

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



Trabajo de graduación titulado:

**Solución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas con
aplicaciones en finanzas.**

Presentado por:

Br. Joel Adonay Ramírez García

Br. José Luis Villalobos Martínez

Para optar al grado de:

Licenciado en matemática

Ciudad Universitaria, diciembre 2022

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



**Solución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas con
aplicaciones en finanzas.**

Presentado por:

Br. Joel Adonay Ramírez García

Br. José Luis Villalobos Martínez

Para optar al grado de:

Licenciado en matemática

Bajo la dirección de:

MSc. Porfirio Armando Rodríguez Rodríguez

Ciudad Universitaria, diciembre 2022

Universidad de El Salvador

Msc. Roger Armando Arias

Rector

PhD. Raúl Ernesto Azcúnaga López

Vicerrector Académico

Ing. Juan Rosa Quintanilla

Vicerrector Administrativo

Ing. Francisco Alarcón

Secretario General

Lic. Rafael Humberto Peña Marín

Fiscal General

Lic. Luis Antonio Mejía Lipe

Defensor de los Derechos Universitarios

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdoba

Decano

M.Sc. Virginia Guerrero

Vicedecana

Lic. Jaime Humberto Salinas Espinoza

Secretario de Facultad

Escuela de Matemática

MSc. Dimas Noe Tejada Tejada

Director

M.Sc. Carlos Ernesto Gaméz Rodríguez

Secretario

Dedicatoria

Le dedicamos a toda nuestra familia, especialmente a nuestros padres que nos apoyaron incondicionalmente en los momentos buenos y malos, porque nos han enseñado a afrontar las dificultades y demostrar nuestro potencial.

También queremos dedicarle este trabajo de tesis a nuestros hermanos y amigos, los cuales nos han motivado a superarnos.

Agradecimientos

Queremos agradecer a Dios por colmarnos de bendiciones a lo largo de nuestro camino académico, a nuestra familia ya que cada una de sus palabras, conocimientos y apoyos han sido incondicionales.

También queremos agradecer al MSc. Porfirio Armando Rodríguez por apoyarnos con sus conocimientos, durante el proceso de tesis y también durante nuestro recorrido académico.

Un agradecimiento especial al MSc. Carlos Ernesto Gámez, por su apoyo incondicional, y enseñarnos que un matemático es capaz de brillar en cualquier campo laboral, y que podemos aportar mucho al desarrollo de nuestro país por medio de la investigación y aplicación de cada uno de los conocimientos que adquirimos dentro de la carrera.

Índice

1. Introducción	5
2. Preámbulo	6
2.1. Justificación	6
2.2. Antecedentes	6
2.3. Finalidad y viabilidad	6
2.4. Objetivos	8
3. Procesos estocásticos con aplicaciones en finanzas	9
3.1. Fundamentos de probabilidad	9
3.2. Procesos estocásticos	18
3.3. Movimiento browniano	20
3.4. Martingalas	30
4. Cálculo estocástico con aplicaciones en finanzas	32
4.1. Conceptos preliminares	32
4.2. Integral estocástica	34
4.3. Propiedades de la integral estocástica.	43
4.4. Fórmula de Itô.	44
4.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas.	47
4.6. Ecuación diferencial lineal general.	52
4.7. Ejemplos en finanzas.	53
4.7.1. Modelo de Ornstein-Uhlenbeck.	53
4.7.2. Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR).	54
5. Solución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas	55
5.1. Métodos numéricos de discretización	55
5.1.1. Esquema de Euler	57
5.1.2. Esquema de Milstein	62
5.1.3. Método de predictor-corrector	63
5.2. Esquemas de varias etapas	65
5.3. Esquema de orden 1.0 fuerte de dos pasos	65
5.4. Esquemas fuertes de orden 1.5 de dos pasos	66

6. Cálculo estocástico con aplicaciones en finanzas	67
6.1. Algoritmo esquema de Euler	67
6.2. Algoritmo esquema de Milstein	69
6.3. Simulaciones	71
6.4. Aplicaciones	74
6.4.1. Modelo Black-Scholes	74
6.4.2. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck	77
7. Conclusiones	81
8. Anexos	83
Referencias	85

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales estocásticas son modelos matemáticos útiles tanto para simular fenómenos de la naturaleza, así como de los sectores económicos, como las finanzas, ya que representan apropiadamente la dinámica de las variables económico-financieras. Para el estudio de los fenómenos asociados a las ecuaciones diferenciales estocásticas se requiere del uso de la teoría de procesos estocásticos, y concretamente, del empleo del cálculo estocástico, el cual aborda los resultados necesarios para estudiar y modelar los fenómenos financieros en tiempo continuo. En la actualidad, el cálculo estocástico de Itô es predominante en el ámbito económico-financiero. Uno de los principales resultados es el lema de Itô que nos permite resolver en algunos casos ecuaciones diferenciales estocásticas.

En este trabajo se hace un estudio de los conceptos fundamentales del cálculo estocástico, los cuales forman la base de la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas, y conceptos muy relevantes dentro de la teoría, como por ejemplo el Lema de Itô. Se realiza un estudio de los conceptos fundamentales del cálculo estocástico, los cuales forman la base de la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas, y conceptos muy relevantes dentro de la teoría como por ejemplo el Lema de Itô el cual es muy útil para poder encontrar la solución a algunas ecuaciones diferenciales estocásticas.

En el Capítulo 1 se estudian los conceptos fundamentales de la teoría de probabilidad, los cuales forman parte de la base teórica introductoria previa al estudio de los procesos estocásticos, de los cuales estudiamos los conceptos fundamentales de los procesos estocásticos, así como los principales procesos estocásticos que existen, lo cual nos permitió avanzar en el Capítulo 2 con el estudio de la teoría del cálculo estocástico desde el punto de vista de Itô, precisamente estudiar los conceptos de ecuaciones diferenciales estocásticas y la clasificación de aquellas ecuaciones diferenciales estocásticas cuya forma específica nos sugiere las soluciones de algunos problemas aplicados.

En el Capítulo 3 se estudian y presentan los principales algoritmos que dan una solución numérica a algunas ecuaciones diferenciales estocásticas. Entre los algoritmos que se presentan están el algoritmo de Euler y Milstein, los cuales tiene muchas utilidades dentro de los campos donde las ecuaciones diferenciales estocásticas juegan un papel importante para la solución de problemas aplicados, especialmente dentro de los ámbito financiero, climáticos y médicos. Además, en el Capítulo 4 hemos realizado las simulaciones de los algoritmos expuestos en el Capítulo 3, que nos permite visualizar algunos procesos solución en problemas aplicados al área financiera. Cada uno de los algoritmos se encuentran disponibles dentro del repositorio, para facilitar la revisión, ejecución y experimentación bajo la metodología de código en vivo.

2. Preámbulo

2.1. Justificación

2.2. Antecedentes

En la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, se han realizado diferentes trabajos de investigación que han tenido como base el estudio de los procesos estocásticos, realizando una investigación bibliográfica y, en menor o mayor medida, se llevan a cabo aplicaciones de la teoría. Basados en los registros disponibles en el repositorio institucional de la Universidad de El Salvador ¹ se tiene los siguientes trabajos, mostrados en orden cronológico:

- Chinchilla, C. F. (2005). *Enfoque de Opciones Reales* (Tesis de Maestría). Universidad de El Salvador.
- Campos Granados, W. O. (2009). *Estudio de modelos de riesgo actuarial y de la probabilidad de ruina* (Tesis de Maestría). Universidad de El Salvador.
- Rivera Rosa, R. M. (2011). *Estadística aplicada al análisis actuarial* (Tesis de Licenciatura). Universidad de El Salvador.
- Moreno Ruano, J.G. y Ramírez Rodas, E. B. (2015). *Introducción a la matemática financiera* . (Tesis de Licenciatura), Universidad de El Salvador.
- Iraheta Navarro, D. N. & Flores Alvarenga, K. G. (2016). *Estimación de precios de opciones financieras* (Tesis de Licenciatura). Universidad de El Salvador.
- Ramírez Vásquez, M. F. (2017). *Modelos estocásticos dinámicos en matemática actuarial* (Tesis de Licenciatura). Universidad de El Salvador.
- Ortiz Cortez, W. A. (2019). *Procesos Estocásticos con Aplicación a Genética de Poblaciones* (Tesis de Licenciatura). Universidad de El Salvador.

2.3. Finalidad y viabilidad

Los antecedentes anteriores toman relevancia, ya que en cada uno de los trabajos de investigación antes mencionados, se han estudiado temas fundamentales de los procesos estocásticos, en particular el uso del cálculo estocástico y sus aplicaciones a algunos campos de relevancia como las finanzas y la biología (Friedman, 1975).

¹<http://ri.ues.edu.sv/>

Ante las variadas propuestas de trabajos de investigación en la Escuela de Matemática y el interés de que se proporcionen materias enfocados al estudio del Cálculo Estocástico y sus aplicaciones, resulta de interés y necesario, conocer, de manera sistemática, objetiva y organizada, sobre los métodos numéricos existentes que son utilizados para dar solución a las ecuaciones diferenciales estocásticas, y a partir de esto aplicar los conocimientos a problemas aplicados en las áreas donde la solución de dichos problemas se modele a través de las ecuaciones diferenciales estocásticas, en particular este trabajo se enfocará en el ámbito financiero.

La presente investigación surge de la necesidad de estudiar la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas, con el propósito de exponer los métodos numéricos que dan solución a dichas ecuaciones y así identificar sus fundamentos, técnicas y convergencia que conllevan cada uno de los métodos, especialmente al momento de enfocarnos a las aplicaciones en las finanzas, y poder brindar conclusiones y recomendaciones para futuras investigaciones o aplicaciones didácticas a partir de los resultados de dicho estudio.

La investigación busca proporcionar un documento de texto ilustrado que será útil a toda la comunidad de la Universidad de El Salvador, y en especial a los estudiantes y profesores que tengan interés en investigar o consultar sobre las ecuaciones diferenciales estocásticas y sus aplicaciones en finanzas u otras áreas de investigación.

Debido a que se mostraran activamente aplicaciones al área financiera, es necesario que se utilicen herramientas computacionales, específicamente software estadístico, para simular los procesos estocásticos. En este caso se hará uso del software libre R el cual conlleva una ventaja metodológica significativa ya que cuenta con paquetes enfocados al área de investigación, los cuales están equipados con componentes visuales, que hacen que la comprensión de estos temas sea fácilmente asimilada.

En cuanto a la factibilidad de la investigación, se cuenta con equipos de computación personales y el software necesario, principalmente de acceso abierto y gratuito, el conocimiento fundamental y especializado del plan de estudios de la carrera que cursamos y la asesoría del personal académico con conocimiento previo en el tema. Se ha recopilado literatura básica para proyectar la investigación en un período de seis meses durante la cual se revisará exhaustivamente la literatura y se formulará un marco teórico consistente a partir del cual se implementarán los métodos numéricos estocásticos al área de finanzas.

2.4. Objetivos

Objetivo General

- Elaborar un marco teórico y práctico sobre la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas de manera sistemática, objetiva y organizada para la aplicación y evaluación de métodos numéricos estocásticos en finanzas.

Objetivos Específicos

- Revisar la literatura sobre procesos estocásticos de manera sistemática, objetiva y organizada, desarrollando, con el software estadístico R, simulaciones computacionales con el fin de conformar un capítulo del marco teórico y práctico pertinente para la aplicación de métodos numéricos estocásticos en finanzas.
- Revisar la literatura sobre cálculo estocástico, en particular de ecuaciones diferenciales estocásticas, de manera sistemática, objetiva y organizada, desarrollando, con el software estadístico R, simulaciones computacionales con el fin de conformar un capítulo del marco teórico y práctico pertinente para la aplicación de métodos numéricos estocásticos en finanzas.
- Revisar la literatura sobre soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales estocásticas, de manera sistemática, objetiva y organizada, desarrollando, con el software estadístico R, los algoritmos propuestos con el fin de conformar un capítulo del marco teórico y práctico pertinente para la aplicación de métodos numéricos estocásticos en finanzas.
- Revisar la literatura sobre modelamiento matemático de ecuaciones diferenciales estocásticas en situaciones problemáticas en el área de finanzas, de manera sistemática, objetiva y organizada, aplicando y evaluando los algoritmos desarrollados que generan soluciones aproximadas con el fin de conformar un capítulo del marco teórico y práctico pertinente para la aplicación de métodos numéricos estocásticos en finanzas.

3. Procesos estocásticos con aplicaciones en finanzas

3.1. Fundamentos de probabilidad

A continuación, se presentan algunos conceptos fundamentales en el área de la probabilidad, los cuales son requeridos para la comprensión del presente trabajo de investigación, es importante aclarar que solo se presentarán los conceptos más relevantes, pero se sugiere al lector investigar más sobre estos temas fundamentales de probabilidad.

Los conceptos que se expondrán sobre probabilidad dentro de la sección, han sido tomados de ([Resnick, 1999](#)), los algoritmos de las simulaciones que se presentan se encuentran en el siguiente link [Cocalc](#).

Definición 1. Un **espacio de probabilidad** es una terna de valores (Ω, \mathcal{A}, P) donde:

- Ω es un espacio muestral correspondiente a los resultados de un experimento aleatorio.
- \mathcal{A} es una sigma álgebra de subconjuntos de Ω , estos subconjuntos son llamados *eventos*.
- P es una medida de probabilidad, es decir, P es una función con dominio \mathcal{A} y rango $[0, 1]$ tal que

- $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$.
- P es σ -aditiva, es decir, si la colección $\{A_n, n \geq 1\}$ son eventos en \mathcal{A} disjuntos dos a dos entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

- $P(\Omega) = 1$.

Definición 2. Una σ -álgebra \mathcal{A} es una clase no vacía de subconjuntos de Ω cerrado bajo uniones numerables y complementos, es decir, una σ -álgebra debe cumplir

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- $A \in \mathcal{A}$ implica que $A^C \in \mathcal{A}$.
- $A_i \in \mathcal{A}, i \geq 1$ implica que $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 1.

1. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto de partes de Ω . \mathcal{A} es una σ -álgebra, ya que obviamente es cerrado bajo toda operación. Es la mayor σ -álgebra sobre el conjunto Ω .

2. La σ -álgebra trivial se define como $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$. En este caso es sencillo verificar que las condiciones de la definición son válidas. Es la menor σ -álgebra sobre el conjunto Ω .
3. Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y sea \mathcal{A} la colección de conjuntos que son numerables o que tienen complemento numerable:

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ es numerable}\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : A^C \text{ es numerable}\}$$

Entonces \mathcal{A} es una σ -álgebra ya que satisface las tres condiciones:

- $\Omega^C = \emptyset$ es numerable y por lo tanto $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Supongamos que $A \in \mathcal{A}$. O bien A es numerable o su complemento es numerable. En ambos casos, $A^C \in \mathcal{A}$.
- Verificaremos que si $A_i \in \mathcal{A}, i \geq 1$ entonces $\bigcap_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$. Se presentan dos casos: si al menos uno de los conjuntos A_i es numerable entonces la intersección $\bigcap_{i \geq 1} A_i$ es numerable, y por lo tanto está en \mathcal{A} ; si ningún A_i es numerable entonces A_i^C es numerable para todo i por hipótesis, de modo que $\bigcup_{i \geq 1} A_i^C$ es numerable. En consecuencia,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C \right)^C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Dos observaciones importantes en este ejemplo son las siguientes:

- Si $A = (-\infty, 0]$ entonces $A^C = (0, \infty)$ y ni A ni A^C es numerable, de modo que $A \notin \mathcal{A}$, y en consecuencia $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega)$.
 - \mathcal{A} no es cerrado bajo uniones cualesquiera. Por ejemplo, para cada $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{t\} \in \mathcal{A}$, porque es numerable, pero $A = \bigcup_{t \leq 0} \{t\} = (-\infty, 0] \notin \mathcal{A}$.
4. Sea $\Omega = (0, 1]$, \mathcal{A} consiste del conjunto vacío y todas las uniones finitas y disjuntas de intervalos de la forma $(a, b], 0 \leq a \leq b \leq 1$. Un conjunto típico de \mathcal{A} es de la forma $\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]$, donde los intervalos son disjuntos. Con esta definición \mathcal{A} es un álgebra:

- $\Omega = (0, 1] \in \mathcal{A}$.
- \mathcal{A} es cerrado bajo complementos: si $A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]$, con

$$0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_{m-1} \leq a_m \leq b_m \leq 1,$$

entonces

$$A^C = \Omega \setminus A = (0, 1] \setminus \cup_{i=1}^n (a_i, b_i] = (0, a_1] \cup (b_1, a_2] \cup \dots \cup (b_{m-1}, a_m] \cup (b_m, 1]$$

que también es un conjunto de \mathcal{A} .

- \mathcal{A} es cerrado bajo la intersección de una colección finita de conjuntos ya que $(a, b] \cap (a_1, b_1] = (a \vee a_1, b \vee b_1]$ o el conjunto vacío.

Observamos, sin embargo, que \mathcal{A} no es una σ -álgebra. Por ejemplo, el conjunto

$$\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right] \cup \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right] \cup \dots$$

Es unión numerable de conjuntos de \mathcal{A} pero no está en \mathcal{A} por definición.

Definición 3. Sea \mathcal{C} una colección de subconjuntos de Ω , la **mínima σ -álgebra generada por \mathcal{C}** es

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\{\mathcal{A}_i: \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}_i\}} \mathcal{A}_i,$$

donde \mathcal{A}_i es una σ -álgebra.

Definición 4. La **σ -álgebra de Borel** es la mínima σ -álgebra que contiene los intervalos abiertos de \mathbb{R} , es decir

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a < b\}).$$

A los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se les llama *borelianos*.

Definición 5. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad. Una **variable aleatoria real** es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier conjunto boreliano B se cumple que el conjunto $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$.

Definición 6. La familia $\{X_t, t \in T\}$ es una familia de variables aleatorias independientes si la familia $\{\sigma(X_t), t \in T\}$ es una familia de σ -álgebras independientes, donde $\sigma(X_t) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Definición 7. Supongamos que (Ω, \mathcal{A}, P) es un espacio de probabilidad. Decimos que $A, B \in \mathcal{A}$ son **eventos independientes** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ejemplo 2. Una encuesta que se llevó a cabo en la American Automobile Association (AAA) reveló que el año pasado 60% de sus miembros hicieron reservaciones en líneas aéreas. Dos de

ellos fueron seleccionados al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hicieran reservaciones el año pasado?

La probabilidad de que el primero haya hecho una reservación el año pasado es de 0.60, que se expresa como $P(R_1) = 0.60$, en la que R_i representa el evento de que miembro i seleccionado hizo una reservación. La probabilidad de que el segundo miembro elegido haya hecho una reservación es también de 0.60, es decir, $P(R_2) = 0.60$. Como el número de miembros de la AAA es muy grande, se supone que R_1 y R_2 son independientes. En consecuencia, la probabilidad de que ambos hayan hecho una reservación es:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2) = (0.60)(0.60) = 0.36.$$

En general tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1. Los eventos $A_1, A_2, \dots, A_n, n \geq 2$, son **eventos independientes** si

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i),$$

para todo conjunto índice finito en I , es decir, $I \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Definición 8. Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) y los eventos $A, B \in \mathcal{A}$. Se define la **probabilidad condicional** del evento A , dado el evento B , como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

donde $P(B) > 0$. El término $P(A|B)$ se lee *probabilidad de A dado B*. Es claro que es necesaria la condición $P(B) > 0$ para que el cociente este bien definido.

Ejemplo 3. Una fábrica utiliza dos máquinas A y B para hacer calcetines. La máquina A produce el 10 % de la producción total de calcetines, mientras que la máquina B produce el 90 % restante. Ahora, el 1 % de todos los calcetines producidos por A son defectuosos mientras que el 5 % de todos los calcetines producidos por B son defectuosos. Encuentre la probabilidad de que un calcetín tomado al azar de la producción de un día haya sido producido por la máquina A, dado que es defectuoso.

Se tiene que $P(A) = 0.1, P(B) = 0.9, P(D|A) = 0.01$ y $P(D|B) = 0.05$. Hay que encontrar

$P(A|D)$. Utilizando la fórmula de Bayes, tenemos:

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)}$$

$$P(A|D) = \frac{(0.01)(0.1)}{(0.01)(0.1) + (0.05)(0.9)} \approx 0.0217$$

Antes de introducir los conceptos de *función de distribución acumulada*, *valor esperado*, *varianza* y *covarianza de una variable aleatoria* es necesario ver algunos conceptos previos, los cuales son fundamentales para la comprensión de los conceptos que se expondrán más adelante dentro de la investigación.

Definición 9. Dado dos funciones de variable real f y g continuas en el intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$. Se define la integral de *Riemann-Stieltjes* como

$$\int_a^b f(t)dg(t), \quad (1)$$

donde f es llamada *integrand* y la función g es llamada *integrador*. Si g es continuamente diferenciable, la ecuación (1) se equivale a la integral de Riemann:

$$\int_a^b f(t)g'(x)dt. \quad (2)$$

Proposición 2. Dadas las funciones f, g, α, β continuas en el intervalo $[a, b]$ la integral de Riemann-Stieltjes tiene las siguientes propiedades

- $\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))d\alpha(x) = c_1 \int_a^b f(x)d\alpha(x) + c_2 \int_a^b g(x)d\alpha(x)$.
- $\int_a^b f(x)d(c_1 \alpha(x) + c_2 \beta(x)) = c_1 \int_a^b f(x)d\alpha(x) + c_2 \int_a^b f(x)d\beta(x)$.
- Una integral de Riemann-Stieltjes en el intervalo $[a, b]$ puede separarse en la suma de dos integrales en los intervalos $[a, c], [c, b]$, con $a < c < b$, así

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^c f(x)d\alpha(x) + \int_c^b f(x)d\alpha(x).$$

- Si f es integrable respecto a α , entonces α es integrable respecto a f y entre ambas integrales existe la siguiente relación

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x)df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Definición 10. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria

real, definimos la **función de distribución acumulada** de X como $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ con regla de asignación

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

En términos prácticos describimos la función de distribución acumulada como la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual a x y por simplicidad de notación se escribe $P(X \leq x)$.

Proposición 3. Una función de distribución acumulada $F(x)$ asociada a la variable aleatoria X satisface:

- $0 \leq F(x) \leq 1$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,
- es monótona no decreciente, es decir, si $x_1 \leq x_2$ entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$, y
- es continua por la derecha, es decir $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$.

Proposición 4. Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , y X una *variable aleatoria discreta* con función de masa de probabilidad $f(x)$ entonces la función de distribución acumulada se calcula como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u).$$

Si X es una *variable aleatoria continua* con función de densidad de probabilidad $f(x)$ entonces la función de distribución acumulada se calcula como la integral de Riemann:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

Observaciones:

- Por simplicidad, con las variables aleatorias reales se trabaja sobre el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ en donde la medida de probabilidad $P([a, b]) = P(\{\omega : a < X(\omega) < b\})$ a partir de la cual se define una función continua no decreciente $F(x)$:

$$F(x) = P((-\infty, x]),$$

que resulta ser la función de distribución acumulada de X . Esta $F(x)$ se representa como

la integral de Riemann-Stieltjes con respecto a si misma:

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} dP(u) = \int_{-\infty}^x dF(u).$$

- Cuando $F(x)$ es absolutamente continua, $F(x)$ es continuamente diferenciable y se calcula por medio de la integral de Riemann:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du,$$

donde $f(x)$ es la derivada de $F(x)$ y la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria real X .

Ahora definamos el *valor esperado* de una variable aleatoria.

Definición 11. Dado el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) y X una variable aleatoria, de define el valor esperado de X como la integral de Lebesgue con respecto a la medida P :

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)dP(\omega). \quad (3)$$

Transfiriendo el espacio de probabilidad a $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dF)$ y en el caso que P sea absolutamente continuo con respecto a la medida de Lebesgue, se cumple que $f dx = dF$. De modo que la integral de Riemann-Stieltjes equivalente a (3) es a su vez equivalente a la integral de Riemann:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad (4)$$

en donde F es la función de distribución acumulada de X y f su función de densidad de probabilidad.

Los conceptos anteriores se pueden generalizar fácilmente al caso de funciones aleatorias de dos o más variables, en cuyo caso se definen los conceptos de funciones de distribución de probabilidad conjunta, funciones de densidad de probabilidad conjunta y esperanzas de funciones aleatorias.

Definición 12. Sean X, Y variables aleatorias continuas definidas sobre \mathbb{R} . Entonces definimos la *función de densidad conjunta* de X e Y como una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

1. $f(x, y) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx dy = 1.$

En este caso, la *función de distribución conjunta* de X e Y está dada por:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Proposición 5. Si $f(x, y)$ es una función de densidad conjunta de las variables X e Y , entonces el valor esperado de $g(X, Y)$ está dado por:

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dy dx.$$

Proposición 6. Dadas X y Y variables aleatorias y $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes, tenemos las siguientes propiedades:

1. $E(c) = c$.
2. $E(cX) = cE(X)$.
3. Si $X \geq 0$ entonces $E(X) \geq 0$.
4. Si $X \leq Y$ entonces $E(X) \leq E(Y)$.
5. Si $Y = a + bX$, entonces $E(a + bX) = a + bE(X)$.
6. Se cumple la linealidad, es decir, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
7. Si X y Y son variables aleatorias independientes entonces $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Una vez definido el valor esperado de una variable aleatoria X , ya podemos definir la varianza y covarianza de X en términos del valor esperado.

Definición 13. Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) y X una variable aleatoria con valor esperado $E(X)$ se define la **varianza** de la variable aleatoria X , denotada por $Var(X)$ como

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Ejemplo 4. Suponga que el tiempo x , medido en minutos, en el que se obtiene un flujo de dinero es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f(x) = 6x(1 - x)$ en el recorrido $0 \leq x \leq 1$, y $f(x) = 0$ en cualquier otro caso.

Entonces, calculando el valor esperado, obtenemos

$$E(X) = \int_0^1 x(6x(1 - x)) dx = \frac{1}{2}$$

Ahora calculando:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(6x(1-x))dx = \frac{3}{10}.$$

Entonces calculamos la varianza del tiempo del flujo de dinero, obtenemos:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(X) = 0.3 - (0.5)^2$$

$$Var(X) = 0.05.$$

Definición 14. Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) y X e Y variables aleatorias, define la **covarianza** entre X y Y como

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Ejemplo 5. Consideremos dos variables aleatorias continuas X e Y con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+3y}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \text{ y } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y funciones de densidad marginales:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3}{4} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3y}{2} + \frac{1}{4} & \text{Si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular la $Cov(X, Y)$.

Encontramos los valores esperados de las variables X e Y :

$$E(X) = \int_0^1 x \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) dx = \frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{13}{24}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \left(\frac{3y}{2} + \frac{1}{4} \right) dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Ahora obtenemos:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy \left(\frac{x+3y}{2} \right) dx dy \\
E(XY) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (x^2y + 3xy^2) dx dy \\
E(XY) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx \\
E(XY) &= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Finalmente, calculando la covarianza, obtenemos:

$$\begin{aligned}
Cov(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
Cov(X, Y) &= \frac{1}{3} - \left(\frac{13}{24} \right) \left(\frac{5}{8} \right) \\
Cov(X, Y) &= \frac{1}{3} - \frac{65}{192} \\
Cov(X, Y) &= -\frac{1}{192}.
\end{aligned}$$

3.2. Procesos estocásticos

Una de las definiciones más importantes dentro de la teoría de la probabilidad es el concepto de procesos estocásticos, el cual dentro de la práctica sirve para tratar con magnitudes aleatorias que varían con el tiempo, específicamente se utiliza para caracterizar una sucesión de variables aleatorias estocásticas que evolucionan en función de un parámetro, generalmente suele ser el tiempo. Todas las variables aleatorias que componen el proceso con el cual se está trabajando tienen su propia función de distribución de probabilidad, las cuales pueden o no estar correlacionadas, cada una de las variables que se ven influenciadas por efectos aleatorios constituyen el proceso estocástico, es por esto que un proceso estocástico $\{X_t\}$ puede entenderse como una familia uniparamétrica de variables aleatorias indexadas mediante el tiempo t . Con base en lo anterior podemos realizar la siguiente descripción matemática.

Para los conceptos que se presentarán en esta sección se utilizó como referencia bibliográfica (Mikosch, 1998a), (Iacus, 2008).

Definición 15. Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , un *proceso estocástico* de valores reales es una familia de variables aleatorias $\{X_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ definida sobre $\Gamma \times \Omega$ tomando valores en \mathbb{R} . Por lo tanto, la familia de variables aleatorias son funciones de la forma

$$X(\gamma, \omega) : \Gamma \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Para $\Gamma = \mathbb{N}$, tenemos un proceso de tiempo discreto, y para $\Gamma \subset \mathbb{R}$ tenemos un proceso de tiempo continuo.

En muchas de las aplicaciones, estaremos interesados en trabajar procesos de tiempo continuo con $\Gamma = [0, \infty)$. Es usual que se encuentren diferentes notaciones para referirnos a un proceso estocástico, en esta investigación se considerará la notación X_t , con la cual nos referiremos a la trayectoria del proceso estocástico para algún ω fijo.

Proposición 7. Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico y $T \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

Decimos que X tiene *incrementos independientes* si para todo $t_i \in T$ con $i = 1, 2, \dots, n$, se cumple que

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes.

Definición 16. Se conoce como *proceso de Gauss* al proceso continuo en el que toda combinación lineal de variables es una variable de distribución normal.

Para finalizar esta sección es importante estudiar los conceptos de variaciones de primer y segundo orden, ya que esta teoría nos ayudara a comprender mejor algunas propiedades del movimiento browniano.

A continuación, se presentan los conceptos de variaciones, los cuales resultan ser fundamentales para el estudio del movimiento browniano, para estos conceptos se ha tomado como referencia la notación presentada en (Iacus, 2008).

Definición 17. Sea $\Pi_n = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ una partición de $[0, T] \subset \mathbb{R}$, tomamos la norma de la partición como $|\Pi_n| = \max_{j=0,1,\dots,n-1} \{t_{j+1} - t_j\}$, y definimos la *variación de primer orden* o *variación total* de una función f en el intervalo $[0, T]$ como

$$V_{[0,T]}(f) = \lim_{|\Pi_n| \rightarrow 0} V_{\Pi_n}(f),$$

donde $V_{\Pi_n} = \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$.

Supongamos que f es una función diferenciable. Entonces por el *teorema del valor medio*, en cada subintervalo $[t_j, t_{j+1}]$, existe un punto t_j^* tal que

$$f(t_{j+1}) - f(t_j) = f'(t_j^*)(t_{j+1} - t_j).$$

Entonces

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| = \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|(t_{j+1} - t_j),$$

y

$$V_{[0,T]}(f) = \lim_{|\Pi_n| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|(t_{j+1} - t_j) = \int_0^T |f'(t)| dt.$$

La primera variación mide la cantidad total que aumenta o disminuye la trayectoria en cada intervalo $[t_j, t_{j+1})$.

Para un proceso estocástico X sobre el intervalo $[0, t]$ denotaremos la variación de primer orden como $V_t(X)$ y el límite será en probabilidad. La suma sobre una partición Π_n se denotará como $V_n(X)$.

Definición 18. Sea $\Pi_n = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ una partición de $[0, T] \subset \mathbb{R}$, tomamos la norma de la partición como $|\Pi_n| = \max_{j=0,1,\dots,n-1} \{t_{j+1} - t_j\}$, y definimos la *variación de segundo orden* o *variación cuadrática* de una función f en el intervalo $[0, T]$ como

$$Q_{[0,T]}(f) = \lim_{|\Pi_n| \rightarrow 0} Q_{\Pi_n}(f),$$

donde $Q_{\Pi_n}(f) = \sum_{j=0}^{n-1} (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2$.

La variación de segundo orden, para un proceso estocástico X sobre el intervalo $[0, t]$, se denotará como $[X]_t$ y el límite será en probabilidad. La suma sobre una partición Π_n se denotará como $[X]_n$.

Finalmente, podemos definir la *covariación cuadrática* de f y g en el intervalo $[0, T]$ como el siguiente límite

$$[f, g]_{[0,T]} = \lim_{|\Pi_n| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (f(t_{j+1}) - f(t_j))(g(t_{j+1}) - g(t_j)).$$

Para X e Y , dos procesos estocásticos sobre el intervalo $[0, t]$, denotaremos su covariación cuadrática como $[X, Y]_t$ y el límite será en probabilidad. La suma cuadrática sobre una partición Π_n se denotará como $[X, Y]_n$.

3.3. Movimiento browniano

Uno de los componentes básicos de un modelo que describe la evolución de un proceso estocástico es el llamado movimiento browniano o proceso de Wiener. Hay muchas formas de definir el proceso de Wiener. Para fines de esta investigación antes de definir formalmente el concepto de movimiento browniano, es necesario que veamos algunos conceptos y resultados previos interesantes que ayudarán a comprender mejor el movimiento browniano y sus propiedades. De esta manera, será posible entender mejor la coparticipación del movimiento browniano en las

aplicaciones que se explicarán en capítulos futuros.

Caminata aleatoria

Para poder definir adecuadamente el movimiento browniano, es necesario ver el concepto a través de la construcción de una caminata aleatoria simétrica.²

Supongamos que realizamos el experimento de lanzar repetidamente una moneda al aire. Para tener un mejor control de nuestro experimento llamaremos p a la probabilidad de obtener cara (A), y $q = 1 - p$ a la probabilidad de obtener corona (B). En este caso ambas probabilidades serán de $\frac{1}{2}$. Realizando el experimento de lanzamiento n veces, nuestro espacio muestral para este experimento estará dado por $\Omega = \{\omega \in (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{A, B\}\}$.

Ahora definimos la variable aleatoria

$$X_j = \begin{cases} -1 & \text{si } \omega_j = A \\ 1 & \text{si } \omega_j = B. \end{cases}$$

Tomando

$$M_0 = 0 \\ M_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad n = 1, 2, \dots,$$

hemos formado un proceso estocástico $\{M_n, n = 0, 1, \dots\}$, el cual es conocido como *caminata aleatoria simétrica*. Para nuestro espacio muestral puede aumentar o disminuir una unidad (Esto se conoce como el *tamaño de salto*), donde ambos eventos son igualmente probables.

Cada una de las variables $M_{n_{i+1}} - M_{n_i} = \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} X_j$ es llamada *incremento de la caminata aleatoria*.³

Ahora nos interesa analizar el valor esperado y varianza de cada una de las variables aleatorias

²Para un mayor estudio sobre la caminata aleatoria simétrica y los métodos de simulación se recomienda revisar (Kwok, 2008) y (Iacus, 2008).

³Una caminata tiene incrementos independientes si la sucesión de variables $\{M_{n_{i+1}} - M_{n_i}, i = 1, 2, 3, \dots\}$ son independientes.

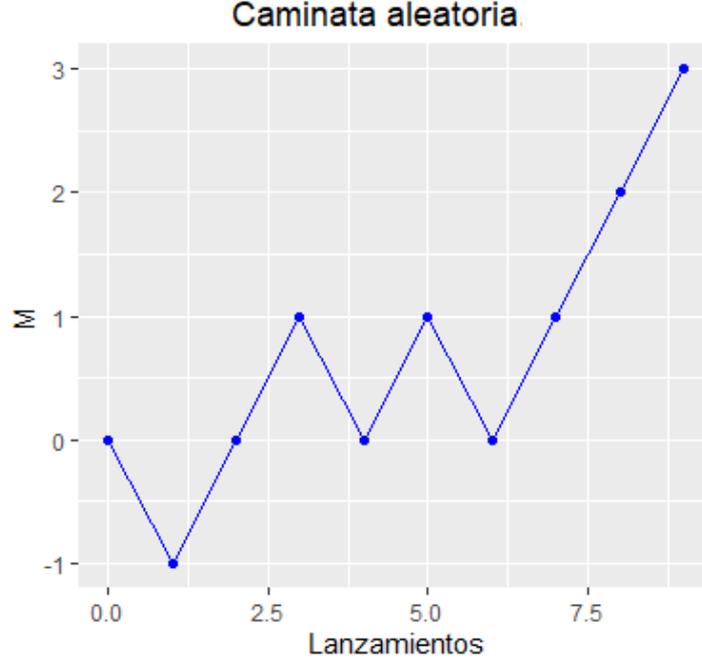


Figura 1: Trayectoria de la caminata aleatoria simulando 9 lanzamientos de una moneda donde $\omega = (A, B, B, A, B, A, B, B, B)$ y los puntos se enlazan mediante una línea recta

y de los saltos, así:

$$E(X_j) = (1) \left(\frac{1}{2}\right) + (-1) \left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$E(X_j^2) = (1)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + (-1)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$E(M_{n_{i+1}} - M_{n_i}) = E\left(\sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} X_j\right) = \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} E(X_j) = 0,$$

$$Var(X_j) = 1,$$

$$Var(M_{n_{i+1}} - M_{n_i}) = Var\left(\sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} X_j\right) = \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} Var(X_j) = n_{i+1} - n_i,$$

$$Var(M_n) = n, n = 1, 2, \dots$$

Finalmente, nos hace falta considerar la suma de los incrementos sucesivos para la caminata aleatoria en el tiempo n , ya que es un elemento clave en el estudio del movimiento browniano, el cual se estudiará más adelante:

$$[M]_n = \sum_{j=1}^n (M_j - M_{j-1})^2 = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

Observación 1. Es importante notar que $Var(M_n) = [M]_n$.

Para continuar por el camino hacia la definición de movimiento browniano es fundamental definir la **caminata aleatoria escalonada** de la siguiente manera:

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}M_{[nt]}, \quad n \in \mathbb{N}, t \geq 0, \quad (5)$$

donde la función $[\cdot]$ es el mayor entero menor que su argumento.

La caminata aleatoria simétrica escalonada no tiene incrementos independientes.⁴ Sin embargo, para la partición $\Pi_n = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ del intervalo $[0, T]$, cuyos subintervalos son de igual longitud $\frac{1}{n}$, se tiene que nt_j es un entero para todo $j = 0, 1, \dots, n$. Entonces, $W^{(n)}(t_1) - W^{(n)}(t_0), \dots, W^{(n)}(t_n) - W^{(n)}(t_{n-1})$ son independientes.

Puede verificarse que si $0 \leq s \leq t$ entonces se cumple

$$\begin{aligned} E(W^{(n)}(t)) &= \frac{1}{\sqrt{n}}E(M_{[nt]}) = 0 \\ \text{Var}(W^{(n)}(t)) &= \text{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}M_{[nt]}\right) = \frac{1}{n}\text{Var}(M_{[nt]}) = \frac{1}{n}([nt]) \\ E(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) &= \frac{1}{\sqrt{n}}E(M_{[nt]} - M_{[ns]}) = 0 \\ \text{Var}(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) &= \text{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}M_{[nt]} - \frac{1}{\sqrt{n}}M_{[ns]}\right) = \frac{1}{n}\text{Var}(M_{[nt]} - M_{[ns]}) = \frac{1}{n}([nt] - [ns]). \end{aligned}$$

De igual manera, se cumple que la variación cuadrática en el intervalo $[0, t]$ está dada por

$$[W^{(n)}]_t = t.$$

Observación 2. Se puede definir el movimiento browniano como el límite en distribución de la caminata aleatoria escalonada puesto que se cumple las siguientes propiedades, cuando $n \rightarrow \infty$:

- $W^{(n)}(0) = 0$.
- $E(W^{(n)}(t)) = 0$.
- $\text{Var}(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) = t - s, \forall s, t$ tal que $0 \leq s \leq t$.

Para generar el gráfico de la Figura 2, se propone el siguiente algoritmo:

⁴La definición de caminata aleatoria escalonada se ha tomado de (Iacus, 2008) y (Peter E. Kloeden, 1995)

Caminata aleatoria escalonada

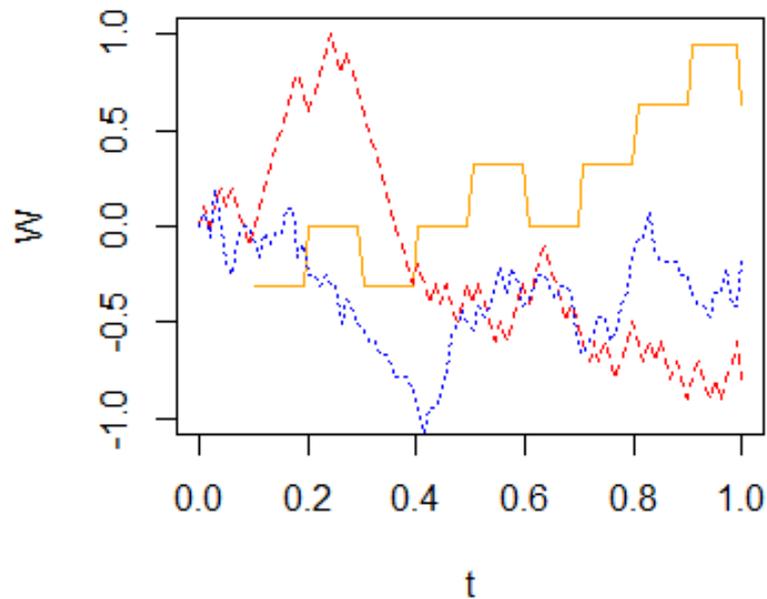


Figura 2: Trayectoria del movimiento browniano como límite de la caminata aleatoria escalonada, tomando $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$

```
1 set.seed(123)
2 n <- 10
3 T <- 1
4 t <- seq(0,T,length=100)
5 S <- cumsum(2*(runif(n)>0.5)-1)
6 W <- sapply(t,function(x) ifelse(n*x>0,S[n*x],0))
7 W <- as.numeric(W)/sqrt(n)
8 plot(t,W,type="l",ylim=c(-1,1),col="orange")
9 n <- 100
10 S <- cumsum(2*(runif(n)>0.5)-1)
11 W <- sapply(t,function(x) ifelse(n*x>0,S[n*x],0))
12 W <- as.numeric(W)/sqrt(n)
13 lines(t,W,lty=2,col="red")
14 n <- 1000
15 S <- cumsum(2*(runif(n)>0.5)-1)
16 W <- sapply(t,function(x) ifelse(n*x>0,S[n*x],0))
17 W <- as.numeric(W)/sqrt(n)
18 lines(t,W,lty=3,col="blue")
```

Listing 1: Trayectorias de caminata aleatoria escalonada

Movimiento browniano

En esta sección estudiaremos uno de los componentes básicos de un modelo que describe la evolución de un proceso estocástico, es el llamado movimiento browniano o proceso de Wiener. Hay muchas formas de definir el proceso de Wiener, en esta investigación se adoptará la siguiente definición:

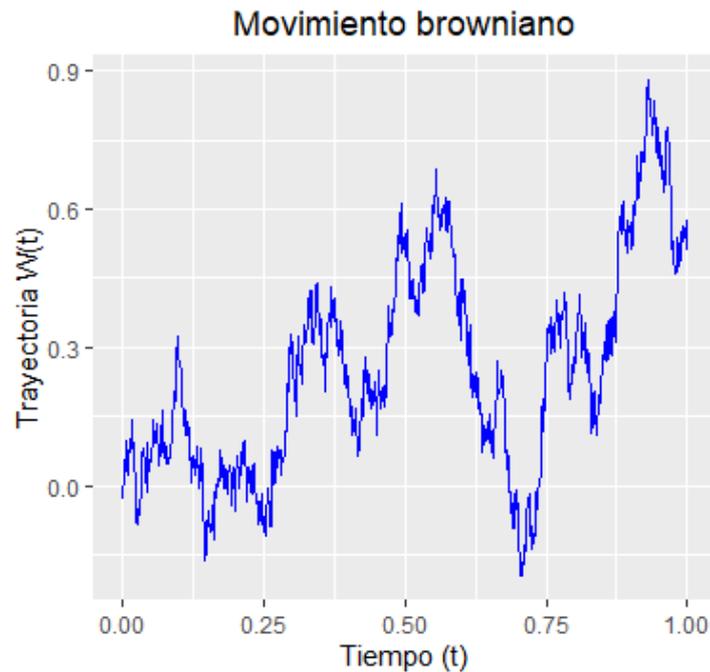


Figura 3: Simulación de movimiento browniano en el intervalo $[0, 1]$ con una partición de tamaño $N = 100$, considerando $W(0) = W(t_0) = 0$.

Definición 19.

Para simular el movimiento browniano, se hizo uso del siguiente algoritmo:

```
1 set.seed(123) #Iniciamos una semilla, para que exista variabilidad en los datos,
2 N <- 100 #numero de puntos en la malla.
3 T <- 1 #Limite superior del intervalo.
4 Delta <- T/N # Incrementos de tiempo
5 t <- seq(0,T,length=N+1)
6 W <- c(0,cumsum(sqrt(Delta)*rnorm(N)))
7 MB <- ggplot()+geom_line(aes(t,W), color = "red")+labs(title="Movimiento
  browniano",x="Tiempo (t)",y="Trayectoria W(t)")+theme_gray()
```

Listing 2: Simulación del movimiento browniano

Es importante notar que nuestra definición de movimiento browniano adopta las propiedades de la caminata aleatoria escalonada, que vimos en la sección anterior, ya que como se dijo anteriormente al tomar el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos el movimiento browniano, lo cual es fácil de ver

en la Figura 2. Es importante destacar que la suma de incrementos sucesivos al cuadrado de la caminata aleatoria es t . Para el movimiento browniano tenemos también que $[W]_t = t$. Esta particularidad del movimiento browniano con respecto a que su variación cuadrática no es cero es lo que da origen al término de *volatilidad* que es un término frecuente que usaremos a lo largo de esta investigación.

A continuación, presentaremos algunas propiedades importantes del movimiento browniano, las cuales son usadas de manera frecuente en las aplicaciones del movimiento browniano que se estudiarán más adelante.

Propiedades adicionales del Movimiento browniano

Proposición 8. El movimiento browniano W_t tiene las siguientes propiedades:

1. $E(W_t) = 0$.
2. $Var(W_t) = E(W_t^2) = t$.
3. $Cov(W_t, W_s) = E(W_t, W_s) = \min(s, t)$.
4. $E((W_t - W_s)^2) = |t - s|$.

Demostración

1. Esto se cumple directamente de la definición de movimiento browniano.
2. De la definición del movimiento browniano tenemos

$$\begin{aligned} Var(W_t) &= E(W_t^2) - (E(W_t))^2 \\ &= E(W_t^2) = t. \end{aligned}$$

3. De la definición de covarianza tenemos $Cov(W_t, W_s) = E((W_t - E(W_t))(W_s - E(W_s))) = E(W_t W_s)$. Entonces para demostrar que $E(W_t W_s) = \min(s, t)$ tenemos que demostrarlo por casos:

- Caso 1: suponemos que $s < t$, entonces

$$\begin{aligned} E(W_t W_s) &= E(W_s(W_t - W_s) + W_s^2) \\ &= E(W_s(W_t - W_s)) + E(W_s^2) \\ &= E(W_s^2) = s. \end{aligned}$$

- Caso 2: suponemos que $t < s$, entonces

$$\begin{aligned} E(W_t W_s) &= E(W_t(W_s - W_t) + W_t^2) \\ &= E(W_t(W_s - W_t)) + E(W_t^2) \\ &= E(W_t^2) = t. \end{aligned}$$

Por lo tanto $Cov(W_t, W_s) = E(W_t W_s) = \min(s, t)$.

4. Tenemos que

$$\begin{aligned} E((W_t - W_s)^2) &= E(W_t^2) - 2E(W_t W_s) + E(W_s^2) \\ &= t - 2\min(t, s) + s \\ &= |t - s|. \end{aligned}$$

Un proceso que es de mucha utilidad cuando se trabaja en aplicaciones financieras, especialmente cuando se modela la dinámica de algún activo financiero, es el llamado movimiento browniano geométrico, el cual lo podemos describir de manera formal como:

Definición 20. Llamamos **movimiento browniano geométrico** al proceso estocástico que presenta la propiedad de tener incrementos multiplicativos independientes y se define en función del movimiento browniano estándar, en particular cuando representa el precio en el tiempo de un activo financiero, por

$$S(t) = x \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\}, t > 0$$

con $S(0) = x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ como valor inicial; y $\sigma > 0$ (volatilidad) y $\mu = r$ (tasa de interés) los cuales son constantes.

Proposición 9. Para el movimiento browniano geométrico se cumple lo siguiente:

1. $E(X_t) = x_0 e^{\mu t}$.
2. $Var(X_t) = x_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$.
3. $Cov(X_t, X_s) = x_0^2 e^{\mu(s+t)} (e^{\sigma^2 s} - 1), \quad 0 \leq s \leq t$.

Demostración: Usando el hecho de que la función generadora de momentos de la distribución $N(\mu, \sigma^2)$ es $M(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$.

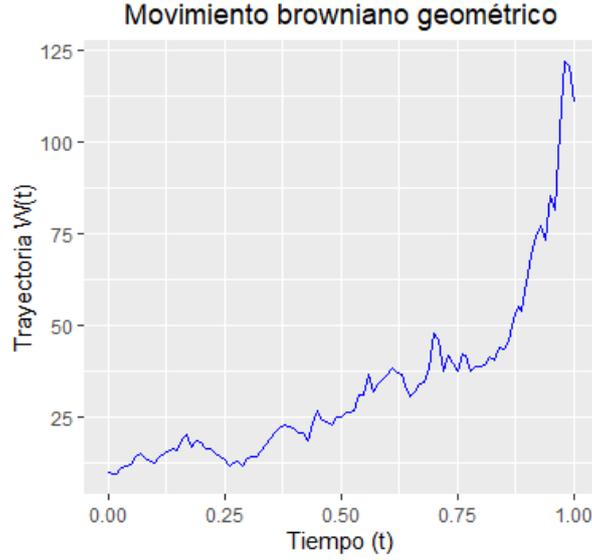


Figura 4: Simulación de movimiento browniano geométrico en el intervalo $[0, 1]$ con una partición de tamaño $N = 100$.

1. Para la esperanza o valor esperado tenemos

$$\begin{aligned}
 E(X_t) &= E\left(x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)\right) \\
 &= x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) E(\exp(\sigma W_t)) \\
 &= x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) \exp\left(\frac{1}{2}t\sigma^2\right) \\
 &= x_0 e^{\mu t}.
 \end{aligned}$$

2. Para calcular la varianza tenemos

$$\begin{aligned}
 Var(X_t) &= Var\left(x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)\right) \\
 &= x_0^2 \exp\left(2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) Var(\exp(\sigma W_t)) \\
 &= x_0^2 \exp\left(2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) (E(\exp(2\sigma W_t)) - E^2(\exp(\sigma W_t))) \\
 &= x_0^2 \exp\left(2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) \left(\exp\left(\frac{1}{2}t(2\sigma)^2\right) - \exp\left(2\left(\frac{1}{2}t\sigma^2\right)\right)\right) \\
 &= x_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).
 \end{aligned}$$

3. Antes de calcular la covarianza, primero tenemos que calcular $E(X_t X_s)$. Hay que observar que $W_t + W_s$ se puede escribir como $2W_s + (W_t - W_s)$, siendo estos sumandos independientes,

entonces,

$$\begin{aligned}
E(X_t X_s) &= E\left(x_0^2 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t+s) + \sigma(W_t + W_s)\right)\right) \\
&= x_0^2 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t+s)\right) E(\exp(\sigma(W_t + W_s))) \\
&= x_0^2 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t+s)\right) E(e^{2\sigma W_s}) E(e^{\sigma(W_t - W_s)}) \\
&= x_0^2 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t+s)\right) e^{2s\sigma^2} e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2} \\
&= x_0^2 \exp(\mu(t+s) + s\sigma^2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_s) &= E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s) \\
&= x_0^2 e^{\mu(t+s) + s\sigma^2} - x_0^2 e^{\mu(t+s)} \\
&= x_0^2 e^{\mu(t+s)} (e^{s\sigma^2} - 1).
\end{aligned}$$

Teorema 1. Sea W_t un movimiento browniano sobre el intervalo $[a, b]$ y $\Pi_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ una partición del intervalo con norma $|\Pi_n| = \max_{i=0,1,2,\dots,n-1} \{t_{i+1} - t_i\} \rightarrow 0$ tal que su variación cuadrática está dada por

$$[W]_{[a,b]} = \lim_{|\Pi_n| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 = b - a.$$

Entonces decimos que el movimiento browniano tiene una variación cuadrática a razón de uno por unidad de tiempo.

Corolario 1. Sea W un movimiento browniano. Entonces su variación cuadrática está dada por

$$[W]_t = t, t > 0.$$

Teorema 2. Sea W un movimiento browniano definido en el intervalo $[a, b]$ y $\Pi_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$, una partición del intervalo con norma $|\Pi_n| = \max_{i=0,1,2,\dots,n-1} \{t_{i+1} - t_i\} \rightarrow 0$.

Entonces su primera variación está dada por

$$V_t(W) = \lim_{|\Pi_n| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = \infty,$$

Con base en el resultado anterior decimos que el movimiento browniano tiene primera variación

no acotada sobre todo intervalo de tiempo $[a, b]$.

Demostración

La prueba se realizará por contradicción, supongamos que W_t tiene variación acotada y que $\sup(\sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|)$ denota la variación total de W_t en el intervalo $[a, b]$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 &\leq \max_{0 \leq i \leq n-1} \{|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|\} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n-1} \{|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|\} \sup(\sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|), \end{aligned}$$

como W_t es continua en $[a, b]$, también es uniformemente continua en $[a, b]$, por lo tanto,

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| \longrightarrow 0$$

cuando $|\Pi_n| \longrightarrow 0$ y se concluye que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \longrightarrow 0$$

lo cual es una contradicción.

3.4. Martingalas

Antes de comenzar la exposición de los principales resultados del cálculo estocástico, es necesario conocer sobre el concepto de martingala, ya que la noción de éste es crucial para la comprensión de la integral estocástica. Antes de enunciar la definición formal de martingala, se enunciarán algunas definiciones previas.

Definición 21. La colección $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ de σ -álgebras sobre Ω es llamada una filtración si

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \quad \text{para todo } s, t \text{ con } 0 \leq s \leq t.$$

Por lo tanto, una filtración es un flujo creciente de información.

Si $\{\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots\}$ es una sucesión de σ -álgebras sobre Ω y $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, para todo n , decimos que $\{\mathcal{F}_n\}$ es una filtración también.

En la práctica es necesario usar la definición de filtración vinculada a un proceso estocástico, así tenemos la siguiente definición:

Definición 22. El proceso estocástico $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ se dice que está adaptado a la filtración

$\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ si

$$\sigma(Y_t) \subset \mathcal{F}_t \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

El proceso estocástico Y siempre está adaptado a la filtración natural generada por Y :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, s \leq t).$$

Ya se tiene los elementos necesarios para enunciar matemáticamente el concepto de martingala en tiempo discreto y continuo.

Definición 23. El proceso estocástico $X = \{X_t, t \geq 0\}$ es llamado martingala de tiempo continuo respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ y la denotamos por $(X, \{\mathcal{F}_t\})$, si

- $E(X_t) < \infty$, para todo $t \geq 0$.
- X está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.
- $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$, para todo $0 \leq s \leq t$.

También es posible definir el concepto de martingala de tiempo discreto, de la siguiente manera:

Definición 24. El proceso estocástico $X = \{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ es llamado una martingala de tiempo discreto con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots\}$ y la denotamos como $(X, \{\mathcal{F}_n\})$, si

- $E(X_n) < \infty$, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$
- X está adaptado a $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$.
- $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$, para todo $n = 0, 1, \dots$

Proposición 10. El movimiento browniano $\{W_t\}$, es una martingala de tiempo continuo respecto a la filtración natural $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$.

Demostración: las primeras dos condiciones necesarias para ser una martingala son triviales, por lo que sólo se enunciará la demostración de la última condición, es decir, tenemos que demostrar que $E(W_t | \mathcal{F}_s) = W_s$, para todo $0 \leq s \leq t$.

Como estamos utilizando la filtración natural entonces queremos calcular

$$E(W_t | \mathcal{F}_s) = E(W_t | \sigma(W_x, x \leq s)) \quad \text{para } s \geq 0.$$

Esta claro que si $t \leq s$ entonces $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$, y

$$E(W_t | \mathcal{F}_s) = W_t.$$

Sin pérdida de generalidad asumamos que $s < t$, entonces por la linealidad del valor esperado tenemos

$$\begin{aligned}
 E(W_t | \mathcal{F}_s) &= E(W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s) \\
 &= E(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) + E(W_s | \mathcal{F}_s) \\
 &= E(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) + W_s \\
 &= W_s.
 \end{aligned}$$

Es importante notar que se ha usado el hecho de que $E(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) = 0$. Esto es debido a que $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s . Además la última igualdad la podemos deducir ya que se cumple, $\sigma(W_s) \subset \sigma(W_x, x \leq s) = \mathcal{F}_s$.

4. Cálculo estocástico con aplicaciones en finanzas

4.1. Conceptos preliminares

En este capítulo vamos a definir la integral estocástica de Itô de un proceso estocástico respecto del movimiento browniano, es decir, nuestro objetivo final es presentar la integral de Itô de un proceso $\{X_t, t \geq 0\}$. Dicha integral tiene la forma

$$\int_0^t X_s dW_s. \tag{6}$$

Este tipo de integrales no es posible definir las trayectorias por trayectoria, es decir, no es posible definir las como se acostumbra en la integral de Riemann-Stieltjes de una función respecto a otra función, ya que en este caso la función integradora es una trayectoria del movimiento browniano que, como hemos revisado antes, no tiene una primera variación finita. El interés en esta investigación en el estudio de este tipo de integrales radica en el tema de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Una forma adecuada de realizar una construcción de la teoría sobre la integral estocástica de Itô es comenzar definiendo la integral a un nivel elemental, luego avanzar definiendo la integral para procesos mucho más generales. Esto ayudará a la comprensión de la integral estocástica y a las aplicaciones que se estudiarán más adelante.

Como fuente bibliográfica para todos los conceptos teóricos que se presentaran dentro de esta sección se ha utilizado (Steele, 2000), con la notación presentada en el capítulo 6, y confrontada con una traducción en español presentada en (Rincón, 2006).

Antes de comenzar es necesario estudiar algunas definiciones que nos ayudarán más adelante a

describir y justificar algunas propiedades de la integral estocástica de Itô. Una norma natural para definir en estos espacios sería:

Definición 25. Denotamos por $L^2(P)$ al espacio vectorial de variables aleatorias reales X , sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , que son cuadrado integrales con respecto a la medida P , es decir, que cumplen la condición:

$$\|X\|_2 = (E(|X|^2))^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (7)$$

La función $\|\cdot\|$ se define como una *norma* en $L^2(P)$, es decir, es una función real definida sobre este espacio lineal que cumple las siguientes cuatro condiciones:

1. $\|X\| \geq 0$.
2. $\|X\| = 0 \iff X = 0$.
3. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.
4. $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$, con α constante.

Observación 3. Cada variable aleatoria $W_t, t \geq 0$, del movimiento browniano pertenece al espacio $L^2(P)$, ya que:

$$\|W_t\|_2 = (E(|W_t|^2))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t} < \infty.$$

Definición 26. Denotamos por $L^2(P \times dt)$ al espacio lineal de todos los procesos estocásticos $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, que cumple la condición ⁵:

$$\|X\|_{L^2(P \times dt)} = \left(E \left(\int_0^T |X_t|^2 dt \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observación 4. El movimiento browniano $W = \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ pertenece al espacio $L^2(P \times dt)$, ya que cumple:

$$\begin{aligned} \|W\|_{L^2(P \times dt)} &= \left(E \left(\int_0^T |W_t|^2 dt \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^T E(|W_t|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^T t dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{T}{\sqrt{2}} < \infty. \end{aligned}$$

⁵La función $\|\cdot\|_{L^2(P \times dt)}$ es una norma y además bajo esta norma es un espacio completo o espacio de Hilbert.

Antes de comenzar a describir la integral estocástica para procesos estocásticos simples, veremos el concepto de función indicadora, ya que esto facilitará la comprensión de los conceptos más avanzados.

4.2. Integral estocástica

Procesos simples

Definición 27. Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Si $A \subset \Omega$, definimos la **función indicadora** de A como:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \in A^C. \end{cases}$$

La función indicadora tiene las siguientes propiedades:

- $1_A \leq 1_B$ si y solo si $A \subset B$.
- $1_{A^C} = 1 - 1_A$.

Ahora ya podemos definir un proceso simple en términos de la función indicadora.

Definición 28. Sea $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ una partición finita del intervalo $[0, T]$. Definimos un **proceso estocástico simple**⁶ como un proceso de la forma

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} 1_{[t_k, t_{k+1})}(t), \quad (8)$$

donde $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n-1)}$ es una colección de variables aleatorias adaptadas a la filtración $\{\mathcal{F}_{t_k}\}_{k=0}^{n-1}$ y que son cuadrado integrables.

Al espacio de todos los procesos simples los denotaremos por \mathcal{H}_0^2 . Es posible demostrar que el espacio \mathcal{H}_0^2 es un espacio vectorial.

Integral de procesos simples.

En el caso de la integral de un proceso simple, cuya definición establece que, si el integrando es constante en algún subintervalo, entonces la integral debe ser esa constante multiplicada por el incremento del movimiento browniano. Formalmente, podemos expresar esto por medio de la siguiente definición:

Definición 29. La integral estocástica de Itô de un proceso simple X cuya forma está dada por la Ecuación (8), respecto del movimiento browniano, denotada por $I(X)$, se define como la

⁶En otras palabras describimos el proceso simple como un proceso constante a trozos con trayectorias continuas por la derecha, y límite por la izquierda.

variable aleatoria

$$I(X) = \int_0^T X_s dW_s = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}). \quad (9)$$

La variable aleatoria $I(X)$ es integrable ya que siendo las variables $X^{(k)}$ y $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ independientes, entonces cada sumando tiene esperanza cero, y por lo tanto la esperanza de la integral es cero. Esto se resumen en el siguiente lema.

Lema 1. Sea $I(X)$ la integral estocástica de Itô de un proceso simple X . Entonces se cumple que $E(I(X)) = 0$.

Demostración

Para cada $0 \leq k \leq n - 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} E(X^{(k)}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})) &= E(E(X^{(k)}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k})) \\ &= E(X^{(k)}E(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})) \\ &= E(X^{(k)}E(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $E(I(X)) = 0$.⁷

Lema 2. Sea $I(X)$ la integral estocástica de Itô de un proceso simple X . Entonces se cumple la igualdad llamada **Isometría de Itô**:

$$E\left(\left(\int_0^T X_t dW_t\right)^2\right) = \int_0^T E(X_t^2) dt = E\left(\int_0^T X_t^2 dt\right) \quad (10)$$

Demostración

⁷Para la segunda igualdad del junto de igualdades anterior se ha utilizado la propiedad de la esperanza condicional $E(E(XY|\mathcal{G})) = E(XE(Y))$, ya que X, Y son independientes respecto de la σ -álgebra \mathcal{G} para más información sobre las propiedades de la esperanza condicional, leer (Steele, 2000)

$$\begin{aligned}
E \left(\left(\int_0^T X_t dW_t \right)^2 \right) &= E \left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \right)^2 \right) \\
&= \sum_{j,k=0}^{n-1} E \left(X^{(j)} X^{(k)} \Delta W_j \Delta W_k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E \left(\left(X^{(k)} \right)^2 (\Delta W_k)^2 \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E \left(\left(X^{(k)} \right)^2 \Delta t_k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E \left(\left(X^{(k)} \right)^2 \Delta t_k \right) \\
&= E \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(X^{(k)} \right)^2 \Delta t_k \right) \\
&= E \left(\int_0^T X_t^2 dt \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que $E \left(\left(\int_0^T X_t dW_t \right)^2 \right) = E \left(\int_0^T X_t^2 dt \right)$.⁸

La identidad anterior también la podemos escribir como $\|I(X)\|_{L^2(P)}^2 = \|X\|_{L^2(P \times dt)}^2$. Por lo que podemos decir que esta identidad establece que tanto el proceso simple X como la variable aleatoria $I(X)$ tiene la misma norma en sus respectivos espacios. Esta igualdad jugará un papel muy importante en la definición de la integral estocástica.

Por lo anterior, podemos deducir que la integral estocástica asigna a cada elemento del espacio \mathcal{H}_0^2 una variable aleatoria en el espacio $L^2(P)$. Por lo tanto, tenemos la transformación lineal:

$$I : \mathcal{H}_0^2 \longrightarrow L^2(P),$$

la cual resulta ser continua debido a la isometría de Itô.

Observación 5. Si se toma el proceso simple $X^{(k)} = W_{t_k}$, en donde W_{t_k} está dado por el movimiento browniano en t_k , podemos obtener la integral estocástica del proceso simple W asociado al movimiento browniano con respecto a sí mismo, es decir:

$$I(W) = \int_0^T W_s dW_s = \sum_{k=0}^{n-1} W_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}). \quad (11)$$

Integral de Itô por aproximación.

⁸En la cadena de igualdades anteriores, es necesario aclarar que para índices distintos j, k la esperanza de $E(X^{(j)} X^{(k)} \Delta W_j \Delta W_k) = 0$

El propósito de esta sección, es avanzar un poco más en la construcción de la integral estocástica para procesos más generales. Lo primero será denotar por \mathcal{H}^2 el espacio de todos los procesos $\{X_t\}$ medibles y adaptados a la filtración natural del movimiento browniano $\{\mathcal{F}_t\}$, tales que:

$$E \left(\int_0^T |X_t|^2 dt \right) < \infty.$$

Proposición 11. El espacio \mathcal{H}^2 es un subespacio lineal cerrado respecto de $L^2(P \times dt)$.

En particular, todo proceso simple es un elemento de \mathcal{H}^2 . Entonces se cumple la siguiente cadena de inclusión:

$$\mathcal{H}_0^2 \subset \mathcal{H}^2 \subset L^2(P \times dt).$$

Además, se cumple que \mathcal{H}_0^2 es denso en \mathcal{H}^2 respecto de la norma $L^2(P \times dt)$, es decir, para cualquier proceso X en \mathcal{H}^2 existe una sucesión de procesos $X^{(n)}$ en \mathcal{H}_0^2 tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X^{(n)}\|_{L^2(P \times dt)} = 0. \quad (12)$$

Este procedimiento de aproximación puede llevarse a cabo de la siguiente forma: mediante la técnica de truncamiento, todo proceso en \mathcal{H}^2 puede ser aproximado por un proceso acotado; a su vez todo proceso en \mathcal{H}^2 que es acotado se puede aproximar por procesos acotados y continuos; y éstos a su vez se aproximan por procesos simples de la forma de la Ecuación 12.⁹

Proposición 12. La sucesión $I(X^{(n)})$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $L^2(P)$.

Demostración

$$\begin{aligned} \|I(X^{(k)}) - I(X^{(l)})\|_{L^2(P)} &= \|I(X^{(k)} - X^{(l)})\|_{L^2(P)} \\ &= \|X^{(k)} - X^{(l)}\|_{L^2(P \times dt)} \\ &\leq \|X - X^{(k)}\|_{L^2(P \times dt)} + \|X - X^{(l)}\|_{L^2(P \times dt)} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior se cumple debido a la simetría de $I\hat{o}$, y para $k, l > N$ para algún N lo suficientemente grande puede hacerse tan pequeña como queramos. Entonces, de manera natural, se define para cada $X \in \mathcal{H}^2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} I(X^{(n)}) = I(X)$.

Proposición 13. Isometría de $I\hat{o}$

⁹Para ver más detalles sobre esta sucesión de aproximaciones véase (Øksendal, 2010).

Para cualquier proceso X en \mathcal{H}^2 se cumple:

$$\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(P \times dt)} \quad (13)$$

Demostración

Sea X un proceso en \mathcal{H}^2 y sea $X^{(n)}$ en \mathcal{H}_0^2 tal que $\|X - X^{(n)}\|_{L^2(P \times dt)} \rightarrow 0$. Entonces utilizando la desigualdad $\| \|a\| - \|b\| \| \leq \|a - b\|$ tenemos que:

$$\|X^{(n)}\|_{L^2(P \times dt)} \rightarrow \|X\|_{L^2(P \times dt)}.$$

Análogamente, como $\|I(X) - I(X^{(n)})\|_{L^2(P)} \rightarrow 0$, al aplicar la desigualdad tenemos:

$$\|I(X^{(n)})\|_{L^2(P)} \rightarrow \|I(X)\|_{L^2(P)}.$$

Por lo que podemos concluir que $\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(P \times dt)}$.

Proposición 14. Sea X un proceso en \mathcal{H}^2 . Entonces se cumple que:

$$E(I(X)) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(I(X^{(n)})) = 0.$$

Demostración

$$0 \leq E^2(I(X) - I(X^{(n)})) \leq E(I(X) - I(X^{(n)}))^2,$$

ya que $E(I(X) - I(X^{(n)}))^2 \rightarrow 0$ entonces $E(I(X) - I(X^{(n)})) \rightarrow 0$, es decir,

$$E(I(X)) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(I(X^{(n)})) = 0.$$

De esta forma obtenemos una transformación lineal y continua:

$$I : \mathcal{H}^2 \rightarrow L^2(P).$$

Observación 6. Ya que el movimiento browniano $\{W_t\}$ pertenece al espacio \mathcal{H}^2 , entonces se puede aproximar tal proceso en el sentido de la norma $L^2(P \times dt)$, por el proceso simple

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} W_{t_k} 1_{[t_k, t_{k+1})}(t),$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ es una partición del intervalo $[0, T]$. Se tiene entonces la

siguiente integral estocástica, y su aproximación como límite en media cuadrática

$$\int_0^T W_t dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} W_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}). \quad (14)$$

Integral como un proceso.

En esta sección, se hará una extensión de la teoría que hemos estudiado hasta el momento. Para cada t en $[0, T]$ y para cualquier X en \mathcal{H}^2 , se define el proceso:

$$I_t(X) = \int_0^T X_s 1_{[0,t]}(s) dW_s = \int_0^t X_s dW_s. \quad (15)$$

De la ecuación anterior podemos observar que, con este pequeño cambio podemos ver a la integral como un proceso, y ya no como una variable aleatoria. Es necesario aclarar que este proceso no es necesariamente continuo, sin embargo, puede demostrarse que existe una versión continua de él. Esta versión tendría que ser una martingala respecto a la filtración natural del movimiento browniano.

Extensión por localización.

Mediante el proceso de localización, será posible extender la definición de la integral de Itô a procesos medibles y adaptados a la filtración natural del movimiento browniano que cumplen la condición de restricción:

$$P \left(\int_0^T |X_t|^2 dt < \infty \right) = 1. \quad (16)$$

A todos los procesos que cumplen la restricción de la Ecuación (16), lo denotaremos por \mathcal{L}_{loc}^2 . Este nuevo espacio contiene a \mathcal{H}^2 , es decir, $\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{L}_{loc}^2$ y existe una sucesión creciente de tiempos de paro ¹⁰ $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n \dots$ tal que $\tau_n \rightarrow T$ cuando $n \rightarrow \infty$, y para cada $n \geq 1$ el proceso $X_t \cdot 1_{(\tau_n \geq t)}(\omega)$ pertenece al espacio \mathcal{H}^2 .

Se define entonces la integral estocástica como el siguiente límite en el espacio $L^2(P)$.

$$\int_0^t X_s dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T X_s \cdot 1_{(\tau_n \geq t)}(\omega) \cdot 1_{[0,t]}(s) dW_s. \quad (17)$$

En este caso la integral ya no es una martingala sino una martingala local. En general, la isometría de Itô ya no se cumple cuando la integral estocástica tiene como dominio de definición el espacio \mathcal{L}_{loc}^2 .

Ejemplo 6. El movimiento browniano unidimensional $\{W_t : t \geq 0\}$ y para cualquier función continua f , el proceso $\{f(W_t) : 0 \leq t \leq T\}$ tiene trayectorias continuas y acotadas, por lo tanto se cumplen las condiciones de adaptabilidad y medibilidad. Además, se cumple la restricción

¹⁰Definir tiempo de paro.

(16), por lo tanto este proceso es elemento de \mathcal{L}_{loc}^2 , y tiene sentido la expresión:

$$\int_0^t f(W_s) dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Es posible demostrar que la integral anterior puede ser calculada mediante el siguiente límite en el espacio $L^2(P)$

$$\int_0^t f(W_s) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(W_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}), \quad (18)$$

donde $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ es una partición de $[0, t]$, y nuevamente el límite debe entenderse en el sentido de que la distancia máxima entre dos puntos sucesivos de la partición tiende a cero.

Con este ejemplo se concluye la serie de generalizaciones sobre las cuales está construida la integral de Itô. La Figura 5 resume las ideas vistas en la construcción de la integral estocástica de Itô.

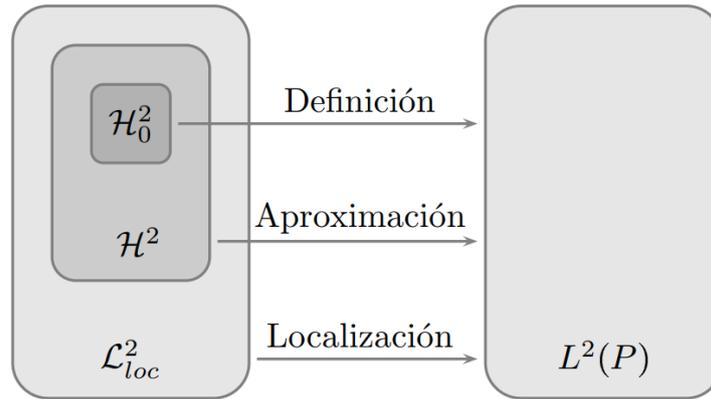


Figura 5: Relación de espacios en la construcción de la integral de Itô

Ejemplo 7. Con la Ecuación (18) podemos encontrar fácilmente el valor de

$$\int_0^T W_s dW_s.$$

Solución.

Tomando la partición $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ uniforme del intervalo $[0, T]$, es decir, $t_{i+1} - t_i = \frac{1}{n}$ y usando la identidad:

$$a(b - a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a - b)^2,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T W_s dW_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2} (W_{t_{k+1}}^2 - W_{t_k}^2) - \frac{1}{2} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t.
\end{aligned}$$

La primera suma es una suma telescópica, mientras que la segunda suma corresponde a la variación cuadrática del movimiento browniano, es importante destacar que los límites indicados son válidos en el sentido de media cuadrática. Otra observación importante es que el término $-\frac{1}{2}t$, es conocido como el *término corrector de Itô*.

Observación 7. La integral estocástica es sensible al punto donde se evalúa el integrando. Si evaluamos el integrando en el extremo derecho de cada subintervalo, y tenemos en cuenta que el proceso a integrar ya no es adaptado al movimiento browniano, y por lo tanto queda fuera de la teoría desarrollada antes, usando la identidad:

$$b(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a-b)^2,$$

se obtiene, nuevamente en el sentido de media cuadrática,

$$\begin{aligned}
\int_0^T W_s dW_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W_{t_{k+1}} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2} (W_{t_{k+1}}^2 - W_{t_k}^2) + \frac{1}{2} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} W_t^2 + \frac{1}{2} t.
\end{aligned}$$

Como podemos ver el signo de la integral ha cambiado, respecto al ejemplo anterior.

Si consideramos el promedio de las dos evaluaciones en los extremos se obtiene la llamada *Integral de Stratonovich*, denotada por:

$$\int_0^t W_s \circ dW_s = \frac{1}{2} W_t^2.$$

La integral de Stratonovich tiene algunas ventajas operacionales pues sigue algunas reglas usuales del cálculo integral, pero vista como proceso deja de ser una martingala.

Proposición 15. Dado el proceso $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t$, su valor esperado es cero y su varianza

tiene un valor de $\frac{1}{2}t^2$.

Demostración.

El valor esperado de $\int_0^t W_s dW_s$ es cero ya que la integral estocástica es una martingala y por lo tanto su valor esperado es cero, es decir,

$$E\left(\int_0^t W_s dW_s\right) = 0.$$

Para calcular su varianza tenemos que utilizar la simetría de Itô, así:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\int_0^t W_s dW_s\right) &= E\left(\int_0^t W_s dW_s\right)^2 \\ &= E\left(\int_0^t W_s^2 ds\right) \\ &= \int_0^t E(W_s^2) ds \\ &= \int_0^t s ds \\ &= \frac{1}{2}t^2. \end{aligned}$$

Una forma alternativa de llegar al resultado anterior es utilizando el hecho que $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$. Es evidente de que $E\left(\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t\right) = 0$. Entonces su varianza está dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t\right) &= \frac{1}{4}\text{Var}(W_t^2) \\ &= \frac{1}{4}(E(W_t^4) - E^2(W_t^2)) \\ &= \frac{1}{4}(3t^2 - t^2) \\ &= \frac{1}{2}t^2. \end{aligned}$$

Proposición 16. Sean $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ dos procesos en \mathcal{H}^2 . Entonces

$$E\left(\int_0^t X_s dW_s \int_0^t Y_s dW_s\right) = \int_0^t E(X_s Y_s) ds.$$

Solución

Para comprobar este resultado es necesario que utilicemos la isometría de Itô y la igualdad

$$ab = \frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
E \left(\int_0^t X_s dW_s \int_0^t Y_s dW_s \right) &= E \left(\frac{1}{2} \left| \int_0^t X_s + Y_s dW_s \right|^2 \right) - \frac{1}{2} \left(E \left| \int_0^t X_s dW_s \right|^2 + E \left| \int_0^t Y_s dW_s \right|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t E |X_s + Y_s|^2 ds - \frac{1}{2} \left(\int_0^t E |X_s|^2 ds + \int_0^t E |Y_s|^2 ds \right) \\
&= \int_0^t E(X_s Y_s) ds.
\end{aligned}$$

4.3. Propiedades de la integral estocástica.

En general la integral de Itô, cumple varias propiedades, en esta sección se hará un resumen de ellas, algunas de estas propiedades ya se han demostrado en las proposiciones de la sección anterior.

- La integral $I : \mathcal{L}_{loc}^2 \rightarrow L^2(P)$ es lineal, es decir, para cualquier constante c y para cualesquiera procesos $X_s, Y_s \in \mathcal{L}_{loc}^2$, cumple que ¹¹

$$\int_0^T (cX_s + Y_s) dW_s = c \int_0^T X_s dW_s + \int_0^T Y_s dW_s \quad c.s.$$

- Tiene esperanza cero, es decir, para cualquier proceso $X_s \in \mathcal{L}_{loc}^2$, se tiene que:

$$E \left(\int_0^T X_s dW_s \right) = 0 \quad c.s.$$

- Cuando la integral se restringe al espacio \mathcal{H}^2 , se cumple la isometría de Itô, es decir,

$$E \left(\left| \int_0^T X_s dW_s \right|^2 \right) = E \left(\int_0^T |X_s|^2 ds \right).$$

- Nuevamente, si se restringe la integral al espacio \mathcal{H}^2 , la integral es una martingala, es decir, es integrable, adaptada y para $0 \leq s \leq t$, se cumple:

$$E \left(\int_0^t X_u dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right) = \int_0^s X_u dW_u.$$

En general, para procesos en \mathcal{L}_{loc}^2 la integral ya no es una martingala sino una martingala local.

- Existe una versión continua de la integral estocástica.

¹¹Se dice que dos procesos X_t, Y_t son equivalentes, o también que uno es una versión o modificación del otro, si para cada $t \geq 0$ se cumple $P(X_t = Y_t) = 1$, en tal caso se dice que la variable $X_t = Y_t$, casi seguramente y se escribe c.s., es decir, que con probabilidad uno las trayectorias de los dos procesos son idénticas.

En la siguiente sección se estudiará el lema de Itô, como lo resalta (Iacus, 2008), ya que este lema es una herramienta importante dentro del cálculo estocástico. En el capítulo siguiente se estudiará la versión extendida del lema de Itô, lo cual nos permite ampliar el número de problemas a los cuales se les puede dar solución, especialmente cuando se trata de problemas aplicados a las finanzas.

4.4. Fórmula de Itô.

Como es bien conocido, cuando se reciben los primeros cursos de cálculo integral, generalmente no utilizamos la definición para resolver cada integral, sino que en su lugar se utilizan fórmulas conocidas que ayudan a encontrar la solución de la integral. Podemos realizar algo similar con la integral estocástica, ya que en muy pocos casos se calcula la integral estocástica a partir de su definición, y para ello se tiene la famosa fórmula de Itô o lema de Itô que es una herramienta fundamental para este tipo de integrales. El primer paso en esta investigación es analizar la versión simplificada o primera versión de la fórmula de Itô.

Antes de comenzar y enunciar la primera versión de esta fórmula, es necesario aclarar que en lo sucesivo se hará referencia a los siguientes espacios de funciones: una función de variable real es de clase \mathcal{C}^1 cuando es diferenciable y su derivada es continua. Análogamente, una función es de clase \mathcal{C}^2 , si es dos veces diferenciable y su derivada es una función continua.

Teorema 3. Fórmula de Itô [I].

Sea $f(x)$ una función de clase \mathcal{C}^2 , entonces se cumple que:

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) dW_s. \quad (19)$$

Demostración.

Una forma de demostrar el resultado anterior es utilizando el teorema de Taylor ¹². Así para una función $f(x)$ suficientemente suave, se tiene que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x),$$

donde $R(X)$ es el residuo y se escribe como:

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_{x_0}^x f''(t)(x - t) dt \\ &= \int_0^1 (1 - \theta) f''(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^2 d\theta. \end{aligned}$$

¹²Para ver demostraciones más rigurosas, ver ((Friedman, 1975),(Mikosch, 1998a),(P.E., 2004),(auth., 2001))

Es importante resaltar que la segunda igualdad se obtuvo con un cambio de variable y si además tomamos una partición del intervalo $[0, t]$, dada por:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(W_t) - f(W_0) &= \sum_{k=1}^n [f(W_{t_k}) - f(W_{t_{k-1}})] \\ &= \sum_{k=1}^n f'(W_{t_{k-1}}) \Delta W_k + \int_0^1 (1 - \theta) \sum_{k=1}^n f''((W_{t_{k-1}} + \theta \Delta W_k) (\Delta W_k)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Si tomamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$ las sumas convergen, casi seguramente, y entonces se obtiene la igualdad:

$$\begin{aligned} f(W_t) - f(W_0) &= \int_0^t f'(W_s) dW_s + \int_0^1 (1 - \theta) \int_0^t f''(W_s) ds d\theta \\ &= \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds. \end{aligned}$$

Esta fórmula es una versión estocástica de la regla de la cadena del cálculo diferencial usual, y es común escribirla en su forma diferencial ¹³del siguiente modo:

$$df(W_t) = f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt.$$

Esta expresión debe entenderse en el sentido de su forma integral dada por la fórmula 19. A continuación, se enunciarán algunos ejemplos que ayudarán a la comprensión de los conceptos anteriores y sus aplicaciones.

Ejemplo 8. Considere la función $f(x) = e^x$, por la fórmula de Itô tenemos:

$$e^{W_t} - e^{W_0} = \int_0^t e^{W_s} dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t e^{W_s} ds,$$

es decir, el proceso $\{X_t = e^{W_t}\}$ satisface la ecuación diferencial:

$$dX_t = X_t dW_t + \frac{1}{2} X_t dt.$$

Si tomamos la condición inicial $X_0 = 1$, tendremos el movimiento browniano geométrico, el cual hemos presentado antes.

¹³Es común que algunos autores utilicen las fórmulas diferenciales en sus resultados, como en (Mikosch, 1998b)

Ejemplo 9. Sea $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Entonces la fórmula de Itô establece que:

$$\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}W_0^2 = \int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t 1 ds,$$

por lo que, despejando, tenemos:

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Este resultado anterior ya se había obtenido, pero esta vez se ha encontrado por medio de la fórmula de Itô.

En general, para funciones de la forma $f(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, se obtiene:

$$\int_0^t W_s^n dW_s = \frac{1}{n+1}W_t^{n+1} - \frac{1}{2} \int_0^t nW_s^{n-1} ds.$$

Este resultado es particularmente útil cuando estamos calculando integrales estocásticas.

Ejemplo 10. Usar la fórmula de Itô para demostrar que

$$E(W_t^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!} t^n.$$

Demostración.

Tomando la función $f(x) = \frac{1}{2n}x^{2n}$, para cualquier entero natural n , por la fórmula de Itô se tiene que:

$$\frac{1}{2n}W_t^{2n} - \frac{1}{2n}W_0^{2n} = \int_0^t W_s^{2n-1} dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t (2n-1)W_s^{2n-2} ds.$$

Ahora tomando el valor esperado y resolviendo tenemos:

$$\begin{aligned} E(W_t^{2n}) &= \frac{2n(2n-1)}{2} \int_0^t E(W_s^{2n-2}) ds \\ &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} E(W_s^{2n-4}) ds dt_1 \\ &\vdots \\ &= \frac{(2n)!}{2^n} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} 1 ds dt_{n-1} \cdots dt_1 \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!} t^n. \end{aligned}$$

4.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas.

En esta sección se estudiará la teoría sobre ecuaciones diferenciales estocásticas, empezando por el concepto de una ecuación diferencial estocástica, los tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas que existen partiendo de su forma general, y finalmente exponiendo los teoremas de existencia y unicidad de soluciones.

A lo largo de la sección, tendremos siempre presente los siguientes elementos: sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, y sea $\{W_t : t \geq 0\}$ un movimiento browniano unidimensional adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Definición 30. Sean $a(t, x)$ y $b(t, x)$ dos funciones de $[0, T] \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} . Una ecuación diferencial estocástica, es una ecuación de la forma:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad (20)$$

Definida para valores de t en el intervalo $[0, T]$, y con condición inicial la variable aleatoria X_0 que se presupone \mathcal{F}_0 -medible, e independiente del movimiento browniano. La Ecuación (20) se interpreta como la ecuación integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s, \quad (21)$$

En donde la primera integral es una integral de Riemann, y la segunda es una integral estocástica de Itô, Al proceso $\{X_t\}$ se le llama *proceso de difusión*.¹⁴

Los elementos conocidos de la ecuación diferencial estocástica (20) son las funciones deterministas $a(t, x)$ y $b(t, x)$, junto con la variable aleatoria inicial X_0 , y tenemos como incógnita al proceso X_t .

A la función $a(t, x)$ se le conoce como **coeficiente de tendencia o deriva**¹⁵, y a la función $b(t, x)$ se le conoce como **coeficiente de difusión o volatilidad**. El proceso solución puede interpretarse como el estado de un sistema que evoluciona con un componente determinista, por un lado, en el cual interviene un término no aleatorio dado por la integral de Riemann, y por otro lado, un componente estocástico, representado por la integral estocástica con respecto al movimiento browniano. Para que una ecuación diferencial estocástica tenga solución se deben satisfacer algunas condiciones en los coeficientes; al igual que en las ecuaciones diferenciales deterministas existen teoremas de existencia y unicidad, los cuales se estudiarán más adelante.

¹⁴En algunas fuentes bibliográficas aparecen ecuaciones diferenciales estocásticas (20) con condición inicial $X_0(\omega) = Y(\omega)$.

¹⁵En ingles se le conoce al coeficiente de tendencia como *drift*.

Observación 8. En la práctica, el movimiento browniano W es llamado el proceso conductor de la ecuación diferencial de Itô.

Las soluciones de una ecuación diferencial estocástica se agrupan en soluciones fuertes y soluciones débiles. A continuación, se presenta la descripción matemática de estos conceptos.

Definición 31. Una **solución fuerte** de la ecuación diferencial estocástica (20) es un proceso estocástico $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ que satisface las siguientes condiciones:

- X está adaptado al movimiento browniano, es decir, en el tiempo t , X_t es una función de $W_s, s \leq t$.
- Las integrales descritas en la Ecuación (21) son definidas como integrales de Riemann e integral estocástica de Itô, respectivamente.
- X es una función que depende de la trayectoria del movimiento browniano subyacente y de los coeficientes $a(t, X_t)$ y $b(t, X_t)$.

De la definición anterior, podemos concluir que una solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica es aquella que se basa en la trayectoria del movimiento browniano subyacente.

Para las **soluciones débiles**, el comportamiento de la trayectoria no es esencial, solo nos interesa la distribución de X . Las soluciones débiles de X son suficientes para determinar las características de la distribución de X , tales como el valor esperado, varianza y covarianza.

Observación 9. En general, una solución fuerte o débil X de la ecuación diferencial estocástica es llamada una difusión. En particular, tomando $a(t, X_t) = 0$ y $b(t, X_t) = 1$ en la Ecuación (20), el proceso llega a ser un **proceso de Wiener o browniano subyacente**, tiene trayectorias continuas, es uniformemente acotado en $L^2(P)$, es decir, $\sup_{0 \leq t \leq T} \{E(X_t^2)\} < \infty$, y además es único en el sentido de indistinguibilidad.¹⁶

Un ejemplo importante es que al movimiento browniano geométrico lo podemos ver como solución de una ecuación diferencial estocástica $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, y además esta solución es única. El siguiente resultado describe esta situación.

Proposición 17. Dada la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

¹⁶La solución es única en el sentido de indistinguibilidad, (Rincón, 2006) explica que dos procesos son indistinguibles si $P(X_t = Y_t \text{ para cada } t \geq 0) = 1$, decir que dos procesos son indistinguibles, es más fuerte que decir que son equivalentes.

con $\mu, \sigma > 0$ constantes y condición inicial X_0 , su solución está dada por:

$$X_t = X_0 e^{(\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

para todo $t \in [0, T]$ y dicha solución es única.

El teorema de existencia y unicidad no establece la forma de encontrar la solución a una ecuación diferencial estocástica dada, sino que sólo demuestra cuándo existe unicidad de la solución. El siguiente resultado, es otra versión del teorema de existencia y unicidad de soluciones fuertes.

Teorema 4. Dada la ecuación diferencial estocástica con condición inicial X_0 con segundo momento finito, es decir, $E[X_0^2] < \infty$, que además es independiente de $\{W_t, t \geq 0\}$. Si las funciones coeficientes $a(t, x)$ y $b(t, x)$ satisfacen las siguientes condiciones:

- $a(t, x)$ y $b(t, x)$ son funciones continuas.
- Se satisface una condición de Lipschitz, respecto a las segundas variables, es decir,

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|,$$

para alguna constante $K > 0$.

Entonces la ecuación diferencial estocástica (20) tiene solución única ¹⁷ fuerte X sobre el intervalo $[0, T]$.

La siguiente versión de la fórmula de Itô, es un resultado bastante útil para resolver algunas ecuaciones diferenciales estocásticas y generaliza la versión anteriormente enunciada.

Teorema 5. Fórmula de Itô [II].

Si $\{X_t\}$ es un proceso de Itô dado por ¹⁸:

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)} ds + \int_0^t A_s^{(2)} dW_s.$$

o en su forma diferencial:

$$dX_t = A_t^{(1)} dt + A_t^{(2)} dW_t,$$

¹⁷La solución es única en el sentido de indistinguibilidad (Véase (Peter E. Kloeden, 1995), (Friedman, 1975), (Eckhard Platen, 2010))

¹⁸Obsérvese que los procesos de Itô no necesariamente son soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas. Las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas se llaman procesos de difusión. Todo proceso de difusión es un proceso de Itô.

donde $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$ son procesos adaptados al movimiento browniano y $f(t, x)$ es una función de clase \mathcal{C}^2 en t y x , entonces el proceso $\{Y_t = f(t, X_t)\}$, satisface la siguiente expresión diferencial estocástica:

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2, \quad (22)$$

en donde:

$$\int_0^t g(t, X_s)dX_s = \int_0^t g(t, X_s)A_s^{(1)}ds + \int_0^t g(t, X_s)A_s^{(2)}dW_s$$

para alguna función g diferenciable con respecto a X .

Es importante observar que las derivadas involucradas son funciones continuas, por lo que las integrales resultantes están bien definidas.

A continuación, se mostrarán algunos ejemplos donde se hace uso de la segunda versión de la fórmula de Itô.

Ejemplo 11. Demostrar que:

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds.$$

Solución.

Si tomamos el proceso $X_t = W_t$ y la función $f(t, x) = tx$, aplicando la segunda fórmula de Itô tenemos:

$$\begin{aligned} d(f(t, W_t)) &= f_t(t, W_t)dt + f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W_t)(dW_t)^2 \\ d(tW_t) &= W_t dt + t dW_t. \end{aligned}$$

Pasando la última ecuación a su forma integral y despejando tenemos:

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds.$$

Ejemplo 12. Demostrar que el proceso $\{X_t = \frac{W_t}{1+t}\}$ es solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \frac{-X_t}{1+t}dt + \frac{1}{1+t}dW_t,$$

con condición inicial $X_0 = 0$.

Solución.

Tomando $f(t, x) = \frac{x}{1+t}$. El proceso $\{X_t = f(t, W_t)\}$ cumple la condición inicial y por la fórmula

de Itô se tiene que:

$$\begin{aligned} dX_t &= f_t(t, W_t)dt + f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W_t)dt \\ &= \frac{-W_t}{(1+t)^2}dt + \frac{1}{1+t}dW_t \\ &= \frac{-X_t}{1+t}dt + \frac{1}{1+t}dW_t, \end{aligned}$$

por lo tanto $dX_t = \frac{-X_t}{1+t}dt + \frac{1}{1+t}dW_t$.

Ejemplo 13. Usando el método de igualación de coeficientes resolver la ecuación:

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dW_t,$$

con condición inicial $X_0 = 0$

Solución.

Se busca una función $f(t, x)$ tal que el proceso solución pueda escribirse como: $X_t = f(t, W_t)$.

Igualando los coeficientes de esta ecuación con los de la fórmula de Itô,

$$dX_t = f_t(t, W_t)dt + f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W_t)dt,$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_x(t, x) &= e^{-t} \\ f_t(t, x) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, x) &= -f(t, x). \end{aligned}$$

De la primera ecuación, se obtiene $f(t, x) = e^{-t}x + c(t)$, sustituyendo en la segunda ecuación y simplificando, obtenemos $c'(t) = -c(t)$. Calculando la solución tenemos:

$$c(t) = ce^{-t},$$

donde c es una constante. Por lo tanto:

$$f(t, x) = e^{-t}(x + c).$$

Para que el proceso $X_t = f(t, W_t) = e^{-t}(W_t + c)$ cumpla la condición inicial $X_0 = 0$, forzosamente la constante c debe ser cero.

De esta forma la función buscada es:

$$f(t, x) = e^{-t}x.$$

La fórmula de Itô asegura que:

$$\begin{aligned} dX_t &= -e^{-t}W_t dt + e^{-t}dW_t \\ &= -X_t dt + e^{-t}dW_t. \end{aligned}$$

4.6. Ecuación diferencial lineal general.

A continuación, se presentan resultados importantes sobre las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales, empezando con la forma general.

Definición 32. Una ecuación diferencial estocástica lineal en su forma general está dada por:

$$dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + [b_1(t)X_t + b_2(t)]dW_t, \quad (23)$$

donde los coeficientes (deterministas) a_i y b_i para $i = 1, 2$, son continuos, dentro del intervalo $[0, T]$.

En la definición anterior es posible demostrar que se cumplen todas las hipótesis del Teorema 4.

De la definición anterior, podemos obtener otras definiciones de ecuaciones diferenciales estocásticas lineales, las cuales son casos particulares de la ecuación general.

Definición 33. Si tomamos $b_1(t) = 0$ en la ecuación general, obtenemos la ecuación diferencial estocástica dada por:

$$dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + b_2(t)dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (24)$$

la cual se le conoce como **ecuación lineal con ruido aditivo**.

La solución de este tipo de ecuaciones está dada por:

$$X_t = [y(t)]^{-1} \left(X_0 + \int_0^t c_2(s)y(s)ds + \int_0^t \sigma_2(s)y(s)dW_s \right),$$

con $y(t) = \exp \left\{ - \int_0^t c_1(s)ds \right\}$.

Definición 34. A la ecuación diferencial estocástica dada por:

$$dX_t = [a_1(t)X_t]dt + [b_1(t)X_t]dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (25)$$

se le conoce como **ecuación diferencial estocástica lineal homogénea**. Como se puede observar $a_2(t) = b_2(t) = 0$, para todo t . Además ya que X_t aparece como factor del incremento del movimiento browniano, esta ecuación también es conocida como una ecuación diferencial estocástica con **ruido multiplicativo**.

La solución de este tipo de ecuaciones está dada por:

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \int_0^t [a_1(s) - 0.5b_1^2(s)]ds + \int_0^t b_1(s)dW_s \right\} \quad t \in [0, T],$$

Un ejemplo claro es el movimiento browniano geométrico.

4.7. Ejemplos en finanzas.

Para concluir este capítulo, se presenta una serie de ejemplos de aplicaciones del cálculo estocástico en finanzas.

4.7.1. Modelo de Ornstein-Uhlenbeck.

Uno de los principales ejemplos de ecuaciones diferenciales estocásticas, que podemos encontrar dentro del campo de las aplicaciones en finanzas es el modelo Ornstein-Uhlenbeck, el cual es solución de la ecuación diferencial estocástica con la siguiente forma paramétrica:

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 dW_t, \quad (26)$$

donde $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}^+$ y donde $X_0 = x_0 > 0$. Es importante resaltar que la ecuación dentro del ámbito financiero se expresa de la siguiente manera:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad (27)$$

donde $\sigma \in \mathbb{R}^+$ y $\mu, \theta \in \mathbb{R}$ con condición inicial $X_0 = x_0 > 0$; al coeficiente σ se le conoce como volatilidad, a μ se le conoce como el valor de equilibrio a largo plazo, finalmente al coeficiente θ se le conoce como la velocidad de reversión a la media.

La solución para la Ecuación (27) está dada por:

$$X_t = \mu + (x_0 - \mu)e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta_2(t-u)} dW_u. \quad (28)$$

El modelo de Ornstein-Uhlenbeck tiene muchas aplicaciones, una de las principales se encuentra

en modelar tipos de interés. La dinámica del modelo es la siguiente:

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \beta dW_t^Q, \quad (29)$$

donde k, θ, β son constantes. El movimiento aleatorio es generado por el movimiento browniano de medida Q, W_t^Q . Una propiedad importante del proceso de Ornstein-Uhlenbeck es que el tipo de interés revierte a la media, θ , y la tendencia de reversión está controlada por k . Asimismo, este proceso es un proceso de difusión y, por lo tanto, markoviano, lo que conlleva a unas sencillas y atractivas fórmulas cerradas. En finanzas, la reversión a la media describe una serie temporal en la que *los rendimientos pueden ser muy inestables en el corto plazo pero muy estables en el largo plazo*. Esto se podría expresar de otra manera diciendo que la desviación típica de los rendimientos anuales medios decrecen más rápido que la inversa del período de análisis. Esto tendría una serie de implicaciones, por ejemplo, que el proceso no es un paseo aleatorio, sino que períodos de rendimientos decrecientes son seguidos por retornos crecientes.

Finalmente, hay que comentar que el valor futuro del tipo de interés está normalmente distribuido, con la siguiente distribución:

$$r_T \sim N \left(\theta(\rho_0 - \theta)e^{-kT}, \frac{\beta^2}{2k}(1 - e^{-2kT}) \right).$$

El comportamiento de r_t puede ser cóncavo, convexo, etc. También podría ser negativa para alguno de los valores de los parámetros.

4.7.2. Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR).

Los tipos de interés son fundamentales para los mercados financieros, el consumo privado, las ganancias empresariales o corporativas, los precios de los activos, la inflación y la economía. Además, podemos agregar que a medida que los tipos de interés alcanzan valores altos, también se aprecia un incremento en su volatilidad. La dinámica de los tipos de interés es muy diferente a la de otras variables, como los rendimientos de las acciones. Adicionalmente, la heterocedasticidad y la regresión a la media, son propiedades de los tipos de interés; a medida que los tipos de interés suben por encima del nivel de la media, hay una tendencia que *tira* de los tipos de interés hacia abajo, y, viceversa, cuando los tipos de interés caen por debajo de la media, la tendencia tira de los tipos hacia arriba. Para capturar estas dos características especialmente relevantes de los tipos de interés, Cox, Ingersoll y Ross construyeron un modelo.

El modelo que se va a analizar en esta sección nace como una supuesta mejora del proceso de Ornstein-Uhlenbeck al restringir que los tipos de interés sólo puedan tomar valores positivos o,

al menos, no-negativos, dependiendo del cumplimiento o no de ciertas condiciones paramétricas que mencionaremos más adelante. El modelo de Cox-Ingersoll-Ross será referido como CIR. Es una particularización de la familia de modelos de Chan-Karolyi-Longstaff Sanders que es una clase de ecuaciones diferenciales estocásticas paramétricas:

$$dX_t = (\theta_1 + \theta_2 X_t)dt + \theta_3 X_t^{\theta_4} dW_t.$$

Si en la ecuación anterior tomamos $\theta_4 = \frac{1}{2}$ entonces tendríamos lo siguiente

$$dX_t = (\theta_1 + \theta_2 X_t)dt + \theta_3 X_t^{\frac{1}{2}} dW_t.$$

La ecuación anterior se conoce como el modelo Cox, Ingersoll y Ross, el cual tiene las características siguientes en sus parámetros: si $2\theta_1 > \theta_3^2$ y $\theta_2 < 0$, toma los valores en el intervalo $(0, +\infty)$; de lo contrario, toma valores en $[0, +\infty)$.

Dentro del campo financiero encontramos la siguiente parametrización del modelo:

$$dr_t = k(\alpha - r_t)dt + \sigma r_t^{\frac{1}{2}} dW_t. \quad (30)$$

5. Solución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas

En el siguiente capítulo se expondrán los métodos numéricos utilizados para encontrar aproximaciones de las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas, se clasificarán los métodos expuestos en este trabajo en base a su orden de convergencia, así como en la clasificación de las ecuaciones diferenciales estocásticas que se requieren solucionar. Los algoritmos de las simulaciones que se presentan en este capítulo se encuentran en el siguiente enlace de la plataforma de computación en línea CoCalc.com : [Solución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas con aplicaciones en finanzas](#)

5.1. Métodos numéricos de discretización

Por lo general en la mayoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas, no se tiene una solución explícita, por lo que tenemos que recurrir al uso de técnicas numéricas para la aproximación de la solución. Para fines de esta investigación llamaremos ***solución numérica*** a la aproximación de la solución obtenida por medio de métodos numéricos. En la aplicación de la teoría, siempre es importante poder visualizar la variedad de rutas que muestran la solución, a esta colección de rutas se le conoce como ***escenario***, el cual nos sirve para obtener algún tipo de proyección o

comportamiento del proceso estocástico en el tiempo.¹⁹

Cuando se buscan soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales estocásticas, se buscan aproximaciones razonables que coincidan con las características distributivas de la solución de una ecuación diferencial estocástica, es decir, nos interesan soluciones de las cuales tengamos información sobre su media, varianza, covarianza y momentos de orden superior. En muy pocos casos tendremos expresiones explícitas para los conceptos anteriores, en general puede ser que dentro de la práctica existan expresiones explícitas sobre las características de la distribución de la solución, pero no será posible obtenerlas a menos que se utilicen métodos numéricos.

Las soluciones numéricas nos permiten simular tantas rutas de muestras como se quieran; esto constituye la base de las técnicas *Monte Carlo*²⁰ para obtener características distributivas.

Antes de continuar con la exposición de la teoría relativa a los métodos numéricos es necesario precisar la noción de convergencia y poder decidir como medir esta diferencia.

Existen dos maneras de medir la precisión. La primera es la *convergencia fuerte* para problemas que involucran simulación directa, donde es importante que las trayectorias de la solución numérica sean cercanas a la solución exacta. La segunda es la *convergencia débil* donde solo es de interés la solución en ciertos momentos²¹.

La teoría presentada en la sección ha sido tomada principalmente de (Iacus, 2008) y (Mikosch, 1998a).

Definición 35. Se dice que un método tiene *orden fuerte de convergencia* igual a γ si existe una constante C tal que

$$E [|X_n - X(t)|] \leq C\Delta t^\gamma, \quad (31)$$

para cualquier elección $t = n\Delta t \in [0, T]$ y Δt lo suficientemente pequeño, es decir $\Delta t \rightarrow 0$.

En la práctica, algunos textos recomiendan medir el error en el punto final $t = T$, definiendo el error en el punto final en el sentido fuerte como

$$e_{\Delta t}^{fuerte} := E(|X_L - X(T)|) \leq C\Delta t^\gamma, \quad T = L\Delta t.$$

Definición 36. Se dice que un método tiene *orden débil de convergencia* igual a γ si existe una constante C para toda función p tal que

$$|E[p(X_n)] - E[p(X_t)]| \leq C\Delta t^\gamma, \quad (32)$$

¹⁹Un escenario debe interpretarse con cuidado, ya que en la vida real, no conocemos la trayectoria muestral browniana que impulsa la ecuación diferencial estocástica, por lo que habrá algunas rutas que no sean significativas.

²⁰Ver (David R. Kincaid, 1991)

²¹Ver (Mikosch, 1998b)

para cualquier elección $t = n\Delta t \in [0, T]$ y Δt lo suficientemente pequeño.

En la práctica es usual tomar a p como la función identidad y definir el error en el punto final $t = T$ en el sentido débil como

$$e_{\Delta t}^{debil} := |E[p(X_L)] - E[p(X(T))]|, \quad T = L\Delta t.$$

Lo anterior lo podemos interpretar de la siguiente manera:

Si un método numérico es convergente con orden γ y en tamaño de paso Δt es hecho k veces más pequeño, entonces el error de aproximación decrece por un factor de $k^{1/\gamma}$. Así por ejemplo si $\gamma = 1$, y buscamos reducir el error 100 veces, debemos hacer el tamaño de paso 100 veces más pequeño, otro ejemplo podría ser si se toma $\gamma = \frac{1}{2}$ y deseamos reducir el error 100 veces, debemos hacer el tamaño de paso $(100)^2$ veces más pequeño.

5.1.1. Esquema de Euler

El método de Euler ²², es uno de los métodos más conocidos y computacionalmente representa un algoritmo fácil de implementar, este proceso es análogo al método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, podemos iniciar nuestro análisis pensando en la ecuación diferencial general

$$\frac{dx}{dt} = a(t, x), \text{ cuando } t = t_0, x = x_0.$$

Si utilizamos el método de Euler convencional tendríamos la sucesión de aproximaciones sucesivas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} t_{j+1} &= t_j + h \\ x_{j+1} &= x_j + ha(t_j, x_j). \end{aligned}$$

Si agregamos al problema anterior le agregamos un factor de ruido aleatorio, entonces tendríamos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t, x) + \text{ruido aleatorio} \\ \frac{dx}{dt} &= a(t, x) + b(t, x)\epsilon(t), \end{aligned}$$

escribiendo lo anterior formalmente tenemos

$$\frac{dx}{dt} = a(t, x) + b(t, x)\frac{dW_t}{dt},$$

²²El método de Euler para ecuaciones estocásticas es conocido también como método de Euler-Maruyama.

si multiplicamos por dt tenemos la ecuación

$$dx = a(t, x)dt + b(t, x)dW_t \quad (33)$$

La ecuación 33, es una ecuación diferencial estocástica.

Si escribimos la ecuación anterior en su forma integral dentro del intervalo $[0, T]$ tenemos

$$X_T = X_0 + \int_0^T a(s, X_s)ds + \int_0^T b(s, X_s)dW_s.$$

Para obtener una solución para la ecuación 33, tenemos que discretizar el intervalo $[0, T]$ en L partes ($L \in \mathbb{N}$). Si tomamos $\Delta t = \frac{T}{L}$, como el tamaño del intervalo de paso y tomando un mado $\tau_j \Delta t$, con $j = 0, 1, 2, \dots, L$, la aproximación X_{τ_j} será denotada por X_j . Por lo que el método de Euler para ecuaciones estocásticas queda caracterizado por la siguiente fórmula de recesión:

$$X_{j+1} = X_j + a(\tau_j, X_j)\Delta t + b(\tau_j, X_j)\Delta W_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, L - 1$$

Se utilizará la discretización para los incrementos de las trayectorias brownianas, es decir, $\Delta W_{j+1} = W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)$. Por conveniencia computacional, elegimos un intervalo de paso $\Delta t = \tau_{j+1} - \tau_j$ para el método numérico como el entero $R \geq 1$ múltiplo del incremento δt , para la trayectoria que genere la muestra browniana, es decir, $\Delta t = R\delta t$, lo cual asegurará que el conjunto de puntos $\{t_j\}$ en cada trayectoria browniana discretizada contenga los puntos $\{\tau_j\}$ en cada solución calculada por el método de Euler. En general, el método requiere que los incrementos $W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)$ estén dados por

$$W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j) = W((j+1)R\delta t) - W(jR\delta t) = \sum_{k=jR+1}^{jR+R} dW_k.$$

Formalmente, podemos resumir el método de Euler en las fórmulas recursivas

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ \Delta t &= R\delta t = R(t_{j+1} - t_j) = \tau_{j+1} - \tau_j \\ X_{j+1} &= X_j + a(\tau_j, X_j)\Delta t + b(\tau_j, X_j)(W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)) \end{aligned}$$

Proposición 18. Esquema de aproximación de Euler

Dada la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (34)$$

que cumple con todas las condiciones descritas en el párrafo anterior, con condición inicial $X_0^{(n)} = X_0$ y denotamos con:

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1}, \quad \Delta_i W = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Entonces el esquema de solución de Euler esta dado por:

$$\begin{aligned} X_0^{(n)} &= X_0 \\ X_{t_1}^{(n)} &= X_0^{(n)} + a(X_0^{(n)})\Delta_1 + b(X_0^{(n)})\Delta_1 W \\ X_{t_2}^{(n)} &= X_{t_1}^{(n)} + a(X_{t_1}^{(n)})\Delta_2 + b(X_{t_1}^{(n)})\Delta_2 W \\ X_{t_3}^{(n)} &= X_{t_2}^{(n)} + a(X_{t_2}^{(n)})\Delta_3 + b(X_{t_2}^{(n)})\Delta_3 W \\ &\vdots \\ X_{t_{n-1}}^{(n)} &= X_{t_{n-2}}^{(n)} + a(X_{t_{n-2}}^{(n)})\Delta_{n-1} + b(X_{t_{n-2}}^{(n)})\Delta_{n-1} W \\ X_T^{(n)} &= X_{t_{n-1}}^{(n)} + a(X_{t_{n-1}}^{(n)})\Delta_n + b(X_{t_{n-1}}^{(n)})\Delta_n W. \end{aligned}$$

Como se describió antes, en la práctica se toma

$$\delta_n = \frac{T}{n},$$

y

$$X_{i\frac{T}{n}}^{(n)} = X_{(i-1)\frac{T}{n}}^{(n)} + a\left(X_{(i-1)\frac{T}{n}}^{(n)}\right)\delta_n + b\left(X_{(i-1)\frac{T}{n}}^{(n)}\right)\Delta_i W, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

El método anterior es considerado de tipo explícito ya que cada valor de X_{j+1} puede expresarse en términos del valor anterior, X_j .

Para comprender mejor cómo funciona el método de Euler, vamos a usar una ecuación diferencial estocástica cuya solución es conocida como el movimiento browniano geométrico, de esta manera será posible comprender fácilmente como aplicar el algoritmo.

Dada la ecuación diferencial estocástica,

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

donde μ y σ son constantes reales; además podemos ver que en este caso los coeficientes $a(t, X_t) =$

μX_t y $b(t, X_t) = \sigma X_t$. Como se ha explicado en capítulos anteriores esta ecuación diferencial estocástica tiene muchos usos dentro del campo financiero, especialmente en la valuación de activos en mercados financieros sujetos a volatilidad, y cuya solución exacta esta dada por,

$$X_t = X_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right).$$

Para comprobar que es la solución correcta se hace uso de la fórmula de Itô, es decir, comparamos los coeficientes de la ecuación $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$ con los coeficientes de la fórmula de Itô, $dX_t = f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) dW_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) dt$, con lo que obtenemos las siguientes igualdades

$$\mu f(t, x) = f_t(t, x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, x)$$

$$\sigma f(t, x) = f_x(t, x).$$

De la segunda ecuación se obtiene que $f(t, x) = \exp(\sigma x + g(t))$ para alguna función $g(t)$. Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene $g'(t) = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2$, cuya solución es $g(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t$; por lo tanto se verifica que la solución de la ecuación diferencial es el movimiento browniano.

Ahora si aplicamos el método de Euler a la ecuación diferencial estocástica $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, con condición inicial $X_0 = x_0$, obtenemos

$$X_0 = x_0$$

$$X_{j+1} = X_j + \mu X_j \Delta t + \sigma X_j (W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)), \quad j = 0, 1, \dots, L - 1.$$

Proposición 19. El método de aproximación de Euler converge fuertemente con orden 0.5 y débilmente con orden 1.²³

Ejemplo 14. Consideremos la ecuación diferencial estocástica $dX_t = 2X_t dt + 1X_t dW_t$ con condición inicial $X_0 = 1$. Calcular la solución exacta y una aproximación de dicha ecuación por medio del método de Euler en el intervalo $[0, 1]$.

Solución:

La solución exacta de la ecuación estocástica $dX_t = 2X_t dt + 1X_t dW_t$ está dada por $X_t = \exp \left\{ \frac{3}{2} t + W_t \right\}$. Utilizando el método de Euler para resolver la ecuación, se tiene la siguiente gráfica.

Si tomamos el error promedio de las imágenes de las solución del ejemplo anterior tenemos, que el **error promedio** es 0.0722332 .

²³Para una clase de funciones con un crecimiento polinomial apropiado.

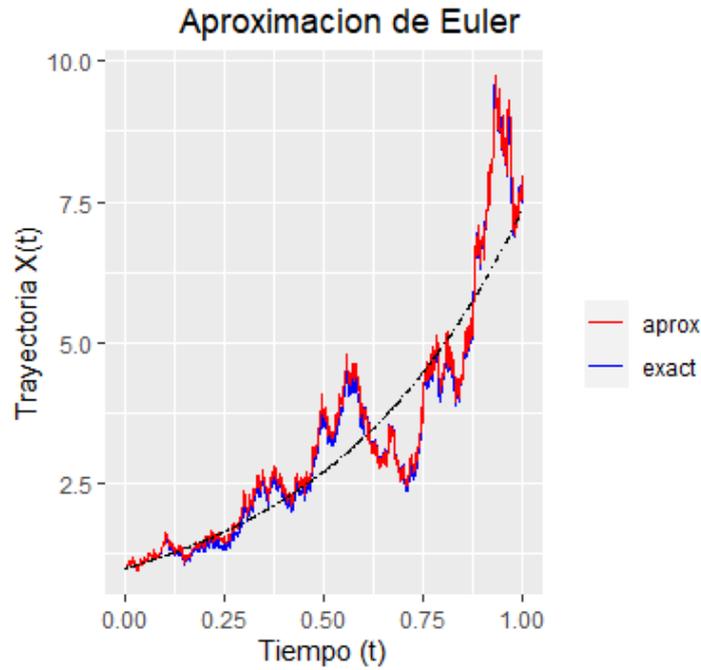


Figura 6: Solución Euler, con $X_0 = 1, n = 980$, vr. solución exacta vr el valor esperado $E(X_t) = \exp(2t)$

En general nos interesa demostrar que efectivamente el método de Euler converge fuertemente con orden 0.5 y débilmente con orden 1. Por lo que si en el ejemplo anterior tomamos intervalos con ancho de paso $\Delta t = R\delta t$, con $R = 1, 2, 4, 8, 16$ obtenemos la siguiente tabla.

Trayectoria	X(T)	$\Delta t = \delta t$	$\Delta t = 2\delta t$	$\Delta t = 4\delta t$	$\Delta t = 8\delta t$	$\Delta t = 16\delta t$
1	29.36	28.97	29.10	28.58	27.96	23.15
2	12.40	12.97	12.98	13.68	13.91	13.47
3	4.30	3.99	4.08	3.83	3.53	4.24
4	7.28	7.45	7.33	7.56	8.58	9.02
5	7.55	7.59	7.49	7.54	7.14	7.30
$E(X_{t=1}) \approx$	7.26	7.22	7.18	7.04	6.92	6.74
$e_{\Delta t}^{fuerte}$		0.047	0.087	0.22	0.35	0.52
$e_{\Delta t}^{debil}$		0.19	0.28	0.46	0.63	0.92

Cuadro 1: Aproximaciones método de Euler.

Por lo que podemos concluir que la observación es, cierta y el método de Euler converge fuertemente con orden 0.5 y débilmente con orden 1.

Existe una variante del método de Euler, el cual es llamado el método de Euler-Heun, pero las soluciones de este método se generan en el sentido de la integral de Stratonovich, para efecto de esta investigación no se verá el método de Euler-Heun ya que estamos analizando los métodos numéricos que dan solución a las ecuaciones diferenciales estocásticas desde el punto de vista de la integral de Itô.

5.1.2. Esquema de Milstein

El objetivo de esta sección es exponer un método numérico que nos ayude a resolver ecuaciones diferenciales estocásticas y que tenga un orden de convergencia fuerte igual a 1. Este método es conocido como el **método de aproximación de Milstein o esquema de Milstein**, y agrega un nuevo término al método de Euler descrito anteriormente.

Consideremos como en la sección anterior a la ecuación diferencial

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t,$$

con condición inicial X_0 , y una discretización considerando los puntos τ_j, τ_{j+1} .

Para una función $\theta \in \mathcal{C}^2$, es decir, es dos veces continuamente diferenciable. Si aplicamos la fórmula de Itô tenemos

$$\theta(X_s) = \theta(X_{t_j}) + \int_{t_j}^s \left(\theta'(X_u)a(t_u, X_u) + \frac{1}{2}\theta''(X_u)b(t_u, X_u)^2 \right) du + \int_{t_j}^s \theta'(X_u)b(t_u, X_u)dW_u.$$

Entonces, si aplicamos este resultado para los coeficientes $a(X_s), b(X_s)$ obtenemos

$$\begin{aligned} X_{t_{j+1}} &= X_{t_j} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (a(t_j, X_{t_j}) + \int_{t_j}^s (a'(t_u, X_u)a(t_u, X_u) + \\ &\frac{1}{2}a''(t_u, X_u)b(t_u, X_u)^2)du + \int_{t_j}^s a'(t_u, X_u)b(t_u, X_u)dW_u)ds \\ &\quad + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (b(t_j, X_{t_j}) + \int_{t_j}^s (b'(t_u, X_u)a(t_u, X_u) \\ &\quad + \frac{1}{2}b''(t_u, X_u)b(t_u, X_u)^2)du + \int_{t_j}^s b'(t_u, X_u)b(t_u, X_u)dW_u)dW_s. \end{aligned}$$

Para obtener un método de convergencia fuerte igual a 1 podemos ignorar las integrales dobles que son del tipo $dW_s ds$ y $ds ds$ (Ver ([Eckhard Platen, 2010](#))), entonces obtenemos

$$\begin{aligned} X_{t_{j+1}} &\approx X_{t_j} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(t_j, X_{t_j})ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(b(t_j, X_{t_j}) + \int_{t_j}^s b'(t_u, X_u)b(t_u, X_u)dW_u \right) dW_s \\ &\approx X_{t_j} + a(t_j, X_{t_j})\Delta t + b(t_{j+1}, X_{t_{j+1}})\Delta W_{j+1} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^s b'(t_u, X_u)b(t_u, X_u)dW_u dW_s, \end{aligned}$$

De la última ecuación podemos observar que los tres primeros sumandos pertenecen al método

de Euler, el cuarto sumando lo podemos aproximar por

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^s b'(t_u, X_u) b(t_u, X_u) dW_u dW_s \approx b'(t_j, X_{t_j}) b(t_j, X_{t_j}) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^s dW_u dW_s$$

Además, del ejemplo 4 visto en el capítulo 2, sabemos que la integral del lado derecho está dada por:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^s dW_u dW_s = \frac{1}{2}((\Delta W_{j+1})^2 - \Delta t)$$

Por lo que el método de Milstein ²⁴ para la ecuación diferencial $dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t$ con condición inicial X_0 está dado por ²⁵:

$$X_0 = x_0$$

$$X_{j+1} = X_j + a(t_j, X_j)\Delta t + b(t_j, X_j)\Delta W_{j+1} + \frac{1}{2}b'(t_j, X_j)b(t_j, X_j)((\Delta W_{j+1})^2 - \Delta t)$$

Proposición 20. El método o esquema de Milstein tiene un orden de convergencia fuerte de 1.

Ahora podemos resolver el ejemplo visto en el método de Euler, utilizando el método de Milstein.

Ejemplo 15. Consideremos la ecuación diferencial estocástica $dX_t = 2X_t dt + 1X_t dW_t$ con condición inicial $X_0 = 1$. Calcular la solución exacta y una aproximación de dicha ecuación por medio del método de Milstein en el intervalo $[0, 1]$.

Solución:

La solución exacta de la ecuación estocástica $dX_t = 2X_t dt + 1X_t dW_t$ está dada por $X_t = \exp\left\{\frac{3}{2}t + W_t\right\}$, utilizando el método de Milstein, se tiene la siguiente gráfica.

Si se toma el error promedio entre las imágenes de la solución real y la solución numérica, entonces se tiene que el **error promedio** es 0.0394189, comparando este error con respecto al obtenido con el método de Euler, lo cual indica que el método está convergiendo mucho más rápido y esto representa una clara ventaja ²⁶ al momento de resolver problemas aplicados como se verá más adelante en esta investigación.

5.1.3. Método de predictor-corrector

El siguiente método o esquema ha sido tomado de (Iacus, 2008).

²⁴La derivada del coeficiente b es respecto a x , por lo que podemos notar que si $b'(t, X_t) = 0$, entonces nos encontramos en el esquema de Euler.

²⁵La notación utilizada para los diferenciales, se define como $\Delta W_{j+1} = W_{j+1} - W_j$.

²⁶El gasto mínimo de recursos computacionales debe ser un objetivo esencial.

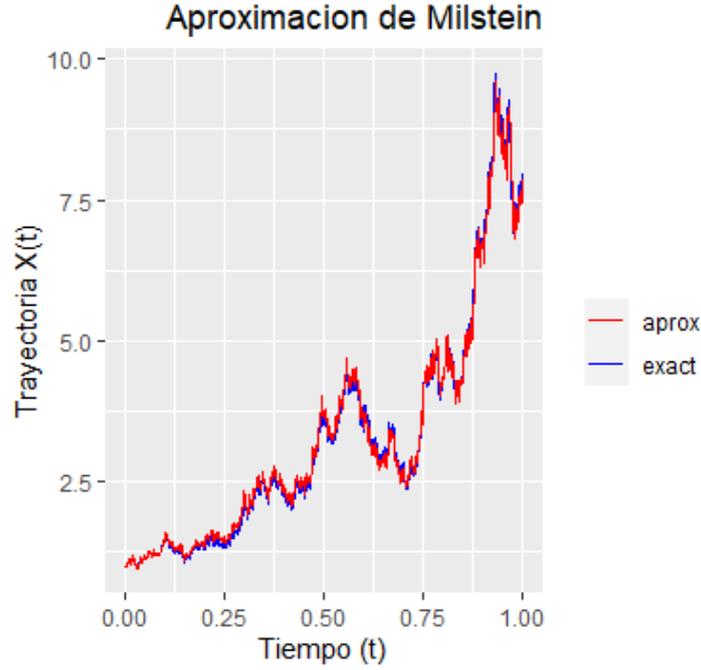


Figura 7: Solución Milstein, con $X_0 = 1, n = 980$, vr. solución exacta.

Supongamos una ecuación diferencial estocástica genérica de la forma

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

donde $\{W_t, t > 0\}$ es un proceso browniano. Se tiene que tanto a como b dependen del tiempo t , y del estado del proceso X_t . Sin embargo, los esquemas de Euler y Milstein consideran a a y b invariantes en el tiempo.

Puesto que los coeficientes dependen de X_t , y se están simulando X_t , el método que se presenta a continuación es una primera etapa, etapa llamada *predictor*, aproxima el espacio de estados del proceso, así

$$\tilde{X}_{t+1} = X_i + a(t_i, X_i)\Delta t + b(t_i, X_i)\sqrt{\Delta t}Z,$$

donde $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Con lo anterior es posible notar que no existe mucha diferencia con respecto al esquema de Euler. Ahora se le añadirá otra fase de este proceso, en la cual se añaden los pesos $0 \leq \alpha \leq 1$ y $0 \leq \eta \leq 1$ y se calcula el predictor del coeficiente a , esto es,

$$\tilde{a}(t_i, X_i) = a(t_i, X_i) - \eta b(t_i, X_i)b_x(t_i, X_i),$$

donde $b_x(t_i, X_i)$ es la derivada parcial de primer orden respecto de x .

En base a lo anterior calculamos el *corrector* de la siguiente manera,

$$X_{i+1} = X_i + \left(\alpha \tilde{a}(t_{i+1}, \tilde{X}_{i+1}) + (1 - \alpha) \tilde{a}(t_i, X_i) \right) \Delta t + \left(\eta \sigma(t_{i+1}, \tilde{X}_{i+1}) + (1 - \eta) \sigma(t_i, X_i) \right) \sqrt{\Delta t} Z.$$

De lo anterior es posible notar que si en particular se toma $\eta = \alpha = 0$, en el corrector, entonces tendríamos el esquema de Euler. En conclusión, podemos decir que el método predictor-corrector es un esquema de discretización de Euler al cual se corrige agregando los pesos η, α .

Proposición 21. El método predictor-corrector tiene orden de convergencia débil 1.

5.2. Esquemas de varias etapas

En la sección anterior se estudiaron algunos de los métodos deterministas que se tienen para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas ahora presentaremos brevemente algunos esquemas estocásticos de varios pasos, concentrándonos por simplicidad en los esquemas de dos pasos. Como se realizó en la sección anterior partimos del esquema de un paso y se generaliza para generar los pasos iniciales necesarios para iniciar el esquema multi-pasos. Para un esquema de dos pasos sólo se necesita una iteración de la rutina de inicio. Podemos obtener esquemas estocásticos multi-pasos generalizando heurísticamente los esquemas deterministas multi-pasos conocidos para las ecuaciones diferenciales estocásticas.

La teoría expuesta en esta sección ha sido tomada del capítulo 11, sección 4 de ([Peter E. Kloeden, 1995](#)).

5.3. Esquema de orden 1.0 fuerte de dos pasos

No es una tarea fácil escribir e investigar esquemas multi-pasos de orden superior en el caso más general. Sin embargo, podemos aprovechar la estructura de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas para obtener esquemas multi-pasos relativamente sencillos. Un ejemplo de ello es el sistema bidimensional de Itô

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t^2 dt \\ dX_t^2 &= \{-a(t)X_t^2 + b(t, X_t^1)\} dt + \sum_{j=1}^m c^j(t, X_t^1) dW_t^j, \end{aligned}$$

que es típico de los sistemas eléctricos y mecánicos donde hay un factor de ruido. Si consideramos el esquema de Milstein para el sistema anterior tenemos

$$Y_{n+1}^1 = Y_n^1 + Y_n^2 \Delta$$

$$Y_{n+1}^2 = Y_n^2 - a(\tau_n) Y_n^2 \Delta + b(\tau_n, Y_n^1) \Delta + \sum_{j=1}^m c^j(\tau_n, Y_n^1) \Delta W_n^j$$

y tiene un orden fuerte de 1.0. Una característica simplificadora útil del sistema anterior es la ausencia de las integrales dobles Itô $I(j_1, j_2)$. Además, podemos resolver la primera ecuación para

$$Y_n^2 = \frac{1}{\Delta} (Y_{n+1}^1 - Y_n^1)$$

e insertarlo en el segundo para obtener un esquema de dos pasos para el primer componente Y^1 , siempre que utilicemos una discretización equidistante. Este esquema de dos pasos resultante es el siguiente:

$$Y_{n+2}^1 = \{2 - a(\tau_n) \Delta\} Y_{n+1}^1 - \{1 - a(\tau_n) \Delta\} Y_n^1 + b(\tau_n, Y_n^1) \Delta^2 + \sum_{j=1}^m c^j(\tau_n, Y_n^1) \Delta W_n^j \Delta,$$

se debe a Lepingle y Ribemont. Así tenemos un esquema de dos pasos para la primera componente de la aproximación, que es equivalente al esquema bidimensional de Milstein.

5.4. Esquemas fuertes de orden 1.5 de dos pasos

Para el caso de 1-dimensional $d = m = 1$ se propone el esquema fuerte de orden 1.5 de dos pasos.

$$Y_{n+1} = Y_{n-1} + 2a\Delta - a'(Y_{n-1})b(Y_{n-1})\Delta W_{n-1}\Delta + V_n + V_{n-1}$$

con

$$V_n = b\Delta W_n + \left(ab' + \frac{1}{2}b^2b'' \right) \{ \Delta W_n \Delta - \Delta Z_n \}$$

$$+ a'b\Delta Z_n + \frac{1}{2}bb' \{ (\Delta W_n)^2 - \Delta \}$$

$$+ \frac{1}{2}b(bb')' \left\{ \frac{1}{3}(\Delta W_n)^2 - \Delta \right\} \Delta W_n,$$

Donde la variable aleatoria ΔZ_n se define como

$$\Delta Z_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1} ds_2$$

y tiene distribución normal con media 0. En particular, el esquema

$$Y_{n+1} = Y_{n-1} + 2a\Delta - a'(Y_{n-1})b(Y_{n-1})\Delta W_{n-1}\Delta + V_n + V_{n-1}$$

no requiere que se determine o evalúe la segunda derivada a'' .

6. Cálculo estocástico con aplicaciones en finanzas

A lo largo de este capítulo se estudiarán los algoritmos que se vieron en el capítulo 3, pero desde el punto de vista computacional, es decir se presentaran los algoritmos computacionales de los principales métodos estudiados anteriormente; además se verán algunas aplicaciones en finanzas donde se estudiara su solución por medio de los métodos estocásticos estudiados y su representación gráfica utilizando los algoritmos estudiados dentro del capítulo.

Las simulaciones que se presentaran están ejecutadas en el lenguaje de programación R, cada uno de los algoritmos y su documentación se encuentra disponible en el siguiente repositorio.

La teoría presentada a continuación ha sido tomada del capítulo 2 de ([Iacus, 2008](#)). Los algoritmos presentados en el capítulo se encuentran en el siguiente link: [Cocalc](#)

6.1. Algoritmo esquema de Euler

El primer algoritmo que se presentara es el esquema de Euler, cabe considerar que el algoritmo ha sido trabajado de manera que no sea necesario instalar paquetes adicionales en el R para poder ejecutar cada uno de los algoritmos, de esta manera se garantiza que los algoritmos puedan ser ejecutados en cualquier entorno computacional que tenga instalado el lenguaje de programación R.

En el capítulo 1 hemos visto una introducción a la simulación del movimiento browniano y movimiento browniano geométrico, esto nos permite poder comenzar a estudiar el algoritmo computacional del esquema de Euler que vimos en el capítulo 3. Recordando el esquema de Euler tenemos la siguiente proposición

Proposición 22. Dada la ecuación diferencial estocástica $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, con condición inicial $X_0 = x_0$, tenemos que el esquema de Euler esta dado por

$$X_0 = x_0$$

$$X_{j+1} = X_j + \mu X_j \Delta t + \sigma X_j (W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)), \quad j = 0, 1, \dots, L - 1.$$

El algoritmo computacional esta dado por

```
1
2 #importamos la libreria ggplot2, la cual nos ayudara con la creacion de nuestras
   simulaciones.
3 library(ggplot2)
4
5
6 #Se creara una funcion, de esta manera se facilitara la implementacion del
   esquema de Euler.
7 # la funcion tendra como entrada los parametros mu,sigma,x0,n
8 # mu representa el coeficiente de tendecia, en este caso constante.
9 #sigma representa el coeficiente de volatilidad, en este caso constante.
10 #Xo representa la condicion inicial de la EDS.
11 # n es el numero de nodos en la aproximacion.
12
13 esquema_euler <- function(mu,sigma,Xo,n){
14   set.seed(123) #se creara una semilla, la cual ayudara que no halla variaciones
   en cada ejecucion de la implementacion.
15   alma <- c()
16   Xzero=Xo # condicion inicial.
17   T <- 1 # extremo derecho del intervalo.
18   N <- 1000 # buscamos una particion fina para la simulacion.
19   dt <- 1/N #salto de paso, en este caso se deja un tamano de paso pequeno ya
   que es un proceso continuo el que se quiere simular.
20   dw <- sqrt(dt)*rnorm(N) # Derivada del movimiento Browniano.
21   w <- cumsum(dw) # Aqui acumulamos.
22   t <- seq(dt,T,by=dt)
23   t1 <- seq(0,T,by=dt)
24   # Esta es la solucion explicita, segun lo mostrado en el capitulo 2 de la
   tesis.
25   Xtrue=Xzero*exp((mu-0.5*sigma^2)*t+sigma*w)
26   #Aqui comienza la implementacion del esquema de Euler.
27   R=N/n ; Dt=R*dt ; L=N/R
28   Xem <- 0
29   Xtemp <- Xzero
30   for (j in 1:L) {
31     Winc <- sum(dw[(R*(j-1)+1):(R*j)])
32     Xtemp <- Xtemp + Dt*mu*Xtemp + sigma*Xtemp*Winc
33     Xem[j] <- Xtemp
34   }
35   t2 <- seq(0,T,by=Dt)
36   # Error de aproximacion.
```

```

37 # Proximamente.
38 real <- c(Xzero,Xtrue)
39 indices <- c()
40
41 for(i in 1:length(t2)){
42   indices <- append(indices,which(t1==t2[i]))
43 }
44 emerr <- abs(Xem[length(Xem)]-Xtrue[length(Xtrue)])
45 alma <- append(alma,emerr)
46
47 # se muestra el error promedio de la trayectoria simulada.
48 print(mean(alma))
49
50 # se grafica los valores de la trayectoria, encontrados en la simulacion por
51 # el esquema de Euler.
52 ggplot()+geom_line(aes(t1,c(Xzero,Xtrue),colour = "exact"))+geom_line(aes(t2,c
53 (Xzero,Xem),colour = "aprox"))+labs(title="Aproximacion de Euler",x="Tiempo
54 (t)",y="Trayectoria X(t)")+theme_gray()+scale_colour_manual("",breaks = c("
55 aprox","exact"),values = c("red","blue")) +
56 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))
57 }
58 # En esta parte llamamos a la funcion que creada, con los parametros de la EDS
59 # que buscamos darle solucion.
60 esquema_euler(2,1,1,990)

```

Listing 3: Esquema de Euler

6.2. Algoritmo esquema de Milstein

Como se estudio en el capitulo 3 el algoritmo de Milstein esta dado por la siguiente proposición.

Proposición 23. Dada la ecuación diferencial estocástica $dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t$ con condición inicial X_0 el esquema solución de Milstein esta dado por

$$\begin{aligned}
 X_0 &= x_0 \\
 X_{j+1} &= X_j + a(t_j, X_j)\Delta t + b(t_j, X_j)\Delta W_{j+1} + \frac{1}{2}b'(t_j, X_j)b(t_j, X_j)((\Delta W_{j+1})^2 - \Delta t)
 \end{aligned}$$

El algoritmo computacional esta dado por

```
1
2 #importamos la libreria ggplot2, la cual nos ayudara con la creacion de nuestras
  simulaciones.
3 library(ggplot2)
4
5 #Se creara una funcion, de esta manera se facilitara la implementacion del
  esquema de Euler.
6 # la funcion tendra como entrada los parametros mu,sigma,x0,n
7 # mu representa el coeficiente de tendecia, en este caso constante.
8 #sigma representa el coeficiente de volatilidad, en este caso constante.
9 #Xo representa la condicion inicial de la EDS.
10 # n es el numero de nodos en la aproximacion.
11
12 esquema_milstein <- function(mu,sigma,Xo,n){
13   set.seed(123) #se creara una semilla, la cual ayudara que no halla variaciones
     en cada ejecucion de la implementacion.
14   alma <- c()
15   Xzero=Xo # condicion inicial.
16   T <- 1 # extremo derecho del intervalo.
17   N <- 1000 # buscamos una particion fina para la simulacion.
18   dt <- 1/N #salto de paso, en este caso se deja un tamano de paso pequeno ya
     que es un proceso continuo el que se quiere simular.
19   dw <- sqrt(dt)*rnorm(N) # Derivada del movimiento Browniano.
20   w <- cumsum(dw) # Aqui acumulamos.
21   t <- seq(dt,T,by=dt)
22   t1 <- seq(0,T,by=dt)
23   # Esta es la solucion explicita, segun lo mostrado en el capitulo 2 de la
     tesis.
24   Xtrue=Xzero*exp((mu-0.5*sigma^2)*t+sigma*w)
25   #Aqui comienza la implementacion del esquema de Euler.
26   R=N/n ; Dt=R*dt ; L=N/R
27   Xem <- 0
28   Xtemp <- Xzero
29   for (j in 1:L) {
30     Winc <- sum(dw[(R*(j-1)+1):(R*j)])
31     Xtemp <- Xtemp + Dt*mu*Xtemp + sigma*Xtemp*Winc + (0.5)*(sigma^2)*Xtemp*((
     Winc^2)-Dt)
32     Xem[j] <- Xtemp
33   }
34   t2 <- seq(0,T,by=Dt)
35   # Error de aproximacion.
```

```

36 # Proximanete.
37 real <- c(Xzero,Xtrue)
38 indices <- c()
39
40 for(i in 1:length(t2)){
41   indices <- append(indices,which(t1==t2[i]))
42 }
43 emerr <- abs(Xem[length(Xem)]-Xtrue[length(Xtrue)])
44 alma <- append(alma,emerr)
45
46 # se muestra el error promedio de la trayectoria simulada.
47 print(mean(alma))
48
49 # se grafica los valores de la trayectoria, encontrados en la simulacion por
50 # el esquema de Euler.
51 ggplot()+geom_line(aes(t1,c(Xzero,Xtrue),colour = "exact"))+geom_line(aes(t2,c
52 (Xzero,Xem),colour = "aprox"))+labs(title="Aproximacion de Milstein",x="
53 Tiempo (t)",y="Trayectoria X(t)")+theme_gray()+scale_colour_manual("",breaks
54 = c("aprox","exact"),values = c("red","blue")) +
55 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))
56 }
57
58 # En esta parte llamamos a la funcion que creada, con los parametros de la EDS
59 # que buscamos darle solucion.
60
61 esquema_milstein(2,1,1,990)

```

Listing 4: Esquema de milstein

6.3. Simulaciones

En esta sección se pondrán a prueba los algoritmos presentados anteriormente, se realizarán además algunos análisis de los resultados obtenidos mediante las simulaciones, de esta manera se podrán verificar algunos de los resultados que estudiamos en los capítulos anteriores.

Para comenzar revisaremos un primer ejemplo donde pondremos a prueba el algoritmo de Euler y Milstein, luego se analizarán los resultados obtenidos.

Ejercicio 1. Considere la ecuación diferencial estocástica $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$ con $X_0 = 1$ y $\mu = 2$, $\sigma = 1$ constantes. Calcular una solución exacta de la ecuación diferencial estocástica y una solución aproximada particular.

Solución:

Según lo visto en el capítulo 1, se tiene que la solución de la ecuación diferencial estocástica $dX_t = 2X_t dt + X_t dW_t$ esta dada por $X_t = \exp\{\frac{3}{2}t + W_t\}$, por lo que nos queda encontrar una aproximación particular de la ecuación diferencial estocástica con las condiciones que se presentan en el enunciado, calculemos una trayectoria browniana discretizada sobre el intervalo $[0, 1]$ con $n = 1000$, tomando a $\delta t = 0.001$ y $R = 8$ por lo que el intervalo de paso en nuestro algoritmo tendremos $\Delta t = R\delta t = 0.008$.

Ahora si aplicamos el algoritmo con sustituyendo los valores anteriores en el algoritmo tenemos:

```
1 esquema_euler(2,1,1,1000)
```

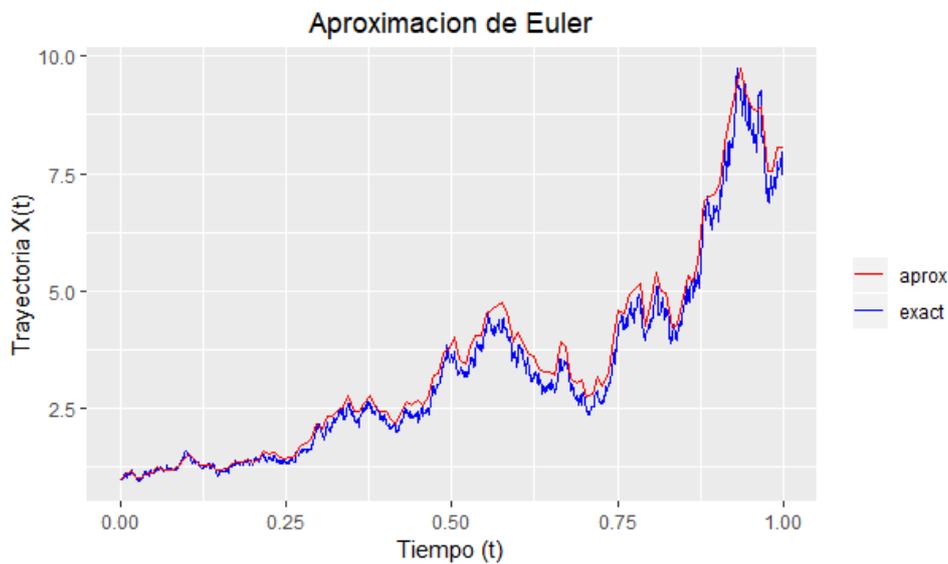


Figura 8: Simulación utilizando método de Euler, con partición $n = 1000$ y $R = 8$

Ahora, la intención es generar m muestras brownianas para analizar las medias de las m trayectorias simuladas y compararse sus errores con respecto a su solución exacta. Lo anterior se repite para distintos tamaños de paso Δt .

Ejercicio 2. Consideremos nuevamente la ecuación diferencial estocástica $dX_t = 2X_t dt + X_t dW_t$, y encuentre una solución browniana discretizada utilizando el método de Milstein con $n = 1000$ y tamaños de $R = 4, 16$.

Solución

Tomando $R = 4$ y $n = 1000$ y sustituimos las condiciones en el esquema de Milstein tenemos

```
1 esquema_milstein(2,1,1,1000)
```

Ahora si tomamos $R = 16$ y $n = 1000$ tenemos el siguiente resultado

```
1 esquema_milstein(2,1,1,1000)
```

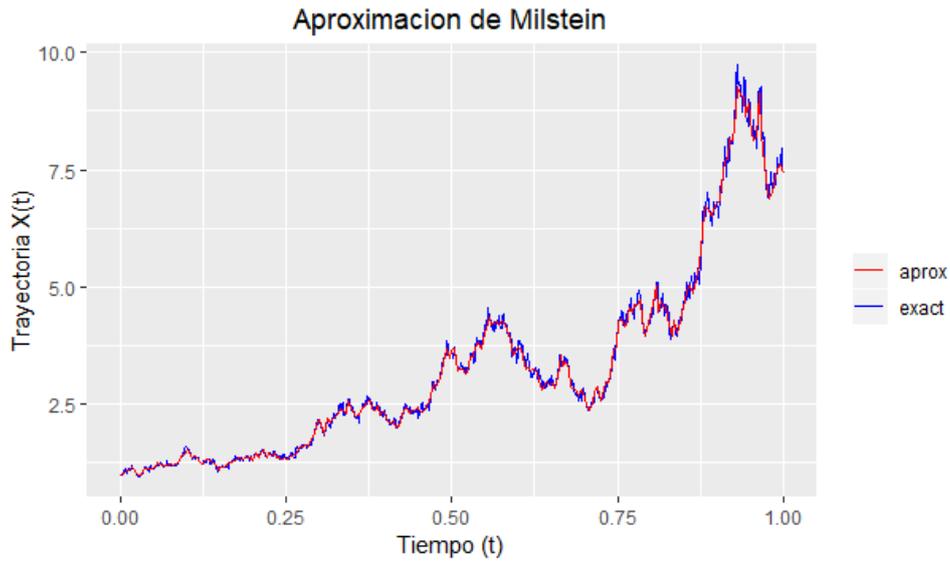


Figura 9: Simulación utilizando método de Milstein, con partición $n = 1000$ y $R = 4$

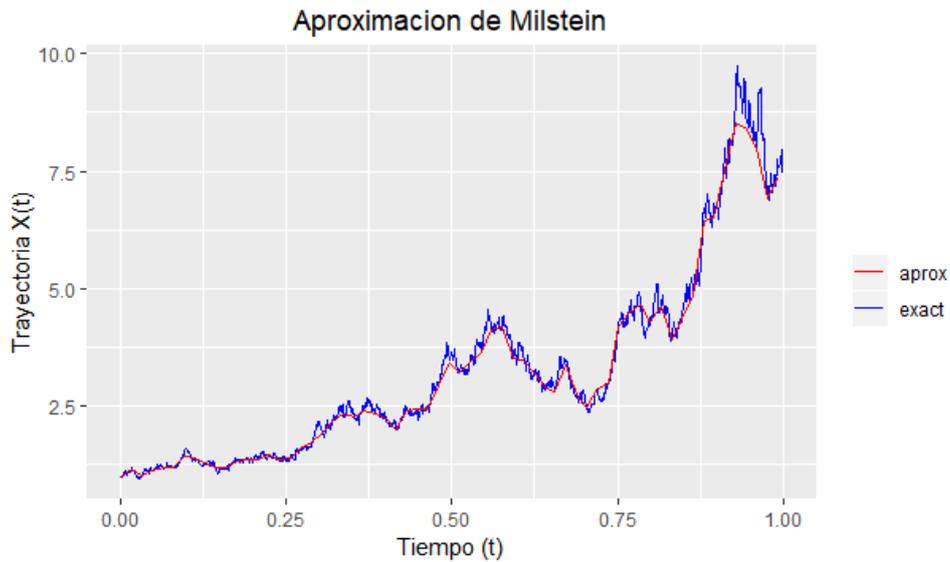


Figura 10: Simulación utilizando método de Milstein, con partición $n = 1000$ y $R = 16$

Por lo que podemos concluir que si requerimos disminuir el error a la mitad, debemos hacer el tamaño de paso cuatro veces menor. Si requerimos disminuir el error 10 veces, debemos hacer el tamaño de paso 100 veces menor.

6.4. Aplicaciones

En esta sección se presentarán una serie de aplicaciones donde las ecuaciones diferenciales estocásticas están presentes y se realizarán simulaciones en base a los algoritmos presentados anteriormente.

6.4.1. Modelo Black-Scholes

La primera aplicación que se expondrá es una de las más relevantes en la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas, y es que desde los célebres trabajos de Black-Scholes en 1973, la idea de utilizar el cálculo estocástico para modelar los precios de algunos activos financieros como por ejemplo el precio de las acciones, tipos de cambio y tipos de interés ha sido aceptada y estudiada, dando lugar a todo un campo de investigación en la teoría de la probabilidad aplicada al campo de la matemática financiera, los siguientes resultados sobre el modelo Black-Scholes y el precio de las acciones han sido retomados de (*Danae Avila,2000*).

Hasta el momento se han simulado trayectorias del tipo $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, uno de los más importantes problemas en Finanzas es estimar el costo de opciones financieras para un activo subyacente. Los precios de los activos están regidos por el modelo anterior.

En forma de ecuación diferencial estocástica la evolución del precio de las acciones esta dada por:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

donde μ y σ representan la tendencia y la difusión del sistema, además $\{W_t\}$ es un movimiento browniano.

Podemos usar un conjunto muestral de datos que representa la evolución del precio de las acciones, estimando los valores de μ y σ la rentabilidad de los precios.

Para nuestra primera solución se ha extraído de la página web una muestra de datos sobre el precio de las acciones de Microsoft durante el mes de marzo enero y marzo 2020, la muestra extraída tiene un tamaño de 253 datos, de la muestra se ha obtenido la rentabilidad en base al precio de cierre de las acciones, de la siguiente manera.

Se estima la tendencia μ y la volatilidad σ de R (la rentabilidad de los precios) usando estimadores insesgados que son su media muestral y su desviación estándar. En tiempo discreto, la rentabilidad de las acciones en cada intervalo es

Día	S_i	R_i	Día	S_i	R_i
1	182.830002	0	11	188.940002	0.0063918
2	184.910004	0.0113767	12	193.570007	0.02450516
3	185.360001	0.0024336	13	194.240005	0.00346127
4	182.919998	-0.01316359	14	196.320007	0.01070841
5	187.199997	0.0233982	15	195.149994	-0.00595972
6	188.360001	0.0061966	16	200.570007	0.02777358
7	189.800003	0.00764495	17	201.910004	0.00668094
8	196.839996	0.03709164	18	197.839996	-0.02015754
9	186.270004	-0.0536984	19	200.339996	0.01263647
10	187.740005	0.00789178	20	196.330002	-0.02001594

Cuadro 2: Muestra de precios de acciones de Microsoft

$$R_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}},$$

$i \geq 1$ y en tiempo continuo la rentabilidad en el tiempo t es

$$R_t = \frac{dS_t}{S_t}.$$

Encontramos entonces que

$$\mathbb{E}\{R\} = \mu = 0.001349658$$

$$\text{Var}\{R\} = \sigma^2 = 0.00030730475$$

$$\sigma = 0.01753011$$

$$S_0 = 182.830002$$

$$T = 253.$$

Ahora podemos utilizar los métodos que se desarrollaron en el capítulo 3, por ejemplo si utilizamos el método de Euler, tenemos la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = 0.001349658S_t dt + 0.01753011S_t dW_t$$

con solución exacta

$$S(t) = 182.830002e^{\{0.001349658t+0.01753011W_t\}}$$

Para generar las trayectorias simuladas para obtener las aproximaciones de la ecuación diferencial estocástica por el método Euler se toma en consideración la siguiente ecuación recursiva:

$$S_0 = 182.830002$$

$$\Delta t = \tau_{j+1} - \tau_j = 1\delta t = t_{j+1} - t_j$$

$$S_{j+1} = S_j + 0.001349658S_j\Delta t + 0.01753011S_j\{W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)\}, j = 0, 1, \dots, 252$$

Si tomamos el algoritmo de Euler que se presentó anteriormente tenemos el siguiente resultado

```
1 esquema_euler(0.001349658,0.01753011,182.830002,980)
```

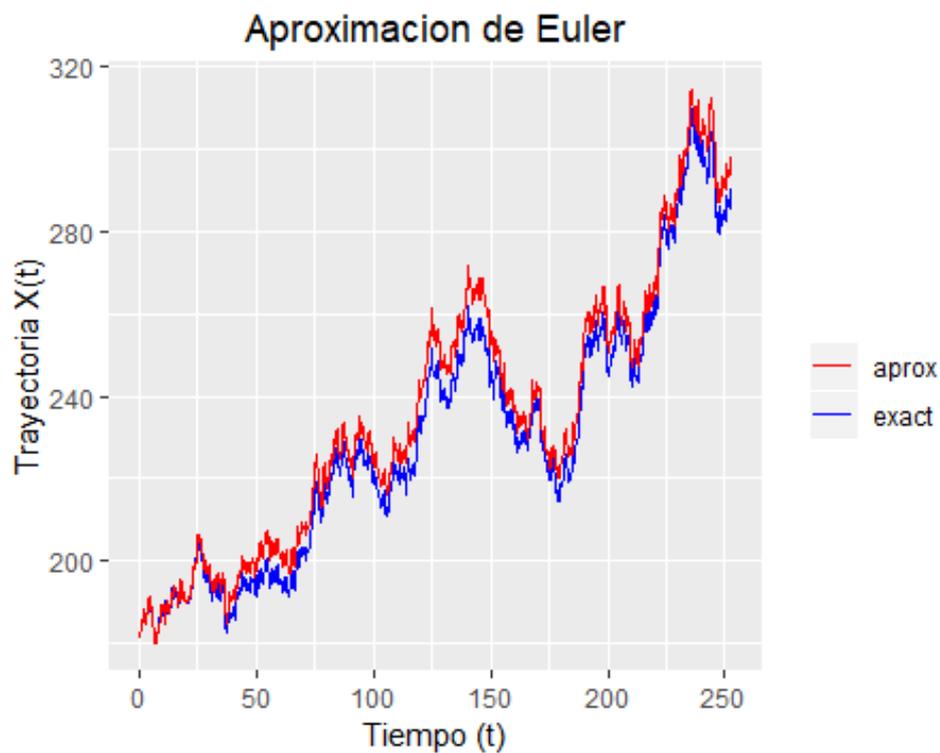


Figura 11: Simulación utilizando método de Euler, con partición $n = 980$

Ahora veremos más a profundidad algunas de las aplicaciones que se presentaron en el capítulo 2, ya que se utilizarán simulaciones para poder resolver las ecuaciones diferenciales estocásticas que se presentan en las aplicaciones.

6.4.2. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

La primera aplicación que presentamos en el capítulo 2 es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, ahora lo estudiaremos más a profundidad y se presentaran algunas simulaciones de este proceso para comprender su aplicación en los tipos de interés.

La parametrización del proceso de Ornstein-Uhlenbeck que más se arraiga al ámbito financiero es

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

es decir particularmente, si pensamos en tipos de interés, un modelo de uso común es el modelo Ornstein-Uhlenbeck. A continuación, presentaremos una de las soluciones más consideradas de la ecuación diferencial estocástica que sigue

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

se reduciría a

$$dX_t = (\alpha_0 + \alpha_1 X_t)dt + \beta_1(X_t)^\rho dW_t,$$

la cual se podría expresar como:

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 X_t^{\theta_4} dW_t,$$

En primer lugar, se abordará el proceso de Ornstein-Uhlenbeck como solución única a la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 dW_t,$$

donde $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}_+$ y donde $X_0 = x_0 > 0$; que, como podemos observar, se trata de una particularidad de la ecuación $dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 X_t^{\theta_4} dW_t$ cuando $\theta_4 = 0$, la ecuación en el contexto financiero se expresa como

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

donde $\sigma \in \mathbb{R}_+$ y $\mu, \theta \in \mathbb{R}$; con $X_0 = x_0 > 0$, los parámetros σ, μ se le conocen con el nombre de volatilidad y equilibrio del proceso en el largo plazo y a θ se le conoce como la velocidad de reversión a la media μ

Si aplicamos el lema de Itô a la ecuación $dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 dW_t$ tenemos que la solución

está dada por

$$X_t = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t} + \theta_3 \int_0^t e^{-\theta_2(t-u)} dW_u,$$

si aplicamos el lema de Itô a la ecuación $dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$, tenemos que la solución esta dada por

$$X_t = \mu + (x_0 - \mu)e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-u)} dW_u,$$

de los resultados anteriores podemos observar la relación

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\theta_1}{\theta_2} \\ \theta &= \theta_2\end{aligned}$$

Si hacemos que $\theta_1 = 0$, entonces el proceso es básicamente una exponencial negativa perturbada por la integral estocástica y quedaría como sigue

$$dX_t = -\theta_2 X_t + \theta_3 dW_t.$$

Cuya solución explícita sería

$$X_t = x_0 e^{-\theta_2 t} + \theta_3 \int_0^t e^{-\theta_2(t-u)} dW_u.$$

En el ambito financiero, si únicamente pensamos en tipos de interés, la dinámica del modelo es como sigue

$$dr_1 = k(\theta - r_1)dt + \beta dW_t^Q,$$

donde k, θ, β son constantes. Como se presentó en el capítulo 2 el movimiento aleatorio es generado por el movimiento browniano de medida Q, W_t^Q . Una propiedad importante del proceso de Ornstein-Uhlenbeck es que el tipo de interés revierte a la media, θ , y la tendencia de reversión está controlada por k . Asimismo, este proceso es un proceso de difusión y, por lo tanto, markoviano, lo que conlleva a unas sencillas y atractivas fórmulas cerradas. En finanzas, la reversión a la media describe una serie temporal en la que *los rendimientos pueden ser muy inestables en el corto plazo pero muy estables en el largo plazo*. Esto se podría expresar de otra manera diciendo que la desviación típica de los rendimientos anuales medios decrecen más rápido que la inversa del período de análisis. Esto tendría una serie de implicaciones, por ejemplo, que el proceso no

es un paseo aleatorio, sino que períodos de rendimientos decrecientes son seguidos por retornos crecientes.

Además, en el capítulo 2 se comentó que el valor futuro del tipo de interés está normalmente distribuido, con la siguiente distribución:

$$r_T \sim N\left(\theta(\rho_0 - \theta)e^{-kT}, \frac{\beta^2}{2k}(1 - e^{-2kT})\right).$$

El comportamiento de r_t puede ser cóncavo, convexo, etc. También podría ser negativa para alguno de los valores de los parámetros.

Para poder tener una idea gráfica del proceso se presenta el siguiente algoritmo.

```

1 set.seed(12345)
2 r0 <- 0.1013
3 theta <- 0.0023
4 k <- 0.2610
5 beta <- 0.4249
6 n <- 100 # Pruebas de simulacion
7 T <- 1
8 m <- 252
9 dt <- T/m
10 r <- matrix(0,m+1,n)
11 r[1,] <- r0
12 t <- seq(0, T, dt)
13 for (j in 1:n){
14   for(i in 2:(m+1)){
15     dr <- k * (theta - r[i-1,j]) * dt + beta * sqrt(dt) * rnorm(1,0,1)
16     r[i,j] <- r[i-1,j] + dr
17   }
18 }
19 rT.expected <- theta + (r0 - theta) * exp(-k * t)
20 rT.stdev <- sqrt(beta^2/(2 * k) * (1 - exp(-2 * k * t)))
21 matplot(t, r[,1:10], type="l", lty=1, main= "Trayectorias Tasa de Interes", ylab
   = "rt")
22 abline(h=theta, col="red", lty=2)
23 lines(t, rT.expected, lty=2)
24 lines(t, rT.expected + 2 * rT.stdev, lty=2)
25 lines(t, rT.expected - 2 * rT.stdev, lty=2)
26 points(0,r0)

```

Listing 5: Simulación proceso de Ornstein-Uhlenbeck

El resultado gráfico es el siguiente

Trayectorias Tasa de Interés

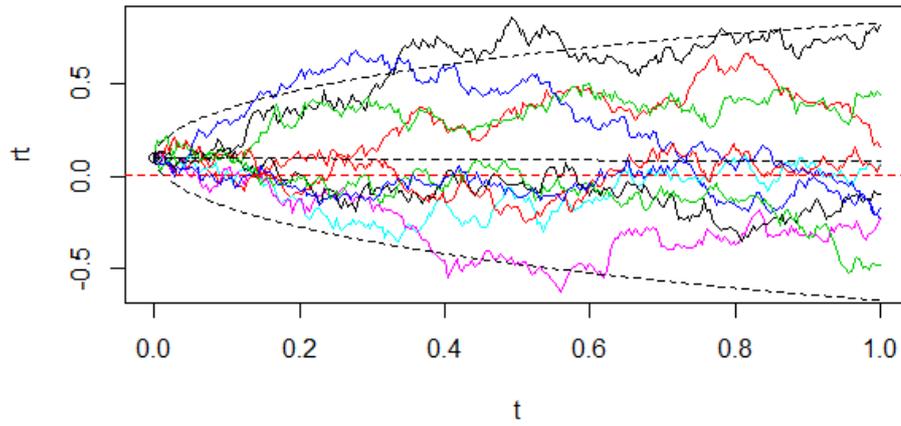


Figura 12: Simulación trayectorias de interés

En la gráfica anterior, se puede observar que el proceso se inicia en 0.1013 que se corresponde con el valor inicial del tipo de interés, r_0 . También se puede percibir que, en el medio plazo, el proceso tiende a moverse hacia 0.023, esto es, θ , a una velocidad de 0.2610, es decir, k , la velocidad de reversión a la media

7. Conclusiones

- Las ecuaciones diferenciales estocásticas nos ayudan a modelar comportamientos que se asemejen más a un modelo probabilístico que a uno determinístico. Existen muchas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas, en campos financieros, biológicos, etc.
- El estudio del cálculo estocástico es fundamental para entender el comportamiento de las variables aleatorias, las bases del estudio estadístico se vuelven esenciales al momento de estudiar la teoría de las variables aleatorias y su comportamiento en campos de aplicación, se recomienda el estudio de materias donde se estudien los procesos estocásticos de nivel introductorio y avanzado para poder generar más trabajos de investigación en el área estocástica.
- Debido a que el esquema de Euler tiene un orden de convergencia fuerte de 0.5 y el esquema de Milstein tiene orden de convergencia fuerte de 1 entonces, se recomienda hacer uso del método de Euler, para los casos donde el recurso computacional es limitado, ya que el método de Milstein requiere un número mayor de pasos para lograr llegar a una aproximación de la solución con menor error.
- Existen similitudes en la formación de las ecuaciones diferenciales estocásticas con la formación de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se parte de la una razón de cambio, la cual queremos medirla sobre el cambio de un intervalo de tiempo; tomando cada vez intervalos mas pequeños, y como las razones de cambio están dadas con términos aleatorios finalmente nos lleva a una ecuación diferencial estocástica.
- Los métodos numéricos están basados en el desarrollo del cálculo estocástico, Así como se tiene un desarrollo de Taylor para funciones diferenciales, se tiene también un desarrollo que se denomina desarrollo de Itô-Taylor para las funciones con términos estocásticos. Se recomienda la línea de investigación de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas como los métodos multipasos de los cuales hacemos una revisión introductoria.
- La verificación de algunos resultados como la convergencia débil o fuerte de algunas ecuaciones diferenciales estocástica a través de simulaciones se vuelve relevante ya que el uso de herramientas computacionales facilita en gran medida la investigación de resultados fundamentales.
- El uso de simulaciones computacionales permite comprender mejor el comportamiento de algunas soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas. La simulación utilizando el lenguaje de programación R facilita el proceso, ya que su sintaxis resulta cómoda e

intuitiva dentro del proceso de programación. Se recomienda la aplicación de lenguajes de programación similares a R, que tienen un grado igual de competitividad dentro del área, tal como Python.

- El estudio de los esquemas de solución de ecuaciones diferenciales como el esquema de Euler y Milstein se vuelven fundamentales para el estudio del comportamiento de algunos fenómenos financieros.

8. Anexos

Índice de figuras

1.	Trayectoria de la caminata aleatoria simulando 9 lanzamientos de una moneda donde $\omega = (A, B, B, A, B, A, B, B, B)$ y los puntos se enlazan mediante una línea recta	22
2.	Trayectoria del movimiento browniano como límite de la caminata aleatoria escalonada, tomando $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$	24
3.	Simulación de movimiento browniano en el intervalo $[0, 1]$ con una partición de tamaño $N = 100$, considerando $W(0) = W(t_0) = 0$	25
4.	Simulación de movimiento browniano geométrico en el intervalo $[0, 1]$ con una partición de tamaño $N = 100$	28
5.	Relación de espacios en la construcción de la integral de Itô	40
6.	Solución Euler, con $X_0 = 1, n = 980$, vr. solución exacta vr el valor esperado $E(X_t) = \exp(2t)$	61
7.	Solución Milstein, con $X_0 = 1, n = 980$, vr. solución exacta.	64
8.	Simulación utilizando método de Euler, con partición $n = 1000$ y $R = 8$	72
9.	Simulación utilizando método de Milstein, con partición $n = 1000$ y $R = 4$	73
10.	Simulación utilizando método de Milstein, con partición $n = 1000$ y $R = 16$	73
11.	Simulación utilizando método de Euler, con partición $n = 980$	76
12.	Simulación trayectorias de interés	80

Índice de cuadros

1.	Aproximaciones método de Euler.	61
2.	Muestra de precios de acciones de Microsoft	75

Referencias

- (auth.), J. M. S. (2001). *Stochastic calculus and financial applications* (1.^a ed.). Springer-Verlag New York.
- Danae Avila, G. M. D. (2000). *Modelo black-scholes-merton, para la toma de decisiones financieras*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- David R. Kincaid, E. W. C. (1991). *Numerical analysis: mathematics of scientific computing* (1.^a ed.). Brooks/Cole.
- Eckhard Platen, N. B.-L. a. (2010). *Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance* (1.^a ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Friedman, A. (1975). *Stochastic differential equations and applications* (Vol. Volume 1). Academic Press.
- Iacus, S. M. (2008). *Simulation and inference for stochastic differential equations: With r examples* (1.^a ed.). Springer-Verlag New York.
- Kwok, Y.-K. (2008). *Mathematical models of financial derivatives* (2nd ed.). Springer.
- Mikosch, T. (1998a). *Elementary stochastic calculus with finance in view*. World Scientific Publ.
- Mikosch, T. (1998b). *Elementary stochastic calculus with finance in view*. World Scientific Publ.
- P.E., P. (2004). *Stochastic integration and differential equations* (2ed. ed.). Springer.
- Peter E. Kloeden, E. P. (1995). *Numerical solution of stochastic differential equations* (Corrected ed.). Springer.
- Resnick, S. (1999). *A probability path*. Birkhäuser Boston.
- Rincón, L. (2006). *Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas (memorias del congreso regional de la universidad autónoma de aguascalientes en probabilidad)*. Editorial Universidad Autónoma de Aguas calientes.
- Steele, J. M. (2000). *Stochastic calculus and financial applications (stochastic modelling and applied probability 45)* (Corrected ed.). Springer.
- Øksendal, B. (2010). *Stochastic differential equations: an introduction with applications* (6th ed ed.). Springer.