

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y  
MATEMÁTICA  
ESCUELA DE MATEMÁTICA



---

Triángulo de Hosoya: Su geometría y propiedades del mcd

---

*Tesis para obtener el título de:*  
**Licenciados en Matemática**

*Presentado por:*

Br. Carmen Elizabeth Parada Barrera, PB16008

Br. Alejandro Ernesto Rivera Rivera, RR14041

*Asesor interno:*

Lic. Mirna Guadalupe Galdámez Constante

*Asesor externo:*

Lic. Luisantos Bonilla Mejía

Febrero de 2022

Ciudad Universitaria, San Salvador, El Salvador

# **Autoridades**

## **Universidad de El Salvador**

Rector:

MSc. Roger Armando Arias Alvarado

Vice-Rector Académico:

PhD. Raúl Ernesto Azcúnaga López

Vice-Rector Administrativo:

Ing. Juan Rosa Quintanilla

Secretario General:

Ing. Francisco Alarcón

Fiscal General:

Lic. Rafael Humberto Peña Marín

## **Facultad de Ciencias Naturales y Matemática**

Decano:

Lic. Mauricio Hernan Lovo Córdova.

Vice-Decana:

MSc. Zoila Virginia Guerrero Mendoza

Secretario:

Lic. Jaime Humberto Salinas Espinoza

## **Escuela de Matemática**

Director:

Dr. Dimas Noé Tejada Tejada

Secretario:

MSc. Carlos Ernesto Gámez Rodríguez

## Agradecimientos.

Principalmente al creador del universo por brindarme la sabiduría y la fuerza necesaria para lograr culminar esta meta en mi vida. También estoy eternamente agradecida con mis padres que siempre han estado apoyándome desde el inicio de esta etapa, que me han llevado de la mano guiándome y que se han esforzado para que todo lo que he logrado fuera posible. A mi hermano porque ha estado dándome ánimos en todo este camino y siempre ha confiado en mí.

A mi mejor amigo Walter Medrano por creer en mi y siempre saber que decir para que no desistiera; a mis amigos Raúl Cortez y Wilfredo Iraheta por estar desde mi primer día de la carrera y jamás abandonarme cuando más los necesite; a mis amigas Stephanie Rivera y Beatriz Bran por incorporarse en mi vida en el transcurso de la carrera y ser muy importantes para poder lograr esto. Gracias a todos por existir y por todos esos lindos recuerdos con ustedes que siempre llevaré en mi memoria y mi corazón.

A Madeline Sibrián por ser tan gentil y ayudarme a aprender muchas cosas de Overleaf que permitieron realizar este trabajo; a Alisson Martínez porque desde que comencé la tesis me ha acompañado y jamás dudo que lo podía lograr. Gracias por ayudarme y confiar en mis capacidades.

Finalmente agradecer a mi asesora Lic. Mirna Galdámez por su confianza, disposición y consejos que hicieron que esta tesis se realizara de la mejor manera; a mi amigo y asesor Lic. Luisantos Bonilla por siempre darme una mano cuando la necesité a lo largo de mi vida universitaria, gracias por compartir sus conocimientos conmigo; a mi compañero Alejandro Rivera que sin él, este trabajo no hubiera sido el mismo, gracias por ser paciente y un gran apoyo en este último paso de esta etapa de mi existencia.

A muchas personas que no he mencionado, familiares, compañeros y amigos que también estoy agradecida porque sin ellos nada de esto sería posible.

¡Gracias por acompañarme en esta fase de mi vida, que sin duda es una de las más bonitas e importantes!

Carmen Elizabeth Parada.

Primeramente agradezco a mi madre que es el pilar de mi vida, mi apoyo incondicional, quien jamás dudó en que podía lograr mis metas. A mis abuelos que siempre estuvieron atentos y dándome ánimos cuando me sentía perdido en mi camino estudiantil, y a toda mi demás familia que me ha brindado su apoyo desde el inicio de la carrera.

A mi amiga y compañera leal Michelle Osorio por siempre estar ahí para mí. Fue con quien siempre hice los trabajos, nos ayudábamos a entender los temas y prepararnos para los exámenes, muchas gracias por todo.

Gracias infinitas a Joaquín Aparicio quien desde el inicio de la carrera fue mi amigo, compañero y tutor. Tuvo la paciencia de explicarme y alentarme a nunca rendirme, quien siempre creyó en que yo soy bueno en esta carrera.

Gracias a mi compañera Carmen Parada por dejarme formar parte de esta última prueba en nuestra carrera, por haberme dado la confianza de trabajar y apoyar su idea de tesis.

Agradecer a nuestra asesora Lic. Mirna Galdámez por su tiempo, confianza y compromiso para con nosotros. Gracias a ella mejoramos mucho en nuestros conocimientos.

Agradezco a nuestro asesor externo Lic. Luisantos Bonilla por su tiempo, consejos, dedicación y sobre todo paciencia a la hora de guiarme en los problemas surgidos a lo largo de este trabajo.

Finalmente, agradecer a todos esos compañeros que estuvieron a lo largo de la carrera junto a mí. A mis amigos que no he mencionado, por siempre alegrarme y animarme en esos momentos difíciles de la carrera.

Alejandro Rivera.

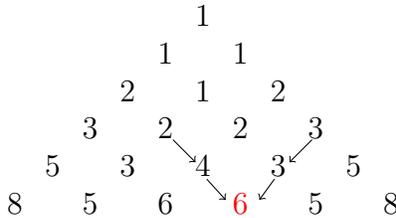
# Índice

Resumen .....	6
Introducción .....	7
Metodología .....	8
<b>Capítulo 1 .....</b>	<b>9</b>
<b>1. Preliminares</b> .....	<b>9</b>
1.1. Números de Fibonacci .....	9
1.2. Números de Lucas .....	10
1.3. Identidades de Fibonacci y Lucas .....	11
1.4. Generalización de los números de Fibonacci .....	29
1.5. Triángulo de Pascal .....	32
1.5.1. Coeficientes binomiales .....	32
1.5.2. Triángulo de Pascal .....	34
1.5.3. Números de Fibonacci .....	39
1.6. Triángulo de Hosoya .....	43
1.6.1. Definición recursiva .....	44
1.6.2. Relación entre $H(r, k)$ y $L_r$ .....	50
1.6.3. Rombo mágico .....	51
<b>Capítulo 2 .....</b>	<b>55</b>
<b>2. Propiedades del MCD en el triángulo de Hosoya</b> .....	<b>55</b>
2.1. Sistema de coordenadas del triángulo de Hosoya .....	55
2.2. Estrella de David .....	57
2.3. Propiedades que se generalizan del triángulo de Pascal al triángulo de Hosoya .....	65
2.4. La propiedad del <b>mcd</b> en un polígono .....	78

2.5. La sucesión generalizada de Hosoya. . . . .	86
2.6. La estrella generalizada de David . . . . .	92
2.7. Propiedades del <b>mcd</b> de los números generalizados de Fibonacci . . . . .	95
2.8. Propiedad del <b>mcd</b> para la estrella de David de longitud dos y tres . . . . .	102
<b>Capítulo 3</b> . . . . .	<b>106</b>
<b>3. Geometría en el triángulo de Hosoya</b>	<b>106</b>
3.1. El triángulo de Hosoya y su sistema de coordenadas . . . . .	106
3.2. Propiedades geométricas en el triángulo de Hosoya . . . . .	108
<b>Conclusiones</b> . . . . .	<b>129</b>
<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>131</b>

# Resumen

El triángulo de Hosoya es un arreglo triangular de números que se asemeja a él triángulo de Pascal basado en los números de Fibonacci. Las dos diagonales más externas son los números de Fibonacci, mientras que los números de la línea vertical central son los cuadrados de los números de Fibonacci. Todos los demás números resultan ser la suma de los dos números anteriores en la diagonal izquierda o en la diagonal derecha.



**Triángulo de Hosoya.**

En este trabajo se estudian las propiedades del máximo común divisor (**mcd**) de algunas configuraciones geométricas en el triángulo de Hosoya. En particular, las propiedades del mcd de una configuración especial en el triángulo de Hosoya llamada «*La estrella de David*», la cual se forma por los vértices de dos triángulos de un hexágono regular en el triángulo de Hosoya.

Se demuestra que el producto de todos los puntos en una estrella de David de longitud dos en el triángulo de Pascal forma un cuadrado perfecto, de igual forma que el **mcd** de cada triángulo de la estrella de David de longitud dos en el triángulo de Pascal da el mismo número. Estas propiedades se denominan *Propiedades de producto y mcd*, respectivamente. Se muestra que ambas propiedades son ciertas para cualquier estrella de David de longitud 2 en el triángulo de Hosoya, es importante mencionar que estas propiedades pueden ser generalizadas.

Se estudian las propiedades geométricas dentro del triángulo de Hosoya, algunas de las propiedades de los números de Fibonacci las veremos ahora con interpretación geométrica. Se proporciona pruebas geométricas de identidades clásicas usando el triángulo de Hosoya.

# Introducción

El presente trabajo está dividido en tres capítulos. El capítulo uno es una introducción al triángulo de Hosoya de manera general, en el cual se desarrollan las definiciones, teoremas y resultados básicos que son necesarios para comprender el resto de capítulos. Se probarán una serie de propiedades de los números de Fibonacci.

En el capítulo dos generalizaremos una serie de propiedades del triángulo de Pascal al triángulo de Hosoya. En particular, probaremos la propiedad del  $MCD$  para la estrella de David y otros polígonos. También damos un criterio para determinar si una secuencia de puntos en un polígono o en un rombo tienen  $MCD$  igual a uno. Después estudiaremos el triángulo generalizado de Hosoya, que es un arreglo numérico donde cada entrada es un producto de dos números generalizados de Fibonacci. Demostramos la propiedad del  $MCD$  para la estrella de David de longitud dos, damos las condiciones necesarias y suficientes para que la estrella de David de longitud tres satisfaga dicha propiedad. También estudiamos las propiedades del  $MCD$  y las propiedades de modularidad de los números generalizados de Fibonacci.

En el capítulo tres exploraremos algunas identidades de Fibonacci que se interpretan geométricamente en el triángulo de Hosoya. Específicamente exploramos una generalización de las identidades de Catalan y Cassini desde un punto de vista geométrico. También, estudiaremos las propiedades que poseen los peldaños de los diferentes tipos de escaleras, utilizando la propiedad del rectángulo para dar una prueba geométrica. Finalmente, ampliamos algunas propiedades presentes en el triángulo de Pascal al triángulo de Hosoya, como la propiedad del palo de hockey.

# Metodología

La metodología a seguir en este trabajo es:

1. Revisión bibliográfica; utilizaremos como referencia diversos artículos para desarrollar los contenidos propuestos:
  - The Geometry of some Fibonacci Identities in the Hosoya Triangle, Rigoberto Flórez and Robinson A. Higueta and Antara Mukherjee.
  - GCD Property of the Generalized Star of David in the Generalized Hosoya Triangle, Rigoberto Flórez and Robinson Higueta and Leandro Junes.
  - GCD Property in Hosoya's triangle, Rigoberto Flórez and Leandro Junes.
  - Fibonacci and Lucas numbers with applications, Thomas Koshy.
2. Demostración de teoremas; analizaremos y demostraremos de manera clara y detallada propiedades, identidades y teoremas relevantes sobre el triángulo de Hosoya.
3. Los capítulos a desarrollar son:
  - Preliminares: Triángulo de Hosoya.
  - Propiedades del  $MCD$  en el triángulo de Hosoya.
  - Geometría en el triángulo de Hosoya.

# Capítulo 1

## 1. Preliminares

El triángulo de Hosoya es un arreglo triangular definido recursivamente. Es importante mencionar que cada entrada se puede obtener como producto de dos números de Fibonacci. Este arreglo posee muchas propiedades e identidades que provienen de un triángulo más conocido como lo es el triángulo de Pascal.

En este capítulo desarrollaremos los conceptos y teoremas básicos que utilizaremos en el transcurso de este trabajo, también mostraremos identidades que pueden encontrarse en el triángulo de Pascal que consiguen ser generalizadas en el triángulo de Hosoya.

Finalizaremos este capítulo estudiando cuidadosamente las entradas del triángulo de Hosoya. De esta manera podemos obtener estructuras como: el rombo mágico, en el cual se cumplen propiedades muy peculiares.

### 1.1. Números de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci fue llamada de esta forma en mayo de 1876 por el francés Matemático Francois-Edouard-Antole-Lucas quien originalmente la llamó «La serie de Lamé», en honor al matemático Francés Gabriel Lamé (1795-1870) [*Martin Garden*, 1996].



Francois-Edouard-Antole-Lucas

La sucesión de Fibonacci es una de las sucesiones numéricas más intrigantes, continúa proporcionando amplias oportunidades a profesionales y aficionados matemáticos para hacer conjeturas y expandir el horizonte matemático.

La sucesión es tan importante que se creó una organización de las matemáticas **The Fibonacci Association** para estudiar Fibonacci y sucesiones enteras relacionadas. La asociación

fue fundada en 1963 por Verner E. Hoggatt, Jr. (1921-1980) de la Universidad de San José, California y su hermano Alfred Brousseau (1907-1988) de la Universidad de St. Mary's en California. La asociación publicó «The Fibonacci Quartely», dedicado a artículos de sucesiones de enteros.

Una mirada de cerca a la sucesión de Fibonacci reveló que tenía una propiedad fascinante: cada número de Fibonacci, excepto los primeros dos, es la suma de los dos números de Fibonacci anteriores.

La sucesión de Fibonacci es un grupo famoso de números que comienzan con 1 y 1 en el que cada número es la suma de los dos anteriores. Comienza 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 y continúa infinitamente ( $1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 2 = 5 \dots$ ). El patrón esconde un poderoso secreto: sí divide cada número en la secuencia por su predecesor, a medida que avanza hacia números más altos, el resultado converge en la constante  $\phi$ , o aproximadamente 1.61803, también conocido como la proporción áurea.

**Definición 1.1.** *La definición recursiva del  $n$ -ésimo número de Fibonacci es:*

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{relación inicial.}$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 2 \quad \text{relación de recurrencia.}$$

No se sabe si Fibonacci conocía esta relación. Si lo hizo, no existe ningún registro en ese sentido. De hecho, la primera confirmación escrita de la relación de recurrencia apareció cuatro siglos después, cuando el gran astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler (1571-1630) escribió que Fibonacci seguramente debe haber notado esta relación recursiva [Johannes Kepler, 1611]. En cualquier caso, lo notó por primera vez el matemático holandés Albert Girard (1595-1632) [Stevin, Simon; Girard, Albert; Diophantus, of Alexandria, 1634]. Sin embargo, según P. Singh de la Universidad de Raj Narain en Bihar, India, los números de Fibonacci y la formulación recursiva ya era conocida en la India varios siglos antes de que Fibonacci propusiera el problema [Singh, 1985]. Estas formulaciones fueron dadas por Virahanka (entre 600 y 800 d.C) [Livio, 2003], Gopala (previo a 1135 d.C) [Livio, 2003] y Hemacandra (sobre 1150 d.C) [Goonatilake, 1998].

## 1.2. Números de Lucas

Usando la relación de recurrencia de Fibonacci y diferentes condiciones iniciales, podemos construir una nueva sucesión de números.

**Definición 1.2.** *La definición recursiva del  $n$ -ésimo número de Lucas es:*

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1 \quad \text{relación inicial.}$$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad n \geq 2 \quad \text{relación de recurrencia.}$$

El resultado es la sucesión 2, 1, 3, 4, 7, 11... Es llamada la sucesión de Lucas, por Edouard Lucas.

Los números de Fibonacci y Lucas son relativamente cercanos, por ejemplo podemos ver que sus  $n$ -ésimos términos  $L_n$  y  $F_n$  satisfacen la misma relación de recurrencia.

Usando  $L_{n-2} = L_n - L_{n-1}$  se puede extender la sucesión de números de Lucas para obtener una secuencia doblemente infinita  $\dots - 11, 7, -4, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, 11 \dots$

La fórmula para los términos con los índices negativos en esta secuencia es:

$$L_{-n} = (-1)^n L_n.$$

### 1.3. Identidades de Fibonacci y Lucas

Los números de Fibonacci y de Lucas satisfacen numerosas identidades que han sido descubiertas a lo largo de los siglos. En esta sección presentaremos varias de estas identidades fundamentales.

Por ejemplo, si tratamos de conjeturar una fórmula para la suma  $\sum_{i=1}^n F_i$ . Podemos observar el siguiente patrón interesante:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 = 2 - 1 = F_3 - 1 \\ F_1 + F_2 &= 2 = 3 - 1 = F_4 - 1 \\ F_1 + F_2 + F_3 &= 4 = 5 - 1 = F_5 - 1 \\ F_1 + F_2 + F_3 + F_4 &= 7 = 8 - 1 = F_6 - 1 \\ F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 &= 12 = 13 - 1 = F_7 - 1. \end{aligned}$$

Si siguiendo este patrón, conjeturamos que  $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$ . La prueba de esta fórmula la veremos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.** (Lucas, 1876) *La suma de los primeros  $n$  números de Fibonacci, está dada por:*

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1 \tag{1}$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Para  $n=1$

$$\sum_{i=1}^1 F_i = F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un estero positivo, supongamos que se cumple:

$$\sum_{i=1}^k F_i = F_{k+2} - 1$$

.

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} F_i &= \sum_{i=1}^k F_i + F_{k+1} \\ &= F_{k+2} - 1 + F_{k+1} \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= (F_{k+2} + F_{k+1}) - 1 \quad \text{por la relación de recurrencia de Fibonacci} \\ &= F_{k+3} - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

Usando la técnica empleada en el Teorema (1.1), podemos derivar una fórmula para la suma de los primeros  $n$  números de Fibonacci con subíndices impares.

**Teorema 1.2.** (Lucas, 1876) *La suma de los primeros  $n$  números de Fibonacci con subíndices impares, está dada por:*

$$\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n} \tag{2}$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Para  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 F_{2i-1} = F_1 = 1 = F_2.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un estero positivo, supongamos que se cumple:

$$\sum_{i=1}^k F_{2i-1} = F_{2k}.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} F_{2i-1} &= \sum_{i=1}^k F_{2i-1} + F_{2k+1} \\ &= F_{2k} + F_{2k+1} \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= F_{2k+2} \quad \text{por relación de recurrencia de Fibonacci.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

A continuación, tenemos un ejemplo en el que el Teorema (1.2) se puede verificar de manera directa.

**Ejemplo 1.1.** Si consideramos  $\sum_{i=1}^{10} F_{2i-1}$ , representa la suma de los primeros 10 números de Fibonacci con subíndices impares.

$$\sum_{i=1}^{10} F_{2i-1} = F_{20} = 6765.$$

**Corolario 1.1.** (Lucas, 1876) La suma de los primeros  $n$  números de Fibonacci con subíndices pares, está dada por:

$$\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1 \quad (3)$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Para  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 F_{2i} = F_2 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$\sum_{i=1}^k F_{2i} = F_{2k+1} - 1.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{k+1} F_{2i} &= \sum_{i=1}^k F_{2i} + F_{2k+2} \\
 &= F_{2k+1} - 1 + F_{2k+2} \quad \text{por hipótesis inductiva} \\
 &= (F_{2k+1} + F_{2k+2}) - 1 \\
 &= F_{2k+3} - 1 \quad \text{por relación de recurrencia de Fibonacci.}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

Ahora estudiemos el siguiente patrón:

$$\begin{aligned}
 F_1 F_3 - F_2^2 &= 1 \cdot 2 - 1^2 = (-1)^2 \\
 F_2 F_4 - F_3^2 &= 1 \cdot 3 - 2^2 = (-1)^3 \\
 F_3 F_5 - F_4^2 &= 2 \cdot 5 - 3^2 = (-1)^4 \\
 F_4 F_6 - F_5^2 &= 3 \cdot 8 - 5^2 = (-1)^5 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

De aquí podemos conjeturar que  $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ , cuando  $n \geq 1$ . Esto lleva a la siguiente fórmula, la cual fue descubierta en 1680 por el astrónomo y matemático italiano-francés Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) [Werman, M.; Zeilberger, D., 1986], y descubrió de forma independiente en 1753 por Robert Simson (1687-1768) de la Universidad de Glasgow [Robert Simson, 1753].

**Teorema 1.3.** (Fórmula de Cassini) *El producto de los números de Fibonacci anterior y siguiente a  $F_n$  menos el cuadrado de  $F_n$  es igual a 1 o  $-1$ , como se representa en la siguiente fórmula:*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{4}$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Realizaremos esta demostración por el principio de inducción matemática sobre  $n$ .

- Caso Base:

Para  $n = 1$

$$F_0 F_2 - F_1^2 = 0 \cdot 1 - 1 = -1 = (-1)^1.$$

Claramente, la afirmación se cumple para el caso base.

- Hipótesis Inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k.$$

- Prueba inductiva:

Probemos que se cumple para  $k+1$ :

$$\begin{aligned}
 F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} - F_{k-1})(F_k + F_{k+1}) - F_{k+1}^2 \\
 &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 - F_k F_{k-1} - F_{k-1} F_{k+1} - F_{k+1}^2 \\
 &= F_k F_{k+1} - F_k F_{k-1} - F_k^2 - (-1)^k \quad \text{por hipótesis inductiva} \\
 &= F_k F_{k+1} - F_k(F_{k-1} + F_k) + (-1)^{k+1} \\
 &= F_k F_{k+1} - F_k F_{k+1} + (-1)^{k+1} \\
 &= (-1)^{k+1}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

La fórmula de Cassini produce el siguiente derivado fascinante.

**Corolario 1.2.** *Dos números consecutivos de Fibonacci son primos relativos; esto es:*

$$(F_{n+1}, F_n) = 1$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , veamos que para todo  $n > 0$  se satisface que  $(F_{n+1}, F_n) = 1$ .

- Caso base:

Para  $n = 1$ , tenemos

$$(F_2, F_1) = (1, 1) = 1.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero arbitrario, supongamos que se cumple:

$$(F_{k+1}, F_k) = 1.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $k + 1$ , es decir:  $(F_{k+2}, F_{k+1}) = 1$ .

Sea  $d = (F_{k+2}, F_{k+1})$ , luego como  $d$  es el **mcd** se cumple:

$$d|F_{k+2} \quad \text{y} \quad d|F_{k+1}.$$

Recordemos que por definición de los números de Fibonacci  $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ , de aquí que  $d|(F_{k+1} + F_k)$ . También  $d$  divide a cualquier combinación lineal de ellos, tenemos:

$$\begin{aligned} d|(F_{k+1} + F_k - F_{k+1}) \\ d|F_k. \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que  $d|F_{k+1}$  y  $d|F_k$ . Por hipótesis inductiva  $d = (F_{k+1}, F_k) = 1$ .

De esta manera concluimos que  $(F_{n+1}, F_n) = 1$ . ■

Es válido hacerse la siguiente pregunta ¿Qué podemos decir de la suma de los cuadrados de los primeros  $n$  números de Fibonacci?

Una vez más, observemos el patrón:

$$F_1^2 + F_2^2 = 2 = F_2F_3.$$

Este resultado tiene una buena interpretación geométrica: La suma de las áreas de los cuadrados de tamaños  $F_1 \times F_1$  y  $F_2 \times F_2$  es igual al área del rectángulo de tamaño  $F_2 \times F_3$ , como la Figura 1 lo demuestra.

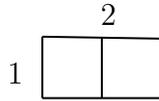


Figura 1: Rectángulo de tamaño  $F_2 \times F_3$

Igualmente,  $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1 + 1 + 4 = 6 = 2 \cdot 3 = F_3F_4$  y  $F_1^2$ . Este resultado también puede ser interpretado geoméricamente en una manera similar, como lo muestra la Figura 2.

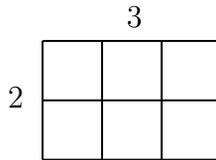


Figura 2: Rectángulo de tamaño  $F_3 \times F_4$

De la misma manera  $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1 + 1 + 4 + 9 = 15 = 3 \cdot 5 = F_4F_5$ . Este resultado también puede ser interpretado geoméricamente en una manera similar, como lo muestra la Figura 3.

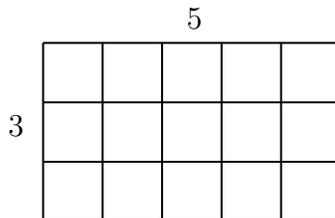


Figura 3: Rectángulo de tamaño  $F_4 \times F_5$

Más generalmente, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.4.** (Lucas, 1876) *La suma de los cuadrados de los primeros  $n$  números de Fibonacci, está dada por:*

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1} \quad (5)$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ .

- Caso base:

Cuando  $n = 1$ , tenemos:

$$\sum_{i=1}^1 F_i^2 = F_1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = F_1 F_2.$$

Así comprobamos que el resultado es válido para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$\sum_{i=1}^k F_i^2 = F_k F_{k+1}.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 &= \sum_{i=1}^k F_i^2 + F_{k+1}^2 \\ &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 \quad \text{por hipótesis inductiva.} \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} F_{k+2} \quad \text{por la relación de recurrencia de Fibonacci.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

Las identidades (1) hasta (5) tienen resultados análogos para los números de Lucas.

**Teorema 1.5.** *La suma de los primeros  $n$  números de Lucas, está dada por:*

$$\sum_{i=1}^n L_i = L_{n+2} - 3 \quad (6)$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por inducción matemática sobre  $n$ , obtenemos:

- Caso base:

Para  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 L_i = L_1 = 1 = 4 - 3 = L_3 - 3 = L_{n+2} - 3.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$\sum_{i=1}^k L_i = L_{k+2} - 3.$$

- Paso inductivo:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} L_i &= \sum_{i=1}^k L_i + L_{k+1} \\ &= L_{k+2} + L_{k+1} - 3 \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= L_{k+3} - 3 \quad \text{por definición recursiva} \\ &= L_{(k+1)+2} - 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

**Teorema 1.6.** *La suma de los primeros  $n$  números de Lucas con subíndices impares, está dada por:*

$$\sum_{i=1}^n L_{2i-1} = L_{2n} - 2 \tag{7}$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Cuando  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 L_{2i-1} = L_1 = 1 = 3 - 2 = L_2 - 2.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$\sum_{i=1}^k L_{2i-1} = L_{2k} - 2.$$

- Paso inductivo:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} L_{2i-1} &= \sum_{i=1}^k L_{2i-1} + L_{2k+1} \\ &= L_{2k} + L_{2k+1} - 2 \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= L_{2k+2} - 2 \quad \text{por definición recursiva} \\ &= L_{2(k+1)} - 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

**Teorema 1.7.** *La suma de los primeros  $n$  números de Lucas con subíndices pares, está dada por:*

$$\sum_{i=1}^n L_{2i} = L_{2n+1} - 1 \tag{8}$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base: para  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 L_{2i} = L_2 = 3 = 4 - 1 = L_3 - 1.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$\sum_{i=1}^k L_{2i} = L_{2k+1} - 1.$$

- Paso inductivo:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{k+1} L_{2i} &= \sum_{i=1}^k L_{2i} + L_{2k+2} \\
 &= L_{2k+1} + L_{2k+2} - 1 \quad \text{por hipótesis inductiva} \\
 &= L_{2k+3} - 1 \quad \text{por definición recursiva} \\
 &= L_{2(k+1)+1} - 1.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

Estudiando esta relación

$$\begin{aligned}
 L_0L_2 - L_1^2 &= (2)(3) - 1 = 5(-1)^0 \\
 L_1L_3 - L_2^2 &= (1)(4) - 9 = -5 = 5(-1)^1 \\
 L_2L_4 - L_3^2 &= (3)(7) - 16 = 5 = 5(-1)^2 \\
 L_3L_5 - L_4^2 &= (4)(11) - 49 = -5 = 5(-1)^3 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Podemos conjeturar  $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$  y lo probaremos a continuación.

**Teorema 1.8.** *Identidad que cumplen los números de Lucas:*

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1} \tag{9}$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Para  $n = 1$

$$L_0L_2 - L_1^2 = (2)(3) - 1 = 5(-1)^0.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$L_{k-1}L_{k+1} - L_k^2 = 5(-1)^{k-1}$$

para  $k > 0$ .

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned}
L_k L_{k+2} - L_{k+1}^2 &= (L_{k+1} - L_{k-1})(L_k + L_{k+1}) - L_{k+1}^2 \\
&= L_{k+1} L_k + L_{k+1}^2 - L_{k-1} L_k - L_{k-1} L_{k+1} - L_{k+1}^2 \\
&= L_{k+1} L_k - L_{k-1} L_k - L_{k-1} L_{k+1} \\
&= L_{k+1} L_k - L_{k-1} L_k - L_k^2 - 5(-1)^{k-1} \quad \text{por hipótesis inductiva} \\
&= L_{k+1} L_k - L_k(L_{k-1} + L_k) + 5(-1)(-1)^{k-1} \\
&= L_{k+1} L_k - L_k L_{k+1} + 5(-1)^k \\
&= 5(-1)^k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

**Teorema 1.9.** *La suma de los cuadrados de los primeros  $n$  números de Lucas, está dada por:*

$$\sum_{i=1}^n L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2 \quad (10)$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Para  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 L_i^2 = L_1^2 = 1 = L_1 L_2 - 2.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple :

$$\sum_{i=1}^k L_i^2 = L_k L_{k+1} - 2.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} L_i^2 &= \sum_{i=1}^k L_i^2 + L_{k+1}^2 \\
&= L_k L_{k+1} + L_{k+1}^2 - 2 \quad \text{por hipótesis inductiva,} \\
&= L_{k+1}(L_k + L_{k+1}) - 2 \\
&= L_{k+1}(L_{k+2}) - 2 \quad \text{por relación de recurrencia,} \\
&= L_{k+1} L_{k+2} - 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

Para nuevas identidades, ahora presentamos una fórmula explícita para  $F_n$ . Con este fin, tomamos  $\alpha$  y  $\beta$  raíces de la ecuación cuadrática  $x^2 - x - 1 = 0$ , entonces  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  y  $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Luego  $\alpha + \beta = 1$  y  $\alpha\beta = -1$ . Además,

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \alpha(1 - \beta) = \alpha - \alpha\beta = \alpha + 1 \\ \alpha^3 &= \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 1 \\ \alpha^4 &= \alpha(2\alpha + 1) = 2\alpha^2 + \alpha = 2(\alpha + 1) + \alpha = 3\alpha + 2 \\ \alpha^5 &= \alpha(3\alpha + 2) = 3\alpha^2 + 2\alpha = 3(\alpha + 1) + 2\alpha = 5\alpha + 3 \\ \alpha^6 &= \alpha(5\alpha + 3) = 5\alpha^2 + 3\alpha = 5(\alpha + 1) + 3\alpha = 8\alpha + 5 \\ \alpha^7 &= \alpha(8\alpha + 5) = 8\alpha^2 + 5\alpha = 8(\alpha + 1) + 5\alpha = 13\alpha + 8 \\ \alpha^8 &= \alpha(13\alpha + 8) = 13\alpha^2 + 8\alpha = 13(\alpha + 1) + 8\alpha = 21\alpha + 13.\end{aligned}$$

Así, tenemos:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1\alpha + 0 \\ \alpha^2 &= 1\alpha + 1 \\ \alpha^3 &= 2\alpha + 1 \\ \alpha^4 &= 3\alpha + 2 \\ \alpha^5 &= 5\alpha + 3 \\ \alpha^6 &= 8\alpha + 5 \\ \alpha^7 &= 13\alpha + 8 \\ \alpha^8 &= 21\alpha + 13.\end{aligned}$$

Similarmente para  $\beta$  obtenemos:

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \beta(1 - \alpha) = \beta - \beta\alpha = \beta + 1 \\ \beta^3 &= \beta(\beta + 1) = \beta^2 + \beta = 2\beta + 1 \\ \beta^4 &= \beta(2\beta + 1) = 2\beta^2 + \beta = 2(\beta + 1) + \beta = 3\beta + 2 \\ \beta^5 &= \beta(3\beta + 2) = 3\beta^2 + 2\beta = 3(\beta + 1) + 2\beta = 5\beta + 3 \\ \beta^6 &= \beta(5\beta + 3) = 5\beta^2 + 3\beta = 5(\beta + 1) + 3\beta = 8\beta + 5.\end{aligned}$$

Así, tenemos:

$$\begin{aligned}\beta &= 1\beta + 0 \\ \beta^2 &= 1\beta + 1 \\ \beta^3 &= 2\beta + 1 \\ \beta^4 &= 3\beta + 2 \\ \beta^5 &= 5\beta + 3 \\ \beta^6 &= 8\beta + 5.\end{aligned}$$

Notemos el patrón interesante que surge: el término constante y el coeficiente de  $\alpha$  (ó  $\beta$ ) en el lado derecho parecen ser números de Fibonacci adyacentes.

En consecuencia, tenemos los siguientes lemas.

**Lema 1.1.** Si  $\alpha$  es una raíz positiva de la ecuación  $x^2 - x - 1 = 0$ , entonces se cumple que:

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Para  $n = 1$

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha F_1 + F_0 && \text{ya que } F_1 = 1 \text{ y } F_0 = 0 \\ &= 1\alpha + 0. \end{aligned}$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$\alpha^k = \alpha F_k + F_{k-1}$$

para  $k > 0$ .

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} \alpha^{k+1} &= \alpha \alpha^k \\ &= \alpha(\alpha F_k + F_{k-1}) && \text{por hipótesis inductiva} \\ &= F_k \alpha^2 + \alpha F_{k-1} && \text{sabemos que } \alpha^2 = \alpha + 1 \\ &= F_k(\alpha + 1) + \alpha F_{k-1} \\ &= \alpha F_k + \alpha F_{k-1} + F_k \\ &= \alpha(F_k + F_{k-1}) + F_k \\ &= \alpha F_{k+1} + F_k && \text{por relación de recurrencia.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

**Lema 1.2.** Si  $\beta$  es la raíz negativa de la ecuación  $x^2 - x - 1 = 0$ , entonces se cumple que:

$$\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Para  $n = 1$

$$\begin{aligned}\beta &= \beta F_1 + F_0 && \text{ya que } F_1 = 1 \text{ y } F_0 = 0 \\ &= 1\beta + 0.\end{aligned}$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$\beta^k = \beta F_k + F_{k-1}$$

para  $k > 0$ .

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned}\beta^{k+1} &= \beta\beta^k \\ &= \beta(\beta F_k + F_{k-1}) && \text{por hipótesis inductiva} \\ &= F_k\beta^2 + \beta F_{k-1} && \text{sabemos que } \beta^2 = \beta + 1 \\ &= F_k(\beta + 1) + \beta F_{k-1} \\ &= \beta F_k + \beta F_{k-1} + F_k \\ &= \beta(F_k + F_{k-1}) + F_k \\ &= \beta F_{k+1} + F_k && \text{por relación de recurrencia.}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

Sea  $u_n = \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{5}}$ , donde  $n \geq 1$ . Entonces

$$u_1 = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{\sqrt{5}} = 1.$$

Supongamos que  $n \geq 3$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 u_{n-1} + u_{n-2} &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\alpha^{n-2}(\alpha + 1) - \beta^{n-2}(\beta + 1)}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\alpha^{n-2} \cdot \alpha^2 - \beta^{n-2} \cdot \beta^2}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \\
 &= u_n.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $u_n$  satisface la relación de recurrencia de Fibonacci y las dos condiciones iniciales. Esto nos da una fórmula explícita para  $F_n$ :

$$F_n = u_n.$$

**Teorema 1.10.** *Sea  $\alpha$  y  $\beta$  las raíces de la ecuación cuadrática  $x^2 - x - 1 = 0$ . Entonces*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

cuando  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por definición,  $\alpha$  es la raíz positiva de la ecuación cuadrática y por el Lema (1.1), sabemos que:  $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ , luego  $\beta$  es la raíz negativa de la ecuación cuadrática por el Corolario (1.2), sabemos que:  $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$ .

Entonces:

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{F_n(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)} \quad \text{multiplicando por 1} \\
 &= \frac{\alpha F_n - \beta F_n}{\alpha - \beta} \\
 &= \frac{\alpha F_n + F_{n-1} - \beta F_n - F_{n-1}}{\alpha - \beta} \quad \text{sumando 0} \\
 &= \frac{\alpha F_n + F_{n-1} - (\beta F_n + F_{n-1})}{\alpha - \beta} \\
 &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Esta fórmula explícita para  $F_n$  se llama **fórmula de Binet**, en honor al matemático francés Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856), quien la descubrió en 1843 [*Jacques Binet*, 1843]. De hecho, fue descubierto por primera vez en 1718 por el matemático francés Abraham De

Moivre (1667-1754) [Abraham Moivre, 1718] utilizando funciones generadoras y también se llegó a ella de forma independiente en 1844 por el ingeniero y matemático francés Gabriel Lamé (1795-1870) [Gabriel lamé, 1844].

Correspondiente a la fórmula de Binet para  $F_n$ , también hay una para  $L_n$ , como el siguiente teorema lo muestra.

**Teorema 1.11.** *Formula de Binet para números de Lucas. Dado  $n > 0$ . Entonces*

$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

*Demostración.*

Por inducción fuerte sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Para  $n = 1$

$$L_1 = 1 = \alpha + \beta$$

ya que sabemos que una de las condiciones que cumplen  $\alpha$  y  $\beta$  es que  $\alpha + \beta = 1$ . De esta manera es claro que la afirmación se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo tal que  $n = k$ , supongamos que para  $i$  un entero positivo tal que  $i \leq k$ , se cumple:

$$L_i = \alpha^i + \beta^i.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_k + L_{k-1} \\ &= \alpha^k + \beta^k + \alpha^{k-1} + \beta^{k-1} \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= \alpha^{k-1}(\alpha + 1) + \beta^{k-1}(\beta + 1) \\ &= \alpha^{k-1}\alpha^2 + \beta^{k-1}\beta^2 \quad \text{ya que } \alpha^2 = \alpha + 1 \text{ y } \beta^2 = \beta + 1 \\ &= \alpha^{k+1} + \beta^{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

Las dos fórmulas de Binet se pueden utilizar en conjunto para derivar una serie de identidades.

**Corolario 1.3.** *Las siguientes identidades muestran las relaciones que existen entre los números de Fibonacci y los números de Lucas.*

$$F_{2n} = F_n L_n \tag{11}$$

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n \tag{12}$$

$$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n \tag{13}$$

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n \tag{14}$$

para  $n \geq 3$ .

*Demostración.*

Identidad (11). Implica que cuando  $n \geq 3$ , cada número de Fibonacci  $F_{2n}$  con subíndice par tiene factores no triviales. Por las fórmulas de Binet, tenemos:

$$\begin{aligned} F_n L_n &= \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^n + \beta^n) \\ &= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \\ &= F_{2n}. \end{aligned}$$

Identidad (12). La suma de cualesquiera dos números de Fibonacci que están a dos unidades de distancia es un número de Lucas.

Por las fórmulas de Binet, tenemos:

$$\begin{aligned} F_{n-1} + F_{n+1} &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{\alpha^n \left( \frac{1}{\alpha} + \alpha \right) - \beta^n \left( \frac{1}{\beta} + \beta \right)}{(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{(\alpha\beta) \left( \alpha^n \left( \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \right) - \beta^n \left( \frac{1+\beta^2}{\beta} \right) \right)}{(\alpha\beta)(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{\alpha^n(\beta + \alpha^2\beta) - \beta^n(\alpha + \alpha\beta^2)}{(\alpha\beta)(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{\alpha^n(\beta - \alpha) - \beta^n(\alpha - \beta)}{(\alpha\beta)(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{\alpha^n(-1)(\alpha - \beta) + \beta^n(-1)(\alpha - \beta)}{(-1)(\alpha - \beta)} \quad \text{ya que } \alpha\beta = -1 \\ &= \alpha^n + \beta^n \\ &= L_n. \end{aligned}$$

Identidad (13). La diferencia de cualesquiera dos números de Fibonacci que se encuentran a cuatro unidades de distancia es un número de Lucas.

$$\begin{aligned} F_{n+2} - F_{n-2} &= \frac{(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) - (\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{n+2} - \alpha^{n-2} - \beta^{n+2} + \beta^{n-2}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n \left( \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2} \right) - \beta^n \left( \beta^2 - \frac{1}{\beta^2} \right)}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{n+2} - F_{n-2} &= \frac{\alpha^n \left( \frac{\alpha^4-1}{\alpha^2} \right) - \beta^n \left( \frac{\beta^4-1}{\beta^2} \right)}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{(\alpha\beta)^2 \left( \alpha^n \left( \frac{\alpha^4-1}{\alpha^2} \right) - \beta^n \left( \frac{\beta^4-1}{\beta^2} \right) \right)}{(\alpha\beta)^2(\alpha - \beta)} && \text{ya que } (\alpha\beta)^2 = 1 \\
&= \frac{\alpha^n(\alpha^4\beta^2 - \beta^2) - \beta^n(\beta^4\alpha^2 - \alpha^2)}{\alpha - \beta} && \text{ya que } (\alpha\beta)^2 = 1 \\
&= \frac{\alpha^n(\alpha^2 - \beta^2) - \beta^n(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^2(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - \beta^n(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{\alpha - \beta} && \text{ya que } \alpha + \beta = 1 \\
&= \alpha^n + \beta^n \\
&= L_n.
\end{aligned}$$

Identidad (13).  $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$ .

Por inducción fuerte sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Para  $n = 1$

$$L_0 + L_2 = 2 + 3 = 5F_1.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo tal que  $n = k$ , supongamos que para  $i$  un entero positivo tal que  $i \leq k$ , se cumple:

$$L_{i-1} + L_{i+1} = 5F_i.$$

- Paso inductivo:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned}
L_n + L_{n+2} &= (L_{n-1} + L_{n-2}) + (L_{n+1} + L_n) \\
&= (L_{n-1} + L_{n+1}) + (L_{n-2} + L_n) \\
&= 5F_n + 5F_{n-1} && \text{por hipótesis inductiva} \\
&= 5(F_n + F_{n-1}) \\
&= 5F_{n+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

## 1.4. Generalización de los números de Fibonacci

**Definición 1.3.** La definición recursiva del  $n$ -ésimo término de la sucesión generalizada de Fibonacci es:

$$\begin{aligned} G_1 &= a, & G_2 &= b & \text{Relación inicial.} \\ G_n &= G_{n-1} + G_{n-2} & n &\geq 3 & \text{Relación de Recurrencia.} \end{aligned}$$

Donde  $a, b$  son enteros.

La siguiente sucesión:

$$a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, \dots \quad (15)$$

es llamada **Sucesión Generalizada de Fibonacci (SGF)** también conocida como GFS por sus siglas en inglés «Generalized Fibonacci Sequence».

Examinemos más profundamente los coeficientes « $a$ » y « $b$ » en los diversos términos de esta sucesión.

Ellos siguen un patrón interesante: Los coeficientes « $a$ » y « $b$ » son números de Fibonacci. De hecho, podemos determinar con precisión estos dos coeficientes de Fibonacci, como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 1.12.** Sea  $G_n$  el  $n$ -ésimo término de la SGF. Entonces

$$G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$$

para  $n \geq 3$ .

*Demostración.*

Por el principio de inducción fuerte.

- Caso Base:

Sabemos que  $G_3 = a + b = aF_1 + bF_2$ , entonces se cumple para  $n = 3$  debido a que  $F_1 = F_2 = 1$ .

- Hipótesis Inductiva:

Sea  $k \geq 3$  un entero arbitrario. Asumamos que es cierto para todo entero  $i$ , donde  $3 \leq i \leq k : G_i = aF_{i-2} + bF_{i-1}$ .

- Prueba inductiva:

Probemos que se cumple para  $k + 1$ :

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= G_k + G_{k-1} \\ &= (aF_{k-2} + bF_{k-1}) + (aF_{k-3} + bF_{k-2}) \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= a(F_{k-2} + F_{k-3}) + b(F_{k-1} + F_{k-2}) \\ &= aF_{k-1} + bF_k. \end{aligned}$$

Entonces, por el principio de inducción fuerte podemos concluir que la fórmula se cumple para cualquier entero  $n \geq 3$ . ■

La generalización de los números de Fibonacci ocurrió en un estudio de una colonia de abejas. Supongamos que comenzamos la colonia con  $a$  abejas macho y  $b$  abejas hembras. La siguiente tabla muestra su crecimiento genealógico por cinco generaciones. Siguiendo con la tabla obtendríamos un total de  $G_{n+2} = aF_n + bF_{n+1}$  descendientes en la generación  $n$ .

Generación	1	2	3	4	5
Número de abejas hembras	b	a+b	a+2b	2a+3b	3a+5b
Número de abejas machos	a	b	a+b	a+2b	2a+3b
Número total de abejas	a+b	a+2b	2a+3b	3a+5b	5a+8b

A continuación, estudiaremos identidades de SGF.

**Teorema 1.13.** *La suma desde el termino  $k+1$  de la SGF hasta el termino  $k+n$  esta dada por:*

$$\sum_{i=1}^n G_{k+i} = G_{n+k+2} - G_{k+2}$$

para  $n > 0$ .

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Sea  $n = 1$  y obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^1 G_{k+i} = G_{k+1} = G_{k+3} - G_{k+2}.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$\sum_{i=1}^k G_{k+i} = G_{2k+2} - G_{k+2}.$$

- Paso inductivo:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} G_{k+i} &= \sum_{i=1}^k G_{k+i} + G_{2k+1} \\
&= G_{2k+2} + G_{2k+1} - G_{k+2} \quad \text{por hipótesis inductiva} \\
&= G_{2k+3} - G_{k+2} \quad \text{por definición recursiva} \\
&= G_{(k+1)+k+2} - G_{k+2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

**Teorema 1.14.** (Fórmula de Binet) Sea  $c = a + (a - b)\beta$  y  $d = a + (a - b)\alpha$ . Entonces

$$G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}$$

para  $n \geq 3$ .

*Demostración.*

Por el Teorema (1.12), tenemos:

$$\begin{aligned}
G_n &= aF_{n-2} + bF_{n-1} \\
G_n &= a \frac{(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{\sqrt{5}} + b \frac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\sqrt{5}} \quad \text{por teorema 1.10} \\
\sqrt{5}G_n &= a(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) + b(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \\
\sqrt{5}G_n &= a\alpha^{n-2} + b\alpha^{n-1} - a\beta^{n-2} - b\beta^{n-1} \\
\sqrt{5}G_n &= \alpha^n \left( \frac{a}{\alpha^2} + \frac{b}{\alpha} \right) - \beta^n \left( \frac{a}{\beta^2} + \frac{b}{\beta} \right) \\
\alpha^2\beta^2\sqrt{5}G_n &= \alpha^n(a\beta^2 + b\alpha\beta^2) - \beta^n(a\alpha^2 + b\alpha^2\beta) \\
\sqrt{5}G_n &= \alpha^n(a\beta^2 - b\beta) - \beta^n(a\alpha^2 - b\alpha) \quad \text{ya que } \alpha\beta = -1 \\
\sqrt{5}G_n &= \alpha^n(a(1 + \beta) - b\beta) - \beta^n(a(1 + \alpha) - b\alpha) \quad \text{ya que } \beta^2 = 1 + \beta \text{ y } \alpha^2 = 1 + \alpha \\
(\alpha - \beta)G_n &= \alpha^n[a + (a - b)\beta] - \beta^n[a + (a - b)\alpha] \quad \text{ya que } \alpha - \beta = \sqrt{5} \\
\therefore G_n &= \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Observación.** Al multiplicar  $c$  y  $d$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
cd &= [a + (a - b)\beta][a + (a - b)\alpha] \\
&= a^2 + (a - b)^2\alpha\beta + a(a - b)(\alpha + \beta) \\
&= a^2 - (a - b)^2 + a(a - b) \\
&= a^2 + ab - b^2.
\end{aligned}$$

Esta constante aparece en varias fórmulas para la Generalización de los números de Fibonacci. Esta constante es llamada la **característica** de la SGF. La denotaremos con la letra griega  $\mu$  (mu):

$$\mu = a^2 + ab - b^2$$

La característica de la sucesión de Fibonacci es 1 y la de la sucesión de Lucas es -5.

## 1.5. Triángulo de Pascal

En esta sección veremos la manera de calcular los números de Fibonacci de forma sistemática a partir del conocido triángulo de Pascal.

### 1.5.1. Coeficientes binomiales

Sean  $n$  y  $k$  números enteros no negativos. El coeficiente binomial

$$\binom{n}{k}$$

se define como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \binom{5}{3} &= \frac{5!}{3!(5-3)!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} \\ &= 10. \end{aligned}$$

Además, si  $k = n$  entonces:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Así, tenemos dos resultados útiles:

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}.$$

Hay muchos casos en los que necesitamos calcular los coeficientes binomiales  $\binom{n}{k}$  y  $\binom{n}{n-k}$ .

El siguiente teorema muestra que no es necesario evaluar ambas expresiones, ya que son iguales; esto sin duda reducirá nuestra carga de trabajo.

**Teorema 1.15.** Sean  $n$  y  $k$  enteros no negativos tales que  $k \leq n$ . Entonces:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Por ejemplo,  $\binom{25}{20} = \binom{25}{25-20} = \binom{25}{5} = 53130$  (Con esto podemos ver la utilidad del teorema anterior).

El siguiente teorema muestra una importante relación de recurrencia satisfecha por coeficientes binomiales. Se llama la identidad de Pascal, en honor al destacado matemático y físico francés Blaise Pascal (1623-1662).

**Teorema 1.16.** (*Identidad de Pascal*) Sean  $n$  y  $k$  enteros positivos, donde  $k < n$ . Entonces:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

*Demostración.*

Simplificaremos el lado derecho y demostraremos que es igual al lado izquierdo.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)(n-k-1)!} \\ &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)![k+(n-k)]}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### 1.5.2. Triángulo de Pascal

Los coeficientes binomiales  $\binom{n}{k}$ , donde  $0 \leq k \leq n$  se pueden organizar en la forma de un triángulo, conocido como Triángulos de Pascal, como se muestra en las figuras 4 y 5.

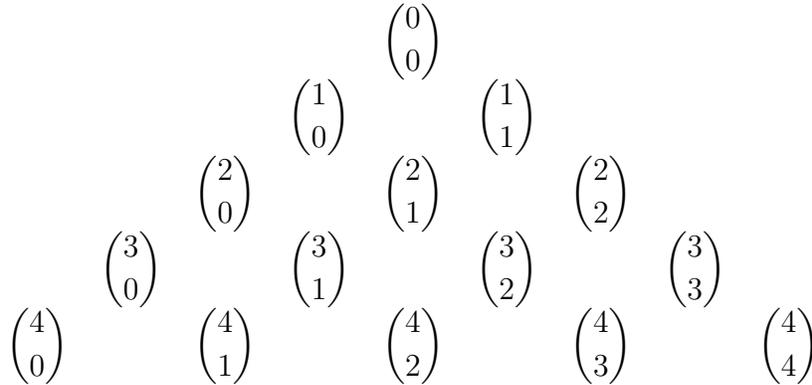


Figura 4: Triángulo de Pascal

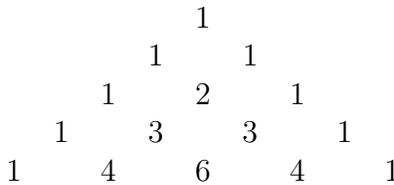


Figura 5: Triángulo de Pascal

#### Propiedades importantes del triángulo de Pascal:

- Cada fila comienza y termina con 1.
- El triángulo de Pascal es simétrico con respecto a una línea vertical que pasa por el medio.
- Cualquier número interior en cada fila es la suma de los números inmediatamente a su izquierda y derecha en la fila anterior. Esto es así en virtud de la identidad de Pascal.
- La suma de los números en cualquier fila es una potencia de 2.

El siguiente teorema muestra cómo se pueden usar los coeficientes binomiales, para encontrar expansión del binomio  $(x + y)^n$ .

**Teorema 1.17.** (Teorema del binomio) Sean  $x$  e  $y$  cualquier número real, y  $n$  cualquier entero no negativo. Entonces:

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r.$$

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática:

- Caso base:

Cuando  $n = 0$ , tenemos:

$$(x + y)^0 = 1 \quad y$$

$$\sum_{r=0}^0 \binom{0}{r} x^{0-r} y^r = x^0 y^0 = 1.$$

Se cumple que ambas expresiones son iguales y por lo tanto, se cumple el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, asumimos que se cumple:

$$(x + y)^k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} x^{k-r} y^r.$$

- Prueba inductiva: veamos que se cumple para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned} (x + y)^{k+1} &= (x + y)^k (x + y) \\ &= \left[ \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} x^{k-r} y^r \right] (x + y) \\ &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} x^{k+1-r} y^r + \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} x^{k-r} y^{r+1} \\ &= \left[ \binom{k}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} x^{k+1-r} y^r \right] + \left[ \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} x^{k-r} y^{r+1} + \binom{k}{k} y^{k+1} \right] \\ &= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} x^{k+1-r} y^r + \sum_{r=1}^k \binom{k}{r-1} x^{k+1-r} y^r + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1} \\ &= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^k \left[ \binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} \right] x^{k+1-r} y^r + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1} \\ &= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^k \binom{k+1}{r} x^{k+1-r} y^r + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1} \quad \text{por Teorema 1.16} \\ &= \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} x^{k+1-r} y^r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, según el principio de inducción matemática, la fórmula es verdadera para todo  $n \geq 0$ . ■

Se deduce del teorema del binomio que los coeficientes binomiales en la expansión de  $(x + y)^n$  son los diversos números en la fila  $n$  del triángulo de Pascal.

**Corolario 1.4.** *Identidades binomiales*

$$(1 + x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \quad y \quad (1 - x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i x^i$$

para  $n \geq 0$ .

*Demostración.*

Para la primera fórmula es una aplicación directa de el Teorema del binomio, tomemos a  $x = 1$  y a  $y = x$ , entonces:

$$\begin{aligned} (1 + x)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^{n-i} x^i && \text{Por Teorema del binomio} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i && \text{ya que } 1^{n-i} = 1. \end{aligned}$$

Para la segunda fórmula utilizamos la primera

$$\begin{aligned} (1 - x)^n &= (1 + (-x))^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-x)^i \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} ((-1)x)^i \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i x^i. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Corolario 1.5.** *La suma de los coeficientes binomiales pares es igual a la del binomio de coeficiente impar, es decir:*

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1}.$$

La suma de los coeficientes binomiales pares es igual a la del binomio de coeficiente impar.

Para la prueba de este corolario usamos el siguiente lema.

**Lema 1.3.** *Suma de los coeficientes binomiales es:*

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

*Demostración.*

Por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso base:

Para  $n = 0$  obtenemos:

$$\sum_{i=0}^0 \binom{n}{i} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0.$$

Si tomamos  $n = 1$  obtenemos:

$$\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2^1.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = 2^k.$$

- Paso inductivo:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} = 2^{k+1}.$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} &= \binom{k+1}{0} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} + \binom{k+1}{k+1} \\ &= \binom{k+1}{0} + \sum_{i=1}^k \left( \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right) + \binom{k+1}{k+1} \quad \text{Por identidad de Pascal} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} + \binom{k+1}{k+1} + \sum_{i=1}^k \left( \binom{k}{i} + \binom{k+1}{0} \right) \quad \text{Traslación de suma de índice} \\ &= \left( \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} + \binom{k+1}{k+1} \right) + \left( \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} + \binom{k+1}{0} \right) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} + \binom{k}{k} \right) + \left( \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} + \binom{k}{0} \right) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \\ &= 2^k + 2^k \\ &= 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

A continuación, probemos primero que la suma de los coeficiente binomiales pares es  $2^{n-1}$ .

*Demostración.*

Extendemos la suma de los coeficientes binomiales

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

$$(1) \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Sustituyendo  $x = -1$  en el corolario 1.4 primera parte, obtenemos

$$(1 + (-1))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i = 0.$$

Si lo extendemos tenemos:

$$(2) \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots \pm \binom{n}{n} = 0.$$

Sumando (1) y (2) tenemos:

$$2 \binom{n}{0} + 2 \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{4} + \dots + 2 \binom{n}{2 \lfloor n/2 \rfloor} = 2^n$$

$$2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} = 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} = 2^{n-1} \quad (3). \quad \blacksquare$$

Ahora, veamos que la suma de los coeficientes binomiales impares es:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1}.$$

*Demostración.*

Restando (2) de (1) tenemos:

$$\begin{aligned}
 2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 2\binom{n}{5} + \dots + 2\binom{n}{2\lfloor n/2 \rfloor + 1} &= 2^n \\
 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1} &= 2^n \\
 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1} &= 2^{n-1} \quad (4). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Por (3) y (4) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} &= 2^{n-1} \\
 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} &= \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1}.
 \end{aligned}$$

### 1.5.3. Números de Fibonacci

Surge la pregunta: ¿cómo se relacionan los número de Fibonacci con el triángulo de Pascal? Observamos la Figura 6 y sumamos los números de las diagonales del noreste. Los números son 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... De hecho, son como el siguiente teorema, descubierto por E. Lucas en 1876[Éduoard Lucas, 1876].

**Teorema 1.18.** (Fórmula de Lucas, 1876). La fórmula para encontrar el  $n$ -ésimo número de Fibonacci por suma de coeficientes binomiales es:

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}, \quad n \geq 0.$$

*Demostración.*

Teniendo en cuenta que  $\lfloor k \rfloor$  es la función menor entero. Por método de inducción fuerte, tenemos:

- Caso base:  
cuando  $n = 0$ ,

$$\sum_{i=0}^0 \binom{0-i}{i} = \binom{0}{0} = 1 = F_1$$

por lo que se cumple para el caso base.

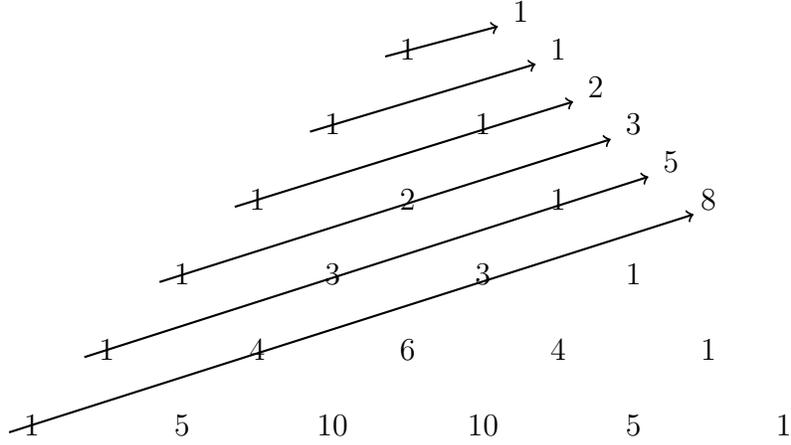


Figura 6: Suma de los números de las diagonales del noreste

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k + 1$  un entero positivo tal que  $n = k + 1$ , supongamos que para  $h$  un entero positivo tal que  $h \leq k + 1$ , se cumple:

$$F_h = \sum_{i=0}^{\lfloor h-1/2 \rfloor} \binom{h-i}{i}.$$

- Paso inductivo: probaremos que se cumple para  $n = k + 2$  :

$$F_{k+2} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \binom{k+1-i}{i}.$$

Separando la prueba para cuando  $k$  es par e impar.

1. Caso par:  $k = 2m$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \binom{k+1-i}{i} &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2m}{2} + \frac{1}{2} \rfloor} \binom{2m+1-i}{i} \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{2m+1-i}{i} \quad \text{ya que } \lfloor m + 1/2 \rfloor = m \\ &= \sum_{i=1}^m \binom{2m+1-i}{i} + \binom{2m+1}{0} \\ &= \sum_{i=1}^m \left[ \binom{2m-i}{i-1} + \binom{2m-i}{i} \right] + (1) \text{ identidad de Pascal} \\ &= \sum_{i=1}^m \binom{2m-i}{i-1} + \sum_{i=1}^m \binom{2m-i}{i} + (1). \end{aligned}$$

Si tomamos el cambio  $j = i - 1$  entonces si  $i = 1 \Rightarrow j = 0$  y si  $i = m \Rightarrow j = m - 1$ , entonces:

$$\sum_{i=1}^m \binom{2m-i}{i-1} + \sum_{i=1}^m \binom{2m-i}{i} + (1) = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-1-j}{j} + \sum_{i=1}^m \binom{2m-i}{i} + (1).$$

como  $k = 2m$  entonces  $\lfloor (k-1)/2 \rfloor = \lfloor (2m)/2 - 1/2 \rfloor = m-1$ , sabemos también que  $\lfloor k/2 \rfloor = \lfloor (2m)/2 \rfloor = \lfloor m \rfloor = m$ , haciendo  $\binom{2m}{0} = 1$ , por lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-1-j}{j} + \left[ \sum_{i=1}^m \binom{2m-i}{i} + \binom{2m}{0} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-1-j}{j} + \sum_{i=0}^m \binom{2m-i}{i} \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1-j}{j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-i}{i} \quad \text{ya que } 2m = k \\ &= F_k + F_{k+1} \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= F_{k+2}. \end{aligned}$$

## 2. Caso impar: $k=2m-1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \binom{k+1-i}{i} &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2m-1+1}{2} \rfloor} \binom{2m-1+1-i}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor 2m/2 \rfloor} \binom{2m-i}{i} \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{2m-i}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \binom{2m-i}{i} + \binom{2m}{0} + \binom{m}{m} \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \binom{2m-i}{i} + (1) + (1) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \left[ \binom{2m-1-i}{i-1} + \binom{2m-1-i}{i} \right] + 1 + 1. \quad \text{identidad de Pascal} \end{aligned}$$

Sea  $j = i - 1$  entonces, si  $i = 1 \Rightarrow j = 0$  también si  $i = m - 1 \Rightarrow j = m - 2$ , entonces:

$$= \sum_{j=0}^{m-2} \binom{2m-2-j}{j} + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{2m-1-i}{i} + (1) + (1).$$

como  $k = 2m - 1$  entonces  $\lfloor (k - 1)/2 \rfloor = \lfloor (2m - 2)/2 \rfloor = m - 1$ , sabemos también que

$$\lfloor k/2 \rfloor = \lfloor (2m - 1)/2 \rfloor = \lfloor m - 1/2 \rfloor = m - 1,$$

haciendo

$$\binom{2m - 1}{0} = 1 = \binom{m - 1}{m - 1},$$

por lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{m-2} \binom{2m - 2 - j}{j} + \binom{m - 1}{m - 1} + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{2m - 1 - i}{i} + \binom{2m - 1}{0} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m - 2 - j}{j} + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m - 1 - i}{i} \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k - 1 - j}{j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k - i}{i} \\ &= F_k + F_{k+1} \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= F_{k+2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

**Ejemplo 1.2.**

$$F_6 = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{6-1}{2} \rfloor} \binom{6 - 1 - i}{i} = \sum_{i=0}^2 \binom{5 - i}{i} = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$F_7 = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{7-1}{2} \rfloor} \binom{7 - 1 - i}{i} = \sum_{i=0}^3 \binom{6 - i}{i} = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 5 + 6 + 1 = 13.$$

Podemos usar las fórmulas de Binet y Lucas, y el Teorema del binomio en conjunto para derivar una serie de identidades de Fibonacci y Lucas.

**Teorema 1.19.** (Lucas) *La suma de las  $n$  multiplicaciones del  $n$ -ésimo coeficiente binomial con el  $n$ -ésimo número de Fibonacci es:*

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i = F_{2n}, \quad n \geq 0. \tag{16}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left( \frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \right) \quad \text{por Teorema 1.10} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \beta^i \right] \\
&= \frac{(1 + \alpha)^n - (1 + \beta)^n}{\alpha - \beta} \quad \text{por el Corolario 1.4} \\
&= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta}; \quad \text{ya que } \alpha^2 = \alpha + 1, y \beta^2 = \beta + 1 \\
&= F_{2n}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Teorema 1.20.** *Identidad de Binet*

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_i = (-1)^{n-1} F_n, \quad n \geq 1.$$

*Demostración.* Por la fórmula de Binet

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_i &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \left( \frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \right) \quad \text{por Teorema 1.10} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\alpha)^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\beta)^i \right] \\
&= \frac{(\alpha - 1)^n - (\beta - 1)^n}{\alpha - \beta}, \quad \text{por Corolario 1.4} \\
&= \frac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ya que } \alpha + \beta = 1 \\
&= (-1)^n \frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha - \beta} \\
&= (-1)^{n-1} \frac{(-1)(\beta^n - \alpha^n)}{\alpha - \beta} \\
&= (-1)^{n-1} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\
&= (-1)^{n-1} F_n. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

## 1.6. Triángulo de Hosoya

En 1976, H. Hosoya de la Universidad de Ochanomizu en Tokio [*Haruo Hosoya, 1976*] introdujo un arreglo triangular, el cual está muy relacionado con los números de Fibonacci. Nosotros lo conocemos como el triángulo de Hosoya. Además de que el arreglo es simétrico sobre la línea vertical a través del medio, las dos diagonales superiores al noreste y sureste consisten en números de Fibonacci.

Cada número interior se puede obtener añadiendo los dos números anteriores en su diagonal; por ejemplo,  $16 = 8 + 8 = 10 + 6$ .

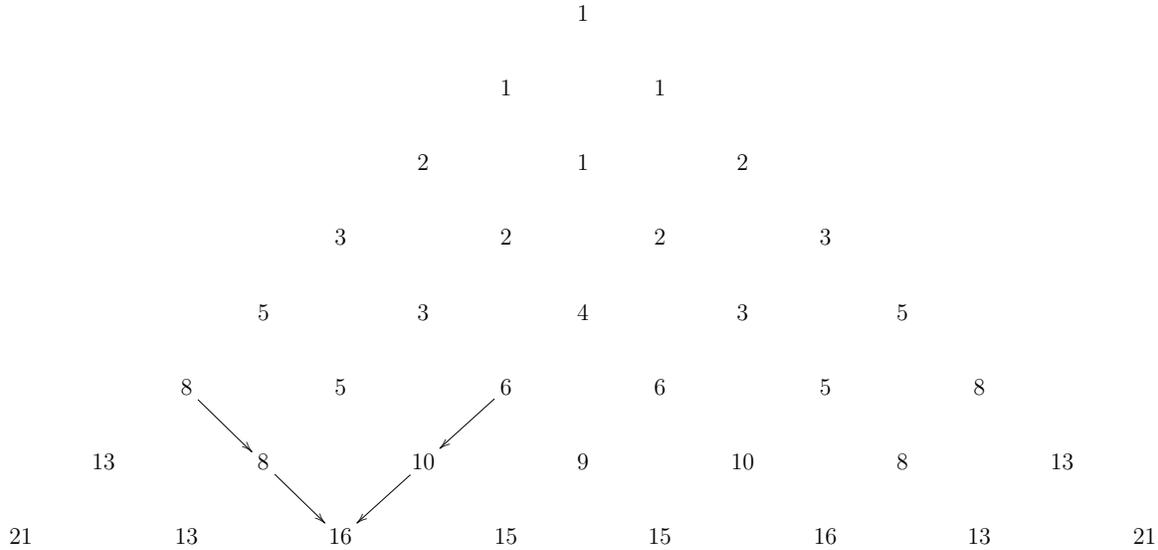


Figura 7: Triángulo de Hosoya

### 1.6.1. Definición recursiva

**Definición 1.4.** La sucesión de Hosoya  $\{H(r, k)\}_{r, k \geq 1}$  es definida recursivamente por

$$H(1, 1) = H(2, 1) = H(2, 2) = H(3, 2) = 1,$$

por otro lado,

$$H(r, k) = H(r - 1, k) + H(r - 2, k) \tag{17}$$

$$H(r, k) = H(r - 1, k - 1) + H(r - 2, k - 2) \tag{18}$$

para  $r > 2$  y  $1 \leq k \leq r$ , donde  $r$  representa el número de fila en el triángulo de Hosoya y  $k$  representa la posición de izquierda a derecha de la  $r$ -ésima fila.

**Definición 1.5.** Si  $P$  es un punto en el triángulo de Hosoya, entonces existen dos únicos enteros positivos  $r$  y  $k$  tal que  $r \geq k$  con  $P = H(r, k)$ . Llamamos al par  $(r, k)$  las coordenadas rectangulares de el punto  $P$ .

En la Figura 8 podemos observar el triángulo de Hosoya en su representación  $H(r, k)$ .

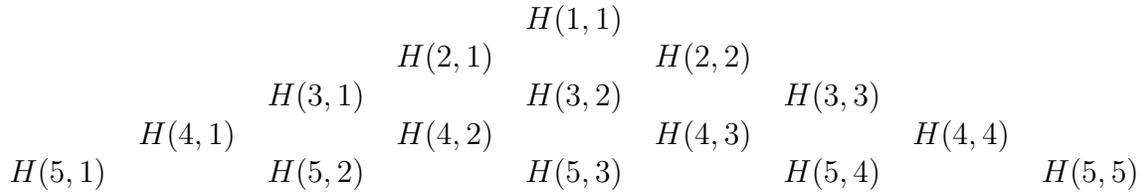


Figura 8: Triángulo de Hosoya

Observemos que  $H(r, 1) = H(r - 1, 1) + H(r - 2, 1)$  donde  $H(1, 1) = 1 = F_1$  y  $H(2, 1) = 1 = F_2$ , de aquí se sigue que  $H(r, 1) = F_r$  tal como se demuestra en el siguiente resultado.

**Proposición 1.1.** *Los elementos en la posición 1 de la  $r$ -ésima fila del triángulo de Hosoya son números de Fibonacci, es decir:*

$$H(r, 1) = F_r$$

para  $r > 0$ .

*Demostración.*

Por inducción fuerte sobre  $r$ :

- Caso Base:

Cuando  $r = 1$ , tenemos:

$$H(1, 1) = 1 = F_1.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo tal que  $r = k$ , supongamos que para  $i$  un entero positivo tal que  $i \leq k$ , se cumple:

$$H(i, 1) = F_i.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $r = k + 1$  :

$$\begin{aligned} H(k + 1, 1) &= H(k, 1) + H(k - 1, 1) \\ &= F_k + F_{k-1} \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= F_{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $r$ . ■

De la misma manera  $H(r, r) = H(r - 1, r) + H(r - 2, r)$ , de aquí que  $H(r, r) = F_r$  como se demuestra a continuación.

**Proposición 1.2.** *Los elementos en la posición  $r$  de la fila  $r$ -ésima del triángulo de Hosoya son números de Fibonacci, es decir:*

$$H(r, r) = F_r$$

para  $r > 0$ .

*Demostración.*

Por inducción fuerte sobre  $r$ :

- Caso Base:

Cuando  $r = 1$ , tenemos:

$$H(1, 1) = 1 = F_1.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo tal que  $r = k$ , supongamos que para  $i$  un entero positivo tal que  $i \leq k$ , se cumple:

$$H(i, i) = F_i.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $r = k + 1$  :

$$\begin{aligned} H(k + 1, k + 1) &= H(k, k) + H(k - 1, k - 1) \\ &= F_k + F_{k-1} \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= F_{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $r$ . ■

Similarmente, podemos mostrar que  $H(r, 2) = H(r, r - 1) = F_{r-1}$ .

**Proposición 1.3.** *Los elementos en las posiciones 2 y  $r - 1$  de la  $r$ -ésima fila del triángulo de Hosoya coinciden y son números de Fibonacci, es decir:*

$$H(r, 2) = H(r, r - 1) = F_{r-1}$$

para  $r \geq 2$ .

*Demostración.*

Por inducción fuerte sobre  $r$ :

- Caso base:

Cuando  $r = 2$ , tenemos:

$$H(2, 2) = 1 = H(2, 1) = F_1.$$

Claramente, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo tal que  $r = k$ , supongamos que para  $i$  un entero positivo tal que  $i \leq k$ , se cumple:

$$H(i, 2) = H(i, i - 1) = F_{i-1}.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $r = k + 1$  :

$$\begin{aligned} H(k + 1, 2) &= H(k, 2) + H(k - 1, 2) && \text{por (17)} \\ &= F_{k-1} + F_{k-2} && \text{por hipótesis inductiva} \\ &= F_k. \end{aligned}$$

Para la otra igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned} H(k + 1, k) &= H(k, k - 1) + H(k - 1, k - 2) && \text{por (18)} \\ &= F_{k-1} + F_{k-2} && \text{por hipótesis inductiva} \\ &= F_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $r$ . ■

Notemos que aplicando sucesivamente la relación de recurrencia (17) tenemos:

$$\begin{aligned} H(r, k) &= H(r - 1, k) + H(r - 2, k) \\ &= [H(r - 2, k) + H(r - 3, k)] + H(r - 2, k) \\ &= 2H(r - 2, k) + H(r - 3, k) \\ &= 2[H(r - 3, k) + H(r - 4, k)] + H(r - 3, k) \\ &= 3H(r - 3, k) + 2H(r - 4, k) \\ &= F_4H(r - 3, k) + F_3H(r - 4, k). \end{aligned}$$

Continuando de esta manera, conseguimos una relación más cercana entre  $H(r, k)$  y los números de Fibonacci:

$$H(r, k) = F_{n+1}H(r - n, k) + F_nH(r - n - 1, k) \tag{19}$$

donde  $1 \leq n \leq r - k - 1$ . Su demostración la encontramos en el siguiente resultado.

**Teorema 1.21.** *La relación entre el triángulo de Hosoya y los números de Fibonacci esta dada por:*

$$H(r, k) = F_{n+1}H(r - n, k) + F_nH(r - n - 1, k)$$

para  $1 \leq n \leq r - k - 1$ .

*Demostración.*

Sea  $r$  y  $k$  enteros positivos fijos, por principio de inducción matemática sobre  $n$ , tenemos:

- Caso Base:

Para  $n = 1$

$$\begin{aligned} H(r, k) &= F_2 H(r-1, k) + F_1 H(r-2, k) \\ &= H(r-1, k) + H(r-2, k) \quad \text{ya que } F_1 = F_2 = 1. \end{aligned}$$

Entonces por relación de recurrencia (17) claramente, se cumple.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $m$  un entero positivo arbitrario, supongamos que se cumple:

$$H(r, k) = F_{m+1} H(r-m, k) + F_m H(r-m-1, k)$$

para  $1 \leq m \leq r-k-1$ .

- Prueba:

Veamos que se cumple para  $n = m+1$ :

$$\begin{aligned} &F_{m+2} H(r-m-1, k) + F_{m+1} H(r-m-2, k) \\ &= F_{m+2} [H(r-m, k) - H(r-m-2, k)] + F_{m+1} H(r-m-2, k) \quad \text{por (17)} \\ &= F_{m+2} H(r-m, k) - F_{m+2} H(r-m-2, k) + F_{m+1} H(r-m-2, k) \\ &= (F_m + F_{m+1}) H(r-m, k) - F_{m+2} H(r-m-2, k) + F_{m+1} H(r-m-2, k) \\ &= F_m H(r-m, k) + F_{m+1} H(r-m, k) - F_{m+2} H(r-m-2, k) + F_{m+1} H(r-m-2, k) \\ &= F_m H(r-m-1, k) + (F_m + F_{m+1}) H(r-m-2, k) + F_{m+1} H(r-m, k) - F_{m+2} H(r-m-2, k) \\ &= F_m H(r-m-1, k) + F_{m+2} H(r-m-2, k) + F_{m+1} H(r-m, k) - F_{m+2} H(r-m-2, k) \\ &= F_m H(r-m-1, k) + F_{m+1} H(r-m, k) \\ &= H(r, k), \quad \text{por hipótesis inductiva.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos:

**Corolario 1.6.** *Cualquier entrada en el triángulo de Hosoya es producto de dos números de Fibonacci, es decir:*

$$H(r, k) = F_k F_{r-k+1} \tag{20}$$

donde  $1 \leq k \leq r$  y  $r > 2$ .

*Demostración.*

Si tomamos  $n = r-k-1$  en el Teorema (1.21), entonces se cumple:

$$\begin{aligned} H(r, k) &= F_{r-k} H(k+1, k) + F_{r-k-1} H(k, k) \\ &= F_{r-k} F_k + F_{r-k-1} F_k \quad \text{por Proposición (1.2) y (1.3)} \\ &= F_k (F_{r-k} + F_{r-k-1}) \\ &= F_k F_{r-k+1}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 1.3.**

$$H(5, 2) = 3 = 1 \cdot 3 = F_2 F_4 \quad y \quad H(6, 3) = 6 = 2 \cdot 3 = F_3 F_4.$$

En el siguiente resultado mostraremos que  $H(r, k) = H(r, r - k + 1)$ , haciendo uso de la relación de recurrencia (17).

**Teorema 1.22.** *En la fila  $r$ -ésima los elementos en las posiciones  $k$  y  $r - k + 1$  coinciden, es decir:*

$$H(r, k) = H(r, r - k + 1)$$

donde  $1 \leq k \leq r$  y  $r > 2$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} H(r, k) &= H(r - 1, k) + H(r - 2, k) && \text{por (17)} \\ &= F_k F_{r-1-k+1} + F_k F_{r-2-k+1} && \text{por (20)} \\ &= F_k F_{r-k} + F_k F_{r-k-1} \\ &= F_k (F_{r-k} + F_{r-k-1}) \\ &= F_k (F_{r-k+1}) && \text{por relación de recurrencia de Fibonacci} \\ &= F_{r-k+1} F_k \\ &= H(r, r - k + 1). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos:

**Corolario 1.7.** *En el triángulo de Hosoya los números a lo largo de la línea vertical a través del medio son cuadrados de Fibonacci, es decir:*

$$H(2m + 1, m + 1) = F_{m+1}^2$$

para  $m \geq 0$ .

*Demostración.*

Como  $H(r, k) = H(r, r - k + 1)$  se sigue de (20) que:

$$H(r, k) = H(r, r - k + 1) = F_k F_{r-k+1}.$$

Si tomamos  $r = 2m + 1$  y  $k = m + 1$  en el Teorema (1.22). Entonces (20) nos da que:

$$\begin{aligned} H(2m + 1, m + 1) &= F_{m+1} F_{2m+1-m-1+1} \\ &= F_{m+1} F_{m+1} \\ &= F_{m+1}^2. \end{aligned}$$

Así  $H(2m + 1, m + 1)$  es cuadrado de un número de Fibonacci. \blacksquare

**Ejemplo 1.4.** *Para ejemplificar el resultado anterior, tenemos:*

$$H(9, 5) = 25 = F_5^2 \quad y \quad H(11, 6) = 64 = F_6^2.$$

### 1.6.2. Relación entre $H(r, k)$ y $L_r$ .

**Teorema 1.23.** La relación que existe entre  $H(r, k)$  y  $L_r$  esta dada por:

$$H(r, k) = \frac{L_{r+1} - (-1)^k(L_{r-2k+1})}{5}$$

para  $1 \leq k \leq r$  y  $r > 2$ .

*Demostración.*

Primero recordemos que:

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ya que son las raíces de la ecuación cuadrática  $x^2 - x - 1 = 0$ . Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \right)^2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Ahora usando la ecuación (20) y las fórmulas de Binet, podemos calcular  $H(r, k)$  usando los números de Lucas:

$$\begin{aligned} H(r, k) &= F_k F_{r-k+1} \\ &= \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^{r-k+1} - \beta^{r-k+1}}{\alpha - \beta} \quad \text{por fórmula de Binet} \\ &= \frac{(\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{r-k+1} - \beta^{r-k+1})}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{(\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{r-k+1} - \beta^{r-k+1})}{5} \quad \text{ya que } (\alpha - \beta)^2 = 5 \\ &= \frac{\alpha^{r+1} - \alpha^k \beta^{r-k+1} - \beta^k \alpha^{r-k+1} + \beta^{r+1}}{5} \\ &= \frac{\alpha^{r+1} + \beta^{r+1} - \alpha^k \beta^{r-k+1} - \beta^k \alpha^{r-k+1}}{5} \\ &= \frac{L_{r+1} - (\alpha\beta)^k (\beta^{r-2k+1} + \alpha^{r-2k+1})}{5} \\ &= \frac{L_{r+1} - (-1)^k (L_{r-2k+1})}{5} \quad \text{ya que } \alpha\beta = -1 \\ &= \frac{L_{r+1} - (-1)^k (L_{r-2k+1})}{5}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que la relación que existe entre  $H(r, k)$  y  $L_r$  es:

$$H(r, k) = \frac{L_{r+1} - (-1)^k (L_{r-2k+1})}{5}. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 1.5.** Podemos ejemplificar este resultado, tal como se muestra a continuación. Si tomamos  $r = 10$  y  $k = 3$ :

$$\frac{L_{11} - (-1)^3 L_5}{5} = \frac{199 + 11}{5} = 42 = H(10, 3).$$

### 1.6.3. Rombo mágico

Observe que el triángulo de Hosoya fue construido usando cuatro condiciones iniciales, es decir, cuatro unos, y forman un rombo. Ahora es natural preguntarse si los rombos dentro del triángulo de Hosoya cumplen alguna propiedad interesante. Para resolver esta interrogante, veamos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.6.** Consideremos el rombo de la Figura 9, donde las letras desde la A hasta la H representan los números 4, 6, 6, 9, 5, 25, 5 y 1, respectivamente.

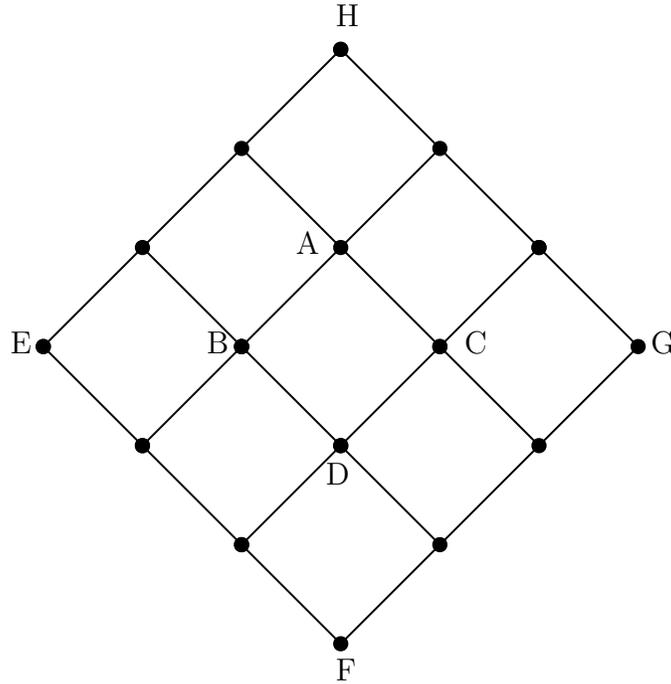


Figura 9: Rombo mágico

Entonces se cumple que:

$$F = A + B + C + D$$

$$H = A + D - B - C$$

$$E = C + D - A - B$$

$$G = B + D - A - C.$$

En el siguiente resultado se muestra que a partir de cualquier rombo con vértices

$$H(r, k), \quad H(r - 1, k - 1), \quad H(r - 2, k - 1) \quad \text{y} \quad H(r - 1, k)$$

se puede generar al rombo más pequeño que lo contiene y que tiene la misma posición.

**Teorema 1.24.** *Consideremos un rombo con vértices  $H(r, k)$ ,  $H(r - 1, k - 1)$ ,  $H(r - 2, k - 1)$  y  $H(r - 1, k)$ , los vértices del rombo más pequeño que lo contiene y que tiene la misma posición se generan de la siguiente manera:*

$$H(r - 1, k - 2) = H(r - 1, k) + H(r, k) - H(r - 2, k - 1) - H(r - 1, k - 1), \quad (21)$$

$$H(r + 2, k + 1) = H(r - 2, k - 1) + H(r - 1, k - 1) + H(r - 1, k) + H(r, k), \quad (22)$$

$$H(r - 1, k + 1) = H(r - 1, k - 1) + H(r, k) - H(r - 2, k - 1) - H(r - 1, k), \quad (23)$$

$$H(r - 4, k - 2) = H(r - 2, k - 1) + H(r, k) - H(r - 1, k - 1) - H(r - 1, k). \quad (24)$$

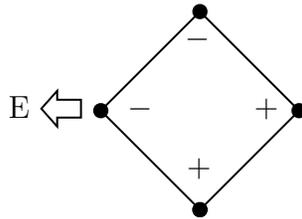
*Demostración.*

A lo largo de esta demostración haremos uso de la relación de recurrencia de Fibonacci y la identidad (20).

Para la fórmula (21), consideremos:

$$\begin{aligned} & H(r - 1, k) + H(r, k) - H(r - 2, k - 1) - H(r - 1, k - 1) \\ &= F_k F_{r-k} + F_k F_{r-k+1} - F_{k-1} F_{r-k+1} - F_{k-1} F_{r-k} \quad \text{por (20)} \\ &= F_{r-k+1}(F_k - F_{k-1}) + F_{r-k}(F_k - F_{k-1}) \\ &= (F_k - F_{k-1})(F_{r-k+1} + F_{r-k}) \\ &= F_{k+2} F_{r-k+2} \quad \text{por relación de recurrencia de Fibonacci} \\ &= H(r - 1, k - 2). \end{aligned}$$

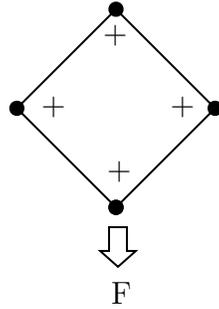
Su representación gráfica es:



Para la fórmula (22), consideremos:

$$\begin{aligned} & H(r - 2, k - 1) + H(r - 1, k - 1) + H(r - 1, k) + H(r, k) \\ &= F_{k-1} F_{r-k} + F_{k-1} F_{r-k+1} + F_k F_{r-k} + F_k F_{r-k+1} \quad \text{por (20)} \\ &= F_{r-k+1}(F_{k-1} + F_k) + F_{r-k}(F_{k-1} + F_k) \\ &= (F_{k-1} + F_k)(F_{r-k+1} + F_{r-k}) \\ &= F_{k+1} F_{r-k+2} \quad \text{por relación de recurrencia de Fibonacci} \\ &= H(r + 2, k + 1). \end{aligned}$$

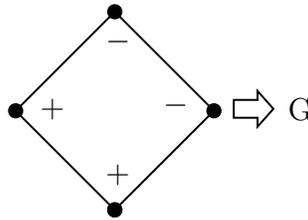
Su representación gráfica es:



Para la fórmula (23), consideremos:

$$\begin{aligned}
 & H(r-1, k-1) + H(r, k) - H(r-2, k-1) - H(r-1, k) \\
 &= F_{k-1}F_{r-k+1} + F_kF_{r-k+1} - F_{k-1}F_{r-k} - F_kF_{r-k} \quad \text{por (20)} \\
 &= F_{r-k+1}(F_{k-1} + F_k) - F_{r-k}(F_{k-1} + F_k) \\
 &= (F_{k-1} + F_k)(F_{r-k+1} - F_{r-k}) \\
 &= F_{k+1}F_{r-k-1} \quad \text{por relación de recurrencia de Fibonacci} \\
 &= H(r-1, k+1).
 \end{aligned}$$

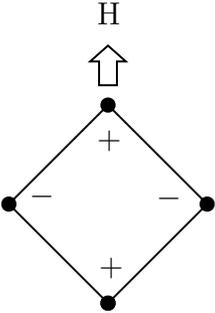
Su representación gráfica es:



Para la fórmula (24), consideremos:

$$\begin{aligned}
 & H(r-2, k-1) + H(r, k) - H(r-1, k-1) - H(r-1, k) \\
 &= F_{k-1}F_{r-k} + F_kF_{r-k+1} - F_{k-1}F_{r-k+1} - F_kF_{r-k} \quad \text{por (20)} \\
 &= -F_{k-1}(F_{r-k+1} - F_{r-k}) + F_k(F_{r-k+1} - F_{r-k}) \\
 &= (F_{r-k+1} - F_{r-k})(F_k - F_{k-1}) \\
 &= F_{r-k-1}F_{k-2} \quad \text{por relación de recurrencia de Fibonacci} \\
 &= H(r-4, k-2).
 \end{aligned}$$

Su representación gráfica es:



# Capítulo 2

## 2. Propiedades del MCD en el triángulo de Hosoya

La estrella de David es una configuración de seis puntos que forman dos triángulos en el triángulo de Pascal. Esta configuración posee ciertas propiedades del *MCD* que pueden ser generalizadas al triángulo de Hosoya, como por ejemplo: se cumple que el producto de todos los puntos en una estrella de David de longitud dos en el triángulo de Pascal forma un cuadrado perfecto, y el *MCD* de cada triángulo de la estrella de David de longitud dos en el triángulo de Pascal da el mismo número. Estas dos propiedades se denominan propiedades de producto y del *MCD*, respectivamente.

Iniciaremos probando una serie de propiedades del *MCD* que serán de gran utilidad en el transcurso de este capítulo, también se introducirá *El triángulo generalizado de Hosoya*, el cual es un arreglo triangular donde cada entrada se puede ver como producto de dos números generalizados de Fibonacci.

También probaremos que se cumple la propiedad del *MCD* y la propiedad del producto en la estrella de David, además probaremos que ambas son ciertas para cualquier estrella de David de longitud dos en el triángulo de Hosoya.

Finalizaremos dando condiciones necesarias y suficientes para que la estrella de David de longitud tres en el triángulo generalizado de Hosoya, satisfaga la propiedad del *MCD*, para esto introduciremos nuevas propiedades de modularidad de los números generalizados de Fibonacci.

### 2.1. Sistema de coordenadas del triángulo de Hosoya

Esta sección introduce un nuevo concepto dentro del triángulo que hace referencia a como podemos navegar dentro del triángulo, proporciona coordenadas tal que podemos conocer el número sólo por su posición.

Primero recordemos que la sucesión de Hosoya  $\{H(r, k)\}_{r, k \geq 1}$  es definida recursivamente por:

$$\begin{aligned}H(1, 1) &= H(2, 1) = H(2, 2) = H(3, 2) = 1 \\H(r, k) &= H(r - 1, k) + H(r - 2, k) \\H(r, k) &= H(r - 1, k - 1) + H(r - 2, k - 2).\end{aligned}$$

Para  $r > 2$  y  $1 \geq k \geq r$ .

Podemos distinguir entre diagonal (slash diagonals) y diagonal invertida (backslash diagonals). Escribimos  $S(F_r)$  y  $B(F_s)$  para referirnos a la diagonal y la diagonal invertida respectivamente como se observa en la Figura 10.

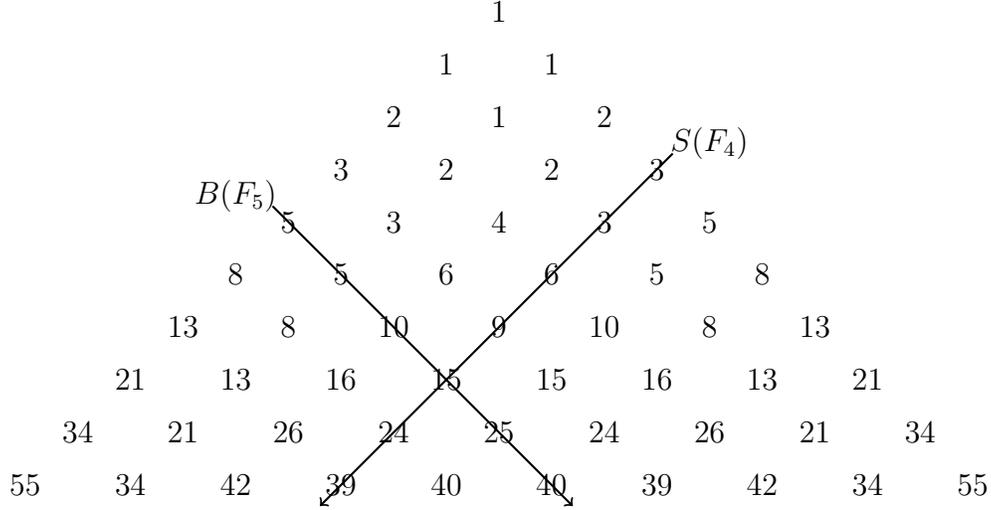


Figura 10: Diagonal  $S(F_4)$  y diagonal invertida  $B(F_5)$

Ahora definamos lo anterior formalmente.

**Definición 2.1.** Sean  $r$  y  $s$  enteros positivos.

1. Llamaremos *diagonal* a la sucesión de coordenadas del triángulo que se encuentran en la diagonal  $r$ , y se escribe como:

$$S(F_r) = \{H(r + i - 1, r)\}_{i=1}^{\infty}.$$

2. Llamaremos *diagonal invertida* a la sucesión de coordenadas del triángulo que se encuentran en la diagonal invertida  $s$ , y se escribe como:

$$B(F_s) = \{H(s + i - 1, i)\}_{i=1}^{\infty}.$$

En consecuencia de esta definición y del Corolario 1.6 obtenemos el siguiente lema.

**Lema 2.1.** La diagonal y la diagonal invertida pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$S(F_r) = \{F_r F_i | i \in \mathbb{N}\} \quad B(F_s) = \{F_i F_s | i \in \mathbb{N}\}.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} S(F_r) &= \{H(r + i - 1, r)\}_{i=1}^{\infty} \quad \text{por definición 2.1} \\ &= \{F_r F_{r+i-1-r+1} | i \in \mathbb{N}\} \quad \text{por corolario 1.6} \\ &= \{F_r F_i | i \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} B(F_s) &= \{H(s + i - 1, i)\}_{i=1}^{\infty} \quad \text{por definición 2.1} \\ &= \{F_i F_{s+i-1-i+1} | i \in \mathbb{N}\} \quad \text{por corolario 1.6} \\ &= \{F_i F_s | i \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

■



Sea  $a$  y  $b$  dos enteros positivos, con  $a \geq b$ . Si  $a = b$ , entonces  $\mathbf{mcd}(a, b) = a$ , asumimos  $a > b$ . (si no es cierto, simplemente los intercambiamos). Sea  $r_0 = b$ . Si aplicamos sucesivamente el algoritmo de la división, obtenemos la siguiente sucesión de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= q_0 r_0 + r_1 & 0 \leq r_1 < r_0 \\ r_0 &= q_1 r_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Continuando así, tenemos la siguiente sucesión de residuos:

$$b = r_0 > r_1 > r_2 > r_3 > \dots \geq 0$$

ya que los residuos son no negativos, y se van haciendo mas pequeños, esta sucesión eventualmente terminara con  $r_n = 0$ . Así, las dos ultimas ecuaciones en el procedimiento anterior serían:

$$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n \quad 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

y

$$r_{n-1} = q_n r_n.$$

#### **Definición 2.4. Máximo común divisor.**

Un número entero positivo  $d$  se llama máximo común divisor ( $\mathbf{mcd}(a, b)$ ) de los números enteros  $a$  y  $b$  cuando:

1.  $d$  es el divisor común de  $a$  y  $b$ .
2.  $d$  es divisible por cualquier otro divisor común de  $a$  y  $b$ .

El siguiente teorema muestra que el  $\mathbf{mcd}(a, b) = \mathbf{mcd}(a, r_0) = \mathbf{mcd}(r_0, r_1) = \mathbf{mcd}(r_1, r_2) = \dots = \mathbf{mcd}(r_{n-1}, r_n)$ , el último residuo distinto de cero.

**Teorema 2.2.** Sean  $a$  y  $b$  dos enteros positivos, y  $r$  el residuo, cuando  $a$  se divide por  $b$ . Entonces  $\mathbf{mcd}(a, b) = \mathbf{mcd}(b, r)$ .

*Demostración.*

Sea  $d = \mathbf{mcd}(a, b)$  y  $d' = \mathbf{mcd}(b, r)$ . Para probar que  $d = d'$  es suficiente probar que  $d|d'$  y  $d'|d$ . Por el algoritmo de la división, sabemos que existe un único cociente  $q$  tal que:

$$a = bq + r. \tag{25}$$

Para probar que  $d|d'$ : Ya que  $d = \mathbf{mcd}(a, b)$  tenemos que  $d|a$  y  $d|b$ , entonces  $d|bq$  por lo cual podemos asegurar que  $d|(a - bq) \Rightarrow d|r$  por (25). Luego,  $d|b$  y  $d|r$ , entonces  $d|\mathbf{mcd}(b, r)$ ; esto es  $d|d'$ .

Similarmente se muestra que  $d'|d$ . Por lo que podemos concluir que  $d = d'$ .

$$\therefore \mathbf{mcd}(a, b) = \mathbf{mcd}(b, r). \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.3.** Sean  $m, n$  enteros positivos, entonces se cumple lo siguiente:

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

*Demostración.*

Por inducción fuerte tenemos:

- Caso base:

Cuando  $n = 1$ , tenemos:

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= F_{m-1} + F_m \\ &= F_{m-1} \times 1 + F_m \times 1 \\ &= F_{m-1}F_1 + F_mF_2 \\ &= F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}. \end{aligned}$$

Si  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} F_{m+2} &= F_{m+1} + F_m \\ &= F_{m-1} + F_m + F_m \\ &= F_{m-1} \times 1 + F_m \times 2 \\ &= F_{m-1}F_2 + F_mF_3 \\ &= F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo tal que  $n = k$ , supongamos que para  $i$  un entero positivo tal que  $1 \leq i \leq k$ , se cumple:

$$F_{m+i} = F_{m-1}F_i + F_mF_{i+1}.$$

- Paso inductivo: probar que se cumple para  $n = k + 1$

$$\begin{aligned} F_{m+k+1} &= F_{m+k} + F_{m+k-1} \\ &= F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1} + F_{m-1}F_{k-1} + F_mF_k \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_{k+1} + F_k) \quad \text{por definición recursiva} \\ &= F_{m-1}F_{k+1} + F_mF_{k+2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $n$ . ■

**Lema 2.2.** Sean  $m, n$  enteros positivos, entonces se cumple lo siguiente:

$$F_m | F_{mn}.$$

*Demostración.* Por inducción fuerte;

- Caso base: Cuando  $n = 1$  y es claro que  $F_m | F_{m(1)}$  se cumple.
- Hipótesis inductiva: asumamos que es cierto para todos los enteros desde 1 hasta  $k$ , donde  $k \geq 1$ :  $F_m | F_{mi}$  para cada  $i$ , donde  $1 \leq i \leq k$ .
- Paso inductivo:  
Probar que  $F_m | F_{m(k+1)}$ .  
Por teorema 2.3 tenemos:

$$F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}.$$

Por hipótesis inductiva tenemos que  $F_m | F_{mk-1}$  y  $F_m | F_{mk}$  y entonces  $F_m | F_{m(k+1)}$ . ■

**Lema 2.3.** Sean  $q, n$  enteros positivos, entonces  $F_{qn-1}$  y  $F_n$  son coprimos, es decir:

$$\mathbf{mcd}(F_{qn-1}, F_n) = 1.$$

*Demostración.*

Sea  $d = \mathbf{mcd}(F_{qn-1}, F_n)$ . Entonces  $d | F_{qn-1}$  y  $d | F_n$  y ya que  $F_n | F_{qn}$  por lema 2.2. Entonces  $d | F_{qn-1}$  y  $d | F_{qn}$ , pero  $\mathbf{mcd}(F_{qn-1}, F_{qn}) = 1$  por corolario 1.2 esto implica que  $d = 1$  y por lo tanto, el  $\mathbf{mcd}(F_{qn-1}, F_n) = 1$ . ■

**Lema 2.4.** Sean  $a, b$  y  $c$  enteros positivos y si  $\mathbf{mcd}(a, b) = 1$  entonces  $\mathbf{mcd}(ac, b) = \mathbf{mcd}(c, b)$ .

*Demostración.*

Sea  $d = \mathbf{mcd}(c, b)$  y  $d' = \mathbf{mcd}(ac, b)$ .

Sabemos que podemos expresar el  $\mathbf{mcd}$  como una combinación lineal y por tanto tenemos:

$$d = cx_1 + by_1 \quad d' = acx_2 + by_2 \quad ax + by = 1.$$

Probemos que  $d' | d$  multipliquemos a  $ax + by = 1$  por  $d$  obtenemos:

$$\begin{aligned} d(ax + by = 1) &\Rightarrow axd + bdy = d \\ &\Rightarrow ax(cx_1 + by_1) + bdy = d \quad \text{sustituyendo } d \\ &\Rightarrow ac(xx_1) + b(axy_1 + dy) = d. \end{aligned}$$

Ya que  $d'$  divide cualquier combinación lineal de  $ac$  y  $b$ , entonces  $d' | d$ . De manera similar probamos que  $d | d'$ , multiplicando a  $ax + by = 1$  por  $d'$  obtenemos:

$$\begin{aligned} d'(ax + by = 1) &\Rightarrow axd + bdy = d' \\ &\Rightarrow ax(acx_2 + by_2) + bd'y = d' \quad \text{sustituyendo } d \\ &\Rightarrow c(a^2xx_2) + b(axy_2 + d'y) = d'. \end{aligned}$$

Ya que  $d$  divide cualquier combinación lineal de  $c$  y  $b$ , entonces  $d | d'$ . Por tanto  $d = d'$ . ■

**Lema 2.5.** Sea  $m = qn + r$ , entonces  $\mathbf{mcd}(F_m, F_n) = \mathbf{mcd}(F_n, F_r)$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_m, F_n) &= \mathbf{mcd}(F_{qn+r}, F_n) \quad \text{por Teorema 2.3} \\ &= \mathbf{mcd}(F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n).\end{aligned}$$

Ahora, sabemos que  $F_n | F_{nq}$  por Lema 2.2, y ya que  $F_n | F_{nq}$ , entonces  $F_{nq}$  se puede expresar como una combinación lineal de  $F_n$ , entonces nos queda  $\mathbf{mcd}(F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n) = \mathbf{mcd}(F_{qn-1}F_r + (F_n x + r)F_{r+1}, F_n)$ , donde  $x$  es un entero positivo y  $r$  el residuo y por propiedades del  $\mathbf{mcd}$  sabemos que el  $\mathbf{mcd}(a, b)$  es igual al  $\mathbf{mcd}$  de  $a$  mas cualquier combinación de  $b$  con  $b$ , aplicando esto obtenemos que  $\mathbf{mcd}(F_{qn-1}F_r + (F_n x + r)F_{r+1}, F_n) = \mathbf{mcd}(F_{qn-1}F_r, F_n)$  y luego:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n) &= \mathbf{mcd}(F_{qn-1}F_r, F_n) \quad \text{por Lema 2.3 y Lema 2.4} \\ &= \mathbf{mcd}(F_n, F_r).\end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.4.** Sean  $m, n$  enteros positivos entonces  $\mathbf{mcd}(F_m, F_n) = F_{\mathbf{mcd}(m, n)}$ .

*Demostración.*

Sin perdida de generalidad tomamos  $m \geq n$  y por el algoritmo de Euclides tomamos a  $m$  como el dividendo y a  $n$  como el divisor, obtenemos:

$$\begin{aligned}m &= q_0 n + r_1 & 0 \leq r_1 < n \\ n &= q_1 r_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= q_n r_n + 0.\end{aligned}$$

Por Lema 2.5 obtenemos:  $\mathbf{mcd}(F_m, F_n) = \mathbf{mcd}(F_n, F_{r_1}) = \mathbf{mcd}(F_{r_1}, F_{r_2}) = \dots = \mathbf{mcd}(F_{r_{n-1}}, F_{r_n})$ . Pero  $r_n | r_{n-1}$  entonces  $F_{r_n} | F_{r_{n-1}}$  por lema 2.2. Entonces,  $\mathbf{mcd}(F_{r_{n-1}}, F_{r_n}) = F_{r_n}$  y por tanto,  $\mathbf{mcd}(F_m, F_n) = F_{r_n}$ , pero el algoritmo de Euclides dice que  $\mathbf{mcd}(m, n) = r_n$  y sustituyendo esto obtenemos  $\mathbf{mcd}(F_m, F_n) = F_{r_n} = F_{\mathbf{mcd}(m, n)}$ .  $\blacksquare$

**Definición 2.5.** La estrella de David es una configuración de 6 puntos en el triángulo de Hosoya formada por dos triángulos con vértices  $a_1, a_2, a_3$  y  $b_1, b_2, b_3$  como se observa en la Figura 12.

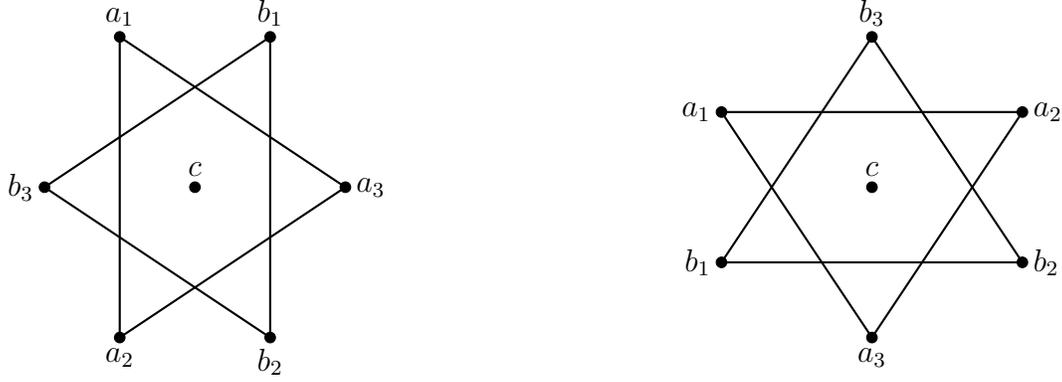


Figura 12: Estrella de David (a) y (b)

Donde sus coordenadas en el triángulo de Hosoya son:

Para la figura 12 (a) tenemos:

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = H(r, k) & a_2 = H(r + 2, k + 1) & a_3 = H(r + 1, k + 2) \\
 b_1 = H(r, k + 1) & b_2 = H(r + 2, k + 2) & b_3 = H(r + 1, k).
 \end{array}$$

Por lo anterior podemos deducir que

$$c = F_{r-k+1}F_{k+1}.$$

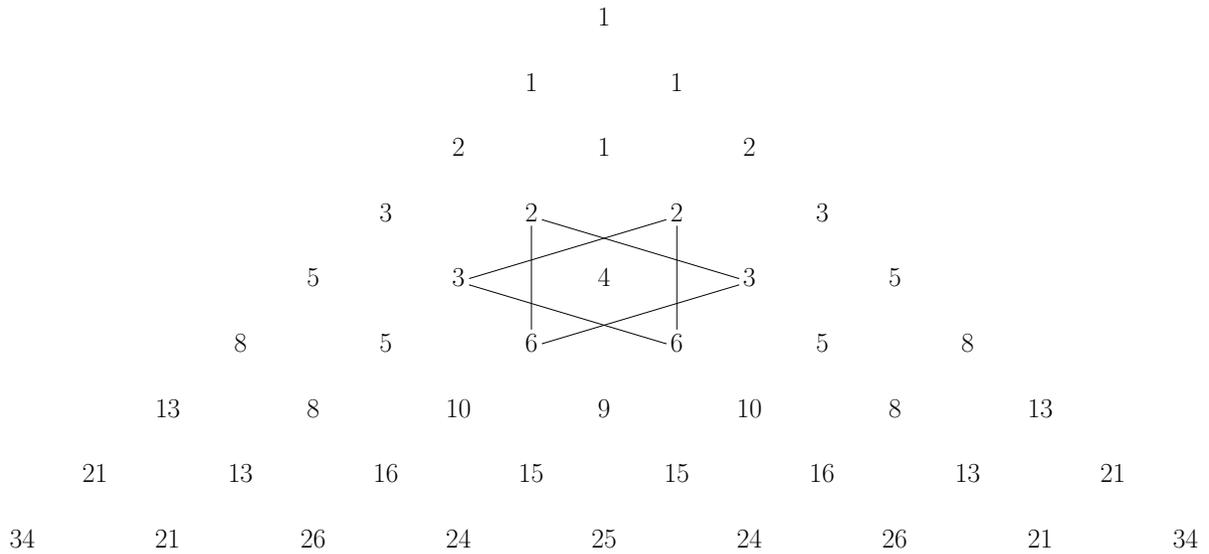
Para la figura 12 (b) tenemos:

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = H(r, k) & a_2 = H(r, k + 1) & a_3 = H(r + 3, k + 2) \\
 b_1 = H(r + 2, k + 1) & b_2 = H(r + 2, k + 2) & b_3 = H(r - 1, k).
 \end{array}$$

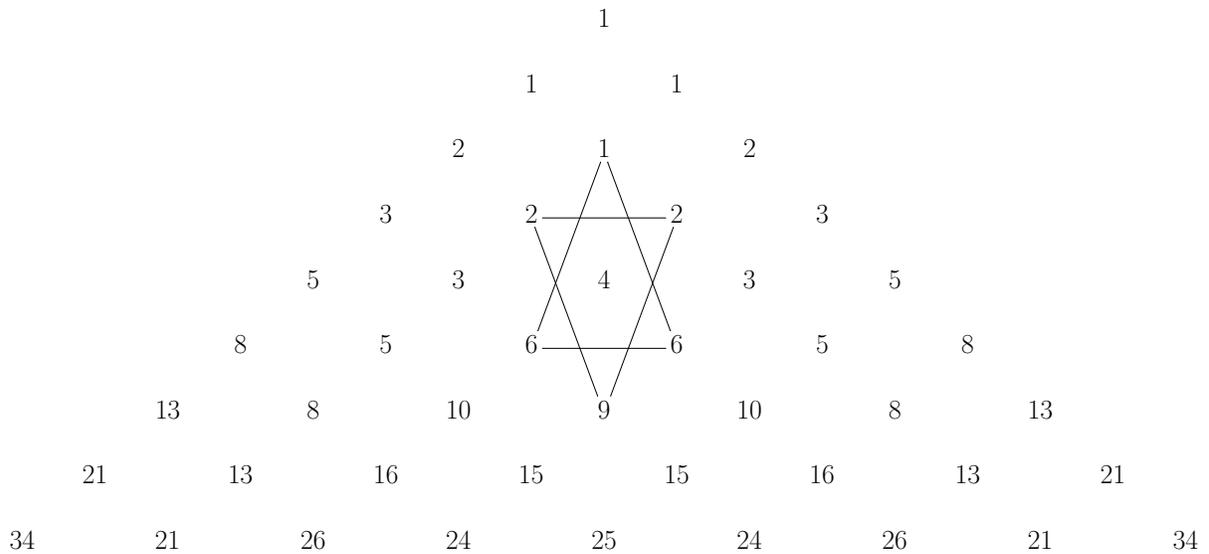
Por lo anterior podemos deducir que

$$c = F_{r-k+1}F_{k+1}.$$

**Ejemplo 2.2.** Si tomamos  $a_1 = H(4, 2)$  en la figura 12(a) se obtiene los siguientes puntos  $a_2 = H(6, 3)$ ,  $a_3 = H(5, 4)$  y  $b_1 = H(4, 3)$ ,  $b_2 = H(6, 4)$ ,  $b_3 = H(5, 2)$ .



**Ejemplo 2.3.** Si tomamos  $a_1 = H(4, 2)$  en la figura 12(b) se obtiene los siguientes puntos  $a_2 = H(4, 3)$ ,  $a_3 = H(7, 4)$  y  $b_1 = H(6, 3)$ ,  $b_2 = H(6, 4)$ ,  $b_3 = H(3, 2)$ .



**Lema 2.6.** *Propiedad de multiplicación del mcd.*

Si  $a$  y  $b$  son co-primos entonces  $\mathbf{mcd}(ab, c) = \mathbf{mcd}(a, c) \mathbf{mcd}(b, c)$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 \mathbf{mcd}(a, c) \mathbf{mcd}(b, c) &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(a, c)b, \mathbf{mcd}(a, c)c) \quad \text{ley distributiva} \\
 &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(ab, bc), \mathbf{mcd}(ac, cc)) \quad \text{ley distributiva} \\
 &= \mathbf{mcd}(ab, bc, ac, cc) \quad \text{ley asociativa} \\
 &= \mathbf{mcd}(ab, \mathbf{mcd}(a, b, c)c) \quad \text{ley asociativa y distributiva} \\
 &= \mathbf{mcd}(ab, \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(a, b), c)c) \quad \text{ya que } \mathbf{mcd}(a, b) = 1 \\
 &= \mathbf{mcd}(ab, c). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Proposición 2.1.** Sean  $a, b, c$  y  $d$  enteros positivos.

1. Si  $\mathbf{mcd}(a, b) = 1$  y  $\mathbf{mcd}(c, d) = 1$  entonces

$$\mathbf{mcd}(ab, cd) = \mathbf{mcd}(a, c) \mathbf{mcd}(a, d) \mathbf{mcd}(b, c) \mathbf{mcd}(b, d).$$

2. Si  $\mathbf{mcd}(a, c) = \mathbf{mcd}(b, d) = 1$  entonces

$$\mathbf{mcd}(ab, cd) = \mathbf{mcd}(a, d) \mathbf{mcd}(b, c).$$

*Demostración.*

Prueba de (1).

Tenemos  $\mathbf{mcd}(ab, cd)$ , y ya que  $\mathbf{mcd}(a, b) = 1$  y por Corolario 2.6 tenemos que  $\mathbf{mcd}(ab, cd) = \mathbf{mcd}(a, cd) \mathbf{mcd}(b, cd)$ .

Ahora ya que  $\mathbf{mcd}(c, d) = 1$  y aplicando el Corolario 2.6 obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{mcd}(a, cd) &= \mathbf{mcd}(cd, a) = \mathbf{mcd}(c, a) \mathbf{mcd}(d, a) \\
 \mathbf{mcd}(b, cd) &= \mathbf{mcd}(cd, b) = \mathbf{mcd}(c, b) \mathbf{mcd}(d, b).
 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\mathbf{mcd}(ab, cd) = \mathbf{mcd}(a, c) \mathbf{mcd}(a, d) \mathbf{mcd}(b, c) \mathbf{mcd}(b, d).$$

Prueba de (2).

Sea  $d_1 = \mathbf{mcd}(a, d)$ ,  $d_2 = \mathbf{mcd}(b, c)$  y  $x = \mathbf{mcd}(ab, cd)$ .

De lo anterior obtenemos que  $d_1|a$  y  $d_1|d$ , también que  $d_2|b$  y  $d_2|c$  y sin olvidar que  $x|ab$  y  $x|cd$ .

Ahora, es fácil ver que  $d_1d_2|ab$  y  $d_1d_2|cd$  y por tanto  $x|d_1d_2$ .

Luego si  $x = 1$ , esta claro que  $x|d_1d_2$ . Asumimos que  $x \geq 2$ .

Por el teorema fundamental de aritmética sabemos que  $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$  se descompone en primos. Consideremos una potencia prima de  $p^r$  que divide a  $x$  con  $r \geq 1$ . Entonces,  $p^r|ab$  y  $p^r|cd$  y ya que el  $\mathbf{mcd}(a, c) = \mathbf{mcd}(b, d) = 1$  es fácil ver que cualquier  $p^r|a$  y  $p^r|d$  o  $p^r|b$  y  $p^r|c$ . Entonces  $p^r|d_1$  o  $p^r|d_2$ . Por lo tanto  $p^r|d_1d_2$ .

El argumento anterior prueba que  $p_i^{r_i}|d_1d_2$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ya que  $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$  son primos relativos,  $(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n})|d_1d_2$ . Es decir,  $x|d_1d_2$ . Por tanto  $x = d_1d_2$ .  $\blacksquare$

## 2.3. Propiedades que se generalizan del triángulo de Pascal al triángulo de Hosoya

En el artículo *A proof Gould's Pascal hexagon congeture* de Hillman y Hogatt, probaron que la configuración de puntos que se muestra en la Figura 12(a) también está en el triángulo de Pascal, y cumple que el  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3)$ . Esto es llamado **la propiedad del mcd de la estrella de David**. Sin embargo, esta propiedad no es cierta para la configuración de puntos en la figura 12(b). Como contraejemplo, podríamos escoger

$$\begin{array}{ccc} a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & a_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} & b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} & b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

En esta sección probaremos que el  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 1$ , para la configuración de puntos mostrada en la figura 12 en el triángulo de Hosoya.

**Lema 2.7.** Sean  $m, n$  enteros positivos tal que  $|m - n| = d$  y el  $\mathbf{mcd}(m, n) = k$ , entonces  $k|d$ .

*Demostración.*

Ya que  $|m, n| = d$  entonces SPDG tomamos  $m \geq n$  entonces  $m = n + d$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(m, n) &= \mathbf{mcd}(n + d, n) \\ &= \mathbf{mcd}(d, n) \quad \text{por propiedad lineal del mcd} \end{aligned}$$

ya que  $k = \mathbf{mcd}(m, n)$  entonces  $k = \mathbf{mcd}(d, n)$  y por lo tanto  $k|d$  y  $k|n$ . ■

Esto quiere decir que si  $m$  y  $n$  están a distancia  $d$ , el  $\mathbf{mcd}(m, n)$  será algún divisor de  $d$ .

**Lema 2.8.** Sea  $m, n, s$  y  $t$  enteros positivos. Si  $|m - n| \leq 2$  y  $|s - t| \leq 2$ , entonces

1.  $\mathbf{mcd}(F_m, F_n) = 1$
2.  $\mathbf{mcd}(F_m F_s, F_n F_t) = \mathbf{mcd}(F_m, F_t) \mathbf{mcd}(F_s, F_n) = F_{\mathbf{mcd}(m,t)} F_{\mathbf{mcd}(n,s)}$ .

*Demostración.*

La prueba de la parte 1: ya que el  $\mathbf{mcd}(m, n) \leq 2$  y aplicando el lema 2.7 tenemos que el  $\mathbf{mcd}(m, n) = i$  donde  $i|2$  y por el teorema 2.4 implica que  $\mathbf{mcd}(F_m, F_n) = F_{\mathbf{mcd}(m,n)} = F_i = 1$  ya que  $i \in \{1, 2\}$ .

La prueba de la parte 2: por parte 1 tenemos que  $\mathbf{mcd}(F_t, F_s) = \mathbf{mcd}(F_m, F_n) = 1$ . Esto y la proposición 2.1 parte 2, se sabe que:

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(F_m F_s, F_n F_t) &= \mathbf{mcd}(F_m, F_t) \mathbf{mcd}(F_s, F_n) \\ &= F_{\mathbf{mcd}(m,t)} F_{\mathbf{mcd}(s,n)}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.5.** Si  $a_1, a_2, a_3$  y  $b_1, b_2, b_3$  son los vértices de los dos triángulos de la Estrella de David en el triángulo de Hosoya con  $c$  como su punto interior, entonces

1.  $a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3$
2.  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 1$
3.  $\mathbf{mcd}(a_1, b_2) \mathbf{mcd}(b_1, a_2) = c$ .

*Demostración.*

Esta demostración se hará para las dos configuraciones de puntos de la figura 12.

Primero probemos para la figura 12 (a).

- Queremos  $a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3$ , por definición de la estrella de David y aplicando el corolario 1.6 tenemos:

$$\begin{aligned}
 a_1 a_2 a_3 &= H(r, k) H(r + 2, k + 1) H(r + 1, k + 2) \\
 &= (F_k F_{r-k+1}) (F_{k+1} F_{r-k+2}) (F_{k+2} F_{r-k}) \quad \text{por Corolario 1.6} \\
 &= (F_{k+1} F_{r-k}) (F_{k+2} F_{r-k+1}) (F_k F_{r-k+2}) \quad \text{ley conmutativa} \\
 &= H(r, k + 1) H(r + 2, k + 2) H(r + 1, k) \quad \text{por Corolario 1.6} \\
 &= b_1 b_2 b_3.
 \end{aligned}$$

- Queremos  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 1$ , probemos primero  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = 1$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) &= \mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k+1} F_{r-k+2}, F_{k+2} F_{r-k}) \\
 &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k+1} F_{r-k+2}), F_{k+2} F_{r-k}) \quad \text{por ley asociativa.}
 \end{aligned}$$

Si tomamos a  $m = k$ ,  $s = r - k + 1$ ,  $n = k + 1$  y  $t = r - k + 2$  vemos que se cumplen las condiciones del Lema 2.8 y por la parte 2 tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k+1} F_{r-k+2}) &= \mathbf{mcd}(F_k, F_{r-k+2}) \mathbf{mcd}(F_{r-k+1}, F_{k+1}) \\
 &= F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+2)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k+1)} \quad \text{por Teorema 2.4.}
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k+1} F_{r-k+2}), F_{k+2} F_{r-k}) = \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+2)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k+1)}, F_{k+2} F_{r-k}).$$

Queremos que el  $\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+2)}, F_{k+2}) = \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k+1)}, F_{r-k}) = 1$  para poder aplicar la Proposición 2.1.

Ahora si tomamos el  $\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+2)}, F_{k+2}) = F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+2, k+2)}$ . Notemos que  $|k - (k + 2)| \leq 2$  por Lema 2.7 entonces  $\mathbf{mcd}(k, k + 2) = i$ , donde  $i|2$  y esto implica que el  $\mathbf{mcd}(k, r - k + 2, k + 2) = i$  y por lo tanto

$$F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+2, k+2)} = F_i = 1, \text{ ya que } i \in \{1, 2\}.$$

Ahora si tomamos el

$$\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+1,k+1)}, F_{r-k}) = F_{\mathbf{mcd}(r-k+1,k+1,r-k)} = F_1 = 1.$$

Ya que  $|r-k+1-r+k| = 1$ , por Lema 2.8 parte 1 entonces  $\mathbf{mcd}(r-k+1, r+k) = 1$ , esto implica que  $\mathbf{mcd}(r-k+1, k+1, r-k) = 1$ .

Por Proposición 2.1 parte 2 tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k,r-k+2)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1,k+1)}, F_{k+2} F_{r-k}) \\ &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k,r-k+2)}, F_{r-k}) \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+1,k+1)}, F_{k+2}) \\ &= F_{\mathbf{mcd}(k,r-k+2,r-k)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1,k+1,k+2)} \quad \text{por Lema 2.8} \\ &= F_1 F_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ahora falta ver que el  $\mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 1$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) &= \mathbf{mcd}(F_{k+1} F_{r-k}, F_{k+2} F_{r-k+1}, F_k F_{r-k+2}) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_{k+1} F_{r-k}, F_{k+2} F_{r-k+1}), F_k F_{r-k+2}) \quad \text{por ley asociativa.} \end{aligned}$$

Si tomamos  $m = k+1$ ,  $s = r-k$ ,  $n = k+2$  y  $t = r-k+1$  notemos que se cumplen las condiciones del Lema 2.8 y por parte 2 tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(F_{k+1} F_{r-k}, F_{k+2} F_{r-k+1}) &= \mathbf{mcd}(F_{k+1}, F_{r-k+1}) \mathbf{mcd}(F_{r-k}, F_{k+2}) \\ &= F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1)} F_{\mathbf{mcd}(r-k,k+2)}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_{k+1} F_{r-k}, F_{k+2} F_{r-k+1}), F_k F_{r-k+2}) = \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1)} F_{\mathbf{mcd}(r-k,k+2)}, F_k F_{r-k+2}).$$

Queremos que el  $\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1)}, F_k) = \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k,k+2)}, F_{r-k+2}) = 1$  para poder aplicar la Proposición 2.1.

Ahora si tomamos el  $\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1)}, F_k) = F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1,k)}$ . Ya que  $|k+1-k| = 1$ , y por el lema 2.8 parte 1 entonces  $\mathbf{mcd}(k+1, k) = 1$  y esto implica que  $\mathbf{mcd}(k+1, r-k+1, k) = 1$ . Por lo tanto

$$F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1,k)} = 1.$$

Ahora si  $\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k,k+2)}, F_{r-k+2}) = F_{\mathbf{mcd}(r-k,k+2,r-k+2)}$ . Sí  $|r-k-(r-k+2)| \leq 2$  por el lema 2.7 entonces  $\mathbf{mcd}(r-k, r-k+2) = i$ , donde  $i|2$  y esto implica que el  $\mathbf{mcd}(r-k, k+2, r-k+2) = i$  y por lo tanto

$$F_{\mathbf{mcd}(r-k,k+2,r-k+2)} = F_i = 1, \quad \text{ya que } i \in \{1, 2\}.$$

Por Proposición 2.1 parte 2 tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1)} F_{\mathbf{mcd}(r-k,k+2)}, F_k F_{r-k+2}) \\ &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1,r-k+2)}, F_{\mathbf{mcd}(r-k,k+2,k)}) \\ &= F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1,r-k+2)} F_{\mathbf{mcd}(r-k,k+2,k)} \\ &= F_1 F_1 \quad \text{por lema 2.8} \\ &= 1. \end{aligned}$$

- Probemos que el  $\mathbf{mcd}(a_1, b_2) \mathbf{mcd}(b_1, a_2) = c$ , entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(a_1, b_2) &= \mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k+2} F_{r-k+1}) \\ &= F_{r-k+1} \mathbf{mcd}(F_k, F_{k+2}) \quad \text{por ley distributiva} \\ &= F_{r-k+1} F_{\mathbf{mcd}(k, k+2)} \quad \text{por Teorema 2.4} \\ &= F_{r-k+1} \quad \text{por lema 2.8.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(b_1, a_2) &= \mathbf{mcd}(F_{k+1} F_{r-k}, F_{k+1} F_{r-k+2}) \\ &= F_{k+1} \mathbf{mcd}(F_{r-k}, F_{r-k+2}) \quad \text{por ley distributiva} \\ &= F_{k+1} F_{\mathbf{mcd}(r-k, r-k+2)} \quad \text{por Teorema 2.4} \\ &= F_{k+1} \quad \text{por Lema 2.8.} \end{aligned}$$

Entonces  $\mathbf{mcd}(a_1, b_2) \mathbf{mcd}(b_1, a_2) = F_{r-k+1} F_{k+1} = c$ .

Prueba para la configuración de la Figura 12 (b), tenemos:

- Queremos  $a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3$ , por definición de la estrella de David y aplicando el Corolario 1.6 tenemos:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 &= H(r, k) H(r, k+1) H(r+3, k+2) \\ &= (F_r F_{r-k+1}) (F_{k+1} F_{r-k}) (F_{k+2} F_{r-k+2}) \\ &= (F_{k+1} F_{r-k+2}) (F_{k+2} F_{r-k+1}) (F_k F_{r-k}) \\ &= H(r+2, k+1) H(r+2, k+2) H(r-1, k) \\ &= b_1 b_2 b_3. \end{aligned}$$

- Queremos  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 1$ , probemos primero  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = 1$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) &= \mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k+1} F_{r-k}, F_{k+2} F_{r-k+2}) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k+1} F_{r-k}), F_{k+2} F_{r-k+2}) \quad \text{por ley asociativa.} \end{aligned}$$

Si tomamos a  $m = k$ ,  $s = r - k + 1$ ,  $n = k + 1$  y  $t = r - k$  vemos que se cumplen las condiciones del Lema 2.8 y por la parte 2 tenemos:

$$\mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k+1} F_{r-k}) = \mathbf{mcd}(F_k, F_{r-k}) \mathbf{mcd}(F_{r-k+1}, F_{k+1}) = F_{\mathbf{mcd}(k, r-k)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k+1)}$$

Entonces,

$$\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k+1} F_{r-k}), F_{k+2} F_{r-k+2}) = \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k+1)}, F_{k+2} F_{r-k}).$$

Queremos que el  $\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k)}, F_{k+2}) = \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k+1)}, F_{r-k+2}) = 1$  para poder aplicar la Proposición 2.1.

Ahora si tomamos el  $\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k)}, F_{k+2}) = F_{\mathbf{mcd}(k, r-k, k+2)}$ . Si  $|k - (k+2)| \leq 2$ , entonces por Lema 2.7 el  $\mathbf{mcd}(k, k+2) = i$ , implica que el

$$\mathbf{mcd}(k, r-k, k+2) = i \quad \text{donde } i|2.$$

Por tanto  $F_{\mathbf{mcd}(k,r-k,k+2)} = F_i = 1$  ya que  $i \in \{1, 2\}$ .

Notemos que el  $\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+1,k+1)}, F_{r-k+2}) = F_{\mathbf{mcd}(r-k+1,k+1,r-k+2)}$  y ya que  $|r - k + 1 - r + k - 2| = 1$ , entonces  $\mathbf{mcd}(r - k + 1, r - k + 2) = 1$ , implica que el  $\mathbf{mcd}(r - k + 1, k + 1, r - k + 2) = 1$ . Por tanto

$$F_{\mathbf{mcd}(r-k+1,k+1,r-k+2)} = F_1 = 1.$$

Por Proposición 2.1 parte 2 tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k,r-k)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1,k+1)}, F_{k+2} F_{r-k+2}) \\ &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k,r-k)}, F_{r-k+2}) \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+1,k+1)}, F_{k+2}) \\ &= F_{\mathbf{mcd}(k,r-k,r-k+2)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1,k+1,k+2)} \\ &= F_1 F_1 \quad \text{por Lema 2.8} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De forma similar podemos demostrar que  $\mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 1$ , utilizando los mismos lemas, teoremas y propiedades como en las demostraciones anterior, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) &= \mathbf{mcd}(F_{k+1} F_{r-k+2}, F_{k+2} F_{r-k+1}, F_k F_{r-k}) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_{k+1} F_{r-k+2}, F_{k+2} F_{r-k+1}), F_k F_{r-k}) \\ &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+2,k+2)}, F_k F_{r-k}) \\ &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1)}, F_{r-k}) \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+2,k+2)}, F_k) \\ &= F_{\mathbf{mcd}(k+1,r-k+1,r-k)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+2,k+2,k)}. \end{aligned}$$

Calculando el  $\mathbf{mcd}(k + 1, r - k + 1, r - k) = 1$  ya que  $|r - k + 1 - (r - k)| = 1$  y por el Lema 2.8 tenemos que  $\mathbf{mcd}(r - k + 1, r - k) = 1$ .

El  $\mathbf{mcd}(r - k + 2, k + 2, k) = i$  ya que  $|k + 2 - (k)| \leq 2$ , entonces el  $\mathbf{mcd}(k + 2, k) = i$  donde  $i|2$ . Por tanto  $\mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 1$ .

- Probemos que el  $\mathbf{mcd}(a_1, b_2) \mathbf{mcd}(b_1, a_2) = c$ , entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(a_1, b_2) &= \mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k+2} F_{r-k+1}) \\ &= F_{r-k+1} \mathbf{mcd}(F_k, F_{k+2}) \quad \text{por ley distributiva} \\ &= F_{r-k+1} F_{\mathbf{mcd}(k,k+2)} \quad \text{por Teorema 2.4} \\ &= F_{r-k+1} \quad \text{por Lema 2.8.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(b_1, a_2) &= \mathbf{mcd}(F_{k+1} F_{r-k+2}, F_{k+1} F_{r-k}) \\ &= F_{k+1} \mathbf{mcd}(F_{r-k+2}, F_{r-k}) \quad \text{por ley distributiva} \\ &= F_{k+1} F_{\mathbf{mcd}(r-k+2,r-k)} \quad \text{por Teorema 2.4} \\ &= F_{k+1} \quad \text{por Lema 2.8.} \end{aligned}$$

Entonces  $\mathbf{mcd}(a_1, b_2) \mathbf{mcd}(b_1, a_2) = F_{r-k+1} F_{k+1} = c$ . ■

**Proposición 2.2.** Si  $x_1, \dots, x_5$  y  $y_1, \dots, y_5$  son puntos en triángulo de Hosoya como en la Figura 13, entonces  $\mathbf{mcd}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \mathbf{mcd}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = 1$ .

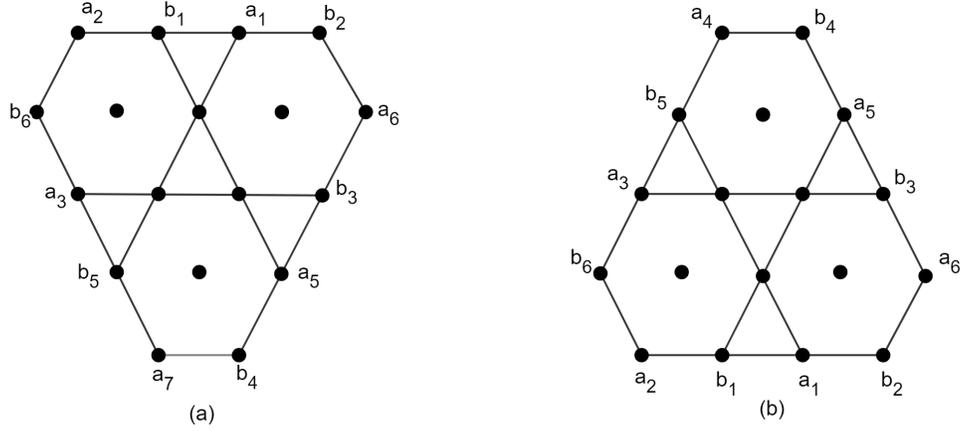


Figura 13: (a) y (b)

Las coordenadas de los  $x_i$  en la Figura 13 (a) en el triángulo de Hosoya es:

$$\begin{array}{lll} x_1 = H(r, k) & x_3 = H(r + 2, k - 1) & x_5 = H(r + 3, k + 2) \\ x_2 = H(r, k - 2). & x_4 = H(r + 4, k + 1) & x_6 = H(r + 1, k + 2). \end{array}$$

Y las de los  $y_i$  son:

$$\begin{array}{lll} y_1 = H(r, k - 1) & y_3 = H(r + 2, k + 2) & y_5 = H(r + 3, k) \\ y_2 = H(r, k + 1). & y_4 = H(r + 4, k + 2) & y_6 = H(r + 1, k - 2). \end{array}$$

Las coordenadas de los  $x_i$  en la Figura 13 (b) en el triángulo de Hosoya es:

$$\begin{array}{lll} x_1 = H(r, k) & x_3 = H(r - 2, k - 3) & x_5 = H(r - 3, k - 1) \\ x_2 = H(r, k - 2). & x_4 = H(r - 4, k - 3) & x_6 = H(r - 1, k + 1). \end{array}$$

Y las de los  $y_i$  son:

$$\begin{array}{lll} y_1 = H(r, k - 1) & y_3 = H(r - 2, k) & y_5 = H(r - 3, k - 3) \\ y_2 = H(r, k + 1) & y_4 = H(r - 4, k - 2) & y_6 = H(r - 1, k - 3). \end{array}$$

*Demostración.*

Dividiremos la prueba para las dos diferentes configuraciones de puntos presentados en la Figura 13.

- Probaremos que el  $\mathbf{mcd}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1$  de la figura 13 (a).

Aplicando la ley asociativa y el Corolario 1.6 obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(x_1, x_2), \mathbf{mcd}(x_3, x_4), x_5) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k-2} F_{r-k+3}), \mathbf{mcd}(F_{k-1} F_{r-k+4}, F_{k+1} F_{r-k+4}), F_{k+2} F_{r-k+2}).\end{aligned}$$

Por Lema 2.8 parte 2, tomando a  $m = k$ ,  $s = r - k + 1$ ,  $n = k - 2$  y  $t = r - k + 3$  implica que

$$\mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k-2} F_{r-k+3}) = F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2)}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_{k-1} F_{r-k+4}, F_{k+1} F_{r-k+4}) &= F_{r-k+4} \mathbf{mcd}(F_{k-1}, F_{k+1}) \quad \text{por ley distributiva} \\ &= F_{r-k+4} \quad \text{por Lema 2.8 parte 1.}\end{aligned}$$

Por los pasos anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2)}, F_{r-k-4}, F_{k+2} F_{r-k+2}) \\ &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2)}, F_{k+2} F_{r-k+2}, F_{r-k-4}) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2)}, F_{k+2} F_{r-k+2}), F_{r-k-4}).\end{aligned}$$

Sí se cumplen las condiciones para la Proposición 2.1 parte 2, ya que

$$\mathbf{mcd}(k, r - k + 3, k + 2) = i \quad \text{y} \quad \mathbf{mcd}(r - k + 1, k - 2, r - k + 2) = 1.$$

donde  $i|2$ , esto implica que

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3)}, F_{k+2}) &= F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3, k+2)} = F_i = 1 \\ \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2)}, F_{r-k+2}) &= F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2, r-k+2)} = F_1 = 1.\end{aligned}$$

Por Proposición 2.1 parte 2 implica que:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2)}, F_{k+2} F_{r-k+2}) &= F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3, r-k+2)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2, k+2)} \\ &= F_1 F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2, k+2)} \text{ el } \mathbf{mcd}(k, r - k + 3, r - k + 2) = 1 \\ &= F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2, k+2)}.\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2, k+2)}, F_{r-k+4}) \\ &= F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2, k+2, r-k+4)}.\end{aligned}$$

Supongamos que

$$d = \mathbf{mcd}(r - k + 1, k - 2, k + 2, r - k + 4) = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(k - 2, k + 2), \mathbf{mcd}(r - k + 1, r - k + 4)).$$

En consecuencia  $d|\mathbf{mcd}(k - 2, k + 2)$  y  $d|\mathbf{mcd}(r - k + 1, r - k + 4)$ , ya que el  $|k - 2 - (k + 2)| = 4$  y por el Lema 2.7 el  $\mathbf{mcd}(k - 2, k + 2) = i$  donde  $i|4$ , entonces  $i \in \{1, 2, 4\}$  y  $\mathbf{mcd}(r - k + 1, r - k + 4) = j$  ya que  $|r - k + 1 - (r - k + 4)| = 3$  donde  $j|3$ , entonces  $j \in \{1, 3\}$  tenemos que  $d|j$  y  $d|i$ , por lo tanto  $d = 1$ .

$$\mathbf{mcd}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = F_1 = 1.$$

- Probaremos que el  $\mathbf{mcd}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = 1$  de la Figura 13 (a).

Aplicando la ley asociativa y el Corolario 1.6 obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(y_1, y_2), \mathbf{mcd}(y_3, y_4), y_5) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_{k-1}F_{r-k+2}, F_{k+1}F_{r-k}), \mathbf{mcd}(F_{k+2}F_{r-k+1}, F_{k+2}F_{r-k+3}), F_kF_{r-k+4}).\end{aligned}$$

Por Lema 2.8 parte 2.

$$\mathbf{mcd}(F_{k-1}F_{r-k+2}, F_{k+1}F_{r-k}) = F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k)}F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1)}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_{k+2}F_{r-k+1}, F_{k+2}F_{r-k+3}) &= F_{k+2} \mathbf{mcd}(F_{r-k+1}, F_{r-k+3}) \quad \text{por ley distributiva} \\ &= F_{k+2} \quad \text{por Lema 2.8 parte 1.}\end{aligned}$$

Por los pasos anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k)}F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1)}, F_{k+2}, F_kF_{r-k+4}) \\ &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k)}F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1)}, F_kF_{r-k+4}, F_{k+2}) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k)}F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1)}, F_kF_{r-k+4}), F_{k+2}).\end{aligned}$$

Sí se cumplen las condiciones para la Proposición 2.1 parte 2, ya que

$$\mathbf{mcd}(k-1, r-k, k) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{mcd}(r-k+2, k+1, r-k+4) = i.$$

donde  $i|2$ , esto implica que:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k)}, F_k) &= F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k, k)} = F_1 = 1 \\ \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1)}, F_{r-k+4}) &= F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1, r-k+4)} = F_i = 1.\end{aligned}$$

Por Proposición 2.1 parte 2 implica que:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k)}F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1)}, F_kF_{r-k+4}) &= F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k, r-k+4)}F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1, k)} \\ &= F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k, r-k+4)}F_1 \quad \text{el } \mathbf{mcd}(r-k+2, k+1, k) = 1 \\ &= F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k, r-k+4)}.\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}((k-1, r-k, r-k+4))}, F_{r+2}) \\ &= F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k, r-k+4, r+2)}.\end{aligned}$$

Supongamos que

$$d = \mathbf{mcd} \mathbf{mcd}(k-1, r-k, r-k+4, r+2) = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(k+1, k+2), \mathbf{mcd}(r-k, r-k+4)).$$

En consecuencia  $d | \mathbf{mcd}(k+1, k+2)$  y  $d | \mathbf{mcd}(r-k, r-k+4)$ , ya que el  $|k+1 - (k+2)| = 1$  y por el Lema 2.7 tenemos que el  $\mathbf{mcd}(k+1, k+2) = 1$  por lo que  $d | 1$ , también notemos que el  $\mathbf{mcd}(r-k, r-k+4) = i$ , ya que  $|r-k - (r-k+4)| = 4$  donde  $i | 4$ , entonces tenemos que  $d | i$ , por lo tanto  $d = 1$ , en consecuencia:

$$\mathbf{mcd}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = F_1 = 1.$$

- Probaremos que el  $\mathbf{mcd}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1$  de la Figura 13 (b).

La demostración es similar a la demostración de la Figura 13 (a), por lo que omitiremos pasos obvios. Aplicando la ley asociativa y el Corolario 1.6 obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(x_1, x_2), \mathbf{mcd}(x_3, x_4), x_5) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+1}, F_{k-2} F_{r-k+3}), \mathbf{mcd}(F_{k-3} F_{r-k+2}, F_{k-3} F_{r-k}), F_{k-1} F_{r-k-1}).\end{aligned}$$

Por Lema 2.8 parte 1 y 2 obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2)}, F_{k-3}, F_{k-1} F_{r-k-1}) \\ &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2)}, F_{k-1} F_{r-k-1}, F_{k-3}) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2)}, F_{k-1} F_{r-k-1}), F_{k-3}).\end{aligned}$$

Notemos que se cumplen las condiciones para la Proposición 2.1 parte 2, ya que

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3)}, F_{k-1}) &= F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3, k-1)} = 1 \\ \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2)}, F_{r-k-1}) &= F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2, r-k-1)} = 1.\end{aligned}$$

Por Proposición 2.1 parte 2 implica que:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2)}, F_{k-1} F_{r-k-1}) &= F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3, r-k-1)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+1, k-2, k-1)} \\ &= F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3, r-k-1)} F_1 \quad \text{el } \mathbf{mcd}(r-k+1, k-2, k-1) = 1 \\ &= F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3, r-k-1)}.\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3, r-k-1)}, F_{k-3}) \\ &= F_{\mathbf{mcd}(k, r-k+3, r-k-1, k-3)}.\end{aligned}$$

Supongamos que

$$d = \mathbf{mcd}(k, r-k+3, r-k-1, k-3) = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(k, k-3), \mathbf{mcd}(r-k+3, r-k+1)).$$

En consecuencia  $d \mid \mathbf{mcd}(k, k-3)$  y  $d \mid \mathbf{mcd}(r-k+3, r-k+1)$ , ya que  $|k - (k-3)| = 3$  y por el Lema 2.7 el  $\mathbf{mcd}(k, k-3) = i$  donde  $i \mid 3$ , entonces  $i \in \{1, 3\}$  y el  $\mathbf{mcd}(r-k+3, r-k+1) = j$ , ya que  $|r-k+3 - (r-k+1)| = 2$  entonces  $j \mid 2$ , tenemos que  $d \mid i$  y  $d \mid j$ , por lo tanto  $d = 1$ , en consecuencia:

$$\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = F_1 = 1.$$

Probaremos que el  $\mathbf{mcd}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = 1$  de la Figura 13 (b).

Aplicando la ley asociativa y el Corolario 1.6 obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(y_1, y_2), \mathbf{mcd}(y_3, y_4), y_5) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_{k-1} F_{r-k+2}, F_{k+1} F_{r-k}), \mathbf{mcd}(F_k F_{r-k-1}, F_{k-2} F_{r-k-1}), F_{k-3} F_{r-k+1}).\end{aligned}$$

Por Lema 2.8 parte 1, 2 y ley distributiva, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1)}, F_{r-k-1}, F_{k-3} F_{r-k+1}) \\ &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1)}, F_{k-3} F_{r-k+1}, F_{r-k-1}) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1)}, F_{k-3} F_{r-k+1}), F_{r-k-1}).\end{aligned}$$

Notemos que se cumplen las condiciones para la Proposición 2.1 parte 2, ya que

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k)}, F_{k-3}) &= F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k, k-3)} = 1 \\ \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1)}, F_{r-k+1}) &= F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1, r-k+1)} = 1.\end{aligned}$$

Por Proposición 2.1 parte 2 implica que:

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1)}, F_{k-3} F_{r-k+1}) &= F_{\mathbf{mcd}(k-1, r-k, r-k+1)} F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1, k-3)} \\ &= F_1 F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1, k-3)} \quad \text{el } \mathbf{mcd}(k-1, r-k, r-k+1) = 1 \\ &= F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1, k-3)}.\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) &= \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1, k-3)}, F_{r-k-1}) \\ &= F_{\mathbf{mcd}(r-k+2, k+1, k-3, r-k-1)}.\end{aligned}$$

Supongamos que

$$d = \mathbf{mcd}(r-k+2, k+1, k-3, r-k-1) = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(k+1, k-3), \mathbf{mcd}(r-k+2, r-k-1)).$$

Ya que  $|k+1-(k-3)| = 4$ , el  $\mathbf{mcd}(k+1, k-3) = i$  donde  $i|4$  y el  $\mathbf{mcd}(r-k+2, r-k-1) = j$ , ya que  $|r-k+2-(r-k-1)| = 3$  donde  $j|3$ , entonces tenemos que  $d|i$  y  $d|j$ , por lo tanto  $d = 1$ , en conclusión tenemos:

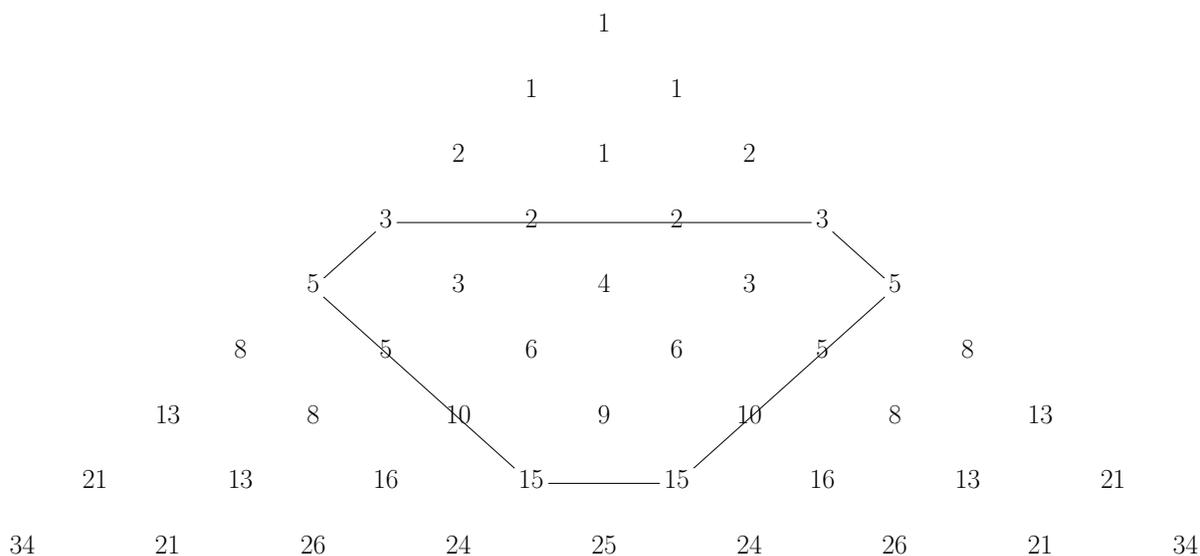
$$\mathbf{mcd}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = F_1 = 1.$$

■

**Definición 2.6.** *Cualquier conjunto de la forma  $\{F_k F_j, F_k F_{j+1}, \dots, F_k F_{j+l}\}$  donde  $l \geq 1$ , es llamado una subdiagonal del triángulo de Hosoya. Es claro que cualquier subdiagonal del triángulo de Hosoya es incluido en cualquier  $S(F_k)$  o  $B(F_k)$ .*

En el Teorema 2.6 generalizamos el Teorema 2.5 parte 3.

**Ejemplo 2.4.** *Si tomamos  $a_1 = H(4, 3)$  en la Figura 13(a) se obtiene los siguientes puntos  $a_2 = H(4, 1), a_3 = H(6, 2), a_4 = H(8, 4), a_5 = H(7, 5), a_6 = H(5, 5)$  y  $b_1 = H(4, 2), b_2 = H(4, 4), b_3 = H(6, 5), b_4 = H(8, 5), b_5 = H(7, 3), b_6 = H(6, 2)$ .*



**Teorema 2.6.** Sea  $P$  un polígono en el triángulo de Hosoya. Si  $D_1$  y  $D_2$  son dos diagonales de  $P$  tal que:

1.  $D_1$  y  $D_2$  son subdiagonales del triángulo de Hosoya,
2.  $D_1 \cap D_2 = \{c\}$ ,
3.  $|D_1| \geq 3$  y  $|D_2| \geq 3$ ,

entonces el  $\mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) = \{c\}$ .

*Demostración.*

Primero supongamos que  $|D_1| = |D_2| = 3$  y probaremos que el

$$\mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) = c.$$

Hay 9 posiciones relativas para las diagonales  $D_1$  y  $D_2$ , como se muestran en la Figura 14.

Elegimos a  $c = H(r, k) = F_k F_{r-k+1}$  en todos los casos, entonces tomamos a  $D_1 = \{b_1, b_2, c\}$  y  $D_2 = \{a_1, a_2, c\}$ .

La prueba del caso (a) es la misma prueba de la parte 3 del Teorema 2.5.

- Prueba del caso (b)

$$a_1 = H(r + 1, k)$$

$$a_2 = H(r + 2, k).$$

$$b_1 = H(r + 1, k + 1)$$

$$b_2 = H(r + 2, k + 2).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) &= \mathbf{mcd}(b_1, b_2) \mathbf{mcd}(a_1, a_2) \\
&= \mathbf{mcd}(F_{k+1}F_{r-k+1}, F_{k+2}F_{r-k+1}) \mathbf{mcd}(F_kF_{r-k+2}, F_kF_{r-k+3}) \\
&= F_{r-k+1} \mathbf{mcd}(F_{k+1}, F_{k+2})F_k \mathbf{mcd}(F_{r-k+2}, F_{r-k+3}) \\
&= F_kF_{r-k+1} = c.
\end{aligned}$$

- Prueba del caso (c).

$$\begin{aligned}
a_1 &= H(r-1, k) & b_1 &= H(r+1, k+1) \\
a_2 &= H(r-2, k) & b_2 &= H(r+2, k+2).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) &= \mathbf{mcd}(b_1, b_2) \mathbf{mcd}(a_1, a_2) \\
&= \mathbf{mcd}(F_{k+1}F_{r-k+1}, F_{k+2}F_{r-k+1}) \mathbf{mcd}(F_kF_{r-k}, F_kF_{r-k-1}) \\
&= F_{r-k+1} \mathbf{mcd}(F_{k+1}, F_{k+2})F_k \mathbf{mcd}(F_{r-k}, F_{r-k-1}) \\
&= F_kF_{r-k+1} = c.
\end{aligned}$$

- Prueba del caso (d).

$$\begin{aligned}
a_1 &= H(r-1, k) & b_1 &= H(r-1, k-1) \\
a_2 &= H(r-2, k) & b_2 &= H(r-2, k-2).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) &= \mathbf{mcd}(b_1, b_2) \mathbf{mcd}(a_1, a_2) \\
&= \mathbf{mcd}(F_{k-1}F_{r-k+1}, F_{k-2}F_{r-k+1}) \mathbf{mcd}(F_kF_{r-k}, F_kF_{r-k-1}) \\
&= F_{r-k+1} \mathbf{mcd}(F_{k-1}, F_{k-2})F_k \mathbf{mcd}(F_{r-k}, F_{r-k-1}) \\
&= F_kF_{r-k+1} = c.
\end{aligned}$$

- Prueba del caso (e).

$$\begin{aligned}
a_1 &= H(r-1, k) & b_1 &= H(r+1, k+1) \\
a_2 &= H(r+1, k) & b_2 &= H(r+2, k+2).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) &= \mathbf{mcd}(b_1, b_2) \mathbf{mcd}(a_1, a_2) \\
&= \mathbf{mcd}(F_{k+1}F_{r-k+1}, F_{k+2}F_{r-k+1}) \mathbf{mcd}(F_kF_{r-k}, F_kF_{r-k+2}) \\
&= F_{r-k+1} \mathbf{mcd}(F_{k+1}, F_{k+2})F_k \mathbf{mcd}(F_{r-k}, F_{r-k+2}) \\
&= F_kF_{r-k+1} = c.
\end{aligned}$$

- Prueba del caso (f).

$$\begin{aligned} a_1 &= H(r+1, k) & b_1 &= H(r-1, k-1) \\ a_2 &= H(r+2, k). & b_2 &= H(r-2, k-2). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) &= \mathbf{mcd}(F_{k-1}F_{r-k+1}, F_{k-2}F_{r-k+1}) \mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+2}, F_k F_{r-k+3}) \\ &= F_k F_{r-k+1} \\ &= c. \end{aligned}$$

- Prueba del caso (g).

$$\begin{aligned} a_1 &= H(r-1, k) & b_1 &= H(r-1, k-1) \\ a_2 &= H(r+1, k) & b_2 &= H(r-2, k-2). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) &= \mathbf{mcd}(F_{k-1}F_{r-k+1}, F_{k-2}F_{r-k+1}) \mathbf{mcd}(F_k F_{r-k}, F_k F_{r-k+2}) \\ &= F_k F_{r-k+1} \\ &= c. \end{aligned}$$

- Prueba del caso (h).

$$\begin{aligned} a_1 &= H(r-1, k) & b_1 &= H(r-1, k-1) \\ a_2 &= H(r-2, k) & b_2 &= H(r+1, k+1). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) &= \mathbf{mcd}(F_{k-1}F_{r-k+1}, F_{k+1}F_{r-k+1}) \mathbf{mcd}(F_k F_{r-k}, F_k F_{r-k+1}) \\ &= F_k F_{r-k+1} \\ &= c. \end{aligned}$$

- Prueba del caso (i).

$$\begin{aligned} a_1 &= H(r+1, k) & b_1 &= H(r-1, k-1) \\ a_2 &= H(r+2, k) & b_2 &= H(r+1, k+1). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) &= \mathbf{mcd}(F_{k-1}F_{r-k+1}, F_{k+1}F_{r-k+1}) \mathbf{mcd}(F_k F_{r-k+2}, F_k F_{r-k+3}) \\ &= F_k F_{r-k+1} = c. \end{aligned}$$

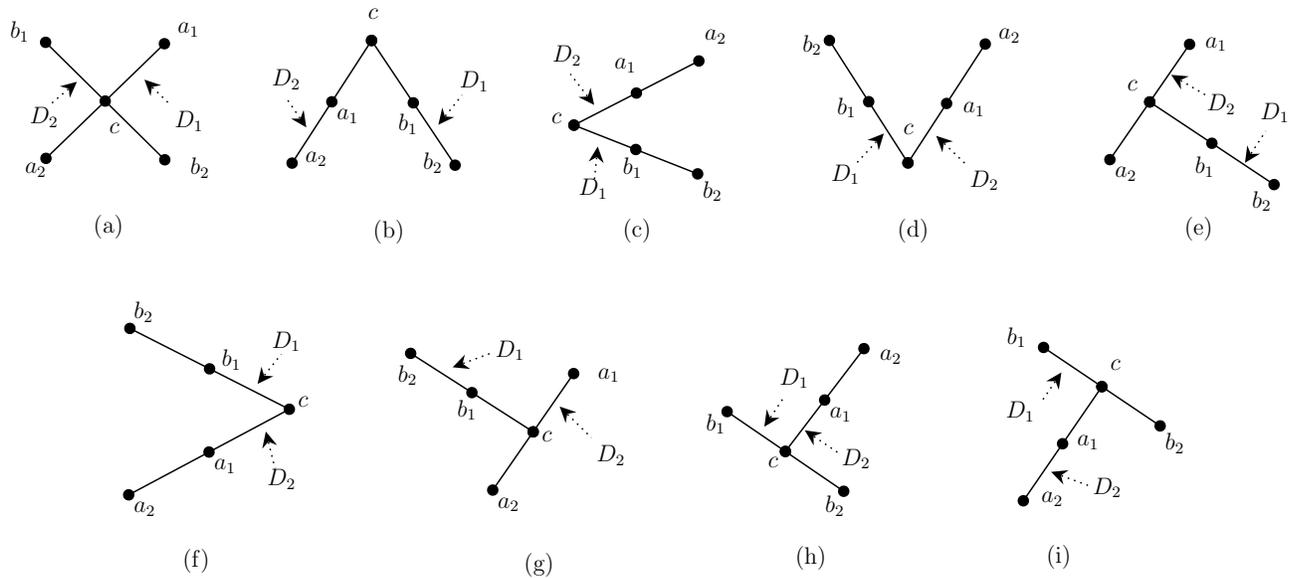


Figura 14: Diagonales en un polinomio con  $c = H(r, k) = F_k F_{r-k+1}$

Ahora probaremos que el  $\mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) = c$  cuando  $|D_1| > 3$  o  $|D_2| > 3$ . Entonces, existen  $D'_1, D'_2, A$  y  $B$  tal que  $D_1 = D'_1 \cup A$  y  $D_2 = D'_2 \cup B$  donde

1.  $D'_1$  y  $D'_2$  son subdiagonales del triángulo de Hosoya,
2.  $D'_1 \cap D'_2 = \{c\}$ ,
3.  $|D'_1| = |D'_2| = 3$ .

Es fácil ver que el  $\mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) = \mathbf{mcd}(D'_1 - \{c\})$  y  $\mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) = \mathbf{mcd}(D'_2 - \{c\})$ .

Ya que  $|D'_1| = 3$  y  $|D'_2| = 3$ ,  $\mathbf{mcd}(D'_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D'_2 - \{c\}) = c$ , ya que esto caería en cualquier de los 9 casos anteriores.

Por lo tanto, tenemos que  $\mathbf{mcd}(D_1 - \{c\}) \mathbf{mcd}(D_2 - \{c\}) = c$ . Esto prueba el teorema. ■

## 2.4. La propiedad del $\mathbf{mcd}$ en un polígono

El motivo principal de esta sección es el estudio de las propiedades del  $\mathbf{mcd}$  para una configuración especial de puntos en cualquier rombo de  $n \times n$  de el triángulo de Hosoya. El último corolario de esta sección prueba que el  $\mathbf{mcd}$  de una configuración particular de  $n$  puntos de cualquier polígono es siempre 1 ó 2.

El Teorema 2.5 parte 2 puede probarse también usando el Teorema 2.7.

Un rombo  $R$  de  $n \times n$  en el triángulo de Hosoya es un arreglo de  $n^2$  puntos formando un

rombo. Formalmente, definimos por  $R_n(t, k)$  el rombo  $n \times n$ .

$$R_n(t, k) = \bigcup_{i,j=1}^n B(F_{t+i}) \cap S(F_{k+j}) \quad \text{donde } k, t \in \mathbb{N}.$$

La Figura 15 describe el rombo  $R_4(2, 1)$ .

Decimos que  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  es una colección de puntos no-atacantes de el triángulo de Hosoya, si no hay dos puntos distintos en  $A$  en la misma diagonal o diagonal invertida.

Sean  $a_1, \dots, a_n$  puntos no-atacantes en un rombo  $n \times n$  del triángulo de Hosoya. Teoremas prueban que el  $\text{mcd}(a_1, \dots, a_n)$  es siempre 1 o 2, y dar una caracterización para cuando ocurra cada caso. Damos una prueba de combinatoria para el primer teorema y una algebraica para el segundo.

**Definición 2.7.** Sea  $p$  un número primo y  $A \in \mathbb{Z}^k$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Denotamos por  $n_p(A)$  al número de enteros en la  $k$ -tupla de  $A$  que son divisibles por  $p$ .

Un ejemplo sencillo de la definición es:  $n_3(2, 3, 3, 6, 5, 12) = 4$ .

**Lema 2.9.** Supongamos que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  son números enteros con  $n \geq 3$ . Si  $p$  es un primo que divide como máximo un entero de  $\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$  donde  $1 \leq i \leq n - 2$ , entonces

$$n_p(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

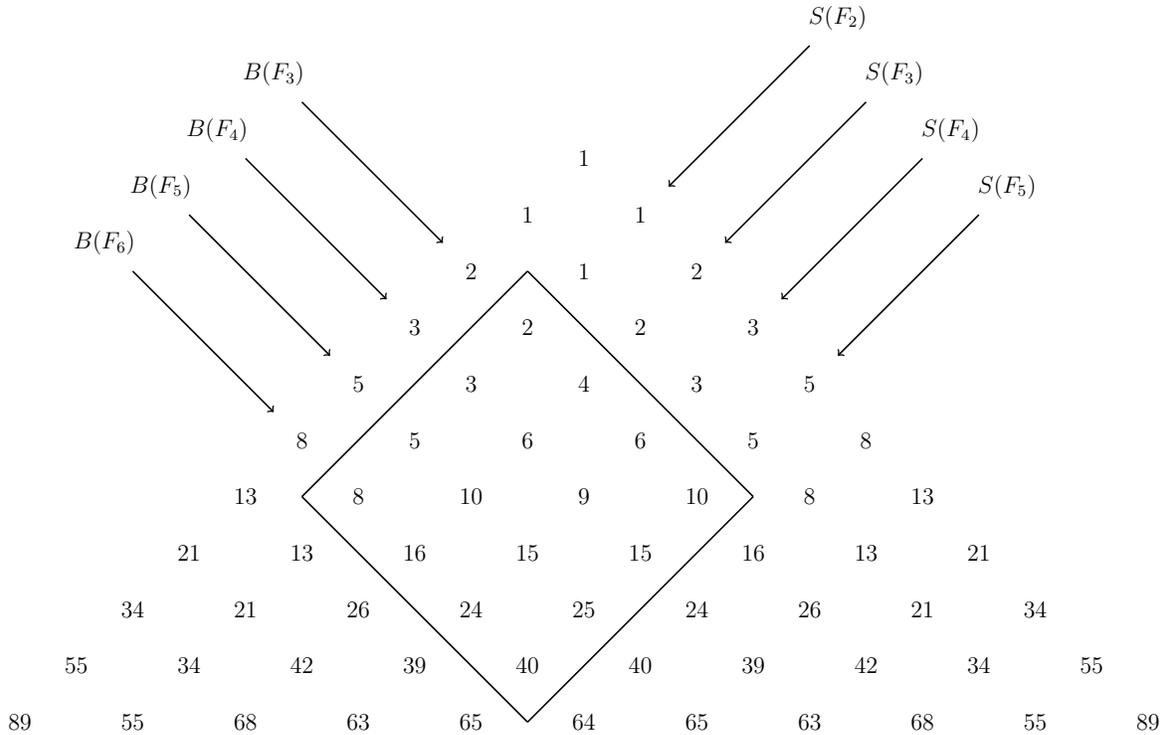


Figura 15: Rombo  $R_4(2, 1)$

*Demostración.*

Primero probaremos una identidad de la función mayor entero con la función menor entero, la cual es:

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n+1}{m} \right\rceil - 1 \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+. \quad (26)$$

Notemos que podemos reescribir la ecuación 26:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor &= \left\lceil \frac{n+1}{m} \right\rceil - 1 \\ \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor &= \left\lceil \frac{n+1}{m} - 1 \right\rceil \\ \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor &= \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil. \end{aligned}$$

Tomando la ultima igualdad, podemos tomar el intervalo cerrado  $\left[ \frac{n-m+1}{m}, \frac{n}{m} \right]$  tiene como tamaño  $1 - 1/m$  y puede contener como máximo un entero, en este caso, tal entero debe coincidir con ambos  $\left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil$  y  $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ . Siempre que, de los  $m$  enteros consecutivos se tiene:

$$\frac{n-m+1}{m}, \frac{n-(m-1)+1}{m}, \frac{n-(m-2)+1}{m}, \dots, \frac{n-2+1}{m}, \frac{n-1+1}{m}$$

exactamente 1 es divisible por  $m$ ; si  $x$  es este número, entonces  $x/m \in \left[ \frac{n-m+1}{m}, \frac{n}{m} \right]$  es el común valor de  $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$  y  $\left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil$ .

Continuando con la prueba del lema, sea  $p$  divide como máximo a uno de la terna  $\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$ , si queremos encontrar su número máximo de números que son divisibles por  $p$  de la sucesión  $\{x_1, \dots, x_n\}$  para  $n \geq 3$ .

La configuración que nos da el máximo de enteros divididos por  $p$ , es la siguiente:

- Sea  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ , SPDG tomo al primer término como divisible por  $p$  y el siguiente separado por 2 unidades en el índice. Siguiendo este argumento tendríamos  $\{x_1, x_4, x_7, x_{10}, \dots\}$  los divisibles por  $p$ .

Quitando el  $x_1$ , ¿Cuántas veces cabe 3 en  $n-1$  elementos? Eso es  $\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ , entonces  $\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$  serian los divisibles por  $p$  en  $n-1$  términos, pero  $x_1$  es divisible en  $n$  términos, entonces tenemos:

$$\left\lfloor \frac{n-1}{3} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1+3}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$$

Y a esto por (26) tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor &= \left\lceil \frac{(n+2)+1}{3} \right\rceil - 1 \\
&= \left\lceil \frac{n+3}{3} \right\rceil - 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n+3-3}{3} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Pero por hipótesis  $p$  divide como máximo a uno, esto significa que en algunos tríos no se cumplirá dicha condición por lo tanto,

$$n_p(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil. \quad \blacksquare$$

**Lema 2.10.** *Suponga que  $F_{l+1}, F_{l+2}, \dots, F_{l+n}$  son números de Fibonacci donde  $n \geq 3$  y  $l \geq 1$ . Si  $p$  es un primo, entonces*

$$n_p(F_{l+1}, F_{l+2}, \dots, F_{l+n}) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

*Demostración.*

Sabemos que el  $\mathbf{mcd}(F_m, F_t) = 1$  para cualquier  $m$  y  $n$  con  $|m - t| \leq 2$ . Esto implica que  $p$  divide como máximo, un número de Fibonacci en el conjunto  $\{F_{l+t}, F_{l+t+1}, F_{l+t+2}\}$  para cada  $i$ . Ya que  $F_{l+1} < F_{l+2} < \dots < F_{l+n}$ , podemos aplicar el Lema 2.9 a la sucesión  $F_{l+1}, F_{l+2}, \dots, F_{l+n}$ .

Por lo tanto,  $n_p(F_{l+1}, F_{l+2}, \dots, F_{l+n}) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ . ■

**Teorema 2.7.** *Sea  $n \geq 3$  un entero con  $n \neq 4$ . Si  $a_1, \dots, a_n$  son puntos no-atacantes distintos en un rombo  $R$  de  $n \times n$  de el triángulo de Hosoya, entonces  $\mathbf{mcd}(a_1, \dots, a_n) = 1$ .*

*Demostración.*

Probamos este teorema por contradicción. Asumimos que el  $\mathbf{mcd}(a_1, \dots, a_n) > 1$ . Esto implica que hay un número primo  $p$  tal que

$$p|a_i \quad \text{para cada } i \in \{1, \dots, n\}. \quad (27)$$

Ya que  $R$  es un rombo de  $n \times n$ , hay enteros  $t$  y  $k$  tal que  $R = R_n(t, k)$ . Entonces,

$$R_n(t, k) = \bigcup_{i,j=1}^n B(F_{t+i}) \cap S(F_{k+j}). \quad (28)$$

Si identificamos cada punto  $a_i$  con su correspondiente par ordenado de números de Fibonacci, entonces  $a_i = F_{s_i} F_{r_i} \longleftrightarrow (F_{s_i}, F_{r_i})$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Esto y (27) implica que

$$\begin{array}{ccc} p|F_{s_1} & \circ & p|F_{r_1} \\ p|F_{s_2} & \circ & p|F_{r_2} \\ \vdots & & \vdots \\ p|F_{s_n} & \circ & p|F_{r_n}. \end{array} \tag{29}$$

Ya que  $\{a_1, \dots, a_n\}$  es una colección de puntos no-atacantes, la ecuación (28) implica que

$$\{F_{s_1}, \dots, F_{s_n}\} = \{F_{t+1}, \dots, F_{t+n}\} \quad \text{y} \quad \{F_{r_1}, \dots, F_{r_n}\} = \{F_{k+1}, \dots, F_{k+n}\}.$$

Esto y (29) implica que la  $2n - \text{upla}$   $(F_{t+1}, \dots, F_{t+n}, F_{k+1}, \dots, F_{k+n})$  contiene como mínimo  $n$  entradas divisibles por  $p$ . Entonces, es claro que

$$\begin{aligned} n &\leq n_p(F_{t+1}, \dots, F_{t+n}, F_{k+1}, \dots, F_{k+n}) = n_p(F_{t+1}, \dots, F_{t+n}) + n_p(F_{k+1}, \dots, F_{k+n}) \\ &\leq \lceil \frac{n}{3} \rceil + \lceil \frac{n}{3} \rceil. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lceil \frac{n}{3} \rceil + \lceil \frac{n}{3} \rceil \geq n$ , notemos que esta desigualdad encontrada es cierta para  $n < 3$  y  $n = 4$  lo que nos lleva a una contradicción, porque  $n \geq 3$  y  $n \neq 4$  por hipótesis.

Esto prueba el teorema. ■

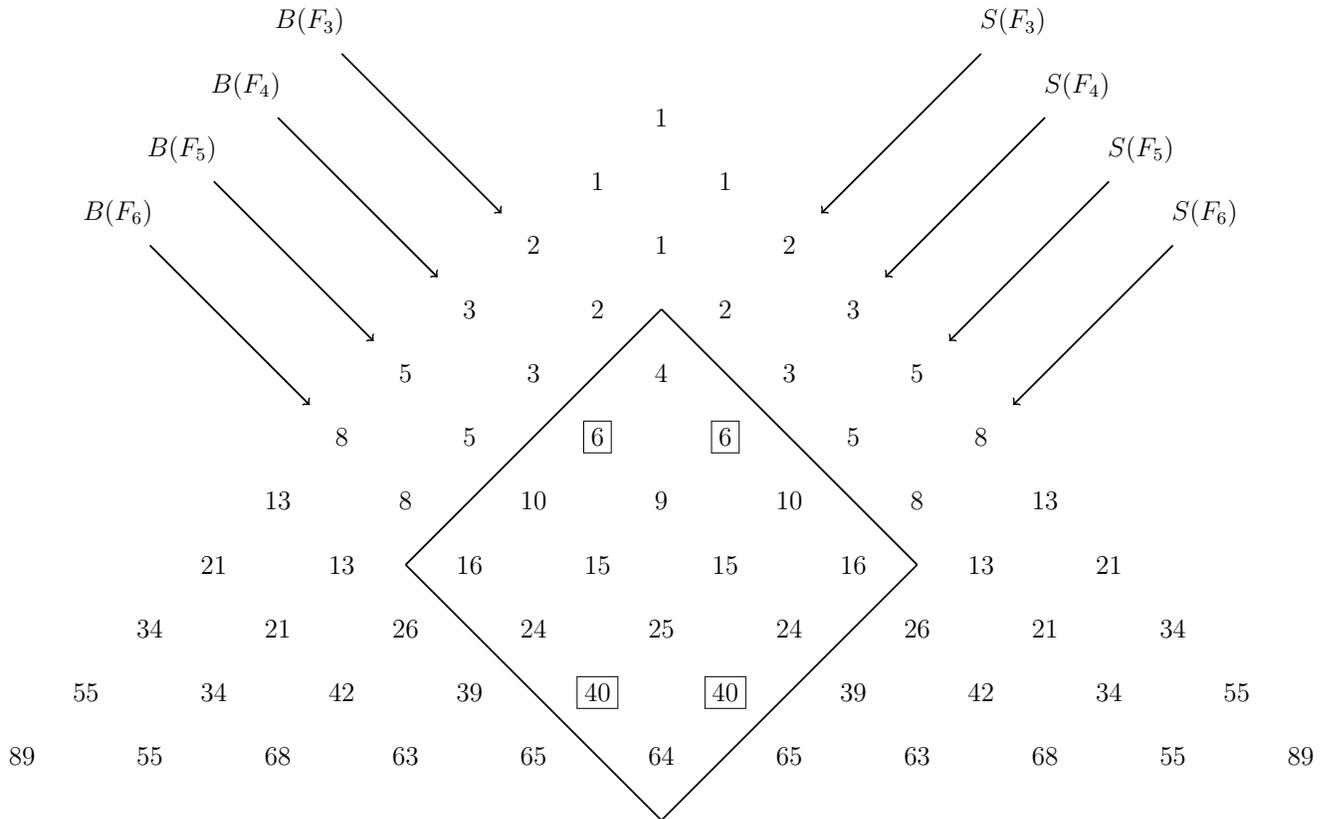


Figura 16: Rombo 4x4 con 4 puntos no-atacantes

La conclusión del Teorema 2.7 no siempre es cierta cuando  $n = 4$ . Por ejemplo, si  $a_1 = 6, a_2 = 6, a_3 = 40$  y  $a_4 = 40$  para el rombo mostrado en la Figura 16, entonces  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$ . Esto no es coincidencia; probamos que para cualquier configuración de puntos no-atacantes  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  en un rombo  $4 \times 4$ , el  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$  o  $2$ .

Hay  $4!$  formas en las que podemos elegir 4 puntos no-atacantes en un rombo de  $4 \times 4$ . Esto viene de la fórmula para encontrar toda de configuraciones en las que las  $n$  torres del ajedrez no se atacan, la cual es  $n!$ . Dividimos estas 24 configuraciones en dos tipos. Un rombo  $4 \times 4$  con 4 puntos no-atacantes es llamado de **tipo I**, si al menos uno de los puntos no-atacantes está en una esquina. Es una configuración del **tipo II**, si no hay puntos no-atacantes en ninguna esquina del rombo. Es decir, una configuración es del tipo II, si no del tipo I.

Es fácil ver que cada configuración del tipo I contiene una configuración de 3 puntos no-atacantes en un rombo  $3 \times 3$ . Esto se puede hacer «*ignorando*» uno de los puntos no atacantes en la esquina del rombo  $4 \times 4$  y la diagonal y diagonal invertida que lo contiene (ver figura 17). De hecho si aplicamos este argumento nuevamente y en el rombo  $3 \times 3$  e ignoramos el punto no-atacante de una de sus esquinas, este contiene una configuración de 2 puntos no-atacantes en un rombo  $2 \times 2$ . Note que hay exactamente 4 configuraciones del tipo II. Estas configuraciones son descritas en la Figura 18.

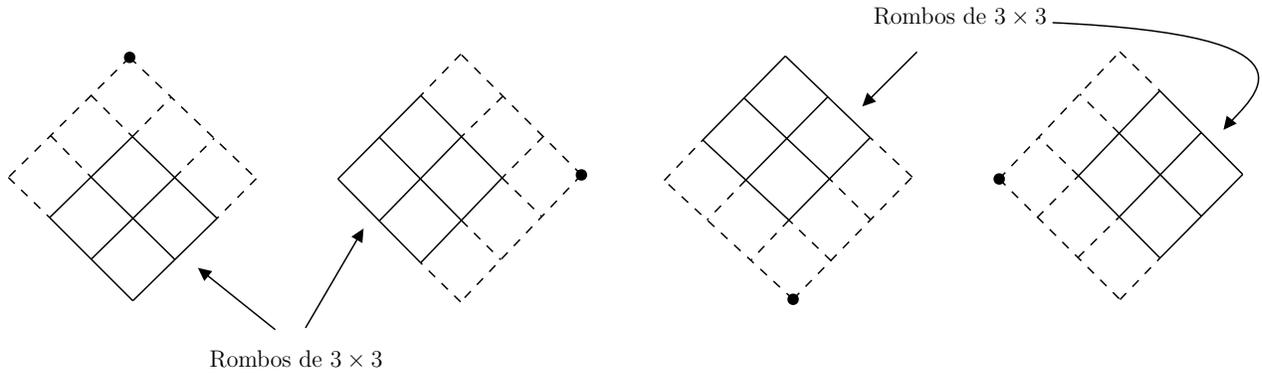


Figura 17: Algunas configuraciones del tipo I

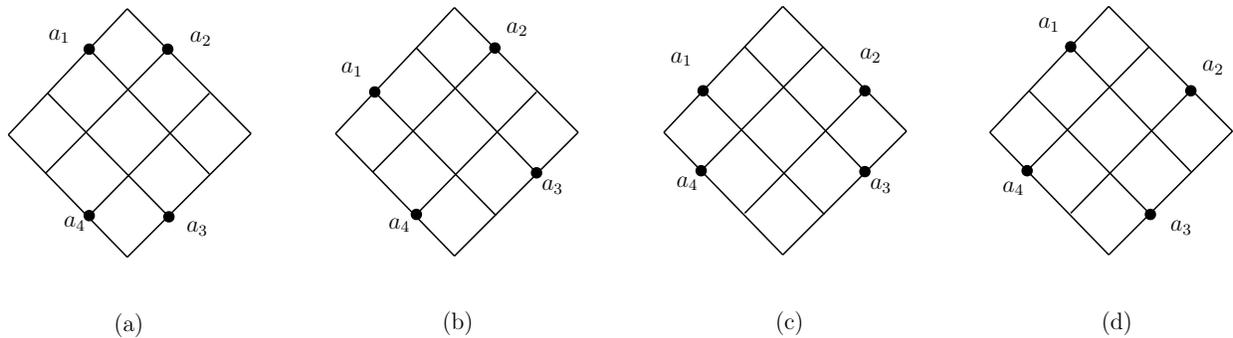


Figura 18: Todas las configuraciones del tipo II

**Lema 2.11.** Sea  $R$  una configuración del tipo II con  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  son puntos de no-ataques. Si existen  $t$  y  $k$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $R = R_4(t, k)$ , entonces  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = F_{\mathbf{mcd}(k+1, k+4, t+1, t+4)}$ .

*Demostración.*

Probemos que el  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = F_{\mathbf{mcd}(k+1, k+4, t+1, t+4)}$  para la configuración en la Figura 18 (a); Las otras pruebas para los otras 3 configuraciones son similares. De las posiciones de  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  en  $R = R_4(t, k)$  mostradas en la Figura 18 (a), podemos ver que  $a_1 = F_{k+1}F_{t+2}, a_2 = F_{k+2}F_{t+1}, a_3 = F_{k+4}F_{t+3}$  y  $a_4 = F_{k+3}F_{t+4}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) &= \mathbf{mcd}(F_{k+1}F_{t+2}, F_{k+2}F_{t+1}, F_{k+4}F_{t+3}, F_{k+3}F_{t+4}) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_{k+1}F_{t+2}, F_{k+2}F_{t+1}), \mathbf{mcd}(F_{k+4}F_{t+3}, F_{k+3}F_{t+4})). \end{aligned} \quad (30)$$

El Lema 2.8 parte 2 implica que (30) es igual a

$$\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1, t+1)}F_{\mathbf{mcd}(t+2, k+2)}, F_{\mathbf{mcd}(k+4, t+4)}F_{\mathbf{mcd}(t+3, k+3)}). \quad (31)$$

Notemos que  $|k+1 - (k+3)| = 2$  entonces por Lema 2.7 el  $\mathbf{mcd}(k+1, k+3) = i$  donde  $i|2$  igualmente vemos que  $|t+1 - (t-3)| = 2$  entonces el  $\mathbf{mcd}(t+1, t+3) = i$ , luego el  $\mathbf{mcd}(k+1, k+3, t+1, t+3) = i$ . Por esto y el Teorema 2.4 implica que

$$\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1, t+1)}, F_{\mathbf{mcd}(t+3, k+3)}) = F_{\mathbf{mcd}(k+1, t+1, t+3, k+3)} = F_i$$

$$\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(t+2, k+2)}, F_{\mathbf{mcd}(k+4, t+4)}) = F_{\mathbf{mcd}(t+2, k+2, k+4, t+4)} = F_i.$$

Esto y la Proposición 2.1 parte 2, prueba que (31) es igual a

$$\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1, t+1)}, F_{\mathbf{mcd}(k+4, t+4)}) \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(t+3, k+3)}, F_{\mathbf{mcd}(t+2, k+2)}). \quad (32)$$

Aplicando el Lema 2.8 parte 1 a lo siguiente se obtiene

$$\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(t+3, k+3)}, F_{\mathbf{mcd}(t+2, k+2)}) = F_{\mathbf{mcd}(t+3, k+3, t+2, k+2)} = F_1.$$

Por esto y (32),(30) y (31) queda probado el Lema para la figura 18a.

Ahora probamos para la configuración mostrada en la figura 18b.

Podemos ver que  $a_1 = F_{k+1}F_{t+3}, a_2 = F_{k+2}F_{t+1}, a_3 = F_{k+4}F_{t+2}$  y  $a_4 = F_{k+3}F_{t+4}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) &= \mathbf{mcd}(F_{k+1}F_{t+3}, F_{k+2}F_{t+1}, F_{k+4}F_{t+2}, F_{k+3}F_{t+4}) \\ &= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(F_{k+1}F_{t+3}, F_{k+2}F_{t+1}), \mathbf{mcd}(F_{k+4}F_{t+2}, F_{k+3}F_{t+4})). \end{aligned} \quad (33)$$

El Lema 2.8 parte 2 implica que (33) es igual a

$$\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1, t+1)}F_{\mathbf{mcd}(t+3, k+2)}, F_{\mathbf{mcd}(k+4, t+4)}F_{\mathbf{mcd}(t+2, k+3)}). \quad (34)$$

Notemos que  $|k+1 - (k+3)| = 2$  entonces por Lema 2.7 tenemos que el  $\mathbf{mcd}(k+1, k+3) = j$  donde  $j|2$  y el  $\mathbf{mcd}(t+1, t+2) = 1$  ya que es una aplicación directa del Lema 2.8, entonces el  $\mathbf{mcd}(k+1, k+3, t+1, t+3) = 1$ . Por esto y el Teorema 2.4 implica que

$$\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1, t+1)}, F_{\mathbf{mcd}(t+2, k+3)}) = F_{\mathbf{mcd}(k+1, t+1, t+2, k+3)} = F_1 = 1.$$

Esto y la Proposición 2.1 parte 2, prueba que (34) es igual a

$$\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(k+1, t+1)}, F_{\mathbf{mcd}(k+4, t+4)}) \mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(t+2, k+3)}, F_{\mathbf{mcd}(t+3, k+2)}). \quad (35)$$

Aplicando el Lema 2.8 parte 1 a lo siguiente se obtiene

$$\mathbf{mcd}(F_{\mathbf{mcd}(t+2,k+3)}, F_{\mathbf{mcd}(t+3,k+2)}) = F_{\mathbf{mcd}(t+2,k+3,t+3,k+2)} = F_1.$$

Por esto y (33),(34) y (35) queda probado el lema para la Figura 18b.

Notemos que sólo algunos índices cambiaron con respecto a la Figura 18a pero la prueba es la misma y se obtiene el mismo resultado, entonces sólo mencionamos las coordenadas de las dos figuras restantes y su prueba es análoga.

Para Figura 18c las coordenadas son:  $a_1 = F_{k+1}F_{t+3}, a_2 = F_{k+3}F_{t+1}, a_3 = F_{k+3}F_{t+2}$  y  $a_4 = F_{k+2}F_{t+4}$ .

Para la Figura 18d las coordenadas son:  $a_1 = F_{k+1}F_{t+2}, a_2 = F_{k+3}F_{t+1}, a_3 = F_{k+4}F_{t+3}$  y  $a_4 = F_{k+2}F_{t+4}$ . ■

**Teorema 2.8.** *Sea  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  puntos de no-ataque en un rombo  $R$  de  $4 \times 4$ . Si existen  $t$  y  $k$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $R = R_4(t, k)$ , entonces*

1. Si  $R$  es del tipo I, entonces el  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$ .
2. Si  $R$  es del tipo II y el  $\mathbf{mcd}(k+1, t+1, 3) = 1$ , entonces el  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$ .
3.  $R$  es del tipo II y el  $\mathbf{mcd}(k+1, t+1, 3) = 3$  si y solo si el  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$ .

*Demostración.*

1. Asumamos que  $R$  es del tipo I. SPDG supongamos que  $a_4$  es una esquina en  $R$ .

Entonces,  $a_1, a_2$  y  $a_3$  forman una configuración de 3 puntos de no-ataque en un rombo de  $3 \times 3$ . Esto y el Teorema 2.7 implica que  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = 1$ . Por lo tanto, el  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$ .

Esto prueba la parte (1) del teorema.

2. Asumamos que  $R$  es del tipo II y que el  $\mathbf{mcd}(k+1, t+1, 3) = 1$ .

Por lema anterior sabemos que  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = F_{\mathbf{mcd}(k+1,k+4,t+1,t+4)}$ .

Si  $d = \mathbf{mcd}(k+1, k+4, t+1, t+4)$ , entonces es fácil ver que  $d|3$ . Esto y que el  $\mathbf{mcd}(k+1, t+1, 3) = 1$  implica que  $d = 1$ .

Por lo tanto,  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = F_{\mathbf{mcd}(k+1,k+4,t+1,t+4)} = F_d = F_1 = 1$ .

Esto prueba la parte (2).

3. Para la condición suficiente asumimos que  $R$  es del tipo II y que el  $\mathbf{mcd}(k+1, t+1, 3) = 3$ . Si  $d = \mathbf{mcd}(k+1, k+4, t+1, t+4)$ , entonces es fácil ver que  $d|3$ .

Lo anterior y que el  $\mathbf{mcd}(k+1, t+1, 3) = 3$  implica que  $3|d$ . Entonces,  $d = 3$ . Por lo tanto, por el Lema 2.11 tenemos que

$$\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = F_{\mathbf{mcd}(k+1,k+4,t+1,t+4)} = F_3 = 2.$$

Ahora probemos la condición suficiente.

Recíprocamente, si el  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$ , entonces la parte (1) y (2) implica que  $R$  no es una configuración del tipo I y que el  $\mathbf{mcd}(k + 1, t + 1, 3) \neq 1$ . Entonces,  $R$  es del tipo II y el  $\mathbf{mcd}(k + 1, t + 1, 3) = 3$ .

Con esto concluimos las pruebas. ■

**Corolario 2.1.** *Sea  $P$  un polígono en el triángulo de Hosoya y sea  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  una colección de puntos de no-ataque en  $P$  con  $n \geq 3$ . Si existen  $t$  y  $k$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $A \subset R_n(t, k)$ , entonces*

$$\mathbf{mcd}(a_1, \dots, a_n) \begin{cases} 2, & \text{si } n = 4, R \text{ es del tipo II y el } \mathbf{mcd}(k + 1, t + 1, 3) = 3; \\ 1, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración.*

1. Para el primer caso tenemos  $n = 4$ , donde  $R$  es el tipo II y el  $\mathbf{mcd}(k + 1, t + 1, 3) = 3$ , por Teorema 2.8 parte 3 tenemos que el  $\mathbf{mcd}(a_1, \dots, a_n) = 2$ .
2. Para el otro caso tenemos para  $n \geq 3$  excepto el caso anterior.

Por lo tanto comprende el caso del Teorema 2.7 y los casos mostrados en la parte 1 y 2 del Teorema 2.8 y para estos se cumple que  $\mathbf{mcd}(a_1, \dots, a_n) = 1$ . ■

## 2.5. La sucesión generalizada de Hosoya.

**Definición 2.8.** *La sucesión generalizada de Hosoya  $\{H_{a,b}(r, k)\}_{r \geq k \geq 1}$  se define recursivamente por:*

$$H_{a,b}(1, 1) = a^2; \quad H_{a,b}(2, 1) = ab; \quad H_{a,b}(2, 2) = ab; \quad H_{a,b}(3, 2) = b^2$$

$$H_{a,b}(r, k) = H_{a,b}(r - 1, k) + H_{a,b}(r - 2, k) \tag{36}$$

$$H_{a,b}(r, k) = H_{a,b}(r - 1, k - 1) + H_{a,b}(r - 2, k - 2) \tag{37}$$

donde  $r > 2$  y  $1 \leq k \leq r$ .

Es fácil ver que si dejamos  $a = b = 1$  en la sucesión generalizada de Hosoya, entonces obtenemos la sucesión regular de Hosoya  $\{H(r, k)\}_{r \geq k \geq 1}$ . Sabemos que

$$H(r, k) = F_k F_{r-k+1}$$

para todos los números naturales  $r, k$  tal que  $k \leq r$ . Esto y la Proposición 2.3 muestran que nuestra definición de  $\{H_{a,b}(r, k)\}_{r \geq k \geq 1}$  es la generalización «correcta» para  $\{H(r, k)\}_{r \geq k \geq 1}$ .

**Proposición 2.3.** Si  $r$  y  $k$  son números naturales tal que  $k \leq r$ , entonces

$$H_{a,b}(r, k) = G_k G_{r-k+1},$$

para todos los enteros  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.*

Probamos primero por inducción fuerte sobre  $r$  que

$$H_{a,b}(r, 1) = a G_r \text{ para todo } r \geq 3. \quad (38)$$

- Caso base:

Sabemos que  $H_{a,b}(r, 1) = H_{a,b}(r-1, 1) + H_{a,b}(r-2, 1)$ .

Cuando  $r = 3$ , tenemos:

$$\begin{aligned} H_{a,b}(3, 1) &= H_{a,b}(2, 1) + H_{a,b}(1, 1) \\ &= ab + a^2 \quad \text{definición de sucesión generalizada de Hosoya.} \\ &= a(b + a) \\ &= a(G_2 + G_1) \quad \text{definición de sucesión generalizada de Fibonacci.} \\ &= a G_3. \end{aligned}$$

Claramente, se cumple el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo tal que  $r = k$ , supongamos que para  $i$  un entero positivo tal que  $i \leq k$ , se cumple:

$$H_{a,b}(i, 1) = a G_i.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $r = k + 1$ ;

$$\begin{aligned} H_{a,b}(k+1, 1) &= H_{a,b}(k, 1) + H_{a,b}(k-1, 1) \\ &= a G_k + a G_{k-1} \quad \text{por hipótesis inductiva.} \\ &= a(G_k + G_{k-1}) \\ &= a G_{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $r$ .

Usando un argumento similar podemos probar por inducción fuerte sobre  $r$  que

$$H_{a,b}(r, 2) = b G_{r-1} \text{ para todo } r \geq 4. \quad (39)$$

- Caso base:

Sabemos que  $H_{a,b}(r, 2) = H_{a,b}(r - 1, 2) + H_{a,b}(r - 2, 2)$ .

Cuando  $r = 4$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 H_{a,b}(4, 2) &= H_{a,b}(3, 2) + H_{a,b}(2, 2) \\
 &= b^2 + ab \quad \text{definición de sucesión generalizada de Hosoya.} \\
 &= b(b + a) \\
 &= b(G_2 + G_1) \quad \text{definición de sucesión generalizada de Fibonacci.} \\
 &= b G_3.
 \end{aligned}$$

Claramente, se cumple el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo tal que  $r = k$ , supongamos que para  $i$  un entero positivo tal que  $i \leq k$ , se cumple:

$$H_{a,b}(i, 2) = b G_{i-1}.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $r = k + 1$ :

$$\begin{aligned}
 H_{a,b}(k + 1, 2) &= H_{a,b}(k, 2) + H_{a,b}(k - 1, 2) \\
 &= bG_{k-1} + bG_{k-2} \quad \text{por hipótesis inductiva.} \\
 &= b(G_{k-1} + G_{k-2}) \\
 &= b G_k.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $r$ .

Ahora probemos por inducción fuerte sobre  $k$  que para cualquier entero positivo  $k$  se cumple:

$$H_{a,b}(r, k) = G_k G_{r-k+1}.$$

para todos los enteros positivos  $r$  tal que  $r \geq k$ .

- Caso base:

Cuando  $k = 1$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 H_{a,b}(r, 1) &= G_1 G_r \\
 &= a G_r \quad \text{definición generalizada de Fibonacci.}
 \end{aligned}$$

Se cumple por lo demostrado en (38).

Cuando  $k = 2$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 H_{a,b}(r, 2) &= G_2 G_{r-1} \\
 &= b G_r \quad \text{definición generalizada de Fibonacci.}
 \end{aligned}$$

Se cumple por lo demostrado en (39).



Observe que cualquier diagonal de la Figura 20 es la colección de todos los números generalizados de Fibonacci multiplicada por un particular  $G_n$ . Más precisamente, una  $n$ -ésima diagonal en el triángulo generalizado de Hosoya es la colección de todos los números generalizados de Fibonacci multiplicados por un  $G_n$ . Distinguimos entre *diagonal* y *diagonal invertida*. Escribimos  $S(G_n)$  y  $B(G_m)$  para referirnos a la diagonal y la diagonal invertida, respectivamente como se observa en la figura 21.

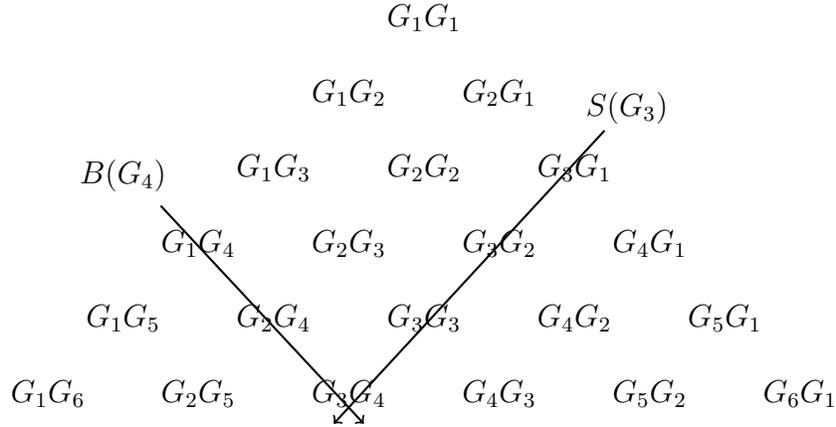


Figura 21: Diagonal  $S(G_3)$  y diagonal invertida  $B(G_4)$

Ahora definamos lo anterior formalmente.

**Definición 2.10.** Sean  $n$  y  $m$  enteros positivos.

1. Llamaremos *diagonal* a la sucesión de coordenadas del triángulo que se encuentran en la diagonal  $n$ , y se escribe como:

$$S(G_n) = \{H(n + i - 1, n)\}_{i=1}^{\infty}.$$

2. Llamaremos *diagonal invertida* a la sucesión de coordenadas del triángulo que se encuentran en la diagonal invertida  $m$ , y se escribe como:

$$B(G_m) = \{H(m + i - 1, i)\}_{i=1}^{\infty}.$$

En consecuencia de esta definición y la Proposición 2.3 obtenemos el siguiente lema.

**Lema 2.12.** La diagonal y la diagonal invertida pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$S(G_n) = \{G_n G_i | i \in \mathbb{N}\} \quad B(G_m) = \{G_i G_m | i \in \mathbb{N}\}.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} S(G_n) &= \{H(n + i - 1, n)\}_{i=1}^{\infty} \quad \text{por Definición 2.10} \\ &= \{G_n G_{n+i-1-n+1} | i \in \mathbb{N}\} \quad \text{por Proposición 2.3} \\ &= \{G_n G_i | i \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
 B(G_m) &= \{H(m+i-1, i)\}_{i=1}^{\infty} \quad \text{por Definición 2.10} \\
 &= \{G_i G_{m+i-1-i+1} | i \in \mathbb{N}\} \quad \text{por Proposición 2.3} \\
 &= \{G_i G_m | i \in \mathbb{N}\}.
 \end{aligned}$$

■

Ahora veamos que podemos asociar un par ordenado de números naturales a cada elemento del triángulo generalizado de Hosoya.

**Definición 2.11.** Si  $P$  es un punto en el triángulo generalizado de Hosoya, entonces existen dos números generalizados de Fibonacci  $G_m$  y  $G_n$  tal que  $P \in B(G_m) \cap S(G_n)$  (La Figura 21 representa este hecho para  $m=4$  y  $n=3$ .), entonces  $P = G_m G_n$ . Diremos que el punto  $P$  corresponde al par  $(m, n)$  y este par  $(m, n)$  es llamado la coordenada diagonal de  $P$ .

Gracias a esta definición, podemos ver la Proposición 2.3 como una forma de cambiar de coordenadas rectangulares a coordenadas diagonales y viceversa.

A continuación, damos algunos ejemplos del triángulo generalizado de Hosoya.

**Ejemplo 2.5.** Podemos construir diferentes triángulos fijando valores para los enteros  $a$  y  $b$ . Para el primer ejemplo fijamos  $a = b = 1$  y obtenemos la siguiente secuencia numérica.

$$G_1 = 1, \quad G_2 = 1, \quad G_3 = 2, \quad G_4 = 3, \quad G_5 = 5, \quad G_6 = 8, \dots$$

Sustituyendo esos valores en la Figura 20 obtenemos el triángulo regular de Hosoya. (ver la Figura 22)

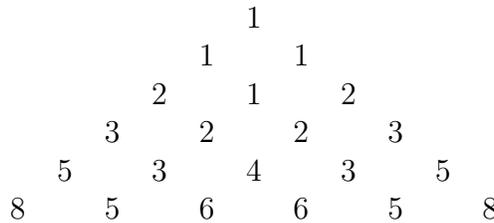


Figura 22: Triángulo regular de Hosoya.

**Ejemplo 2.6.** Ahora fijamos  $a = 7$  y  $b = 2$  y obtenemos la siguiente secuencia numérica.

$$G_1 = 7, \quad G_2 = 2, \quad G_3 = 9, \quad G_4 = 11, \quad G_5 = 20, \quad G_6 = 31, \dots$$

Sustituyendo estos valores en la Figura 20 obtenemos un triángulo de Hosoya con  $a = 7$  y  $b = 2$ . (ver la Figura 23)

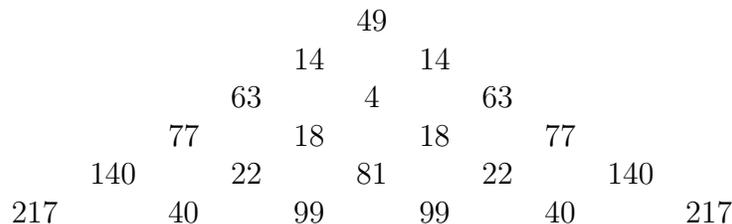


Figura 23: Triángulo generalizado de Hosoya.

## 2.6. La estrella generalizada de David

**Definición 2.12.** Sea  $E$  un hexágono regular formado con puntos situados en un triángulo generalizado de Hosoya. Digamos que  $E$  tiene longitud  $l$  si un lado del hexágono contiene  $l$  puntos del triángulo generalizado de Hosoya.

Denotamos los puntos de las esquinas de  $E$  como  $a_1, a_2, a_3$  y  $b_1, b_2, b_3$ . La estrella de David de longitud  $l$  es una configuración formada por los seis puntos de  $E$ . Es decir, la estrella de David es una configuración de seis puntos en el triángulo de Hosoya formado por dos triángulos con vértices  $a_1, a_2, a_3$  y  $b_1, b_2, b_3$  de  $E$ .

La Figura 24 parte (a) representa una estrella de David de longitud dos. Las líneas continuas en la Figura 24 parte (b) y (c) muestran una estrella de David de longitud tres y cuatro, respectivamente.

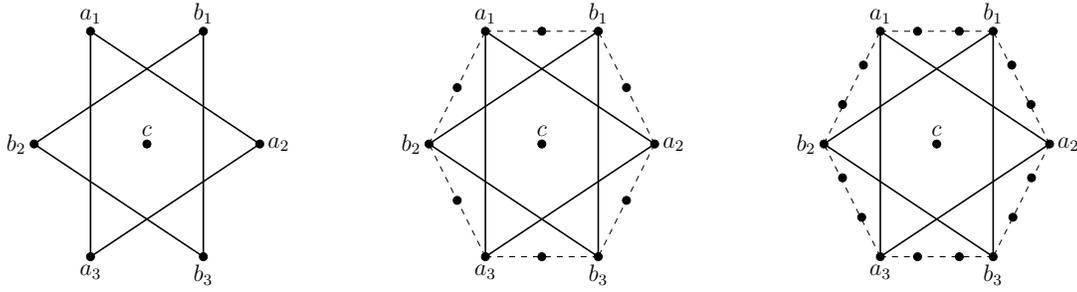


Figura 24: Estrellas de David (a), (b) y (c).

Primero tomamos algunos ejemplos de la estrella generalizada de David de tamaño dos como en la Figura 24 parte (a). Podemos obtener una caracterización completa de sus vértices  $a_1, a_2, a_3$  y  $b_1, b_2, b_3$  sabiendo la ubicación de uno. Por ejemplo, si  $(m, n)$  son las coordenadas diagonales de  $a_2$ , entonces tenemos

$$\begin{array}{llll} a_1 = G_{m+1}G_{n-2}, & a_2 = G_mG_n & y & a_3 = G_{m+2}G_{n-1}, \\ b_1 = G_mG_{n-1}, & b_2 = G_{m+2}G_{n-2} & y & b_3 = G_{m+1}G_n. \end{array}$$

Necesitamos dar valores para  $a, b, m$  y  $n$  para considerar algunos ejemplos particulares.

**Ejemplo 2.7.** Si tomamos  $a = b = 1$  (el triángulo regular de Hosoya),  $m = 5$  y  $n = 4$ , obtenemos

$$a_1 = 8, \quad a_2 = 15, \quad a_3 = 26, \quad b_1 = 10, \quad b_2 = 13, \quad b_3 = 24.$$

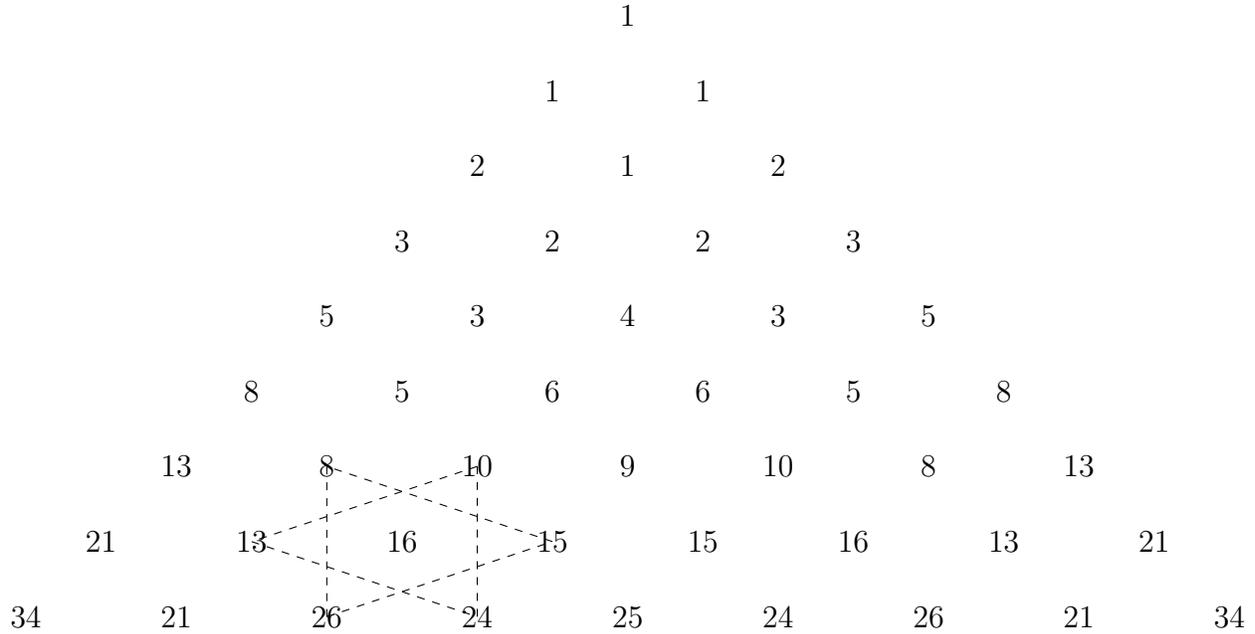


Figura 25: Estrella de David de longitud dos en el triángulo de Hosoya

**Ejemplo 2.8.** si tomamos  $a = 7$ ,  $b = 2$  (el triángulo generalizado de Hosoya de la Figura 23),  $m = 3$  y  $n = 3$ , obtenemos

$$a_1 = 77, \quad a_2 = 81, \quad a_3 = 40, \quad b_1 = 18, \quad b_2 = 140, \quad b_3 = 99.$$

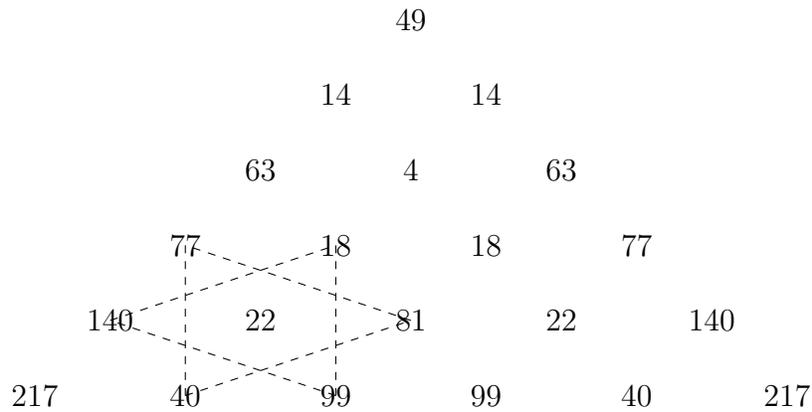


Figura 26: Estrella de David de longitud dos en el triángulo generalizado de Hosoya

Note que en los dos casos  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 1$ . Anteriormente demostramos que esto siempre es cierto para cualquier estrella de David de longitud dos en el triángulo regular de Hosoya. Demostraremos un resultado más general. Es decir, mostraremos que  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = (\mathbf{mcd}(a, b))^2$  para cualquier estrella de David de longitud dos en cualquier triángulo generalizado de Hosoya (ver Teorema 2.11).

Ahora, si consideramos algunos ejemplos de la estrella generalizada de David de longitud tres como en la Figura 24 parte (b). Podemos obtener una caracterización completa de sus vértices  $a_1, a_2, a_3$  y  $b_1, b_2, b_3$  si conocemos la ubicación de uno. Por ejemplo, si  $(m, n)$  son las coordenadas diagonales de  $a_2$ , obtenemos

$$\begin{array}{llll} a_1 = G_{m+2}G_{n-4}, & a_2 = G_m G_n & y & a_3 = G_{m+4}G_{n-2}, \\ b_1 = G_m G_{n-2}, & b_2 = G_{m+4}G_{n-4} & y & b_3 = G_{m+2}G_n. \end{array}$$

También necesitamos dar valores de  $a, b, m$  y  $n$  para considerar algunos ejemplos particulares.

**Ejemplo 2.9.** Si tomamos  $a = b = 1$  (el triángulo regular de Hosoya),  $m = 3$  y  $n = 5$ , obtenemos

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 10, \quad a_3 = 26, \quad b_1 = 4, \quad b_2 = 13, \quad b_3 = 25.$$

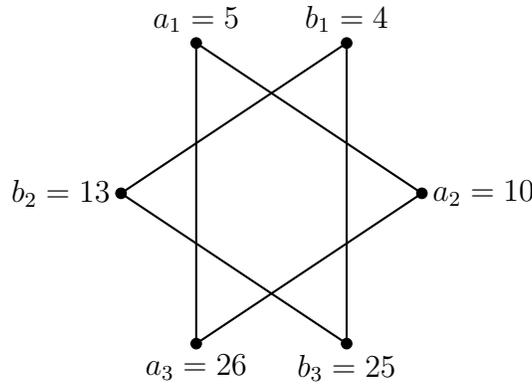


Figura 27: Estrella de David de longitud 3 en el triángulo de Hosoya

Por lo tanto,  $\text{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \text{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 1$ .

Sin embargo, veamos con el siguiente ejemplo que esta propiedad no siempre se cumple.

**Ejemplo 2.10.** si tomamos  $m = 8$  y  $n = 16$  en el triángulo regular de Hosoya, tenemos

$$a_1 = 7920, \quad a_2 = 20727, \quad a_3 = 54288, \quad b_1 = 7917, \quad b_2 = 20736, \quad b_3 = 54285,$$

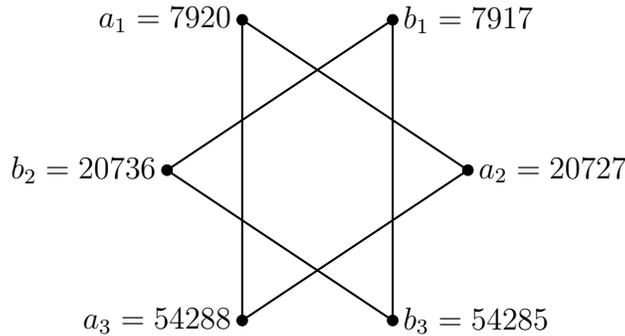


Figura 28: Estrella de David de longitud 3 en el triángulo de Hosoya

$\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = 9$  y  $\mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 3$ . En este caso  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) \neq \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3)$ .

Podemos construir ejemplos similares para la estrella de David de longitud cuatro.

En general, si  $(m, n)$  son las coordenadas diagonales de  $a_2$ , entonces los vértices de la estrella de David de longitud  $l$  en el triángulo generalizado de Hosoya están dados por

$$\begin{aligned} a_1 &= G_{m+(l-1)}G_{n-2(l-1)}, & a_2 &= G_mG_n & y & a_3 &= G_{m+2(l-1)}G_{n-(l-1)}, \\ b_1 &= G_mG_{n-(l-1)}, & b_2 &= G_{m+2(l-1)}G_{n-2(l-1)} & y & b_3 &= G_{m+(l-1)}G_n. \end{aligned}$$

para enteros positivos  $m$  y  $n$  tal que  $n > 2(l-1)$ . Es necesario que  $n > 2(l-1)$  para que  $a_1, a_3, b_1$  y  $b_2$  correspondan a puntos «reales» en el triángulo generalizado de Hosoya.

Terminemos esta sección con la siguiente definición.

**Definición 2.13.** Si una estrella de David de longitud  $l$  cumple que  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3)$ . Decimos que tiene la propiedad del **mcd**.

## 2.7. Propiedades del mcd de los números generalizados de Fibonacci

En esta sección estudiamos las propiedades del **mcd** de los números generalizados de Fibonacci, así como algunas de sus propiedades de modularidad. En particular, proporcionamos un análogo a la identidad  $\mathbf{mcd}(F_n, F_m) = F_{\mathbf{mcd}(n,m)}$  para los números generalizados de Fibonacci. Es decir,  $\mathbf{mcd}(G_n, G_m)$  es siempre un divisor de  $\mathbf{mcd}(a, b)F_{|m-n|}$  con igualdad cuando  $|m-n| \in \{1, 2\}$ . También probamos que si un número generalizado de Fibonacci  $G_n$  es divisible por  $F_w$ , entonces el **mcd** de  $G_n$  y  $G_{n+kw}$  es  $F_w$  para cualquier entero  $k$  distinto de cero.

Usamos estos resultados para probar la propiedad del **mcd** para la estrella de David de longitud dos y tres en el triángulo generalizado de Hosoya. Entenderemos  $a|b$  como  $a$  divide a  $b$ .

**Lema 2.13.** Si  $\mathbf{mcd}(a, b) = d$ ,  $a' = a/d$  y  $b' = b/d$ , entonces  $G_n(a, b) = dG_n(a', b')$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.*

Sabemos que  $G_n(a, b) = aF_{n-2} + bF_{n-1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Así

$$G_n(a, b) = da'F_{n-2} + db'F_{n-1} = d(a'F_{n-2} + b'F_{n-1}) = dG_n(a', b'). \quad \blacksquare$$

Utilizaremos  $G_m$  para  $G_m(a, b)$  para cualquier entero  $m$  si no hay ambigüedad. Del mismo modo, utilizamos  $G'_m$  para  $G_m(a', b')$  si  $d = \mathbf{mcd}(a, b)$ ,  $a' = a/d$  y  $b' = b/d$ .

**Lema 2.14.** Si  $a, b, n$  y  $w$  son enteros, entonces

$$G_{n+w}(a, b) = (aF_{w-1} + bF_w)F_{n-2} + (aF_w + bF_{w+1})F_{n-1} = G_n(G_{w+1}, G_{w+2}).$$

*Demostración.*

Sabemos que  $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$  por Teorema 2.3. Así

$$\begin{aligned}
 G_{n+w}(a, b) &= aF_{w+n-2} + bF_{n-1+w} \\
 &= a(F_{w-1}F_{n-2} + F_wF_{n-1}) + b(F_{n-2}F_w + F_{n-1}F_{w+1}) \quad \text{por Teorema 2.3} \\
 &= (aF_{w-1} + bF_w)F_{n-2} + (aF_w + bF_{w+1})F_{n-1} \\
 &= G_{w+1}F_{n-2} + G_{w+2}F_{n-1} \quad \text{por Teorema 1.12} \\
 &= G_n(G_{w+1}, G_{w+2}). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Teorema 2.9.** *Sea  $d = \mathbf{mcd}(a, b)$ . Si  $n$  y  $w$  son enteros positivos, entonces*

$$\mathbf{mcd}(G_n, G_{n+w}) \mid dF_w$$

*Además, si  $w = 1, 2$ , entonces  $\mathbf{mcd}(G_n, G_{n+w}) = d$ .*

*Demostración.*

El Lema 2.13 implica que  $\mathbf{mcd}(G_n, G_{n+w}) = d \mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n+w})$ . Por tanto, basta con probar el teorema para  $\mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n+w})$ .

Primero probamos que  $\mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n+1}) = 1$ . Usamos inducción sobre  $n$ .

- Caso base:

Cuando  $n = 1$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{mcd}(G'_1, G'_2) &= \mathbf{mcd}(a', b') \\
 &= \mathbf{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) \\
 &= \frac{1}{d} \mathbf{mcd}(a, b) \\
 &= \frac{d}{d} = 1.
 \end{aligned}$$

Esto prueba el caso base.

- Hipótesis inductiva:

Sea  $k$  un entero positivo, supongamos que se cumple:

$$\mathbf{mcd}(G'_k, G'_{k+1}) = 1.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $n = k + 1$ :

Sea  $r$  un número natural tal que  $\mathbf{mcd}(G'_{k+1}, G'_{k+2}) = r$ . Así

$$r \mid G'_{k+1} \quad y \quad r \mid G'_{k+2}. \quad (40)$$

Por tanto,  $r \mid (G'_{k+2} - G'_{k+1})$ , ya que divide a cualquier combinación lineal. Así  $r \mid G'_k$ . Esto y (40) implican que  $r \mid \mathbf{mcd}(G'_k, G'_{k+1})$ . Por lo tanto, la hipótesis inductiva implica que  $r = 1$ . Esto prueba que

$$\mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n+1}) = 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+. \quad (41)$$

Ahora probamos que  $\mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n+w})$  divide a  $F_w$ . Sea  $d'$  un divisor de  $\mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n+w})$ , Por tanto,

$$d' \mid G'_n \quad y \quad d' \mid G'_{n+w}. \quad (42)$$

Entonces,  $d'$  divide a cualquier combinación lineal de  $G'_n$  y  $G'_{n+w}$ . En particular,

$$d' \mid (G'_{n+w} - F_{w-1}G'_n). \quad (43)$$

Probamos que  $d' \mid F_w G'_{n+1}$ . Ya que  $G'_k = G_k(a', b')$  para cualquier entero positivo  $k$ , por el Lema 2.14 tenemos

$$G'_{n+w} = (a'F_{w-1} + b'F_w)F_{n-2} + (a'F_w + b'F_{w+1})F_{n-1}.$$

Por tanto

$$G'_{n+w} - F_{w-1}G'_n = [(a'F_{w-1} + b'F_w)F_{n-2} + (a'F_w + b'F_{w+1})F_{n-1}] - F_{w-1}(a'F_{n-2} + b'F_{n-1}).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} G'_{n+w} - F_{w-1}G'_n &= b'F_w F_{n-2} + (a'F_w + b'(F_{w+1} - F_{w-1}))F_{n-1} \\ &= b'F_w F_{n-2} + (a'F_w + b'F_w)F_{n-1} \\ &= F_w(a'F_{n-1} + b'(F_{n-2} + F_{n-1})) \\ &= F_w(a'F_{n-1} + b'F_n) \\ &= F_w G'_{n+1}. \end{aligned}$$

Esto y (43) implican que  $d' \mid F_w G'_{n+1}$ . De (41) y (42) tenemos que  $\mathbf{mcd}(d', G'_{n+1}) = 1$  ya que  $d'$  es divisor de  $G'_n$ , además  $G'_n$  y  $G'_{n+1}$  no tienen divisores comunes, entonces se tiene que cumplir que  $d'$  y  $G'_{n+1}$  sean coprimos también. Este hecho y que  $d' \mid F_w G'_{n+1}$  implican que  $d' \mid F_w$ . Hemos demostrado que cualquier divisor de  $\mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n+w})$  es un divisor de  $F_w$ . Esto prueba que  $\mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n+w})$  divide a  $F_w$ .

Ahora probamos la segunda parte. La ecuación (41) prueba la segunda afirmación para  $w = 1$ . Si  $w = 2$ , entonces  $\mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n+2})$  divide a  $F_2$ . Por lo tanto,  $\mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n+2}) = 1 = \mathbf{mcd}(a', b')$ . ■

**Corolario 2.2.** Sean  $m, n, s$  y  $t$  enteros positivos. Si  $|m - n| \in \{1, 2\}$  y  $|s - t| \in \{1, 2\}$ , entonces

$$\mathbf{mcd}(G_m G_s, G_n G_t) = \mathbf{mcd}(G_m, G_t) \mathbf{mcd}(G_s, G_n).$$

*Demostración.*

Sea  $d = \mathbf{mcd}(a, b)$ ,  $a' = a/d$  y  $b' = b/d$ . Ya que  $|m - n| \in \{1, 2\}$  y  $|s - t| \in \{1, 2\}$ , aplicando el Teorema 2.9 en  $G'_m, G'_n$  y sabiendo que  $\mathbf{mcd}(a', b') = 1$  tenemos que  $\mathbf{mcd}(G'_m, G'_n) = 1$ . Este hecho y la Proposición 2.1 (parte 2) implican que

$$\mathbf{mcd}(G'_m G'_s, G'_n G'_t) = \mathbf{mcd}(G'_m, G'_t) \mathbf{mcd}(G'_s, G'_n).$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$d^2 \mathbf{mcd}(G'_m G'_s, G'_n G'_t) = d \mathbf{mcd}(G'_m, G'_t) d \mathbf{mcd}(G'_s, G'_n). \quad (44)$$

Utilizando el Lema 2.13 se puede ver fácilmente que

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(G_m, G_t) &= d \mathbf{mcd}(G'_m, G'_t) \\ \mathbf{mcd}(G_s, G_n) &= d \mathbf{mcd}(G'_s, G'_n) \\ \mathbf{mcd}(G_m G_s, G_n G_t) &= d^2 \mathbf{mcd}(G'_m G'_s, G'_n G'_t). \end{aligned}$$

Sustituyendo esas tres ecuaciones en (44) obtenemos

$$\mathbf{mcd}(G_m G_s, G_n G_t) = \mathbf{mcd}(G_m, G_t) \mathbf{mcd}(G_s, G_n). \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.10.** *Sea  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $n, w \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbf{mcd}(a, b) = 1$ , entonces*

$$G_n \equiv 0 \pmod{F_w} \text{ si y sólo si } \mathbf{mcd}(G_n, G_{n-w}) = \mathbf{mcd}(G_n, G_{n+w}) = F_w.$$

*Demostración.*

- Veamos la prueba de la implicación ( $\Leftarrow$ ).

Asumimos que  $\mathbf{mcd}(G_n, G_{n-w}) = \mathbf{mcd}(G_n, G_{n+w}) = F_w$ . De aquí se cumple que  $F_w | G_n$  y esto implica que:

$$G_n \equiv 0 \pmod{F_w}.$$

- Ahora veamos la otra implicación ( $\Rightarrow$ ).

Suponemos que  $G_n \equiv 0 \pmod{F_w}$  y probamos que  $\mathbf{mcd}(G_n, G_{n-w}) = \mathbf{mcd}(G_n, G_{n+w}) = F_w$ . Ya que  $G_n \equiv 0 \pmod{F_w}$ , existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $G_n = kF_w$ . Del Lema 2.14 tenemos que para todo  $m \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} G_{m+w} &= (aF_{w-1} + bF_w)F_{m-2} + (aF_w + bF_{w+1})F_{m-1} \\ &= (aF_{w-1} + bF_w)F_{m-2} + (aF_w + b(F_{w-1} + F_w))F_{m-1} \\ &= (aF_{m-2} + bF_{m-1})F_{w-1} + F_w(bF_{m-2} + aF_{m-1} + bF_{m-1}). \end{aligned}$$

Así,

$$G_{m+w} = G_m F_{w-1} + F_w (bF_{m-2} + aF_{m-1} + bF_{m-1}). \quad (45)$$

Tomando  $n$  en lugar de  $m$  en (45), eso y usando que  $G_n = kF_w$ , obtenemos

$$\begin{aligned} G_{n+w} &= kF_w F_{w-1} + F_w(bF_{n-2} + aF_{n-1} + bF_{n-1}) \\ &= F_w(kF_{w-1} + (bF_{n-2} + aF_{n-1} + bF_{n-1})). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $G_{n+w} \equiv 0 \pmod{F_w}$ . Así,  $F_w \mid \mathbf{mcd}(G_{n+w}, G_n)$ . Esto y utilizando el hecho de que  $\mathbf{mcd}(G_{n+w}, G_n) \mid F_w$  ya que  $d = 1$ , el cual se cumple por el Teorema 2.9 implican que  $F_w = \mathbf{mcd}(G_{n+w}, G_n)$ .

Ahora, tomando  $n - w$  en lugar de  $m$  en (45) obtenemos

$$G_n = G_{n-w}F_{w-1} + F_w(bF_{n-w-2} + aF_{n-w-1} + bF_{n-w-1}).$$

Ya que  $G_n = kF_w$ , tenemos que

$$\begin{aligned} G_{n-w}F_{w-1} &= kF_w - F_w(bF_{n-w-2} + aF_{n-w-1} + bF_{n-w-1}) \\ &= F_w(k - (bF_{n-w-2} + aF_{n-w-1} + bF_{n-w-1})). \end{aligned}$$

Esto indica que  $F_w \mid G_{n-w}F_{w-1}$ . Este hecho y que  $\mathbf{mcd}(F_w, F_{w-1}) = 1$  implican que  $F_w \mid G_{n-w}$  que en términos de módulo es  $G_{n-w} \equiv 0 \pmod{F_w}$ . Entonces

$$F_w \mid \mathbf{mcd}(G_{n-w}, G_n).$$

Esto y el hecho de que  $\mathbf{mcd}(G_{n-w}, G_n) \mid F_w$  ya que  $d = 1$ , el cual se cumple por el Teorema 2.9 implican que  $F_w = \mathbf{mcd}(G_{n-w}, G_n)$ . ■

Primero veamos una propiedad que cumple el  $\mathbf{mcd}$ , la cual se utiliza en la demostración del Lema 2.15.

**Proposición 2.4.** Sean  $a, b$  y  $c$  enteros positivos. Si se cumple que  $\mathbf{mcd}(a, c) = 1$ , entonces  $\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(a, b), c) = 1$ .

*Demostración.*

Supongamos que  $d = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(a, b), c)$ . De aquí

$$d \mid \mathbf{mcd}(a, b) \quad \text{entonces} \quad d \mid a.$$

También se cumple que  $d \mid c$ , luego

$$d \mid \mathbf{mcd}(a, c).$$

Pero por hipótesis  $\mathbf{mcd}(a, c) = 1$ , entonces  $d \mid 1$  y sabemos que  $1 \mid d$ . Esto implica que  $d = 1$ . ■

**Lema 2.15.** Sean  $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \rho, \phi \in \mathbb{N}$  y  $a, b \in \mathbb{Z}$  tal que  $\mathbf{mcd}(a, b) = 1$  y

$$D = \mathbf{mcd}(G_\alpha G_\beta, G_\delta G_\gamma, G_\rho G_\phi).$$

1. Si  $\alpha = \delta + 1$ ,  $\rho = \delta + 2$ ,  $\beta = \gamma - 2$ , y  $\phi = \gamma - 1$ , entonces  $D = 1$
2. Si  $\delta = \alpha + 1$ ,  $\rho = \alpha + 2$ ,  $\beta = \gamma - 1$ , y  $\phi = \gamma - 2$ , entonces  $D = 1$
3. Si  $\alpha = \delta + 2$ ,  $\rho = \delta + 4$ ,  $\beta = \gamma - 4$ , y  $\phi = \gamma - 2$ , entonces  $D = \mathbf{mcd}(G_\beta, G_\rho, G_\delta G_\gamma)$
4. Si  $\delta = \alpha + 2$ ,  $\rho = \alpha + 4$ ,  $\beta = \gamma - 2$ , y  $\phi = \gamma - 4$ , entonces  $D = \mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\gamma, G_\rho G_\phi)$ .

*Demostración.* Se sabe que

$$\mathbf{mcd}(G_\alpha G_\beta, G_\delta G_\gamma, G_\rho G_\phi) = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha G_\beta, G_\delta G_\gamma), G_\rho G_\phi) \quad (46)$$

$$= \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha G_\beta, G_\rho G_\phi), G_\delta G_\gamma). \quad (47)$$

- Probamos la parte (1).

Ya que  $|\alpha - \delta| = 1$  y  $|\beta - \gamma| = 2$ . El Corolario 2.2 y (46) implican que

$$D = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\gamma) \mathbf{mcd}(G_\delta, G_\beta), G_\rho G_\phi). \quad (48)$$

Por el Teorema 2.9,  $|\alpha - \rho| = 1$  y  $|\beta - \phi| = 1$ , tenemos  $\mathbf{mcd}(G_\rho, G_\alpha) = \mathbf{mcd}(G_\phi, G_\beta) = 1$  ya que  $\mathbf{mcd}(a, b) = 1$ . Así,

$$\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\gamma, G_\alpha), G_\rho) = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\delta, G_\beta), G_\phi) = 1.$$

Esto, la Proposición 2.1 parte (2) y (48) implican que

$$D = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\gamma), G_\phi) \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\delta, G_\beta), G_\rho).$$

Usando el Teorema 2.9,  $|\gamma - \phi| = 1$  y  $|\delta - \rho| = 2$ , de aquí tenemos que  $\mathbf{mcd}(G_\phi, G_\gamma) = 1$  y  $\mathbf{mcd}(G_\rho, G_\delta) = 1$  y de esta manera

$$\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\gamma), G_\phi) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\delta, G_\beta), G_\rho) = 1.$$

Por lo tanto  $D = 1$ . Esto prueba la parte (1).

- Probamos la parte (2).

Ya que  $|\alpha - \rho| = 2$  y  $|\beta - \phi| = 1$ . El Corolario 2.2 y (47) implican que

$$D = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\phi) \mathbf{mcd}(G_\rho, G_\beta), G_\delta G_\gamma). \quad (49)$$

Por el Teorema 2.9,  $|\alpha - \delta| = 1$  y  $|\beta - \gamma| = 1$ , tenemos  $\mathbf{mcd}(G_\delta, G_\phi) = \mathbf{mcd}(G_\gamma, G_\beta) = 1$  ya que  $\mathbf{mcd}(a, b) = 1$ . Así,

$$\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\gamma, G_\phi), G_\delta) = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\rho, G_\beta), G_\gamma) = 1.$$

Esto, la Proposición 2.1 parte (2) y (49) implican que

$$D = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\phi), G_\gamma) \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\rho, G_\beta), G_\delta).$$

Usando el Teorema 2.9,  $|\phi - \gamma| = 2$  y  $|\rho - \delta| = 1$ , de aquí tenemos que  $\mathbf{mcd}(G_\phi, G_\gamma) = 1$  y  $\mathbf{mcd}(G_\delta, G_\rho) = 1$  y de esta manera

$$\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\phi), G_\gamma) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\rho, G_\beta), G_\delta) = 1.$$

Por lo tanto  $D = 1$ . Esto prueba la parte (2).

- Ahora probamos la parte (3).

El Teorema 2.9,  $|\alpha - \delta| = 2$  y  $|\gamma - \phi| = 2$ , implican que  $\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\delta) = 1$  y  $\mathbf{mcd}(G_\gamma, G_\phi) = 1$ . Por lo tanto,  $\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\phi), G_\delta) = 1$  y  $\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\phi), G_\gamma) = 1$ . Así,

$$\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\phi), G_\delta G_\gamma) = 1. \quad (50)$$

Ya que  $|\alpha - \rho| = 2$  y  $|\beta - \phi| = 2$ , el Corolario 2.2 y (47), implican que

$$D = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\phi) \mathbf{mcd}(G_\beta, G_\rho), G_\delta G_\gamma). \quad (51)$$

El Teorema 2.9,  $|\alpha - \rho| = 2$  y  $|\beta - \phi| = 2$  implican que

$$\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\rho) = \mathbf{mcd}(G_\beta, G_\phi) = 1.$$

Por lo tanto,  $\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\phi), \mathbf{mcd}(G_\beta, G_\rho)) = 1$ . Esto y el Corolario 2.6 implican que

$$\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\phi) \mathbf{mcd}(G_\beta, G_\rho), G_\delta G_\gamma) = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\phi), G_\delta G_\gamma) \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\beta, G_\rho), G_\delta G_\gamma)$$

Esto, (50) y (51) prueba que  $D = \mathbf{mcd}(G_\beta, G_\rho, G_\delta G_\gamma)$ .

- Ahora probamos la parte (4).

El Teorema 2.9,  $|\delta - \rho| = 2$  y  $|\beta - \phi| = 2$ , implican que  $\mathbf{mcd}(G_\delta, G_\rho) = 1$  y  $\mathbf{mcd}(G_\beta, G_\phi) = 1$ . Por lo tanto,  $\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\delta, G_\beta), G_\rho) = 1$  y  $\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\delta, G_\beta), G_\phi) = 1$ . Así,

$$\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\delta, G_\beta), G_\rho G_\phi) = 1. \quad (52)$$

Ya que  $|\alpha - \delta| = 2$  y  $|\beta - \gamma| = 2$ , el Corolario 2.2 y (46), implican que

$$D = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\gamma) \mathbf{mcd}(G_\beta, G_\delta), G_\rho G_\phi). \quad (53)$$

El Teorema 2.9,  $|\alpha - \delta| = 2$  y  $|\beta - \gamma| = 2$  implican que  $\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\delta) = \mathbf{mcd}(G_\beta, G_\gamma) = 1$ . Por lo tanto,  $\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\gamma), \mathbf{mcd}(G_\delta, G_\beta)) = 1$ . Esto y el Corolario 2.6 implican que

$$\mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\gamma) \mathbf{mcd}(G_\delta, G_\beta), G_\rho G_\phi) = \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\gamma), G_\rho G_\phi) \mathbf{mcd}(\mathbf{mcd}(G_\delta, G_\beta), G_\rho G_\phi).$$

Esto, (52) y (53) prueba que  $D = \mathbf{mcd}(G_\alpha, G_\gamma, G_\rho G_\phi)$ . ■

## 2.8. Propiedad del mcd para la estrella de David de longitud dos y tres

En esta sección probaremos la propiedad del **mcd** para la estrella de David de longitud dos. Daremos las condiciones necesarias y suficientes para que la estrella de David de longitud tres tenga la propiedad del **mcd**. Además, probaremos que el número 9 divide las coordenadas de los vértices  $a_2$  o  $b_2$  en la Figura 24 parte (b) si y solo sí el **mcd** de cada triángulo da distinto número.

Recordamos que si  $d = \mathbf{mcd}(a, b)$ ,  $a' = a/d$  y  $b' = b/d$ , entonces usamos  $G_m$  para  $G_m(a, b)$  y  $G'_m$  para  $G_m(a', b')$  para cualquier entero  $m$ .

**Teorema 2.11.** *Sea  $d = \mathbf{mcd}(a, b)$ . Si  $a_1, a_2, a_3$  y  $b_1, b_2, b_3$  son los vértices de la estrella de David de longitud dos, entonces  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = d^2$ .*

*Demostración.*

Sea  $a' = a/d$ ,  $b' = b/d$ , y  $(m, n)$  las coordenadas diagonales de  $a_2$ . Probaremos primero que el  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = d^2$ . Sabemos que  $a_1 = G_{m+1}G_{n-2}$ ,  $a_2 = G_mG_n$  y  $a_3 = G_{m+2}G_{n-1}$ . Esto y el Lema 2.13, implican que

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) &= \mathbf{mcd}(G_{m+1}G_{n-2}, G_mG_n, G_{m+2}G_{n-1}) \\ &= \mathbf{mcd}(dG'_{m+1} dG'_{n-2}, dG'_m dG'_n, dG'_{m+2} dG'_{n-1}) \\ &= \mathbf{mcd}(d^2 G'_{m+1}G'_{n-2}, d^2 G'_m G'_n, d^2 G'_{m+2}G'_{n-1}) \\ &= d^2 \mathbf{mcd}(G'_{m+1}G'_{n-2}, G'_m G'_n, G'_{m+2}G'_{n-1}). \end{aligned}$$

Y por el Lema 2.15 parte (1), tenemos que  $\mathbf{mcd}(G'_{m+1}G'_{n-2}, G'_m G'_n, G'_{m+2}G'_{n-1}) = 1$ . Esto muestra que  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = d^2$ .

Ahora la prueba de  $\mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = d^2$ . Sabemos que  $b_1 = G_mG_{n-1}$ ,  $b_2 = G_{m+2}G_{n-2}$  y  $b_3 = G_{m+1}G_n$ . Esto y el Lema 2.13, implican que

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) &= \mathbf{mcd}(G_mG_{n-1}, G_{m+2}G_{n-2}, G_{m+1}G_n) \\ &= \mathbf{mcd}(dG'_m dG'_{n-1}, dG'_{m+2} dG'_{n-2}, dG'_{m+1} dG'_n) \\ &= \mathbf{mcd}(d^2 G'_m G'_{n-1}, d^2 G'_{m+2}G'_{n-2}, d^2 G'_{m+1}G'_n) \\ &= d^2 \mathbf{mcd}(G'_m G'_{n-1}, G'_{m+2}G'_{n-2}, G'_{m+1}G'_n). \end{aligned}$$

Y por el Lema 2.15 parte (2), tenemos que  $\mathbf{mcd}(G'_m G'_{n-1}, G'_{m+2}G'_{n-2}, G'_{m+1}G'_n) = 1$ . Esto muestra que  $\mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = d^2$ . ■

**Lema 2.16.** *Sea  $d = \mathbf{mcd}(a, b)$ ,  $a' = a/d$  y  $b' = b/d$ . Si  $a_1, a_2, a_3$  y  $b_1, b_2, b_3$  son los vértices de la estrella de David de longitud tres donde  $(m, n)$  son las coordenadas diagonales de  $a_2$ , entonces*

1.  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = d^2 \mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_{m+4}, G'_m G'_n)$ .

$$2. \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = d^2 \mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4}G'_{m+4}).$$

*Demostración.*

Ya que  $(m, n)$  son las coordenadas diagonales de  $a_2$

$$\begin{array}{llll} a_1 = G_{m+2}G_{n-4}, & a_2 = G_mG_n & y & a_3 = G_{m+4}G_{n-2}, \\ b_1 = G_mG_{n-2}, & b_2 = G_{m+4}G_{n-4} & y & b_3 = G_{m+2}G_n. \end{array}$$

Probamos la parte (1), tomando en cuenta lo anterior y el Lema 2.13, implican que

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) &= \mathbf{mcd}(G_{m+2}G_{n-4}, G_mG_n, G_{m+4}G_{n-2}) \\ &= \mathbf{mcd}(dG'_{m+2} dG'_{n-4}, dG'_m dG'_n, dG'_{m+4} dG'_{n-2}) \\ &= \mathbf{mcd}(d^2 G'_{m+2}G'_{n-4}, d^2 G'_m G'_n, d^2 G'_{m+4}G'_{n-2}) \\ &= d^2 \mathbf{mcd}(G'_{m+2}G'_{n-4}, G'_m G'_n, G'_{m+4}G'_{n-2}). \end{aligned}$$

Y por el Lema 2.15 parte (3), tenemos que

$$\mathbf{mcd}(G'_{m+2}G'_{n-4}, G'_m G'_n, G'_{m+4}G'_{n-2}) = \mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_{m+4}, G'_m G'_n).$$

Esto muestra que  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = d^2 \mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_{m+4}, G'_m G'_n)$ .

Ahora probamos la parte (2). Utilizando el Lema 2.13, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) &= \mathbf{mcd}(G_mG_{n-2}, G_{m+4}G_{n-4}, G_{m+2}G_n) \\ &= \mathbf{mcd}(dG'_m dG'_{n-2}, dG'_{m+4} dG'_{n-4}, dG'_{m+2} dG'_n) \\ &= \mathbf{mcd}(d^2 G'_m G'_{n-2}, d^2 G'_{m+4} G'_{n-4}, d^2 G'_{m+2} G'_n) \\ &= d^2 \mathbf{mcd}(G'_m G'_{n-2}, G'_{m+4} G'_{n-4}, G'_{m+2} G'_n). \end{aligned}$$

Y por el Lema 2.15 parte (4), tenemos que

$$\mathbf{mcd}(G'_m G'_{n-2}, G'_{m+4} G'_{n-4}, G'_{m+2} G'_n) = \mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4} G'_{m+4}).$$

Esto muestra que  $\mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = d^2 \mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4} G'_{m+4})$ . ■

**Teorema 2.12.** Sea  $d = \mathbf{mcd}(a, b)$ ,  $a' = a/d$  y  $b' = b/d$ . Si  $a_1, a_2, a_3$  y  $b_1, b_2, b_3$  son los vértices de la estrella de David de longitud tres, donde  $(m, n)$  son las coordenadas diagonales de  $a_2$

1.  $G'_m \equiv 0 \pmod{9}$  y  $G'_n \equiv 0 \pmod{9}$  si y solo si  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) < \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3)$ .
2.  $G'_{m+4} \equiv 0 \pmod{9}$  y  $G'_{n-4} \equiv 0 \pmod{9}$  si y solo si  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) > \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3)$ .

*Demostración.*

Probaremos la parte (1).

- Para suficiencia, asumimos que  $G'_m \equiv 0 \pmod{9}$  y  $G'_n \equiv 0 \pmod{9}$  y probamos que  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = 3d^2$  y  $\mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 9d^2$ .

Ya que  $G'_m \equiv 0 \pmod{9}$  y  $G'_n \equiv 0 \pmod{9}$ , es claro que  $G'_m \equiv 0 \pmod{3}$  y  $G'_n \equiv 0 \pmod{3}$ . Esto y el Teorema 2.10 implican que

$$\mathbf{mcd}(G'_m, G'_{m+4}) = F_4 = 3 \quad \text{y} \quad \mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n+4}) = F_4 = 3. \quad (54)$$

Por lo tanto,  $3 \mid \mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_{m+4}, G'_m G'_n)$ .

Ahora nosotros mostramos que 3 es el único divisor primo de  $\mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_{m+4}, G'_m G'_n)$ . Si  $p$  es un número primo y

$$p \mid \mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_{m+4}, G'_m G'_n),$$

entonces sabemos que  $p \mid \mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_n)$  ó  $p \mid \mathbf{mcd}(G'_{m+4}, G'_4)$ . Esto y (54) implican que  $p = 3$ .

Luego,  $\mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_{m+4}, G'_m G'_n) = 3^k$  para algún  $k \geq 1$ . Mostramos con  $k = 1$ . Si  $k > 1$ , entonces  $9 \mid G'_{n-4}$  y  $9 \mid G'_{m+4}$ . Ya que  $G'_m \equiv 0 \pmod{9}$  y  $G'_n \equiv 0 \pmod{9}$ , podemos concluir que  $9 \mid \mathbf{mcd}(G'_m, G'_{m+4})$  y  $9 \mid \mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n-4})$ . Esto contradice (54). Así

$$\mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_{m+4}, G'_m G'_n) = 3. \quad (55)$$

Ahora probamos que  $\mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4} G'_{m+4}) = 9$ . Para  $G'_m \equiv 0 \pmod{9}$ ,  $G'_n \equiv 0 \pmod{9}$  y (54) podemos escribir que  $9 \mid \mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4} G'_{m+4})$ . Mostramos que 3 es el único divisor primo de  $\mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4} G'_{m+4})$ . Si  $p$  es un primo y

$$p \mid \mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4} G'_{m+4}),$$

es fácil ver que  $p \mid \mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_n)$  ó  $p \mid \mathbf{mcd}(G'_{m+4}, G'_4)$ . Esto y (54), implican que  $p = 3$ .

Así,  $\mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4} G'_{m+4}) = 3^l$  para algún entero  $l \geq 2$ . Mostramos con  $l = 2$ . Si  $l > 2$ , entonces  $3^3 \mid G'_{n-4} G'_{m+4}$ . Por lo tanto  $9 \mid G'_{n-4}$  ó  $9 \mid G'_{m+4}$ . Ya que  $G'_m \equiv 0 \pmod{9}$  y  $G'_n \equiv 0 \pmod{9}$ , podemos concluir que  $9 \mid \mathbf{mcd}(G'_m, G'_{m+4})$  ó  $9 \mid \mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n-4})$ , esto contradice a (54). Así

$$\mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4} G'_{m+4}) = 9.$$

Esta igualdad, el Lema 2.16 y (55) muestran que  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = 3d^2$  y  $\mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3) = 9d^2$ , probamos la suficiencia de la parte (1).

- Por el contrario, asumimos que  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) < \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3)$ . Esto y el Lema 2.16 implican que

$$\mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_{m+4}, G'_m G'_n) < \mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4} G'_{m+4}). \quad (56)$$

Por lo tanto,  $\mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4}G'_{m+4}) > 1$ . Si  $p$  es un primo, tal que

$$p \mid \mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4}G'_{m+4}),$$

es fácil ver que  $p \mid \mathbf{mcd}(G'_m, G'_{m+4})$  ó  $p \mid \mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n-4})$ . Esto y el Teorema 2.9 implican que  $p = 3$ . Así,

$$\mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4}G'_{m+4}) = 3^t \text{ para algún } t \geq 1. \quad (57)$$

Por lo tanto,  $3 \mid G'_m$  y  $3 \mid G'_n$ . Esto y el Teorema 2.10 implican que  $\mathbf{mcd}(G'_m, G'_{m+4}) = 3$  y  $\mathbf{mcd}(G'_n, G'_{n-4}) = 3$ . Así  $3 \mid \mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_{m+4}, G'_m G'_n)$ . En particular, tenemos que  $3 \leq \mathbf{mcd}(G'_{n-4}, G'_{m+4}, G'_m G'_n)$ . Esto, (56) y (57) implican que

$$\mathbf{mcd}(G'_m, G'_n, G'_{n-4}G'_{m+4}) = 3^t \text{ para algún } t \geq 2.$$

Así,  $G'_m \equiv 0 \pmod{9}$  y  $G'_n \equiv 0 \pmod{9}$ . Esto prueba la necesidad de la parte (1).

La prueba de la parte (2) es análoga a la prueba de la parte (1). En efecto, en la prueba de la parte (1) necesitamos intercambiar los roles de  $a_i$  y  $b_i$  para  $i = 1, 2, 3$ , en lugar de  $m$  usamos  $m + 4$ , en lugar de  $n$  usamos  $n - 4$ , y también utilizamos el Teorema 2.10. ■

**Corolario 2.3.** Sea  $d = \mathbf{mcd}(a, b)$ ,  $a' = a/d$  y  $b' = b/d$ . Si  $a_1, a_2, a_3$  y  $b_1, b_2, b_3$  son los vértices de la estrella de David de longitud tres, donde  $(m, n)$  son las coordenadas diagonales de  $a_2$ , entonces

$$\mathbf{mcd}(G'_{m+i}, G'_{n-i}, L_2^2) \neq L_2^2 \text{ para } i = 0, 4 \text{ si y sólo si } \mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3).$$

*Demostración.*

La prueba es una aplicación sencilla de la negación del Teorema 2.12.

- Primero veamos la implicación ( $\Rightarrow$ ).

Suponemos que  $\mathbf{mcd}(G'_{m+i}, G'_{n-i}, L_2^2) \neq L_2^2$  para  $i = 1, 4$ . Entonces debe suceder que

$$G'_{m+i} \not\equiv 0 \pmod{9} \quad \text{o} \quad G'_{n-i} \not\equiv 0 \pmod{9}.$$

Utilizando la negación del Teorema 2.12 por (1) obtenemos que  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) \geq \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3)$  y por (2)  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) \leq \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3)$ . Lo que implica que

$$\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3).$$

- Ahora veamos la implicación ( $\Leftarrow$ ).

Suponemos que  $\mathbf{mcd}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{mcd}(b_1, b_2, b_3)$ . Utilizando la negación del Teorema 2.12 parte (1) y (2) obtenemos que

$$G'_{m+i} \not\equiv 0 \pmod{9} \quad \text{o} \quad G'_{n-i} \not\equiv 0 \pmod{9}.$$

Lo cual implica que  $\mathbf{mcd}(G'_{m+i}, G'_{n-i}, L_2^2) \neq L_2^2$  para  $i = 1, 4$ . ■

# Capítulo 3

## 3. Geometría en el triángulo de Hosoya

Sabemos que hay propiedades de los números de Fibonacci que son conocidas algebraicamente, ahora haremos una interpretación geométrica. Las pruebas clásicas de las identidades más conocidas que estudiamos aquí se basan en la inducción matemática; sin embargo, en este capítulo, proporcionaremos pruebas geométricas de esas identidades utilizando propiedades del triángulo de Hosoya. Por lo tanto, las pruebas son más visuales. Las herramientas aquí se pueden ampliar para probar otras identidades clásicas. Además, mencionamos algunas propiedades que son bien conocidas en el triángulo de Pascal como la propiedad del palo de hockey.

El triángulo de Hosoya es una gran herramienta para presentar geoméricamente las identidades de Fibonacci. En este capítulo también estudiamos algunas otras propiedades geométricas que tiene el triángulo de Hosoya. Por ejemplo, damos una prueba geométrica de las identidades de Cassini, Catalan y Johnson.

### 3.1. El triángulo de Hosoya y su sistema de coordenadas

En estas secciones, agregaremos una diagonal y una diagonal invertida de ceros en el triángulo de Hosoya, para facilitar la interpretación geométrica de las identidades que mostraremos. Entonces la Definición 1.4 se convierte en:

**Definición 3.1.** La sucesión de Hosoya  $\{H(r, k)\}_{r, k \geq 0}$  es definida recursivamente por

$$H(0, 0) = H(1, 0) = H(1, 1) = 0 \quad y \quad H(2, 1) = 1$$

$$H(r, k) = H(r - 1, k) + H(r - 2, k) \tag{58}$$

$$H(r, k) = H(r - 1, k - 1) + H(r - 2, k - 2) \tag{59}$$

para  $r > 1$  y  $0 \leq k \leq r - 1$ , donde  $r$  representa el número de fila en el triángulo de Hosoya y  $k$  representa la posición de izquierda a derecha de la  $r$ -ésima fila.

Entonces haciendo este cambio en la Figura 8, obtenemos el siguiente triángulo de Hosoya en su representación  $H(r, k)$ :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & H(0, 0) & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & H(1, 0) & & H(1, 1) & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & H(2, 0) & & H(2, 1) & & H(2, 2) \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & H(3, 0) & & H(3, 1) & & H(3, 2) & & H(3, 3) \\
 & & & & & & & & & & \\
 H(4, 0) & & & & H(4, 1) & & H(4, 2) & & H(4, 3) & & H(4, 4)
 \end{array}$$

Figura 29: Triángulo de Hosoya

Su representación en multiplicación de números de Fibonacci es:

					0																		
					0		0																
				0		1		0															
			0		1		1		0														
			0		2		1		2		0												
			0		3		2		2		3		0										
			0		5		3		4		3		5		0								
			0		8		5		6		6		5		8		0						
			0		13		8		10		9		10		8		13		0				
			0		21		13		16		15		15		16		13		21		0		
			0		34		21		26		24		25		24		26		21		34		0

A lo largo de este capítulo, usaremos  $\mathcal{H}$  para denotar al triángulo de Hosoya. Ahora veamos que con esta modificación en  $\mathcal{H}$  el Corolario 1.6 se convierte en:

$$H(r, k) = F_k F_{r-k}.$$

**Proposición 3.1.** *Cualquier entrada en  $\mathcal{H}$  es producto de dos números de Fibonacci, es decir:*

$$H(r, k) = F_k F_{r-k} \tag{60}$$

donde  $r > 1$  y  $0 \leq k \leq r - 1$ .

*Demostración.*

Para demostrar esta proposición basta probar que se cumple para  $H(r, 0)$  ya que todos los demás casos sabemos que se cumplen por lo visto en el Corolario 1.6.

Probaremos por inducción fuerte sobre  $r$  que se cumple que  $H(r, 0) = F_0 F_r$ .

- Cuando  $r = 2$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 H(2, 0) &= H(1, 0) + H(0, 0) \\
 &= 0 + 0 \\
 &= 0(1 + 0) \\
 &= F_0(F_1 + F_0) \quad \text{pero } F_1 = F_2 \\
 &= F_0 F_2.
 \end{aligned}$$

Se cumple el caso base.

- Hipótesis inductiva: Sea  $k$  un entero positivo tal que  $r = k$ , supongamos que para  $i$  un entero positivo tal que  $i \leq k$ , se cumple:

$$H(i, 0) = F_0 F_i.$$

- Prueba inductiva:

Veamos que se cumple para  $r = k + 1$ :

$$\begin{aligned} H(k + 1, 0) &= H(k, 0) + H(K - 1, 0) \\ &= F_0 F_k + F_0 F_{k-1} \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= F_0 (F_k + F_{k-1}) \\ &= F_0 F_{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para todo entero positivo  $r$ . ■

## 3.2. Propiedades geométricas en el triángulo de Hosoya

En esta sección usaremos la configuración de escalera para explorar propiedades geométricas y algebraicas en el triángulo Hosoya.

Hemos encontrado que si se da un rectángulo en un triángulo de Hosoya, entonces la diferencia de dos de sus esquinas es igual a la diferencia de las esquinas restantes. Esta propiedad fundamental nos permite tener pruebas geométricas de varias identidades. La propiedad del rectángulo da lugar a otras configuraciones geométricas, y por lo tanto, más identidades asociadas con esas configuraciones.

Primero presentaremos una serie de definiciones básicas que nos permitan comprender las propiedades que serán desarrolladas.

**Definición 3.2.** *Llamamos columna a las líneas verticales formadas por puntos de  $\mathcal{H}$  que tienen la misma dirección que el eje de simetría del triángulo.*

**Definición 3.3.** *Las paralelas dentro de  $\mathcal{H}$  son dos líneas del mismo tipo que jamás de interceptan, éstas pueden ser filas, columnas, diagonales y diagonales invertidas.*

**Definición 3.4.** *Un peldaño, es un conjunto de puntos sobre las misma fila, columna, diagonal o diagonal invertida que une dos paralelas dentro de  $\mathcal{H}$ .*

**Definición 3.5.**

- *Longitud con signo: es la longitud de un peldaño y es la diferencia entre el punto inicial y final, está longitud puede ser negativa.*
- *Longitud con valor absoluto: es el valor absoluto de la longitud con signo.*

**Definición 3.6.** *Una escalera dentro de  $\mathcal{H}$  es un rectángulo que tiene vértices en  $\mathcal{H}$ .*

1. Si los peldaños que contiene la escalera son verticales diremos que es una escalera horizontal.
2. Si los peldaños que contiene la escalera son horizontales diremos que es una escalera vertical.
3. Si los peldaños que contiene la escalera son diagonales invertidos diremos que es una escalera oblicua.
4. Si los peldaños son diagonales diremos que es una escalera oblicua invertida.

Primero probamos un Lema que será útil para probar varios resultados en este capítulo. Si  $L$  es una escalera horizontal en  $\mathcal{H}$  donde su peldaño tiene exactamente dos puntos, entonces la suma de un peldaño es un número de Fibonacci y es igual para cada peldaño.

**Lema 3.1.** *La suma de los peldaños de una escalera horizontal en  $\mathcal{H}$  con vértice superior izquierdo  $H(r, k)$  con  $i$  peldaños coinciden y es un número de Fibonacci. Es decir para todo  $r, k \geq 0$  y  $k + i + 1 \leq r$  se cumple que*

$$F_k F_{r-k} + F_{k+1} F_{r-k+1} = F_{k+i} F_{r-k-i} + F_{k+i+1} F_{r-k-i+1} = F_{r+1}.$$

o equivalentemente

$$H(r, k) + H(r + 2, k + 1) = H(r, k + i) + H(r + 2, k + i + 1) = F_{r+1}.$$

*Demostración.*

Primero probaremos que se cumple la siguiente igualdad.

$$F_k F_{r-k} + F_{k+1} F_{r-k+1} = F_{r+1}.$$

Lo haremos utilizando la fórmula de Binet demostrada en el Teorema 1.10 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & F_k F_{r-k} + F_{k+1} F_{r-k+1} \\ &= \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^{r-k} - \beta^{r-k}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^{r-k+1} - \beta^{r-k+1}}{\alpha - \beta} \quad \text{por la fórmula de Binet} \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((\alpha^k - \beta^k) \cdot (\alpha^{r-k} - \beta^{r-k}) + (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) \cdot (\alpha^{r-k+1} - \beta^{r-k+1})) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^r - \alpha^k \beta^{r-k} - \beta^k \alpha^{r-k} + \beta^r + \alpha^{r+2} - \alpha^{k+1} \beta^{r-k+1} - \beta^{k+1} \alpha^{r-k+1} + \beta^{r+2}) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^r + \beta^r + \alpha^{r+2} + \beta^{r+2} - \alpha^k \beta^{r-k} - \beta^k \alpha^{r-k} - (\alpha\beta)(\alpha^k \beta^{r-k}) - (\alpha\beta)(\beta^k \alpha^{r-k})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^r + \beta^r + \alpha^{r+2} + \beta^{r+2} - \alpha^k \beta^{r-k} - \beta^k \alpha^{r-k} + \alpha^k \beta^{r-k} + \beta^k \alpha^{r-k}) \quad \text{ya que } (\alpha\beta) = -1 \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^r + \beta^r + \alpha^{r+2} + \beta^{r+2}) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((-)(-\alpha^r) + (-)(-\beta^r) + \alpha^{r+2} + \beta^{r+2}) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (-\beta\alpha^{r+1} - \alpha\beta^{r+1} + \alpha^{r+2} + \beta^{r+2}) \quad \text{ya que } (\alpha\beta) = -1 \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha(\alpha^{r+1} - \beta^{r+1}) - \beta(\alpha^{r+1} - \beta^{r+1})) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{r+1} - \beta^{r+1})(\alpha - \beta) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)} (\alpha^{r+1} - \beta^{r+1}) \\
&= F_{r+1}.
\end{aligned}$$

Ahora probaremos que se cumple que:

$$F_{k+i}F_{r-k-i} + F_{k+i+1}F_{r-k-i+1} = F_{r+1}.$$

De igual manera haremos esta demostración utilizando la fórmula de Binet:

$$F_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}.$$

Entonces, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&F_{k+i}F_{r-k-i} + F_{k+i+1}F_{r-k-i+1} = F_{r+1} \quad \text{utilizando la fórmula de Binet, tenemos:} \\
&= \frac{\alpha^{k+i} - \beta^{k+i}}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^{r-k-i} - \beta^{r-k-i}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{k+i+1} - \beta^{k+i+1}}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^{r-k-i+1} - \beta^{r-k-i+1}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((\alpha^{k+i} - \beta^{k+i}) \cdot (\alpha^{r-k-i} - \beta^{r-k-i}) + (\alpha^{k+i+1} - \beta^{k+i+1}) \cdot (\alpha^{r-k-i+1} - \beta^{r-k-i+1})) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^r - \alpha^{k+i}\beta^{r-k-i} - \beta^{k+i}\alpha^{r-k-i} + \beta^r + \alpha^{r+2} - \alpha^{k+i+1}\beta^{r-k-i+1} - \beta^{k+i+1}\alpha^{r-k-i+1} + \beta^{r+2}) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^r + \beta^r + \alpha^{r+2} + \beta^{r+2} - \alpha^{k+i}\beta^{r-k-i} - \beta^{k+i}\alpha^{r-k-i} - (\alpha\beta)(\alpha^{k+i}\beta^{r-k-i}) - (\alpha\beta)(\beta^{k+i}\alpha^{r-k-i}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^r + \beta^r + \alpha^{r+2} + \beta^{r+2} - \alpha^{k+i}\beta^{r-k-i} - \beta^{k+i}\alpha^{r-k-i} + \alpha^{k+i}\beta^{r-k-i} + \beta^{k+i}\alpha^{r-k-i}) \\
&\quad \text{ya que } (\alpha\beta) = -1 \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^r + \beta^r + \alpha^{r+2} + \beta^{r+2}) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((-)(-\alpha^r) + (-)(-\beta^r) + \alpha^{r+2} + \beta^{r+2}) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (-\beta\alpha^{r+1} - \alpha\beta^{r+1} + \alpha^{r+2} + \beta^{r+2}) \quad \text{ya que } (\alpha\beta) = -1 \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha(\alpha^{r+1} - \beta^{r+1}) - \beta(\alpha^{r+1} - \beta^{r+1})) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{r+1} - \beta^{r+1})(\alpha - \beta) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)} (\alpha^{r+1} - \beta^{r+1}) \\
&= F_{r+1}.
\end{aligned}$$

Hemos probado que:

$$F_k F_{r-k} + F_{k+1} F_{r-k+1} = F_{k+i} F_{r-k-i} + F_{k+i+1} F_{r-k-i+1} = F_{r+1}.$$

Si utilizamos la proposición 3.1 tenemos

$$H(r, k) + H(r + 2, k + 1) = H(r, k + i) + H(r + 2, k + i + 1) = F_{r+1}. \quad \blacksquare$$

Podemos dar una interpretación geométrica al Lema 3.1. De la siguiente manera:

- Primero, tomamos dos peldaños consecutivos de  $L$  formando un cuadrado como en la Figura 30. Observe que cada diagonal de este cuadrado tiene tres puntos (dos vértices y uno punto interior). Esas dos diagonales se cruzan en el punto interior  $p$ .

De la definición recursiva de las entradas de  $\mathcal{H}$  y el punto  $p$ , es fácil ver que la diferencia de los dos puntos de esquina de la barra diagonal invertida del cuadrado es igual a la diferencia de los puntos de las esquinas de la barra diagonal del cuadrado. Esto implica que la suma de los puntos en dos peldaños consecutivos tiene el mismo valor. Usando un argumento inductivo podemos extender el resultado para dos peldaños arbitrarios cualesquiera. Ya que esto es cierto para cualquier peldaño de  $L$ , es cierto para el primer peldaño de la izquierda donde uno de los dos puntos es cero y el otro es el número de Fibonacci  $F_{r+1} = H(r + 2, 1)$ .

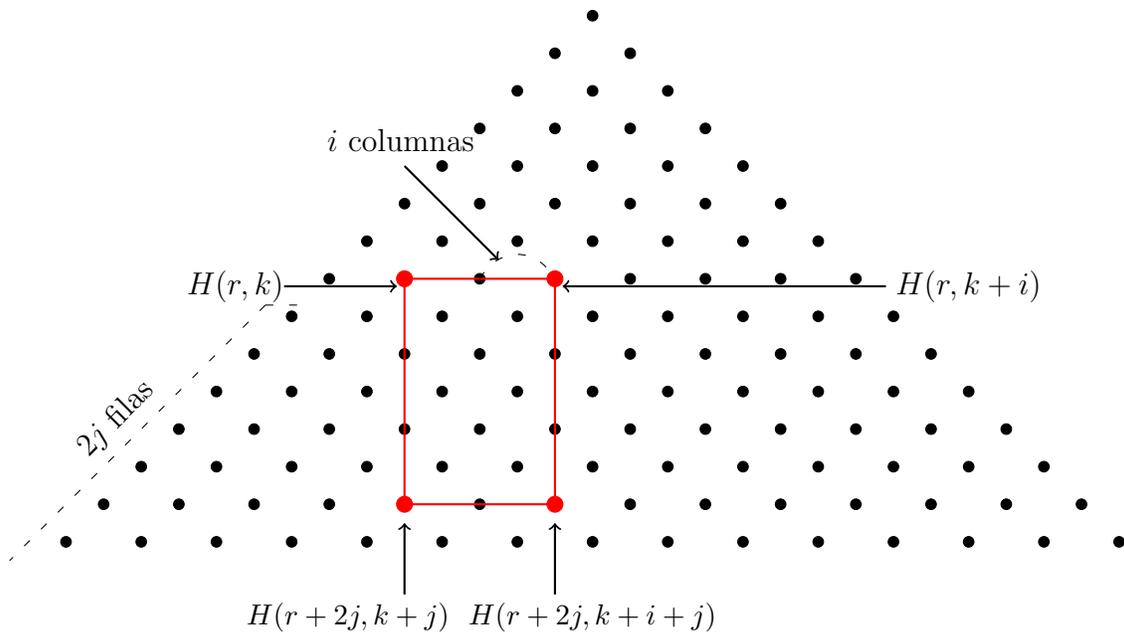


Figura 31: Propiedad del rectángulo

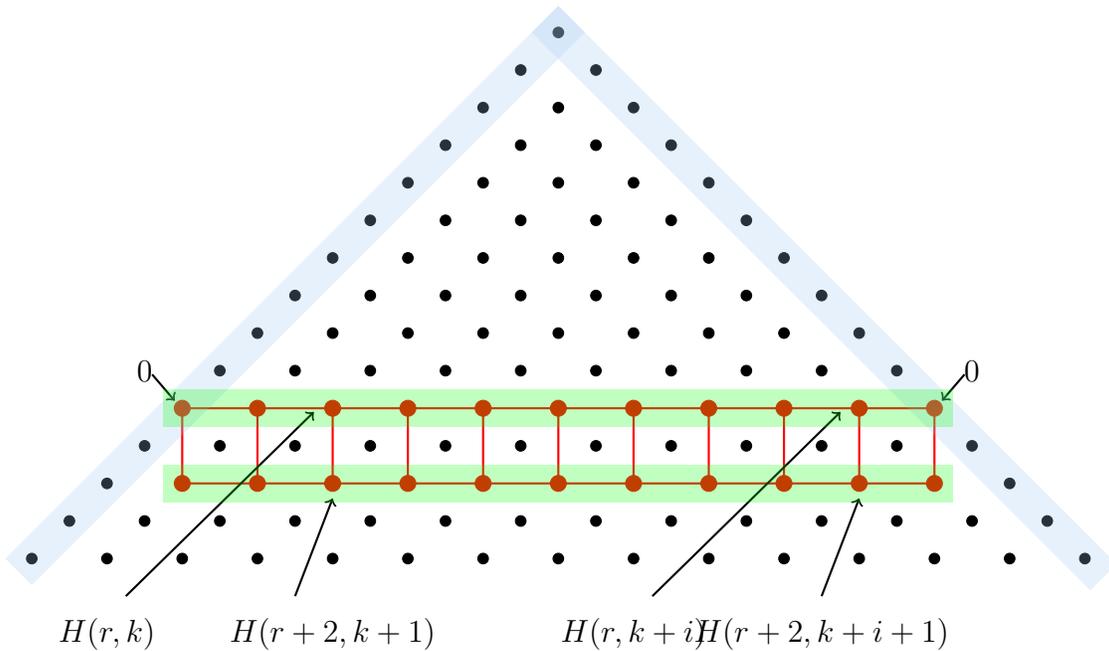


Figura 30: suma de peldaños de la escalera horizontal

Ahora si consideramos una escalera vertical como en la Figura 31 podemos observar que se cumple la propiedad del Rectángulo.

Esta propiedad se muestra formalmente en la Proposición 3.2.

**Proposición 3.2 (Propiedad del rectángulo).**

Sea la escalera vertical en  $\mathcal{H}$  con vértice superior izquierdo  $H(r, k)$  con  $i$  columnas y  $2j$  filas, entonces se cumple que todos sus peldaños horizontales tienen la misma longitud con signo. Es decir se cumple que:

$$F_k F_{r-k} - F_{k+i} F_{r-k-i} = (-1)^j (F_{k+j} F_{r+j-k} - F_{k+i+j} F_{r+j-k-i}) = (-1)^{k+1} F_i F_{r-2k-i}.$$

o equivalentemente

$$H(r, k) - H(r, k+i) = (-1)^j (H(r+2j, k+j) - H(r+2j, k+i+j)) = (-1)^{k+1} H(r-2k, i).$$

donde  $j$  también representa el número de peldaños de la escalera vertical.

*Demostración.*

Primero probaremos que se cumple la siguiente igualdad.

$$F_k F_{r-k} - F_{k+i} F_{r-k-i} = (-1)^j (F_{k+j} F_{r+j-k} - F_{k+i+j} F_{r+j-k-i}).$$

Lo haremos de manera geométrica de la siguiente manera.

Por el Lema 3.1, tenemos:

- $F_k F_{r-k} + F_{k+1} F_{r-k+1} = F_{k+i} F_{r-k-i} + F_{k+i+1} F_{r-k-i+1}$   
 $F_k F_{r-k} - F_{k+i} F_{r-k-i} = -(F_{k+1} F_{r-k+1} - F_{k+i+1} F_{r-k-i+1})$
- $F_{k+1} F_{r-k+1} + F_{k+2} F_{r-k+2} = F_{k+i+1} F_{r-k-i+1} + F_{k+i+2} F_{r-k-i+2}$   
 $F_{k+1} F_{r-k+1} - F_{k+i+1} F_{r-k-i+1} = -(F_{k+2} F_{r-k+2} - F_{k+i+2} F_{r-k-i+2})$
- $F_{k+2} F_{r-k+2} + F_{k+3} F_{r-k+3} = F_{k+i+2} F_{r-k-i+2} + F_{k+i+3} F_{r-k-i+3}$   
 $F_{k+2} F_{r-k+2} - F_{k+i+2} F_{r-k-i+2} = -(F_{k+3} F_{r-k+3} - F_{k+i+3} F_{r-k-i+3})$
- ⋮
- $F_{k+j-1} F_{r-k+j-1} + F_{k+j} F_{r-k+j} = F_{k+i+j-1} F_{r-k-i+j-1} + F_{k+i+j} F_{r-k-i+j}$   
 $F_{k+j-1} F_{r-k+j-1} - F_{k+i+j-1} F_{r-k-i+j-1} = -(F_{k+j} F_{r-k+j} - F_{k+i+j} F_{r-k-i+j}).$

Utilizando lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} F_k F_{r-k} - F_{k+i} F_{r-k-i} &= (-1)(F_{k+1} F_{r-k+1} - F_{k+i+1} F_{r-k-i+1}) \\ &= (-1)^2 (F_{k+2} F_{r-k+2} - F_{k+i+2} F_{r-k-i+2}) \\ &= (-1)^3 (F_{k+3} F_{r-k+3} - F_{k+i+3} F_{r-k-i+3}) \\ &= (-1)^4 (F_{k+4} F_{r-k+4} - F_{k+i+4} F_{r-k-i+4}) \\ &\vdots \\ &= (-1)^j (F_{k+j} F_{r-k+j} - F_{k+i+j} F_{r-k-i+j}). \end{aligned}$$

Ahora probaremos que se cumple:

$$(-1)^j(F_{k+j}F_{r+j-k} - F_{k+i+j}F_{r+j-k-i}) = (-1)^{k+1}F_iF_{r-2k-i}.$$

Lo haremos utilizando la fórmula de Binet, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & F_{k+j}F_{r+j-k} - F_{k+i+j}F_{r+j-k-i} \\ &= \frac{\alpha^{k+j} - \beta^{k+j}}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^{r+j-k} - \beta^{r+j-k}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^{k+i+j} - \beta^{k+i+j}}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^{r+j-k-i} - \beta^{r+j-k-i}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((\alpha^{k+j} - \beta^{k+j}) \cdot (\alpha^{r+j-k} - \beta^{r+j-k}) - (\alpha^{k+i+j} - \beta^{k+i+j}) \cdot (\alpha^{r+j-k-i} - \beta^{r+j-k-i})) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{r+2j} - \alpha^{k+j}\beta^{r+j-k} - \beta^{k+j}\alpha^{r+j-k} + \beta^{r+2j} - \alpha^{r+2j} + \alpha^{k+i+j}\beta^{r+j-k-i} \\ &\quad + \beta^{k+i+j}\alpha^{r+j-k-i} - \beta^{r+2j}) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (-\alpha^{k+j}\beta^{r+j-k} - \beta^{k+j}\alpha^{r+j-k} + \alpha^{k+i+j}\beta^{r+j-k-i} + \beta^{k+i+j}\alpha^{r+j-k-i}) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha\beta)^{k+j} (\beta^i\alpha^{r-2k-i} + \alpha^i\beta^{r-2k-i} - \beta^{r-2k} - \alpha^{r-2k}) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha\beta)^{k+j} (-1)(\beta^{r-2k} + \alpha^{r-2k} - \beta^i\alpha^{r-2k-i} - \alpha^i\beta^{r-2k-i}) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha\beta)^{k+j} (\alpha\beta)(\beta^{r-2k} + \alpha^{r-2k} - \beta^i\alpha^{r-2k-i} - \alpha^i\beta^{r-2k-i}) \quad \text{ya que } (\alpha\beta) = -1 \\ &= \frac{(-1)^j}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha\beta)^{k+j+1} ((\alpha^i - \beta^i)(\alpha^{r-2k-i} - \beta^{r-2k-i})) \quad \text{multiplicando por } (-1)^j \text{ toda la expresión} \\ &= (\alpha\beta)^{k+2j+1} \left( \frac{(\alpha^i - \beta^i)}{(\alpha - \beta)} \cdot \frac{(\alpha^{r-2k-i} - \beta^{r-2k-i})}{(\alpha - \beta)} \right) \quad \text{como } (\alpha\beta) = -1 \text{ y } (-1)^{2j} = 1 \\ &= (\alpha\beta)^{k+2j+1} F_i F_{r-2k-i} \\ &= (-1)^{k+1} F_i F_{r-2k-i}. \end{aligned}$$

Hemos probado que:

$$F_k F_{r-k} - F_{k+i} F_{r-k-i} = (-1)^j (F_{k+j} F_{r+j-k} - F_{k+i+j} F_{r+j-k-i}) = (-1)^{k+1} F_i F_{r-2k-i}.$$

Si utilizamos la Proposición 3.1 tenemos

$$H(r, k) - H(r, k + i) = (-1)^j (H(r + 2j, k + j) - H(r + 2j, k + i + j)) = (-1)^{k+1} H(r - 2k, i). \quad \blacksquare$$

De manera general, podemos interpretar geoméricamente la propiedad del rectángulo en las escaleras verticales en  $\mathcal{H}$ . Podemos observar que:

$$|a_0 - b_0| = |a_1 - b_1| = |a_2 - b_2| = \cdots = |a_i - b_i|.$$

Como se muestra en la Figura 32.

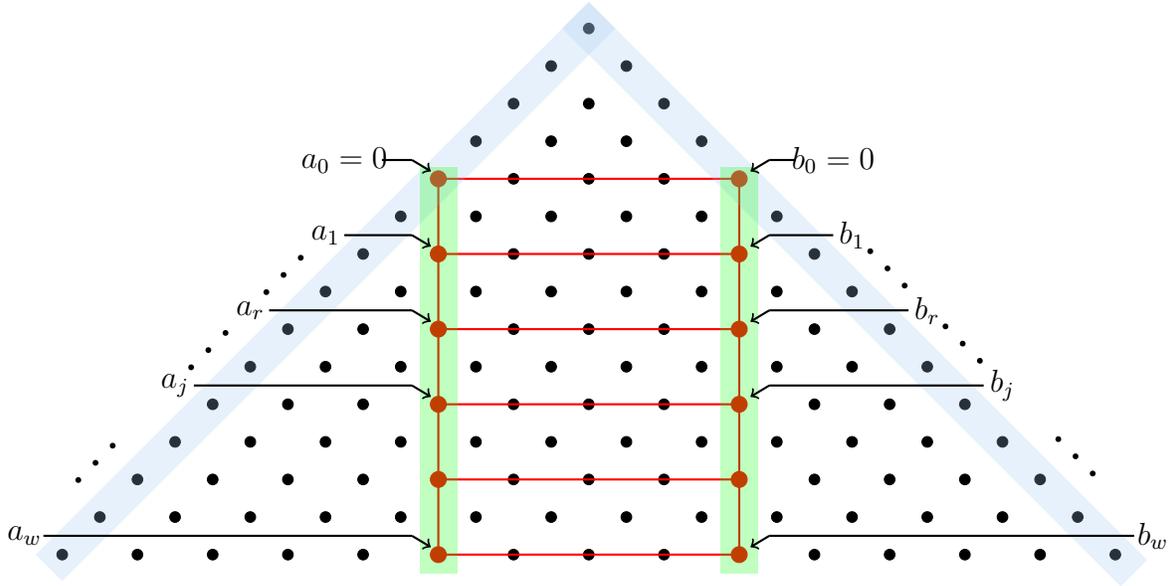


Figura 32: Todo peldaño en una escalera vertical en  $\mathcal{H}$  tiene la misma longitud

El siguiente resultado proporciona varias identidades en el triángulo de Hosoya. En particular, muestra que la suma alterna de los puntos en un peldaño horizontal de una escalera vertical y la suma de los puntos en los peldaños verticales de la escalera horizontal es una constante siempre que el peldaño tenga un número par de puntos en cada caso. También vemos que la longitud absoluta de cada peldaño en una escalera horizontal es la misma si hay un número impar de puntos en los peldaños. Finalmente, si las escaleras son oblicuas (ver Figura 3.2), entonces la longitud absoluta de cada peldaño es la longitud absoluta del primer peldaño multiplicada por un número de Fibonacci y la suma de los puntos en los peldaños oblicuos es igual a la suma de los puntos de la simetría del segundo peldaño multiplicado por un número de Fibonacci.

**Teorema 3.1.** *En el triángulo de Hosoya  $\mathcal{H}$  se cumple lo siguiente*

1. *Si tomamos una escalera vertical con las entradas  $H(r, k)$  y  $H(r, k + 2n - 1)$  como puntos inicial y final de primer peldaño,  $H(r + 2j, k + j)$  y  $H(r + 2j, k + 2n - 1 + j)$  como puntos inicial y final del  $j$ -ésimo peldaño. Tomando los parámetros  $r, j > 0, k \geq 0$  y  $0 < 2n - 1 \leq r$  para algún  $n$ , entonces*

$$\left| \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i H(r, k + i) \right| = \left| \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i H(r + 2j, k + i + j) \right|.$$

2. *En una escalera horizontal con entradas  $H(r, k)$  y  $H(r + 4n - 2, k + 2n - 1)$  como puntos inicial y final del primer peldaño,  $H(r, k + j)$  y  $H(r + 4n - 2, k + j + 2n - 1)$  como puntos inicial y final del  $j$ -ésimo peldaño. Tomando como parámetros  $j, r > 0, k \geq 0$  y  $0 < 2n - 1 \leq r$  para algún  $n$ , entonces*

$$\sum_{i=0}^{2n-1} H(r + 2i, k + i) = \sum_{i=0}^{2n-1} H(r + 2i, k + j + i).$$

3. En una escalera horizontal con entradas  $H(r, k)$  y  $H(r + 2j, k + j)$  como puntos inicial y final del primer peldaño,  $H(r, k + i)$  y  $H(r + 2j, k + i + j)$  como puntos inicial y final del  $j$ -ésimo peldaño. Si  $j$  es un número par, entonces

$$H(r + 2j, k + j) - H(r, k) = H(r + 2j, k + i + j) - H(r, k + i) = H(r + 2j, j).$$

4. En una escalera oblicua inversa con entradas  $H(r, k)$  y  $H(r + j, k)$  como puntos inicial y final de cada peldaño. Con parámetros  $r, k$  y  $j$  enteros positivos,  $r \geq k$ , entonces

$$H(r + j, k) - H(r, k) = F_k(H(r + j - k + 1, 1) - H(r - k + 1, 1)).$$

5. En una escalera oblicua con entradas  $H(r, k)$  y  $H(r + i, k + i)$  como puntos inicial y final de cada peldaño. Con parámetros  $i, k$  y  $r$  enteros positivos, entonces

$$\sum_{i=0}^m H(r + i, k + i) = F_{r-k} \sum_{i=0}^m H(k + i + 1, 1).$$

*Demostración.*

- Para probar la parte 1, damos una prueba geométrica.

Tomamos un escalera vertical de  $w + 1$  peldaños donde  $w \geq 0$ . Sean  $a_t$  y  $b_t$  los puntos iniciales y finales de cada peldaño respectivamente, donde  $0 \leq t \leq w$ , tomemos los primeros 2 peldaños consecutivos, que inician con  $a_0$  y  $a_1$  y finalizan con  $b_0$  y  $b_1$  y con esto podemos formar una escalera horizontal con  $2n$  peldaños.

Por Lema 3.1 podemos tomar 2 peldaños consecutivos verticales consecutivos y obtenemos

$$c_0 + d_0 = c_1 + d_1, c_2 + d_2 = c_3 + d_3, \dots, c_{2n-2} + d_{2n-2} = c_{2n-1} + d_{2n-1}.$$

Despejando

$$c_0 - c_1 = -d_0 + d_1, c_2 - c_3 = -d_2 + d_3, \dots, c_{2n-2} - c_{2n-1} = -d_{2n-2} + d_{2n-1}$$

$$c_0 - c_1 = -(d_0 - d_1), c_2 - c_3 = -(d_2 - d_3), \dots, c_{2n-2} - c_{2n-1} = -(d_{2n-2} - d_{2n-1}).$$

Sumando obtenemos:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i c_i = - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i d_i$$

$$\left| \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i c_i \right| = \left| \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i d_i \right|.$$

Esto lo podemos hacer sucesivamente para peldaños consecutivos y obtendremos que la suma de los puntos del peldaño  $r$  es igual a la suma de los puntos del peldaño  $r + 2j$ . Bastará con tomar  $c_i = H(r, k + i)$  y  $d_i = H(r + 2j, k + i + j)$ .

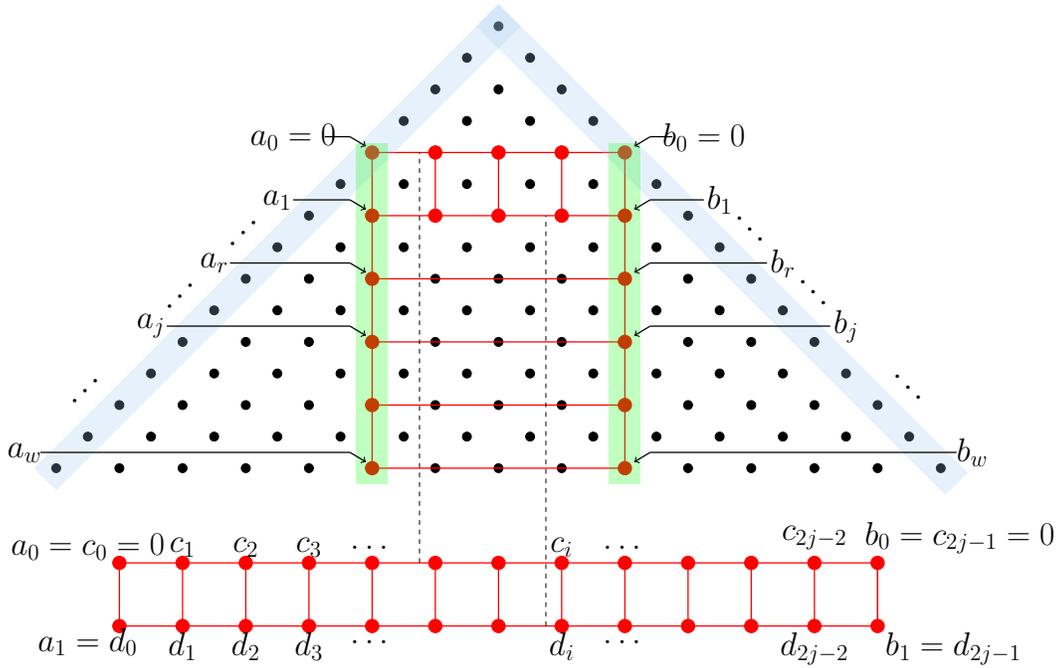


Figura 33: La suma alternada de puntos en los peldaños es la misma

- Para la parte 2.

Tomamos una escalera  $L$  horizontal de dos peldaños consecutivos y  $2n$  puntos en cada peldaño. Sean  $c_t$  y  $d_t$ , los puntos de cada peldaño respectivamente,  $0 \leq t \leq 2n - 1$ . Tomando dos puntos consecutivos sin repetir en los peldaños y por el Lema 3.1.

$$\begin{aligned}
 c_0 + c_1 &= d_0 + d_1 \\
 c_2 + c_3 &= d_2 + d_3 \\
 &\vdots \\
 c_{2n-2} + c_{2n-1} &= d_{2n-2} + d_{2n-1}.
 \end{aligned}$$

Sumando obtenemos

$$\sum_{i=0}^{2n-1} c_i = \sum_{i=0}^{2n-1} d_i.$$

Esto se puede repetir para peldaños consecutivos verticales y así obtenemos que la suma de todos los puntos de cada peldaño son iguales. Bastará con tomar a  $c_i = H(r+2i, k+i)$  y  $d_i = H(r+2i, k+j+i)$ .

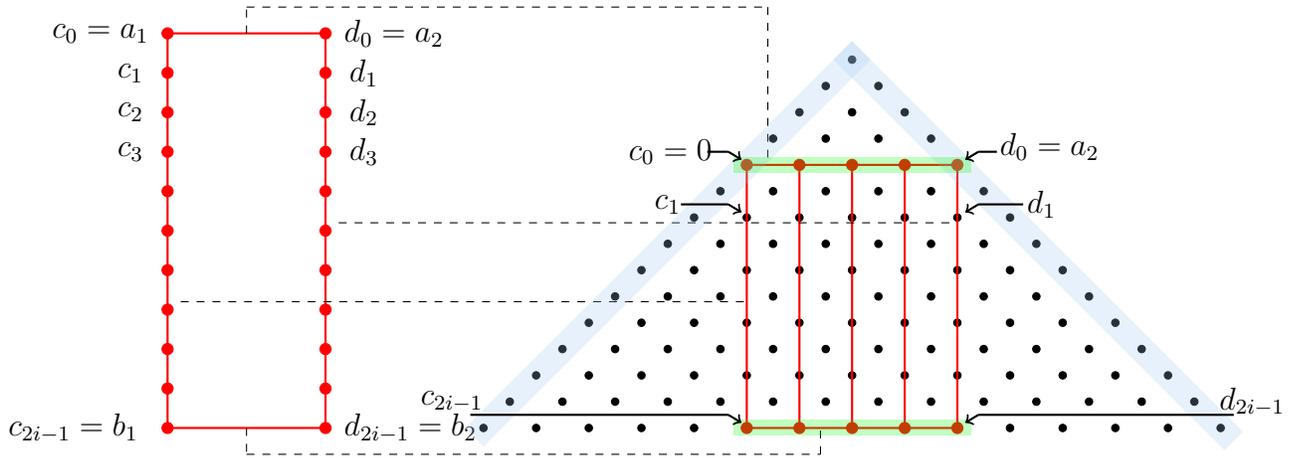


Figura 34: La sumas de los puntos de los peldaños verticales con un número par es la misma

■ Prueba parte 3

Usamos la equivalencia de la proposición 3.2, tenemos:

$$H(r, k) - H(r, k + i) = (-1)^j (H(r + 2j, k + j) - H(r + 2j, k + i + j))$$

$$H(r, k) - H(r, k + i) = H(r + 2j, k + j) - H(r + 2j, k + i + j) \quad \text{ya que } j \text{ es par}$$

$$H(r + 2j, k + j) - H(r, k) = H(r + 2j, k + i + j) - H(r, k + i).$$

Para demostrar la otra igualdad, probemos:

$$H(r + 2j, k + j) - H(r, k) = H(r + 2j, j).$$

aplicando proposición 3.1, obtenemos:

$$H(r + 2j, k + j) - H(r, k) = F_{k+j} F_{r+j-k} - F_k F_{r-k}.$$

desarrollando por formula de Binet se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\alpha^{k+j} - \beta^{k+j}}{\alpha - \beta} \right) \left( \frac{\alpha^{r+j-k} - \beta^{r+j-k}}{\alpha - \beta} \right) - \left( \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \right) \left( \frac{\alpha^{r-k} - \beta^{r-k}}{\alpha - \beta} \right) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{r+2j} - \alpha^{k+j} \beta^{r+j-k} - \alpha^{r+j-k} \beta^{k+j} + \beta^{r+2j} - \alpha^r + \alpha^k \beta^{r-k} + \alpha^{r-k} \beta^k - \beta^r) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((\alpha\beta)^j (-\alpha^k \beta^{r-k} - \alpha^{r-k} \beta^k) + \alpha^{r+2j} + \beta^{r+2j} - \alpha^r + \alpha^k \beta^{r-k} + \alpha^{r-k} \beta^k - \beta^r) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((-1)^j (-\alpha^k \beta^{r-k} - \alpha^{r-k} \beta^k) + \alpha^{r+2j} + \beta^{r+2j} - \alpha^r + \alpha^k \beta^{r-k} + \alpha^{r-k} \beta^k - \beta^r) \quad j \text{ es par} \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (-\alpha^k \beta^{r-k} - \alpha^{r-k} \beta^k + \alpha^{r+2j} + \beta^{r+2j} - \alpha^r + \alpha^k \beta^{r-k} + \alpha^{r-k} \beta^k - \beta^r) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{r+2j} - \alpha^r - \beta^r + \beta^{r+2j}) \\
&= \frac{(\alpha\beta)^j}{(\alpha - \beta)^2} ((\alpha\beta)^j \alpha^{r+2j} - (\alpha\beta)^j \alpha^r - (\alpha\beta)^j \beta^r + (\alpha\beta)^j \beta^{r+2j}) \quad \text{ya que } 1 = (\alpha\beta)^j \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{r+2j} - \alpha^{r+j} \beta^j - \alpha^j \beta^{r+j} + \beta^{r+2j}) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((\alpha^j - \beta^j)(\alpha^{r+j} - \beta^{r+j})) \\
&= \left( \frac{\alpha^j - \beta^j}{\alpha - \beta} \right) \left( \frac{\alpha^{r+j} - \beta^{r+j}}{\alpha - \beta} \right) = F_j F_{r+j}.
\end{aligned}$$

por Proposición 3.1, tenemos

$$F_j F_{r+j} = H(r + 2j, j).$$

Lo que prueba parte 3.

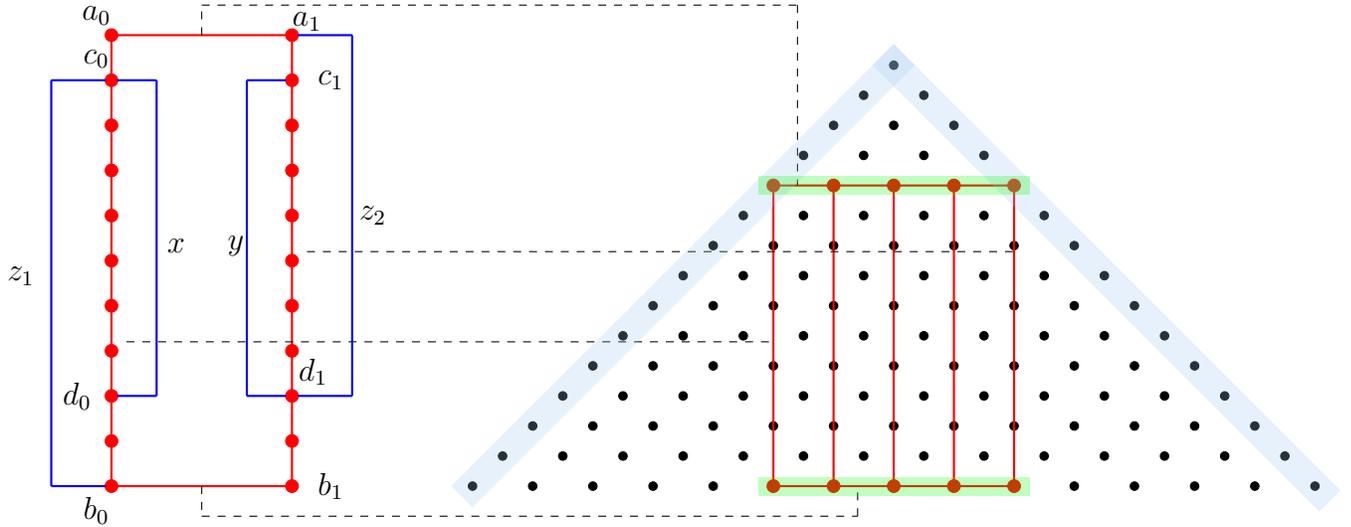


Figura 35: Los peldaños verticales con un número impar de puntos tiene la misma longitud con signo

■ Prueba parte 4

Por Proposición 3.1, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 F_k(H(r + j - k + 1, 1) - H(r - k + 1, 1)) &= F_k(F_1 F_{r+j-k+1-1} - F_1 F_{r-k+1-1}) \\
 &= F_k(F_{r+j-k} - F_{r-k}) \\
 &= F_k F_{r+j-k} - F_k F_{r-k} \\
 &= H(r + j, k) - H(r, k) \quad \text{por Proposición 3.1.}
 \end{aligned}$$

Esto es para una escalera oblicua inversa con peldaños en la diagonal. La longitud con signo de cada peldaño es la longitud con signo del primer peldaño multiplicado por  $F_k$ .

● Prueba geométrica.

Para esta prueba no utilizaremos el triángulo de Hosoya con la diagonal y diagonal invertida de ceros. Usando el sistema de coordenadas vistas en el capítulo 2 podemos ver que el punto inicial de los escalones tienen la forma  $F_t F_m$  y el punto final  $F_{t+j} F_k$  con  $F_m$  como punto fijo.

Entonces los puntos fijos del  $k$ -ésimo peldaño tienen la forma  $F_i F_k + F_{i+1} F_k + \dots + F_{i+j} F_k$ . Si tomamos la longitud con signo tenemos  $F_{i+j} F_k - F_i F_k = F_k (F_{i+j} - F_i)$ , donde  $F_{i+j} - F_i$  es la longitud con signo del primer escalón. Tal y como se muestra en la Figura 36.

En la Figura 3.2 podemos notar una escalera oblicua y esta parte 4 también se puede aplicar a esa figura, utilizando la simetría del Teorema 1.22.

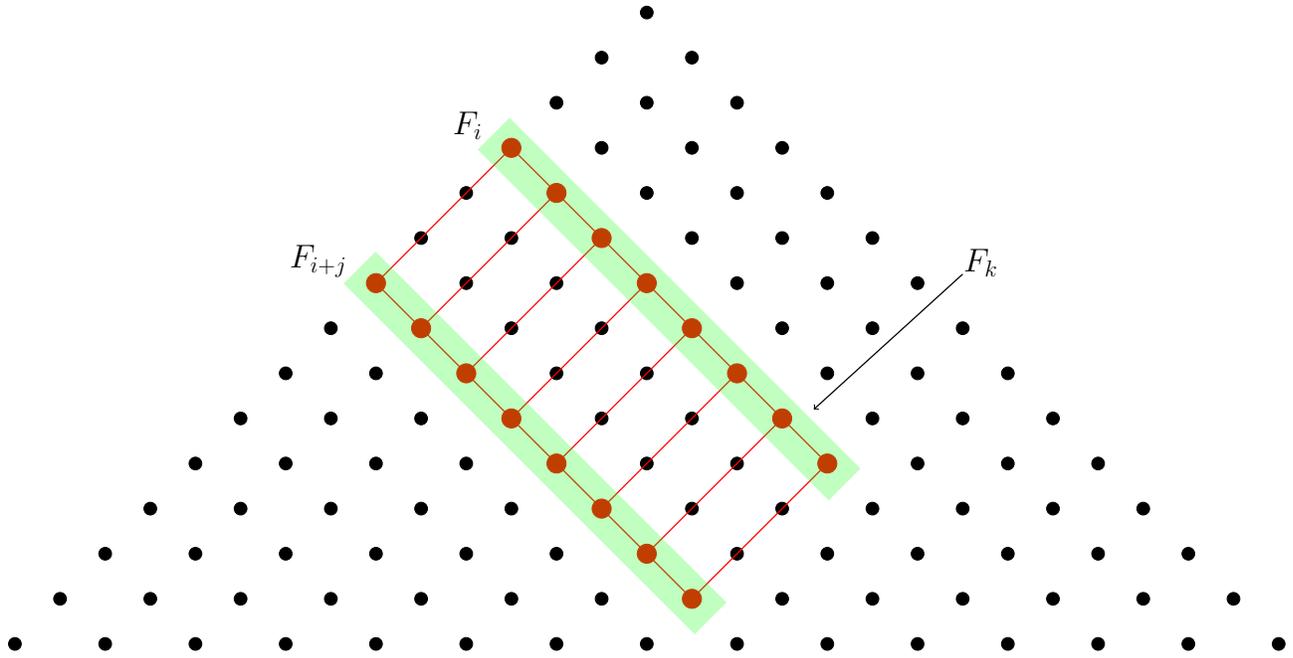


Figura 36: Escalera oblicua invertida

■ Prueba de parte 5

Vamos a demostrar primero de forma algebraica que se cumple la igualdad, tenemos que

$$\begin{aligned}
 F_{r-k} \sum_{i=0}^m H(k+i+1, 1) &= F_{r-k} \sum_{i=0}^m F_1 F_{k+i+1-1} \quad \text{por proposición 3.1} \\
 &= F_{r-k} \sum_{i=0}^m F_{k+i} \\
 &= \sum_{i=0}^m F_{k+i} F_{r-k} \\
 &= \sum_{i=0}^m H(r+i, k+i).
 \end{aligned}$$

La sumas de los puntos del peldaño oblicuo es igual a la suma de los puntos de simetría del segundo peldaño multiplicado por el Fibonacci  $F_{r-k}$ .

• Prueba geométrica.

Los puntos en el peldaño  $t$  como se muestra en la Figura 3.2 son de la forma  $F_t F_r + F_t F_{r+1} + \dots + F_t F_{r+k} = F_t (F_r + F_{r+1} + \dots + F_{r+j})$  donde  $F_r + F_{r+1} + \dots + F_{r+j}$  es la suma de los puntos del segundo peldaño.

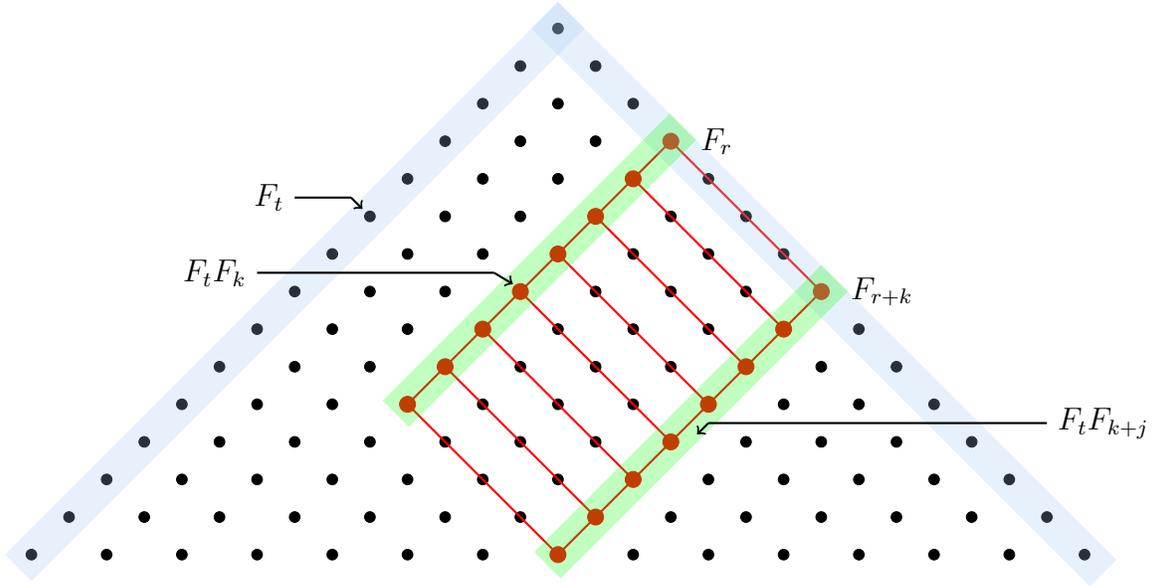


Figura 37: Escalera oblicua

■

La longitud de un peldaño en una escalera vertical en  $\mathcal{H}$  da lugar a una identidad para un tipo de escalera vertical, la cual tiene una de sus paralelas de la escalera en la vertical central de  $\mathcal{H}$  y los peldaños tiene exactamente 2 puntos, esta identidad es la de Cassini, vista en el capítulo 1.

### Identidad de Cassini

$$H(2r + 1, r + 1) - H(2r + 1, r) = (-1)^r \quad \text{para } r \geq 0$$

donde la primera entrada es el punto del peldaño ubicado en la vertical central de  $\mathcal{H}$ .

Para el mismo tipo de escalera solo que contenga 2 puntos o más obtenemos la identidad de Catalan también vista en el capítulo 1, y podemos ver un ejemplo de esta identidad en el figura, notemos que la longitud absoluta es la misma en cada peldaño.

### Identidad de Catalan

$$H(2r + 1, r + 1) - H(2r + 1, r - k + 1) = (-1)^{r-k+1} H(2k - 1, k) \quad \text{para } r, k \geq 1 \text{ y } r \geq k$$

donde  $H(2r + 1, r + 1)$  es el punto del peldaño que esta sobre la vertical central de  $\mathcal{H}$ , y el primer peldaño esta sobre la fila  $2r + 1$ .

Una forma más general para calcular la longitud de un peldaño de una escalera vertical viene dada por la identidad de Johnson.

### Proposición 3.3. Identidad de Johnson

Sean  $r, j, k$  e  $i$  enteros positivos tal que si  $r + j = k + i$  y  $i < j$ , se cumple que

$$H(r + j, j) - H(k + i, i) = (-1)^i H(r + j - 2i, j - i).$$

*Demostración.*

Por Corolario 1.6 tenemos la equivalencia

$$F_j F_{r+1} - F_i F_{k+1} = (-1)^i F_{j-i} F_{r-i+1}$$

Aplicando Binet obtenemos:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\alpha^j - \beta^j}{\alpha - \beta} \right) \left( \frac{\alpha^{r+1} - \beta^{r+1}}{\alpha - \beta} \right) - \left( \frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \right) \left( \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((\alpha^j - \beta^j)(\alpha^{r+1} - \beta^{r+1}) - (\alpha^i - \beta^i)(\alpha^{r+j-i+1} - \beta^{r+j-i+1})) \quad \text{ya que } r + j = k + i \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{r+j+1} - \alpha^j \beta^{r+1} - \alpha^{r+1} \beta^j + \beta^{r+j+1} - \alpha^{r+j+1} + \alpha^i \beta^{r+j-i+1} + \alpha^{r+j-i+1} \beta^i - \beta^{r+j+1}) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((\alpha\beta)^i (-\alpha^{j-1} \beta^{r-i+1} - \alpha^{r-i+1} \beta^{j-1} + \beta^{r+j-2i+1} + \alpha^{r+j-2i+1})) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((-1)^i (\alpha^{r+j-2i+1} - \alpha^{j-1} \beta^{r-i+1} - \alpha^{r-i+1} \beta^{j-1} + \beta^{r+j-2i+1})) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((-1)^i (\alpha^{j-i} - \beta^{j-i})(\alpha^{r-i+1} - \beta^{r-i+1})) \\ &= (-1)^i F_{j-i} F_{r-i+1} \\ &= (-1)^i H(r + j - 2i, j - i). \end{aligned}$$

■

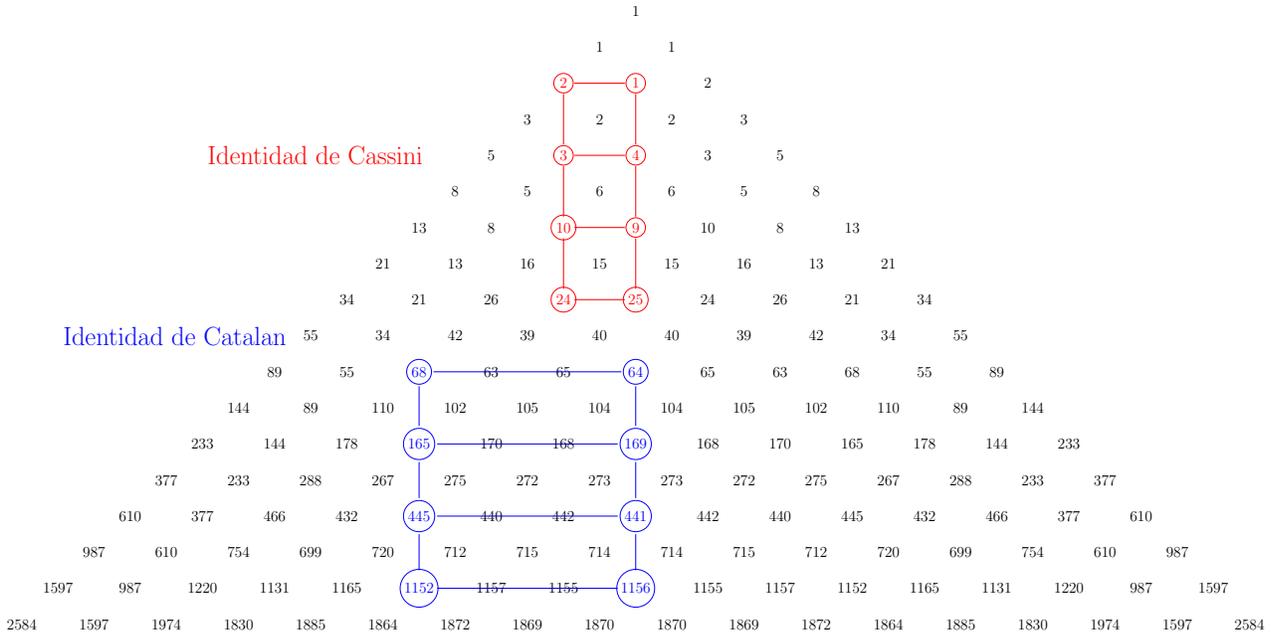


Figura 38: Cassini y Catalan

El triángulo de Hosoya se puede dividir en dos partes, su parte derecha y su parte izquierda tomando como referencia la vertical del medio de  $\mathcal{H}$ , tal como se muestra en la Figura 39.

Antes del siguiente teorema debemos conocer las partes del palo de hockey y como se comportan dentro de  $\mathcal{H}$ .

**Definición 3.7.**

- Llamaremos *bastón del palo de Hockey* al conjunto de puntos que pertenecen a una misma columna.
- Llamaremos *hoja del palo de Hockey* al punto de la siguiente fila donde termina el bastón, ya sea a la izquierda o derecha del bastón.
- Llamaremos un *palo de hockey derecho (izquierdo)* si su hoja está a la derecha (izquierda) del bastón.

**Teorema 3.2. Palo de Hockey**

Sean  $s_0, s_1, \dots, s_i$  puntos en el bastón del palo de Hockey donde  $s_0 \in \{S(F_1), B(F_1)\}$ . Si  $b_t$  es el punto en la hoja del palo de Hockey, con  $t \in \{D, I\}$ , entonces

1.  $s_0 + s_1 + \dots + s_{2n-2} + s_{2n-1} = b_I$ , si el palo de hockey está en lado izquierdo.
2.  $s_0 + s_1 + \dots + s_{2n-2} + s_{2n-1} = b_D$ , si el palo de hockey está en lado derecho.
3.  $s_0 + s_1 + \dots + s_{2n-1} + s_{2n-2} = b_D$ , si el palo de hockey está en lado izquierdo.
4.  $s_0 + s_1 + \dots + s_{2n-1} + s_{2n-2} = b_I$ , si el palo de hockey está en lado derecho.
5.  $s_0 + s_1 + \dots + s_i = b_I = b_D$ , para cada  $i$ , si el palo de hockey está en el centro.

*Demostración.*

1. En la parte 1 tomemos a  $s_0 \in S(F_1)$  esto significa que el bastón está en el lado izquierdo de  $\mathcal{H}$ , debemos probar que si el bastón tiene un número par de puntos, la suma de estos puntos es igual a la hoja izquierda. Esto lo notamos en la Figura 39.

Viendo la Figura 39 y el comportamiento que tienen los puntos del bastón se puede deducir las coordenadas de los puntos y obtenemos:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} s_i = \sum_{i=0}^{2n-1} H(r + 2i, i + 1)$$

para  $n, r \geq 1$ . El  $b_I = H(r + 4n - 1, 2n)$  y por lo tanto tenemos una equivalencia con las coordenadas. La prueba es por el método de inducción matemática.

- Caso base:  $n = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^1 H(r+2i, i+1) &= H(r, 1) + H(r+2, 2) \\
&= F_1 F_r + F_2 F_{r+1} \\
&= F_{r+2} \\
&= F_2 F_{r+2} \\
&= H(r+3, 2) \\
&= b_I.
\end{aligned}$$

- Hipótesis inductiva: supongamos que se cumple para  $n = m$  entero positivo, tal que

$$\sum_{i=0}^{2m+1} H(r+2i, i+1) = H(r+4m-1, 2m).$$

- Paso inductivo: probaremos que se cumple para un  $n = m + 1$ .

Queremos:

$$\sum_{i=0}^{2m+1} H(r+2i, 1+i) = H(r+4m+3, 2m+2).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2m+1} H(r+2i, 1+i) &= \sum_{i=0}^{2m-1} H(r+2i, 1+i) + H(r+4m, 2m+1) + H(r+4m+2, 2m+2) \\
&= H(r+4m-1, 2m) + H(r+4m, 2m+1) + H(r+4m+2, 2m+2) \\
&= F_{2m} F_{r+2m} + F_{2m+1} F_{r+2m} + F_{2m+2} F_{r+2m+1} \\
&= F_{r+2m} (F_{2m} + F_{2m+1}) + F_{2m+2} F_{r+2m+1} \\
&= F_{r+2m} F_{2m+2} + F_{2m+2} F_{r+2m+1} \\
&= F_{2m+2} (F_{r+2m} + F_{r+2m+1}) \\
&= F_{2m+2} F_{r+2m+2} \\
&= H(r+4m+3, 2m+2).
\end{aligned}$$

Esto prueba la parte 1. Notemos que si  $s_0 \in S(F_1)$  y el bastón tiene un número par de puntos, esto es un palo de hockey izquierdo en lado izquierdo de  $\mathcal{H}$ .

2. En la parte 2 tomemos a  $s_0 \in B(F_1)$  esto significa que el bastón está en el lado derecho de  $\mathcal{H}$ , debemos probar que si el bastón tiene un número par de puntos, la suma de estos puntos es igual a la hoja derecha. Podemos deducir sus coordenadas de los  $s_i$  las cuales son:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} s_i = \sum_{i=0}^{2n-1} H(r+2i, r+i)$$

para  $b_D = H(r+4n-1, r+2n)$ .

Notemos en la Figura 39 que por simetría el palo de hockey derecho en el lado derecho es igual al palo de hockey izquierdo en el lado izquierdo. Viendo esto podemos utilizar la simetría de las coordenadas de  $\mathcal{H}$  dadas en el Teorema 1.22, la cual es que  $H(r, k) = H(r, r - k + 1)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2n-1} H(r + 2i, r + i) &= \sum_{i=0}^{2n-1} H(r + 2i, i + 1) \quad \text{por Teorema 1.22} \\ &= H(r + 4n - 1, 2n) \quad \text{por parte 1} \\ &= H(r + 4n - 1, r + 2n) \quad \text{por Teorema 1.22.} \end{aligned}$$

Esto prueba la parte 2. Notemos de la prueba que si  $s_0 \in B(F_1)$  y el bastón tiene un número impar de puntos, esto es un palo de hockey derecho en el lado derecho de  $\mathcal{H}$ .

3. En la parte 3 tomemos a  $s_0 \in S(F_1)$  esto significa que el bastón está en el lado izquierdo de  $\mathcal{H}$ , debemos probar que si el bastón tiene un número impar de puntos, la suma de estos puntos es igual a la hoja derecha.

De la Figura 39 podemos deducir las coordenadas de los  $s_i$ , la cual es  $s_i = H(r + 2i, i + 1)$  y de  $b_D = H(r + 4n - 3, 2n)$ .

Queremos demostrar:

$$\sum_{i=0}^{2n-2} H(r + 2i, i + 1) = H(r + 4n - 3, 2n).$$

Lo cual demostraremos por inducción sobre  $n$ .

- Caso base: para  $n = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^0 H(r + 2i, i + 1) &= H(r, 1) \\ &= F_r \\ &= F_2 F_r \\ &= H(r + 1, 2). \end{aligned}$$

Cumple para el caso base.

- Hipótesis inductiva: supongamos que se cumple para un entero  $m$ , tal que

$$\sum_{i=0}^{2m-2} H(r + 2i, i + 1) = H(r + 4m - 3, 2m).$$

- Paso inductivo: probaremos que se cumple para  $m + 1$  :

Queremos probar:

$$\sum_{i=0}^{2m} H(r + 2i, i + 1) = H(r + 4m + 1, 2m + 2)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2m} H(r+2i, i+1) &= \sum_{i=0}^{2m-2} H(r+2i, i+1) + H(r+4m-2, 2m) + H(r+4m, 2m+1) \\
&= H(r+4m-3, 2m) + H(r+4m-2, 2m) + H(r+4m, 2m+1) \\
&= F_{2m}F_{r+2m-2} + F_{2m}F_{r+2m-1} + F_{2m+1}F_{r+2m} \\
&= F_{2m}(F_{r+2m-2} + F_{r+2m-1}) + F_{2m+1}F_{r+2m} \\
&= F_{2m}F_{r+2m} + F_{2m+1}F_{r+2m} \\
&= F_{r+2m}(F_{2m} + F_{2m+1}) \\
&= F_{r+2m}F_{2m+2} \\
&= H(r+4m+1, 2m+2).
\end{aligned}$$

Esto prueba la parte 3. Notemos de la prueba que si  $s_0 \in S(F_1)$  y el bastón tiene un número impar de puntos, esto es un palo de hockey derecho en el lado izquierdo de  $\mathcal{H}$ .

4. En la parte 4 tomemos a  $s_0 \in B(F_1)$  esto significa que el bastón esta en el lado derecho de  $\mathcal{H}$ , debemos probar que el bastón tiene un número impar de puntos, la suma de estos puntos es igual a la hoja izquierda.

De la Figura 39 podemos deducir que las coordenadas de los  $s_i = H(r+2i, r+i)$  y de  $b_I = H(r+4n-3, r+2n-2)$ . Queremos demostrar:

$$\sum_{i=0}^{2n-2} H(r+2i, r+i) = H(r+4n-3, r+2n-2).$$

Por simetría y parte 3 podemos probar esto.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2n-2} H(r+2i, r+i) &= \sum_{i=0}^{2n-2} H(r+2i, i+1) \quad \text{por Teorema 1.22} \\
&= H(r+4n-3, 2n) \quad \text{por parte 3} \\
&= H(r+4n-3, r+2n-2) \quad \text{por Teorema 1.22.}
\end{aligned}$$

Esto prueba la parte 4. Notemos de la prueba que si  $s_0 \in B(F_1)$  y el bastón tiene un número impar de puntos, esto es un palo de hockey izquierdo en el lado derecho de  $\mathcal{H}$ .

5. En la parte 5 tomamos a  $s_0 \in B(F_1) \cap S(F_1)$  esto significa que el bastón está en el centro de  $\mathcal{H}$ . Debemos probar:

$$\sum_{i=0}^n s_i = b_I = b_D.$$

Lo probaremos separándolo en casos cuando  $n$  sea par o impar.

- Caso cuando  $n$  es impar:

Ya que  $s_0 \in S(F_1)$  y el bastón tiene un número par de puntos por parte 1 tenemos:

$$\sum_{i=0}^n s_i = b_I.$$

Pero  $s_0 \in B(F_1)$  también y ya que el bastón posee un número par de puntos, por parte 2 tenemos:

$$\sum_{i=0}^n s_i = b_D.$$

Esto prueba el caso cuando  $n$  es impar.

- Caso cuando  $n$  es par: Ya que  $s_0 \in S(F_1)$  y el bastón tiene un número impar de puntos por parte 3 tenemos:

$$\sum_{i=0}^n s_i = b_D.$$

Pero  $s_0 \in B(F_1)$  también y ya que el bastón posee un número impar de puntos, por parte 4 tenemos:

$$\sum_{i=0}^n s_i = b_I.$$

Esto prueba el caso cuando  $n$  es par.

Notemos que si  $s_0 \in B(F_1) \cap S(F_1)$  y el bastón tenga un número  $n$  de puntos el palo de hockey será izquierdo y derecho. ■

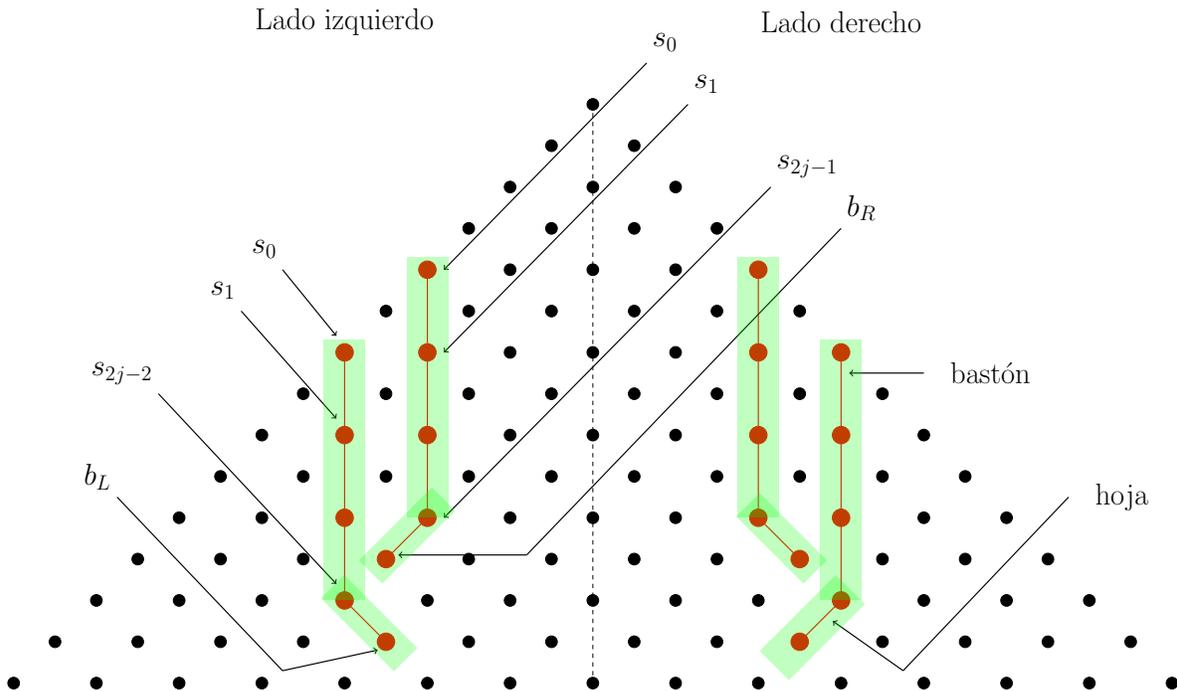


Figura 39: palo de hockey

## Conclusiones

1. El triángulo de Hosoya posee coordenadas por las que nos podemos desplazar fácilmente y esto también aplica en su generalización.
2. Las entradas del triángulo de Hosoya al ser producto de números de Fibonacci, permiten la inclusión de la propiedad del MCD al triángulo de Hosoya.
3. El MCD de los vértices de cada triángulo que forman la estrella de David es igual a 1.
4. El MCD de un polígono de  $P$  con  $n \geq 3$  y  $n$  puntos de no-ataque, es 1 ó 2.
5. Si una estrella generalizada de David tiene longitud 2, el MCD de los vértices de cada triángulo que forma la estrella es igual al  $(\mathbf{mcd}(a, b))^2$ .
6. Las condiciones necesarias y suficientes, para que la estrella de David de longitud tres en el triángulo generalizado de Hosoya satisfaga la propiedad del  $MCD$  dependen de la divisibilidad  $L_2$ , donde  $L_2$  es el segundo número de Lucas.
7. El rectángulo es un figura importante dentro de  $\mathcal{H}$ , ya que en base a su propiedad se demostró las propiedades de la escalera, ya que la escalera es conformada por rectángulos.
8. Las propiedades de Cassiní, Catalan y Johnson para números de Fibonacci, poseen una representación geométrica en el triángulo de Hosoya, siendo cada una la longitud con signo de los peldaños de cada tipo de escalera vertical.

# Propuesta

Trabajos posteriores a está tesis.

- Figuras geométricas en el triángulo de Hosoya: Dado que el presente trabajo se muestran las más importantes, existen más figuras con propiedades muy peculiares como las trenzas, triángulos, zig zag, entre otras.
- Triángulo polinomial de Hosoya: Un triángulo con entradas de polinomios de Hosoya, donde si tomamos polinomios particulares obtenemos el triángulo de Hosoya y el triángulo generalizado.
- Matrices en el triángulo de Hosoya: Estudio de propiedades de matrices con entradas de productos de números de Fibonacci, es debido a mostrar alguna conexión entre el triángulo de Hosoya con geometría, teoría de grafos y está unión viene dada del álgebra lineal.

## Bibliografía

- [Goonatilake, 1998] Goonatilake, S. (1998). *Toward a Global Science*. Indiana University Press.
- [Koshy, 2001] Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, volume 51 of *A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts*. John Wiley & Sons.
- [Livio, 2003] Livio, M. (2003). *The Golden Ratio: The Story of Phi, the Worlds Most Astonishing Number*. New York City: Broadway Books.
- [Singh, 1985] Singh, P. (1985). *The So-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India*, volume 12. *Historia Mathematica*.
- [Abraham Moivre, 1718] Abraham Moivre (1718). *The doctrine of chances*. ., 17.
- [Gabriel lamé, 1844] Gabriel lamé (1844). *Comptes Rendus, Hebdomadaires, Dés séances*, volume Dix-neuvième of *L'académie des sciences, Paris*.
- [Haruo Hosoya, 1976] Haruo Hosoya (1976). *Fibonacci triangle, Fibonacci quarterly*. 14:173–178.
- [Jacques Binet, 1843] Jacques Binet (1843). *Mémoires et communications. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences.*, page 563.
- [Johannes Kepler, 1611] Johannes Kepler (1611). *Strena seu de nive sexagula*.
- [Martin Garden, 1996] Martin Garden (1996). *Mathematical Circus. The Mathematical Association of America*, page 153.
- [Rigoberto Florez, Robinson A. Higueta y Antara Mukherjee, 2018] Rigoberto Florez, Robinson A. Higueta y Antara Mukherjee (2018). *The geometry of some Fibonacci identities in the Hosoya triangle*. <https://arxiv.org/pdf/1804.02481.pdf>.
- [Rigoberto Flórez, Robinson A. Higueta y Leandro Junes, 2014] Rigoberto Flórez, Robinson A. Higueta y Leandro Junes (2014). *GCD property of Generalized Star of David in the Generalized Hosoya Triangle. Journal of Integer Sequences*. <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL17/Florez/florez3.pdf>.
- [Rigoberto Flórez y Leandro Junes, 2012] Rigoberto Flórez y Leandro Junes (2012). *GCD properties in Hosoya's Triangle*. <https://www.fq.math.ca/Papers1/50-2/FlorezJunes.pdf>.
- [Robert Simson, 1753] Robert Simson (1753). *An Explication of an Obscure Passage in Albert Girard's Commentary upon Simon Stevin's Works. Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 48:368–376.

[Stevin, Simon; Girard, Albert; Diophantus, of Alexandria, 1634] Stevin, Simon; Girard, Albert; Diophantus, of Alexandria (1634). *Vide Les Oeuvres Mathem. De Simon Stevin, a Leyde, 1634.* Chez B. & A. Elsevier, imprimeurs, Leyde.

[Werman, M.; Zeilberger, D., 1986] Werman, M.; Zeilberger, D. (1986). *A bijective proof of Cassini's Fibonacci identity.* *Discrete Mathematics*, 58:109.

[Éduoard Lucas, 1876] Éduoard Lucas (1876). *Sur diverses questions d'arithmétique supérieure*, volume X. *Sur plusieurs ouvrages de Léonard de pise.*