determinan la topología.

Sea X un espacio localmente convexo.

Sea B_0 una base de vecindades del origen en X formada por conjuntos abiertos, balanceados y convexos y por tanto absorbentes.

Por teorema anterior, dada $V \in B_0$, existe una única seminorma ρ_v tal que:

$$V = \{x \in X : \rho_v(x) < 1\}$$

Consideremos $\{\rho_v\}_{V\in B_0}$, esta es una familia de seminormas separantes, tales que determinan la topología original en X.

"$\Longleftarrow$"

Sea $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de seminormas en X que determinan su topología.

Tomemos $B_{\rho_\alpha} = \{x : \rho_\alpha(x) < 1\}$, para cada $\alpha \in I$.

Dichos conjuntos son abiertos, por la forma en la que están definidos.

Veamos si son balanceados

Sea $x \in B_{\rho_\alpha}$, por lo que, $\rho_\alpha(x) < 1$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que, $0 < |\lambda| < 1$.

$\Rightarrow \rho_\alpha(x) < 1$, multipliquemos por $|\lambda|$

$\Rightarrow |\lambda|\rho_\alpha(x) < |\lambda|$, pero $|\lambda| < 1$, por lo que,

$\Rightarrow |\lambda|\rho_\alpha(x) < 1$, pero por definición de seminorma, $|\lambda|\rho_\alpha(x) = \rho_\alpha(\lambda x)$,

$\Rightarrow \rho_\alpha(\lambda x) < 1$

Por lo que, $\lambda x \in B_{\rho_\alpha}$

Por tanto, B_{ρ_α} es balanceado.

Verifiquemos que sean convexos.

Sea $x, y \in B_{\rho_\alpha}$

Es decir, $\rho_\alpha(x) < 1$ y $\rho_\alpha(y) < 1$.

Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que, $0 < t < 1$

Tenemos que para todo $z \in \rho_\alpha$ se cumple que, $t\rho_\alpha(z) < 1$.

Entonces,

$$\rho_\alpha(tx + (1-t)y) \leq \rho_\alpha(tx) + \rho_\alpha((1-t)y)$$

$$= t\rho_\alpha(x) + (1-t)\rho_\alpha(y)$$

$$= t\rho_\alpha(x) + \rho_\alpha(y) - t\rho_\alpha(y)$$

$$< 1 + 1 - 1 = 1$$

Por lo que, $tx + (1-t)y \in B_{\rho_\alpha}$

Por tanto, B_{ρ_α} es convexo.

Pero la familia de seminormas anterior define la topología en X, es decir:

$$N = \{\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i B_{\rho_{\alpha_i}} : \alpha_i \in I, \varepsilon_i > 0, i = 1, ..., n, n \in \mathbb{N}\}$$

Es una base para la topología de X.

Probemos que $\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i B_{\rho_{\alpha_i}}$ es abierto.

Vemos que, cada B_{α_i} es abierto, para cada $\alpha_i \in I$, y la intersección finita de abiertos es abierta, por lo que, $\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i B_{\rho_{\alpha_i}}$ es abierto.

Ahora, probemos que la intersección de conjuntos balanceados es balanceada.

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos balanceados, tales que, $|\lambda| < 1$, con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sea $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

$\Rightarrow x \in A_i$, para todo $i = 1, ..., n$

$\Rightarrow \lambda x \in A_i$, ya que cada A_i es balanceado, con $|\lambda| < 1$, para todo $i = 1, ..., n$

$\Rightarrow \lambda x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Por tanto, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es balanceado.

Utilizando lo anterior, como cada $B_{\rho_{\alpha_i}}$ es balanceado, podemos decir que, $\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i B_{\rho_{\alpha_i}}$ es balanceado.

Probaremos que la intersección de conjuntos convexos es convexa.

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos convexos, con $0 < t < 1$.

Sean $x, y \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

$\Rightarrow x, y \in A_i$, para todo $i = 1, ..., n$

$\Rightarrow tx + (1-t)y \in A_i$, ya que cada A_i es convexo, con $0 < t < 1$, para todo $i = 1, ..., n$

$\Rightarrow tx + (1-t)y \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Por tanto, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es convexo.

Utilizando lo anterior, como cada $B_{\rho_{\alpha_i}}$ es convexo, podemos decir que $\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i B_{\rho_{\alpha_i}}$ es convexo.

Por tanto, por el párrafo anterior podemos concluir que X es localmente convexo.

■

Definición 1.1. 56 *Un espacio topológico (X, τ) es metrizable si existe una métrica d en X tal que, $\tau_d = \tau$.*

Tenemos entonces que un espacio metrizable es un espacio topológico X cuya topología es la inducida por alguna métrica d en X. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces, (X, τ_d) es un espacio metrizable. Debido a esto suele decirse que los espacios métricos son casos particulares de espacios metrizable.

A partir de esto se deduce el siguiente teorema.

Teorema 1.1. 57 *Todo espacio normado es metrizable.*

Demostración.

Sabemos que toda norma induce una métrica por lo que, todo espacio normado es un espacio métrico, por el comentario anterior, podemos concluir que todo espacio normado es metrizable.

■

Teorema 1.1. 58 *Todo subespacio de un espacio metrizable es metrizable (Con la topología del subespacio).*

Demostración.

Sea X un espacio metrizable.

Sea $A \subset X$.

Sea $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ una métrica que genera la topología τ.

Sea la restricción d_A de d tal que, $d_A : A \times A \to \mathbb{R}^+$, definida por $d_A(x, y) = d(x, y), x, y \in A$

Sea $V \in \tau_A$, de tal forma que, $V = U \cap A$, con $U \in \tau$.

Por lo que, U es de la forma $U = \bigcup_{i \in I} B_i$, donde, B_i es una bola de τ, por lo que:

$U \cap A = (\bigcup_{i \in I} B_i) \cap A = \bigcup_{i \in I}(B_i \cap A)$

Si $x \in \bigcup_{i \in I}(B_i \cap A)$.

$\Longrightarrow x \in B(\varepsilon, y) \cap A$

$\Longrightarrow x \in B(\varepsilon, y), x \in A$

$\Longrightarrow d(x, y) < \varepsilon$

Tomando $\delta = \text{mín}\{d(x, y), \varepsilon - d(x, y)\}$

$\Longrightarrow d(x, y) < \delta$

$\Longrightarrow x \in B(y, \delta) \subset B(y, \varepsilon) \cap A$

Y las bolas abiertas son una base para τ_A

Por tanto, A es metrizable. ■

Teorema 1.1. 59 *El producto de conjuntos densos es denso.*

Demostración.

Sean X_i con $i \in \mathbb{N}$ espacios topológicos.

Sean C_i subconjuntos densos de cada $X_i, i \in \mathbb{N}$, es decir, $\overline{C_i} = X_i$.

Definamos

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

Tenemos que:

$$\overline{\prod_{i \in \mathbb{N}} C_i} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \overline{C_i}$$

Pero cada $\overline{C_i} = X_i$ con $i \in \mathbb{N}$

$$\overline{\prod_{i \in \mathbb{N}} C_i} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \overline{C_i} = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i = X$$

Por tanto, el producto de subconjuntos densos es denso. ■

Definición 1.1. 60 *(Espacio regular). Se dice que X es regular si para cada par formado por un punto x y un conjunto cerrado B que no contiene a x, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y B respectivamente.*

Teorema 1.1. 61 *El producto de espacios regulares es regular.*

Teorema 1.1. 62 *(Teorema de metrización de Nagata-Smirnov). Un espacio X es metrizable si y sólo si X es regular y tiene una base numerable localmente finita.*

Se puede encontrar una prueba detallada de ambos teoremas en el libro de Topología de James R. Munkres, pagina 285.

A partir de estos dos teoremas, se deduce:

Teorema 1.1. 63 *El producto finito de conjuntos metrizables es metrizable.*

Definición 1.1. 64 *El espacio X se dice que es normal, si para cada par de conjuntos cerrados disjuntos A, B, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B respectivamente.*

Teorema 1.1. 65 *Todo espacio Hausdorff compacto es normal.*

De este teorema, podemos encontrar una prueba en el libro de Topología de James R. Munkres página, 231.

Teorema 1.1. 66 *El producto numerable de espacios completos es completo.*

Teorema 1.1. 67 *El producto finito de espacios localmente convexos con la topología es localmente convexo.*

Teorema 1.1. 68 *La completación de un espacio localmente convexo es localmente convexo.*

Definición 1.1. 69 *Sea X un espacio topológico y $T : X \to X$ continuo. Decimos que T es topológicamente transitivo, si para todo par de abiertos no vacíos, U, V, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Teorema 1.1. 70 *Sea X un espacio topológico y $T : X \to X$. Si T es invertible, entonces, es topológicamente transitivo si y solo si T^{-1} lo es.*

Demostración.

Por hipótesis, T es invertible y topológicamente transitivo.

Sean U, V abiertos no vacíos, por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$, tal que, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$

Cómo T es invertible y continua se tiene:

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \Longleftrightarrow T^{-n}(T^n(U) \cap V) \neq T^{-n}(\emptyset)$$

$$\Longleftrightarrow T^{-n}T^n(U) \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$$

Por tanto, T es topológicamente transitivo si y sólo si T^{-1} lo es. ■

Definición 1.1. 71 *(Espacio de Kolmogórov). Un espacio topológico se dice que es T_0 o espacio de Kolmogórov si dados dos puntos distintos x e y del espacio, o bien existe un entorno U_x de x de forma que, $y \notin U_x$ o bien existe un entorno U_y de y de forma que, $x \notin U_y$.*

Definición 1.1. 72 *Sea X un espacio topológico. Una separación de X es un par U, V de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X. El espacio X se dice que es conexo si no existe una separación.*

Definición 1.1. 73 *Un conjunto G_δ en un espacio X es un conjunto A que es igual a una intersección numerable de conjuntos abiertos de X.*

Teorema 1.1. 74 *Sean X, Y espacios vectoriales, sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y sobreyectiva y sea $D \subset X$ un conjunto denso, entonces, $f(D) \subset Y$ es denso.*

Demostración.

Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua y sobreyectiva.

Sea $D \subset X$ y $A \subset Y$.

Por definición de densidad, para todo abierto M de X se cumple $M \cap D \neq \emptyset$.

Por hipótesis f es continua, por lo que, $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X, por lo que:

$$f^{-1}(A) \cap D \neq \emptyset.$$

Sea $x \in X$ tal que:

$$x \in f^{-1}(A) \cap D$$

$$\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(A) \cap D)$$

$$\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(A)) \cap f(D)$$

Como f es sobreyectiva, $f(f^{-1}(A)) = A$ y $f(D)$ es abierto, se tiene:

$$f(x) \in A \cap f(D)$$

Por tanto, $A \cap f(D) \neq \emptyset$

Por lo tanto, A es denso en Y. ■

Si $\phi : X \to \mathbb{R}$, el soporte de ϕ se define como la clausura del conjunto $\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Así, si x esta fuera del soporte de ϕ, existe algún entorno de x sobre el que ϕ es nula.

Definición 1.1. 75 *Sea $\{U_1, ..., U_n\}$ un recubrimiento abierto finito e indexado del espacio X. Una familia indexada de funciones continuas*

$$\phi_i : X \to [0, 1]$$

para $i = 1, ..., n$, se dice que es una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$ si:

- *$(sop\ \phi_i) \subset U_i$ para cada i.*
- *$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ para cada x.*

Teorema 1.1. 76 *(Existencia de particiones finitas de la unidad). Sea $\{U_1, ..., U_n\}$ un recubrimiento abierto finito del espacio normal X, entonces, existe una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$.*

Podemos encontrar una prueba detallada de este teorema en el libro de Topología James R. Munkres, página 257.

1.2. Espacios de Fréchet.

Un espacio de Fréchet es una estructura de espacio vectorial topológico que satisface ciertas propiedades de los espacios de Banach aún en ausencia de norma. Este concepto hace referencia a Maurice Fréchet, un matemático francés que contribuyó notablemente a fundar las bases de la topología y a estudiar sus aplicaciones en análisis funcional. Es en este último campo donde la estructura de los espacios de Fréchet revela su utilidad, en particular a la hora de proporcionar una topología natural a los espacios de funciones infinitamente derivables.

Hay que tener cuidado con el choque de terminología: un "espacio de Fréchet según la topología" en un "espacio topológico de Fréchet" es algo diferente; el primero sólo significa que un espacio topológico satisface el axioma de separación T1 (como todos los espacios vectoriales topológicos de Hausdorff, los espacios de Fréchet satisfacen este axioma, pero tienen una gran cantidad de estructuras y propiedades adicionales).

Definición 1.2. 1 *Llamamos espacio de Fréchet a todo espacio vectorial topológico localmente convexo, metrizable y completo.*

Proposición 1.2. 2 *Todo espacio de Banach es un espacio de Fréchet.*

Demostración.

Sea X un espacio de Banach cualquiera.

Por definición 1.1.26 de espacio de Banach, sabemos que X es un espacio completo normado.

Por teorema 1.1.57 todo espacio normado es metrizable, entonces X es metrizable.

Como toda norma es una seminorma, por teorema 1.1.55 todo espacio normado es localmente convexo, entonces, X es localmente convexo.

Ya que X es completo, metrizable y localmente convexo por definición 1.2.1 es un espacio de Fréchet.

Por lo tanto, todo espacio de Banach es de Fréchet.

Ejemplo 1.2. 3 *El espacio ℓ^p es un espacio de Banach, y por la proposición 1.2.2 es un espacio de Fréchet.* ■

Ejemplo 1.2. 4 *El espacio $\mathbb{C}$ es un espacio de Banach, y por la proposición 1.2.2 es un espacio de Fréchet.* ■

Proposición 1.2. 5 *El producto cartesiano de un número finito de espacios de Fréchet dotado de la topología producto es un espacio de Fréchet.*

Demostración.

Sea $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ una familia finita de espacios de Fréchet, dotados de la topología producto.

Por teorema 1.1.63, tenemos que $\prod_{i=1}^{n} X_i$ con la topología producto es metrizable.

Por teorema 1.1.66 el producto numerable de espacios completos con la topología producto es completo. Por ser $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ finito es numerable, entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ con la topología producto es completo.

Por teorema 1.1.67 el producto finito de espacios localmente convexos con la topología producto es localmente convexo, entonces, $\prod_{i=1}^{n} X_i$ con la topología producto es localmente convexo.

$\prod_{i=1}^{n} X_i$ es metrizable, completo y localmente convexo; entonces, por definición 1.2.1 es un espacio de Fréchet.

Por lo tanto, el producto cartesiano de un número finito de espacios de Fréchet dotado por la topología producto es un espacio de Fréchet. ■

Proposición 1.2. 6 *Si X es un espacio vectorial topológico metrizable y localmente convexo, entonces, $\widehat{X}$ su completación como espacio métrico es un espacio de Fréchet.*

Demostración.

Sea X un espacio vectorial topológico metrizable y localmente convexo, y $\widehat{X}$ su completación como espacio métrico, entonces, $\widehat{X}$ es completo y X es isométrico a un subespacio A denso de $\widehat{X}$. Por teorema 1.1.68 la completación de un espacio localmente convexo es un espacio localmente convexo. Por lo tanto, $\widehat{X}$ es un espacio de Fréchet.

■

Proposición 1.2. 7 *Todo subespacio vectorial cerrado de un espacio de Fréchet es de Fréchet.*

Demostración.

Sea X un espacio de Fréchet.

Por definición 1.2.1 de espacio de Fréchet, X es un espacio vectorial topológico localmente convexo metrizable completo.

Sea $A \subset X$ un subespacio vectorial cerrado.

Cómo X es completo y A es un subespacio cerrado de X, por teorema 1.1.19, A es completo.

Dado que X es metrizable y A es un subespacio de X, por teorema 1.1.58, A es metrizable.

Ya que X es un espacio localmente convexo y A es un subespacio de X, por definición 1.1.53, A es localmente convexo.

Por lo tanto; como A es completo, metrizable y localmente convexo entonces, por definición 1.2.1, es un espacio de Fréchet.

■

Ejemplo 1.2. 8 *El espacio de las funciones enteras.*

Denotemos el espacio de las funciones enteras como

$$H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \text{f es una función holomorfa }\}.$$

El concepto natural de convergencia en las funciones enteras es el de convergencia uniforme en todos los conjuntos compactos, es decir, tendremos que $f_k \longrightarrow f$ en $H(\mathbb{C})$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{|z|\leq n}|f(z) - g(z)| \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow \infty$ donde,

$$\|f\|_n := \sup_{|z|\leq n}|f(z)|.$$

Para cada $\epsilon > 0$, K compacto y $f \in H(\mathbb{C})$, denotemos:

$$U(f, K, \epsilon) := \{g \in H(\Omega) : \sup_{x\in K}|g(x) - f(x)| < \epsilon\}$$

donde, Ω es un abierto en $\mathbb{C}$.

Se define la topología τ en el espacio de las funciones holomorfas de la siguiente manera: si $\mathcal{F} \subset H(\mathbb{C})$, diremos que $\mathcal{F} \in \tau$ cuando para cada $f \in \mathcal{F}$ existen un compacto K y un real positivo ϵ tales que, $U(f, K, \epsilon) \subset \mathcal{F}$. Esta topología recibe el nombre de topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Así, decir que, (f_n) converge uniformemente sobre compactos a f es equivalente a escribir que (f_n) converge a f en la topología τ.

Dicho espacio métrico es normado, completo y separable con la métrica

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f - g\|_n}{2^n(1 + \|f - g\|_n)}$$

donde, $\|f - g\|_n := \sup_{|z|\leq n}|f(z) - g(z)|$.

■

Definición 1.2. 9 *Sea X separable de Fréchet, $A \subset X$ cerrado. Decimos que A es un $Z - set$ si para todo K métrico compacto $C(K, X - A)$ es denso en $C(K, X)$ (con respecto a la topología de convergencia uniforme en $C(K, X)$).*

Lema 1.2. 10 *Sea X separable de Fréchet. Si $A \subset X$ es unión numerable de $Z - sets$, entonces, $X - A$ es homeomorfo a X.*

La demostración de dicho lema puede encontrarse en C. Bessaga y A. Pelczynski. Selected Topics in Infnite-Dimensional Topology, PWN, Warsaw, 1975.

1.3. Sistemas dinámicos lineales

La parte de las matemáticas que estudia los distintos movimientos que nos rodean se llama Sistemas Dinámicos. En la presente sección presentaremos las definiciones y propiedades básicas de sistemas dinámicos lineales.

Denotaremos al conjunto de todos los operadores lineales y continuos en cualquier espacio vectorial topológico real o complejo X cómo:

$$\mathcal{L}(X) := \{T : X \to X : T \; lineal \; y \; continuo\}.$$

Definición 1.3. 1 *Un sistema dinámico lineal es un par (X, T) donde, X es un espacio vectorial topológico real o complejo y $T \in \mathcal{L}(X)$.*

Definición 1.3. 2 *Decimos que el espacio métrico (X, d) es un F-espacio, si es un espacio vectorial real o complejo con una métrica d, que lo hace completo. Si además, X es un F-espacio localmente convexo, decimos que X es un espacio de Fréchet.*

Definición 1.3. 3 *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal. Para $x \in X$, definimos la órbita del elemento x por T como el conjunto*

$$Orb(x, T) = \{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

La interpretación que le damos a la $Orb(x, T)$ es la siguiente: En el tiempo $n = 0$ un objeto se encuentra en la posición x; en el tiempo $n = 1$ el objeto ha cambiado de posición y ahora se encuentra en Tx; en el tiempo $n = 2$ el objeto vuelve a cambiar de posición y ahora se encuentra en $T(Tx) = T^2x$; etc.

Tiempos:	0	1	2	...	n	...
Posiciones:	x	$T(x)$	$T^2(x)$	...	$T^n(x)$	...

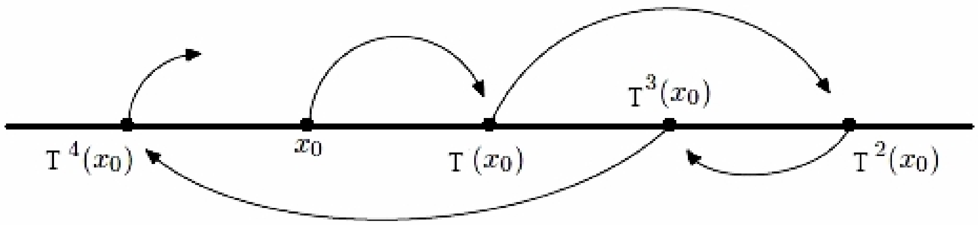

Figura 1.3: Primeros elementos de la órbita de x_0 en la recta real.

Definición 1.3. 4 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Decimos que $x_0 \in X$ es un punto fijo de T si $Tx_0 = x_0$.*

Si $x_0 \in X$ es un punto fijo de T, entonces para cada n se tiene que, $T^n x_0 = x_0$, por lo que la $Orb(x_0, T)$ tiende a x_0. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x_0. \tag{1.3.1}$$

Teorema 1.3. 5 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y sean x_0 y y_0 dos puntos en X tales que la órbita de x_0 converge a y_0, es decir, $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = y_0$. Entonces, y_0 es un punto fijo de T.*

Demostración.

Por hipótesis tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = y_0 \tag{1.3.2}$$

$$\Longrightarrow T(\lim_{n\to\infty} T^n x_0) = Ty_0 \tag{1.3.3}$$

Dado que T es continuo tenemos que:

$$\Longrightarrow T(\lim_{n\to\infty} T^n x_0) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1} x_0 \tag{1.3.4}$$

Por las ecuaciones 1.3.3 y 1.3.4:

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} T^{n+1} x_0 = Ty_0 \tag{1.3.5}$$

Por la ecuación 1.3.2 y como $\{T^{n+1}x_0\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de la sucesión $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x_0 = y_0 \tag{1.3.6}$$

Por las ecuaciones 1.3.5 y 1.3.6:

$$\Longrightarrow Ty_0 = y_0 \tag{1.3.7}$$

Por lo tanto, de la ecuación 1.3.1 y la ecuación 1.3.7, se concluye que y_0 es un punto fijo de T.

■

Sea $T : A \longrightarrow A$, donde A es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si $x_0 \in A$ es un punto fijo de T, entonces, $(x_0, Tx_0) = (x_0, x_0)$. Por lo tanto, este punto, (x_0,x_0), se encuentra en la intersección de la gráfica de T y la diagonal $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x = y\}$. En la figura se muestra la gráfica de una función con exactamente tres puntos fijos: x_0, x_1 y x_2.

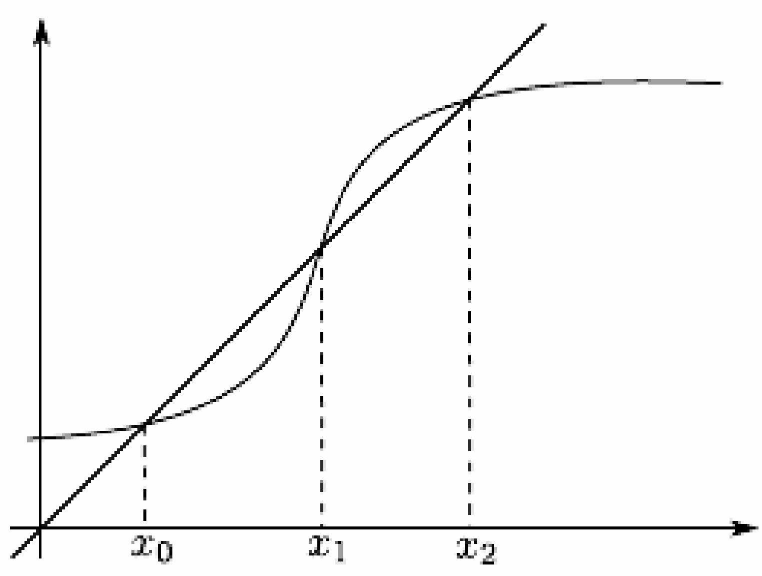

Figura 1.4: Tres puntos fijos

Definición 1.3. 6 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y $x_0 \in X$ un punto fijo de T. Decimos que x_0 es un punto fijo atractivo de T si puntos cercanos a x_0 tienen órbitas que se le aproximan. Por el contrario, decimos que x_0 es un punto repulsivo si puntos cercanos a x_0 tienen órbitas que se alejan de él.*

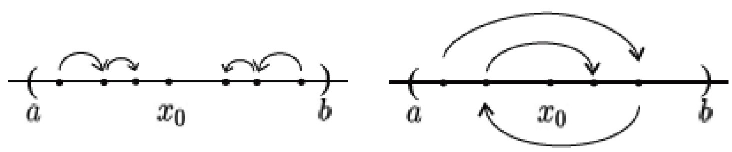

Figura 1.5: Ejemplos de punto fijo atractor en un intervalo en $\mathbb{R}$

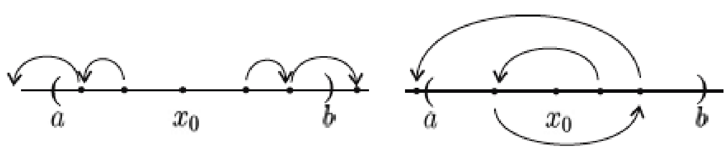

Figura 1.6: Ejemplos de punto fijo repulsor en un intervalo en $\mathbb{R}$

Teorema 1.3. 7 *(Teorema del punto fijo de Banach). Sea (X, d) un espacio completo y $T \in \mathcal{L}(X)$ contractiva en X [tiene la propiedad de que existe un número real $k \leq 1$ y no negativo tal que, para todo x e y en X: $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$], entonces existe un único punto fijo de T tal que, para todo punto x de X la sucesión $\{x, Tx, T(Tx), ...\}$ converge a dicho punto fijo.*

Demostración.

Sea (X, d) un espacio completo y $T \in \mathcal{L}(X)$ contractiva en X.

Sea $x_0 \in X$. Definimos $(x_n) \subset X$ tal que, $x_{n+1} = Tx_n$ con $n \geq 0$ entonces, $x_n = T^n x_0$.

Demostremos que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Si $n \geq m \geq 1$, entonces por ser T contractivo en X,

$$d(x_n, x_m) = d(T^n x_0, T^m x_0) \leq c^m d(T^{n-m} x_0, x_0).$$

Por desigualdad triangular, tenemos:

$$d(x_n, x_m) \leq c^m [d(T^{n-m} x_0, T^{n-m-1} x_0) + d(T^{n-m-1} x_0, T^{n-m-2} x_0) + ... + d(Tx_0, x_0)]$$

$\Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq c^m \left[\sum_{k=0}^{n-m-1} c_k \right] d(x_1, x_0)$

$\Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq (\frac{c^m}{1-c}) d(x_1, x_0)$

Por lo que, (x_n) es de Cauchy.

Por ser (x_n) de Cauchy, entonces converge, es decir, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ con $x \in X$.

$\Longrightarrow Tx = T(\lim_{n \to \infty} x_n)$.

Por ser T continua, $Tx = \lim_{n \to \infty} Tx_n$.

$\Longrightarrow Tx = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x$

$\Longrightarrow Tx = x$

Por lo tanto, existe al menos un punto fijo. Demostremos que es único.

Sea $x \in X$ un punto fijo.

Supongamos que $y \in X$ es un punto fijo también.

Por propiedad de métrica, $0 \leq d(x, y)$.

Como $x, y \in X$ son puntos fijos, entonces $0 \leq d(x, y) = d(Tx, Ty)$.

Por ser T contractiva, entonces $0 \leq d(x, y) = d(Tx, Ty) < cd(x, y)$.

Como $c < 1$, entonces $d(x, y) = 0$.

Por propiedad de métrica, $x = y$

Por lo tanto, existe un único punto fijo en T. ■

Capítulo 2

Operadores Hipercíclicos

La hiperciclicidad es un caso particular de una noción más amplia llamada universalidad. Una familia de operadores $\{T_i\}_{i\in I}$ se dice que es universal si existe un vector x de manera que, $\{T_i x\}_{i\in I}$ es denso en el espacio. Se podrá observar que la hiperciclicidad de un operador T consiste en estudiar la universalidad de la sucesión $\{T_n := T^n\}_{n\geq 1}$ de operadores formada por sus iteraciones. Los otros casos particulares de la universalidad son la ciclicidad y la superciclicidad, conceptos que se presentan a continuación pero que no estudiaremos dado que nos enfocaremos en el estudio de la hiperciclicidad.

Definición 2. 1 *Sea (X, T) un sistema dinámico lineal. Se dice que $T \in \mathcal{L}(X)$ es:*

- *Cíclico si existe $x \in X$ tal que, $Span\ Orb(x, T) = Span\{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X.*
- *Supercíclico si existe $x \in X$ tal que, $\{\lambda T^n x : \lambda \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X.*
- *Hipercíclico si existe $x \in X$ tal que, $Orb(x, T)$ es denso en X.*

A partir de la definición anterior, es claro que: hipercíclico $\Longrightarrow$ supercíclico $\Longrightarrow$ cíclico.

2.1. Propiedades de los operadores hipercíclicos

Como T es hipercíclico si existe $x \in X$ tal que, $Orb(x, T)$ es denso en X, decimos que x es un vector hipercíclico de T y denotamos $HC(T)$ al conjunto de los vectores hipercíclicos de T. Dada la definición de operador hipercíclico, es claro que dicha condición nos restringe a trabajar sobre espacios separables.

Ahora estudiemos las propiedades de dichos operadores. No obstante, antes de comenzar se es recomendable tener muy en claro lo que es un conjunto denso y las propiedades que este presenta, entre otros conceptos y propiedades básicas.

Comenzamos estudiando un teorema que nos ayudará a demostrar el primer resultado de S.Rolewiez, que afirma que los operadores hipercíclicos son un fenómeno puramente infinito-dimensional.

Teorema 2.1. 1 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico y $T^* \in X^{**}$. Entonces, $\sigma_p(T^*) = \emptyset$*

Demostración.

Supongamos que $\sigma_p(T^*)$ no es vacío.

Sea $\alpha \in \sigma_p(T^*)$ y $x^* \in X^*$ un autovector de T^* asociado a α, y sea $x \in HC(T)$.

Por definición 2.1 como T es hipercíclico y $x \in HC(T)$, entonces, $Orb(x, T)$ es densa en X.

Cómo todo funcional no nulo es sobreyectivo y $x^* \in X^*$ por definición de espacio dual es un funcional continuo; por teorema 1.1.74 al ser $Orb(x, T)$ densa en X entonces, $x^*(Orb(x, T))$ es densa en $\mathbb{K}$.

Pero por definición de espacio dual tenemos:

$$x^*(Tx) = T^*(x^*)(x)$$

Como $\alpha \in \sigma_p(T^*)$ y $x^* \in X^*$ es un autovector de T^* asociado a α, entonces

$$T^*(x^*)(x) = \alpha x^*(x)$$

Por las dos ecuaciones anteriores tenemos:

$$x^*(Tx) = \alpha x^*(x)$$

Repitiendo los pasos anteriores n veces obtenemos

$$x^*(T^n x) = (T^*)^n(x^*)(x) = \alpha^n x^*(x)$$

Como $x^*(Orb(x,T))$ es densa en $\mathbb{K}$ y para cada $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos que, $x^*(T^n x) = \alpha^n x^*(x)$, entonces $\{\alpha^n x^*(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $\mathbb{K}$.

Lo que es una contradicción ya que dicho conjunto es acotado si algún $|\alpha| \leq 1$ o $x^*(x) = 0$; si $|\alpha| > 1$ y $x^*(x) \neq 0$, entonces $|\alpha^n x^*(x)| \longrightarrow \infty$ por lo que, el conjunto no puede ser denso.

Por lo tanto, si T es hipercíclico, entonces $\sigma_p(T^*) = \emptyset$. $\blacksquare$

Teorema 2.1. 2 *No existen operadores hipercíclicos en espacios de dimensión finita.*

Demostración.

Sea X un espacio n- dimensional y $T \in \mathcal{L}(X)$.

Por teorema 1.1.38, aplicado al espacio X con el dual X^* y al dual X^* con el doble dual X^{**} tenemos,

$$n = dim(X) = dim(X^*) = dim(X^{**}).$$

Entonces, por teorema 1.1.42 sabemos que $\sigma_p(T^*) \neq \emptyset$ por ser de dimensión finita.

Por contrarrecíproco del teorema 2.1.1 $\sigma_p(T^*) \neq \emptyset$ entonces, T no es hipercíclico.

Por lo tanto, no existen operadores hipercíclicos en espacios de dimensión finita. ■

Proposición 2.1. 3 *Sea X un espacio de Banach, y $T \in \mathcal{L}(X)$.*

a) Si $\|T\| \leq 1 \Longrightarrow T$ no es hipercíclico.

b) Si $\|Tx\| \geq \|x\|$, $\forall\, x \in X \Longrightarrow T$ no es hipercíclico.

Demostración.

Primero probemos a). Sea X un espacio de Banach, y $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que, $\|T\| \leq 1$.

Supongamos que T es hipercíclico. Sea $x \in HC(T)$ entonces $Orb(x, T)$ es densa.

Sabemos que si $Orb(x, T)$ es densa en X, todo punto en X es limite de una sucesión de $Orb(x, T)$.

Pero por teorema del punto fijo de Banach, por ser T contráctil, existe un único punto fijo y por tanto cualquier sucesión del tipo $\{x, Tx, T(Tx), ...\}$ converge a dicho punto fijo. Lo que implicaría una contradicción.

Por lo tanto T no es hipercíclico.

Ahora probemos b).

Por hipótesis $\|Tx\| \geq \|x\|$, $\forall\, x \in X$, por lo que tenemos,

$$\|Tx\| \geq \|x\|, \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \|T^2x\| \geq \|Tx\| \geq \|x\|, \forall x \in X$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \|T^n x\| \geq \|T^{n-1}x\| \geq \ldots \geq \|Tx\| \geq \|x\|, \quad \forall \quad x \in X$$

Por transitividad tenemos que $\|T^n x\| \geq \|x\|$ para todo $x \in X$ con $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $Orb(x,T)$ está acotada inferiormente por $\|x\|$.

Por lo tanto, T no puede ser hipercíclico, pues la $Orb(x,T)$ está acotada por abajo para todo $x \in X$.

$\blacksquare$

Proposición 2.1. 4 *Sea X un espacio de Banach complejo y T un operador compacto. Entonces T no es hipercíclico.*

Demostración.

Sea X un espacio de Banach complejo y T un operador compacto.

Cómo T es compacto también lo es T^*.

Si X es un espacio finito, por teorema 2.1.2, T no es hipercíclico. Si suponemos que X es de dimensión infinita, y cómo T^* es compacto, tenemos:

$$\sigma(T^*) = \{0\} \cup \sigma_p(T^*)$$

Si $\sigma_p(T^*) \neq \emptyset$ entonces, T no es hipercíclico por contrarrecíproco del teorema 2.1.1

Si $\sigma_p(T^*) = \emptyset$, cómo $\sigma(T^*) = \{0\} \cup \sigma_p(T^*)$ entonces, $\sigma(T^*) = \{0\}$.

Dado que $\sigma(T^*) = \{0\}$ y por definición 1.1.40 de radio espectral tenemos,

$\Longrightarrow r_\sigma(T^*) := sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T^*)\}$

$\Longrightarrow r_\sigma(T^*) = 0$

Por definición equivalente de radio espectral sabemos que, $r_\sigma(T^*) = \lim\limits_{n\to\infty} \|(T^*)^n\|^{\frac{1}{n}}$.

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|(T^*)^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$

$\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|(T^*)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq 1, \forall n \geq n_0$

$\Longrightarrow (\|(T^*)^n\|^{\frac{1}{n}})^n \leq 1^n, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow (\|T^*)^n\|^{\frac{n}{n}} \leq 1, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \|(T^*)^n\| \leq 1, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

Por como está definido el espacio dual tenemos que, $\|T^n\| = \|(T^n)^*\| = \|(T^*)^n\|$

$\Longrightarrow \|T^n\| = \|(T^n)^*\| = \|(T^*)^n\| \leq 1, \forall n \geq n_0$

$\Longrightarrow \|T^n\| \leq 1, \forall n \geq n_0$

y así,

$$Orb(x,T) = \{x, Tx, T^2x, ..., T^{n_o-1}x\} \cup \{T^nx : n \geq n_0\} \subseteq \{x, Tx, T^2x, ..., T^{n_o-1}x\} \cup \overline{B(0, \|x\|)}$$

Con lo que la órbita de x por T es un conjunto acotado.

Por lo tanto, T no es hipercíclico.

■

Teorema 2.1. 5 *(Teorema de Birkhoff). Sea X un F-espacio separable y un operador $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces, T es hipercíclico si y solo si T es topológicamente transitivo. En ese caso, $HC(T)$ es un conjunto $G_\delta - denso$.*

Demostración.

“ $\Longrightarrow$ ”

Sea X un F-espacio separable y un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico.

Sea $x \in HC(T)$, entonces, $Orb(x, T)$ es densa en X.

Probemos que $Orb(x, T) \subset HC(T)$.

Sea $T^k x \in Orb(x, T), k \in \mathbb{N}_0$.

$Orb(T^k x, T) = \{T^k x, T^{k+1} x, ...\}$

$\Longrightarrow Orb(T^k x, T) = \{x, Tx, T^2 x, ...\} - \{x, Tx, ..., T^{k-1} x\}$

$\Longrightarrow Orb(T^k x, T) = Orb(x, T) - \{x, Tx, ..., T^{k-1} x\}$

Por ser X separable sabemos que es denso, por lo que, X no tiene puntos aislados. Entonces, al quitar finitos puntos, el conjunto se mantiene denso. Entonces, $Orb(T^k x, T)$ es densa en X. Lo que implica que:

$$T^k x \in HC(T) \tag{2.1.1}$$

Por lo tanto, $Orb(x, T) \subset HC(T)$.

Sean U y V abiertos no vacíos en X.

Cómo $Orb(x, T)$ es densa en X, todo abierto en X no importa que tan pequeño sea, contendrá puntos de $Orb(x, T)$ (Definición 1.1.9)

$\Longrightarrow U \cap Orb(x, T) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in U$

Por ecuación (2.1.1) sabemos que $T^n x \in HC(T)$, por lo que tiene órbita densa en X.

$\Longrightarrow V \cap Orb(T^n x, T) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists m \geq n : T^m x \in V$

Podemos representar $T^m x$ cómo $T^{m-n+n}x$.

$\Longrightarrow T^m x = T^{m-n}(T^n x), T^n x \in U$

$\Longrightarrow T^m x = T^k(T^n x), k = m - n \in \mathbb{N}_0$

$\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : T^k(U) \cap V \neq \emptyset$

Por lo tanto, T es topológicamente transitivo.

"$\Longleftarrow$"

Sea X un F-espacio separable y un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ topológicamente transitivo.

Cómo X es separable, admite un conjunto denso numerable $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$.

Sea $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ el conjunto de las bolas abiertas centradas en y_j de radio $\frac{1}{m}$ con $m \in \mathbb{N}$.

Sea V abierto en X, $x \in V$.

$\Longrightarrow \exists m > 0 : B(x, \frac{1}{m}) \subset V$

Cómo $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ es denso tenemos:

$\Longrightarrow \exists j \in \mathbb{N} : y_j \in B(x, \frac{1}{2m})$

$\Longrightarrow x \in B(y_j, \frac{1}{2m}) \subset B(x, \frac{1}{m}) \subset V$

Por lo tanto, $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ forma una base de la topología de X.

Cómo $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de la topología de X y por la continuidad de T tenemos:

$$x \in HC(T) \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in U_k \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}_0 : x \in T^{-n}(U_k)$$

En otras palabras:

$$HC(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$$

Cómo U_k, $\forall k \in \mathbb{N}$ es abierto en X y T es continuo entonces, $T^{-n}(U_k)$ es un subconjunto abierto de X (teorema 1.1.8).

Ya que la unión de conjuntos abiertos es un abierto, tenemos que, cada conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ con $k \in \mathbb{N}$ es abierto. Por definición 1.1.73 tenemos que, $HC(T)$ es un conjunto $G_\delta - denso$.

Como por hipótesis T es continuo y topológicamente transitivo , tenemos que:

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 : T^n(V) \cap U_k \neq \emptyset, \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Pero esto ocurre si para todo U_k abierto en X se tiene que $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ con $k \in \mathbb{N}$ es denso en X.

Por lo que cada conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ con $k \in \mathbb{N}$ es abierto y denso en X.

Aplicando el teorema 1.1.44 de la categoría de Baire, obtenemos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ es un conjunto denso.

Por lo tanto, $HC(T)$ es denso y no vacío.

Por lo tanto, T es hipercíclico. ■

Corolario 2.1. 6 *Sea X un F- espacio separable y $T \in \mathcal{L}(X)$, T invertible. Entonces, T es hipercíclico si y solo si T^{-1} es hipercíclico.*

Demostración.

Sea X un F- espacio separable y $T \in \mathcal{L}(X)$, T invertible. Por teorema 2.1.5 T es hipercíclico si y solo si T es topológicamente transitivo. Por teorema 1.1.70 si T es invertible entonces, T es topológicamente transitivo si y solo si T^{-1} es topológicamente transitivo. Por teorema 2.1.5 T^{-1} es topológicamente transitivo si y solo si T^{-1} es hipercíclico. Por lo tanto, T es hipercíclico si y solo si T^{-1} es hipercíclico. ■

2.2. El criterio de hiperciclicidad

El criterio de la hiperciclicidad fue presentado primeramente por C.Kitai el cual lo formuló para espacios de Banach; luego R.Gethner y J.H Shapiro lo extendieron para espacios de Fréchet. Existe una versión más general de dicho criterio formulado por J.P Bés en el cual los criterios antes mencionados quedan como un caso particular (Recordemos que todo espacio de Banach es de Fréchet).

Se denotará a la composición de operadores T y S como TS a menos que se señale lo contrario. En el caso de ser una composición con el mismo operador T, se denotará como $T(T)$.

Definición 2.2. 1 *(Criterio de Hiperciclicidad C. Kitai y R.Gethner - J.H Shapiro). Sea* X *un espacio de Fréchet separable y* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Decimos que* T *satisface el criterio de hiperciclicidad C. Kitai y R.Gethner - J.H Shapiro, si existe una sucesión creciente* $(n_k) \subset \mathbb{N}$ *y subconjuntos densos* $D_1 \subseteq D_2 \subset X$ *y una aplicación* $S : D_2 \longrightarrow D_2$ *que cumplen:*

- $T^{n_k}x \longrightarrow 0, \quad \forall\, x \in D_1.$
- $S^{n_k}y \longrightarrow 0, \quad \forall\, y \in D_2.$
- $TS = I_{D_2}.$

Dicho criterio ha sufrido varias generalizaciones a lo largo del tiempo, imponiendo cada vez hipótesis más débiles. Por ejemplo el siguiente criterio formulado por G.Godefroy y J.H Shapiro.

Definición 2.2. 2 *(Criterio de Hiperciclicidad I). Sea X un espacio vectorial topológico y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Decimos que T satisface el criterio de la hiperciclicidad I, si existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ y subconjuntos densos $D_1, D_2 \subset X$, que cumplen:*

- $T^{n_k}x \longrightarrow 0, \quad \forall\, x \in D_1$.
- *Para cada $y \in D_2$, existe $(v_k) \subset X$ tal que, $v_k \longrightarrow 0$ y $T^{n_k}v_k \longrightarrow y$.*

Definición 2.2. 3 *(Criterio de Hiperciclicidad - Bés). Sea X un espacio de Fréchet separable y $T \in \mathcal{L}(X)$. Decimos que T satisface el criterio de hiperciclicidad - Bés si existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$; subconjuntos densos $D_1, D_2 \subset X$ y aplicaciones $S_{n_k} : D_2 \longrightarrow X$, que cumplen:*

- $T^{n_k}x \longrightarrow 0, \quad \forall\, x \in D_1$.
- $S_{n_k}y \longrightarrow 0, \quad \forall\, y \in D_2$.
- $T^{n_k}S_{n_k}y \longrightarrow y, \quad \forall\, y \in D_2$.

Observemos que si T satisface el criterio de hiperciclicidad C. Kitai y R.Gethner - J.H Shapiro, entonces, satisface la versión del criterio de hiperciclicidad - Bés. Tomamos la misma sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ y los mismos subconjuntos densos $D_1, D_2 \subset X$ y tomamos las aplicaciones $S_{n_k} : D_2 \longrightarrow X$, como las sucesivas composiciones de la aplicación que da el criterio de Hiperciclicidad C. Kitai y R.Gethner - J.H Shapiro, es decir: $S_{n_k} = S...S = S^{n_k}$. A. Peris mostró que todos los criterios enunciados anteriormente son equivalentes. Por lo que, se llega a la conclusión de que, T satisface el criterio de hiperciclicidad, si T satisface alguno de los criterios enunciados anteriormente.

Teorema 2.2. 4 *Sea X un F- Espacio separable localmente convexo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Si T satisface el criterio de hiperciclicidad - Bés, entonces, T es hipercíclico.*

Demostración.

Sea X un F- Espacio separable localmente convexo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que, satisface el criterio de hiperciclicidad - Bés.

Por definición $2.2.3$ (criterio de hiperciclicidad - Bés) entonces, existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$; subconjuntos densos $D_1, D_2 \subset X$ y aplicaciones $S_{n_k} : D_2 \longrightarrow X$,que cumplen:

- $T^{n_k}x \longrightarrow 0, \quad \forall\, x \in D_1$
- $S_{n_k}y \longrightarrow 0, \quad \forall\, y \in D_2$
- $T^{n_k}S_{n_k}y \longrightarrow y, \quad \forall\, y \in D_2$

Demostremos que T es topológicamente transitivo.

Sean U, V dos abiertos no vacíos de X.

Cómo D_1, D_2 son conjuntos densos de X, por definición $1.1.9$ podemos tomar $x \in U \cap D_1$ e $y \in V \cap D_2$.

Por el segundo ítem del criterio de hiperciclicidad-Bés tenemos $S_{n_k}(y) \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow x + S_{n_k}y \longrightarrow x + 0$

$\Longrightarrow x + S_{n_k}y \longrightarrow x$

$\Longrightarrow x + S_{n_k}y \longrightarrow x \in U.$

Aplicando T^{n_k} a $x + S_{n_k}y$, y como T es un operador lineal continuo tenemos,

$$T^{n_k}(x + S_{n_k}y) = T^{n_k}x + T^{n_k}S_{n_k}y.$$

Por el primer y tercer ítem del criterio de hiperciclicidad-Bés tenemos,

$$T^{n_k}(x + S_{n_k}y) = T^{n_k}x + T^{n_k}S_{n_k}y \longrightarrow 0 + y.$$

Lo que implica que, $T^{n_k}(x + S_{n_k}y) \longrightarrow y \in V$.

Tomando un k lo suficientemente grande, tenemos que,

$$T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$$

Lo que implica que, existe un $n_k \in \mathbb{N}$ tal que, $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$. Por definición 1.1.69 entonces, T es topológicamente transitivo.

Por teorema de Birkhoff entonces, T es hipercíclico. ■

Teorema 2.2. 5 *(Godefroy-Shapiro). Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ donde X es un F- Espacio localmente convexo separable. Supongamos que tanto $\bigcup_{|\lambda|>1} Ker(T - \lambda)$ como $\bigcup_{|\lambda|<1} Ker(T - \lambda)$, generan subespacios densos. Entonces, T es hipercíclico.*

Demostración.

Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ donde X es un F- Espacio localmente convexo separable.

Supongamos que tanto $\bigcup_{|\lambda|<1} Ker(T - \lambda)$ como $\bigcup_{|\lambda|>1} Ker(T - \lambda)$, los cuales generan subespacios densos D_1 y D_2 respectivamente.

Probemos que la sucesión $(n_k)_{k\geq 0}$, $n_k = k$ para todo $k \geq 0$; los conjuntos densos D_1, D_2 y los operadores $S_k : D_2 \longrightarrow X$ definidos como $S_k y = \lambda^{-k}(y)$ si $Ty = \lambda y$ con $|\lambda| > 1$ cumplen el criterio de hiperciclicidad - Bés.

- Sea $x \in D_1$, podemos escribir $x = x_1 + ... + x_q$ con únicos $x_i \in Ker(T - \lambda_i)$, $|\lambda_i| < 1$.

  $\Longrightarrow T^k x = T^k(x_1 + ... + x_q)$

  $\Longrightarrow T^k x = T^k x_1 + ... + T^k x_q$

  $\Longrightarrow T^k x = \sum_{i=1}^{q} T^k x_i$

  $\Longrightarrow T^k x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k (x_i)$

  $\Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow \infty} T^k x = \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k (x_i)$

  $\Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow \infty} T^k x = \sum_{i=1}^{q} \lim_{k \longrightarrow \infty} \lambda_i^k (x_i)$

  Cómo $|\lambda_i| < 1$ implica que, $\lim_{k \longrightarrow \infty} \lambda_i^k = 0$

  $\Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow \infty} T^k x = 0.$

  Por lo tanto, $T^k x \longrightarrow 0, \forall x \in D_1$.

- Sea $y \in D_2$ podemos escribir $y = y_1 + ... + y_p$ con únicos $y_i \in Ker(T - \lambda_i)$, $|\lambda_i| > 1$.

  $\Longrightarrow S_k y = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i^k} y_i$

  $\Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow \infty} S_k y = \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i^k} y_i$

  $\Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow \infty} S_k y = \sum_{i=1}^{p} \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_i^k} y_i$

  Cómo $|\lambda_i| > 1$ implica que, $\lim_{k \longrightarrow \infty} \lambda_i^k = \infty$, por lo que, $\lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_i^k} = 0$.

  $\Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow \infty} S_k y = 0.$

  Por lo tanto, $S_k y \longrightarrow 0, \forall y \in D_2$.

- Sea $y \in D_2$ podemos escribir $y = y_1 + ... + y_p$ con únicos $y_i \in Ker(T - \lambda_i)$, $|\lambda_i| > 1$.

$$\Longrightarrow T^k S_k y = T^k \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i^k} y_i \right)$$
$$\Longrightarrow T^k S_k y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \frac{1}{\lambda_i^k} y_i$$
$$\Longrightarrow T^k S_k y = \sum_{i=1}^{p} y_i$$
$$\Longrightarrow T^k S_k y = y$$

Por lo tanto, $T^k S_k y \longrightarrow y, \forall y \in D_2$.

Por lo tanto, satisface el criterio de hiperciclicidad-Bés.

Por teorema $2.2.4$ entonces, T es hipercíclico. ∎

Proposición 2.2. 6 *(Criterio de Comparación). Sean X y X_0 espacios vectoriales topológicos y $T : X \longrightarrow X$, $R : X_0 \longrightarrow X_0$ funciones continuas. Supongamos que existe $J : X \longrightarrow X_0$ continua de rango denso tal que, el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X} \arrow[r, "\boldsymbol{T}"] \arrow[d, "\boldsymbol{J}"'] & \boldsymbol{X} \arrow[d, "\boldsymbol{J}"] \\
\boldsymbol{X_0} \arrow[r, "\boldsymbol{R}"'] & \boldsymbol{X_0}
\end{tikzcd}$$

Entonces:

a) $Orb(Jx, R) = J(Orb(x, T))$. Luego, si T es hipercíclico entonces, también lo es R.

b) Si J es lineal y T satisface el criterio de hiperciclicidad, entonces, R también lo satisface.

Demostración.

Sean X y X_0 espacios vectoriales topológicos y $T : X \longrightarrow X$, $R : X_0 \longrightarrow X_0$ funciones continuas. Supongamos que existe $J : X \longrightarrow X_0$ continua de rango denso tal que, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X} \arrow[r, "\boldsymbol{T}"] \arrow[d, "\boldsymbol{J}"'] & \boldsymbol{X} \arrow[d, "\boldsymbol{J}"] \\
\boldsymbol{X_0} \arrow[r, "\boldsymbol{R}"'] & \boldsymbol{X_0}
\end{tikzcd}$$

Sea $D \subseteq X$ un conjunto denso, probemos que $\overline{J(D)} = X_0$.

Sabemos que $\overline{J(D)} \subseteq X_0$, probemos que $\overline{J(D)} \supseteq X_0$.

Partimos de que $\overline{J(D)} = \overline{\overline{J(D)}}$.

$\Longrightarrow \overline{J(D)} = \overline{\overline{J(D)}} \supseteq \overline{J(\overline{D})}$

$\Longrightarrow \overline{J(D)} \supseteq \overline{J(\overline{D})} = \overline{J(X)}$

$\Longrightarrow \overline{J(D)} \supseteq \overline{J(X)} = X_0$

$\Longrightarrow \overline{J(D)} \supseteq X_0$

Cómo $\overline{J(D)} \subseteq X_0$ y $\overline{J(D)} \supseteq X_0$ entonces, $\overline{J(D)} = X_0$.

Por lo tanto, J manda conjuntos densos en conjuntos densos.

- Ahora probemos el literal a). Para todo $x \in X$ tenemos:

$$Orb(Jx, R) = \{R^n Jx : n \in \mathbb{N}_0\}$$

Como el diagrama conmuta tenemos JT = RJ. Entonces,

$$R^nJ = R(R(...(R(J))...))$$
$$R^nJ = R(R(...(J(T))...))$$
$$\vdots$$
$$R^nJ = R(J(...(T(T))...))$$
$$R^nJ = J(T(...(T(T))...))$$
$$R^nJ = J(T^n)$$

Por lo anterior, tenemos que,

$$Orb(Jx, R) = \{R^nJx : n \in \mathbb{N}_0\} = \{JT^nx : n \in \mathbb{N}_0\} = J(Orb(x, T))$$

Por lo tanto, $Orb(Jx, R) = J(Orb(x, T))$.

Ahora por hipótesis T es hipercíclico. Sea $x \in HC(T)$ entonces, $Orb(x, T)$ es densa en X.

Como J manda conjuntos densos en conjuntos densos, tenemos que, $J(Orb(x, T))$ es denso en X_0, lo que implica que, $Jx \in HC(R)$.

Por lo tanto, R es hipercíclico.

- Probemos el literal b).

  Por hipótesis J es lineal y T satisface el criterio de hiperciclicidad I (Definición 2.2.2), entonces, existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ y subconjuntos densos $D_1, D_2 \subset X$, que cumplen:

  - $T^{n_k}x \longrightarrow 0, \quad \forall x \in D_1$
  - Para cada $y \in D_2$, existe $(v_k) \subset X$ tal que, $v_k \longrightarrow 0$ y $T^{n_k}v_k \longrightarrow y$

Probemos que R satisface el criterio de hiperciclicidad I con la misma sucesión $(n_k) \subset \mathbb{N}$ y los subconjuntos densos $J(D_1), J(D_2) \subset X_0$, dado que $D_1, D_2 \subset X$ son densos y J manda conjuntos densos en conjuntos densos.

- Sea $x_0 \in J(D_1)$, entonces, existe un $x \in D_1$ tal que, $x_0 = Jx$.

  $\Longrightarrow R^{n_k}x_0 = R^{n_k}Jx$

  Por literal a) sabemos que, $R^{n_k}Jx = JT^{n_k}x$.

  $\Longrightarrow R^{n_k}x_0 = JT^{n_k}x$

  $\Longrightarrow \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} R^{n_k}x_0 = \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} JT^{n_k}x.$

  Cómo J es una aplicación lineal y continua entonces, $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} R^{n_k}x_0 = J\left(\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} T^{n_k}x\right).$

  Ya que T cumple con el criterio de hiperciclicidad I, entonces, $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} T^{n_k}x = 0$ para todo $x \in D_1$ lo que implica que, $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} R^{n_k}x_0 = J(0)$ para todo $x_0 \in X_0$.

  Como J es una aplicación lineal y continua, tenemos, $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} R^{n_k}x_0 = J(0) = 0$ para todo $x_0 \in X_0$.

  $\Longrightarrow \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} R^{n_k}x_0 = 0, \forall x_0 \in X_0$

  Por lo tanto, $R^{n_k}x_0 \longrightarrow 0$, para todo $x_0 \in X_0$.

- Sea $y_0 \in J(D_2)$, entonces, existe un $y \in D_2$ tal que, $y_0 = Jy$.

  Cómo T cumple el criterio de la hiperciclicidad I, entonces, existe $(v_k) \subset X$ tal que, $v_k \longrightarrow 0$ y $T^{n_k}v_k \longrightarrow y$.

  Por ser J lineal y continua entonces, $Jv_k \longrightarrow 0$, con $(Jv_k) \subset X_0$.

  Por literal a) sabemos que $R^{n_k}Jv_k = JT^{n_k}v_k$.

  $\Longrightarrow \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} R^{n_k}Jv_k = \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} JT^{n_k}v_k$

  Por ser J lineal y continua, $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} R^{n_k}Jv_k = J\left(\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} T^{n_k}v_k\right).$

Cómo $T^{n_k}v_k \longrightarrow y$ implica que, $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} R^{n_k}Jv_k = Jy$.

$\Longrightarrow \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} R^{n_k}Jv_k = y_0$

Por lo tanto, para todo $y_0 \in D_2$ existe $(Jv_k) \subset X_0$ tal que,

$Jv_k \longrightarrow 0$ y $R^{n_k}Jv_k \longrightarrow y_0$.

Por lo tanto, R cumple el criterio de hiperciclicidad I. ■

Corolario 2.2. 7 *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico y $J : X \longrightarrow X$ continua de rango denso tal que, $TJ = JT$, entonces $HC(T)$ es J - invariante.*

Demostración.

Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico y $J : X \longrightarrow X$ continua de rango denso tal que, $TJ = JT$, es decir, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] & \boldsymbol{X} \arrow[d, "J"] \\ \boldsymbol{X} \arrow[r, "T"'] & \boldsymbol{X} \end{tikzcd}$$

Para ver que $HC(T)$ es J - invariante, debemos probar que $J(HC(T)) \subset HC(T)$.

Sea $x_0 \in J(HC(T))$. Entonces $x_0 = Jx$, para algún, $x \in HC(T)$. Cmo $x_0 = Jx$ entonces $Tx_0 = TJx$, y dado que $TJ = JT$ tenemos:

$$Tx_0 = TJx = JTx$$

$$\Rightarrow T^2x_0 = T(Tx_0) = TJTx = J(T^2x)$$

$$\vdots$$

Por lo que, tendríamos que $Orb(x_0, T) = J(Orb(x, T))$.

Por literal a) del criterio de comparación, sabemos que, dado que T es hipercíclico, entonces, $Orb(x_0, T) = J(Orb(x, T))$ es densa en X.

Cómo $Orb(x_0, T)$ es densa en X, esto implica que, $x_0 \in HC(T)$.

Por lo tanto, $J(HC(T)) \subset HC(T)$, es decir, que $HC(T)$ es J - invariante. ■

A partir del lema 2.2.8 hasta el corolario 2.2.12, es teoría necesaria para demostrar el teorema 2.2.13. Básicamente, con dicho resultado se puede observar que el conjunto de vectores hipercíclicos es grande en un sentido algebraico, cuando el operador asociado a dicho conjunto es hipercíclico.

Lema 2.2. 8 *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es un operador hipercíclico y $L \subset X$ es un subespacio $T-$ invariante; entonces, $L = X$ ó L tiene codimensión infinita en X (que tenga codimensión infinita en X se refiere a que la dimensión del espacio cociente X/L es infinita).*

Demostración.

Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico y $L \subset X$ es un subespacio $T-$ invariante, es decir, $T(L) \subset L$ (Definición1.1.45). Por lo que, para todo $x \in L$ se verifica que $T(x) \in L$.

Supongamos que $L \neq X$ y la codimensión de L en X es finita, es decir, $dim(X/L) < \infty$.

Sea $q : X \longrightarrow X/L$ la aplicación cociente.

Cómo L es un subespacio de X, entonces, $L = Ker(q) := \{x \in X : q(x) = 0\}$.

Probemos que $L = Ker(q) \subset Ker(q \circ T)$.

Sea $x \in Ker(q)$, entonces, $x \in L$ y por ser L un subespacio $T-invariante$ tenemos que, $Tx \in L$.

Cómo $L = Ker(q)$ y $Tx \in L$, entonces, $q \circ Tx = 0$. Lo que implica que, $x \in Ker(q \circ T)$.

Por lo tanto, $L \subset Ker(q \circ T)$.

Por propiedad universal del espacio vectorial cociente, dado que $L \subset Ker(q \circ T)$ existe una aplicación lineal $A \in \mathcal{L}(X/L)$ tal que, $A \circ q = q \circ T$, es decir, que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "qoT"] & \boldsymbol{X} \arrow[d, "q"] \\ \boldsymbol{X/L} \arrow[r, "A"'] & \boldsymbol{X/L} \end{tikzcd}$$

Cómo q es una aplicación cociente, por definición es continua y sobreyectiva.

Por criterio de comparación (proposición 2.2.6), como T es hipercíclico, entonces A también es hipercíclico.

Pero eso implica que, A es hipercíclico en un espacio de dimensión finita, ya que se supone que $dim(X/L) < \infty$; lo que es una contradicción por teorema 2.1.2.

Por lo tanto, $L = X$. ■

Lema 2.2. 9 *Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico y P un polinomio no nulo (un operador polinómico no nulo). Entonces, el operador PT tiene rango denso.*

Demostración.

Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico, y P un polinomio no nulo.

Si el polinomio P es constante, entonces, PT es un múltiplo no nulo de la identidad y al ser T hipercíclico, tendría rango denso.

Supongamos que, $gr(P) \geq 1$.

Tenemos entonces que,

$$T(PT) = PT(T) \tag{2.2.1}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "PT"] \arrow[d, "T"'] & X \arrow[d, "T"] \\ X \arrow[r, "PT"'] & X \end{tikzcd}$$

Sea $y \in Rang(PT)$, entonces existe $x \in X$ tal que, $PTx = y$.

Por ecuación 2.2.1 tenemos, entonces que $Ty = PT(Tx)$

Lo que implica que, $Ty \in Rang(PT)$

Por lo tanto, $Rang(PT)$ es T- invariante.

Sea $L := \overline{Rang(PT)}$ Por ser T un operador continuo, tenemos, entonces para todo $z \in L$ existe $(z_n) \subset L$ tal que, $z_n \longrightarrow z$.

Como $z \in L$, entonces existe $x \in X$ y $(x_n) \subset X$ tal que, $PTx = z$, y $z_n = PTx_n$.

$\Longrightarrow \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} z_n = z$

$\Longrightarrow T(\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} z_n) = Tz$

Como T es un operador linealmente continuo tenemos $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} Tz_n = Tz$

$\Longrightarrow Tz \in L$

Por lo tanto, L es T- invariante.

Queremos probar que PT es de rango denso, es decir, $L = X$. Por el lema 2.2.8, basta probar que L tiene codimensión finita en X.

Sea $x \in HC(T)$ y $q : X \longrightarrow X/L$ la aplicación cociente.

Sea $\mathbb{K}[Tx]$ el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ y con indeterminadas en Tx.

Probemos que $\mathbb{K}[Tx] \subset Ran(PT) + Span\{T^i x : i < gr(P)\}$.

Sea $Q \in \mathbb{K}[t]$. Por el algoritmo de la división sabemos que existen $r, s \in \mathbb{K}[t]$ con $gr(r) < gr(P)$ o $r = 0$ tal que, $Q(T) = P(T)s(T) + r(T)$.

$\Longrightarrow Q(T) = P(T)s(T) + r(T)$

$\Longrightarrow Q(T)x = P(T)(s(T)x) + r(T)x \in Ran(PT) + Span\{T^i(x) : i < gr(P)\}$

$\Longrightarrow Q(T)x \in Ran(PT) + Span\{T^i x : i < gr(P)\}$

Por lo tanto,

$$\mathbb{K}[Tx] \subset Ran(PT) + Span\{T^i x : i < gr(P)\} \tag{2.2.2}$$

De la inclusión 2.2.2 tenemos:

$$q(\mathbb{K}[Tx]) \subset q(Span\{T^i x : i < gr(P)\})$$

esto debido a que $q(Ran(PT))$ se anula dado que $Ran(PT)$ está incluido en L.

Como la dimensión de $q(Span\{T^i x : i < gr(P)\})$ es finita, dado que los $T^i x$ están condicionados a que $i < gr(P)$. Entonces la dimensión de $q(\mathbb{K}[Tx])$ es finita también, por ser subconjunto de $q(Span\{T^i x : i < gr(P)\})$.

Como la aplicación cociente es sobreyectiva, entonces $X/L = q(X)$.

Dado que $x \in HC(T)$, entonces $X/L = q(X)$ es de dimensión finita.

Por lema 2.2.8 cómo $T \in \mathcal{L}(X)$ es un operador hipercíclico, $L := \overline{Rang(PT)} \subset X$ es un subespacio T-invariante y L tiene dimensión finita en X, entonces $L = X$.

Por lo tanto, como $\overline{Rang(PT)} = X$, entonces el rango del operador PT es denso. ■

Definición 2.2. 10 *Sea X un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico. Decimos que el subespacio $E \subset X$ es variedad hipercíclica de T, si $E - \{0\} \subset HC(T)$.*

Teorema 2.2. 11 *Sea X un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico. Si x es un vector hipercíclico para T, entonces $\mathbb{K}[Tx]$ es variedad hipercíclica de T. En particular, T admite una variedad hipercíclica densa.*

Demostración.

Sea X un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico.

Sea $x \in HC(T)$.

Probemos que $[\mathbb{K}[Tx] - \{0\}] \subset HC(T)$.

$[\mathbb{K}[Tx] - \{0\}]$ representa el anillo de los polinomios no nulos con coeficientes en $\mathbb{K}$ y con indeterminadas Tx.

Sea $PTx \in [\mathbb{K}[Tx] - \{0\}]$.

Por hipótesis tenemos que T es hipercíclico, por lema 2.2.9, PT tiene rango denso tal que, $T(PT) = PT(T)$, por ecuación 2.2.1. Entonces por corolario 2.2.7 tenemos que, $HC(T)$ es PT- invariante.

Como $HC(T)$ es PT- invariante, por definición, $PT(HC(T)) \subset HC(T)$.

Entonces $PTx \in HC(T)$ para todo $P \in \mathbb{K}[t]$ no nulo.

Lo que implica que, $[\mathbb{K}[Tx] - \{0\}] \subset HC(T)$.

Por lo tanto, $\mathbb{K}[Tx]$ es variedad hipercíclica de T; y resulta ser denso pues, $Orb(x, T) \subset \mathbb{K}[Tx]$.

■

Corolario 2.2. 12 *$T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico. Entonces, $HC(T)$ es conexo.*

Demostración.

Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico y $x \in HC(T)$ fijo.

Observemos que $HC(T)$ se encuentra entre los siguientes conjuntos conexos:

$$\mathbb{K}[Tx] \subset HC(T) \subset X$$

donde $\mathbb{K}[Tx]$ es denso en X, según la prueba del teorema anterior.

Supongamos que $HC(T) = A \cup B$, donde, $A \cap B = \emptyset$.

Como $\mathbb{K}[Tx] \subset HC(T) = A \cup B$, entonces $\mathbb{K}[Tx] \subset A \cup B$, y al ser conexo, sin perdida de generalidad, podemos suponer que $\mathbb{K}[Tx] \subset A$.

$\mathbb{K}[Tx] \subset A$ es denso en X y B es abierto tal que, $A \cap B = \emptyset$. Es decir, que como $\mathbb{K}[Tx]$ es denso en X implica que, todo abierto no vacío de X intersectado con él es también no vacío, lo que implicaría que, $\mathbb{K}[Tx] \cap B \neq \emptyset$ si $B \neq \emptyset$; pero como $\mathbb{K}[Tx] \subset A$ es conexo y $A \cap B = \emptyset$, implica que, $\mathbb{K}[Tx] \cap B = \emptyset$, lo que implicaría que, $B = \emptyset$.

Por lo tanto, $HC(T) \subset A$, lo que implica que, $HC(T)$ es conexo. ■

Teorema 2.2. 13 *Sean X un espacio de Fréchet separable, y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico. Entonces $HC(T)$ es homeomorfo a X.*

Demostración.

Sean X un espacio de Fréchet separable, y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico. Por demostración del teorema de Birkhoff, sabemos que si $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de la topología de X, entonces

$$HC(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$$

Sea $A = X - HC(T)$. Sustituyendo $HC(T)$ y por leyes de morgan, tenemos:

$$\Longrightarrow A = X - \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$$

$$\Longrightarrow A = X \bigcap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k) \right)^c$$

$$\Longrightarrow A = X \bigcap \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k) \right)^c \right]$$

$$\Longrightarrow A = X \bigcap \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} (T^{-n}(U_k))^c \right]$$

$$\Longrightarrow A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} X - T^{-n}(U_k)$$

Sea $B_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} X - T^{-n}(U_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Probemos que B_k , $k \in \mathbb{N}$ son $Z-$ sets. Para ello debemos probar que dado $B_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} X - T^{-n}(U_k)$ para cualquier espacio métrico compacto K en X, se cumple que, $C(K, X - B_k)$ es denso en $C(K, X)$ con respecto a la topología de convergencia uniforme en $C(K, X)$. Por definición 1.1.29 de densidad, lo que debemos probar es que dados un espacio métrico compacto K, $f \in C(K, X)$ y un entorno abierto O (de 0) en X, existe un $g \in C(K, X)$ tal que:

- $g(K) \subset X - B_k$
- $(g - f)(K) \subset O$.

Antes observemos que $B_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} X - T^{-n}(U_k)$ sustituyendo en $X - B_k$, y por leyes de morgan tenemos:

$$\Longrightarrow X - B_k = X - \bigcap_{n=0}^{\infty} X - T^{-n}(U_k)$$

$$\Longrightarrow X - B_k = X \bigcap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} X - T^{-n}(U_k) \right)^c$$

$$\Longrightarrow X - B_k = X \bigcap \bigcup_{n=0}^{\infty} (X - T^{-n}(U_k))^c$$

$$\Longrightarrow X - B_k = X \bigcap \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$$

$$\Longrightarrow X - B_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k).$$

Ahora comencemos con la prueba.

Como X es un espacio de Fréchet, por definición 1.2.1 es localmente convexo. Por definición 1.1.53 de localmente convexo,tenemos que X es un espacio de Hausdorff y O es convexo.

Sea $x \in HC(T)$.

Para cada $t \in K$, elegimos $m_t \in \mathbb{N}$ tal que:

$$T^{m_t}x - f(t) \in O$$

y definimos $W_t := \{s \in K : T^{m_t}x - f(s) \in O\} \subset K$. De esta forma, obtenemos un cubrimiento por abiertos $(W_t)_{t \in K}$ del compacto K.

Por definición de compacidad, podemos extraer una subcolección finita de $(W_t)_{t \in K}$ que también cubre a K.

Cómo X es Hausdorff, por teorema 1.1.52, entonces $K \subset X$ es Hausdorff.

Ya que K es Hausdorff compacto, por teorema 1.1.65, entonces es normal.

Sea $(W_{t_i})_{1\leq i\leq p}$ el subcubrimiento finito del espacio K normal. Entonces, por teorema 1.1.76 existe una partición de la unidad dominada por $(W_{t_i})_{1\leq i\leq p}$.

Por definición 1.1.75 de partición de la unidad, existe una familia de funciones continuas

$$\phi_i : X \longrightarrow [0,1] \text{ para } i = 1, ..., p$$

que cumple:

- $sop(\phi_i) \subset W_{t_i}$, para cada i.
- $\sum_{i=1}^{p} \phi_i(x) = 1$, para cada x.

Denotamos $m_i = m_{t_i}$ y $g := \sum_{i=1}^{p} \phi_i T^{m_i} x$ donde g está conformada por una multiplicación.

Ahora probemos que g definido de esa forma cumple las condiciones para que $C(K, X - B_K)$ sea denso en $C(K, X)$.

- Para todo $s \in K$ y $f \in C(K, X)$ tenemos: $g(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(s) T^{m_i} x - f(s)$

  $$\Longrightarrow g(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(s) T^{m_i} x - 1(f(s))$$

  $$\Longrightarrow g(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(s) T^{m_i} x - \sum_{i=1}^{p} \phi_i(s)(f(s))$$

  $$\Longrightarrow g(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(s)[T^{m_i} x - f(s)]$$

Cómo para cada $t \in K$ tenemos, $T^{m_t}x - f(t) \in O$, entonces, $g(s) - f(s)$ resulta ser una combinación convexa de elementos de O. Al ser O convexo, concluimos que $g(s) - f(s) \in O$.

Por lo tanto, como cumple para todo $s \in K$ implica que, $g(K) - f(K) \subset O$.

- Para cada $a \in K$, podemos escribir $g(a) = P_a(T)x$ con $P_a(z) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(a) z^{m_i}$ polinomio no nulo.

  Por hipótesis T es hipercíclico y por lema 2.2.9, $P_a(T)$ es de rango denso tal que, $T(PT) = PT(T)$ por ecuación 2.2.1, entonces por corolario 2.2.7 tenemos que, $HC(T)$ es $P_a(T)-$ invariante.

  Como $HC(T)$ es $P_a(T)-$ invariante, por definición tenemos que, $P_a(T)(HC(T)) \subset HC(T)$, entonces $P_a(T)x \in HC(T)$. Lo que implica que existe un $n_a \in \mathbb{N}$ tal que, $T^{n_a}(g(a)) \in U_k$.

  Como $T^{n_a}(g(a)) \in U_k$, entonces $T^{-n_a}(T^{n_a}(g(a))) \in T^{-n_a}(U_k)$; dado que es para cada $a \in K$, tenemos que:

$$T^{-n}(T^n(g(K))) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$$

  Pero toda aplicación cumple que, $g(K) \subset T^{-n}(T^n(g(K)))$, entonces $g(K) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$.

  Lo que implica que, $g(K) \subset X - B_k$.

Por lo que existe un $g \in C(K, X)$ tal que: $g(K) \subset X - B_k$, $(g - f)(K) \subset O$. Lo que implica que, $C(K, X - B_k)$ es denso en $C(K, X)$.

Por lo tanto, los B_k, $k \in \mathbb{N}$ son $Z-$ sets. Entonces A es una unión numerable de conjuntos $Z-$ sets.

Por lema 1.2.10 como X es separable de Fréchet y $A \subset X$ es unión numerable de $Z-$ sets, entonces $X - A$ es homeomorfo a X.

Pero sustituyendo A tenemos,

$X - A = X \cap A^c$

$X - A = X \cap [X - HC(T)]^c$

$X - A = X \cap HC(T)$

$X - A = HC(T)$

Por lo tanto, $HC(T)$ es homeomorfo a X.

$\blacksquare$

2.3. Primeros ejemplos conocidos de operadores hipercíclicos

En la presente sección se desarrollarán dos ejemplos de los primeros operadores hipercíclicos que se encontraron. El primero fue presentado por G.R. MacLane en el año 1951. El segundo fue presentado por S. Rolewicz en el año 1961.

Ejemplo 2.3. 1 *(Operador de derivación).Sea el espacio* $H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, holomorfa\}$ *dotado con la topología dada por la convergencia uniforme sobre compactos. Dicho espacio métrico es normado, completo y separable con la métrica*

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f-g\|_n}{2^n(1+\|f-g\|_n)}$$

donde, $\|f-g\|_n := \sup_{|x|\leq n}|f(x)-g(x)|$.

Definimos $\mathcal{D} : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$, $\mathcal{D}(f) = f'$.

Por propiedades de la derivada y dado que derivabilidad implica continuidad, tenemos que, $\mathcal{D}$ *es lineal y continua.*

Aplicamos el criterio de la definición 2.2.1 con la sucesión $n_k = k$*; los conjuntos densos* $D_1 = D_2 = \mathbb{C}[z] \subset H(\mathbb{C})$, *y* $S : \mathbb{C}[z] \longrightarrow \mathbb{C}[z]$ *definida por:*

$$S(a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n) = a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + ... + a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

- *Dado* $P \in \mathbb{C}[z]$, *tenemos que,* $\mathcal{D}^n(P) = 0$, *para todo* $n > gr(P)$.

  De aquí es claro que, $\mathcal{D}^n(P) \longrightarrow 0$ *cuando,* $n \longrightarrow \infty$.

- *Sea* $K \subset \mathbb{C}$ *compacto. Por lo que existe* $R > 0$ *tal que,* $K \subset \{z : |z| \geq R\}$*. Entonces:*

$$
\begin{aligned}
S(z^k) &= \frac{z.z^k}{(k+1)} = \frac{z^{k+1}}{(k+1)} \\
\Rightarrow S^2(z^k) &= \frac{z.z^{k+1}}{(k+1)(k+2)} = \frac{z^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \\
\Rightarrow S^3(z^k) &= \frac{z.z^{k+2}}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{z^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&\vdots \\
\Rightarrow S^n(z^k) &= \frac{z.z^{k+n-1}}{(k+1)(k+2)...(k+n)} = \frac{z^{k+n}}{(k+1)(k+2)...(k+n)} = \frac{k!z^{k+n}}{(k+n)!}
\end{aligned}
$$

  y tenemos que;

$$\sup_{z\in K}|S^n(z^k)| \leq \frac{k!R^{k+n}}{(k+n)!} \longrightarrow 0 \text{ cuando, } n \longrightarrow \infty$$

  Por lo tanto, $S^n(P) \longrightarrow 0$ *cuando,* $n \longrightarrow \infty$ *uniformemente sobre compactos, para todo* $P \in \mathbb{C}[z]$.

- *Por como está definido* S *y dado que* $\mathcal{D}$ *representa la derivada, es claro que para cualquier polinomio* P *se tiene que* $\mathcal{D}S(P) = P$*.*

Por lo que se cumplen las condiciones del criterio de la definición 2.2.1.

Por lo tanto, por teorema 2.2.4, $\mathcal{D}$ *es hipercíclico.*

$\blacksquare$

Ejemplo 2.3. 2 *(Operadores Shift) Sea* $B : \ell^p(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^p(\mathbb{N})$*, el shift a izquierda dado por*

$$B(x_0, x_1, ...) = (x_1, x_2, ...), \text{ con } 1 \leq p < \infty$$

Veamos que λB *es hipercíclico, para todo* $|\lambda| > 1$.

Aplicamos nuevamente el criterio de la definición 2.2.1 con la sucesión $n_k = k$*, los conjuntos densos* $D_1 = D_2 = c_{00}(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N})$ *formados por las sucesiones de soporte finito (sucesiones cuyos términos se anulan a partir de cierto elemento en adelante), y tomamos la aplicación* S/λ *con* $S : \ell^p(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^p(\mathbb{N})$*, el shift a derecha dado por* $S(x_0, x_1, ...) = (0, x_0, x_1, ...)$.

- *Dado* $x := (x_0, x_1, ...) \in c_{00}(\mathbb{N})$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que,* $(\lambda B)^n(x) = 0$ *para todo* $n \geq n_0$.

  Entonces $(\lambda B)^n(x_0, x_1, ...) \longrightarrow 0$ *cuando* $n \longrightarrow \infty$.

- *Notemos que* $\|S\| = 1$ *entonces,* $\|S/\lambda\| = 1/|\lambda|$.

  Como $|\lambda| > 1$ *implica que,* $|\lambda|^n \longrightarrow \infty$*, por lo que,* $1/|\lambda|^n \longrightarrow 0$ *cuando,* $n \longrightarrow \infty$.

  Pero $\|(S/\lambda)^n\| \leq 1/|\lambda|^n$*, entonces,* $\|(S/\lambda)^n\| \longrightarrow 0$ *cuando,* $n \longrightarrow \infty$.

  Por lo tanto, dado $x := (x_0, x_1, ...) \in c_{00}(\mathbb{N})$ *tenemos que,*

  $$\|(S/\lambda)^n x\| \longrightarrow 0 \text{ cuando, } n \longrightarrow \infty.$$

- *Es claro que* B *y* S *son mutuamente inversas en* $\ell^p(\mathbb{N})$*, por lo que,* λB *y* S/λ *son mutuamente inversas en* $c_{00}(\mathbb{N})$.

Por lo que, cumplen las condiciones del criterio de la definición 2.2.1.

Por lo tanto, λB *es hipercíclico para todo* λ *con* $|\lambda| > 1$.

∎

2.4. Algunos ejemplos clásicos de operadores hipercíclicos.

2.4.1. Un ejemplo en $L^p[0, 1]$

Existen restricciones sobre los espacios que debemos tomar en cuenta para asegurar la existencia de operadores hipercíclicos. Esta claro que debemos trabajar en espacios vectoriales separables de dimensión infinita. En 1969 S. Rolewicz se preguntó si esta era la única restricción que se debe tener en cuenta para espacios de Banach, dicho problema fue resuelto en 1997 por L. Bernal y S. Ansari, este último mostró que una gran cantidad de espacios siempre admiten operadores hipercíclicos, en particular, espacios de Fréchet bajo ciertas condición admiten operadores hipercíclicos, un año después, J. Bonet y A. Peris demostraron que en todo espacio de Fréchet separable de dimensión infinita hay operadores hipercíclicos.

Por otra parte, ese resultado no se mantiene para espacios completos localmente convexos. Existen ejemplos de espacios separables localmente convexos que no admiten operadores de éste tipo.

Vamos a ver un ejemplo en un espacio no localmente convexo que si admite un operador hipercíclico.

Consideramos el espacio $L^p[0, 1]$, con $0 < p < 1$.

Definimos,

$$L^p[0, 1] = \{f \text{ } medible : N_p(f) = \int_{[0,1]} |f|^p dx < \infty\}$$

Se tiene que, $N_p(f)^{1/p}$ no da una norma, pues no cumple que, $N_p(f) = 0$ entonces, $f = 0$, pues cualquier función que sea igual a la función nula, salvo en un conjunto de medida nula, tendrá norma cero, sin embargo, se puede definir una métrica de la siguiente forma:

$$d(f,g) = (N_p(f-g))^{1/p}$$

la cual hace completo al espacio, por tanto es un F-espacio.

Este no es un espacio de Fréchet, ya que todo abierto convexo que contiene a la función nula es no acotado y el vector 0 no posee una base de entornos convexos.

S. Ansari platea si estos espacios admiten operadores hipercíclicos, en efecto, los admiten y podemos dar un ejemplo de un operador de composición hipercíclico en $L^p[0,1]$.

Consideremos la función

$$\phi : [0,1] \to [0,1]$$

definida por:

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & si \ \ t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3t-1}{2} & si \ \ t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sea

$$C_\phi : L^p \to L^p$$

$$f \to C_\phi(f) = f \circ \phi$$

el operador composición correspondiente, es claro que, C_ϕ es continuo e inversible.

Vamos a ver que satisface el criterio de hiperciclicidad con respecto a la sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $n_k = 2k$, los conjuntos densos

$$D_1 = D_2 = \{f \; continua : f(0) = f(1) = 0\}$$

y $C_{\phi^{-1}}$.

Claramente $C_\phi \circ C_{\phi^{-1}} = I$.

Vamos a ver si $C_\phi^{2n}(f) \to 0$ y $C_{\phi^{-1}}^{2n} \to 0$ para $f \in C[0,1]$ con $f(0) = f(1) = 0$.

Para ello estudiaremos el comportamiento de las funciones $\phi^n = \phi \circ ... \circ \phi$, vemos que cada composición ϕ^n es una función lineal a trozos, es decir, para cada n se tiene una partición $\{0 < a_1 < a_2 < ... < a_n < 1\}$ en $n+1$ intervalos de $[0,1]$

En cada uno de estos intervalos ϕ^n es una recta y se cumple lo siguiente:

Para $t \in [0, a_1]$, $\phi^n(t) \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$

Para $t \in [a_1, a_2]$, $\phi^n(t) \leq (\frac{1}{2})^{n}$

Para $t \in [a_2, a_3]$, $\phi^n(t) \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$

$\vdots$

Para $t \in [a_{n-1}, a_n]$, $\phi^n(t) \leq (\frac{1}{2})^2$

Para $t \in [a_n, 1]$, $\quad \phi^n(t) \leq 1$.

Con $a_n = 1 - \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n-1}$, para $n \geq 1$.

Dado $\varepsilon > 0$.

Sea $M > 0$, tal que, $|f(t)| \leq M$ en $[0, 1]$.

Sea $\delta > 0$ tal que, $|f(t)| < (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}$ en $[0, \delta]$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que, $(\frac{1}{2})^{n+2} < \delta$ y $(\frac{2}{3})^{n-1} < \frac{\varepsilon}{M^p}$

Tenemos que:

Para $t \in [0, a_1]$, $\phi^{2n}(t) \leq (\frac{1}{2})^{2n+1}$

Para $t \in [a_1, a_2]$, $\phi^{2n}(t) \leq (\frac{1}{2})^{2n}$

Para $t \in [a_2, a_3]$, $\phi^{2n}(t) \leq (\frac{1}{2})^{2n-1}$

$\vdots$

Para $t \in [a_{n-1}, a_n]$, $\phi^{2n}(t) \leq (\frac{1}{2})^{n+2}$

$\vdots$

Para $t \in [a_{2n-2}, a_{2n-1}]$, $\phi^{2n}(t) \leq (\frac{1}{2})^3$

Para $t \in [a_{2n-1}, a_{2n}]$, $\phi^{2n}(t) \leq (\frac{1}{2})^2$

Para $t \in [a_{2n}, 1]$, $\phi^{2n}(t) \leq 1$

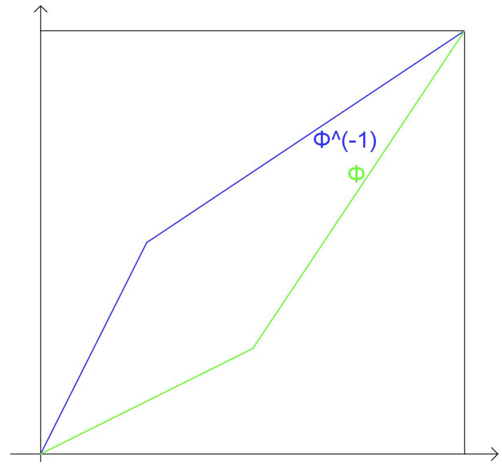

Figura 2.1

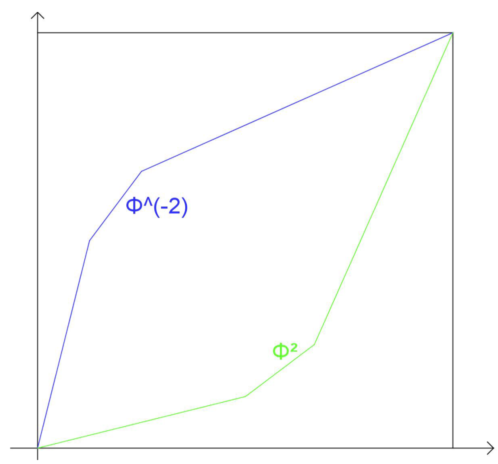

Figura 2.2

Y así, por propiedades de la integral de Lebesgue

$$
\begin{aligned}
d(C_\phi^{2n}(f),0) &= \int_{[0,1]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt \\
&\leq \int_{[0,a_n]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt + \int_{[a_n,1]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt
\end{aligned}
$$

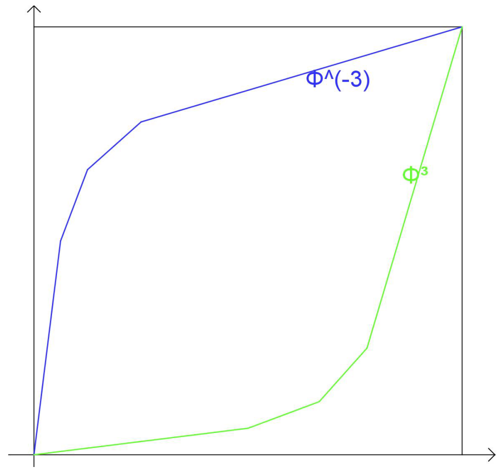

Figura 2.3

Trabajemos por partes:

- $\int_{[0,a_n]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt$

  Tenemos que, $t \in [0, a_n]$, entonces $\phi^{2n}(t) \leq (\frac{1}{2})^{n+2} < \delta$, luego,

$$\int_{[0,a_n]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt \leq \sup_{[0,a_n]} |f(\phi^{2n}(t))|^p .a_n$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- $\int_{[a_n,1]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt$

  Tenemos que, $t \in [a_n, 1]$, entonces $\phi^{2n}(t) \leq 1$

$$\int_{[a_n,1]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt \leq M^p(1 - a_n)$$

$$= M^p(1 - (1 - \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n-1}))$$

$$= M^p(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})^{n-1}$$

$$< M^p(\frac{1}{2})(\frac{\varepsilon}{M^p}) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo que:

$$
\begin{aligned}
d(C_\phi^{2n}(f),0) &= \int_{[0,1]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Por definición de convergencia, $C_\phi^{2n}(f) \to 0$, para $f \in [0,1]$.

De forma análoga, se puede probar que $C_{\phi^{-1}}^{2n}(f) \to 0$ para $f \in C[0,1]$.

Por tanto, C satisface el criterio de hiperciclicidad.

De aquí se puede resaltar dos problemas que aun se mantienen sin solución:

- Caracterizar los espacios vectoriales topológicos que admiten operadores hipercíclicos.
- Determinar si en todo $F-espacio$ separable de dimensión infinita hay operadores hipercíclicos.

2.4.2. Operador Shift

Estudiaremos ahora operadores shift bilaterales en el espacio $l^2(\mathbb{Z})$. Vamos a determinar cuando resultan hipercíclicos en términos de la sucesión de pesos.

Estos resultados se deben a N. Salas.

Definimos

$$B_A : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$$

$$e_n \to B_A(e_n) = a_n e_{n-1}$$

donde, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es la base canónica de $l^2(\mathbb{Z})$ y $A = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión acotada de números reales positivos, que llamaremos sucesión de pesos.

Es claro que $\|B_A\| \leq \|A\|_\infty$.

Trabajaremos con el shift bilateral a izquierda sin pesos en un nuevo espacio $l^2(\mathbb{Z},\omega)$.

Para cada sucesión de pesos $A = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ consideramos una nueva sucesión $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de números positivos definida por $\omega_0 = 1$ y $\frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} = a_{n+1}$.

Así introducimos el espacio

$$l^2(\mathbb{Z},\omega) = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_n^2 x_n^2 < \infty\}$$

y trabajaremos con el shift bilateral sin pesos

$$B : l^2(\mathbb{Z},\omega) \to l^2(\mathbb{Z},\omega)$$

$$e_n \to Be_n = e_{n-1}$$

Vamos a verificar que. B y B_A son unitariamente equivalentes mediante el operador unitario

$$U : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z},\omega)$$

$$e_n \to U(e_n) = (\frac{e_n}{\omega_n})$$

viendo que se cumple que, $U \circ B_A = B \circ U$.

Tenemos que:

Sea $e_n \in l^2(\mathbb{Z})$, entonces:

$U \circ B_A(e_n) = U(B_A(e_n))$

$= U(a_n e_{n-1})$

$= a_n U(e_{n-1})$

$= a_n (\frac{e_{n-1}}{\omega_{n-1}})$ Pero, $a_n = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}$

$= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} (\frac{e_{n-1}}{\omega_{n-1}})$

$= \frac{e_{n-1}}{\omega_n}$

Por otra parte.

Sea $e_n \in l^2(\mathbb{Z})$, entonces:

$B \circ U(e_n) = B(U(e_n))$

$= B(\frac{e_n}{\omega_n})$

$= \frac{1}{\omega_n} B(e_n)$

$= \frac{1}{\omega_n} e_{n-1}$

$= \frac{e_{n-1}}{\omega_n}$

Por lo tanto, $U \circ B_A = B \circ U$

Ahora bien, por el criterio de comparación, B_A es hipercíclico y por lo tanto, B también lo es.

Teorema 2.4: Sea $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión de números positivos tales que,

$$\sup_n \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} < \infty$$

y sea B el operador shift bilateral sin pesos actuando en $l^2(\mathbb{Z}, \omega)$. Entonces, B es hipercíclico si y sólo si para todo $q \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to \infty} \inf \omega_{\pm n+q} = 0$$

Demostración :

$\Longrightarrow$

Sea $B : l^2(\mathbb{Z}, \omega) \to l^2(\mathbb{Z}, \omega)$ un operador shift bilateral sin pesos hipercíclico.

Fijemos $q \in \mathbb{N}$.

Tomemos $\delta \in (0, 1)$ y consideremos la bola $B(e_q, \delta)$ (e_q es un elemento de la base canónica de $l^2(\mathbb{Z}, \omega)$ con coordenada 1 en la q-ésima coordenada y 0 en el resto). Por la continuidad de B, podemos asegurar que existen $n > 2q$ y $x \in l^2(\mathbb{Z}, \omega)$, $x = (\omega_n x_n)n \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\|x - e_q\| < \delta \qquad y \qquad \|B^n(x) - e_q\| < \delta$$

Analizando la q-ésima y la $(n + q)$-ésima coordenada de $\|x - e_q\|$ obtenemos que:

$$|\omega_q x_q - \omega_q| < \delta \qquad |\omega_{n+q} x_q - \omega_{n+q} 0| < \delta$$

$$|\omega_q (x_q - 1)| < \delta \qquad |\omega_{n+q} x_q| < \delta$$

De igual forma, analizando la q-ésima y la $(-n+q)$-ésima coordenada de $\|B^n(x)-e_q\|$ obtenemos que:

$$|\omega_q x_{n+q} - \omega_q| < \delta \qquad |\omega_{-n+q} x_q - \omega_{-n+q} 0| < \delta$$

$$|\omega_q (x_{n+q} - 1)| < \delta \qquad |\omega_{-n+q} x_q| < \delta$$

Con esto obtenemos que, para $\delta < \omega_q$

$$\omega_{n+q} \leq |\omega_{n+q} x_{n+q}| + |\omega_{n+q}(1 - x_{n+q})| < \delta + \omega_{n+q} \frac{\delta}{\omega_q}$$

entonces, $\omega_{n+q}(1 - \frac{\delta}{\omega_q}) < \delta$, por lo que, $\omega_{n+q} < \frac{\delta \omega_q}{\omega_q - \delta}$

También,

$$\omega_{-n+q} \leq |\omega_{-n+q} x_q| + |\omega_{-n+q}(1 - x_q)| < \delta + \omega_{-n+q} \frac{\delta}{\omega_q}$$

entonces, $\omega_{-n+q}(1-\frac{\delta}{\omega_q})<\delta$, por lo que, $\omega_{-n+q}<\frac{\delta\omega_q}{\omega_q-\delta}$

Usando esta cota repetidas veces, obtenemos la sucesión que buscamos.

Tomamos $\delta_1>0$, tal que, $\frac{\delta_1\omega_q}{\omega_q-\delta_1}<\frac{1}{2}$, encontramos $n_1\in\mathbb{N}$ tal que,

$$\omega_{\pm n_2+q}<\frac{1}{2}$$

Para hallar n_2, basta tomar $\delta_2>0$ tal que, $\frac{\delta_2\omega_q}{\omega_q-\delta_2}<\frac{1}{4}$

Repitiendo dicho procedimiento, obtenemos el resultado.

$\Longleftarrow$

Supongamos que para todo $q\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty}\inf\omega_{\pm n+q}=0$$

vamos a verificar que B satisface el criterio de hiperciclicidad.

Sea C una constante positiva tal que, $C>\max\{1,\sup_n\frac{\omega_n}{\omega_{n+1}}\}$.

Construimos una sucesión creciente $(n_k)\in\mathbb{N}$ tal que,

$$\omega_{n_k+k}\leq C^{-3k}\qquad y\qquad \omega_{-n_k+k}\leq C^{-3k}$$

Para n_1, tomamos $C^{-3}>0$ y podemos encontrar n_1 tal que,

$$\omega_{n_k+1}\leq C^{-3}\qquad y\qquad \omega_{-n_1+1}\leq C^{-3}$$

Para n_2, tomamos $C^{-6}>0$ y podemos encontrar $n_2>n_1$ tal que,

$$\omega_{n_2+2}\leq C^{-6}\qquad y\qquad \omega_{-n_2+2}\leq C^{-6}$$

y así sucesivamente.

Luego $\omega_{n_k+i} \to 0$ y $\omega_{-n_k+i} \to 0$ cuando $k \to \infty$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. De hecho, si fijamos i y $k \geq |i|$ tenemos,

$$\omega_{n_k+i} \leq C^{k-i}\omega_{n_k+k} \leq C^{-2k-i} \leq C^{-k}$$

$$\omega_{-n_k+i} \leq C^{k-i}\omega_{-n_k+k} \leq C^{-2k-i} \leq C^{-k}$$

Entonces, veamos que se satisface el criterio para la sucesión (n_k).

Tomemos los conjuntos densos $D_1 = D_2 = c_{00}(\mathbb{Z}) = \langle e_i : i \in \mathbb{Z}\rangle_{gen}$.

Sea S el operador shift a la derecha $S(e_i) = e_{i+1}$.

Vemos que $BS = Id$ en D_2, resta probar que $B^{n_k}(e_i)$ y $S^{n_k}(e_i)$ ambos tienden a 0 para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Pero esto esta claro, puesto que

$$\|B^{n_k}(e_i)| = \omega_{-n_k+i}$$

$$\|S^{n_k}(e_i)\| = \omega_{n_k+i}$$

y por hipótesis estos tienden a cero.

2.5. El problema del criterio de hiperciclicidad

Consideramos $T \times T : X \times X \to X \times X$ definido por $T \times X(x, y) = (Tx, Ty)$. Cuando T es lineal, identificamos $T \times T$ con el operador $T \oplus T \in \mathcal{L}(X \oplus X)$.

Es natural preguntarse si $T \oplus T$ mantiene la hiperciclicidad de T. Esta pregunta, que puede parecer inocente, es mucho mas profunda de lo que parece. Tiene grandes conexiones con el Criterio de Hiperciclicidad, que como veremos, dejara de ser simplemente una herramienta útil para probar la hiperciclicidad.

Proposición 2.5. 1 *Sea $T = T_1 \oplus T_2$ un operador hipercíclico en $X = X_1 \oplus X_2$. Entonces, T_i es hipercíclico en X_i, para $i = 1, 2$.*

Demostración.

Sean X_1, X_2 espacios topológicos.

Sea $X = X_1 \oplus X_2$.

Sea $T : X \to X$ hipercíclico en X, definido por $(x_1, x_2) \to T(x_1, x_2) = (T_1x_1, T_2x_2)$

Con $T_1 : X_1 \to X_1$ y $T_2 : X_2 \to X_2$.

Consideremos para $i = 1, 2$ la proyección en la i-ésima coordenada

$$\pi_i : X \to X_i$$

definida por $(x_1, x_2) \to \pi_i(x_1, x_2) = x_i$.

Sabemos que las proyecciones son continuas y sobreyectivas.

Construyamos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_i"'] & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ X_i \arrow[r, "T_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Figura 2.4

Veamos si el diagrama anterior conmuta:

Sean $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

Sea $(x_1, x_2) \in X$.

Apliquemos T.

$$T(x_1, x_2) = (T_1 x_1, T_2 x_2)$$

con $T_1 x_1 \in X_1$ y $T_2 x_2 \in X_2$.

Apliquemos π_i

$$\pi_i(T_1 x_1, T_2 x_2) = T_i x_i$$

para $i = 1, 2$, $T_i x_i \in X_i$.

Por otra parte:

Sean $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

Sea $(x_1, x_2) \in X$.

Apliquemos π_i

$$\pi_i(x_1, x_2) = x_i$$

con $x_i \in X_i$ para $i = 1, 2$.

Apliquemos T_i, con $i = 1, 2$

$T_i x_i \in X_i$, puesto que, $T_i : X_i \to X_i$.

Así, vemos que, para $x \in X$, se cumple $\pi_i(Tx) = T_i(\pi_i x)$, por lo que el diagrama conmuta.

Ahora bien, sabemos que $\pi_i(X) = X_i$, puesto que es la proyección en la i-ésima coordenada, por lo que, $\pi_i(X)$ es denso en X_i, para $i = 1, 2$.

Por el criterio de comparación (proposición 2.2.6), podemos concluir que, T_i es hipercíclico, para $i = 1, 2$ y $\pi_i(HC(T)) \subset HC(T_i)$. ■

Proposición 2.5. 2 *Si $T = T_1 \oplus T_2$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad, Entonces, T_i también.*

La demostración de la proposición anterior es análoga a la prueba de la proposición 1.2.5.

Proposición 2.5. 3 *Sean $T_1 \in \mathcal{L}(X_1)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(X_2)$ dos operadores que satisfacen el Criterio de Hiperciclicidad para la misma sucesión $(n_k) \in \mathbb{N}$. Entonces, $T_1 \oplus T_2$ es hipercíclico. Mas aún $T_1 \oplus T_2$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad.*

Demostración.

Sean X_1, X_2 espacios topológicos.

Sean $T_1 \in \mathcal{L}(X_1)$, $T_2 \in \mathcal{L}(X_2)$ dos operadores que satisfacen el criterio de hiperciclicidad para la misma sucesión $(n_k) \in \mathbb{N}$.

Definamos $X = X_1 \oplus X_2$, en este, tenemos la topología producto.

Sabemos que todo espacio es denso en si mismo, y por teorema, el producto de conjuntos densos es denso, por lo que $X = X_1 \oplus X_2$ es denso.

Ademas, por teorema, una sucesión en X converge si y solo si, converge en cada coordenada.

Por tanto, $T_1 \oplus T_2$ es hipercíclico. ■

Todos los ejemplos estudiados en las secciones anteriores cumplen el Criterio de Hiperciclicidad, por lo tanto, seria razonable pensar que este problema tiene una respuesta afirmativa.

Veamos a continuación un contra ejemplo de esta situación.

Sea B_1, B_2 operadores shift unilaterales con pesos, definidos como

$$B_i : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$$

$$e_n \to B_i(e_n) = w_n e_{n-1}$$

Teorema 2.5. 4 *Sean B_i, $1 \leq i \leq m$, shifts unilaterales con pesos en $l^2(\mathbb{Z})$, $B_i(e_n) = w_n^{(i)} e_{n-1}$ y $B_i(e_0) = 0$. Entonces, $\bigoplus B_i$ es hipercíclico si y sólo si*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\text{mín}\{\prod_{s=1}^{n} w_s^{(i)} : 1 \leq i \leq n\}\} = \infty$$

Corolario 2.5. 5 *Existen operadores hipercíclicos B_1, B_2 tales que $B_1 \oplus B_2$ no es hipercíclico.*

Demostración.

Tomamos los shift unilaterales con pesos definidos anteriormente, de forma que satisfacen las condiciones del teorema anterior por separado, pero no la satisfacen juntas.

Por ejemplo, podemos tomar

$$\begin{cases} w_{2n-1}^{(1)} = n & si \;\; n \geq 1 \\ w_{2n}^{(2)} = \frac{1}{n} & si \;\; n \geq 1 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} w_1^{(2)} = 1 & \\ w_{2n}^{(2)} = 2n & si \;\; n \geq 1 \\ w_{2n+1}^{(2)} = \frac{1}{2n}, & si \;\; n \geq 1 \end{cases}$$

Tenemos que:

$$\prod_{i=1}^{k} w_i^{(1)} = \begin{cases} \frac{k+1}{2} & si \;\; k \; es \; impar \\ 1 & si \;\; k \; es \; par \end{cases}$$

y

$$\prod_{i=1}^{k} w_i^{(2)} = \begin{cases} 1 & si\ \ k\ es\ impar \\ \\ k & si\ \ k\ es\ par \end{cases}$$

Y por lo tanto,

$$\text{mín}\{\prod_{i=1}^{k} w_i^{(1)}, \prod_{i=1}^{k} w_i^{(2)}\} = 1$$

Es claro que cada operador satisface la condición por separado, pero no lo hacen juntos.

Por tanto, B_1, B_2 son hipercíclicos pero $B_1 \oplus B_2$ no lo es.

Referencias Bibliográficas

- Abellán, V. (2015). *Caos, linealidad y dimensión.* Tesis de licenciatura. Universidad de Murcia.

- Bayart, F. Matheron, E. (2009). *Dynamics of linear Operators*, New York, Cambridge University Press.

- Herzog, G. (1992). On linear operators having supercyclic vectors. Studia Mathematica. 103 (3), 295-298.

- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional analysis with Applications*, New York, John Wiley & Sons.

- Martínez, F. (1999). Operadores hipercíclicos en espacios de Frechet. Revista Colombiana de Matematicas. 33, 51-76.

- Munkres, J. (2002). *Topología.* (2° ed). Madrid. Pearson educación, S. A.

- Müller, V. (2011). Orbits of operators and operator semigroups. Academy of sciences of the Czech Republic. 238, 1-15.

- Osuna, C. (2002). *Operadores hipercíclicos sobre espacios de Banach.* Tesis de Doctorado.

Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

- Savransky, M. (2011). *Operadores hipercíclicos y el criterio de hiperciclicidad.* Tesis de licenciatura, Universidad de Buenos Aires.