UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA

TÍTULO:
LA SILOGÍSTICA DE ARISTÓTELES COMO UN SISTEMA DEDUCTIVO CONTEMPORÁNEO: UNA RECONSTRUCCIÓN DESDE LOS MÉTODOS DE LA LÓGICA ALGEBRAICA ABSTRACTA CON UNA SEMÁNTICA INTENSIONAL

PRESENTADO POR:
Br. EDUARDO ANTONIO BAUTISTA SÁNCHEZ (BS15004)

TRABAJO FINAL PARA AL TÍTULO OPTAR AL GRADO DE

LICENCIADO EN FILOSOFÍA.

DIRECTOR DEL PROCESO DE GRADO:

LICENCIADO JOSÉ MILIÁN CUBILLAS

COORDINADOR DEL PROCESO DE GRADO:
DOCTOR JOSÉ OSCAR PONCE PÉREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, DR. FABIO CASTILLO FIGUEROA, SAN

SALVADOR, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA, ABRIL DEL 2023

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:
MAESTRO ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

VICERRECTOR ACADÉMICO:
DOCTOR RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO:
INGENIERO JUAN ROSA QUINTANILLA

SECRETARIO GENERAL:
INGENIERO FRANCISCO ANTONIO ALARCÓN SANDOVAL

FISCAL GENERAL:
LICENCIADO RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

AUTORIDADES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DECANO:
MAESTRO ÓSCAR WUILMAN HERRERA RAMOS

VICEDECANA:
MAESTRA SANDRA LORENA BENAVIDES DE SERRANO

SECRETARIO:
MAESTRO YUPILTISNCA ROSALES CASTRO

AUTORIDADES DEL DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA:
MAESTRO JOSÉ GUILLERMO CAMPOS LÓPEZ

COORDINADOR DEL PROCESO DE GRADO:
DOCTOR JOSÉ OSCAR PONCE PÉREZ

Agradecimientos

Primeramente, agradezco a todas las personas, de cualquier género o procedencia, que han participado de la gran empresa del conocimiento humano, subsistente a toda la historia de nuestra especie. Aquí incluyo no solo a quienes se han dedicado con pasión a la razón y la sabiduría en acto y juicio (aunque a estas primeramente ostento un sentimiento de hermandad que trasciende tiempo y cultura), sino por igual a todas las que han sustentado sociedades con su trabajo y generan la enorme riqueza que permite por un momento apartar la mirada de lo inmediato, desde los trabajos del cuidado y la salud, hasta los que extraen y transforman inumerablemente la materia, es esto lo que posibilita no solo la vida, sino una que valga la pena. Es inevitable el ensombrecimiento al pensar en las terribles injusticias de las que la humanidad ha sido y es capaz, pero sería terco e ingenuo no reconocer el genuino amor que subyace al esfuerzo que nuestro linaje hizo para salir juntos con dientes y uñas del fango, y poder explorar en miles de expresiones los infinitos secretos del cosmos, de la mente y la volición, de los principios de una vida buena y de una sociedad justa. Sigo así al maestro Russell: «Tres pasiones, simples pero abrumadoramente fuertes, han gobernado mi vida: el deseo del amor, la búsqueda del conocimiento, y la irresistible compasión por el sufrimiento humano».

Dentro de este sentimiento, haré énfasis en algunas de mis relaciones más significativas: inicio con mis padres, Rogelio Alfonso Bautista y Olga Caroline Sánchez, quienes garantizaron que llegase a mi adultez con todas las necesidades y comodidades que requieren un cuerpo y mente sana, teniendo el espacio para encontrar la pasión por mis vocaciones, y con quienes ahora, combinando esfuerzos, puedo asegurar un hogar más cómodo y loable del que podría por mi mismo. A mi hermano y hermana, Alejandro Bautista y Daniela Bautista agradezco también por las invaluables experiencias que hemos compartido, así como las muestras de imperfecto, y sin embargo, sincero amor que hemos tenido.

A todas las amistades que me han prestado mente, oído y palabra sobre todo, en el período de auge intelectual que ha sido mi proceso de licenciatura, a Julio Avelar, mi más antigua amistad, con quien, no siempre con paciencia pero si transparencia, hemos podido constituir en dialéctica reciproca muchas ideas, así como disfrutar de las levedades de la existencia. A Samuel Morales, amistad desde recién entrado a la carrera, y que no solo me ha ofrecido una experiencia similar de honesta amistad, sino también mi más usual compañero de charlas filosóficas, y con quien tuve algunas de las conversaciones más esenciales para poder concretizar muchas de las ideas en esta tesis, sin su compañía para conversar con ligereza cosas densas, habría sido incalculablemente más difícil a travesar serias brumas.

A mis muy cercanas y queridas amistades, Andrea Fuentes, Alfredo Ortez, Ricardo Ortez y Patricia Sandoval con quienes he compartido días y noches enteras de agradable tertulia y risas, sentimientos íntimos y nuevos proyectos, y en la misma entonación, agradezco a Bryan Varela, Javier Beltran, Marlon López y Oscar Alfaro, con quienes he tenido experiencias igualmente sinceras, formativas, divertidas y cruciales desde que inicie vida en esta Alma Mater. Y aunque relativamente más recientes, pero igualmente estimables, agradezco a Sara Segura y Pedro Martínez con quienes he sentido un espíritu afin para generar un espacio en que hemos compartido conocimientos y sensibilidades, que sin duda han influido de manera excepcionalmente positiva en el último período que define mi tesis; y sobre todo aquí agradezco a quien llamo al Céfiro y lo que de ahí he conocido.

Por su indispensable asistencia en mi proceso de grado y otros matices de mi formación, agradezco al profesor José Milían Cubillas, que desde antes se ha mostrado bondadoso y dispuesto al dialogo, abonando a la búsqueda creativa de sus estudiantes, y en particular en este proceso, no ha mostrado sino diligencia y prestado consejo en la expresión de mis ideas. Así mismo, al Dr. Oscar Ponce, quien ha mostrado inestimable responsabilidad en la administración de los procesos de grado del departamento y sus demás funciones, además en muchas ocasiones, ha sido un amigo y docente con el que he tenido la suerte de pulir variadas ideas. También a las distintas personas docentes que estuvieron en todo mi proceso académico en esta universidad, y que me han impulsado a seguir el camino dispuesto.

Finalmente, a cualquier lector, en donde sea, también gracias.

Índice

Resumen

Este texto propone una reconstrucción innovadora del sistema lógico de Aristóteles dentro de la línea reinterpretativa de Smiley y Corcoran basada en *lógicas algebraicas*, pero escapando al canon boeciano al integrar otras herramientas conceptuales de las fuentes, en particular, por el lado de la sintaxis, se propone el uso de términos «negativos» (aquí *infinitos*) junto a la incorporación del concepto de «ἐπαγογή» presente en los *Analíticos Posteriores* como contexto heurístico del sistema expuesto en los *Analíticos Primeros* donde se establecen relaciones explicitas entre dos universos de términos representando las esferas intensionales y extensionales, para generar un marco que permita introducir orgánicamente el *método ectético de prueba*, en cuya formalización computable resulta un lenguaje lógico más fidedigno a la inferencia silogística, mientras que semánticamente se complementa con una extensión de la interpretación *s*-σ propuesta por Corcoran (siguiendo a Leibniz) que incorpora la capacidad de denotación de entidades ostensivas, produciendo modelos más orgánicamente interrelacionados para representar con mayor precisión y dinamismo las redes de género y especie.

Palabras claves: Silogística, lógica algebraica, teoría de la prueba, filosofía de la lógica, inferencia.

Introducción

> *«Lo que más me impresiono en ese momento, sin embargo, no fue mucho lo 'obvio' sino lo 'bello'. Y todavía pienso que era lo más característico de él, porque para Lukasiewicz – una proposición científica, prueba, teoría, y demás – no debería solo de ser cierta, sino también bella. El escribió alguna vez que un artículo científico debería ser a la vez un logro estético - escrito en lenguaje perfecto, bello, tan preciso, que ni una sola palabra pudiera ser agregada o eliminada de él. Y yo diría que sus propios escritos son un modelo en ese respecto: son realmente hermosos.»*
> *-J. M. Bochenski*

El sistema lógico presentado en este texto no debe de ser entendido como una construcción definitiva y aislada del quehacer lógico y por tanto, filosófico, sino más bien como una manifestación concreta de la aplicación del análisis filosófico y filológico para la reificación y caracterización ontológica de espacios discursivos, así como de los procesos deductivos para la formalización de sus correlaciones necesarias como sistemas inferenciales computables. Lo que se quiere decir con esto es que, si bien explícitamente el logro aquí presentado es un sistema que puede generar *modelos* y *teorías* en el andamiaje conceptual de Aristóteles a partir de universos concretos de entidades, sus propiedades e interrelaciones, es decir, como *un lenguaje inferencial* en el sentido contemporáneo, y ciertamente este posee sus particularidades epistemológicas valiosas, también es el caso que este texto es implicitamente una demostración del proceso que se requiere para tomar sistemas o subsistemas filosóficos, sus conceptos, definiciones y compromisos ontológicos y ordenarlos en estructuras lógicas utilizables para el estudio de la realidad o al menos, distintas aristas de la misma. Este proceso no solo nos permite comprobar los rasgos lógicos de la expresividad de una teoría filosófica (y derivadamente, matemática, científica, social, etc.) y por extensión, asentar justificadamente las expectativas epistemológicas y ontológicas de la misma al ser aplicadas, sino también establecer límites hermenéuticos a las interpretaciones, en la medida que puede verificar la amplitud y grados de consistencia en las interpretaciones que se hagan de los mismos sistemas.

Al respecto de la elección del sistema de Aristóteles para representar esta forma de experimentación, se debe por un lado a una cuestión de practicidad, pero por otro lado, de amor y respeto por el Maestro. Practicidad porque la silogística aristotélica ha sido excepcionalmente compatible con las sistematizaciones lógicas más centradas en conjuntos de reglas de inferencias como operadores de cierre y debido a la fama del Estagirita, ha sido un blanco llamativo para probar construcciones más variadas una vez la lógica se volvió más flexible, saliendo de la zona de confort que represento la lógica de primer orden después de la primera mitad del siglo XX y la superación de la severa aversión al aristotelismo que acompaño al grito de liberación de Russell; esto me aseguró precedentes y ejemplos asentados por intelectuales más brillantes (ampliamente aprovechados y referenciados como se podrá observar), pero a la vez, sigue siendo un área suficientemente inexplorada como para que reste mucho espacio para experimentar e innovar, hay aún múltiples aspectos de las intuiciones lógicas de Aristóteles con las cuales coquetear, en este caso por ejemplo, sobre la dualidad de universos de discursos y los «términos negados», restando aún la integración de la mayoría de la doctrina de las categorías por medio de nuevas soluciones creativas. En general, se puede decir que el pensamiento lógico de Aristóteles se encuentra en un punto medio adecuado entre tener ya una captación clara de la esencialidad de la lógica (mucha de la cual se nos ha legado como base de los conceptos con los que seguimos haciendo lógica) que se presta con relativa comodidad a las usanzas actuales, pero a la vez, encontrarse rodeado de un contexto e intuiciones lo bastante distintas al de la lógica actual como para forzar a cualquier constructor intelectual a pensar en maneras novedosas de utilizar sus herramientas. Ciertamente desde hace mucho, la lógica ya no se encuentra a la sombra de Aristóteles y ha cobrado su vida propia e independiente (siendo ahora lo mejor iniciar su estudio lejos del viejo Magister), pero algo nuevo se puede encontrar en el pasado si se enfrenta con una perspectiva diferente.

Por otro lado, amor y respeto porque es imposible no notar la genuina pasión y deseo de Aristóteles por conocer, por comprender el mundo y sus vicisitudes, solo un corazón frío, o una mente dormida, no sentiría en ese espíritu una calidez acongojadora que nos acaricia hasta el ahora, miles de años después y sentir en ella el orgullo de que a través de nuestra propia humanidad podemos encontrar la razón. Aristóteles sin duda es una figura complicada, su legado no nos alcanza sin pena y decepciones. No seria justo responsabilizarlo por el dogmatismo ciego que inspiro en los siglos posteriores, pero por medio de *sus* ideas y palabras *él* mismo y otros han justificado (aún hasta el presente) nociones atroces que han costado vidas: la esclavitud y la sumisión al poder centralizado, el machismo y la patriarcalidad, la desigualdad esencial entre grupos de personas y la constricción de la diversidad humana por la noción de una naturaleza funcionalista y estática de la humanidad; si bien estas ideas son esperables de su contexto, es difícil no sentirse un tanto decepcionado porque una mente tan excelsa como para haber revolucionado o directamente construido tantas disciplinas (la filosofía, la lógica, la física, la biología, la psicología, entre varias otras) y que sin dudas elevo el nivel mismo del pensamiento, haya mostrado una disposición tan cerrada al respecto de la sociedad humana cuando es posible apuntar a ciertas desviaciones de las tendencias socio-políticas hegemónicas en por ejemplo, Platón o en la escuela epicúrea (sin llegar a retar esencialmente la deshumanización y opresión normalizada en su entorno), de hecho, la disposición del primero de arriesgar su vida y libertad por el cambio de las instituciones de su momento debe de invitarnos a cuestionar el grado de determinismo del contexto sobre la agencia en las ideas de los actores históricos sobre las convenciones sociales, y no recurrir al mismo como una explicación sin necesidad de cualificantes, después de todo, hay algo de contradictorio en venerar al Magister por retar o transformar muchos de los cánones conceptuales de su momento, pero naturalizar el hecho de que reforzó aquellos de relevancia social directa, más bien sería justo el preguntarnos no solo por las inercias históricas sino también por los intereses personales que influyen en esto, aún si los grados de libertad en las propuestas posibles eran estrechos relativo al presente. Sin embargo, y aún con consciencia de esto debo de elegir la admiración, pues como a muchas personas antes y después de mi, lo primero que despertó Aristóteles no fue ninguno de aquellos males, sino, el sincero espíritu de la curiosidad, la tenacidad en el esfuerzo metódico por entender lo que nos rodea y el goce en ello, el cuestionamiento de todo lo que se nos ocurra, no por utilidad sino por pasión, y el nunca conformarse con dogmas sino con razón; esta abstracción sea quizás egoísta, pero a pesar de esto, la influencia de esta idea no es ni ha sido sino un faro para toda aquella mente que añora el saber.

Objetivos

Objetivo General

Construir un sistema deductivo formal análogo a la silogística aristotélica y computacionalmente caracterizable, a partir de la estructuración de los elementos extraídos hermenéuticamente de las obras *Los Primeros Analíticos*, *Los Segundos Analíticos* y *La Metafísica* por medio de los métodos de la lógica algebraica abstracta.

Objetivos Específicos

- Exponer de manera sistemática la concepción de la lógica como el estudio de los sistemas formales de deducción, por medio de una construcción inductiva, iterativa y cumulativa desde sus elementos primarios entendidos desde el campo de la lógica algebraica abstracta.
- Realizar un análisis hermenéutico de *Los Primeros analíticos, Los Segundos Analíticos* y *La Metafísica* para extraer los elementos necesarios para formalizar la teoría silogística y semántica aristotélica en un sistema deductivo formal contemporáneo.
- Determinar las propiedades lógicas del sistema resultante, así como el alcance en un sentido algebraico-computacional de sus características.

Justificación

La pretensión principal de la investigación aquí presentada es el de exponer la constitución fundamental de los distintos sistemas lógicos de acuerdo al nivel metodológico alcanzado hasta la actualidad desde el punto de vista de una teoría general de la deducción y posteriormente, ejemplificar la construcción metódica de esta clase de sistemas de acuerdo a lo expuesto. Una lógica, después de todo, es necesariamente el fundamento inferencial de cualquier quehacer teórico, y por lo tanto, el tener un conocimiento apropiado de sus elementos y la interpretación de los mismos de acuerdo a fines y objetos específicos es menester para la justificación de la veracidad y confianza sobre cualquier resultado investigativo. En esta medida, la primera justificación de este estudio es presentar un referente teórico para pensar sobre las estructuras lógicas y sus elementos, así como sobre el proceder en la construcción de herramientas lógicas particulares para intereses investigativos específicos. Resulta un poco preocupante observar como, a pesar de que la lógica es *medio por antonomasia* para cualquier reflexionar teórico y metódico, hay una inescrutable carencia de investigaciones al menos en nuestro contexto universitario y nacional, y en especial de alguna que considere el alcance contemporáneo de la disciplina producto de nuevos métodos y herramientas, y no limitada a la exposición de las teorías canónicas y particulares. Esto parecería ya suficiente para otorgar un valor estimable a lo aquí presentado.

En segunda medida, el alto grado de delicadeza intelectual y meticulosidad metodológica de Aristóteles, sin mencionar su incalculable influencia en el bagaje intelectual humano pero inversamente, la enorme diferencia del contexto de este filósofo y por ende, de la morfología de su pensamiento, le hace uno de los mejores ejemplos para mostrar como la lógica actual puede ser utilizada para sistematizar una teoría filosófica particular, y por extensión, otra clase de teorías. Se podría llegar a creer (sin suficiente familiaridad con la lógica actual) que el ejercicio de aplicar estas herramientas de sistematización lógica en el pensamiento del Estagirita es redundante, sin embargo, la concepción y construcción lógica de este se basa en elementos e interpretaciones significativamente diferentes de aquellas que dieron nacimiento a la lógica contemporánea, el hecho de que la forma actual que esta última ha alcanzado puede reintegrar y hacer computable a la lógica aristotélica es prueba del grado de flexibilidad que ha alcanzado; así, la indagación aquí presente puede servir de modelo para los investigadores de sistemas ya dispuestos y sus nociones inferenciales, como método de crítica hermenéutica, al establecer maneras de determinar grados de consistencia e inconsistencia de una interpretación, como también para determinar los limites inferenciales y discursivos de la misma.

En tercer lugar y finalmente, la propia sistematización lógica presentada aquí de la silogística de Aristóteles muestra una manera de realizar inferencias computables de la correlación de un universo de propiedades (negativas y positivas) arbitrario sobre otro de objetos que las ostentan, siendo tanto esta dualidad de universos de discursos como la posibilidad de uso de *términos negativos* sin precedentes dentro de los acercamientos formales bajo operadores de consecuencia a la lógica aristotélica[1], y teniendo que sus antecedentes de estudios en general también son pocos[2], asegurando la innovación de lo presentado; es posible prever que dicho sistema podría constituir una herramienta para la organización de información semántica en investigaciones y disciplinas específicas, análogamente facilitando el proceso de caracterización justificada de objetos particulares desde conjuntos mínimos de información sobre el mismo, sin duda ameritando el interés sobre sus posibles aplicaciones en las tareas de indagación.

[1] Sin duda Reichenbach en (Reichenbach,1952) ya explora la idea de los términos negativos para extender la teoría silogística, sin embargo, por su contexto temporal padece de limitaciones similares a las de Lukasiewicz (1957), tratando de encorsetar a la silogística como un subsistema de primer orden, con la inorgánica estipulación de premisas para satisfacer la importación existencial y alterando múltiples aspectos de la estructura silogística al considerar a las proposiciones con términos negados como esencialmente distintas. Con esto no se pretende desestimar lo original de las intuiciones de Reichenbach que por lo demás, ya se adelantan en muchas de las relaciones que concebimos en el sistema que estamos exponiendo, aunque por las diferencias en el punto de partida, tampoco ha sido un referente directo.

[2] De hecho, a nivel de habla hispana solo se encuentran cuatro textos: «La silogística aristotélica de Corcoran como un subsistema de la lógica de primer orden» por E. Andrade, «El programa de análisis aristotélico» de M. Correira, «La lógica aristotélica y sus perspectivas» de M. Crubellier y «Modelo matemático para calcular todos los silogismos categóricos válidos» de K. González. Mientras que en habla inglesa, además de los cuatro autores y sus formalizaciones consideradas como antecedentes a este sistema (referencias [5],[14],[20] y [28]) que ya internalizan los resultados de los estudios iniciales de Smiley, solo se han encontrado otros tres estudios formales de este tipo: «Aristotle's syllogistic and core logic» por N. Tennant, «A completed system for Robin Smith's incomplete ecthetic syllogistic» por P. Joray y «Aristotle's extensional modality: Hintikka's intuitions, Lukasiewicz's logic and Mignucci's veredict» por V. Omelyantchik.

Metodología

Los métodos a utilizar en el proceso investigativo reflejan las partes del mismo, determinando lo siguiente:

- **Método Hermenéutico:** El estudio de los texto de Aristóteles es parte directamente esencial de la tesis, puesto que de aquí surgirán las ideas de todos los elementos formalizables y su interrelación para crear un sistema deductivo que verse sobre el universo de objeto con las cualidades ontológicas y semánticas que pretendía Aristóteles, así como para la construcción de las reglas que compondrían un operador de cierre de consecuencia que sea una representación fiel de la silogística y la noción de inferencia válida pretendida por el Estagirita, y por último, poder establecer honestamente las propiedades computables que dicho sistema realmente posee (en especial en las Sección 2 y la Subsección 3.1). Al respecto de como procederíamos con este método, tendrá un componente altamente filológico: nos referiríamos a las compilaciones de *Los Primeros Analíticos, Los Segundos Analíticos* y *La Metafísica* en su idioma griego original, particularmente en la compilación revisada hecha por W. D. Ross para Aristóteles (Aristóteles, 1957[1], 1975[3]), y por otro lado tomaremos como interpretador principal a L. de Rijk (2002a, 2002b) siendo una autoridad de confianza en el tema, y con el beneficio de que su obra (en dos tomos) es relativamente reciente, tomando en cuenta muchos de los innovaciones y avances filológicos e históricos en esta clase de investigaciones; con el fin de ser tan cuidadoso como sea posible, toda traducción directa del griego antiguo será contrastada con la traducción inglesa de Ross anexado al final de Aristóteles (1957, 1975) y la traducción castellana hecha por V. G. Yebra para la Metafísica (Aristóteles, 1998[4]); en el caso de los Primeros y Posteriores Analíticos, se compararía la traducción inglesa de H. P. Cook y H. Tredennick (Aristóteles, 1962[2]).
- **Método de formalización:** Este método consiste en la refórmulación de una teoría particular (de una lógica, como en el caso de la silogística, o más general) en los términos y conceptos de un sistema lógico-matemático formal, con la intención de exponer su estructura lógica implícita, así como para hacer sus inferencias y pruebas más algorítmica y mecánicamente computables. Como comenta P. Thom (2011), podemos decir que este

método consiste en general en tres partes: axiomatización, simbolización y traducción conceptual a una teoría formal. La formalización que haremos pertenece sobre todo a una interpretación *deductivista* y no *axiomática*, lo que significa que no se presume un conjunto de proposiciones formalizadas del que se genera una teoría, así que la axiomatización tiene un papel mínimo. La simbolización sin embargo, si se hace presente, en especial en la construcción del lenguaje $\mathcal{L}$ en la Subsección 1.1, donde se determinan dos conjuntos de términos y 6 funciones proposicionales de 2-*aridad* (siendo la aridad la cantidad de argumentos que requiere la función), naturalmente estas representan los tipos de proposiciones posibles del sistema de Aristóteles, interpretando la existencia de dos tipos extra de *proposiciones sobre particulares* desde de Rijk; esto facilita el trabajo de computación en el sentido de la *teoría de las pruebas* esencial en las Subsecciones 3.4, 3.5, 3.6 y toda la Sección 5. Por último, la traducción conceptual parte del reconocimiento de las reglas de inferencia silogística y de conversión en Aristóteles para constituirlos en un operador de cierre de consecuencia (Subsección 3.1), así como la interpretación de las categorías semánticas originales para construir un modelo lógico-matricial a partir del calculo $s-\sigma$ de Leibniz (Sección 4).

- **Método deductivo**: Este método se aplicará una primera vez y de manera más abstracta en las Subsecciones 1.2 y 1.3, persiguiendose una síntesis desde las exposiciones sistemáticas de Tarski (1956, 1994) y Czelakowski (2001) principalmente, poniendo énfasis en los elementos esenciales y las propiedades lógicas que jugarán el papel más relevante en la instanciación particular del sistema aristotélico. Este método luego se establece firmemente como la guía central a lo largo de la Parte II, ya que el foco de la investigación consiste en la creación de un sistema general de la lógica desde la perspectiva del álgebra abstracta y los operadores de cierre de consecuencia, por lo tanto será necesario establecer inductivamente las partes que componen al sistema y sus relaciones iterativas: variables, operadores, proposiciones, reglas de inferencia, operador de cierre de consecuencia, elementos designados, funciones de interpretación y clases de modelos, en esta medida, la estructuración y orden de la Parte II es la manifestación misma del método.

Parte I: Consideraciones preliminares

1. El papel de la lógica

La lógica esta en la génesis de todo esfuerzo intelectual de los seres racionales y su expresión, pues precisamente intuimos dicha racionalidad en el andamiaje que hila los argumentos y las pruebas, y que de hecho, es (aparte de la experiencia directa) lo que nos convence veritativamente. No es de sorprender entonces de que el esfuerzo de crear teorías lógicas haya nacido en distintas culturas a lo largo de la historia independientemente: en China, India, y Grecia; inclusive en nuestra región con sus pueblos precolombinos, si bien no podemos hablar de información directa al respecto de estudios sintácticos y semánticos metódicos al estilo lógico (pues la colonización se encargo de eliminar sistemáticamente la gran mayoría de sus fuentes), como si los tenemos de la tradición del moísmo chino o del análisis discursivo en el Nyaya-sutra hindú, es posible verificar en los remanentes de las culturas de nivel civilizatorio (Olmecas, Mayas, Incas y los distintos miembros de la «alianza» Azteca, entre varios otros) grandes logros matemáticos y arquitectónicos que no pudieron ser alcanzados sin un proceso inferencial de elevada abstracción, sin duda, un juicio similar puede ser hecho al respecto de cualquier otra civilización en cualquier lugar del mundo, y aunque es aún más difícil obtener registros de culturas pre-civilizatorias del pasado, no debería ser polémico asumir estas capacidades inferenciales, y en general, parecería que el potencial lógico es patrimonio de toda entidad racional *en tanto racional*.

Sin embargo, esta mera potencialidad no puede ser identificada con la lógica tal cual, como sucede con muchas disciplinas o inclusive, la filosofía misma, de la cual la lógica es una de sus columnas fundamentales. Según Moravcsik (2004, pp. 6) la lógica surge históricamente de tres intereses: poder explicativo[3], por la prueba y la deducción, y la evaluación argumentativa, mientras que para poder

[3]Si bien, Moravcsik no establece que toda explicación convincente necesite ser manifestada como una inferencia, si apunta al hecho que muchas veces es una manera efectiva de dar una explicación convincente, e.g.: «mientras más grande el estado, es más probable un nivel alto de corrupción; tal es un estado grande; por lo tanto es probable que tenga un alto nivel de corrupción» (Moravcsik, pp. 16).

constituirse como una estructura teórica, una sociedad da un paso de «la religión a la lógica», como contexto original donde se puede pensar la *necesidad* (como «comandos» y «designios divinos») y del cual se pueden desarrollar los conceptos necesarios para construir la lógica, es decir, los de *verdad, falsedad, negación, consecuencia lógica* (pp. 6-15) y *un suficiente nivel de abstracción para que la mayoría de partes del lenguaje natural puedan producir elementos que funcionen como términos silogísticos* (pp. 13).

Es en esta medida que suele hablarse de Aristóteles como el padre de la lógica, no en el sentido de ser el primero en reflexionar sobre inferencias válidas de disciplinas particulares (sabiendo de que ya existe desde mucho antes, la intuición de deducciones válidas en la geometría y la astronomía al rededor del mundo, y que como se menciono, ya existen reflexiones más metódicas sobre la válidez discursiva en lo religioso, ético y legal dentro de las tradiciones Chinas e Hindúes), sino, como una *«ciencia»* o *conocimiento genuino de la demostración (*ἐπιστήμης ἀποδεικτικῆς*)* (*An. Pr. 24a11)*[4], es decir, que no esta limitada a un estudio de la validez demostrativa o inferencial para cierto objeto o universo, sino en la demostración en sí y como generalidad de toda discursividad, por esto toma una centralidad tan explicita el silogismo en esta ciencia, pues se define como la estructura donde de ciertos supuestos dispuestos se sigue algo distinto *por necesidad (*Συλλογισμὸς δέ ἐστι λόγος ἐν ᾧ τεθέντων τινῶν ἑτερόν τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει τῷ ταῦτα εἶναι*)* (*An. Pr. 24b19-21)*, siendo una de las primeras fórmulaciones concretas de lo que puede ser entendido como *consecuencia lógica*, la cual resulta de la cuantificación de las sentencias[5] y la disposición de términos en ellas, es decir, de *propiedades proposicionales* y no de compromisos ontológicos particulares (si bien algo de esto será dicho en la Subsección 2.1); es entonces claro que ya en

[4]Todas las citas realizadas en la númeración bekkeriana han sido obtenidas de las compilaciones hechas por W. D. Ross tanto para los Primeros Analíticos y Analíticos Posteriores en [1], así como los de la Metafísica [3]; las compilaciones de Ross siguen gozando hasta ahora gran prestigio, en especial por contener usualmente comentarios cargados de información filológica, histórica y filosófica, así como importantes correcciones a las reconstrucciones originales de Bekker.

[5]Para los propósitos de este texto, se usará «sentencia» y «proposición» como sinónimos, ciertamente en el contexto de la gramática «natural» *sentencia* tiene un significado más amplio, no limitado al aspecto declarativo ni al de la modalidad estricta de la «verdad y falsedad» como lo son las proposiciones; sin embargo, en los textos de lógica esta separación se hace un pormenor innecesario puesto que en la gran mayoría de casos solo tratan con un tipo de sentencia, *la proposición*, aún en los sistemas que están interesados en expresar otros aspectos lingüísticos fuera de la declaratividad, esto usualmente se logra por medio de operadores anexos a las proposiciones mismas. En esta medida, no se considera como una decisión polémica tomar ambos términos como equivalentes.

Aristóteles se junta el bagaje conceptual necesario para constituir una disciplina que no esta subordinada a los fines de alguna otra disciplina en particular, y una red conceptual que constituyen a un objeto de estudio concreto.

Sin embargo, sería un grave error limitarnos a la correlación lógica específica que realiza el Estagirita, pues esto constreñiría demasiado las clase de relaciones e inferencias que podemos realizar, y por lo tanto, la clase de problemas abstractos o concretos que podemos tratar (limitación perfectamente encapsulada en el adagio de Kant, que «la lógica no se ha movido un paso desde Aristóteles»), como ya indica Tarski al respecto de la lógica de primer orden contemporánea: «la vieja lógica tradicional puede ser reducida casi por completo a la teoría fundamental de relaciones entre clases, y por tanto, a una pequeña parte de la teoría de clases.» (Tarski, 1994, pp. 71)[6], por supuesto, parte del espíritu del texto aquí presente es reinvindicar el potencial de la lógica Aristotélica, y en esa medida podemos decir contra el Tarski de ese momento que la lógica de primer orden tiene una generalidad que le hace ineficiente para la clase de problemas que la lógica silogística estaba construida para tratar, pero independientemente de la dirección del argumento, el punto patente es que si bien podemos concordar en las necesidades conceptuales de Moravcsik, esto no determina definitivamente una correlación única de sus elementos (como demuestran las múltiples experimentaciones contemporáneas de lógicas no clásicas y polivalentes); resaltar este punto es aparente para poder transitar a una pregunta fundamental que es: ¿existe algún concepto general de «lógica» que agrupe a cualquier permutación de estos elementos?

la mejor base para responder esta pregunta nos parecería que es desde el punto de inflexión en el pensamiento sobre la lógica que representa Frege, pues si bien no es de menospreciar los creativos aportes sobre las caracterizaciones de los juicios que aportaron los cristianos y musulmanes medievales, así como los pensadores modernos como Kant, el hecho es que su concepción de la lógica esta encerrada en la doctrina de las categorías y la silogística aristotélica, y usualmente mezclada inseparablemente con su metafísica, mientras que la lógica estoica, que presentaba una propuesta genuinamente novedosa, había quedado esencialmente olvidada; en ambos casos sin embargo, las discusiones antes de Frege son entendidas más como una discusión dentro de *un* sistema lógico y no al respecto de la lógica como disciplina de los principios y potencialidades de estos sistemas[7]. Como Quine

[6] En español puede consultarse el texto [31].

[7] P. Thom (2011), siguiendo a Ashworth y Novaes, nos indica que este punto de inflexión es también producto de las capacidades e intereses mécanico-algoritmicos que se van desarrollando,

indica subvirtiendo a Kant en el prefacio a su *Métodos de la lógica* «La lógica es una disciplina antigua y *desde* 1879 ha sido una grandiosa» (Quine, 1969), haciendo referencia al año de publicación del *Begriffsschrift* de Frege, puesto que es claro que aquí se expresa el punto de inflexión posibilitado por la acumulación histórica en el desarrollo heurístico y metodológico de la matemática, y por el grado de abstracción conceptual sobre el concepto de *términos* y *predicados* que Frege establece, esto permite pensar en la lógica no necesariamente como un sistema linguistico-demostrativo particular, sino, como el estudio de sistemas de funciones de predicación arbitrarias con universos de objetos específicos que actúan como sus argumentos y teniendo valores veritativos como sus codominios, esto permite flexibilizar la concepción de los sistemas categoriales, así como alcanzar mayor expresividad en la composición proposicional al poder establecer operadores sintácticos arbitrarios definidos como funciones con valores veritativos como dominios y codominios.

Como expresión del ambiente de este nuevo momento lógico nos dirá Quine que la lógica es la disciplina que se encarga (dada la información inicial de la *satisfacción* de secuencias simples o *atómicas*) de:

> «..establecer que sentencias compuestas serán verdaderas o que secuencias las satisficieran. Igualmente la lógica explica estas conexiones en reversa: dada que una sentencia compuesta sea verdadera, o dado lo que la satisface, determinar que alternativas quedan abiertas para las sentencias sencillas»[8] (Quine, 1986, pp. 48)

Explicitemos: en la definición de Quine, primeramente nos queda claro que el objeto de la lógica son *sentencias*, y en esta medida es en algún sentido, *una*

característicos del período histórico en el que esta Frege y en especial luego de la revolución de la computación digital que vendría pronto de mentes como las de Turing, como indica la cita de Ashworth en (Thom, 2011, pp. 194) «No hubo nunca ninguna sugerencia de que el estudio de la lógica es el estudio de sistemas formales, y aún luego de que logicistas posteriores usaran un lenguaje semitécnico con el fin de manifestar diferencias, esto era en orden de hacer aparentes diferencias de significado»; es sin embargo aparente de que es por estas circunstancialidades históricas junto a la acumulación conceptual filosófica y matemática precedente, que es posible alcanzar un grado de generalización que permita el estudio de las propiedades como tales que caracterizan a *las* lógicas en conjunto y no como prescripciones de sistemas putativos, tampoco aquí hacemos en esta explicación tanto énfasis en la formalización como tal, sino como medio para expresar y ordenar una teoría general de esta clase de construcciones que es posibilitada desde este período.

[8] Versión en español disponible como la referencia [25]

estructura lingüística, segundo, que al respecto de estos objetos su interés esencial es el de *satisfacción*[9], esta se menciona que puede suceder de tres maneras: *extra lógicamente* (por el establecimiento de axiomas o por validación empírica), *por su composición* (a partir de sentencias atómicas) y finalmente, *por su secuencia* (entendido en el sentido de Gentzen (1969), como una *secuencia de proposiciones que se generan por reglas de inferencia desde un subconjunto inicial de sentencias validas);* la primera forma de satisfacción no es propiamente una cuestión lógica, sino que se encuentra dentro de las determinaciones de la ontología y/o de la epistemología, la segunda es patrimonio del apartado de la lógica que se conoce como *teoría de modelos*, y la última, el otro apartado, *la teoría de la prueba* (o de la inferencia).

Sin embargo, Dummett (1991) criticará las limitaciones que esta noción de *lógica* establece, pues de esta manera la inferencia queda limitada a la «conservación de verdad» entre secuentes (de premisas a conclusiones), o en el mejor de los casos, a la conservación de «valores designados» para conjuntos de equivalencias (determinados por sus valores veritativos) que constituyen álgebras de cardinalidad variable, es decir, álgebras de Lindembaum[10], sin embargo, no todos los sistemas que decididamente son intuidos como *lógicos* pueden ser caracterizados por medio de un homomorfismo a un álgebra finita, como las lógicas difusas o cuánticas que poseen infinitos grados de verdad. Inclusive las lógicas intuicionistas bivalentes quedarían fuera de esa definición, dado que la inferencia $\neg p \rightarrow q \vee r : (\neg p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$ es válida por conservación de «verdad», pero no por la teoría epistemológica subsistente al intuicionismo[11] y por lo tanto, por

[9]Quine relaciona inmediatamente esta «satisfacción» con la «verdad» de una sentencia, en la medida de que si una sentencia se satisface lógica o extralógicamente implica que tiene el valor de «verdadera» y es «falsa» de otra manera.

[10]Esencialmente, las álgebras Lindenbaum-Tarski parten de la generación de conjuntos de equivalencia de sentencias que poseen el mismo valor de verdad, en una lógica bivalente clásica por ejemplo, todas las sentencias verdaderas constituyen el conjunto de equivalencia del predicado «verdadero» (las restantes constituyendo el conjunto del predicado «falso») y las operaciones que caracterizan al álgebra son los operadores «$\wedge, \vee, \neg$», siendo un proceso algebraico válido aquel que partiendo de elementos del conjunto de equivalencia «verdadero», generá otro elemento del mismo conjunto (que es *cerrado* en dicho conjunto), o equivalentemente, que el resultado de la operación algebraica es el valor veritativo «verdadero», a partir del cual se determina la equivalencia de los elementos que generan el conjunto en cuestión. Esto puede ser extendido a álgebras con mayor cantidad de conjuntos de equivalencia (para múltiples valores veritativos, inclusive infinitos), siempre y cuando el álgebra resultante sea homomorfica a un álgebra finita, pues de otra manera no sería computable el sistema de validez.

[11]En términos de valores de verdad, cualquier combinación de valores veritativos que den el va-

el sistema inferencial establecida en las lógicas intuicionistas. Para Dummett entonces, la mejor manera de definir los procesos que caracterizan a una lógica es por medio de la concepción de «cuasi-ordenes» concluyendo que:

> «La asertabilidad de una proposición en un estado dado de información no depende solo de que proposiciones son asertables en estados obtenibles desde ellos. Entonces tenemos que no podemos confinarnos a asignaciones que hagan a las fórmulas en el antecedente afirmables en el estado nulo de información. Pero esto no hace diferencia: deberemos de rechazar una inferencia como invalida en la base de que podamos estar en un estado que justificaría la afirmación de sus premisas pero no de sus conclusiones»[12].(Dummett, 1991, pp. 46).

En este texto sin embargo, no usaremos *como tal* la concepción de cuasi-orden de Dummett en tanto es representado por medio de los objetos llamados «retículos», pero esto no significa tampoco que nos desviaremos esencialmente, en nuestro

lor de verdadero a $\neg p \rightarrow q \vee r$ harían verdadero a $(\neg p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$ algebraicamente hablando, sin embargo, la construcción inferencial en las teorías intuicionistas comandan que una inferencia es válida solo si existe un proceso de prueba concreto y positivo del consecuente; en este caso, el hecho de tener una prueba para la verdad de $\neg p$ a $q \vee r$, no significa que sepamos positivamente que de $\neg p$ se sigue concretamente q o r, es decir, el saber que q o r puedan ser dado $\neg p$ no implica que sepamos que específicamente o q es o r es.

[12]En el original:«[...].The assertibility of a proposition in a given state of information does not depend only on which propositions are assetible in states attainable from it, We therefore cannot confine ourselves to assignments which make the fórmulas in the antecedent assertible in the null state of information. But this makes no difference: we shall still reject an inference as invalid on the ground that we might be in a state that would justify the assetion of its premisses but not of its conclusion. [...]». Debe de mencionarse sin embargo, que Dummett culmina esta idea estableciendo que la concepción de validez en base al orden siempre esta esencialmente determinada por la concepción semántica de verdad (no cualquier paso de proposición verdadera a verdadera es válida, pero ningún paso que no sea de una proposición verdadera a verdadera es válida), en su siguiente sección (Many Absolute Truth-Values, pp. 46-47) se argumenta que en las lógicas polivalentes, la designación del valor verdadero siempre es el valor central, siendo que los demás valores designativos no tienen más que el propósito de sistematizar el comportamiento de las constantes lógicas pero que en general una sentencia no falla más gravemente el ser cierta cuando tiene el valor de 0 que cuando posee el valor de 1/2, por lo que no podemos apelar a la noción intuitiva de ser menos cierta como base de la semántica, reificando un valor central que determina lo verdadero; demás esta decir que ni en esta sección, ni en nuestro sistema en general planeamos participar de la discusión de la polivalencia y sus justificaciones metafísicas o epistemológicas, pero es necesario apuntar a la discusión.

caso nos concentraremos en la definición de «lógica» por medio de «operadores de cierre de consecuencia», la relación entre estos dos objetos es directa, en tanto que *la relación* de acceso entre nodos de un retículo cuando este último define una lógica es *el conjunto de funciones sentenciales* que constituyen al operador de cierre de consecuencia que determinan el paso de un conjunto proposicional a otro, y en efecto, ambos objetos son parte del «álgebra universal». En este contexto, Czelakowski indica que:

> El término 'lógica' es usualmente entendido como 'teoría lógica', i.e., un conjunto de sentencias que nos dice que es lógicamente cierto ... .Pero la lógica también es vista como una herramienta que nos sirve para obtener conclusiones validas de premisas validas. De acuerdo a esta perspectiva, la lógica es un conjunto de inferencias válidas, no solo de sentencias válidas. (Czelakowski, 2001, pp. 23-24)

La analogía entre Dummett y Czelakowski es sin duda, aparente. Es de aquí que entenderemos el esqueleto esencial de todo sistema teórico como *lógica sentencial*. Esta, como veremos pronto, se distingue de «lógicas interpretadas», es decir, que no solo tratan de la relación inferencial de sentencias en un sentido abstracto, sino, también de la *satisfacción semántica por medio de la reificación ontológica de un universo de objetos.*

Habiendo establecido la noción de lógica por la que nos decantamos en este texto y la función que posee en las construcciones teóricas, procederemos a definir algunas nociones fundamentales en las que se acuerpa la construcción específica aquí presente.

1.1. Lenguajes lógicos y operadores de cierre de consecuencia.

Un lenguaje lógico es *un conjunto de fórmulas sentenciales sobre un conjunto infinitamente contable de variables* (es decir, las variables pueden ser infinitas pero separables, o lo que es análogo, cada una debe de poder ser *mapeada* a un número natural, es decir, ser *coextensivo con el conjunto de los números naturales);* este conjunto *S* de sentencias se define como (Czelakowski, pp. 21):

1. Cada variable es una sentencia.
2. Si f es [una función] n-aria [de n argumentos] y $\phi_1, \cdots, \phi_n$ son sentencias, entonces la cadena $f(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ es una sentencia
   a) Esto implica también que cualquier función 0-aría, i.e.: una constante, es una sentencia.
3. Nada más es una sentencia.

Como vemos, esta es una manera iterativa de definir un lenguaje, es decir, se establecen los tipos básicos de objetos que componen el conjunto, y como se generan los elementos complejos desde estos, por otro lado, de esta intuición básica denotamos que un *lenguaje formal* es una forma particular de lenguaje con un tipo bien definido de sustantivos (las variables, y posteriormente, su instanciación en universo de objetos) que conforman composiciones proposicionales por operadores/funciones preestablecidas. Esto permite eliminar las ambigüedades lingüísticas a costa de la flexibilidad de los lenguajes naturales.

Teniendo la definición formal de lenguaje, podemos pasar a la siguiente definición necesaria, la de *operador de cierre consecuencia*. Este operador es definido como: *el mapa* $C : \wp(S) \to \wp(S)$ *en un lenguaje* S *con las propiedades de:*

1. *Reflexividad:* $X \subseteq C(X)$
2. *Monotoneidad: Si* $X \subseteq Y$, *entonces* $C(X) \subseteq C(Y)$
3. *Indempotencia:* $C(C(X)) = C(X)$
4. *Estructuralidad:* $eC(X) \subseteq C(eX)$ *i.e.: cerradura bajo la substitución de variables*

A su vez, este operador puede ser entendido como un conjunto de *reglas de inferencia,* las cuales puede ser definidas como (Czelakowski, p. 26): «un subconjunto r del producto cartesiano $\wp(S) \times S$ donde $\wp(S)$ es el conjunto potencia de S (i.e.: el conjunto de todas las permutaciones de los subconjuntos de S). Entonces, toda regla r es el conjunto de pares (X, ϕ) con $X \subseteq S$ y $\phi \in S$»[13], es decir, que una regla

[13]En el original: «[...]. Formally, a rule of inference on S is any subset r of the Cartesian product $\wp(S) \times S$, where $\wp(S)$ is the power set of S. *Thus every rule* r *is the set of pairs* (X, ϕ) with $X \subseteq S$ and $\phi \in S$. [...]».

de inferencia *toma* un conjunto de sentencias X de la cual podemos obtener una nueva sentencia ϕ (y extensionalmente, r es el subconjunto de todos estos posibles pares en un lenguaje); así, «el operador de consecuencia» no es más que el conjunto de *axiomas de inferencia* a partir de los cuales podemos precisamente construir *pruebas*, es decir, transformaciones de sentencias en otras que nos permiten tener conclusiones que si bien, subsistentes a las anteriores, digamos, son «exteriorizadas». Esto nos permite definir precisamente en que consiste una *prueba o inferencia válida*: «Una inferencia $X \vdash \phi$ [equivalente al par (X, ϕ)] de X a ϕ es *lógicamente válida* si el significado de las constantes lógicas que involucra garantiza que ϕ es verdadera si todas las sentencias de X son verdaderas.» (Czelakowski, pp. 24)[14]. Si tomamos las ideas de Dummett, podemos sustituir aquí la palabra «verdaderas» por «poseer un valor designado» para no limitarnos a la bivalencia (claro, siendo «verdadero» el valor designado por antonomasia), y en esta medida la *garantía* sería que ϕ posea un valor designado dentro de un rango aceptable dado el valor designado de X.

Por lo tanto, podemos finalmente construir que es precisamente un sistema *lógico sentencial*, el cual es el *núcleo inferencial o provabilístico* (en el sentido de prueba, no confundir con probabilístico de probabilidad) *de cualquier lógica*, y entonces un *sistema* no es sino: «un par *(S,C)* donde S es un lenguaje sentencial y C es un operador de consecuencia estructural en S»; esta combinación de objetos en un par ordenado puede generar algo importantisimo, *una teoría lógica,* esta no es más que el resultado de *aplicar un operador de consecuencia estrcutural sobre un conjunto de sentencias específicas, i.e.: un conjunto finita o infinitamente contable de axiomas.*

1.2. Semántica lógica

Como vimos, el aspecto puramente sentencial habla de los procesos de inferencia sin atender al contenido concreto de las proposiciones atómicas que las constituyen, y componen lo que usualmente entendemos como «leyes lógicas», sin embargo, en última instancia, el hecho de que una sentencia sea no solo *valida* sino que *verdadera* depende de su correlación con un estado de cosas de propiedades ónticas, así mismo, la adecuación de ciertos predicados y operadores de un lenguaje

[14]En el original: «[...]. An inference $X \vdash \phi$ from X to ϕ is logically valid if the meaning of logical constants it involves guarantess that ϕ is true if all sentences in X are also true. [...]»

formal a un universo de objeto depende concretamente de que clase de relaciones estos objetos tengan (y por tanto que «verdadero» no sea solo un valor designado, sino el referente de una relación de concordancia entre un estado de cosas y una sentencia). Es esta pues la necesidad de construcción de distintos sistemas lógicos, el hecho de que necesitamos distintos sistemas de inferencia para nuestros intereses heurísticos y epistémicos al respecto de distintos conjuntos de objetos, y la satisfacción de estos universos arbitrarios dependen de la correlación entre *sentencia* y *realidad* (para cualquier significado que se le asigne a «realidad»), es decir, *de una concepción semántica de la verdad.*

La construcción de la noción semántica de la «verdad» parte según Tarski, de la división metodológica entre un *metalenguaje* y un *lenguaje-objeto*, esto es debido a que si la verdad se encuentra en las potestades mismas del lenguaje-objeto, es inevitable que problemas como la «paradoja del mentiroso» surjan (Tarski, 1944), naturalmente esto implica que la lógica no tiene la capacidad de por sí de resolver el problema de la «verdad» en el sentido de los lenguajes naturales, pero tampoco es su objetivo, ni sería adecuado decir aquí en que grado ayuda a iluminar esa problemática. El metalenguaje agrupa expresiones «bien definidas» del lenguaje natural en dos grandes conjuntos, «expresiones de un carácter lógico general» que para los objetivos del proyecto de Tarski en su artículo «El concepto de verdad en lenguajes formalizados» (Tarski, 1956), resultan de un sistema suficientemente desarrollado de lógica matemática (relaciones aritméticas, las relaciones entre conjuntos en la teoría de clases, así como la teoría de relaciones lógicas) (pp. 170-171), mientras que el segundo tipo de expresiones son las de «términos de carácter estructural-descriptivo», que es capaz de referenciar los símbolos mismos usados en el lenguaje-objeto (operadores y términos) en cuestión asignando «nombres» a las expresiones del lenguaje objeto; es también en el metalenguaje donde se establecen los axiomas que explican las condiciones de funcionamiento (i.e.: condiciones estructurales) de los operadores del lenguaje (pp. 172).

Se debe de hacer notar que Tarski en su artículo fundamental de 1931[15] solo se compromete ontológicamente con la teoría de conjuntos postulada por Russell y Whitehead, y en esta medida cuando habla de «objetos» se refiere a un subconjunto de referentes en el metalenguaje, *la clase de individuales* (como afirma en pp. 189), así, las articulación aquí presente de su explicación canónica a toda la teoría de modelos (i.e. del aspecto semántico de una construcción lógica) se hacen

[15] Obtenido de la compilación anglosajona de 1956, i.e. la referencia [30].

al respecto de dicho universo de discurso, y si bien este universo en particular tiene beneficios históricos y metodológicos, no es menos arbitrario ontológicamente hablando. La práctica lógica contemporánea naturalmente experimenta con otras porciones del lenguaje natural para constituir el subconjunto que Tarski denomina «expresiones de un carácter lógico general», por ejemplo, la lógica cuántica de Birkhoff y Von Neumann al respecto de estados informáticos de partículas de nivel cuántico, o de particular interés en nuestro texto, el universo de términos aristotélicos intensionales en el caso de Glashoff (2011) y mi persona. Inversamente, también existe por los mismos beneficios anteriormente mencionados, un interés en establecer alguna clase de *relación formal* (es decir, algún mapa funcional o relacional) entre la teoría de conjuntos y cualquier ontología arbitraria elegida, esto no resulta en ninguna manera artificial, puesto que precisamente el gran beneficio de los conjuntos es que su ontología no es más que la *propiedad cuantificacional para cualquier clase de ontología particular,* es decir, una concepción semántica de la verdad al respecto del universo de la teoría de conjuntos es *una concepción semántica de la verdad de la propiedad cuantificacional de cualquier universo de discurso*, naturalmente para el resto de propiedades de algún universo, se deben de encontrar otras maneras de anclarles «bien definidamente» al metalenguaje.

Teniendo estas necesarias particiones lingüísticas, procedemos a establecer la reconocida «convención T»:

> Una definición formalmente correcta del simbolo 'Tr', fórmulada en el metalenguaje, será llamada una definición adecuada de verdad si posee las siguientes consecuencias:
>
> 1. Todas las sentencias que son obtenidas de la expresión '$x \in Tr$ si y solo si p', substituyendo al símbolo 'x' con un nombre estructuralmente descriptivo de cualquier sentencia del lenguaje en cuestión y para el símbolo 'p' la expresión que conforma la traducción de esta sentencia en el metalenguaje.
> 2. La sentencia 'para cualquier x si $x \in Tr$ entonces $x \in S$'.
>   (Tarski, 1956, pp. 188) [16]

[16]En el original en inglés: Çonvention T. A formally correct definition of the symbol 'Tr', formulated in the metalanguage, will be called an adequate definition of truth if it has the following consequences:

a) all sentences which are obtained from the expression '$x \in Tr$ if and only if p' by substituting

La condición fundamental es (1) que en términos más coloquiales dice que, teniendo una sentencia formal x (constituida por *términos* y *operadores* de nuestro lenguaje formal arbitrario) y a p, la expresión de los significantes naturales de x en la porción respectiva del metalenguaje (es decir, x traducido a sus respectivos términos «bien definidos» del subconjunto del lenguaje natural), x será verdadera solo y solo si su análogo p expresa una relación «real» (es decir, verificable, computacional, intelectual o empíricamente) en el universo de discurso al cual nos hemos comprometido. la condición (2) por otro lado, establece que todo el conjunto de relaciones «verdaderas» de un universo de discurso expresables formalmente, pertenecen (o son iguales) al conjunto total de expresiones de un lenguaje formal S, pues de otra manera, el lenguaje-objeto mismo no tendría la capacidad de determinar extensionalmente al predicado «verdadero» y por tanto, el metalenguaje estaría describiendo un objeto explícitamente externo al lenguaje.

Tarski considera primero un método recursivo para determinar la verdad de las sentencias, al establecer las condiciones de satisfacción de sentencias sencillas y luego, de sentencias complejas como composición de la verdad o falsedad de las simples, pero observa que este método es inaplicable por que no todas las sentencias se componen por medio de operadores directos, algunas de ellas por nociones funcionales (tomando sentencias como argumentos). En esta medida, se inclina por asumir a toda sentencia como una *función sentencial* (pp. 189) que toma por argumentos *objetos* de un universo de discurso, tal que la función retorna el valor «verdadero» si el objeto en cuestión tiene las condiciones necesarias en el metalenguaje, en su propia generalización: «la secuencia f satisface la función sentencial x si y solo si f es una secuencia infinitas de clases y p» y nos explica «Si tenemos una función sentencial del calculo de clases, entonces en lo anterior remplazamos el símbolo 'x' por un nombre (estructural-descriptivo) individual de la función sentencial fórmulada en el metalenguaje, y 'p' por una traducción de la función al metalenguaje, donde todas las variables libres v_k, v_l, etc. son reemplazados por los símbolos correspondientes 'f_k', 'f_l', etc».

En general, su noción de satisfacción semántica se encuentra en su Definición 22:

> La secuencia f satisface la función sentencial x si y solo si f es una

for the symbol 'x' a structural descriptive name of any sentence of the language in question and for the symbol 'p' the expression which forms the translation of this sentence into the metalanguage;

b) the sentence 'for any x if $x \in Tr$ then $x \in S$' (in other words '$Tr \subseteq S$')"

> secuencia infinita de clases y x es una función sentencial y estas satisfacen una de las siguientes condiciones: (α) existen los números naturales k y l tal que $x = \iota_{k,l}$ y $f_k \subseteq f_l$; (β) hay una función sentencial y tal que $x = \bar{y}$ y f no satisface la función y; (γ) hay funciones sentenciales y y z tal que x=y+z y f o satisface a y o satisface a z; (δ) hay un numero natural k y una función sentencial y tal que $x = \cap_k y$[17] y toda secuencia infinita de clases que difieren de f en a lo mucho el k-esimo lugar satisfacen la función y. (Tarski, 1956, pp. 193)

De esta manera, todas las iteraciones de funciones sentenciales con tales objetos como argumentos que resulten *satisfechas* componen el conjunto de sentencias que definen a *lo verdadero* en un lenguaje formal interpretado, o como establece en la Definición 23 (pp. 195): «x es una sentencia verdadera – en símbolos $x \in Tr$ – si y solo si $x \in S$ y toda secuencia infinita de clases satisface a x» donde S es el conjunto de sentencias de un lenguaje. De esta definición, Tarski procede a probar que su «esquema T» aplicado a la teoría del primer orden (particularmente a una teoría de los números naturales) posee una serie de propiedades interesantes, entre ellas (pp. 197-209): El principio de no contradicción (Teorema 1), el del tercero excluso (Teorema 2), cerradura bajo operador de consecuencia en el conjunto *Tr* (Teorema 3)[18], solidez (Teorema 5) entre otros.

Es de esta concepción semántica a partir de la cual surge el concepto de *modelo,* esencialmente un modelo es cualquier clase de objetos $\mathcal{K}$ que se encuentran dispuestos en una serie de relaciones $\mathcal{R}$ con ciertas propiedades $\mathcal{P}$ tal que satisfagan

[17] Debe de hacerse notar que Tarski trabaja en este artículo con una notación anterior de lógica, ya en desuso, donde 'ι' implica una forma de inclusión conjuntiva, '+' a '$\vee$' y '$\cap_k$' una cuantificación universal con cardinalidad determinada.

[18] Es de notar que es el mismo Tarski quien inicia la teoría del operador de cierre de consecuencia que utilizamos para caracterizar a la lógica en este texto, el Teorema 3 en cuestión indica que: Si $X \subseteq Tr$ entonces $Cn(X) \subseteq Tr$; la diferencia esencial es que en este contexto *Cn* representa específicamente una sería de reglas en el sentido de la capacidad de componer nuevas sentencias a partir de un subconjunto sentencial mínimo X por medio de la definición formal del comportamiento de los operadores del lenguaje (son *consecuencias* en tanto que una proposición compuesta resulta por la unión de elementos iniciales por medio de operadores; Tarski, 1956, pp. 185) y no necesariamente la noción de Gentzen más general que incluye también reglas de carácter no composicional (*corte, contracción* y *las reglas de eliminación).* La concepción de Tarski (composicional más que sentencial) naturalmente cambia en sus múltiples años de labor intelectual, culminando en una forma mucho más cercana a la que es usada por T. Smiley (que adicionalmente, junto a Corcoran inauguran la experimentación en estos términos con la lógica silogística), S. Bloom, R. Suszko, V. Verdú, Font, Jansana y Czelakowski.

semánticamente un conjunto de axiomas lógicos, y consecuentemente, cualquier teorema deducible de ellos siendo entonces en general *el modelo de una teoría deductiva*; en términos formales para constituir un modelo es necesario también tener una *función de interpretación* que establece un mapa adecuado entre los objetos del universo de discurso $\mathcal{K}$ y el conjunto de variables proposicionales $\mathcal{V}$ de un lenguaje lógico, y entre las relaciones $\mathcal{R}$ que poseen los objetos $\mathcal{K}$ (usualmente con alguna representación metalinguistica, i.e.: «=» o «$\supseteq$») y los operadores y funciones $\mathcal{S}$ del lenguaje formal (Tarski, 1994, pp. 112-116). Quízas una ejemplificación básica sea necesaria[19]. Usualmente una definición extensiva de un modelo inicia por la afirmación de un universo de discurso que puede estar particionado en *tipos* específicos, y podemos tener, para un lenguaje sentencial $\mathcal{L}$:

$$(1)\ \mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi \text{ sii } \phi \text{ es y } \psi \text{ es}^{20}$$

$$(2)\ \mathfrak{A} \models f_{\cong}(v_1, v_2) \text{ sii para todo X tal que } v_1 \in X,\ v_2 \in X$$

$$(3)\ \text{Si } \phi = f_{\cong}(v_1, v_2) \text{ y } \psi = f_{\cong}(v_3, v_4),\ \mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi \text{ sii } \mathfrak{A} \models \phi \text{ y } \mathfrak{A} \models \psi^{21}$$

Como vemos, y se discutió antes, esto no es nada más que la fijación de ciertos operadores y tipos de variables del lenguaje objeto a un lenguaje de mayor orden (*metalenguaje*), es precisamente en esta medida que Quine dice «Ser, he mantenido persistentemente, es ser el valor de una variable. Más precisamente, que es lo que uno toma como habiendo es aquello que uno admite como valor de sus variables.», es decir, que las cosas que son entendidas como *patentemente reales* en una teoría son aquellas que son asignadas a las variables por medio de las funciones de interpretación desde un subconjunto denotativo del metalenguaje y esto es lo que guía su concepción de «compromisos ontológicos» en un discurso. Esto puede parecer extremadamente trivial, pero sus beneficios son claros, primero, nos permite «convertir» porciones de un lenguaje natural a objetos que son

[19] Ejemplificaciones concretas y más elaboradas de esto pueden ser verificadas en la Subsección 4.1 para la condición (1) y 5.3 para la condición (2) de la convención T.

[20] Usamos *sii* como «si y solo si», traducción del inglés *iff*, «if and only if».

[21] Adicionalmente, si i es la función de interpretación del modelo $\mathfrak{A}$, $i(\phi) = true$ es equivalente a $\mathfrak{A} \models \phi$, al menos en lenguajes bivalentes; muchas de las definiciones y pruebas hechas en las Secciones 4 y 5 utilizan esta escritura para facilitar el proceso. Y es de aclarar que en tanto en este caso, como en la fórmula (3), el signo «=» es metalingüítico.

operables por sistemas de inferencias algebraicos y que nos permiten obtener conclusiones válidas con respecto a un universo de discurso, sin tener que considerar constantemente su contenido luego de fijarlo, y segundo, específica uno de los dos aspectos de discusión *filosófica* en este contexto, el del contenido significativo de las porciones fijadas de los lenguajes naturales, siendo el otro el de la noción de «consecuencia», más relacionado al lo puramente sentencial o prueba-teorético.

1.3. Solidez y completitud

Existen múltiples propiedades asignables a una teoría lógica (es decir, el conjunto de proposiciones deducibles por medio de un conjunto de regles de inferencias sobre un conjunto axiomático): *consistencia, decidibilidad, solidez, completitud, correctez, compacción*, etc. La relevancia de estas propiedades subyace en que nos permite determinar que expectativas tener al respecto de las inferencias ejecutables sobre ciertos modelos, y así tener una noción clara de los limites o potencialidades de una teoría lógica cuando es aplicada a ciertos universos de discurso.

En particular, este texto se concentra en probar dos propiedades: solidez y completitud, estas propiedades tienden a centralizar la discusión sobre las propiedades lógicas dado que consolidan formalmente las intuiciones del comportamiento deseable de un sistema lógico al respecto de la validez y verdad. La propiedad de consistencia también es fundamental y utilizada en nuestro sistema, pero por lo demás no requiere de mayor introducción, esencialmente encapsula la ya antigua idea de «no contradicción», teniendo que una proposición y su negación no pueden pertenecer a la misma teoría, y cuando se extiende al grado de *maximalidad* (es decir, que para todo par posible de proposiciones contradictorias expresables en un lenguaje, *una* de las dos debe de necesariamente pertenecer a la teoría) también puede introducir la idea de «tercero excluso» en las metodologías de prueba (como se puede observar su extensivo uso en 5.2 y 5.3 después de su introducción en 3.5).

La solidez y la completitud poseen una relación mutua como cada una de las direcciones de un bicondicional que relacionan los conceptos de *consecuencia sintáctica* ($\vdash$) y de *consecuencia semantica* ($\models$), esta relación bidireccional se expresa como:

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash_{\Phi} B \text{ sii } A_1, A_2, \cdots, A_n \models_{\mathfrak{A}} B$$

Donde $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subset \mathcal{L}$ para un lenguaje formal $\mathcal{L}$ y Φ es el conjunto de reglas de inferencias definidas para el lenguaje (su *operador de cierre de consecuencia*, como definido en 1.1, mientras que $\mathfrak{A}$ es un modelo de dicho sistema lógico (naturalmente, con su propia función de interpretación). La solidez representa un lado de esta relación bidireccional, en especifico la relación de izquierda a derecha, significando que un sistema lógico con alguna interpretación semántica es solido si para cualquier inferencia sintáctica (es decir, solamente bajo los términos de las relaciones proposicionales de los símbolos del sistema, o de otra forma, el aspecto puramente sentencial) de algún subconjunto de sentencias válidas de la teoría, la interpretación semántica que hacen verdadera a todas las premisas, también hacen verdadera a su consecuencia, esto significa intuitivamente que nuestro sistema no puede realizar ninguna inferencia *valida* según sus reglas pero que sea *falsa* en el modelo o universo de discurso en cuestión. La completitud representa la relación de derecha a izquierda, es decir, $A_1, A_2, \cdots, A_n \models_{\mathfrak{A}} B$ sii $A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash_{\Phi} B$ significando que si una proposición B es evaluada semánticamente como verdadera cuando un subconjunto de la teoría también lo es, entonces debe de haber una inferencia desde ese subconjunto a B, esta propiedad en esencia manifiesta la intuición de que *todo lo verdadero* (en los términos de un universo de discurso específico) es inferible, siendo usualmente un compromiso epistemológico más estricto que la solidez.

El ejemplo paradigmatico de esta clase de pruebas es la realizada para el modelo de los *números naturales* con el que Gödel famosamente comprobó la completitud de la teoría de la lógica de primer orden. Este modelo es simplemente el conjunto contablemente infinito de los números naturales con la relación de un semi orden, lo que es particularmente interesante de este modelo, es que por el teorema de Lowenheim-Skölem es posible determinar que *todo universo de objetos que pueda ser ordenado de tal manera que a cada uno se le pueda ser asignado un número natural, será un modelo de la teoría de la lógica de primer orden* (es decir, que el universo de objetos sea contablemente infinito). Esto implica entonces, que cualquier universo de objetos ordenables conservara las propiedades elementales de los números naturales, lo que explica la presencia constante de sus propiedades en distintas situaciones (Quine, 1964). Por otro lado, e inversamente, aunque hay una prueba de completitud para el semiorden de los naturales, también famosamente Gödel probo que la aritmética extendida de Peano no es *ni completa ni decidible* (es decir, no toda proposición puede ser probada por un conjunto de pasos de cardinalidad finitamente contable) con respecto a la lógica de primer orden (Quine, 1949), lo que esto implica es que existe al menos una proposición matemática de ese tipo para la cual los métodos heurísticos de la lógica de primer orden no son suficientes para concluir su valor veritativo, esto automáticamente significa que cualquier tipo de teoría que utilice estas herramientas extendidas no tendrá un método que asegure el poder decidir *los valores veritativos de cualquier proposición* arbitraria, por lo que una completa satisfacción epistemológica es imposible. Famosamente, esto destruyo el proyecto lógicista en general, y en particular, el proyecto de fundamentación de la física clásica de Hilbert, lo que nos invita a suponer consecuencias más dramáticas en otras teorías. Sin embargo, es importante remarcar que aunque estas propiedades fallen, no implica que pierden su valor epistémico ni su utilidad práctica, solo nos plantea sus limites. Similarmente, no dejan de ser un ideal deseable para cualquier teoría al que deben de aspirar, y por otro lado, la búsqueda de pruebas de la satisfacción de estas propiedades o de su falta, es un trabajo para aclarar los límites de nuestras propias teorías.

2. Nociones aristotélicas

El propósito de esta sección es dar al lector una noción suficientemente funcional de los conceptos aristotélicos más relevantes al sistema presentado a lo largo de la Parte 2, así como contextualizar histórica y epistemológicamente la silogística de Aristóteles. Primeramente en la Subsección 2.1, se pretende dar perspectiva de la problemática relación que enfrento la lógica silogística con el nacimiento de una nueva perspectiva lógica a lo largo del siglo XX, así como los procesos de formalización e integración que se realizaron a su alrededor, hasta el momento en que pudo encontrar un nuevo lugar dentro de los estudios contemporáneos de lógica y sus métodos, dejando atrás las perspectivas anticuadas más gramaticales y retóricas sobre la silogística, y poder establecerse como un método de análisis computacional con su propio potencial. En segunda instancia y razón de la Subsección 2.2, se pretende exponer el papel de la silogística en los proceso epistemológicos de Aristóteles, es decir, que función asignaba el filósofo a su sistema lógico en la investigación de los distintos fenómenos del universo, esto se nos hace fundamental para ejemplificar como en general puede concebirse que se integra la lógica en los distintos sistemas teóricos de cualquier orden epistémico y como constituye el núcleo inferencial y heurístico de cualquier investigación metódica; en particular también, permite dar una intuición al lector de a cuales problemas el sistema formal desarrollado en este texto puede ser aplicado, y que clase de información y resultados puede esperar, naturalmente esta no es una prescripción definitiva, puesto que el uso de esta herramienta lógica puede desbordar las pretenciones iniciales del Estagirita (o mejor dicho, la interpretación por la que nos decantamos de ellas) con la suficiente flexibilidad mental.

Por último, en la Subsección 2.3 se desea establecer la concepción usada de dos nociones filosóficas de Aristóteles que poseen un papel central en nuestro sistema como los compromisos ontológicos esenciales en la segunda parte de este texto: *ousía* (οὐσία)[22] y género; el trasfondo de ambos es enorme, y su discusión no poco polémica (cosa aplicable a las nociones de 2.2 aunque de manera menos aparente), sin embargo, hacer una exploración minuciosa y matizada de dichos aspectos requeriría su propio y extenso estudio, lo que esta fuera de los alcances y objetivos de este. Esto no significa que la concepción establecida ha sido elegida superficial y acríticamente, pero no es posible hacer justicia a las alternativas posibles.

En todo caso, el uso que se da a la «idea» de género en nuestro sistema lógico satisface las condiciones funcionales que posee dentro del aspecto lógico aristotélico (por medio de la definición del universo G en 4.1) sin necesariamente comprometerse a la justificación epistemológica que hace Aristóteles de su captación y reificación por medio de la percepción del *eidos* inmanente a una ousía, ni tampoco la «idea» de las entidades concretas en nuestro sistema (elementos del universo U) requiere específicamente la justificación ontológica aristotélica hechas por medio de la ousía como la unidad que ratifica la «concretitud» de algo, es decir, la computabilidad de nuestro sistema se conserva para otras interpretaciones arbitrarias de sus elementos (ya sean aristotélicas, ya estén en otro marco esencialmente distinto), siempre que funcionalmente se conserve la relación entre los mismos en los dos universos que Aristóteles justifica epistemológica y ontológicamente por medio de la ousía, eidos y género. En esta medida se ha creído importante establecer alguna noción de estos para dar la *intuición* de a que clase de objetos y problemas es aplicable este sistema, así como del grado de interrelación entre lógica, epistemología y ontología.

[22]Seguimos a de Rijk (2002a, 2002b) en no traducir el término οὐσία, si bien usualmente se ha utilizado históricamente la traducción «sustancia», en los textos de Aristóteles es a veces usado indiscriminadamente en referencia a aquello que en la tradición se entiende como «esencia» (e. g. *Met. 1041b4-9, 1041b11-22, 1042a24-31*), en particular de Rijk apunta a que el libro H de la metafísica esta dispuesto para homologar ambas nociones válidas de οὐσία tal como parece concluir el libro Z (de Rijk, 2002b, pp. 259); comparar con la problemática traducción que resulta por la falta de esta distinción en la versión de V. G. Yebra de *1041b4-9*, donde «la causa de que la materia sea algo» se identifica como la «especie» (εἶδος usualmente esencia especificada) e *inmediatamente* como substancia (Aristóteles, 1998, pp. 406).

2.1. La crítica y reivindicación de la lógica aristotélica

Como se menciono en la Subsección 1.1, la lógica de Aristóteles fue la primera en alcanzar el nivel de abstracción necesario para constituir una verdadera *teoría lógica* en vez de discusiones particulares sobre los aspectos lógicos en distintas disciplinas, si bien como nos apunta Lukasiewicz en su artículo de 1934[23], la filosofía estoica con Crisipo de Solos alcanza un mayor poder computacional con menor compromisos ontológicos (y por lo tanto, un grado de abstracción más cercano a la lógica moderna, que es lo que según Lukasiewicz la separa como *lógica proposicional* de la *lógica de términos* aristótelica), sin embargo, las circunstancialidades históricas harían que dichos textos fueran en su mayoría perdidos (con pequeños fragmentos sobreviviendo por medio de citas muy posteriores de Ciceron, Diogenes Laercio, Sexto Empírico, Alejandro de Afrodisias o Plutarco, entre algunos otros), en última instancia, el aspecto mejor conservado del estoicismo fue su ética por los intereses de los continuadores romanos de la escuela. Es entendible entonces porque la lógica aristotélica (y su doctrina filosófica general) tendría un monopolio de milenios, pero con el advenimiento del *Begriffsschrift* de Gotlob Frege se inicia una era de desarrollo desenfrenado de la lógica con una *clara resabia anti-aristotélica*, ya el texto mencionado de Lukasiewicz hace clara esta intención al tratar de buscar distanciar dicho linaje del Estagirita y justificarlo en los estoicos, iniciando así un período de severas críticas.

Partimos nuestra historia desde el golpe directo dado por Russell, quien prueba de manera bastante intuitiva que el sistema de la silogística aristotélica falla al introducir *clases vacías* por la constitución de las sentencias particulares (que llevan implícito una *cuantificación existencial*), lo que hace inválida la generalidad de los silogismos con conclusiones particulares (Goddard, 2000), además de hacerla inadecuada para la expresión de múltiples propiedades matemáticas (parte *esencial* del programa logicista); paralelamente también se incrementaban el tipo de entidades con las que trataba la lógica, la teoría aristotélica simplemente parecía insuficiente, como ya nos indicaba Tarski[24], al indicar que la «lógica tradicional» se limita a las relaciones (binarias) entre clases, mientras que la teoría contemporánea puede extender esto a relaciones y predicados de *aridad n* por un lado, y de por sí deja fuera la teoría de relaciones o en general, las proposiciones no compuestas por un predicado monádico sobre una variable cuantificada como apunta

[23]Citado aquí de la compilación inglesa de 1979, [19] en las referencias.
[24]Referenciado en la nota 6.

Lukasiewicz en (Lukasiewicz, 1957, pp. 130-132)[25].

Sin embargo, el tiempo mostró la arbitrariedad de esta crítica, pues esta solo tenía sentido dentro del programa logicista (fallido en última instancia), porque como dice Corcoran, bajo esta influencia los sistemas lógicos no se consideraban como *sistemas de deducción desde premisas arbitrarias*, sino *los sistemas de prueba de verdades lógicas desde axiomas y reglas lógicas* (Corcoran, 1982, p. 78), esto bajo el interés de modelar distintas teorías matemáticas. Ya Gentzen similarmente criticaba lo engorroso y arbitrario de los sistemas de este tipo, desde la perspectiva de su sistema de deducción natural, que pretende representar la esencia del proceso de inferencia en vez de limitarse a una disposición más mecánica de axiomas y teoremas. Irónicamente, las investigaciones sobre la deducción de Tarski (quien abandona el acercamiento puramente axiomático) en combinación con los estudios de Gentzen abren las puertas a los métodos del álgebra universal dentro de la lógica, permitiéndonos entender a *una* lógica como *un sistema de inferencias válidas, no solo de sentencias válidas* (como hemos sostenido), y por tanto a la lógica *como el estudio de relaciones estructurales de consecuencia sobre álgebras de fórmulas sentenciales* como dirían Font y Jansana, es decir, como el establecimiento de un mapa de secuentes proposicionales a otros, por medio de conjuntos de reglas computables, i.e.: $C : \wp(A) \longrightarrow \wp(A)$ para el álgebra lógica A (noción mejor establecida en la Subsección 1.1). Estos métodos y concepciones permiten recontextualizar adecuadamente a la lógica silogística, ya que como el mismo Aristóteles nos dice constantemente, su finalidad es el inferir lo «necesario» desde proposiciones arbitrarias (si bien, con cierta estructura específica), más no el establecimiento de axiomatizaciones definitivas (ni siquiera los tres «axiomas» que tienden a ser adjudicados a Aristóteles son tratados en los Primero Analíticos ni en los Analíticos Posteriores como parte de su teoría lógica), como dirá Thom en crítica de la formalización de Lukasiewicz de la teoría aristotélica, su axiomatización depende de «imponer un orden a la silogística aristotélica, más que descubrir su orden interno» (Thom, 2011, pp. 192).

Así, damos un círculo completo, y resulta obvio que bajo esta “nueva” concepción inferencial de la lógica, Aristóteles es restituible como el padre de la lógica *tal cual*, en contra del juicio de Lukasiewicz, en tanto desarrolla el primer sistema exhaustivo de este tipo, y que ya sus estudios arrojan luz a la naturaleza general de esta clase de sistemas. Esta realización llevo a T. Smiley, J. Corcoran y J. Lear

[25] O en español como la referencia [18].

a liderar en esta nueva forma de indagación y formalización de la teoría silogística Aristotélica.

2.2. Prueba epistemónica (ἀπόδειξις) y la epagogé (ἐπαγωγή)

Como Aristóteles nos indica en el primer libro de los «Analíticos Posteriores», por ἀπόδειξις se refiere a un «silogismo epistemónico» (συλλογισμὸν ἐπιστημονικόν), es decir, *un proceso de inferencia de conocimiento genuino* (ἐπιστημή), y resulta epistemónico puesto que «obtiene aquel conocimiento (αὗτον) por medio de lo aprehendido (ἐπιστάμεθα)» (*A.Po. 71b17-18*)[26], teniendo por «aprehendido» como la captación mental de la estructura composicional inmediata de una entidad. Más concretamente en *A.Po. 85b23-24* se nos explica que lo que exhibe esta clase de prueba es la *causa/razón y medio de algo, lo universal siendo causa primeramente* (αἰτίας καὶ τοῦ διὰ τὶ, τὸ καθόλου δ' αἰτιώτερον), de esta manera, este conforma el proceso fundamental para comprender la constitución de algún fenómeno, y el verdadero acto de la comprensión; según de Rijk (2002a, pp. 653) siguiendo a *89b21-35* esta prueba consta de realizar las siguientes cuatro preguntas:

1. τὸ ὅτι o el «aquello», que se refiere a algún estado de cosas;
2. τὸ διότι o el «a través de que» es el estado de cosas el caso;
3. εἰ ἔστι o el «si algo es»;
4. τί ἐστι o el «que-es».

Las primeras dos preguntas parecen estar destinadas a la asignación de propiedades a entidades ostensivas, siendo el primero la constitución de una sentencia de la forma *substrato* (ὑποκείμενον) + *atributo*, es decir, la identificación de los elementos constitutivos del fenómeno, i.e. πρᾶγμα (*«pragma»*)[27], dados por la

[26] ἀπόδειξις δὲ λέγω συλλογισμὸν ἐπιστημονικόν· ἐπιστημονικὸν δὲ λέγω καθ' ὃν τῷ ἔξειν αὗτον ἐιστάμεθα.

[27] La noción de πρᾶγμα se refiere básicamente a un «hecho» o «asunto» en el sentido más lato de la palabra, en este caso interpretamos que la extensión esta más especificada hacía la idea de «fenómeno» como «estado de cosas».

percepción-sensorial (de Rijk, 2002a, pp. 657), mientras que el segundo se refiere al establecimiento de un «intermediario epistemónico» también referido como τὸ μέσον pero no presentado en un contexto silogístico (es decir, como «término medio»), sino como estructura cognoscitiva que permite reconocer a la entidad presente en el πρᾶγμα como adecuada a un atributo por la detección de ciertos perceptibles que satisfacen las condiciones necesarias del atributo, estos en efecto son un *medium demostrationis* (de Rijk, 2002a, pp. 659-663). Las dos preguntas restantes están relacionados con la determinación de una *ousía* como quiddidad o unidad óntica de análisis de algún elemento del substrato que aparece en el fenómeno en cuestión, la afirmación del εἰ ἔστι es el reconocimiento de las constituciones perceptuales que hacen patente la presencia de alguna entidad, y por supuesto, la pregunta por el τί ἐστι, es específicamente el desvelamiento de la identidad de la unidad óntica como quiddidad de la entidad confirmada por el εἰ ἔστι (de Rijk, 2002a, pp. 655); la importancia de estas preguntas salen a la luz más concretamente en la discusión de la ousía, que es el foco de la Subsección 2.3, por lo que será dejada de lado por el momento.

En todo caso, la aplicación del proceso epistémonico requiere presupuestos, los *principios epistémicos* o ἀρχαί[28] (que llamaremos apropiadamente *puntos-de-partida*) que permiten en primer lugar organizar proposicionalmente las relaciones de un πρᾶγμα, es decir, tienen el papel de estructurar proposicionalmente la información perceptivo-sensorial, como nos dice de Rijk «El instrumento del ὅτι ἔστι [i. e. la pregunta por el τὸ ὅτι] trata sobre la identificación de objetos particulares existentes como siendo concretamente instancias de tal o cual cosa indicado por cierto definendum» (de Rijk, 2002a, pp. 630), estos principios son obtenidos por otro tipo de proceso heurístico, *la* ἐπαγωγή.

La epagogé (ἐπαγωγή) representa un proceso heurístico y no propiamente deductivo, en la medida que permite establecer al universal a partir de la experiencia sensible de elementos comunes del universo que son aprehendidos, es esta familiarización lo que sirve como *principio* de los posteriores procesos silogísticos (de Rijk, 2002a, pp. 141-142). Para de Rijk el primer elemento característico de la epagogé se da en *An.Po. I 13, 78a30-38* donde se identifica a la epagogé con la percepción sensorial, pues es por medio de esto que obtenemos el conocimiento de propiedades de distintas entidades, y que posteriormente nos lleva a *81a38-b9* clarificando que cualquier conocimiento genuino (ἐπιστήμη) de los universales o

[28]El aspecto epistémico es particular a esta discusión, por si mismo ἀρχαί solo se refiere a una noción de «principio».

de los particulares parte precisamente de la percepción sensorial. El segundo elemento esencial que caracteriza a la epagoge para de Rijk (pp. 143) se encuentra en *An.Po. 71a20-21* donde se describe como los universales surgen por el proceso inductivo de comparación de entidades por su *parecido*, este parecido parte de la identificación de propiedades básicas de la percepción sensorial que resultan impresas en alguna distribución sobre un objeto ostensivo.

De esta manera, parecería que precisamente por este proceso de *epagogé* se genera algún *punto-de-partida* (ἀρχή) para cualquier constructo teórico y por lo tanto, para la ejecución misma de los silogismos (de Rijk, 2002a, pp. 143), por esta misma razón este fundamento epistemológico posee también su lado sintáctico análogo[29], de particular relevancia para las innovaciones formales de nuestro sistema propuestas a lo largo de la Parte 2. En la interpretación de de Rijk sobre los *puntos-de-partida* (ἀρχαί) (2002a, pp. 733-738) como discutidos en los Analíticos Posteriores (*II, 19)*, estos son *sentencias-completas* («complete-dictums») que universalizan la inmanencia[30] de distintas propiedades en un conjunto de entidades por medio de *sentencias-incompletas* («incomplete-dictum»), estas correlacionan entidades *ostensivas* con la percepción-sensorial de ciertas propiedades o conjuntos de ellas (e.g. «el-eso-es-un-verde», «el-eso-es-un-cisne», «el-eso-es-un-árbol»); como las *sentencias-incompletas* constituyen *sentencias-completas* puede ser entendido directamente por el marco epistemológico de Aristóteles, que asume que los «universales» (tanto las categorías fundamentales como los conceptos que son construidos subsecuentemente a través de las primeras) son generados por medio del aislamiento de las propiedades que nuestra percepción-sensorial «utiliza» para determinar la aprehensión de las entidades concretas, y que a través de comparaciones inductivas generan conceptos más generales o más específicos que agrupan los entes que manifiestan esos conjuntos de propiedades, en particular, esta es la

[29]Más bien, como de Rijk nos dice en su nota [513] en (de Rijk, 2002a): «Concuerdo con Kahn (1981, 385) de que en Aristóteles no existe una dicotomía real entre una visión conceptual y proposiciónal de los ἀρχαι′», en el original «[...]. I agree with Kahn (1981, 385) that there is in Aristotle no real dichotomy between a conceptual and a propositional view of the ἀρχαι′; [...]»

[30]Lo que aquí llamamos inmanencia aparece expresado repetidamente en Aristóteles por medio del verbo ὑπάρχειν que nosotros en el resto del texto usualmente decidimos traducir como «disponerse» para conservar la noción más física y práctica de la que nace el concepto, aunque tiene una genealogía directa con lo que en el lenguaje filosófico tiende a entenderse como «inmanencia», este verbo representa una manera de «ser» donde el objeto del verbo no existe por si mismo, sino que se expresa siempre como propiedad(es) de entidades concretas, esta noción no es novedosa al respecto del estudio del griego, pero puede tomarse de referencia la explicación en (de Rijk, 2002a, pp. 33-37).

interpretación que hacemos de *An.Pos. II 19, 100a10-b5,* y a pesar de que la traducción canónica de H. Cooke y H. Tradennick en (Aristóteles, 1962) redacta la sección como:

> Entonces, estas facultades no son ni innatas como determinadas y completamente desarrolladas, ni tampoco derivadas de otras facultades desarrolladas en un plano superior de conocimiento; ellas surgen de la percepción sensorial, de la misma manera cuando se produce un retiro en batalla, si un hombre se detiene también lo hace otro, y luego otro, hasta que la posición original es recuperada. El alma esta constituida de tal manera que es capaz de la misma clase de proceso. Volvamos a exponer lo que se ha dicho con insuficiente precisión. Tan pronto como un perceptible 'se ha parado' en el alma, es el propio inicio de la presencia ahí mismo de un universal (porque, aunque es el particular que nosotros percibimos, el acto de la percepción involucra el universal, e.g. 'hombre' no 'un hombre, Callias'). Entonces otro 'paro' se produce entre estos universales 'próximos', hasta que se establezcan géneros indivisibles o 'últimos' universales. E.g., una especie particular de animal indica el género 'animal', y así sucesivamente. Claramente entonces debe de ser por inducción que adquirimos conocimiento de las premisas primarias, porque esta es la manera en que los conceptos generales se nos son dados por la percepción sensorial.[31].(Aristóteles, 1962, pp. 260-261)

Nosotros tomaremos partido de la interpretación hecha por (de Rijk, 2002a, pp. 730) desde *100a14* en adelante (hasta *100b5*):

[31]En el inglés original: «Thus these faculties are neither innate as determinate and fully developed, nor derived from other developed faculties on a higher plane of knowledge; they arise from sense-perception, just as, when a retreat has ocurred in battle, if one man halts so does another, and then another, until the original position is restored. The soul is so constituted that it is capable of the same sort of process. Let us re-state what we said just now with insufficient precision. As soon as one individual percept has "come to a halt" in the soul, this is the first beginning of the presence there of a universal (because although it is the particular that we perceive, the act of perception involves the universal e.g., "man" not "a man, Callias"). Then other "halts" occur among these <proximate> universals, until the indivisible genera or <ultimate> universals are established. E.g., a particular species of animal leads to the genus "animal", and so on. Clearly then it must be by induction that we acquire knowledge of the primary premisses, because this is also the way in which general concepts are conveyed to us by sense-perception.»

> «Lo que ha sido expuesto hasta ahora, pero no de manera clara, volvamos a exponer. Cuando uno de los objetos indiferenciados se situá, primero una impresión universal [i.e. aparición] ocurre en la mente; pues aunque es el particular que es percibido, la percepción concierne a lo que es común universalmente (τοῦ καθόλου), e.g. 'hombre', no Callias el hombre. De nuevo se hace una detención entre estos objetos, hasta que lo que ya no es analizable, viz. los universales [i.e. las diez categorías] se sitúen. Por ejemplo, tal animal se situá, hasta que 'animal' deviene, y dentro del concepto de 'animal' similares detenciones se hacen. Por tanto es claro que es necesario para nosotros el hacernos familiares con los datos primarios (τὰ πρῶτα) por inducción. Pues en efecto (καὶ γὰρ) es de esta manera [i.e. por inducción] que la percepción insta lo que es universal»[32]. (de Rijk, 2002a, pp. 729-730)

Notamos que en la traducción de Ross se asume acríticamente la presencia inherente de la universalidad como tal, ya en la percepción, ya en las entidades de manera casi platónica, mientras que de Rijk hace énfasis en que la universalidad es producto de la abstracción de lo común, y segundo, mientras la traducción canónica de Ross asume a lo «primario» (τά πρῶτα) como un «género último» (que de nuevo, asume una clase de percepción misma del género ya constituido por medio de las categorías), de Rijk lo interpreta como «datos primarios», i.e. los datos que produce la percepción-sensible al imprimir su constitución esencial en las entidades. De aquí se puede observar como es por medio del proceso epagógico que pueden constituirse desde entidades particulares conceptos más generales como los de *ousía* o *género* (los cuales se examinaran en 2.3).

En general, una vez instituidos por medio de la epagogé los *puntos-de-partida* (como una especie de compromisos ontológicos y epistemológicos) se puede iniciar el proceso de aplicar la heurística de la prueba epistemónica para comprehender apropiadamente un fenómeno que como se explico, consiste en una serie de

[32]En el original: «What we have just now said but not said clearly, let us state again. When one of the undifferentiated items makes a stand, first a universal impression [i.e. phantasm] occurs in the mind; for although it is the particular that is perceived, the perception concerns what is universally common (τοῦ καθόλου), e.g. 'man', not Callias the man. Again a stand is made among these items, until what is no further analyzable, viz. the universals [i.e. the ten categories] makes a stand. For example, such-and-such an animal makes a stand, until animal comes about, and within the concept of 'animal' similar stands are made. Thus it is clear that it is necessary for us to become familiar with the primary data (τὰ πρῶτα) by induction. For in fact (καὶ γὰρ) it is in this fashion [i.e. by induction] that perception instills what is universal.»

inferencias desde los *puntos-de-partida* hacia la resolución de cada pregunta. Naturalmente dentro del programa aristotélico este proceso solo puede ser logrado por medio de la *silogística* siendo este su papel dentro de la arquitectura epistemológica de Aristóteles, pero es de remarcar como cierre de esta subsección, que se distinguen dos proceso silogísticos, el más famoso, objeto principal de los primeros analíticos y que es el foco de formalización en nuestro sistema, *el silogismo a través de un medio* (llamado silogismo a secas a lo largo del texto) y otro que es mencionado en las últimas secciones de los Analíticos Posteriores, *el silogismo inmediato* o *inductivo*.

Es necesario establecer la diferencia entre la *epagogé* como *heurística inductiva* y el llamado *silogismo inductivo* presentado en (*An.Pr. 68b30-35*). En la sección mencionada se nos explica que el silogismo por inducción o *epagógico* se contrapone al silogismo regular en la medida que no procede por un «medio», y de esta manera no demuestra que el término mayor cae al menor por la mediación del *meson*, mientras que en el primero «a través del tercer término se demuestra que el extremo cae en el medio» (ἡ δὲ διὰ τοῦ τρίτου τό ἄκρον τῷ μέσω), un ejemplo concreto de esto se da en 68b38-69a14 donde por medio del ejemplo (τῶν ὁμοίων) «La guerra de Tebas contra Focea es mala» (C) podemos obtener evidencia (πίστις) de que «La guerra contra un vecino es mala» (B) teniendo el hecho definitivo de que Tebas es vecino de Focea, y de esta manera si queremos probar que «la guerra de Atenas contra Tebas es mala» (D), sabiendo también el hecho necesario que «Atenas es vecino de Tebas» tenemos que «la guerra de Atenas contra Tebas es una guerra contra un vecino» (A), de *A y B* se concluiría *D,* esta vez por silogismo *no* epagógico[33]. La epagogé sin embargo, no posee es-

[33]Es fácil notar que en la medida que el objeto de discusión es la «relación de guerra» y no un objeto concreto, la procedencia silogística evaluada como términos en operadores aristotélicos no resulta intuitiva: en primera instancia, en tanto nuestro objeto es una relación binaria «la relación de guerra de [Tebas/Atenas] con [Focea/Tebas]», el término que aparecería en cualquier clase de sentencia aristotélica formalizada sería de la forma *G(x[t/a],y[f/t]),* segundo, si se invoca una instancia particular como se hace en la proposición *C* («La guerra de Tebas contra Focea») como término, i.e. *G(t,f)* no tendría sentido dentro de ninguno de los cuatro operadores clásicos bohecianos (A,I,E,O) pues cualquiera de estos solo pueden contener «clases de particulares» como argumentos, una posible solución es utilizar una «proposición singular concreta» como de hecho, se propone en nuestro sistema (observar la introducción de la Parte 2 y más específicamente en 3.1), obteniendo entonces $\varepsilon(G(t,f),G(x,V(x)))$ y $\varepsilon(G(t,f),mala)$ donde *V(x)* es el predicado «vecino de x» con $f \in V(t)$ teniendo que $(t,f) \in G(x,V(x))$, de lo que se puede sintetizar (por medio de la aplicación combinada de nuestras reglas $P-I \times EK3$ de la Subsección 3.1) $I(G(x,V(x)),mala)$, el silogismo epagógico permitirá de manera inmediata afirmar de esto $A(G(x,V(x)),mala)$ (como su propiedad inferencial particular), luego podríamos determinar que del hecho que $t \in V(a)$,

ta relación silogística, sino que busca sobre todo, la constitución de términos por medio de la examinación de casos y encontrar en ellos una propiedad común.

Para el Estagirita sin embargo, es aparente que el *silogismo a través del medio* posee un mayor grado de confianza y validez que el inductivo, en sus propias palabras: «Naturalmente primario y más cognoscitivo (γνωριμώτερος) es el silogismo a través del medio (ὁ διὰ τοῦ μέσου συλλογισμός), pero a nosotros es más intuitivo (ἐναργέστερος) el que es a través de la inducción» (*An.Pr. 68b36-38*)[34]; Tanto Tredennick (Aristóteles, 1962, pp. 515) como de Rijk (2002a, pp. 147) concuerdan en que la razón por la que Aristóteles considerá más intuitivo al silogismo inductivo, es porque en primera instancia el proceso mental humano constituye las categorías más generales por medio de percepción de particulares y la construcción de generalidades por comparación, i. e. por inducción. Cerramos esta subsección sin embargo, indicando que no hemos incluido al silogismo inductivo dentro de nuestro sistema formal, pues a pesar de que es posible pensar en alguna clase de *regla* que permita el paso de la experiencia particular a la generalización (como se ejemplifica en la nota 33, no como proceso heurístico mediato, sino transición inmediata), las condiciones de su aplicabilidad requieren de consideraciones extra lógicas, que simplemente están fuera de los objetivos prácticos de sistematización del texto aquí presente.

2.3. Οὐσία **y género**

La discusión sobre la identidad y constitución de la *ousía* parte del establecimiento del precedente de que esta es «principio y causa» (ἀρχὴ καὶ αἰτία) y en particular la pregunta sobre la ousía de una cosa es el preguntarse «el 'porqué' [de algo] siempre de la siguiente manera, el porqué algo se dispone [ὑπάρχει] en otra cosa» (*Met, VII, 1041a9-11*)[35], este preguntarse sin embargo, no se hace de manera

$\varepsilon(G(a,t),G(x,V(x)))$ y aplicando la regla de *EK1* en 3.1 con $A(G(x,V(x)),mala)$ obtendríamos $\varepsilon(G(a,t),mala)$, que sería la sentencia D a probar, «La guerra de Atenas contra Tebas es mala»; sin más que decir, esta es nada más que una rápida e ingenua elaboración de un posible mecanismo para hacer sentido propiamente silogístico del ejemplo de Aristóteles, sin considerar los posibles problemas de tomar el compromiso ontológico con esta clase de «relaciones», es por esto que el sistema prestando a lo largo de la Parte 2 se limita a la categoría de *ousía*.

[34]«φύσει μὲν οὖν πρότερος καὶ γνωριμώτερος ὁ διὰ τοῦ μέσου συλλογισμός, ἡμῖν δ' ἐναργέστερος ὁ διά τῆς ἐπαγωγῆς".

[35]«ἐπεὶ οὖν ἣ οὐσία ἀρχὴ καὶ αἰτία τις ἐστίν, ἐντεῦθεν μετιτέον. ζητεῖται δὲ τὸ διὰ τί ἀεὶ οὕτως, διὰ τί ἄλλο ἄλλῳ τινὶ ὑπάρχει».

«simple» («ἁπλῶς λέγεσθαι») como «¿por qué la persona música es persona música?», pues el preguntarse porqué una cosa es *sí misma* no es una pregunta valida («οὐδέν ἐστι ζητεῖν»), puesto que lo único que puede responderse es «porque algo es sí mismo, siendo esta razón y causa única de todo» (*1041a13-17)*, y más bien la pregunta debe de realizarse «articuladamente [διαρθρώσαντας]» (*1041b2-3*), es decir, como especificación de los atributos que le componen.

Para de Rijk, esta pregunta que se esta realizando equivale a la pregunta τί ἐστι del proceso epistemónico, y es la apropiada continuación del mismo (de Rijk, 2002b, pp. 246), mientras que el mero hecho de poder ejecutar esta pregunta es condición de respuesta afirmativa de la pregunta por el εἰ ἔστι, pues como nos dice el mismo Aristóteles «de que algo se dispone, es obvio; pues si no es el caso, no hay pregunta» (ὅτι δ' ὑπαρχει, δεῖ δῆλον εἶναι· εἰ γὰρ μὴ οὕτως, οὐδεν ζητει, *1041a23-34*). Bajo este contexto la «pregunta articulada» es fundamental, puesto que es por medio de esta que se constituye un *definiens* que tiene la potestad de verificar la satisfacción del concepto por el ente concreto, en este sentido, la primera respuesta por la ousía que se nos otorga es a favor de la forma:

> Pues como ciertamente sabemos [ἔχειν][36] que "ser" se dispone [sobre la cosa], es obvio que es sobre la materia [ὕλην] que se pregunta dado que es algo [δὶα τί <τί> ἐστιν]. Por ejemplo, "¿Dado que son estas cosas aquí una casa?": porque se dispone el definiens [ἦν, lit. lo que fuese][37] de ser casa. También "¿Dado *que* es esto aquí hombre?" o "¿Dado *que* es este cuerpo así[38] tenido [como humano]?". Lo pre-

[36]de Rijk, siguiendo a Asclepio y el codex Laurentianus elimina un «τε» luego del «ἔχειν», por lo demás es de impacto significativo mínimo; adicionalmente el verbo aquí aparece en su ascepción de "tener/captar [en la mente]" y no el más general "tener [incualificado]".

[37]La traducción usual de las locuciones que combinan la forma imperfecta y presente del verbo «ser» ha sido «esencia» como signo de inmanencia atemporal, de una forma subsistente y eterna (e.g. V. G. Yebra en Aristóteles, 1998, pp. 406), De Rijk sin embargo acusa esta traducción de exceso interpretativo (en nota [30] de de Rijk, 2002b, pp. 158) y simplemente asigna a la forma imperfecta el ser instrumento para introducir lo consiguiente a la misma (en este caso οἰκία εἶναι) como respuesta a una cuestión alzada anteriormente, en este caso, «¿Dado que son estas cosas aquí una casa?», «lo *fuesen* por lo que es ser casa», i.e. por la *articulación* διαρθρώσαντας de atributos tal como dice Aristóteles en las líneas inmediatamente precedentes a la cita; Esto tiene la ventaja de ahorrar en compromisos ontológicos asignados *ex situ* al Estagirita (i.e. de ver la consitución formal de la casa como un instrumento conceptual, y no como una realidad patente).

[38]Frede, Patzig, Bostock y de Rijk eligen aquí sustituir «τοδὶ» por «ὡδί» luego de «σῶμα τοῦτο», de otra manera se leería algo como «Y esto, o bien este cuerpo que tiene esto, es un humano».

> guntado entonces es la causa (esto es, la forma εἶδος) de la materia por la cual es tal cosa. Esto es la ousía (οὐσία)[39].(1041b4-9)

El razonamiento aquí presentado parecería ser que, independientemente de la materia en sí, algo puede ser determinado como tal cosa particular por la distribución y correlación de sus propiedades (puesto que por ejemplo, la casa puede estar hecha de madera o de piedra, pero no deja de ser casa si están dispuestas para generar un espacio habitable) y en esta manera es la *forma* como *definiens* que es *ousía*, sin embargo, parece que esta respuesta no es definitiva, puesto que se nos afirma que este mismo proceso no es aplicable a las entidades *simples* (ἁπλᾶ) en la sección que prosigue (*1041b9-11*); es de hacer notar primeramente que esta «simpleza» no proviene de no ser entidades compuestas por elementos menores, sino que no es necesario examinar su composición para intuir alguna unidad:

> Puesto que lo compuesto de algo de tal manera que sea unidad [ἓν] del todo [πᾶν], no como un cúmulo sino como la sílaba –la sílaba no es sus partes[40], tampoco es $\overline{\beta\alpha}$ igual que $\overline{\beta}$ y $\overline{\alpha}$, tampoco la carne es fuego y tierra (pues después de separarse [διαλυθέντον] la carne y la sílaba ya no son, pero los elementos [de la sílaba] son, y también el fuego y la tierra); entonces algo es la sílaba, no solo los elementos, vocales y consonantes, sino algo distinto [ἕτερον τι], igualmente la carne que no es solo fuego y tierra, o lo caliente y frío, sino otra cosa–[41] Si, por tanto, necesariamento aquello[42] es o elemento o [compuesto] de elementos [ἢ στοιχεῖον ἤ ἐκ στοιχείων εἶναι], si es elemento, el mismo

[39] Según la compilación de W. D. Ross (sin aplicar las modificaciones propuestas por de Rijk): «[...]. ἐπεὶ δὲ δεῖ ἔχειν τε καί ὑπάρχειν το εἶναι, δῆλον δὴ ὅτι τὴν ὕλην ζητεῖ δὶα τί ʽτίʼ ἐστιν· οἷον οἰκία ταδί δὶα τί: ὅτι ὑπάρχει ὅ ἦν οἰκίᾳ εἶναι. καὶ ἄνθρωπος τοδί, ἢ τὸ σῶμα τοῦτο τοδὶ ἔχον. ὥστε τὸ αἴτιον ζητεῖται τῆς ὕλης (τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ εἶδος) ᾧ τί ἐστιν· τοῦτο δ' ἡ οὐσία».

[40] La palabra «elementos» (στοιχεῖα) tiene una connotación específica cuando se habla de «sílabas», pero no son precisamente las letras (que son llamadas γράμματα), sino unidades mínimas del habla (no solo la pronunciación de la letra misma, sino posiblemente el sonido resultante incluyendo espíritus y acentos, o el género común a las vocales y consonantes como pronunciaciones); nos quedaremos con la simple traducción «elementos» como concesión suficiente, siguiendo en este caso a V. G. Yebra, pudiendo imaginar que es un juego de palabras pretendido por Aristóteles.

[41] Como apuntan W. D. Ross y V. G. Yebra, Aristóteles pretende un extenso paréntesis representado aquí por el anacoluto.

[42] Aquello que junto a los elementos compone la unidad, e. g. que junto al fuego y la tierra hace la carne.

> razonamiento [λόγος] se aplicaría al mismo (pues de este, el fuego y la tierra estará [compuesta] la carne y luego de otro, resultando una regresión infinita [εἰς ἄπειρον βαδιεῖται] [43]), y si es [compuesto] de elementos, entonces necesariamente no será unidad sino multiplicidad, o el mismo sería aquello [que determina unidad]; resultando de nuevo para esta [cosa] el mismo razonamiento [hecho] sobre la carne o la sílaba. Parecería [δόξειε] que lo que esto sea, no [es] elemento, más bien principio del ser [αἴτιον γε τοῦ εἶναι] de *esta* [τοδὶ][44] carne y de *esta* sílaba: igualmente de cualquier otra [cosa]. Esto es ousía de cada cosa, así [γὰρ] primera causa de ser[45]. (1041b11-28)

De esta cita observamos que sí bien, las entidades «simples» no son necesariamente «unidades físicas» (como un «cuerpo» solamente compuesto de fuego o agua, si bien estas también son ousía propiamente como se dice en *1042a6-11*, junto al resto de la clase de los *naturales* «φυσικαί», que incluye al «ser-planta» y al «ser-animal»), su constitución es posiblemente plural pero con un principio de unidad mereológica, de Rijk interpreta eso como una modalidad del «εἶδος» pero como causa activa de la constitución esencial de una cosa, es decir, una *unidad quidditativa* siendo esta la verdadera identidad de la *ousía* la cual es tanto principio ontológico como *lógico* ya que es similarmente unidad del definiens (de Rijk, 2002b, pp. 249). Refozando esta idea de *forma materializada* («*enmattered form*») como unidad quidditativa se nos indica en *(Met., H, 1042a24-31)* que todas

[43]Pues si lo único que se ha hecho es agregar otro elemento, será necesario otro para constituir la unidad, pero se ejecutaría el mismo dilema para el nuevo elemento.

[44]Seguímos a W. D. Ross en este enfasis sobre la traducción de «τοδὶ», puesto que refleja que la ousía se presenta sobre seres ostensivos, como ya interpreta de Rijk como condición necesaria para el proceso epistemónico

[45]Según la compilación de W. D. Ross:« [...]. ἐπεὶ δὲ τὸ ἔκ τινος σύνθετον οὕτως ὥστε ἓν εἶναι τὸ τᾶν, ἂν μὴ ὡς σωρὸς ἀλλ’ ὡς ἡ συλλαβή – ἡ δὲ συλλαβὴ οὐκ ἔστι τὰ στοιχεῖα, οὐδε τῷ $\overline{\beta\alpha}$ ταὐτὸ τὸ β καὶ $\overline{\alpha}$, οὐδ’ ἡ σαρξ πῦρ καὶ γῆ (διαλυθέντων γὰρ τὰ μὲν οὐκέτι ἔστιν, οἷον ἡ σὰρξ καὶ ἡ συλλαβή, τὰ δὲ στοιχεῖα ἔστι, καὶ τὸ πῦρ καὶ ἡ γῆ)· ἔστιν ἄρα τι ἡ συλλαβή, οὐ μόνον τὰ στοιχεῖα τὸ φωνῆεν καὶ ἄφωνον ἀλλὰ καὶ ἕτερόν τι, καὶ ἡ σὰρξ οὐ μόνον πῦρ καὶ γῆ ἢ τὸ θερμὸν καὶ ψυκρὸν ἀλλαὰ καὶ ἕτερόν τι – εἰ τοίνυν ἀνάγκη κἀκεῖνο ἢ στοιξεῖον ἢ ἐκ στοιξείων εἶναι, εἰ μὲν στοιξεῖον, πάλιν ὁ αὐτὸς ἔσται λόγος (ἐκ τούτου γὰρ καὶ πυρὸς καὶ γῆς ἔσται ἡ σάρξ καὶ ἔτι ἄλλου, ὥστ’ εἰς ἄπειρον βαδιεῖται): εἰ δὲ ἐκ στοιξείου, δῆλον ὅτι οὐξ ἑνὸς ἀλλὰ πλειόνων, ἢ ἐκεῖνο αὐτὸ ἔσται, ὥστε πάλιν ἐπὶ τούτου τὸν αὐτὸν ἐροῦμεν λόγον καὶ ἐπὶ τῆς σαρκὸς ἢ συλλαβῆς. δόξειε δ’ ἂν εἶναι τὶ τοῦτο καὶ οὐ στοιξεῖον, καὶ αἴτιον γε τοῦ εἶναι τοδὶ μὲν σάρκα τοδὶ δὲ συλλαβήν: ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. οὐσία δὲ ἑκάστου μὲν τοῦτο (τῦτο γὰρ αἴτιον πρῶτον τοῦ εἶναι)–[...]»

las entidades perceptibles (αἱ αἰσθηταί) poseen materia[46], la ousía en estos siendo una ostensividad (ὑποκείμενον) que es traducido como *«this-ness»* por de Rijk), dandonos tres opciones de su identidad: la materia «no siendo algo actual» (ἐνεργείᾳ), sino potencialidad de algo (δυνάμει ἐστὶ τόδε τι)[47], la forma expresada por el *definiens*[48] siendo algo concreto (*un esto*), pero lógicamente separable[49], y finalmente, *una composición de ambos* (δὲ τὸ ἐκ τούτων), afirmando que solo este último puede surgir y perecer, poseyendo una existencia separada e incualificada (καὶ χωριστὸν ἁπλῶς), i. e. ser una de las dichas «entidades simples».

De las tres opciones dispuestas, realmente solo las últimas dos tiene una posibilidad real de ser la identidad de la ousía, puesto qué como se dijo anteriormente, la materia por si no es entidad alguna, sino su mera posibilidad, pero el proceso epagógico depende de poder confirmar la existencia de algo concreto y *actual*, no solo *potencialidad*. Ciertamente la segunda opción, de la forma (εἶδος) como esencia es razonable, dado la capacidad senso-perceptiva de reconocer el definiens de una cosa independientemente de en que se manifieste (como la casa), pero esto implicaría por lo tanto, *el triunfo del fundamento metafísico platónico* con el resto de las implicaciones del realismo de las ideas, incompatible con teoría epistemológica y heurística de Aristóteles; esta es la causa según de Rijk (2002b, pp. 259) de que no le quede más opción al filósofo que tornar su mirada hacía la *forma materializada*. Para la sección (*1043b32-1044b11*) podemos observar su compromiso con la tercera posición al por fin dar una explicación de cómo puede conmensurarse la pluralidad material con la unidad formal en la noción mixta de ousía por medio de una analogía con el *número* («ἀριθμός»), en la que se establecen los siguientes cuatro puntos:

1. Ambos son divisibles hasta llegar a lo indivisible;
2. Ambos pierden su identidad si algo se quita o agrega (1043b36-1044a2);
3. Ambos están en la necesidad de una unidad que les unifique, un agente en virtud del cual son «ἕν ἐκ πολλῶν», i. e. *uno de muchos* (1044a2-9);

[46]«[...].αἱ δ’ αἰσθηταὶ οὐσίαι πᾶσαι ὕλην ἔξουσιν.[...]»
[47]«...(ὕλην δὲ λέγω ἥ μὴ τόδε τι οὖσα ἐνεργείᾳ δυνάμει ἐστὶ τόδε τι)...»
[48]La unidad epistémica-lógica expresada en la locución «ὁ λόγος καὶ ἡ μορφή» en esta sección.
[49]Siguiendo inmediatamente después de la locución anterior: «[...], ὅ τόδε τι ὅν τῷ λόγῳ χωριστόν ἐστιν·[...]»

4. «Así como ningún número admite ser más o menos, tampoco lo hace la ousía como forma (ἡ κατὰ τὸ εἶδος οὐσὶα), sino quizá, aquella junta (μετα) a la materia [*ousía materializada*]» (*Met., H, 1044a9-1044a11*)[50].

De relevancia crítica es el punto (4), donde de Rijk entiende que: «Lo que Aristóteles trata de decir es que aún la forma materializada en tanto forma no es susceptible de ser intensificada o disminuida, aunque, por supuesto, el compuesto puede», lo que esto implica es que la forma materializada constituye una *unidad conceptual completa*, esto es, que es quidditativamente completa, pero sus dimensiones materiales pueden incrementarse o decrecer, por ejemplo, un humano es en tanto tal, *humano absolutamente*, es decir que posee todas las notas esenciales de su propia humanidad satisfaciendo el *definiens*, y no puede carecer ni una de ellas, sin embargo, un humano puede ser más grande que otro, teniendo más del compuesto mismo. Esta unidad es primeramente formal (y este es el énfasis que hace Aristóteles) en tanto que lo que determinamos es la quiddidad de una entidad, no por un conocimiento patente de la constitución material del mismo (e. g. puesto que no reconocemos a algo como «humano» porque tengamos aprehensión *fáctica de* que posee todos los elementos físicos que requiere la existencia de un cuerpo humano en una distribución necesaria, pues si fuese así, tendríamos que preguntarnos igualmente por la composición misma de los componentes hasta llegar a lo «indivisible»), si no por la presencia de todas las condiciones formales en *alguna materialidad*.

Sin embargo, esto no significa que la materia no tenga un papel fundamental, pues la forma como causa activa solo puede llegar a ejecutarse en tanto que la esencialidad de un sustrato material pueda adquirir y manifestar las propiedades de una forma, como explica el Estagirita usando el ejemplo de una esfera de bronce:

> «¿Cual es la causa del ser potencial que es actual, junto a lo actuante [παρὰ τὸ ποιῆσαν[51]] en aquellas [cosas] [que] son generadas? No hay otra causa de que la esfera potencial sea esfera actual, sino la esencia de cada una [τὸ τί ἦν εἶναι ἑκατέρῳ]» (1045a30-31)

[50]«[...].καὶ ὥσπερ οὐδὲ ὁ ἀριθμὸς ἔχει τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον, οὐδ᾽ ἡ κατὰ τὸ εἶδος οὐσία, ἀλλ᾽ εἴπερ, ἡ μετὰ τῆς ὕλης..[...]», seguimos la traducción dada por de Rijk (2002b, pp. 260-261), siendo el original «[...]. Also (d) just as no number admits of being more or less, so neither does the ousia taken as form (...), but if any ousia does, it is the enmattered ousia».

[51]de Rijk traduce esto como "causa eficiente", lo cual concuerda con aquello que propicia la tranformación, pero se ha preferido la traducción literal.

Lo que esto parece querer implicar es que la materia impone una condición limítrofe, está en sí debe de tener la capacidad recibir y reproducir una forma, no necesariamente toda materia podría constituir una esfera (por ejemplo, el agua no podría por sí misma constituir una esfera, si en todo caso, solo si fuera vertida en un contenedor esférico de antemano), en este sentido también la materia es causa de la ousía, aunque sea por otro lado la esencia de la forma que ejecute una de las múltiples potencialidades de la materialidad. Se debe de mentar que esta materialidad no esta limitada solo a las cosas sensibles, sino que también las cosas cognoscibles (νοῆται) poseen su materialidad, siendo esta la pura extensionalidad del plano (*1045a33-35*)[52].

Habiendo establecido la ousía como esta relación entre materia como potencialidad, y forma como actualidad, es necesario explicar como la forma llega a hacerse actual en una potencia material, y esto es *precisamente* por medio de aquellas cosas que no tienen materia, *las categorías como modos de ser* (*1045a36-b7*)[53], estas sin embargo son *propiamente (ὅπερ) unidad y el ser algo*[54], es por esto que dichas nociones no aparecen en la definición *de algo* (ὁρισμός)[55] y sin embargo, *lo-que-es-ser* (τὸ τι ἦν εἶναι εὐθὺς) directamente es unidad y también es *el-ser-algo;* esto se debe al hecho de que toda definición de una entidad parte precisamente de las categorías, y como se explico en la Subsección 2.2, estas son análogas a las potestades básicas de la percepción-sensorial, en esta medida, el percibir algo y por ende, poder asignarle categorías, implica automáticamente la *unidad* y el-*ser-algo* (ἕν τι εστιν ὥσπερ καὶ ὄν τι) pues son inherentes a las categorías mismas, y es por esto mismo que se nos dice que si bien, estas dos nociones no son género de entidad alguna, tampoco son separables de las mismas[56] ; es finalmente de esta manera que se entiende la definición como constituida desde *las diferencias* (διάφοροι), puesto que estas son precisamente la expresión de las distintas *maneras de ser* (de Rijk, 2002b, pp. 252-253), es decir, la afirmación de valores específicos de las categorías sobre una entidad conforman la «definición de la

[52]Es de recordar que en este período histórico cuando se usa la palabra «cognoscible» esencialmente se hacía referencia a los objetos matemáticos, y estos a su vez eran entendidos como fundamentalmente geométricos.

[53]En específico se nos dan como ejemplos las subsecuentes categorías de *ostensividad (τὸ τὸδε), calidad (τὸ ποιόν) y cantidad(τό ποσόν)* en *1045b1-b2.*

[54]«εὐθὺς ὅπερ ἕν τί [εἶναι] ἐστιν ἕκαστον, ὥσπερ καί ὅπερὄν τι»(1045a36-b1)

[55]«διὸ καὶ οὐκ ἔνεστιν ἐν τοῖς ὁρισμοῖς οὔτε τὸ ὄν ουτε τὸ ἕν»*(1045b2-3)*

[56]«εὐθὺς καὶ ἕκαστόν ἐστιν ὄν τι καὶ ἕν τι, οὐχ ὡς ἐν γένει τῷ ὄντι καὶ τῷ ἑνί, οὐδ' ὡς χωριστῶν ὄντων παρὰ τὰ καθ' ἕκαστα.» (1045b5-7).

forma y la actualidad»[57].

Finalmente, con todos los elementos de la ousía propiamente explicados, es posible entender que el *género* es análogo a la a la *unidad quidditativa* o *forma materializada* que se concluyo de *1041b11-28* y *1044a9-1044a11*, pues solo esta es capaz de recibir la impresión de las distintas formas o *especies* que son consideradas común a un género, pues como nos indica de Rijk «La idea subyacente es que las cosas especificas como e. g. los varios tipos de sonido (vocal, silbante o gutural) pueden ser pensados como 'constituidos de' sonido, así como ser especies diferentes del concepto genérico 'sonido'» (2002b, pp. 287), en esta medida, el género es el definiens que agrupa la materia particular que es capaz de expresar las propiedades mínimas comunes de un conjunto de entidades específicas, sin embargo, mientras que la *forma materializada* tiene condicionantes ontológicos (i.e. solo puede esperar la manifestación de ciertas unidades conceptuales en tales materias, pues dependen de la potencialidad del material de poder expresarlas), el género es solamente una herramienta lógica; en la medida que la *forma materializada* puede ser compuesta, es posible develar otras unidades conceptuales ignorando las más complejas (e. g. encontrar la quiddidad «cuerpo extenso» inmanente al animal o a la planta) y así establecer un género común a todas las especies que eventualmente manifiesten una forma materializada, por otro lado, como se explico, la definición de un εἶδος parte de la especificación de valores para las categorías que determinan diferencias y especifican la definición, la jerarquía género-especie entonces recae en la colocación jerárquica y arbitraria de definiens por su especificidad.

Con esto finalizamos el establecimiento de las nociones fundamentales que rodean como intuición originaria a los elementos de nuestro sistema; si bien, muchas de las estructuras de la lógica silogística ya han adquirido una vida propia con cierta abstracción de un entendimiento más estricto de su procedencia, y sobre todo se ha buscado hacer definiciones lo suficientemente formal para no caer en compromisos ontológicos engorrosos, también pueda resultar útil tener a la mano este contexto para «encarnar» la construcción que deviene en la siguiente parte, paralelamente, lo expuesto en la Subsección 2.2 como se menciono al inicio de la Sección, puede ser útil para pensar en aplicaciones de nuestro sistema. En todo caso, procedemos con el foco de la indagación.

[57]«ἔοικε γὰρ ὁ μὲν δὶα τῶν διαφορῶν λόγος τοῦ εἴδους καὶ τῆς ἐνεργείας εἶναι»*(1043a19-20).*

Parte II: El lenguaje aristotélico

3. Sintaxis

En esta sección describiremos la sintaxis lógica que será usada en nuestro sistema, con el objetivo de capturar una interpretación más autentica de las intenciones inferenciales y lingüísticas de Aristóteles, nos desviaremos de la estructura proposicional heredada de Boecio, es decir, aquella representada por el cuadrado de oposiciones y que ha sido usada como base de las reconstrucciones formales contemporáneas desde Lukasiewicz (1957), pero con más interés para nosotros, en Corcoran (1972), Smith (1983), Martin (1997) y Glasshoff (2005, 2010), sin embargo, con esto no se quiere decir que las cuatro proposiciones típicas no aparecen en nuestro sistema ya que son explícitamente centrales a la concepción del silogismo aristotélico expuesto en los *Primeros Analíticos* (específicamente en *An. Apr. 24a18-19*).

La desviación principal es la adición de dos tipos más de proposiciones, *singulares concretos* y *singulares inmanentes*. Ambos tipos de proposiciones cumplen una función análoga en nuestro sistema como medios necesarios para construir proposiciones particulares y universales que puedan tratar también con *términos negativos,* o según De Rijk (2002) *onomas*[58] *infinitos*[59] (en oposición a los términos regulares), de esta manera podemos evadir tener que usar 16 tipos diferentes de proposiciones (cuatro por cada tipo canónico de proposiciones, para represen-

[58] Ὄνομα en griego, usualmente significando simplemente «nombre» pero cuando se usa en el contexto de análisis léxico, «sustantivo», como opuesto a ῥῆμα significando a su vez “predicado”, y de hecho, podríamos también referirnos a estos términos como «*predicados infinitos*» cuando se encuentran como segundos argumentos en las funciones proposicionales χ o ε, como es bien conocido acerca del análisis proposicional aristotélico, pero lo hemos homologado para no agregar complicaciones innecesarias.

[59] De Rijk elige este nombre siguiendo a la interpretación de la palabra “αόριστον”, Aristóteles mismo usa esta palabra refiriéndose al caso que una sentencia hace referencia a la *falta* de presencia de un referente concreto (e.g. *16a30-34*), el sujeto en cuestión puede ser determinado como *cualquier otra cosa pero dicha entidad*, es decir, posiblemente cualquier otra cosa en el universo. Naturalmente esta concepción solo puede ser completamente encarnada cuando se provee una interpretación semántica para esta sintaxis, pero la intuición de su «negatividad» puede ser ya indicada a través de la relación sintáctica de la contradicción entre cada par de sentencias ε y χ como se verá en 3.1.

tar sus cuatro combinaciones posibles de términos finitos e infinitos), en vez solo necesitando 8, haciendo nuestro sistema computacionalmente más eficiente[60].

Esta elección no es ni injustificada ni puramente funcional ya que la idea es tomada de la discusión en los *Analíticos Posteriores* acerca de los principios o «ἀρχαί» obtenidos en el proceso inductivo de la «ἐπαγωγή» por medio de las *sentencias-incompletas* tal como fue discutidos en 2.2. Usando este tipo de proposiciones podemos generar de una manera más orgánica las sentencias afirmativas y negativas particulares, las primeras como la sentencia que afirma que dos términos, finitos o infinitos, están presentes (o se carecen en el caso de los infinitos) en una entidad concreta y las segundas como la negación de que toda entidad que posee cierto término (o carece si es infinito), debe de manifestar (o no) cierto otro, es decir, de manera inversa, que existe una entidad concreta que posee o carece cierto término, pero niega poseer o carecer otro.

Esta misma idea es funcionalmente aplicada al caso de los singulares inmanentes, pero no se puede decir que sea directamente tomado de alguna interpretación solida de la silogística aristotélica, es más el resultado de un interés en economía sintáctica al respecto del sistema, y de conservar la habilidad de cuantificar particularmente sobre el dominio de los términos aristotélicos, es decir, en el plano intensional opuesto al ostensivo, que es logrado en el sistema de Glashoff (2010) directamente por las proposiciones *I* (particulares afirmativas).

Por último, esto también influencia el conjunto de reglas de inferencia que están presentes en nuestro sistema, mientras que el conjunto de reglas dispuesto por Corcoran (1972) es conservado (las cuatro reglas del silogismo perfecto, tres reglas de conversión y dos métodos de derivación), también anexamos las *reglas de éctesis* siguiendo el ejemplo de Smith en su artículo de 1983, sin embargo, re definimos estas por medio de la inclusión de los términos infinitos así como con las sentencias singulares, haciendo más patente el carácter del «exponer (una ins-

[60]Como se recordará de la nota 1, esta es la misma cantidad de proposiciones que aparece en el cubo de Reichenbach (1952), sin embargo, en su caso construye dos versiones de cada una de las cuatro proposiciones canónicas que participan en el silogismo, alterando esencialmente la estructura lógica aristotélica fuera de lo inferible de los Primeros Analíticos, en nuestro caso las 4 proposiciones extras resultan de tipos de proposiciones que no participan directamente de los silogismos, pero que *constituyen intuitivamente* a las proposiciones canónicas como se verá; dado que parte de las función de cada par es integrar en dichas proposiciones canónicas los términos como finitos o infinitos, es posible generar una silogística que los tome en cuenta sin alterar la estructura misma de los silogismos.

tancia)» (ἐκθεμένους) donde se «dispone» o «no (se) dispone» (ὑπὰρχει[61] o μὴ ὑπὰρχει) alguna propiedad[62], términos con los cuales Aristóteles describe estos métodos de pruebas silogísticos que han sido llamados como «métodos ectéticos» y en cuyas re construcciones lógicas hasta el momento, no se ha podido dar una expresión cabal de las intenciones del texto [63]; de esta manera terminamos con un sistema de 15 reglas de inferencias en total, sin duda más complejo que otras formalizaciones, pero en la medida necesaria para alcanzar nuestras necesidades expresivas. Será mostrado también que este sistema es capaz en efecto de reconstruir los 24 silogismos de la extensión medieval a la silogística aristotélica canónica.

3.1. Lenguaje y reglas de inferencia

Por $T_u = \{u_1, u_2, \cdots\}$ denotaremos los «términos atómicos» (análogos a nuestras entidades concretas), por $T_t = \{t_1, t_2, \cdots\}$ los «términos aristotélicos» y por $\varepsilon, \chi, A, I, \neg, \sim$ los «operadores lógicos», componiendo al lenguaje $\mathcal{L}$. Las «fórmulas correctamente formadas» (*fcf* o *wff* por las siglas en inglés de «*well formed fórmulas*») de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ consisten en todas las proposiciones de alguna de las siguientes tres formas: la primera, $\varepsilon(u_a, [\sim]t_i)$, donde la *posible* presencia de '$\sim$' frente a un término (solamente aristotélicos) significa que es un *término infinito* opuestamente a un *término finito,* y podría ser entendida como la *carencia* de t_i en u_a y la *fcf* podría ser entendida como «el término atómico u_a es un [no] t_i», la segunda forma es $\chi(t_i, [\sim]t_j)$ con la misma lectura para el posible '$\sim$' (solo en el segundo argumento de χ), y la *fcf* completa podría leerse como «el término aristotélico t_i es un [no] t_j», y la tercera forma es $[\neg]S([\sim]t_i, [\sim]t_j)$, donde el posible '$\neg$' significa la negación del resto de la *fcf*, i.e.: que el resto de la *fcf no es el caso*, '*S*' podría ser cualquiera de *A* o *I,* y toda la *fcf* podría ser leída como «[no es el caso que] todo [no] t_i son [no] t_j» si *S=A* y «[no es el caso que] un [no] t_i es un [no] t_j» si *S=I.* Para toda proposición $\phi \in \mathcal{L}$ su contradictorio ($C(\phi)$) es definido como:

[61] Revisar la nota [27] al respecto del concepto ὑπάρχει

[62] Posiblemente en una *ousía*, sea «eidetica» como otro término aristotélico, sea «materializada» como término concreta o atómicos, siguiendo la interpretación en 2.3.

[63] Ya Smith apunta en p. 228 el carácter ostensivo del elemento que es usado en la prueba explicada en *An.Pr. 28a24-25*, y de la deseabilidad de un símbolo apropiado con diferente categoría semántica que pueda expresar la intención original del texto de Aristóteles.

- $C(\varepsilon(u_i,t_j)) = \varepsilon(u_a,\sim t_i), \qquad C(\varepsilon(u_a,\sim t_i)) = \varepsilon(u_a,t_i)$
- $C(\chi(t_i,t_j)) = \chi(t_i,\sim t_j), \qquad C(\chi(t_i,\sim t_j)) = \chi(t_i,t_j)$
- $C(I([\sim]t_i,[\sim]t_j)) = \neg I([\sim]t_i,[\sim]t_j), C(\neg I([\sim]t_i,[\sim]t_j)) = I([\sim]t_i,[\sim]t_j)$[64]
- $C(A([\sim]t_i,[\sim]t_j)) = \neg A([\sim]t_i,[\sim]t_j), \quad C(\neg A([\sim]t_i,[\sim]t_j)) = A([\sim]t_i,[\sim]t_j)$[65]

Mientras que para cualquier término, una «doble negación» aplica, i.e.: $t_i = \sim\sim t_i$, $\sim t_i = \sim\sim\sim t_i$.

Para cualquier conjunto de proposiciones de $\mathcal{L}$, Γ podemos definir al operador de cierre[66] como la función $\Phi : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ que genera un nuevo conjunto Γ_j desde uno original Γ_i tal que $\Gamma_j = \Gamma_i \cup \{\gamma_n, \gamma_{n+1}, \cdots\}$ donde $\gamma_{n+k} \in \mathcal{L}$. Este operador de cierre es *explicitamente* definido al rededor del siguiente conjunto de reglas de inferencias[67]:

1. Introducción del Universal Afirmativo - (AU-I):

$$\frac{\chi(x,v_i)[x/t_i \in T_t] \vdash \chi(x,v_j)[x/t_i \in T_t]}{A(v_i,v_j)}$$

[64]Cuando el operador "$\sim$" antecede a cierto término t_x en las sentencias de tipo $A, I, \neg A$ o $\neg I$, su contradictorio tendría que poseer a "$\sim$" frente al mismo término.

[65]Como puede observarse, las relaciones contradictorias esenciales del cuadro de oposición original se conservan , con «$\neg A$» representando las proposiciones de tipo «O» (particulares negativas) y «$\neg I$» las del tipo «E» (universales negativas), aunque su funcionalidad directa en el sistema interpretado tiene ciertas peculiaridades semánticas, la satisfacción semántica de «$\neg A$» esta ligada a sentencias del tipo ε opuestamente a *«A»* que es determinado por tipos χ, y «$\neg I$» se determina por proposiciones χ análogamente opuesto a *«I»* que es satisfecha condicionalmente por proposiciones del tipo ε; esto se hará explicito en la Sección 4.

[66]Dado el hecho que, como será probado pronto, el siguiente sistema de inferencia puede ser extendido al de los 24-silogísmos aristotélicos y que el sistema de términos infinitos funciona análogamente al de los finitos dentro del mismo, se haría intuitivo que el sistema heredaría las propiedades computacionales probadas por Glashoff (2010) como la *confluencia local*, sin embargo, consideraciones adicionales podrían ser requeridas dada la presencia de los dos nuevos tipos de proposiciones y el dominio extra de variables T_u.

[67]Toda regla es valida tanto para términos finitos o infinitos (exceptuando a *TF* que incluye su correspondiente condicionante lateral), siempre que el tipo de sentencia en sí pueda tomarlo como argumento (es decir, esta definida para argumentos que son subconjuntos de T_t, finitos o infinitos), naturalmente en los lugares donde un término esta precedido por '$\sim$', el uso de un término infinito ($\sim t_i$) le convertiría en finito ($\sim\sim t_i = t_i$).

2. Transitividad Finita - (TF):

$$\frac{\vdash \chi(t_i,t_j) \qquad \vdash \chi(t_j,t_k)}{\chi(t_i,t_k)} \text{ (si } t_i,t_j,t_k \text{ son no infinitos)}$$

3. Ecthesis 1 - (EK1):

$$\frac{\vdash \varepsilon(u_a,t_i) \qquad \vdash A(t_i,t_j)}{\varepsilon(u_a,t_j)}$$

4. Ecthesis 2 - (EK2):

$$\frac{\vdash \neg A(t_i,t_j)}{I(t_i,\sim t_j)}$$

5. Ecthesis 3 - (EK3):

$$\frac{\vdash A(t_i,t_j)}{\neg I(t_i,\sim t_j)}$$

6. Introducción del Particular - (P-I):

$$\frac{\vdash \varepsilon(u_a,t_i) \qquad \vdash \varepsilon(u_a,t_j)}{\neg A(t_i,\sim t_j)}$$

7. Eliminación del Particular - (P-E):

$$\frac{\vdash I(t_i,t_j)}{\varepsilon(u_a,t_i),\varepsilon(u_a,t_j)}$$

8. E - Conversión - (E-con):

$$\frac{\vdash \neg I(t_i,t_j)}{\neg I(t_j,t_i)}$$

9. A - Conversión Parcial - (PA-con):

$$\frac{\vdash A(t_i,t_j)}{I(t_j,t_i)}$$

10. I - Conversión - (I-Con):

$$\frac{\vdash I(t_i,t_j)}{I(t_j,t_i)}$$

11. Conversión Ectética - (EK-C):

$$\frac{\vdash \neg I(t_i,t_j)}{A(t_i,\sim t_j)}$$

12. Barbara - (PS1):

$$\frac{\vdash A(t_i,t_j) \qquad \vdash A(t_j,t_k)}{A(t_i,t_k)}$$

13. Celarent - (PS2):

$$\frac{\vdash \neg I(t_i,t_j) \qquad \vdash A(t_k,t_i)}{\neg I(t_k,t_j)}$$

14. Darii - (PS3):

$$\frac{\vdash A(t_i,t_j) \qquad \vdash I(t_k,t_i)}{I(t_k,t_j)}$$

15. Ferio - (PS4):

$$\frac{\vdash \neg I(t_i,t_j) \qquad \vdash I(t_k,t_i)}{\neg A(t_k,t_j)}$$

Como puede observarse, nuestro sistema conserva el sistema básico de Corcoran[68], mientras que agregamos cuatro reglas ectéticas[69], la primera (EK1) es el resultado de una interpretación ostensiva de una de las posibles pruebas que Aristóteles explica para *Darapti* en *An.Pr. 28a24-25*, sin embargo, como Aristóteles menciona, antes de iniciar esta clase de inferencia, es necesario «seleccionar» un elemento del término medio que posea al primer término, esta clase de procedimiento de «selección» es explicitado por nuestra regla de eliminación del particular (P-E), dado que ya canónicamente la proposición universal permite la inferencia de su particular por medio de (PA-Con) y que Darapti parte de dos premisas universales, (P-E) permite la selección de una instancia concreta o individual adecuada ya apuntada por proposición particular resultante de la universal; adicionalmente de esta manera no limitamos la inferencia solo a los casos que parten de premisas universales, sino también a aquellos con una de particulares (como es más adecuada al espíritu del proceso expuesto en el texto original). Por otro lado (P-I) es producto de los beneficios de una teoría inversamente simétrica, es decir, que posea armonía prueba-teorética en el sentido de Gentzen (Gentzen, 1969) y de esta manera se establezca una definición funcional a través de la relación recíproca entre las funciones proposicionales I o $\neg A$ y ε (es decir, el «significado» de las proposiciones particulares se entiende como composicionalidad de las singulares, y las singulares como la descomposición de las particulares)[70], y se hace

[68]Debe de ser notado que K. Glashoff prueba que hay múltiples subsistemas que son suficientes para reproducir la silogística de los 24 silógismos, que pueden ser menores dependiendo de los métodos de derivación (Glashoff, 2005, §5), así mismo Corcoran logro derivar el mismo sistema utilizando solamente las reglas de E-con, PA-con, PS1 and PS2 por medio de la «deducción indirecta por contradicción» o *per impossibile* que nosotros también incluimos, de esta manera el total de reglas de inferencias *podría* ser reducido a un total de 13 reglas.

[69]Smith en (Smith, 1983) diseña su sistema silogístico «SE» definiendo el éctesis como la introducción y eliminación de cada una de las proposiciones particulares, cada proposición se relaciona a un par universal de proposiciones y dado esto, Smith puede de hecho evadir tener que establcer las reglas de introducción ya que pueden ser suplidas a través de la derivación *Darapti* y *Felapton* por medio de los silogismos perfectos (Smith, 1983, p. 228), naturalmente las reglas de eliminación ectéticas serían equivalentes a las premisas de Darapti o Felapton, pero obviamente este no es el caso para nuestro sistema, ya que hemos diseñado las reglas de éctesis por medio de elementos que están fuera de la interpretación Boheciana tradicional, aunque ya el mismo apunta hacia la posibilidad de usar «diferentes categorías semánticas» para una representación más fidedigna del éctesis, similar a la instanciación existencial en los lenguajes de primer orden. Por otro lado, J. Martin en (Martin, 1997), interpreta el éctesis como condiciones de saturación, pero como será discutido en el Teorema 3.4, nosotros optamos por llevar acabo la saturación en una relación más fundamental entre las proposiciones ε y χ.

[70]Para conservar la economía del sistema en la medida de lo posible, no se generá una relación

una extensión bastante natural de lo expuesto en la prueba aristotélica citada.

Al respecto de (EK2), justificamos su estructura desde un análisis de la sección *An.Pr. 28b17-23*: se empieza por la subsección *An.Pr.28b17-18* donde se establecen condicionalmente las premisas del silogismo: «εἰ γὰρ τὸ Ρ παντὶ τῷ Σ τὸ δὲ Π τινὶ μὴ ὑπάρχειν[71]», con la primera parte (εἰ γὰρ τὸ Π παντὶ τῷ Σ) indicando la suposición de la premisa universal de Baroco, es decir, «si P [recae] sobre todo Σ» o $A(s,r)$, y la segunda parte (τὸ δὲ Π τινὶ μὴ ὑπάρχειν) enunciando la sentencia particular negativa $\neg A(s,p)$ como la «carencia» de una presencia substantiva (μὴ ὑπάρχειν) de Π sobre algún(os) elemento(s) de Σ (que un subconjunto de Σ no posee substancialmente a Π), seguidamente en *An.Pr.28b21-22* tenemos: «δείκνυται δὲ καὶ ἄνευ τῆς ἀπαγωγῆς, ἐὰν ληφθῇ τι τῶν Σ ᾧ τὸ Π μὴ ὑπάρχειν»[72] indicando que hay alguna manera de deducir la conclusión sin «*per impossibile*» (δείκνυται δὲ καὶ ἄνευ τῆς ἀπαγωγῆς[73]) al «tomar algún Σ al cual Π no se aplica» como es traducido en (Aristóteles, 1962, p. 229), pero es importante poner especial atención al verbo utilizado, «ληφθῇ» que es la declinación pasiva de «tomar», siendo lo tomado «τι», *algo concreto* (en oposición a la simple señalización de un subconjunto), determinando un posible significado más preciso «si (ἐὰν) algo es tomado de Σ (τῶν Σ) en lo que Π no subsista (μὴ ὑπάρχειν)», refiriéndose a la *exposición* de un ejemplo que carece Π, a saber, *una proposición particular afirmativa con un término infinito como su segundo miembro*, esto es, $I(s,\sim p)$, resultando inmediatamente un silogismo por medio de *Darii* con la conclusión $I(r,\sim p)$ de donde debe de seguir una «conversión» intuitiva que resulte en $\neg A(r,p)$.

Esta elección interpretativa es la más justificable dado que (*i*) no se mencionan pasos adicionales en la sección luego de acertarse que la nueva premisa es suficiente, por lo que un silogismo de la primera figura debe de implicarse necesariamente (pues de estos se deduce el resto, en conjunción con los tres métodos de prueba) y (*ii*) ninguno de los silogismos de la primera figura puede interactuar con una premisa particular negativa, dejando como únicas opciones restantes otra premi-

de inferencia mutua entre las funciones ε y cada una de las dos funciones de las proposiciones particulares, el vació puede ser llenado por medio de *(EK2)*, pues por medio de dicha regla siempre se pude llegar de dos proposiciones ε a una I, y las de tipo $\neg A$ siempre pueden ser descompuestas en dos ε, finalmente, una proposición I puede ser convertida a una $\neg A$ por la aplicación de *(P-E)* seguida de *(P-I)*.

[71] «[...] si *P* subsiste en todo Σ pero por otro lado, Π no subsiste en algún [Σ], [...]»

[72] «[...] se demuestra también sin *per impossibile*, si algún Σ es tomado al cual Π no subsiste.»

[73] Siendo la pequeña prueba que precede en *An.Pr.28b19-21* por este método.

sa universal, afirmativa o negativa, no solo careciendo de coherencia contextual (ya que se parte de la elección de un individual) sino que los silogismos resultantes, *Barbara* y *Celarent*, generan conclusiones universales, y solo sobre la primera podría aplicarse una conversión que sería esencialmente igual a la asumida. Continuando con la interpretación propuesta, para que la conclusión sea coherente con el fin propuesto de la prueba, solo queda suponer que para Aristóteles el hecho que la conclusión resultante incluya un término infinito le hace un complemento conceptual de la correspondiente sentencia particular negativa sin un término infinito, es decir, $\neg A(r,p)$, precisamente *como su ejemplo*[74]; esta interconvertibilidad implícita queda explicita en la regla *EK2*.

La última regla ectética es *(EK3)* y puede hacerse notar que es de nuevo una inferencia que es hecha posible por nuestra introducción de términos infinitos, esta ha sido tomada de interpretar la sección *An.Pr. 30a4-14,* donde es discutido como derivar conclusiones de una sentencia universal afirmativa y una particular negativa en la segunda y tercera figura usando a *Baroco* ($A(z,y), \neg A(x,y) \vdash \neg A(x,z)$) como ejemplo y concluyendo que el único método directo es el ectético: "ἀλλ᾽ ἀνάγκη ἐκθεμένους ᾧ τινὶ ἑκάτερον μὴ ὑπάρχει, κατὰ τούτου ποιεῖν τόν συλλογισμόν· ἔσται γάρ ἀναγκαίως ἐπί τούτων·"[75](*30a9-11*), observamos en esta cita que es necesario exponer (ἐκθεμένους) *algo* (ᾧ τινὶ) en lo cual ningún término subsista (ἑκάτερον μὴ ὑπάρχει), concordando con la interpretación de Cooke y Tredennick (Aristóteles, 1960, p. 240-241) de que esto solo puede ser logrado al tomar alguna parte del subconjunto de *«x»* y transmutarlo en su propio género «*t*», donde naturalmente *«y»* no sería aplicado y por medio de *Celarent* nos permitiría inferir $\neg I(t,z)$, lo cual nuevamente implicaría al ser subconjunto de «*x*», $\neg A(x,z)$; esto es justificado por lo que luego razona Aristóteles en *30a11-13* (que lo que se razona del todo de «*t*» se aplica como parte de «*x*»)*,* pero como puede ser notado, dicha prueba requiere de una inferencia de nivel metalógico (al ejercerse sobre el lenguaje que habla de los géneros mismos y no su lenguaje objeto)[76], en esta medida se propone una regla de conversión que permite probar el silogismo con método ectético (como se verá en §3,3), esta es $A(x,y) \vdash \neg I(x, \sim y)$ cuyo razonamiento es que, dado que *todo* Σ *es un* Π, puede ser inmediata y correctamente inferido

[74] Vease el segundo ejemplo en §3.3 para la reconstrucción formal

[75] «[...] pero es necesario expuesto algo [donde] no subsista ninguno [de los dos términos], hacer razonamiento de esto; ciertamente será necesario en estos [casos]; [...]».

[76] Es posible de hecho esquematizar una prueba más parecida a la original usando el resto de reglas y adelantandonos con el uso de los métodos de inferencia por definir, así como la condición de saturación de §3,4. Dicha prueba procedería como:

que *ningún* Σ *es un* ***no*** Π. De las nuevas premisas generadas la inferencia deseada se sigue directamente usando *(PS4)* como se verá en el Lema 3.3 en el caso de *Baroco*[77].

La regla *(EK-C)* por su parte esta por la misma razón que *(P-I)*, ya que es necesaria para asegurar simetría inferencial así como exhaustividad computacional, es decir, armonía pruebo-teorética. Por otro lado, la regla de (*AU-I*) asegura la computabilidad y generación de las proposiciones universal afirmativas desde las relaciones sintácticas de los distintos términos que aparezcan en alguna instancia del sistema, mientras que *(TF)* es necesaria para que el sistema pueda probarse como *completo* (como se verá en la prueba del Lema 5.2 como precondición del Teorema 5.3)

$$\text{(xEK2)}\ \frac{\neg A(x,y)}{I(x,\sim y)}$$

$$\text{(xP-E)}\ \frac{I(x,\sim y)}{\varepsilon(u,x),\varepsilon(u,\sim y)}$$

$$\text{(xSat.)}\ \frac{\varepsilon(u,x),\varepsilon(u,\sim y)}{\chi(t,x),\chi(t,\sim y)} \qquad \frac{\text{Contr.}}{\chi(t,\sim t)}$$

$$\frac{\chi(t,x),\chi(t,\sim y) \qquad \chi(t,\sim t)}{\varepsilon(k,t),\varepsilon(k,x),\varepsilon(k,\sim y),\varepsilon(k,\sim t)}\ \text{(xSat.)}$$

$$\frac{\varepsilon(k,t),\varepsilon(k,x),\varepsilon(k,\sim y),\varepsilon(k,\sim t)}{\chi(t,x),\chi(t,\sim y),\chi(t,t)}$$

$$\frac{\chi(t,x),\chi(t,\sim y),\chi(t,t)}{\chi(v,t)\vdash\chi(v,\sim y)[v/v\in T_t]}$$

$$\frac{\chi(v,t)\vdash\chi(v,\sim y)[v/v\in T_t]}{A(t,\sim y)}\ \text{(xAU-I)}$$

$$\frac{A(t,\sim y)}{\neg I(t,y)}\ \text{(xEK3)}$$

$$\frac{\neg I(t,y)}{\neg I(y,t)}\ \text{xE-Con}$$

$$\frac{\neg I(y,t) \qquad \text{A(z,y)}}{\neg I(z,t)}\ \text{xPS2}$$

$$\frac{\neg I(z,t)}{\neg I(t,z)}\ \text{xE-Con/Conclusion Original}$$

$$\frac{\neg I(t,z)}{A(t,\sim z)}\ \text{xEK-C} \qquad \frac{\text{Contr.}}{\chi(t,z)}$$

$$\frac{\chi(t,z)}{\varepsilon(r,t),\varepsilon(r,z)}\ \text{xSat.}$$

$$\frac{\varepsilon(r,t),\varepsilon(r,z)}{\neg A(t,\sim z)}\ \text{xP-I}$$

$$\frac{A(t,\sim z) \qquad \neg A(t,\sim z)}{\chi(t,\sim z)}$$

$$\frac{\chi(t,\sim z)}{\varepsilon(q,x),\varepsilon(q,\sim y),\varepsilon(q,t),\varepsilon(q,\sim z)}\ \text{xSat.}$$

$$\frac{\varepsilon(q,x),\varepsilon(q,\sim y),\varepsilon(q,t),\varepsilon(q,\sim z)}{I(x,\sim z)}\ \text{xEK1}$$

$$\frac{I(x,\sim z)}{\neg A(x,z),\ Q.E.D}\ \text{xEK2}$$

Donde sabemos que la cuantificación que resulta en *UA-I* es válida dado que por saturación, t es una nueva instancia siendo la única que satisface a $\chi(t,t)$ y por tanto, toda «v» que lo haga satisface $\chi(v,\sim y)$, mientras que en la última saturación sabemos que el nuevo elemento «q» debe de satisfacer las anteriores relaciones intensivas (χ-relaciones) establecidas por «t», dando paso a las sentencias ε instanciadas; de la pequeña subinferencia por contradicción que antecede la última saturación es posible afirmar la existencia de una regla «$A(x,y)\vdash\chi(x,y)$». Por lo demás, que este sistema pueda expresar esta prueba formalmente radica en que el axioma de saturación establece una condición metalógica *bien definida*.

[77] La razón por la cual este mismo procedimiento no puede ser aplicado a *Bocardo* es que el resultado seguiría conteniendo uno de los términos infinitos, por lo cual no sería una inferencia de la relación de los términos originales y por tanto tampoco un silogismo valido.

aunque tampoco resulta innatural, pues esencialmente expresa la intuición básica de que un término hereda otro en virtud de saberse que uno intermedio se predica del primero y este mismo posee al otro como predicado, sin embargo esta regla no puede ser aplicada incondicionalmente, ya que en primera instancia, por la estructura misma de las proposiciones χ, el primer término y el término medio no podrían ser infinitos, tampoco por otro lado puede serlo el último ya que en dicho caso, la proposición solo afirma la carencia inmanente de dicho término en el otro y por tanto no puede «heredarse» transitivamente.

Habiéndose establecido estas reglas, podemos proceder a definir nuestros métodos de deducción como reglas meta-inferenciales.

3.2. Definición 3.2: Deducción directa e indirecta

1. *Una deducción directa de una sentencia γ_i desde un conjunto de sentencias Γ es una lista finita de aplicación de reglas empezando desde un subconjunto de sentencias de Γ y terminando con γ_i, donde cada elemento subsecuente de la lista es o una línea anterior o una aplicación de una de las 15 reglas de inferencia que componen a Φ.*

2. *Una deducción indirecta de una sentencia γ_i desde un conjunto de sentencias Γ es una deducción directa de un par de sentencias contradictorias γ_j y $C(\gamma_j)$ desde $\Gamma \cup \{C(\gamma_i)\}$*[78].

Un *árbol de deducción* para una deducción indirecta (donde $X,Y \subseteq \Gamma$) formalmente se ve como:

$$\frac{X, C(\gamma_i) \vdash \gamma_j \qquad Y, C(\gamma_i) \vdash C(\gamma_j)}{X, Y \vdash \gamma_i}$$

Llamaremos a un conjunto de sentencias *inconsistente* en caso que sea posible derivar dos proposiciones contradictorias a través de cualquiera de estos dos métodos desde subconjuntos de proposiciones del conjunto. De otra manera llamamos a un conjunto *consistente*.

[78] Este es por supuesto el famoso método de prueba *per impossibile*.

3.3. Lema 3.3: Derivación de silogismos imperfectos

Todos los 24 silogismos aristotélicos pueden ser derivados por Φ usando deducción directa o indirecta.

La prueba es inductiva, asumiendo los subconjuntos apropiados $\{\gamma_i, \gamma_j\} \subset \mathcal{L}$ tal que $\{\gamma_i, \gamma_j\} \subseteq \Gamma$ para cada silogismo, la proposición correcta pueda ser derivada. Mostraremos algunas instancias:

- **Cesare -** $A(x,y), \neg I(z,y) \vdash \neg I(x,z)$:

$$\text{(xPS2)}\ \dfrac{\text{(xE-con)}\ \dfrac{\neg I(z,y)}{\neg I(y,z)} \qquad A(x,y)}{\neg I(x,z)}$$

- **Baroco -** $\neg A(x,y), A(x,y) \vdash \neg A(x,z)$:

$$\dfrac{\text{(xE-Con)}\ \dfrac{\text{(xEK3)}\ \dfrac{A(z,y)}{\neg I(z,\sim y)}}{\neg I(\sim y,z)} \qquad \dfrac{\neg A(x,y)}{I(x,\sim y)}\ \text{(xEK2)}}{\neg A(x,z)}\ \text{(xPS4)}$$

- **Darapti -** $A(y,x), A(y,z) \vdash I(x,z)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(xP-E)}\ \dfrac{\text{(xPA-Con)}\ \dfrac{A(y,x)}{I(x,y)}}{\varepsilon(c,x), \varepsilon(c,y)} \qquad A(y,z)}{\varepsilon(c,x), \varepsilon(x,z)}\ \text{(xEK1)}}{\neg A(x,\sim z)}\ \text{(xP-I)}}{I(x,z)}\ \text{(xEKC)}$$

- **Bocardo -** $A(y,x), \neg A(y,z) \vdash \neg A(x,z)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(y,x) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A(y,z)}{I(y,\sim z)}\,\text{(xEK2)}}{I(\sim z,y)}\,\text{(xI-Con)}}{I(\sim z,x)}\,\text{(xPS3)}}{I(x,\sim z)}}{\neg A(x,z)}\,\text{(xEK2)}$$

- **Camestrop -** $\neg I(x,y), A(z,y) \vdash \neg A(x,z)$:

$$\text{(xDer-In)}\,\dfrac{\text{(xPS4)}\,\dfrac{\neg I(x,y) \qquad \text{(xPA-Con)}\,\dfrac{\dfrac{Contr.}{A(x,z)}}{I(z,x)}}{\neg A(z,y)} \qquad A(z,y)}{\neg A(x,z)}$$

- **Camenop: -** $\neg I(y,x), A(z,y) \vdash \neg A(x,z)$:

$$\dfrac{\dfrac{\neg I(y,x)}{\neg I(x,y)}\,\text{(E-Con)} \qquad \dfrac{A(z,y) \qquad \dfrac{\dfrac{A(x,z)}{I(z,x)}\,\text{(xPA-Con)}}{I(x,z)}\,\text{(xI-Con)}}{I(x,y)}}{\neg A(x,z)}$$

El resto de los 18 silogismos son probados de manera bastante sencilla y directa, y no debería de presentar dificultad alguna a los lectores interesados en probarlas (dependiendo solamente del uso de los silogismos perfectos y reglas de conversión, no reglas ectéticas, reglas de introducción y eliminación, ni deducción indirecta).

Habiendo demostrado esto, antes de proceder con nuestra semántica, dispondremos algunos fundamentos para la prueba de completitud al establecer el algoritmo necesario para construir un conjunto saturado maximalmente consistente para nuestro sistema, seguimos el esquema general hecho por J. Martin en (Martin, 1997, pp. 13-14) con los inevitables cambios en los casos necesarios de la prueba para nuestro sistema, y usando una propiedad de «correspondencia de dominios» como medio de saturación en vez del éctesis como en su caso[79].

3.4. Teorema 3.4: Correspondencia de dominios

Definimos la propiedad de «correspondencia de dominios» para un conjunto Γ de la siguiente manera:

- $\chi(x,y) \in \Gamma$ *sii hay algún* $u \in T_u$ *tal que* $\varepsilon(u,x) \in \Gamma$.
- $\varepsilon(u,x) \in \Gamma$ *sii hay algún* $y \in T_t$ *tal que para todo* $t \in T_t$ *tal que* $\varepsilon(u,t) \in \Gamma$ *(t apareciendo finita o infinitamente), es el caso que* $\chi(y,t) \in \Gamma$.

[79]La tradición lógica contemporánea ha llamado como «saturación» al primer paso de la extensión del conjunto sentencial en la prueba de completitud de Henkin, donde para cualquier proposición cuantificada existencialmente, se introduce a un Γ una instanciación de la misma con un término $c \in \mathcal{L}$, i.e.: $\exists x\, A(x) \to A(c) \in \Gamma$ (Zach, 2022, pp. 172), esto se debe a que la satisfacción semántica de $\exists x\, A(x)$ así como su inferebilidad síntactica depende de la existencia de un *testigo* que satisfaga la proposición, pero que no aparece en la proposición original en sí, como el modelo mismo que utiliza Henkin es un universo infinitamente contable de «nombres», la adjunción de la proposición instanciada es suficiente para asegurar la satisfacción semántica de $\exists x\, A(x)$, así como la condición síntactica de la regla de inferencia de la introducción del existencial (Henkin, 1996, pp. 151-153). Similarmente K. Glashoff y J. Martin anticiparon que las proposiciones particulares tienen una situación similar a las proposiciones existenciales ya que su interpretación depende en la existencia de un elemento en el cual ambos términos de la proposición subsisten, sin que el término aparezca en la proposición particular, siguiendo la interpretación de Smith del éctesis, ambos autores determinan que la saturación puede ser satisfecha instanciando dos sentencias universales (la segunda siendo afirmativa o negativa de acuerdo a la particular) en las cuales el nuevo término aparece como sujeto, asegurando que exista un elemento en la intersección de los conjuntos de ambos (en la interpretación extensional de Martin en Martin, pp. 5) o que no haya contradicción intensional entre ellos (en la interpretación de Glashoff, que de hecho parte de la existencia de una intersección no vacía para probar que los conceptos no son contradictorios, como se ve en su Lema 3.4, Caso 3), esto a la vez asegura como en el caso de Henkin, la inferenciabilidad de la proposición particular misma, por la aplicación de los silogismos con conversiones particulares. Si bien, también es nuestro caso como en Henkin, Glashoff o Martin que la satisfacción semántica y sintáctica de las proposiciones particulares dependen de la instanciación de elementos que no aparecen en la proposición misma, nuestra interpretación se diferencia de Glashoff y Martin en cuanto no se limita a las proposiciones bohecianas canónicas, teniendo la capacidad de realizar aseveración de individuales donde subsisten los términos, así pues, nuestra forma de saturación se satisface por medio de la instanciación reciproca entre términos aristotélicos (*géneros)* y entidades concretas (o *individuales)*, con lo cual se pueden satisfacer las condiciones semánticas de las proposiciones así como su inferenciabilidad por medio de las reglas de *(P-I)* y *(EK2).*

También se puede decir que cualquier conjunto Γ es «dominio correspondiente» si satisface estas dos condiciones. Adicionalmente, decimos que un conjunto Γ de proposiciones del lenguaje aristotélico $\mathcal{L}$ (como definido en la Sección 3.1) es un conjunto *saturado* si es dominio correspondiente.

Hablando filosóficamente, el principio detrás de «la correspondencia de dominios» es que cualquier «término» de T_t como un haz de propiedades debe de correlacionarse a una entidad concreta (significando, un elemento de T_u en nuestro lenguaje) que sea su instancia, e inversamente, cualquier entidad concreta debe de instanciar un término de T_t; esto no es más que el mismo proceso de la ἐπαγωγή (Subsección 2.2) donde construcciones más generales son producidas por medio de la agrupación de entidades por propiedades, la abstracción de aquello común en última instancia constituye el *genero*, que en nuestra interpretación, es el referente de los elementos de T_t, como el mismo proceso de la epagogé parte de las *sentencias-incompletas* cuyo núcleo son los entes ostensivos, es imposible llegar a la construtcción de un genero en la carencia de concretos que le manifiesten, y análogamente, el conjunto de atributos de una entidad solo posee dos opciones según la misma epagogé, o son homologables a un genero o no, y si no lo son, entonces deben de constituir su propio genero.

De aquí se hace claro que esta relación recíproca entre generos y entidades concretas no permite algún genero existiendo por si mismo, sino que es inducido por la experiencia de entidades concretas, como tal, para cualquier generó que aparece en un sistema proposicional, debe de existir algo de donde ha sido abstraído, e inversamente, no podemos sino percibir entidades concretas como haces de propiedades determinadas por nuestra percepción sensorial y que yacen al final del proceso de diferenciación específica como su propio generó abstracto; este es el sentido filosófico de los dos axiomas que hemos establecidos.

Por otro lado, se nos hace necesario establecer explícitamente esta correlación en nuestro sistema para poder probar la solidez de ciertas reglas de inferencia que transitan desde afirmaciones o negaciones sobre términos aristotélicos a afirmaciones o negaciones de términos atómicos o viceversa (e.g.: la regla para *Darii*, en particular en los Subcasos 14.1 y 14.2 del Teorema 5.1), puesto que es posible probar que dadas ciertas condiciones, una propiedad puede no pertenecer a una entidad concreta, establecida por medio de una *sentencia* ε, pero sin estos axiomas esto no significa necesariamente que no pueda pertenecer a un generó análogo que contiene el mismo haz de propiedades, haciendo la regla *insolida* mientras que la interpretación natural hace sentido. Con estas dos proposiciones como necesarias en el conjunto de sentencias como objeto de nuestro sistema, nos aseguramos que la condición de posibilidad e imposibilidad esencial de las propiedades son simultaneas tanto en entidades concretas como en géneros, haciendo nuestro sistema solido y, como puede ser inferido de las palabras de Aristóteles mismo, más metafísicamente representativo.

3.5. Teorema 3.5: Consistencia maximal

Téngase un Γ_i maximalmente consistente, entonces será el caso que:

1. $\gamma_n \in \Gamma_i \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash \gamma_n$
2. $\gamma_n \in \Gamma_i \quad \text{sii} \quad C(\gamma_n) \notin \Gamma_i$
3. *Exactamente uno de* $\varepsilon(u_a, t_j), \varepsilon(u_a, \sim t_j) \in \Gamma_i$
4. *Exactamente uno de* $I(t_i, t_j), \neg I(t_i, t_j) \in \Gamma_i$
5. *Exactamente uno de* $\chi(t_i, t_j), \chi(t_i, \sim t_j) \in \Gamma_i$
6. *Exactamente uno de* $A(t_i, t_j), \neg A(t_i, t_j) \in \Gamma_i$
7. *Al menos uno de* $I(t_i, t_j), \neg A(t_i, t_j) \in \Gamma_i$
8. *Un máximo de uno de* $A(t_i, t_j), \neg I(t_i, t_j) \in \Gamma_i$

3.6. Lema 3.6: Algoritmo de extensión a saturación maximalmente consistente

Cualquier conjunto consistente de $\mathcal{L}$ es extensible a un conjunto maximalmente consistente que tenga la propiedad de correspondencia de dominios.

Prueba

Iniciamos definiendo inductivamente una serie de subconjuntos de $\mathcal{L}$, Γ_i:

- Si A_n es $\chi(t_i, t_i)$ entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$.

- Si A_n es $\chi(t_i,t_j)$ o $\chi(t_i,\sim t_j)$:
  - Γ_{n+1}=$\Gamma_n \cup \{A_n, \varepsilon(u_a,t_i)\}$ si no hay un $u_a \in T_u$ tal que $\{\varepsilon(u_a,t_i)\} \in \Gamma_n$ y $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente.
  - Γ_{n+1}=$\Gamma_n \cup \{A_n\}$ si hay un $u_i \in T_u$ tal que $\{\varepsilon(u_a,t_i)\} \in \Gamma_n$ y $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente.
  - Γ_{n+1}=Γ_n de lo contrario.
- si A_n es $\varepsilon(u_a,t_i)$ o $\varepsilon(u_a,\sim t_i)$:
  - Γ_{n+1}=$\Gamma_n \cup \{A_n\} \cup \big\{\chi(t_j,t_k)/\varepsilon(u_a,t_k) \in \Gamma_n\big\} \cup \big\{\chi(t_j,t_i)\big\}$ si no hay un $t_j \in T_t$ tal que $\big\{\big\{\chi(t_j,t_k)/\varepsilon(u_a,t_k) \in \Gamma_n\big\} \cup \big\{\chi(t_j,t_i)\big\}\big\} \subseteq \Gamma_n$ y $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente.
  - Γ_{n+1}=$\Gamma_n \cup \{A_n\}$ si hay un $t_j \in T_t$ tal que $\big\{\chi(t_j,t_k)/\varepsilon(u_a,t_k) \in \Gamma_n\big\} \subseteq \Gamma$ y $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente.
  - Γ_{n+1}=Γ_n de lo contrario.
- Si A_n es $A(t_i,t_j)$, $\neg A(t_i,t_j)$, $I(t_i,t_j)$ o $\neg I(t_i,t_j)$:
  - Γ_{n+1}=$\Gamma_n \cup \{A_n\}$ si $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente.
  - Γ_{n+1}=Γ_n de otra manera.

Afirmación 1: *Todos los Γ_i son consistentes.*

Prueba

La prueba procede por inducción, asumiendo el caso base $\Gamma_i = \Gamma$ para algún Γ consistente con $|T_u| > 0$ y $|T_t| > 0$, entonces para cualquier Γ_n consiguiente se asumen los siguientes casos:

Caso 1. A_n es $\chi(t_i,t_i)$:

Tenemos que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ siempre es consistente, entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$. De otra forma, tómese por *reductio* que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es inconsistente, entonces necesariamente $\Gamma_n, A_n \vdash C(A_n)$ con $C(A_n) = \chi(t_i,\sim t_i)$, por lo que debe de haber un subconjunto de Γ_n tal que alguna aplicación de reglas de $\Phi_{\mathcal{L}}$ genere la sentencia, sin embargo, la única regla de inferencia que la podría producir es *UA-E* significando que $\{A(t_i,\sim t_i)\} \in \Gamma_n$ y por tanto $\Gamma_n \vdash \chi(t_i,\sim t_i)$, pero también se daría por *A-con* que $\Gamma_n \vdash I(t_i, \sim t_i)$ y en consecuencia por *EK1* se da $\Gamma_n \vdash \varepsilon(u_a, t_i), \varepsilon(u_a, \sim t_i)$, una contradicción, entonces $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es siempre consistente [80].

Caso 2. A_n es $\chi(t_i, t_j)$ o $\chi(t_i, \sim t_j)$:

Tenemos que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente o no lo es. Si no lo es, entonces $\Gamma_{m+1} = \Gamma_n$, Γ_n siendo consistente. Por otro lado, asumamos que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente, entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n, \varepsilon(u_a, t_i)\}$ para un nuevo $u_a \in T_u$, como u_i es nuevo en Γ_n, no aparece en ninguna otra proposición de Γ_n, por tanto $\Gamma_n \cup \{A_n, \varepsilon(u_a, t_i)\}$ es consistente. Si asumimos por reductio que $\Gamma_n \cup \{A_n, \varepsilon(u_a, t_i)\}$ no es consistente, entonces necesariamente $\Gamma_n, A_n, \varepsilon(u_a, t_i) \vdash C(A_n)$ y tenemos dos posibles subcasos, *(i)* $A_n = \chi(t_i, t_j)$ y $\Gamma_n, \chi(t_i, t_j), \varepsilon(u_a, t_i) \vdash \chi(t_i, \sim t_j)$, entonces tenemos que $\Gamma_n, A_n \vdash B$ y $B, \varepsilon(u_a, t_i) \vdash \chi(t_i, \sim t_j)$, pero el único B que satisface $B, \varepsilon(u_a, t_i) \vdash \chi(t_i, \sim t_j)$ es $\chi(t_i, \sim t_j)$ en sí (ya que $\varepsilon(u_a, t_i)$ no participa de ninguna regla de inferencia similar), lo que significaría que $\Gamma_n, A_n \vdash \chi(t_i, \sim t_j)$, pero esto implicaría que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ ya es inconsistente, pues $\left\{\chi(t_i, \sim t_j)\right\} \in \Gamma_n$, y entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$. *(ii)* $A_n = \chi(t_i, \sim t_i)$ y $\Gamma_n, \chi(t_i, \sim t_j), \varepsilon(u_a, t_i) \vdash \chi(t_i, t_j)$, entonces tenemos que $\Gamma_n, A_n \vdash B$ y $B, \varepsilon(u_a, t_i) \vdash \chi(t_i, t_j)$, pero el único B que satisface $B, \varepsilon(u_a, t_i) \vdash \chi(t_i, t_j)$ es $\chi(t_i, t_j)$ en sí, lo que significaría que $\Gamma_n, A_n \vdash \chi(t_i, t_j)$, pero esto implicaría que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ ya es inconsistente, pues $\left\{\chi(t_i, t_j)\right\} \in \Gamma_n$, y entonces necesariamente $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$. Por último asumamos que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente pero que hay un $u_a \in T_u$ tal que $\{\varepsilon(u_a, t_i)\} \in \Gamma_n$, entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$, si por reductio asumiéramos que u_a no es nuevo y que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ no sea consistente, entonces tendríamos de nuevo que $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ y el conjunto sería consistente.

Caso 3. A_n es $\varepsilon(u_a, t_i)$ o $\varepsilon(u_a, \sim t_i)$:

Tenemos que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente o no. Si no lo es, entonces $\Gamma_{m+1} = \Gamma_n$, Γ_n siendo consistente. Por otro lado, asumamos que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ sea consistente, entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\} \cup \left\{\chi(t_j, t_k) / \varepsilon(u_a, t_k) \in \Gamma_n\right\} \cup \left\{\chi(t_j, t_i)\right\}$ (nombraremos un $\Lambda = \left\{\chi(t_j, t_k) / \varepsilon(u_a, t_k) \in \Gamma_n\right\} \cup \left\{\chi(t_j, t_i)\right\}$) para un nuevo $t_j \in T_t$, como t_j es nuevo en Γ_n, no aparece en ninguna otra proposición de Γ_n, por tanto $\Gamma_n \cup \{A_n\} \cup \{\Lambda\}$ es consistente. Si asumimos por reductio que $\Gamma \cup \{A_n\} \cup \{\Lambda\}$ no es consistente, entonces necesariamente $\Gamma_n, A_n, \Lambda \vdash C(A_n)$ y tenemos dos posibles subcasos, *(i)* $A_n = \varepsilon(u_a, t_i)$ y $\Gamma_n, \varepsilon(u_a, t_i), \Lambda \vdash \varepsilon(u_a, \sim t_i)$, y por consiguiente tenemos que

[80] Es fácil de ver que esto es básicamente el *principio de identidad* de Aristóteles, significando que la consistencia maximal (de por sí similar a una combinación de los principios del *tercero excluso* y *no-contradicción*) es suficiente para implicarlo. Inversamente, esto implica que en el algoritmo de extensión la sentencia $\chi(t_i, \sim t_i)$ para cualquier $t_i \in T_t$ jamas puede ser escogida.

$\Gamma_n, A_n \vdash B$ y $B, \Lambda \vdash \varepsilon(u_a, \sim t_i)$, sin embargo, no existe ninguna regla de inferencia que pueda deducir $\varepsilon(u_a, \sim t_i)$ utilizando una proposición del tipo χ, por lo que si $B, \Lambda \vdash \varepsilon(u_a, \sim t_i)$, $B \vdash \varepsilon(u_a, \sim t_i)$ y de esta forma $B = \varepsilon(u_a, \sim t_i)$, consecuentemente $\Gamma_n, A_n \vdash \varepsilon(u_a, \sim t_i)$, pero dado que $A_n = \varepsilon(u_a, t_i)$, sería requerido que $A(t_i, \sim t_i) \in \Gamma_n$ para poder deducir $\varepsilon(u_a, \sim t_i)$ por *(EK1)*, pero entonces tenemos por *(UA-I)* que para cualquier $t_k \in T_t$ tal que $\chi(t_k, t_i) \in \Gamma_n$, $\chi(t_k, \sim t_i) \in \Gamma_n$ y necesariamente Γ_n sería inconsistente de antemano; igualmente podríamos tener también que $B = \varepsilon(u_a, \sim t_i)$, pero entonces tendríamos (de manera análoga al último caso) que $\{\varepsilon(u_a, \sim t_i)\} \in \Gamma_n$, por lo cual $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ sería inconsistente y $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$. Por último, asumamos que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente pero que hay un $t_j \in T_t$ tal que $\{\Lambda\} \in \Gamma_n$, entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$, si por reductio tuviéramos que t_j no es nuevo y que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ no es consistente, entonces de nuevo tenemos que $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ y el conjunto es consistente. *(ii)* La prueba procede de manera similar si $A_n = \varepsilon(u_a, \sim t_i)$, solo cambiando t_i por $\sim t_i$ e inversamente en los lugares apropiados, resultando de la misma forma en un conjunto consistente.

Caso 4. A_n es $A(t_i, t_j)$, $\neg A(t_i, t_j)$, $I(t_i, t_j)$ o $\neg I(t_i, t_j)$:

Tenemos que $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente o no lo es. Si no lo es, entonces tenemos que $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$, Γ_n siendo consistente, de otra manera, si $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ es consistente, entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$.

Tenemos entonces que para cualquiera de los tres casos Γ_{n+1} siempre es consistente, y esto se aplicaría para cualquier Γ_i que sea construido con este proceso. ***Q.E.D.***

Afirmación 2: $\Gamma \subseteq \bigcup\{\Gamma_i\}$. Esto se sigue trivialmente de $\Gamma = \Gamma_i$ para algún i.

Afirmación 3: $\bigcup\{\Gamma_i\}$ es consistente.

Prueba: Si por reductio asumimos que $\bigcup\{\Gamma_i\}$ es inconsistente, habría un Γ_j inconsistente, pero si este es el caso entonces se seguiría que $\Gamma_{j+1} \neq \Gamma_j \cup \Gamma_{j-1}$ y por el lema $\Gamma_{j+1} = \Gamma_{j-1}$, y por tanto $\bigcup\{\Gamma_i\}$ no puede ser inconsistente. ***Q.E.D.***

Afirmación 4: $\bigcup\{\Gamma_i\}$ es maximalmente consistente.

Prueba: Si asumimos por reductio que ni $\gamma \in \bigcup\{\Gamma_i\}$ ni $C(\gamma) \in \bigcup\{\Gamma_i\}$, por el lema tendríamos que tanto γ y $C(\gamma)$ son inconsistentes con $\bigcup\{\Gamma_i\}$, pero en ese caso para un subconjunto finito $\Lambda \subset \Gamma_m$ y algún ρ tendríamos por medio de derivación indirecta que:

$$\text{(xIn-der)}\ \frac{\Lambda, \gamma \vdash \rho \qquad \Lambda, \gamma \vdash C(\rho)}{\Lambda \vdash C(\gamma)}$$

Es decir, dado que Λ contenga las sentencias que generan la contradicción con γ, podríamos inferir de si mismo en una rama la sentencia que contradice a γ directamente ($C(\gamma)$) siendo la inferencia de la otra rama), u otra sentencia que contradiga una posible inferencia de γ con alguna otra sentencia de Λ (i. e. ρ); pero la misma situación se aplicaría a $C(\gamma)$, y tendríamos que:

$$\text{(xIn-der)}\ \frac{\Lambda, C(\gamma) \vdash \pi \qquad \Lambda, C(\gamma) \vdash C(\pi)}{\Lambda \vdash \gamma}$$

Pero entonces tanto $\gamma, C(\gamma) \in \Lambda$, lo que es una contradicción, entonces Λ debe de ser maximalmente consistente. ***Q.E.D.***

Afirmación 5: $\bigcup\{\Gamma_i\}$ tiene la propiedad de «correspondencia de dominios».

Habiendo construido el conjunto $\bigcup\{\Gamma_i\}$ por medio del algoritmo del Lema 3.6, sabemos que si una sentencia $\chi(t_j,t_k) \in \bigcup\{\Gamma_i\}$ entonces, $\chi(t_j,t_k) \in \Gamma_n$ para algún n y Γ_n es consistente (de otra manera la sentencia no pertenecería a $\bigcup\{\Gamma_i\}$), por lo que $\{\Gamma_i\} \cup \chi(t_j,t_k)$ es consistente también. Entonces necesariamente, hay un $u \in T_u$ tal que $\varepsilon(u,t_k) \in \bigcup\{\Gamma_i\}$, y como resultado $\{\chi(t_j,t_k), \varepsilon(u,t_k)\} \bigcup\{\Gamma_i\}$. Similarmente, si $\varepsilon(u,t_j) \in \bigcup\{\Gamma_i\}$, entonces $\{\chi(y,v)/\varepsilon(u,v)\} \in \Gamma_n$ para algún $y \in T_t$ y todo $v \in T_t$ tal que $\varepsilon(u,v) \in \Gamma_n$ para algún n excepto por posiblemente $\chi(y,t_j)$, pero $\chi(y,t_j) \in \Gamma_{n+1}$, así que hay un $y \in T_t$ tal que para todo $v \in T_t$ tal que $\varepsilon(u,v) \in \bigcup\{\Gamma_i\}$ es el caso. En consecuencia $\bigcup\{\Gamma_i\}$ tiene la propiedad de correspondencia de dominios. ***Q.E.D.***

4. Semántica

Empezamos estableciendo los elementos constitutivos de nuestra estructura semántica:

1. U es el dominio de objetos «atómicos» o «concretos»

2. K es el dominio de propiedades fundamentales o categorías aristotélicas.

3. Dado un índice n, definimos al conjunto G como $K_0 \subset K \times K_1 \subset K \times ... \times K_n \subset K$, es decir, $G \subset 2^K$.

4. T_u es el conjunto de los términos «atómicos».

5. T_t es el conjunto de los términos «aristotélicos».

6. T es el dominio de todos los términos de nuestro lenguaje aristotélico $\mathcal{L}$, es decir $T = T_u \cup T_t$.

4.1. Definición 4.1: Interpretación mixta

Un tuplo ($\mathcal{O}$, a, i), que consiste de $\mathcal{O} = 2^T \times 2^T$*, una función*

$a : U \cup G \longrightarrow T$

que se define como

$a_u(x) = t \in T_u$ *cuando* $x \in U$

$a_k(x) = t \in T_t$ *cuando* $x \in G$

y otra función

$i : T \cup \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O} \cup \{verdadero, falso\}$

es una interpretación mixta de la sintaxis aristotélica sii:

1. *Si* $x \in T_u$, $i(x) = (s(x), \sigma(x)) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$, $s(x) \neq \varnothing$ *y* $s(x) \cap \sigma(x) = \varnothing$, *donde* $s(x) = \{y \in T_t \mid \varepsilon(x,y) \in \Gamma\}$ *y* $\sigma(x) = \{y \in T_t \mid \varepsilon(x, \sim y) \in \Gamma\}$

2. *Si* $x \in T_t$, $i(x) = (s(x), \sigma(x)) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$, $s(x) \neq \varnothing$ *y* $s(x) \cap \sigma(x) = \varnothing$, *donde* $s(x) = \{x\} \cup \{y \in T_t \mid \chi(x,y) \in \Gamma\}$ *y* $\sigma(x) = \{y \in T_t \mid \neg I(x,y) \in \Gamma\} \cup \{y \in s(\sim z) \mid \neg I(x, \sim z)\}$

3. *Si* $x \in T_t$, $i(\sim x) = (s(\sim x), \sigma(\sim x)) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$, $s(\sim x) \neq \varnothing$ *y* $s(\sim x) \cap \sigma(\sim x) = \varnothing$, *donde* $s(\sim x) = \{T_t \setminus \sigma(\sim x)\}$ *y* $\sigma(\sim x) = \{x\} \cup \{y \in T_t \mid \chi(y,x)\}$

4. *Si* $\phi \in \mathcal{L}$ *entonces:*

   a) *si* $\phi = \varepsilon(x,y)$, $x \in T_u$, $y \in T_t$, $i(\phi) = verdadero$ sii $s(x) \supseteq s(y)$ *y* $\sigma(x) \supseteq \sigma(y)$;

   b) *si* $\phi = \varepsilon(x, \sim y)$, $x \in T_u$, $y \in T_t$, $i(\phi) = verdadero$ sii $s(\sim y) \supseteq s(x)$ *y* $\sigma(x) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$;

   c) *si* $\phi = I(x,y)$, $x \in T_t$, $y \in T_t$, $i(\phi) = verdadero$ sii *hay algún* $z \in T_u$ *tal que* $\varepsilon(z,x) = verdadero$ *y* $\varepsilon(z,y) = verdadero$;

   d) *si* $\phi = \neg A(x,y)$, $x \in T_t$, $y \in T_t$, $i(\phi) = verdadero$ sii *hay algún* $z \in T_u$ *tal que* $\varepsilon(z,x) = verdadero$ *y* $\varepsilon(z,y) = falso$;

   e) *si* $\phi = \chi(x,y)$, $x \in T_t$, $y \in T_t$, $i(\phi) = verdadero$ sii $s(x) \supseteq s(y)$ *y* $\sigma(x) \supseteq \sigma(y)$;

   f) *si* $\phi = \chi(x, \sim y)$, $x \in T_t$, $y \in T_t$, $i(\phi) = verdadero$ sii $s(x) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$;

   g) *si* $\phi = \neg I(x,y)$, $x \in T_t$, $y \in T_t$, $i(\phi) = verdadero$ sii *para todo* $z \in T_t$ *tal que* $\chi(z,x) = verdadero$, *es el caso que* $\chi(z,y) = falso$;

   h) *si* $\phi = A(x,y)$, $x \in T_t$, $y \in T_t$, $i(\phi) = verdadero$ sii *para todo* $z \in T_t$ *tal que* $\chi(z,x) = verdadero$, *es el caso que* $\chi(z,y) = verdadero$;

Es una semántica mixta para el lenguaje aristotélico $\mathcal{L}$.

Agregaremos la siguiente definición para clarificar a que nos referimos con un *modelo* para nuestro lenguaje aristotélico.

4.2. Definición 4.2: Modelo mixto

Dado un universo de objetos A tal que haya un subconjunto $U \subseteq A$ *de objetos distintos de otro subconjunto* $K \subseteq A$ *con* $U \cup K = A$*, y el tuplo* ($\mathcal{O}$*, a, i) como en la Definición 4.1, decimos que* $(A, \mathcal{O}, a, i) = \mathfrak{A}$ *es un modelo de* $\mathcal{L}$ *con semántica mixta, si para todo* $u \in U$, $a(u) : u \longrightarrow T_u$ *y para todo* $k \in 2^K$, $a(k) : k \longrightarrow T_t$.

Hemos basado nuestra semántica en la idea de Glashoff, fundamentalmente, usando la notación s-σ desarrollada por Leibniz en (Leibniz, 1989) para generar dos conjuntos por cada término (atómico o aristotélico) que esencialmente representa todas las cosas que algo *necesariamente* es y las cosas que *necesariamente no* es, esta construcción binomica puede representar efectivamente las relaciones ontológicas expresada por las proposiciones universales como resultado de su intensionalidad. Sin embargo, nosotros divergiremos en la interpretación de las proposiciones particulares hecha por Glashoff, ya que reproduciendo las relaciones del cuadrado de oposición con una interpretación puramente intensional, las proposiciones particulares toman una forma que aparenta más una situación de posibilidad modal que la manifestación *actual* de dos propiedades en un objeto, por ejemplo en la interpretación de Glashoff tenemos que $Ixy = verdadero$ sii $s(x) \cap \sigma(y) = \varnothing$ y $s(y) \cap \sigma(x) = \varnothing$, que esencialmente significa que la proposición es cierta por el hecho que nada que sea incompatible con y este en la intensión de x e inversamente, y mientras ciertamente, solo lo que es no-contradictorio puede existir ostensivamente, esto no implica que en virtud de su no-contradicción en efecto exista *actualmente*, además, es claro por el uso de la palabra ἔσται en el contexto de la proposición en Aristóteles, que la interpretación pretendida era la existencia actual de un objecto en el cual las propiedades son manifestadas. Naturalmente, una semántica puramente intensional no tiene otra opción sino este aparentar de un significado modal, pero como nuestra semántica es mixta, podemos conservar el significado ostensivo de las proposiciones particulares que era pretendida por Aristóteles, siendo capaz a la vez de expresar relaciones de necesidad conceptual entre formas dadas sus intenciones, si bien con el costo de menor economía computacional.

5. Solidez y completitud

Ahora estamos listos para probar que nuestra sintaxis es completa con respecto a nuestra semántica mixta, este es el caso solo si la teoría de un modelo satisface las condiciones de maximalidad y de correspondencia de dominios, es decir, si la teoría de un modelo $\mathfrak{A}$, $Th(\mathfrak{A})$ es tanto maximal y dominio correspondiente como establecido en los Teoremas 3.4 y 3.5, y probado en 3.6, dado que $Th(\mathfrak{A})$ sea consistente, podríamos extenderlo a que sea maximalmente consistente y dominio correspondiente. Sabiendo esto, procedemos con las pruebas.

5.1. Teorema 5.1: Solidez

Asumiendo que Γ *denote un conjunto arbitrario maximalmente consistente con la propiedad de correspondencia de dominios y* $\mathfrak{A}$*, un modelo como en la Definición 4.2 tal que* $\mathfrak{A} \models \Gamma$ *con i como su función de interpretación mixta como en la Definición 4.1 Entonces, si* $\Gamma \vdash \phi$*,* $\Gamma \models_i \phi$*.*

Prueba. Primero probaremos el caso base (cuando la sentencia esta ya implícita en Γ y no requiere la aplicación de cualquier regla de inferencia), y luego el caso inductivo sobre cada regla de inferencia de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ (donde para cualquier prueba consistente de *n+1* lineas tal que $\langle \psi_1, \cdots, \psi_n \rangle \in \Gamma$ y cualquier ψ_k o ya se encuentra en Γ o su resultado es alguna regla de inferencia $\mathcal{L}$, si $\Gamma \vdash \phi$, $\Gamma \models_i \phi$, donde ϕ is la *n+1* línea de la prueba).

Caso Base: Como tenemos que $\Gamma \vdash \phi$ sin la aplicación de cualquier regla de inferencia, entonces $\phi \in \Gamma$, y como hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\mathfrak{A} \models \phi$, i.e. $\Gamma \models \phi$. Por otro lado, si asumimos que por reductio que $\mathfrak{A} \not\models \phi$, entonces como $\phi \in \Gamma$, $\mathfrak{A} \not\models \Gamma$, contradiciendo la hipótesis, entonces $\mathfrak{A} \models \phi$ y $\Gamma \models \phi$. ***Q.E.D.***

Caso 1. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(UA-I):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(UA-I),* $\phi = A(y,z)$ y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$, y teniendo que para cualquier $t_i \in \{t \in T_t \mid \chi(t,y) \in \Gamma\}$, $\chi(t_i,z) \in \Gamma$ tal que $y,z \in T_t$ y cualquier $t_i \in T_t$ en *i,* una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, resulta en $\mathfrak{A} \models \chi(t_i,y)$ y $\mathfrak{A} \models \chi(t_i,z)$, consecuentemente, $\mathfrak{A} \models (\chi(x,y) \vdash \chi(x,z))\,[x/t \in T_t]$, sin embargo, si asumimos por reducción $i(A(y,z)) = falso$, entonces por la Definición 4.1 tenemos que no es el caso que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,y)) = true$, $i(\chi(v,z)) = verdadero$ o analogamente, hay un $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,y)) = verdadero$ and $i(\chi(v,z)) = falso$, significando que $\mathfrak{A} \models \chi(v,y)$ pero, $\mathfrak{A} \not\models \chi(t_i,y)$ y entonces, $\mathfrak{A} \not\models (\chi(x,y) \vdash \chi(x,z))\,[x/t \in T_t]$ ya que $v \in \{t \in T \mid \chi(t,y) \in \Gamma\}$ pero si $i(\chi(v,z)) = falso$, como $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\chi(v,z) \notin \Gamma$ (de otra manera $i(\chi(v,z)) = verdadero$), lo que contradice la hipótesis ya que entonces $\Gamma \not\vdash \phi$, de esta manera, no puede ser que $i(A(y,z)) = falso$ y por tanto, $i(A(y,z)) = verdadero$. Es fácil ver que una prueba análoga sería aplicada para cualquier combinación de *x* o *y* finitos o infinitos, ya que no hay alguna utilización de las propiedades semánticas de la finitud o infinitud de un término. ***Q.E.D.***

Caso 2. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(TF):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(TF),* y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = \chi(x,z)$ y $\chi(x,y), \chi(y,z) \in \Gamma$ para algún $x,y,z \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces dado $i(\chi(x,y)) = verdadero$ tenemos que $s(x) \supseteq s(y)$ y $\sigma(x) \supseteq \sigma(y)$, mientras que dado $i(\chi(y,z)) = verdadero$ tenemos que $s(y) \supseteq s(z)$ y $\sigma(y) \supseteq \sigma(z)$, entonces transitivamente tenemos que $s(x) \supseteq s(z)$ y $\sigma(x) \supseteq \sigma(z)$, lo que resulta de acuerdo a la Definición 4.1 en que $i(\chi(x,z)) = verdadero$. ***Q.E.D.***

Caso 3. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(EK1):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(EK1),* y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = \varepsilon(z,y)$ y $\varepsilon(z,x)$, $A(x,y) \in \Gamma$ para algún $z \in T_u$ y $x,y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(A(x,y)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$, $i(\chi(v,y)) = verdadero$ es el caso. Tenemos que probar que $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$, si asumimos por reductio que $i(\varepsilon(z,y)) = falso$, entonces necesariamente $\varepsilon(z,y) \notin \Gamma$ pues de otra manera $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$ del hecho que $\mathfrak{A} \models \Gamma$, así que por la maximalidad de Γ (Teorema 3.5) $\varepsilon(z,\sim y) \in \Gamma$ y teniendo que Γ es dominio correspondiente (Teorema 3.4), se sigue que haya un $t \in T_t$ tal que $\chi(t,x), \chi(t,\sim y) \in \Gamma$, por tanto $i(\chi(t,x)) = verdadero$ y $i(\chi(t,\sim y)) = verdadero$, así de $i(\chi(t,\sim y)) = verdadero$, $s(t) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$, y de acuerdo a la Definición 4.1 $y \in \sigma(\sim y)$, $y \notin s(t)$ y como $y \in s(y)$, $s(t) \not\supseteq s(y)$, determinando que $i(\chi(t,y)) = falso$, pero t satisface la condición en $A(x,y)$ sin embargo, no satisface su consecuencia, lo que significa que $i(A(x,y)) = falso$, una contradicción, por lo cual no es posible que $i(\varepsilon(z,y)) = falso$, resultando en $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 3.1.** $\varepsilon(z,x), A(x,\sim y) \vdash \varepsilon(z,\sim y)$: Teniendo que $\phi = \varepsilon(z,x)$, $\varepsilon(z,y)$ y $\varepsilon(z,x)$, $A(x,y) \in \Gamma$ para algún $z \in T_u$ y $x,y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, se sigue de $i(A(x,\sim y)) = verdadero$ que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$, $i(\chi(v,\sim y)) = verdadero$ es el caso. Tenemos que probar que $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$, si asumimos por reductio que $i(\varepsilon(z,\sim y)) = falso$, entonces necesariamente $\varepsilon(z,\sim y) \notin \Gamma$ puesto que de otra manera $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$ del hecho que $\mathfrak{A} \models \Gamma$, así que por maximalidad de Γ (Teorema 3.5) $\varepsilon(z,y) \in \Gamma$ y teniendo que Γ es dominio correspondiente, se sigue que hay algún $t \in T_t$ tal que $\chi(t,x), \chi(t,y) \in \Gamma$, por tanto $i(\chi(t,x)) = verdadero$ y $i(\chi(t,y)) = verdadero$, entonces de $i(\chi(t,y)) = verdadero$, como $s(t) \supseteq s(y)$ y $\sigma(t) \supseteq \sigma(y)$ por la Definición 4.1 y $y \in s(y)$ de acuerdo a la definición de *i(y)*, $y \in s(t)$ pero $y \in \sigma(\sim y)$ según la definición de $i(\sim y)$ resultando en que $s(t) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$ y seguidamente, $i(\chi(t, \sim y)) = falso$, sin embargo, t satisface la condición en $A(x, \sim y)$ sin satisfacer su consecuencia, lo que significa que $i(A(x,y)) = falso$, una contradicción, por lo que no es posible que $i(\varepsilon(z, \sim y)) = falso$, resultando en $i(\varepsilon(z, \sim y)) = verdadero$. Es fácil de ver que la prueba se seguiría análogamente para un x finito o infinito ya que no se usa ninguna propiedad semántica particular del término, el procedimiento entonces seguiría al Caso 3 o Subcaso 3.1 según y sea finito o infinito, respectivamente. ***Q.E.D.***

Caso 4. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(EK2):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(EK2)*, y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = I(x, \sim y)$ y $\neg A(x,y) \in \Gamma$ para algún $x, y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(\neg A(x,y)) = verdadero$ tenemos que hay un $z \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z,y)) = falso$, como $i(\varepsilon(z,y)) = falso$ y $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\varepsilon(z,y) \notin \Gamma$, de otra manera $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$, así por la maximalidad de Γ, $\varepsilon(z, \sim y) \in \Gamma$ y $i(\varepsilon(z, \sim y)) = verdadero$, resultando en que haya un $z \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z, \sim y)) = verdadero$, y por la Definición 4.1, $i(I(x, \sim y)) = verdadero$. Es fácil ver que este método de prueba no utiliza ninguna propiedad específica de la «finitud» o «infinitud» de x o y, de tal manera que la solidez sería probada análogamente para cualquier combinación de x y y finitos o infinitos. ***Q.E.D.***

Caso 5. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(EK3):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(EK3)*, y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = \neg I(x, \sim y)$ y $A(x,y) \in \Gamma$ para algún $x, y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(A(x,y)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$, $i(\chi(v,y)) = verdadero$ es el caso. Si por reducción asumimos que $i(\neg I(x, \sim y)) = falso$, entonces no es el caso que para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$, $i(\chi(z, \sim y)) = falso$, o análogamente, para algún $z \in T_t$ $i(\chi(z,x)) = verdadero$ y $i(\chi(z, \sim y)) = verdadero$, pero como z también satisface la condición de $i(A(x,y)) = verdadero$, debemos de tener también que $i(\chi(z,y)) = verdadero$, y por la misma definición, $s(z) \supseteq s(y)$ y $\sigma(z) \supseteq \sigma(y)$, y como por la Definición 4.1 $y \in s(y)$, $y \in s(z)$, y también por la definición de $i(\sim y)$, $y \in \sigma(\sim y)$ por lo que $y \in (s(z) \cap \sigma(\sim y))$ y consecuentemente $s(z) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$ lo que significa que $i(\chi(z, \sim y)) = falso$, una contradicción, por lo que necesariamente $i(\neg I(x, \sim y)) = verdadero$. **Q.E.D.**

- **Subcaso 5.1.** $A(x, \sim y) \vdash \neg I(x,y)$: teniendo que $\phi = \neg I(x,y)$ y $A(x, \sim y) \in \Gamma$

para algún $x,y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(A(x,\sim y)) = veerdadero$ tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$, $i(\chi(v,\sim y)) = verdadero$ es el caso. Si por reductio asumimos $i(\neg I(x,y)) = falso$, entonces no es el caso que para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$, $i(\chi(z,y)) = falso$, o análogamente, para algún $z \in T_t$ $i(\chi(z,x)) = verdadero$ y $i(\chi(z,y)) = verdadero$ pero como z también satisface la condición en $i(A(x,\sim y)) = verdadero$, también debemos de tener que $i(\chi(z,\sim y)) = verdadero$, y por la Definición 4.1, $s(z) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$, y como por la definición de $i(\sim y)$, $y \in \sigma(\sim y)$ consecuentemente $y \notin s(z)$, y naturalmente por la definición de *i(y), $y \in s(y)$* lo que significa que $s(z) \not\supseteq s(y)$ determinando que $i(\chi(z,y)) = falso$, una contradicción, por lo que necesariamente $i(\neg I(x,y)) = verdadero$. Dado que el que x sea finito o infinito no afecta directamente el procedimiento de prueba, para cualquier combinación de x y y finitos o infinitos, la prueba procedería como en el Caso 5 o el Subcaso 5.1 de acuerdo a que y sea finito o infinito. ***Q.E.D.***

Caso 6. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(PC):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(PC),* y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = \neg A(x,\sim y)$ y $\varepsilon(z,x), \varepsilon(z,y) \in \Gamma$ para algún $z \in T_u$ y $x,y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces tenemos que para algún $z \in T_u$, $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$ es el caso, así que por la Definición 4.1 tenemos que para *z,* $s(z) \supseteq s(y)$ y $\sigma(z) \supseteq \sigma(y)$, como $y \in s(y)$, $y \in s(z)$ y también por la definición de $i(\sim y)$, $y \in \sigma(\sim y)$, de lo cual resulta que $y \notin s(\sim y)$ ya que por la Definición 4.1, $s(\sim y) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$, por lo que se sigue necesariamente que $s(\sim y) \not\supseteq s(z)$ ya que hay un $v \in T_t$ tal que $v \in s(z)$, $v \notin s(\sim y)$, es decir, y mismo, determinando que $i(\varepsilon(z,\sim y)) = falso$, lo que significa que $i(\neg A(x,\sim y)) = verdadero$. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 6.1.** $\varepsilon(z,\sim x), \varepsilon(z,\sim y) \vdash \neg A(\sim x,y)$: teniendo que $\phi = \neg A(x,\sim y)$ y$\varepsilon(z,x), \varepsilon(z,\sim y) \in \Gamma$ para algún $z \in T_u$ y $x,y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces tenemos que para algún $z \in T_u$ $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z,\sim y)) = verdadero$ es el caso, así que por la Definición 4.1 tenemos que para *z,* $y \in \sigma(z)$ y como $s(z) \cap \sigma(z) = \varnothing$, $y \notin s(z)$, pero por la definición de $i(y)$, $y \in s(y)$, y consecuentemente, $y \in s(y)$, $y \notin s(z)$ lo que se traduce a que $s(z) \not\supseteq s(y)$ y determina que $i(\varepsilon(z,y)) = falso$, lo que significa que $i(\neg A(\sim x,y)) = verdadero$. Es obvio que para cualquier combinación de x y y finitos o infinitos, el estatus concreto de x no juega un papel directo en la prueba, así que para cualquier combinación la prueba procede como en el Caso 6 o el Subcaso 6.1 de esta regla de inferencia, dependiendo de que y sea finito o infinito respectivamente. ***Q.E.D.***

Caso 7. $\Gamma \vdash \phi\ \times$***(P-E)***[81]***:*** Dado que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ y un i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, definimos un modelo $\mathfrak{B}$ de Γ con la interpretación *i'* como una extensión elemental $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ tal que hay un un elemento $w \in T_u$ tal que $w \in \mathfrak{B}$ pero $w \notin \mathfrak{A}$, y para toda proposición $\gamma \in Th(\mathfrak{A})$, $i(\gamma) = i'(\gamma)$. Dado el secuente $< q_1, \cdots, q_n >$ donde $Th(\mathfrak{A}) \vdash q_{n-1}, q_n$ por medio de *(P-E)* y para cada $m < (n-1)$, $\mathfrak{A} \models q_m$, i.e. $i(q_m) = verdadero$, teniendo que hay un $q_m = I(x,y)$, para algún $x, y \in T_t$ y $q_{n-1} = \varepsilon(w,x)$, $q_n = \varepsilon(w,y)$. Ya que $\mathfrak{B} \models I(x,y)$, es el caso que hay un $z \in T_u$ tal que $i'(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i'(\varepsilon(z,y)) = verdaero$ por la Definición 4.1, posiblemente *z=w*. Pero si $\mathfrak{A} \not\models q_{n-1}, q_n$ del hecho que $w \notin \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \not\models q_m$ y de $i(\gamma) = i'(\gamma)$, $\mathfrak{B} \not\models q_m, q_{n-1}, q_n$ generando una contradicción, así que necesariamente $A \models q_{n-1}, q_n$ (para algún $z \in T_t$ implícito en $\mathfrak{A}$). ***Q.E.D.***

- **Subcaso 7.1.** $I(\sim x, y) \vdash \varepsilon(z, \sim x), \varepsilon(z,y)$: Dado que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ y un i, la interpretación de $\mathfrak{A}$, definimos al modelo $\mathfrak{B}$ de Γ con la interpretación *i'* como la extensión elemental $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ tal que haya un elemento $w \in T_u$ tal que $w \in \mathfrak{B}$ pero $w \notin \mathfrak{A}$, y para toda proposición $\gamma \in Th(\mathfrak{A})$, $i(\gamma) = i'(\gamma)$. Dado el secuente $< q_1, \cdots, q_n >$ donde $Th(\mathfrak{A}) \vdash q_{n-1}, q_n$ por medio de *(P-E)* y para cada $m < (n-1)$, $\mathfrak{A} \models q_m$, i.e. $i(q_m) = verdadero$, teniendo que hay un $q_m = I(\sim x, y)$, para algún $x, y \in T_t$ y $q_{n-1} = \varepsilon(w, \sim x)$, $q_n = \varepsilon(w,y)$. Ya que $\mathfrak{B} \models I(\sim x, y)$, es el caso que hay un $z \in T_u$ tal que $i'(\varepsilon(z, \sim x)) = verdadero$ y $i'(\varepsilon(z,y)) = verdaero$ por la Definición 4.1, posiblemente *z=w*. Pero si $\mathfrak{A} \not\models q_{n-1}, q_n$ del hecho que $w \notin \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \not\models q_m$ y de $i(\gamma) = i'(\gamma)$, $\mathfrak{B} \not\models q_m, q_{n-1}, q_n$ generando una contradicción, así que necesariamente $A \models q_{n-1}, q_n$ (para algún $z \in T_t$ implícito en $\mathfrak{A}$). La prueba procede análogamente para cualquier combinación finita o infinita de términos *x,y* como puede ser observado por la condición semántica de verdad de $I(x,y)$. ***Q.E.D.***

[81] Esencialmente seguimos la idea de las pruebas de las reglas ectéticas presentes en (Smith, 1983) para la regla *P-E*, que difiere del resto de nuestras reglas dada la instanciación de un nuevo elemento desconocido en las proposiciones inferidas.

Caso 8. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(E-Con):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(E-Con),* y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = \neg I(y,x)$ y $\neg I(x,y) \in \Gamma$ para algún $x,y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(\neg I(x,y)) = verdadero$ tenemos que para todo $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$ es el caso que $i(\chi(v,y)) = falso$. Si asumimos por reductio que $i(\neg I(y,x)) = falso$ entonces hay algún $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,y)) = verdadero$ y $i(\chi(v,x)) = verdadero$, lo que implica la satisfacción de la condición en $\neg I(x,y)$ pero negando la implicación para algún v, determinando que $i(\neg I(x,y)) = falso$ contradiciendo la hipótesis, por lo tanto no es posible que $i(\neg I(y,x)) = falso$, y por consiguiente $i(\neg I(y,x)) = verdadero$. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 8.1.** $\neg I(x, \sim y) \vdash \neg I(\sim y, x)$**:** teniendo que $\phi = \neg I(\sim y,x)$ y $\neg I(x,\sim y) \in \Gamma$ para algún $x,y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(\neg I(x,y)) = verdadero$ tenemos que para todo $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$ es el caso que $i(\chi(z,\sim y)) = falso$. Si asumimos por reductio que $i(\neg I(\sim y,x)) = falso$ entonces hay algún $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,\sim y)) = verdadero$ y $i(\chi(v,x)) = verdadero$, lo que implica la satisfacción de la condición en $\neg I(x,\sim y)$ pero negando su implicación para algún v, determinando que $i(\neg I(x,\sim y)) = falso$ contradiciendo la hipótesis, por lo tanto no es posible que $i(\neg I(\sim y,x)) = falso$, y así $i(\neg I(\sim y,x)) = verdadero$. La prueba es análoga para cualquier combinación de $x,y \in T_t$ finitos o infinitos, ya que no se hace uso concreto de sus constituciones semánticas particulares. ***Q.E.D.***

Caso 9. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(PA-con):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(PA-con),* y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = I(y,x)$ y $A(x,y) \in \Gamma$ para algún $x,y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(A(x,y)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$ es el caso que $i(\chi(v,y)) = verdadero$, de aquí se sigue para cualquier v tal que $s(v) \supseteq s(x)$ y $\sigma(v) \supseteq \sigma(x)$, es el caso que $s(v) \supseteq s(y)$ y $\sigma(v) \supseteq \sigma(y)$. Dado que Γ posee la propiedad de correspondencia de dominios (Teorema 3.4), tenemos que para cualquiera de estos v si $\chi(v,x) \in \Gamma$, $\varepsilon(w,v) \in \Gamma$ para algún $w \in T_u$, y como $\mathfrak{A} \models \Gamma$, es el caso que $s(w) \supseteq s(v)$ y $\sigma(w) \supseteq \sigma(v)$, así que transitivamente, $s(w) \supseteq s(x)$ y $\sigma(w) \supseteq \sigma(x)$, y también $s(w) \supseteq s(y)$ y $\sigma(w) \supseteq \sigma(y)$, por lo que para algún $w \in T_u$ $i(\varepsilon(w,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(w,y)) = verdadero$, significando por la Definición 4.1 que $i(I(x,y)) = verdadero$. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 9.1.** $A(\sim x, \sim y) \vdash I(\sim x, \sim y)$**:** teniendo que $\phi = I(\sim x, \sim y)$ y $A(\sim x, \sim y) \in \Gamma$ para algún $x, y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, también tendremos que $i(A(\sim x, \sim y)) = verdadero$ y de esto, es el caso que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v, \sim x)) = verdadero$ es el caso que $i(\chi(v, \sim y)) = verdadero$. Si asumimos por reductio que $i(I(\sim x, \sim y)) = falso$, como $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $I(\sim x, \sim y) \notin \Gamma$ puesto que de otra manera, $i(I(\sim x, \sim y)) = verdadero$, entonces por la maximalidad de Γ, $\neg I(\sim x, \sim y) \in \Gamma$ y $i(\neg I(\sim x, \sim y)) = verdadero$ significando por la Definición 4.1 que para cualquier $t \in T_t$ tal que $i(\chi(t, \sim x)) = verdadero$, $i(\chi(t, \sim y)) = falso$ es el caso, sin embargo, esto engendraría una contradicción dado que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v, \sim x)) = verdadero$ tenemos tanto que $i(\chi(v, \sim y)) = verdadero$ (por la hipótesis) y $i(\chi(t, \sim y)) = falso$ (de $i(I(\sim x, \sim y)) = verdadero$), por lo que necesariamente, $i(I(\sim x, \sim y)) = verdadero$. Es fácil de ver que para cualquier combinación de x y y finitos o infinitos (incluido el Caso 9 mismo), sus pruebas seguirían este esquema general ya que la estructura semántica particular de los términos no es usada directamente. ***Q.E.D.***

Case 10. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(I-con):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(I-con),* y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = I(y,x)$ y $I(x,y) \in \Gamma$ para algún $x, y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(I(x,y)) = verdadero$ tenemos que para algún $z \in T_u$ $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$, sin embargo si asumimos por reductio que $i(I(y,z)) = falso$ tendríamos que para cualquier $w \in T_u$ o $i(\varepsilon(w,y)) = falso$ o $i(\varepsilon(w,x)) = falso$, pero ya tenemos constancia de que hay un *w,* a saber *z*, tal que ambas proposiciones son verdaderas, haciendo la suposición contradictoria a la hipótesis. Entonces necesariamente $i(I(y,z)) = verdadero$. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 10.1.** $I(x, \sim y) \vdash I(\sim y, x)$**:** teniendo que $\phi = \neg I(x,y)$ y $I(\sim y, x) \in \Gamma$ para algún $x, y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(I(x, \sim y)) = verdadero$ tenemos que para algún $z \in T_u$ $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z, \sim y)) = verdadero$. Si asumimos por reductio que $i(I(\sim y, z)) = falso$ tendríamos que para cualquier $w \in T_u$ o $i(\varepsilon(w, \sim y)) = falso$ o $i(\varepsilon(w,x)) = falso$, pero ya tenemos constancia de que hay un *w,* a saber *z*, tal que ambas proposiciones son verdaderas, haciendo la suposición contradictoria a la hipótesis. Entonces necesariamente $i(I(\sim y, z)) = verdadero$. La prueba es análoga para cualquier otra combinación de términos finitos o infinitos como argumentos. ***Q.E.D.***

Caso 11. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(EK-C):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(EK-C),* y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = A(x, \sim y)$ y $\neg I(x,y) \in \Gamma$ para algún $x, y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(\neg I(x,y)) = verdadero$ será que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$, $i(\chi(v,y)) = falso$ es el caso. Si por reductio asumimos que $i(A(x, \sim y)) = falso$, entonces no es el caso que para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$, $i(\chi(z, \sim y)) = verdadero$, o análogamente, para algún $z \in T_t$ $i(\chi(z,x)) = verdadero$ y $i(\chi(z, \sim y)) = falso$, y como $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\chi(z, \sim y) \notin \Gamma$, de otra manera $i(\chi(z, \sim y)) = verdadero$, así que por la maximalidad de Γ (Teorema 3.5), $\chi(z,y) \in \Gamma$ y consecuentemente $i(\chi(z,y)) = verdadero$, pero como z también satisface la condición de $i(\neg I(x,y)) = verdadero$, también debemos de tener que $i(\chi(z,y)) = falso$, una contradicción, así que necesariamente $i(A(x, \sim y)) = verdadero$. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 11.1.** $\neg I(x, \sim y) \vdash A(x,y)$: teniendo que $\phi = A(x,y)$ y $\neg I(x, \sim y) \in \Gamma$ para algún $x, y \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(\neg I(x, \sim y)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$, $i(\chi(v, \sim y)) = falso$ es el caso. Si por reductio asumimos que $i(A(x,y)) = falso$, entonces no es el caso que para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$, $i(\chi(z,y)) = verdadero$, o análogamente, para algún $z \in T_t$ $i(\chi(z,x)) = verdadero$ y $i(\chi(z,y)) = falso$ y como $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\chi(z,y) \notin \Gamma$, de otra manera $i(\chi(z,y)) = verdadero$, así que por la maximalidad de Γ (Teorema 3.5, $\chi(z, \sim y) \in \Gamma$ y consecuentemente $i(\chi(z, \sim y)) = verdadero$, pero como z también satisface la condición de $i(\neg I(x, \sim y)) = verdadero$, también debemos de tener que $i(\chi(z, \sim y)) = falso$, una contradicción, por lo que necesariamente $i(A(x,y)) = verdadero$. Es fácil observar que la prueba es análoga para cualquier otra combinación de términos finitos o infinitos como argumentos. ***Q.E.D.***

Caso 12. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(PS1):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(PS1),* y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = A(x,z)$ y $A(x,y), A(y,z) \in \Gamma$ para algún $x, y, z \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(A(x,y)) = verdadero$ será que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$, $i(\chi(v,y)) = verdadero$ es el caso, y similarmente de $i(A(x,y)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,y)) = verdadero$, $i(\chi(v,z)) = verdadero$ es el caso, así que transitivamente, dado que para cualquier v que satisface $i(\chi(v,x)) = verdadero$ también es el caso que $i(\chi(v,y)) = verdadero$, tenemos que $i(\chi(v,z)) = verdadero$ para cualquiera de ellos, por tanto para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$, $i(\chi(v,z)) = verdadero$, significando que $i(A(x,z)) = verdadero$. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 12.1.** $A(\sim x,y), A(y,z) \vdash A(\sim x,z)$**:** teniendo que $\phi = A(x,z)$ y $A(x,y), A(y,z) \in \Gamma$ para algún $x,y,z \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(A(\sim x,y)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,\sim x)) = verdadero$, $i(\chi(v,y)) = verdadero$ es el caso, y similarmente de $i(A(x,y)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,y)) = verdadero$, $i(\chi(v,z)) = verdadero$ es el caso, así que transitivamente, dado que para cualquier v que satisfaga $i(\chi(v,\sim x)) = verdadero$ también es el caso que $i(\chi(v,y)) = verdadero$, tenemos que $i(\chi(v,z)) = verdadero$ para cualquiera de ellos, por tanto tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,\sim x)) = verdadero$, $i(\chi(v,z)) = verdadero$, significando que $i(A(\sim x,z)) = verdadero$. Como puede observarse, cualquier subcaso de *(PS1)* es automaticamente satisfecho por medio de la presencia del término medio como una consecuencia en la primera sentencia, y como una condición en la siguiente, por lo que será satisfecha independientemente de que los términos sean finitos o infinitos, puesto que su estructura semántica particular no juega algún papel. ***Q.E.D.***

Caso 13. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(PS2):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(PS2),* y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = \neg I(z,y)$ y $\neg I(x,y), A(z,x) \in \Gamma$ para algún $x,y,z \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, entonces de $i(\neg I(x,y)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$, $i(\chi(v,y)) = falso$ es el caso, mientras que por otro lado de $i(A(z,x)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $w \in T_t$ tal que $i(\chi(w,z)) = verdadero$, $i(\chi(w,x)) = verdadero$ y consecuentemente de $i(\neg I(x,y)) = verdadero$, $i(\chi(w,y)) = falso$, determinando que $i(\neg I(z,y)) = verdadero$ de acuerdo a la Definición 4.1. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 13.1.** $\neg I(x,\sim y), A(\sim z,x) \vdash \neg I(\sim z,\sim y)$**:** Teniendo que $\phi = \neg I(\sim z,y)$ y $A(\sim z,x), \neg I(x,y) \in \Gamma$ para algún $x,y,z \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$. Para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,\sim z)) = verdadero$

tenemos por $i(A(\sim z,x)) = verdadero$ que $i(\chi(v,x)) = verdadero$ y dado que $i(\neg I(x,\sim y)) = verdadero$, tenemos para v que, necesariamente $i(\chi(v,\sim y)) = falso$, de otra manera contradiría la hipótesis, entonces $i(\neg I(\sim z,\sim y)) = verdadero$. Como puede observarse, cualquier subcaso de ($PS2$) es automáticamente satisfecho por medio de la presencia de un término medio como consecuencia en la sentencia universal afirmativa, y como una condición en la universal negativa, así que la regla será satisfecha independientemente de que los términos sean finitos o infinitos, puesto que su estructura semántica particular no juega algún papel. ***Q.E.D.***

Caso 14. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(PS3):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(PS3),* y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = I(z,y)$ y $A(x,y), I(z,x) \in \Gamma$ para algún $x,y,z \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, de $i(A(x,y)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$, $i(\chi(v,y)) = verdadero$, y como por la Definición 4.1 $x \in s(x)$, $\chi(x,x) \in \Gamma$ y $i(\chi(x,x)) = verdadero$ resulta, significando que x en sí satisface $i(\chi(x,x)) = verdadero$ y por la hipótesis $i(\chi(x,y)) = verdadero$, significando que $s(x) \supseteq s(y)$ y $\sigma(x) \supseteq \sigma(y)$. Por tanto, sabiendo que $i(I(z,x)) = verdadero$, hay un $w \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(w,z)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(w,x)) = verdadero$, y en consecuencia $s(w) \supseteq s(z)$ y $\sigma(w) \supseteq \sigma(z)$, también $s(w) \supseteq s(x)$ y $\sigma(w) \supseteq \sigma(x)$, como $s(x) \supseteq s(y)$ y $\sigma(x) \supseteq \sigma(y)$ del hecho que $i(A(x,y)) = verdadero$, $s(w) \supseteq s(y)$, como también $\sigma(w) \supseteq \sigma(y)$ transitivamente a través de $s(x)$ y $\sigma(x)$, i.e. $i(\varepsilon(w,y)) = verdadero$ de acuerdo a la Definición 4.1, resultando en que $i(\varepsilon(w,z)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(w,y)) = verdadero$, entonces, $i(I(z,x)) = true$. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 14.1.** $A(x,\sim y), I(z,x) \vdash I(z,\sim y)$**:** teniendo que $\phi = I(z,\sim y)$ y $A(x,\sim y), I(z,x) \in \Gamma$ para algún $x,y,z \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$**,** de $i(A(x,\sim y)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$, $i(\chi(v,\sim y)) = verdadero$ que por la Definición 4.1 significa que $s(v) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$ y por tanto, para cualquier $r \in T_t$ tal que $r \in s(v)$, $r \notin \sigma(\sim y)$, y por complemento y la definición de $i(\sim y)$, $r \in s(\sim y)$ y $s(\sim y) \supseteq s(v)$ se sigue. sabiendo que $i(I(z,x)) = verdadero$, hay algún $w \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(w,z)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(w,x)) = verdadero$, si asumimos por reductio que $i(\varepsilon(w,\sim y)) = falso$, entonces o $s(\sim y) \not\supseteq s(w)$ o $\sigma(w) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$, si $s(\sim y) \not\supseteq s(w)$, hay algún $t \in s(w)$, $t \notin s(\sim y)$ y por la definición de $i(\sim y)$ y complemento, $t \in \sigma(\sim y)$ así que por la Definición 4.1 $\chi(t,y) \in \Gamma$ y como $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $i(\chi(t,y)) = verdadero$ significando que $s(t) \supseteq s(y)$ y $\sigma(t) \supseteq \sigma(y)$, y como $t \in s(w)$ implica que $\varepsilon(w,t) \in \Gamma$ y consecuentemente $i(\varepsilon(w,t)) = verdadero$, tenemos transitivamente que $s(w) \supseteq s(y)$ y $\sigma(w) \supseteq \sigma(y)$, i.e. $i(\varepsilon(w,y) = verdadero$; si por otro lado asumimos que $\sigma(w) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$ tenemos que para cualquier $t \in \sigma(\sim y), t \notin \sigma(w)$, y consecuentemente por la definición de $i(\sim y)$, $\chi(t,y) \in \Gamma$ y como $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $i(\chi(t,y)) = verdadero$, por otro lado, por la definición de *i(w),* de $t \notin \sigma(w)$, se sigue que $\varepsilon(w, \sim t) \notin \Gamma$ así que por la maximalidad de Γ (Teorema 3.5), $\varepsilon(w,t) \in \Gamma$ y $i(\varepsilon(w,t)) = verdadero$, de lo que se sigue que $s(t) \supseteq s(y)$ y $\sigma(t) \supseteq \sigma(y)$ y también, $s(w) \supseteq s(t)$ y $\sigma(w) \supseteq \sigma(t)$, así que transitivamente $s(w) \supseteq s(y)$ y $\sigma(w) \supseteq \sigma(y)$, que significa que $i(\varepsilon(w,y)) = verdadero$ (naturalmente si tanto $s(\sim y) \not\supseteq s(w)$ y $\sigma(w) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$ lo mismo se sigue). Así que en cualquier caso $i(\varepsilon(w,y) = verdadero$, sin embargo, dado que Γ es dominio correspondiente (Teorema 3.4), hay un $q \in T_t$ tal que $\chi(q,x), \chi(q,y) \in \Gamma$ y como $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $i(\chi(q,x)) = verdadero$ y $i(\chi(q,y)) = verdadero$, en consecuencia $s(q) \supseteq s(y)$, pero de $i(A(x, \sim y)) = verdadero$ tenemos que $s(\sim y) \supseteq s(q)$, lo que significaría que $s(\sim y) \supseteq s(y)$ y como $y \in s(y)$, $y \in s(\sim y)$ pero $y \in \sigma(\sim y)$ de la definición de $i(\sim y)$, pero esto contradiría la Definición 4.1 puesto que $y \in (s(\sim y) \cap \sigma(\sim y))$ y necesariamente $s(\sim y) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$. Entonces, como ya teníamos que $i(I(z,x)) = verdadero$ y no podemos tener que $i(\varepsilon(w, \sim y)) = falso$, $i(\varepsilon(w, \sim y)) = verdadero$ es el caso, por lo que se sigue que $i(I(z, \sim y)) = verdadero$. Se puede observar que el hecho que x aparezca como un término finito no se usa directamente en la prueba, por lo que una prueba análoga seguiría si tuviéramos a x como término infinito. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 14.2.** $A(\sim x,y), I(z, \sim x) \vdash I(z,y)$**:** teniendo que $\phi = I(z,y)$ y $A(\sim x,y), I(z, \sim x) \in \Gamma$ para algún $x,y,z \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$. Sabiendo que $i(I(z, \sim x)) = verdadero$, hay algún $w \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(w,z)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(w, \sim x)) = verdadero$, si asumimos por reductio que $i(I(z,y)) = falso$, tenemos que para cualquier $r \in T_u$ o $i(\varepsilon(r,z)) = falso$ o $i(\varepsilon(r,y)) = falso$, teniendo entonces tres situaciones: *(i)* si para cualquier $r \in T_u$, $i(\varepsilon(r,z)) = falso$ y $i(\varepsilon(r,y)) = verdadero$, por tanto no sería posible tener que $i(\varepsilon(r,z)) = verdadero$, contradiciendo la hipótesis, *(ii)* si para cualquier $r \in T_u$, $i(\varepsilon(r,z)) = verdadero$, $i(\varepsilon(r,y)) = falso$ es el caso, como $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\varepsilon(r,y) \notin \Gamma$, de otra manera $i(\varepsilon(r,y)) = verdadero$, así que por maximalidad de Γ (Teorema 3.5) $\varepsilon(r, \sim y) \in \Gamma$ y por tanto, $i(\varepsilon(r, \sim y)) = verdadero$, entonces, tendríamos que para r, $i(\varepsilon(w,z)) = verdadero$, $i(\varepsilon(r, \sim x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(r, \sim y)) = verdadero$, y como Γ es dominio correspondiente (Teorema 3.4), tendríamos que hay algún $v \in T_t$ tal que $\chi(v,z), \chi(v, \sim x)\chi(v, \sim y) \in \Gamma$ y hay un $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v, \sim x)) = verdadero$ y $i(\chi(v, \sim y)) = verdadero$, y dada la Definición 4.1, $s(v) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$, consecuentemente teniendo que $y \in \sigma(\sim y)$, $y \notin s(v)$ lo que significa que $s(v) \not\supseteq s(y)$, determinando que $i(\chi(v,y)) = falso$, pero como $i(\chi(v, \sim x)) = verdadero$, de $i(A(\sim x, y)) = true$, $i(\chi(v,y)) = verdadero$ también resulta, lo que engendra una contradicción; *(iii)* si para cualquier $r \in T_u$, $i(\varepsilon(r,z)) = falso$ y $i(\varepsilon(r,y)) = falso$, sucede como en el caso *(i)* siendo imposible. Tenemos entonces que en cualquier situación $i(I(z,y)) = falso$ es contradictorio, así que necesariamente $i(I(z,y)) = verdadero$. Es fácil observar que las pruebas no cambian si aparece z como término infinito, siguiendo uno de los dos subcasos o el caso original de acuerdo a la permutación de x y y finitos o infinitos.

Caso 15. $\Gamma \vdash \phi$ $\times$***(PS4):*** Si $\Gamma \vdash \phi$ por medio de *(PS4),* y hay un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ teniendo que $\phi = \neg A(z,y)$ y $\neg I(x,y), I(z,x) \in \Gamma$ para algún $x,y,z \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, de $\neg I(x,y) \in \Gamma$ tenemos que $y \in \sigma(x)$ de acuerdo a la Definición 4.1 por otro lado, de $i(I(z,x)) = verdadero$ debe de haber algún $r \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(r,z)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(r,x)) = verdadero$, significando que $s(r) \supseteq s(x)$ y $\sigma(r) \supseteq \sigma(x)$, así que transitivamente, $y \in \sigma(r)$, lo que implica que $\varepsilon(r, \sim y) \in \Gamma$ y $i(\varepsilon(r, \sim y)) = verdadero$ por $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Si asumimos por reductio $i(\neg A(z,y)) = falso$, no sería el caso que hay algún $v \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(v,z)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(v,y)) = falso$, o equivalentemente, que para cualquier $v \in T_u$ $i(\varepsilon(v,z)) = falso$ o $i(\varepsilon(v,y)) = verdadero$, teniendo tres situaciones, *(i)* si para cualquier $v \in T_u$ $i(\varepsilon(v,z)) = falso$ y $i(\varepsilon(v,y)) = falso$, determinaría que $i(I(z,x)) = falso$ por lo que la situación *(i)* contradice la hipótesis; *(ii)* si para cualquier $v \in T_u$ $i(\varepsilon(v,z)) = falso$ y $i(\varepsilon(v,y)) = verdadero$ obtendríamos la misma contradicción que en *(i),* siendo igualmente imposible, por último *(iii)* si para cualquier $v \in T_u$, $i(\varepsilon(v,z)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(v,y)) = verdadero$, resultaría una contradicción con las premisas, ya que de ellas tenemos que hay algún $r \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(r,z)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(r, \sim y)) = verdadero$, y como de $i(\varepsilon(r,z)) = verdadero$ se sigue que $y \in \sigma(r)$ y por definición $s(r) \cap \sigma(r) = \varnothing$, $y \notin s(r)$ y dado que $y \in s(y)$ de *i(y)*, $s(r) \not\supseteq s(y)$ y en consecuencia $i(\varepsilon(r,y)) = falso$, lo que se opone a la suposición de *(iii)*. Por lo que en todos los casos $i(\neg A(z,y)) = falso$ es imposible dadas las premisas, así que necesariamente $i(\neg A(z,y)) = true$. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 15.1.** $\neg I(x,\sim y), I(z,x) \vdash \neg A(z,\sim y)$**:** teniendo que $\phi = \neg A(z,\sim y)$ y $\neg I(x,\sim y), I(z,x) \in \Gamma$ para algún $x,y,z \in T_t$ en i, una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, de $i(\neg I(x,\sim y)) = verdadero$ tenemos que para cualquier $p \in T_t$ tal que $i(\chi(p,x)) = verdadero$, $i(\chi(p,\sim y)) = falso$. Si asumimos por reductio que $i(\neg A(z,\sim y)) = falso$, no sería el caso que hay algún $w \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(w,z)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(w,\sim y)) = falso$, o equivalentemente, que para cualquier $w \in T_u$ $i(\varepsilon(w,z)) = falso$ o $i(\varepsilon(w,\sim y)) = verdadero$, si tenemos que $i(\varepsilon(w,z)) = falso$ para cualquier $w \in T_u$, $i(I(z,x)) = falso$ por la Definición 4.1, contradiciendo la hipótesis, si por otro lado, para cualquier $w \in T_u$, $i(\varepsilon(w,\sim y)) = verdadero$, resulta con $i(I(z,x)) = verdadero$ que hay algún $r \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(r,z)) = verdadero$, $i(\varepsilon(r,x)) = verdadero$ y como r es un $w \in T_u$, $i(\varepsilon(r,\sim y)) = verdadero$, de $i(\varepsilon(r,z)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(r,x)) = verdadero$ se sigue que $s(r) \supset s(z)$ y $s(r) \supset s(x)$, y como por las definiciones de $i(x)$ y *i(z)*, $x \in s(x)$ y $z \in s(z)$, transitivamente, $z,x \in s(r)$, por lo cual, $\varepsilon(r,z), \varepsilon(r,x) \in \Gamma$ por la definición de *i(r),* mientras que de $i(\varepsilon(r,\sim y)) = verdadero$ tenemos que $s(\sim y) \supseteq s(r)$ y $\sigma(r) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$, significando que para todo $t \in s(r)$, $t \in s(\sim y)$, y en consecuencia, $y \notin s(r)$ pues de otra manera, $y \in s(\sim y)$ de lo que resultaría que $y \in (s(\sim y) \cap \sigma(\sim y))$ y así, $s(\sim y) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$, contradiciendo la Definición 4.1, entonces $\varepsilon(r,y) \notin \Gamma$ y por maximalidad $\varepsilon(r,\sim y) \in \Gamma$, pero como Γ es dominio correspondiente, para r hay algún $v \in T_t$ tal que $\chi(v,z), \chi(v,x), \chi(v,\sim y) \in \Gamma$, por lo cual, hay un $v \in T_t$ tal que $i(\chi(v,x)) = verdadero$ y $i(\chi(v,\sim y)) = verdadero$, pero de $i(\neg I(x,\sim y)) = verdadero$ también tenemos que $i(\chi(v,\sim y)) = falso$, una contradicción, así que en cualquier caso $i(\neg A(z,\sim y)) = falso$ engendra una contradicción y necesariamente $i(\neg A(z,\sim y)) = verdadero$. Puede observarse fácilmente que para cualquier combinación de x y z finitos o infinitos las pruebas procederían análogamente al Caso 15 o Subcaso 15.1, pues la inferencia de una cosa concreta para la cual la proposición que trata al término finito o infinito y sea falsa (análoga a la que aparece in la proposición particular negativa) no requiere alguna manipulación de los x o z (finitos o infinitos). ***Q.E.D.***

Ha sido probado de esta manera, que dado un conjunto maximalmente consistente de sentencias con la propiedad de correspondencia de dominios, representado por Γ, para cualquier sentencia ϕ tal que $\Gamma \vdash_\Phi \phi$, tenemos que $\Gamma \models \phi$, donde Φ es el operador de cierre aristotélico definido en la Sección 3.1 para nuestro lenguaje $\mathcal{L}$, i.e: la función que mapea conjuntos de sentencias a conjuntos de sentencias del lenguaje $\mathcal{L}$ a través de la aplicación de las 15 reglas de inferencia listadas. Por lo tanto, cualquier modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}, i \models \Gamma$, donde i es una interpretación mixta de $\mathfrak{A}$, es *solido* con respecto a Φ, o más sucintamente, el tuplo $\langle \Gamma, \mathfrak{A}, i, \Phi \rangle$ es solido dada la descripción previa de cada elemento.

Antes de proceder con la prueba de completitud, probaremos un lema que simplificara la argumentación *estilo Henkin* para la completitud débil de modelos de interpretación mixta.

5.2. Lema 5.2: Bi-implicación semántica-membresía de conjunto

Teniendo que Γ *denote un conjunto arbitrario maximalmente consistente con la propiedad de correspondencia de dominios y* $\mathfrak{A}$*, un modelo como en la Definición 4.2 tal que* $\mathfrak{A} \models \Gamma$ *con i como su función de interpretación mixta como en la Definición 4.1. Entonces, para cualquier sentencia* ϕ*,* $i(\phi) = true$ sii $\phi \in \Gamma$.

Prueba.

Caso 1. $\varepsilon(x,y) \in \Gamma$ sii $s(x) \supset s(y)$ y $\sigma(x) \supseteq \sigma(y)$**:** $\Rightarrow$: Asumiendo que $\varepsilon(x,y) \in \Gamma$, pero que por reductio $s(x) \not\supseteq s(y)$, entonces tendríamos que hay algún $z \in T_t$ tal que $z \in s(y)$ y $z \notin s(x)$, significando por la definición de *i(y)* que $\chi(y,z) \in \Gamma$ y de *i(x)* con $z \notin s(x)$, $\varepsilon(x,z) \notin \Gamma$, así que dado la maximalidad de Γ (Teorema 3.5), es el caso que $\varepsilon(x, \sim z) \in \Gamma$, siguiendo la correspondencia de dominios de Γ (Teorema 3.4), debe de haber algún $v \in T_t$ tal que $\chi(v,y), \chi(v, \sim z) \in \Gamma$, pero como $\chi(y,z) \in \Gamma$ tenemos por (*TF*) que $\chi(v,z) \in \Gamma$, lo que contradice la consistencia de Γ (Teorema 3.5), por lo que se implica necesariamente que $s(x) \supseteq s(y)$. Por otro lado, para cualquier $z \in \sigma(y)$ tenemos que $\neg I(y,z) \in \Gamma$ por lo que aplicando (*EK*-C) tenemos que $A(y, \sim z) \in \Gamma$, como por hipótesis tenemos que $\varepsilon(x,y) \in \Gamma$, obtenemos por (*EK1*) que $\varepsilon(x, \sim z) \in \Gamma$ lo cual por la Definición 4.1 significa que $z \in \sigma(\sim z)$, de esta manera tenemos que para cualquier $z \in \sigma(y)$, $z \in \sigma(x)$, y consecuentemente $\sigma(x) \supseteq \sigma(y)$.$\Leftarrow$: Si es asumido que $s(x) \supseteq s(y)$ y $\sigma(x) \supseteq \sigma(y)$, tenemos que para cualquier $z \in s(y)$, $z \in s(x)$ y dado que por la Definición 4.1, $y \in s(y)$, $y \in s(x)$ resulta junto a la definición de *i(x)* que $\varepsilon(x,y) \in \Gamma$. ***Q.E.D.***

Caso 2. $\varepsilon(x, \sim y) \in \Gamma$ sii $s(\sim y) \supset s(x)$ y $\sigma(x) \cap \sigma(y) \neq \varnothing$**:** $\Rightarrow$: Asumiendo que $\varepsilon(x, \sim y) \in \Gamma$, pero también por reductio que $s(\sim y) \not\supseteq s(x)$, se seguiría que para algún $z \in T_t$, $z \in s(x)$ pero $z \notin s(\sim y)$ resultando de la definición de $i(\sim y)$ y por complemento que $z \in \sigma(\sim y)$, significando $\chi(z,y) \in \Gamma$, y de $z \in s(x)$ necesariamente $\varepsilon(x,z) \in \Gamma$, resultando por la correspondencia de dominios de Γ (Teorema 3.4) que haya algún $v \in T_t$ tal que $\chi(v,\sim y), \chi(v,z) \in \Gamma$, que implica por *(TF)* que $\chi(v,y) \in \Gamma$, lo que contradice la consistencia de Γ (Teorema 3.5), por lo cual $s(\sim y) \supseteq s(x)$. Por otro lado, como es el caso que $\varepsilon(x,\sim y) \in \Gamma$, por la Definición 4.1, $y \in \sigma(x)$, y también por la definición de $i(\sim y)$, $y \in \sigma(\sim y)$, de donde procede que $\sigma(x) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$. $\Leftarrow$: Asumiendo que $s(\sim y) \supseteq s(x)$ y $\sigma(x) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$, y teniendo que por definición $s(\sim y) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$, se infiere que $s(x) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$ es el caso, y como por $i(\sim y)$, $y \in \sigma(\sim y)$ resulta que $y \notin s(x)$ entonces por Definición 4.1 $\varepsilon(x,y) \notin \Gamma$ y dada la maximalidad de Γ, $\varepsilon(x,\sim y) \in \Gamma$. ***Q.E.D.***

Caso 3. $I(x,y) \in \Gamma$ sii hay algún $z \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$**:** $\Rightarrow$: Asumiendo que $I(x,y) \in \Gamma$ tenemos por *(P-E)* que hay algún $z \in T_u$ tal que $\varepsilon(z,x), \varepsilon(z,y) \in \Gamma$, y dado que por el Caso 1 ($\Rightarrow$) del Lema 5.2, si $\varepsilon(z,x) \in \Gamma$, $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$, como también sería análogo para $\varepsilon(z,y)$, significando que $i(I(x,y)) = verdadero$; Puede observarse que la prueba procedería análogamente si x o y son infinitos, por medio del Caso 2 ($\Rightarrow$). $\Leftarrow$: Asumiendo que hay algún $z \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$, tenemos dado el Caso 1 ($\Leftarrow$) del Lema 5.2 que $\varepsilon(z,x), \varepsilon(z,y) \in \Gamma$, y aplicando *(PI)* obtenemos $\neg A(x,\sim y) \in \Gamma$, resultando en $I(x,y) \in \Gamma$ usando *(EK2)*; como anterior, para x o y infinitos, se usaría el Caso 1 ($\Leftarrow$) del Lema 5.2 análogamente. ***Q.E.D.***

Caso 4. $\neg A(x,y) \in \Gamma$ sii hay algún $z \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z,y)) = falso$**:** $\Rightarrow$: Asumiendo que $\neg A(x,y) \in \Gamma$, tenemos por *(EK2)* que $I(x,\sim y) \in \Gamma$ y a través de *(P-E)* se implica que hay algún $z \in T_u$ tal que $\varepsilon(z,x), \varepsilon(z,\sim y) \in \Gamma$ que por el Caso 1 ($\Rightarrow$) y el Caso 2 ($\Rightarrow$) del Lema 5.2 resultando en $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z,\sim y)) = verdadero$, de la Definición 4.1 y $\varepsilon(z,\sim y) \in \Gamma$, $y \in \sigma(z)$, y teniendo que $s(z) \cap \sigma(z) = \varnothing$ se sigue que $y \notin s(z)$, sin embargo por la definición de *i(y)*, $y \in s(y)$, determinando que $s(z) \not\supseteq s(y)$ y consecuentemente $i(\varepsilon(z,y)) = falso$, así que tenemos que hay algún $z \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z,y)) = falso$. $\Leftarrow$: Asumiendo que $i(\neg A(x,y)) = verdadero$ se sigue que hay algún $z \in T_u$ tal que $i(\varepsilon(z,x)) = verdadero$ y $i(\varepsilon(z,y)) = falso$ y por el Caso 1 ($\Leftarrow$) del Lema 5.2 $\varepsilon(z,x) \in \Gamma$, pero si por reductio asumimos que $\neg A(x,y) \notin \Gamma$ tendríamos por la maximalidad de Γ que $A(x,y) \in \Gamma$ (Teorema 3.5) por lo que aplicando *(EK1)* $\varepsilon(z,y) \in \Gamma$ prosigue, y de nuevo por el Caso 1 ($\Leftarrow$) del Lema 5.2 $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$, pero esto contradice la hipótesis que $i(\varepsilon(z,y)) = falso$ (pues si $i(\varepsilon(z,y)) = falso$, $\varepsilon(z,y) \notin \Gamma$ de la bicondición del Caso 1 Lema 5.2 y $\varepsilon(z,\sim y) \in \Gamma$, pero por el mismo, si $i(\varepsilon(z,y)) = verdadero$, $\varepsilon(z,y) \in \Gamma$, rompiendo la maximalidad), por tanto $A(x,y) \notin \Gamma$ y por maximalidad, $\neg A(x,y) \in \Gamma$. Como en el caso anterior, es fácil de observar que la prueba no cambia fundamentalmente si x o y aparecen como términos infinitos (en el lado $\Rightarrow$ solo es relevante si y es infinito, en cuyo caso la conclusión se sigue directamente de que de la descomposición de $I(x,y)$, $y \in s(z)$ y por tanto $s(\sim y) \not\supseteq s(z)$), por lo demás no hay uso directo de la estructura semántica de las sentencias ε excepto por su verdad o falsedad general, y el Caso 2 del Lema 5.2 puede ser usado intercambiablemente en vez del Caso 1 del Lema 5.2 cuando un término infinito aparece. ***Q.E.D.***

Caso 5. $\chi(x,y) \in \Gamma$ sii $s(x) \supseteq s(y)$ y $\sigma(x) \supseteq \sigma(y)$**:** $\Rightarrow$: Asumiendo que $\chi(x,y) \in \Gamma$, y sabiendo que por la Definición 4.1 para cualquier $z \in T_t$ tal que $z \in s(y)$, $\chi(y,z) \in \Gamma$ obtendremos por medio de *(TF)* que $\chi(x,z) \in \Gamma$ que por la definición de *i(x)* significa que $z \in s(x)$, y como resultado, $s(x) \supseteq s(y)$. Por otro lado, si asumimos por reductio que $\sigma(x) \not\supseteq \sigma(y)$, que implica que para algún $z \in T_t$ tal que $z \in \sigma(y)$, $z \notin \sigma(x)$ resultando en $\chi(y,z) \in \Gamma$ pero $\chi(x,z) \notin \Gamma$, por lo cual dada la maximalidad (Teorema 3.5) $\chi(x,\sim z) \in \Gamma$, sin embargo, si *(TF)* es aplicado a $\chi(x,y)$ y $\chi(y,z)$ obtenemos que $\chi(x,z) \in \Gamma$, contradiciendo la consistencia de Γ (Teorema 3.5), por lo consiguiente $\sigma(x) \supseteq \sigma(y)$.$\Leftarrow$: Asumiendo que $s(x) \supseteq s(y)$ y $\sigma(x) \supseteq \sigma(y)$ es el caso, y que por la Definición 4.1, $y \in s(y)$, tenemos transitivamente que $y \in s(x)$, y por la definición de *i(x)*, $\chi(x,y) \in \Gamma$. ***Q.E.D.***

Caso 6. $\chi(x,\sim y) \in \Gamma$ sii $s(x) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$**:** $\Rightarrow$: Asumiendo que $\chi(x,\sim y) \in \Gamma$, pero por reductio que $s(x) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$, obtendríamos que hay algún $z \in T_t$ tal que $z \in s(x)$ y $z \in \sigma(\sim y)$, significando por la Definición 4.1 que $\chi(x,z), \chi(z,y) \in \Gamma$, por lo cual $y \in s(z)$ de acuerdo a la definición de *i(z),* y como fue probado en el Caso 5 ($\Rightarrow$) del Lema 5.2, de $\chi(x,z) \in \Gamma$, resulta que $s(x) \supseteq s(z)$, y transitivamente, $y \in s(x)$ y por *i(x)*, $\chi(x,y) \in \Gamma$, pero $\chi(x,y) = C(\chi(x,\sim y))$, de esta manera $\chi(x,y) \in \Gamma$ contradice la consistencia de Γ (Teorema 3.5), así que necesariamente $s(x) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$. $\Leftarrow$: Asumiendo que $s(x) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$ es el caso, tendríamos que para cualquier $z \in T_t$ tal que $z \in \sigma(\sim y)$, $z \notin s(x)$, y como por la definición de

$\sigma(\sim y)$, $y \in \sigma(\sim y)$ tenemos que $y \notin s(x)$ significando por la Definición 4.1 que $\chi(x,y) \notin \Gamma$ en consecuencia dada la maximalidad de Γ, $\chi(x,\sim y) \in \Gamma$. ***Q.E.D.***

Caso 7. $A(x,y) \in \Gamma$ sii para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$ es el caso que $i(\chi(z,y)) = verdadero$**:** $\Rightarrow$: Asumiendo que $A(x,y) \in \Gamma$, y también por reductio que $i(A(x,y)) = falso$, significando que hay algún $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$ y $i(\chi(z,y)) = falso$, de $i(\chi(z,x)) = verdadero$ obtenemos por el Caso 5 ($\Leftarrow$) del Lema 5.2 que $\chi(z,x) \in \Gamma$, mientras que de $i(\chi(z,y)) = falso$ o $s(z) \not\supseteq s(y)$ o $\sigma(z) \not\supseteq \sigma(y)$, si $s(z) \not\supseteq s(y)$ es el caso, entonces hay algún $v \in T_t$ tal que $v \in s(y)$ pero $v \notin s(z)$, lo que implica que $\chi(y,v) \in \Gamma$ pero $\chi(z,v) \notin \Gamma$, entonces por la maximalidad de Γ (Teorema 3.5), $\chi(z,\sim v) \in \Gamma$, así que por el Caso 6 ($\Rightarrow$) del Lema 5.2 tenemos que $s(z) \cap \sigma(\sim v) = \varnothing$ y como por $\chi(y,v) \in \Gamma$, $y \in \sigma(\sim v)$ de acuerdo a la Definición 4.1, $y \notin s(z)$ y consecuentemente $\chi(z,y) \notin \Gamma$, pero entonces $\chi(z,x) \nvdash \chi(z,y)$ significando por *(UA-I)* que $A(x,y) \notin \Gamma$, prosiguiendo por la maximalidad de Γ que $\neg A(x,y) \in \Gamma$ lo que contradice la consistencia de Γ (Teorema 3.5), por lo cual no puede ser que $s(z) \not\supseteq s(y)$ si $A(x,y) \in \Gamma$, si de lo contrario $\sigma(z) \not\supseteq \sigma(y)$ entonces hay algún $v \in T_t$ tal que $v \in \sigma(y)$ pero $v \notin \sigma(z)$ por lo que se sigue que $\neg I(y,v) \in \Gamma$ pero de nuevo por maximalidad, $I(z,v) \in \Gamma$ y si *(PS4)* es aplicado obtenemos que $\neg A(z,y) \in \Gamma$ y por *(EK2)* tenemos que $I(z,\sim y)$, lo que significa que usando *(P-E)* que hay algún $w \in T_u$ tal que $\varepsilon(w,z), \varepsilon(w,\sim y) \in \Gamma$, de esta manera $y \in \sigma(w)$ por la Definición 4.1 y como tenemos que $i(\varepsilon(w,z)) = verdadero$ por el Caso 1 ($\Rightarrow$) del Lema 5.2, $s(w) \supseteq s(z)$ y $\sigma(w) \supseteq \sigma(z)$ es el caso y similarmente por $\chi(z,x) \in \Gamma$, $s(z) \supseteq s(x)$ y $\sigma(z) \supseteq \sigma(x)$ es el caso, así que transitivamente $s(w) \supseteq s(x)$ y $\sigma(w) \supseteq \sigma(x)$ resultando en $\varepsilon(w,x) \in \Gamma$, por la aplicación de *(EK1)* junto a *A(x,y)* obtenemos $\varepsilon(w,y) \in \Gamma$, pero de aquí prosigue que $y \in s(w)$, contradiciendo la Definición 4.1 ya que $y \in (s(w) \cap \sigma(w))$ y en consecuencia, $s(w) \cap \sigma(w) \neq \varnothing$, entonces necesariamente ni $s(z) \not\supseteq s(y)$ o $\sigma(z) \not\supseteq \sigma(y)$ pueden ser para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$ y $i(A(x,y)) = verdadero$.$\Leftarrow$: Asumiendo que para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$, es el caso que $i(\chi(z,y)) = verdadero$, sin embargo si asumimos por reductio que $A(x,y) \notin \Gamma$, resultaría por la maximalidad de Γ que $\neg A(x,y) \in \Gamma$ de lo cual se seguiría a través de *(EK2)* que $I(x,\sim y) \in \Gamma$ y por medio de *(P-E)* para algún $w \in T_u$, $\varepsilon(w,x), \varepsilon(w,\sim y) \in \Gamma$, sabiendo que Γ es dominio correspondiente debe de haber algún $v \in T_t$ tal que $\chi(v,x), \chi(v,\sim y) \in \Gamma$, por lo cual como fue probado en el Caso 5 y 6 ($\Rightarrow$) del Lema 5.2, $i(\chi(v,x)) = verdadero$ y $i(\chi(v,\sim y)) = verdadero$, como $i(\chi(v,\sim y)) = verdadero$ se sigue que $s(v) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$ y como por la Definición 4.1 $y \in \sigma(\sim y)$, $y \notin s(v)$, de lo que prosigue que $s(v) \not\supseteq s(y)$ (como también por la definición *i(y)*, $y \in s(y)$) determinando que $i(\chi(v,y)) = falso$, no obstante, v satisface la premisa de la hipótesis pero contradice su consecuencia, por lo que necesariamente no puede ser que $\neg A(x,y) \notin \Gamma$ y entonces $A(x,y) \in \Gamma$. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 7.1.** $\phi = A(\sim x, \sim y)$**:** $\Rightarrow$: Asumiendo que $A(\sim x, \sim y) \in \Gamma$, y también por reductio que $i(A(\sim x, \sim y)) = falso$, resultaría que hay algún $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z, \sim x)) = verdadero$ y $i(\chi(z, \sim y)) = falso$, de $i(\chi(z, \sim x)) = verdadero$ obtenemos por el Caso 6 ($\Leftarrow$) del Lema 5.2 que $\chi(z, \sim x) \in \Gamma$, mientras que de $i(\chi(z, \sim y)) = falso$ tenemos que $s(z) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$, lo que implica que hay algún $t \in T_t$ tal que $t \in s(z)$ y $t \in \sigma(\sim y)$, y por la Definición 4.1, $\chi(z,t), \chi(t,y) \in \Gamma$ y $\chi(z,y) \in \Gamma$ prosigue por *(TF)* y dada la consistencia maximal de Γ (Theorem 2.1.5), $\chi(z, \sim y) \notin \Gamma$ por lo cual $\chi(z, \sim x) \nvdash \chi(z, \sim y)$, significando por *(AU-I)* que $A(\sim x, \sim y) \notin \Gamma$ y de nuevo, por maximalidad $\neg A(\sim x, \sim y) \in \Gamma$ lo que contradice el Teorema 3.5 en sí mismo, de esta manera, no puede ser que $i(A(\sim x, \sim y)) = falso$, por lo cual $i(A(\sim x, \sim y)) = verdadero$. $\Leftarrow$: Asumiendo que para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z, \sim x)) = verdadero$, es el caso que $i(\chi(z, \sim y)) = verdadero$, sin embargo si asumimos por reductio que $A(\sim x, \sim y) \notin \Gamma$, tendremos por la maximalidad de Γ que $\neg A(\sim x, \sim y) \in \Gamma$ de lo que se seguiría por *(EK2)* que $I(\sim x, y) \in \Gamma$ y por *(P-E)* para algún $w \in T_u \varepsilon(w, \sim x), \varepsilon(w,y) \in \Gamma$, sabiendo que Γ es dominio correspondiente, debe de haber algún $v \in T_t$ tal que $\chi(v, \sim x), \chi(v,y) \in \Gamma$, entonces como fue probado en el Caso 5 y 6 ($\Rightarrow$) del Lema 5.2, $i(\chi(v, \sim x)) = verdadero$ y $i(\chi(v,y)) = verdadero$, como $i(\chi(v,y)) = verdadero$ prosigue que $s(v) \supseteq s(y)$ y $\sigma(v) \supseteq \sigma(y)$ y como por la Definición 4.1 $y \in s(y)$, $y \in s(v)$, también por la definición de $i(\sim y)$, $y \in \sigma(\sim y)$ resultando en $s(v) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$ determinando que $i(\chi(v, \sim y)) = falso$, no obstante, v satisface la premisa de la hipótesis pero contradice su consecuencia, por lo cual necesariamente no podemos tener que $\neg A(\sim x, \sim y) \notin \Gamma$ y $A(\sim x, \sim y) \in \Gamma$. Cualquier otra combinación de x y y finitos o infinitos seguiría o el Caso 7 o el Subcaso 7.1 del Lema 5.2, dado que las propiedades semánticas particulares de x finito o infinito en la primera premisa χ no juega algún papel en la prueba, excepto por el valor de verdad en sí. ***Q.E.D.***

Caso 8. $\neg I(x,y) \in \Gamma$ sii para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$, *es el caso* que $i(\chi(z,y)) = falso$**:** $\Rightarrow$: Asumiendo que $\neg I(x,y) \in \Gamma$, sabemos por la Definición 4.1 que $y \in \sigma(x)$, y como para cualquier $z \in T_t$ tal que $\chi(z,x) \in \Gamma$, se da por el Caso 5 ($\Rightarrow$) del Lema 5.2 que $s(z) \supseteq s(x)$ y $\sigma(z) \supseteq \sigma(x)$, significando transitivamente que $y \in \sigma(z)$ y como por la definición de *i(z),* $s(z) \cap \sigma(z) = \varnothing$ por lo cual $y \notin s(z)$ no obstante, por la definición de *i(y),* $y \in s(y)$, lo que implica que $s(z) \not\supseteq s(y)$ resultando en $i(\chi(z,y)) = falso$. $\Leftarrow$: Asumiendo que para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z,x)) = verdadero$, es el caso que $i(\chi(z,y)) = falso$, tenemos por el Caso 5 ($\Leftarrow$) del Lema 5.2 que $\chi(z,x) \in \Gamma$, y por otro lado de $i(\chi(z,y)) = falso$, tenemos que, o $s(z) \not\supseteq s(y)$ o $\sigma(z) \not\supseteq \sigma(y)$, si $s(z) \not\supseteq s(y)$ habría algún $t \in T_t$ tal que $t \in s(y)$ pero $t \notin s(z)$, significando por la Definición 4.1 que $\chi(y,t) \in \Gamma$ pero $\chi(z,t) \notin \Gamma$, por tanto por la maximalidad de Γ (Teorema 3.5), $\chi(z, \sim t) \in \Gamma$ y como fue probado en el Caso 6 ($\Rightarrow$) Lema 5.2, $s(z) \cap \sigma(\sim t) = \varnothing$ y como por la definición de $i(\sim y)$ de $\chi(y,t) \in \Gamma$ prosigue que $y \in \sigma(\sim t)$, así que necesariamente $y \notin s(z)$ resulta en que $\chi(z,y) \notin \Gamma$ y de nuevo por maximalidad $\chi(z, \sim y) \in \Gamma$, sin embargo si $\sigma(z) \not\supseteq \sigma(y)$ habría algún $t \in T_t$ tal que $t \in \sigma(y)$ pero $t \notin \sigma(z)$ significando que $\neg I(y,t) \in \Gamma$ y de nuevo por maximalidad, $I(z,t) \in \Gamma$ de lo que sigue por *(PS4)* $\neg A(z,y) \in \Gamma$ y aplicando *(EK2)* obtenemos que $I(z, \sim y) \in \Gamma$, entonces usando *(P-E)* tenemos que hay algún $w \in T_t$ tal que $\varepsilon(w,z), \varepsilon(w, \sim y) \in \Gamma$, y consecuentemente por la correspondencia de dominios de Γ (Teorema 3.4) hay algún $v \in T_t$ tal que $\chi(v,z), \chi(v, \sim y) \in \Gamma$, de $\chi(v,z)$ y la definición de *i(z),* $z \in s(v)$ y de $\chi(v, \sim y)$ junto al Caso 6 ($\Rightarrow$) del Lema 5.2, $s(v) \cap \sigma(\sim y) = \varnothing$ y como $z \in s(v)$, $z \notin \sigma(\sim y)$ así que por la definición de $i(\sim y)$, $\chi(z,y) \notin \Gamma$ y por maximalidad, $\chi(z, \sim y) \in \Gamma$ por lo tanto, tenemos en cualquier caso que $\chi(z,x) \vdash \chi(z, \sim y)$ para cualquier substitución de z que satisface a $\chi(z,x)$, implicando por *(UA-I)* $A(x, \sim y) \in \Gamma$ y aplicando *(EK3)* tenemos que $\neg I(x,y) \in \Gamma$. ***Q.E.D.***

- **Subcaso 8.1.** $\phi = \neg I(\sim x, \sim y)$**:** $\Rightarrow$: Asumiendo que $\neg I(\sim x, \sim y) \in \Gamma$, pero también asumiendo por reductio que hay algún $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z, \sim x)) = verdadero$ y $i(\chi(z, \sim y)) = verdadero$, y consecuentemente por el Caso 5 y 6 ($\Rightarrow$) del Lema 5.2, $\chi(z, \sim x), \chi(z, \sim y) \in \Gamma$ y por consistencia maximal (Teorema 3.5) $\chi(z,y) \notin \Gamma$, por lo que tenemos que $\chi(z, \sim x) \nvdash \chi(z,y)$ y por *(AU-I),* $A(\sim x, y) \notin \Gamma$ así que de nuevo por maximalidad $\neg A(\sim x, y) \in \Gamma$ y por medio de *(EK2)* $I(\sim x, \sim y) \in \Gamma$, lo que contradice la consistencia maximal de Γ en sí, así que necesariamente para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z, \sim x)) = verdadero$, y $i(\chi(z, \sim y)) = falso$ es el caso[82]. $\Leftarrow$:

[82]Este método de prueba para el lado$\Rightarrow$ funcionaría independientemente de que x o y sea finito o infinito, ya que no depende de ninguna propiedad particular de la estructura semántica de la versión finita o infinita de las sentencias χ, solo su valor de verdad, mientras que el método del

Asumiendo que para cualquier $z \in T_t$ tal que $i(\chi(z, \sim x)) = verdadero$, y $i(\chi(z, \sim y)) = falso$ es el caso, tenemos por un lado por el Caso 6 ($\Leftarrow$) del Lema 5.2 que $\chi(z, \sim x) \in \Gamma$ de $i(\chi(z, \sim x)) = verdadero$, pero por el otro lado de $i(\chi(z, \sim y)) = falso$ tenemos que $s(z) \cap \sigma(\sim y) \neq \varnothing$, significando que hay algún $t \in T_t$ tal que $t \in s(z)$ y $t \in \sigma(\sim y)$, lo que implica que $\chi(z,t), \chi(t,y) \in \Gamma$ por lo que aplicando *(TF)* obtenemos que $\chi(z,y) \in \Gamma$, prosigue entonces que $\chi(z, \sim x) \vdash \chi(z,y)$ para cualquier substitución de z que satisfaga $\chi(z, \sim x)$, por lo cual usando *(UA-I)* resulta $A(\sim x, y) \in \Gamma$ y aplicando *(EK3)* tenemos que $\neg I(\sim x, \sim y) \in \Gamma$. Es fácil observar que para cualquier combinación de x y y finitos o infinitos, el lado $\Rightarrow$ se mantendría sin cambios (ver nota 82), mientras que el lado $\Leftarrow$ seguiría al Caso 8 o el Subcaso 8.1 del Lema 5.2 dependiendo de si y es finito o no, ya que las propiedades semánticas de las sentencias con x finito o infinito no juegan un papel directo en la prueba. ***Q.E.D.***

5.3. Teorema 5.3: Completitud

Teniendo que Γ denote un conjunto arbitrario maximalmente consistente con la propiedad de correspondencia de dominios y $\mathfrak{A}$, un modelo como en la Definición 4.2 tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ con i como su función de interpretación mixta como en la Definición 4.1. Entonces, si $\Gamma \models_i \phi$, $\Gamma \vdash \phi$.

Prueba.

Para cualquier $(\mathfrak{A}, i)$ tal que $\mathfrak{A} \models_i \Gamma$, si $\mathfrak{A} \models_i \gamma$ para algún $\gamma \in \mathcal{L}$, entonces $\Gamma \cup \{C(\gamma)\}$ es inconsistente, de otra manera, habría otro par $(\mathfrak{B}, i')$ con siendo *i'* siendo una interpretación mixta, tal que $\mathfrak{B} \models_{i'} \Gamma$ y $\mathfrak{B} \models_{i'} C(\gamma)$, pero por el Lema 5.2 si $i(C(\gamma)) = verdadero$, $C(\gamma) \in \Gamma$ y por la consistencia maximal de Γ, $\gamma \notin \Gamma$, pero entonces no puede ser que $\mathfrak{A} \models \gamma$ (por el mismo lema), contradiciendo la hipótesis, determinando a $(\mathfrak{B}, i')$ como imposible. Sabiendo que $\Gamma \cup \{C(\gamma)\}$ es inconsistente, por deducción indirecta (Definición 3.2) sabemos que debe de haber algún $\Delta, \Delta' \subseteq \Gamma$ y un $\delta \in \mathcal{L}$ tal que $\Delta \cup \{C(g)\} \vdash \delta$ y $\Delta' \cup \{C(g)\} \vdash C(\delta)$, por lo tanto $\Delta \cup \Delta' \vdash \gamma$ y como $\Delta, \Delta' \subseteq \Gamma$, $\Gamma \vdash \gamma$ si $\mathfrak{A} \models_i \gamma$. ***Q.E.D.***

Caso 8 del Lema 5.2 solo funcionaria para x finito y requiere modificaciones mínimas si y es infinito.

Conclusiones

Para finalizar la investigación y exposición aquí realizada, solamente nos resta listar las conclusiones más sobresalientes que han surgido del seguimiento de nuestros planteamientos:

- La visión de la lógica como el estudio de conjunto de sentencias validos, o similarmente, de la generación de «teorías lógicas» por medio de la composición de sentencias complejas a través de operadores sobre un conjunto axiomático, no es suficiente para caracterizar apropiadamente el proceder lógico mismo ni su función en las estructuras intelectuales. Una concepción de la lógica centrada en la sistematización de inferencias válidas, es decir, como sistemas de operadores de cierre de consecuencia sobre lenguajes formales, puede representar apropiadamente la naturaleza común de los distintos procedimientos inferenciales metódicos que se ejecutan en los esfuerzos intelectuales variados; si a esto se le une una teoría semántica como asignación de universos de objetos a los términos de dicha clase de sistema con una función de interpretación de sentencias a valores cognoscitivamente significativos adecuados, se obtiene la herramienta más segura para la inferencia de conocimiento valido sobre la correlación ontológica del universo en cuestión, siendo esta la relación fundamental entre lógica, epistemología y ontología.

- La silogística de Aristóteles representa el primer sistema lógico como tal con el que contamos con registro histórico, si bien existen ejercicios anteriores en las discursividades de varias disciplinas, ninguno se había pretendido como un examen en sí de la inferencia en general ni tampoco la sistematización de alguna noción de consecuencia lógica, esta intención sin embargo es explicita en los *Primeros Analíticos*; este reconocimiento del Estagirita había sido puesto en duda por el cambio sustancial que tuvo la perspectiva de la lógica a finales del siglo XIX influenciada por los avances en las construcciones abstractas de los métodos matemáticos, sin embargo, una vez esta nueva noción alcanzó un nivel suficientemente flexible en la formalización no solo de los lenguajes, sino de los procesos inferenciales en sí, se hizo patente que mucho de la caracterización resultante de «sistema lógico» en esta composición estaba ya inherente en la perspectiva aristotélica, si bien en menor grado formal.

- Dentro de la teoría general de Aristóteles, la lógica no es herramienta de puro análisis retórico, sino que es el medio esencial para ejecutar activamente la comprensión *esencial* de un fenómeno en lo que el denomina la «prueba epistemónica», esta parte de ejecutar cuatro preguntas fundamentales cuyo proceso de respuesta inicia en las determinaciones de la percepción sensorial que constituyen al fenómeno como tal y los «puntos de partida» que el proceso de inducción *epagógico* ha construido de antemano, desde estos la respuesta es inferida por la aplicación silogística como único medio seguro, por un lado, la correlación causal de fenómenos (como *medium demostrationis*) que producen al que esta en investigación, y por el otro su *ousía* como determinación de la «materia» (sensible o cognoscitiva) que tiene la potencialidad de ser modificada para ser constituida en la «forma» del fenómeno percibido originalmente, es decir, *su unidad quidditativa*; este es el verdadero conocimiento de causa y principio para el cual resulta fundamental el silógismo, demarcando de nuevo la esencial relación que posee la lógica, epistemología y ontología.

- Es posible crear un interpretación formal que contemple más aspectos de la silogística tal como es expuesta por Aristóteles, en particular, una que pueda integrar las pruebas por *ectesis* tal como este las explica y también *términos infinitos.* Esto requiere salirse de los cánones bohecianos que usualmente han puesto fuertes limites a la experimentación interpretativa, en nuestro caso abandonando dichos prejuicios, añadimos dos tipos nuevos de proposiciones, *particulares concretas* que son análogas a las *sentencias incompletas* mencionadas en los Analíticos Posteriores y para su funcionamiento se integra un segundo conjunto de términos *atómicos*, así como otro tipo de proposiciones capaz de aseverar sobre términos individuales i. e. *particulares inmanentes*, adicionalmente estos dos tipos de proposiciones aseguran más eficiencia computacional al respecto de constituir las proposiciones clásicas con términos finitos e infinitos. El sistema resultante no solo puede ejecutar todas las derivaciones silogísticas directas e *indirectas* tanto para términos finitos como infinitos, sino que al añadir una propiedad de *correspondencia de dominios* es posible junto a la regla de *introducción de la afirmación universal* reconstruir formalmente el proceso de la *epagogé* otorgando aún más posibilidades computacionales y prácticas a nuestro sistema.

- Utilizando la idea de la *codificación s-σ* de Leibniz, y teniendo dos universos de objetos arbitrarios pero concretamente diferentes, es posible construir un modelo semántico $\mathfrak{A}$ para el lenguaje formal representado por medio del tuplo $(\mathcal{O}, a, i)$ donde $\mathcal{O} = 2^A \times 2^A$ para un universo de conjunto A (compuesto por dos conjunto de entidades *distintos* en cualquier manera particular), a siendo una función de asignación que nombra a uno de los tipos de entidades con términos de T_u (es decir, son asignados como «concretos») y al otro con términos de T_t (es decir, como *inmanentes*), e i siendo la función de interpretación que para cada término de $T_u \cup T_t$ que nombra elementos de A asigna un par ordenado s-σ según definido en este trabajo (con el conjunto s entendiendose con lo que algo «positivamente es» y σ lo que «positivamente *no* es») y adicionalmente para todo término de $x \in T_t$ también asigna el par $(s(\sim x), \sigma(\sim x))$, es decir, *el término infinito análogo*, y por último, con i asignado los valores de *verdadero* o *falso* según la satisfacción semántica establecida en términos de las relaciones clásicas de la teoría de conjuntos, entre los elementos del par ordenado identificado con los términos de una proposición, según se ha definido en este mismo trabajo. Esta interpretación formaliza con alto grado de adecuación las intuiciones fundamentales del ὑπάρχειν aristotélico con los que expresa sus proposiciones, así, el que «el término *'x'* se disponga (ὑπάρχειν) en el término *'y'*», puede ser entendida con alta fidelidad como la pertenencia del conjunto de propiedades de un término en el otro, por otro lado «el término *'x' no* se disponga (μὴ ὑπάρχειν) en el término *'y'*» se entiende para un término *concreto* 'x' como que todo lo que esta en el conjunto *'s(x)'* pertenece a las cosas que *no son 'y'* $(s(\sim y))$ y *al menos una cosa que es 'y' esta en las cosas que 'x' no puede ser* (puesto que al ser 'x' un elemento concreto, si *no es* cierto término es porque es explicito que no puede serlo) mientras que si *'x'* es *inmanente,* se entiende que la intersección del conjunto *'s(x)'* con el '$\sigma(\sim y)$' es vacía, puesto que en '$\sigma(\sim y)$' están todos los términos finitos inmanentes que son (ὑπάρχειν) y (y por tanto no son $\sim y$*),* implicando que *'x'* no tiene todas las notas esenciales de 'y' ni nada que las posea, estableciendo estas intuiciones básicas de las proposiciones ε y χ, se pueden constituir por cuantificación particular y universal las proposiciones canónicas bohecianas, satisfaciendo la semántica silogística.

- Es posible hacer una definición precisa de sentencias *contrarías* $(\neg\phi)$ en nuestro sistema, de tal manera que junto a la propiedad de correspondencia de dominios como forma de *saturación* en nuestro lenguaje, se pueda constituir un algoritmo que puede extender a cualquier conjunto proposicional consistente hasta uno *saturado maximalmente consistente* como precondición para una *prueba estilo Henkin de completitud débil*. De esta manera, es posible probar que cualquier conjunto proposicional consistente en nuestro lenguaje aristotélico $\mathcal{L}$ junto al modelo $\mathfrak{A}$ que es igual al tuplo $(\mathcal{O}, a, i)$ (entendidos como en el punto anterior, o en general, como establecidos en el trabajo) *es solido y completo al respecto del lenguaje* $\mathcal{L}$, es decir, *que toda inferencia generada por el operador* $\Phi_{\mathcal{L}}$ *desde un secuente del conjunto proposicional expresa una relación «real» de objetos de* $\mathfrak{A}$, *y toda relación real de objetos de* $\mathfrak{A}$ *es inferible por las reglas de* $\Phi_{\mathcal{L}}$. Esto determina las propiedades lógicas que se sabe con certeza necesaria y deductiva que posee el sistema de inferencia formal que ha sido construido en este trabajo.

Glosario lógico

Según orden de aparición en la lectura:

1. $\vdash$**- implicación sintáctica**: este símbolo representa la «derivabilidad» de un secuente (es decir, un conjunto de proposiciones, posiblemente vacío, en cuyo caso solo implica que es derivable en general del conjunto sentencial con el que se trabaja) a partir de otro, esto significa que teniendo un conjunto de sentencias inicial es posible obtener otro conjunto dada la aplicación de las reglas de inferencias establecidas en un sistema lógico de inferencia, en el mismo sentido, aparece siempre en la definición misma de las reglas de inferencia como condición general que el antecedente *debe* de ser derivable del conjunto sentencial en cuestión para que la regla sea aplicable (y no que sea cualquier conjunto arbitrario y «externo» de proposiciones; ver la Sección 1, introducción pp. 1-7). Por último, debe de hacerse notar que a diferencia del condicionante material «$\rightarrow$» común en la lógica de primer orden, la implicación sintáctica *no depende* de los valores de sus componentes (por lo que no es un operador), este último establece una *prescripción metalógica* de la relación entre tipos de sentencias según el lenguaje lógico por la cual es posible afirmar como válida una sentencia diferente (*validez prueba-teoretica)*, y de esta manera representa la naturaleza de la inferenciabilidad en un sistema lógico (véase la introducción en la Sección 1, pp. 1-7).

2. **C**(ϕ) **- función de contradicción**: Esta función tiene por argumento cualquier tipo de *sentencia* y devuelve su «contradictoria», dicha noción de «contradicción» es metalingüística y no es usada internamente en las computaciones mismas del sistema, pero son necesarias para definir las nociones de «deducción indirecta» (ver Definición 3.2, pp. 44-45) y «consistencia» (ver Subsección 1.2, pp. 15-17; también el Teorema 3.5, pp. 49) que hablan *sobre el sistema*, es decir, de propiedades que nosotros usamos metalingüísticamente para hablar de dicho sistema, pero a partir de las cuales podemos disponer límites a la composición de conjuntos sentenciales para que conserven una coherencia epistemológica y/o ontológica útil a los fines teóricos del sistema en cuestión.

3. $$\frac{\vdash \mathbf{A} \qquad \vdash \mathbf{B}}{\mathbf{C}}$$

: Esquema de las reglas de inferencias (en específico, de *deducciónes directas*, ver Definición 3.2) con dos antecedentes, cada uno va acompañado de su *implicación sintáctica* lo que implica que deben de ya encontrarse en el conjunto proposicional Γ o haber sido derivadas anteriormente con un esquema similar de inferencia, naturalmente cada antecedente esta escrito en el lenguaje lógico en cuestión, $\mathcal{L}$. Similarmente, la sentencia derivada C funciona como antecedente válido para una siguiente aplicación de otra regla del lenguaje, ya sea unariamente como único argumento (e.g. como las reglas EK2, EK3 o EK-C en la Subsección 3.1, pp. 39-40) o binariamente conjunto a otra como en el esquema mismo, de esta manera puede extenderse una «rama» más larga que determine una cadena que compondría un *árbol de deducción;* por último, la presencia de «información» al lado representa *«condiciones laterales»* determinando condiciones que los antecedentes deben de cumplir en su forma para poder proceder con la derivación (como en la regla TF, pp. 39).

4. $$\dfrac{\mathbf{X}, \mathbf{C}(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B} \qquad \mathbf{X}, \mathbf{C}(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{C}(\mathbf{B})}{\dfrac{\bot}{\overline{\mathrm{A}}}}$$

: esquema de inferencia de *deducción indirecta* (véase Definición 3.2, pp. 44), esta es la famosa prueba *per impossibile* utilizada por Aristóteles a lo largo de los *Primeros Analíticos*, lo que el esquema indica es que si de asumir la proposición contradictoria de alguna otra, podemos llegar a derivar sintácticamente otra sentencia y su opuesto (o simplemente, derivar la sentencia contradictoria a la original), caemos en una contradicción, y necesariamente debe de seguirse la proposición contraria a la original.

5. $\models$**- implicación semántica**: este símbolo representa el hecho de que a partir de la «verdad» de un secuente como antecedente se sigue la «verdad» del consecuente, la «verdad» en este contexto se entiende a partir de la teoría de modelos donde una sentencia es «verdadera» cuando los referentes de los términos de la sentencia en un universo de discurso ontológicamente determinado se encuentran dispuestos de la manera que denota la definición metalógica del operador, función o relación (ver Subsección 1.2, pp. 9-15). Similar a la implicación sintáctica, la implicación semántica no es un operador, pues no depende del valor de las sentencias antecedentes para computar el de las consecuentes, sino que su satisfacción es meramente fáctica, la relación que establece la implicación semántica entre ambos secuentes es

satisfecha siempre que se verifique (directamente o por contradicción) que el consecuente es «verdadero» (como descrito anteriormente) siempre que el antecedente sea «verdadero».

6. $\mathcal{L}$: en el contexto de esta indagación la letra $\mathcal{L}$ (L con fuente *eu*script) simboliza el lenguaje lógico aristotélico según los operadores y términos descritos en pp. 37 (siendo también la costumbre usual usar esta letra en los textos lógicos para representar sus respectivos lenguajes lógicos), de manera más formal y específica, $\mathcal{L}$ es el conjunto de toda posible sentencia generada en n universos infinitos de variables según la cantidad n de tipos de variables (en nuestro caso dos universos infinitos de variables, uno de variables atómicas y otro de variables aristotélicas; ver Subsección 3.1) por los distintos operadores, funciones o relaciones del lenguaje sobre dichas variables, de esta manera, todo conjunto de sentencias del lenguaje sobre variables arbitrarias es entendido como un subconjunto de $\mathcal{L}$ con una función de substitución estructural de un subconjunto arbitrario de los universos de variables de $\mathcal{L}$ al conjunto de variables del conjunto sentencial en cuestión.

7. Φ: en el contexto de este trabajo usamos a Φ para representar el *operador de cierre de consecuencia del lenguaje aristotélico* $\mathcal{L}$*,* es decir, el mapa funcional desde un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}$ hacia un nuevo conjunto de sentencias de $\mathcal{L}$ que contiene a todas las sentencias iniciales, así como todas las sentencias derivadas por la aplicación de todas las reglas de inferencias de sentencias aristotélicas posibles (listadas en pp. 38-40), es decir, tal que existan sentencias que satisfagan las formas y relaciones de sus atencedentes; otra manera de entenderlo, es que el operador de cierre de consecuencia es el conjunto de las reglas de inferencias que define la relación de inferencia válidas de un lenguaje lógico. Este operador posee las propiedades de ser: *reflexivo, monótono, indempotente* y *estructural* (revisar Subsección 1.1, pp. 8 para la definición de dichas propiedades).

8. $\mathbf{T_u}$: en el contexto de este trabajo el símbolo T_u es usado para representar al conjunto de las variables/términos atómicos, en circunstancias puramente sintácticas las únicas particularidades de los elementos de T_u (que usualmente pero *no exclusivamente* representamos como u_i) es que son los únicos que pueden ser el primer argumento de la función proposicional *epsilon* (ε) y naturalmente son *distintos* de los elementos de T_t es decir, $T_u \cap T_t = \varnothing$ (ver Subsección 3.1, pp. 35-37). Conceptualmente hablando, los términos «atómicos» representan propiamente *entidades*, es decir, individuales intuibles

en alguna manera (e. g. inteligiblemente como los objetos matemáticos u ostensivamente como los objetos espacio-temporales que pueden interactuar con nuestros sentidos), su pertenencia al conjunto T_u solo depende de esta propiedad de ser *individualmente intuibles* y no de la modalidad particular de esta intuición, por lo que se consideran fundamentalmente indistintos hasta el momento que las funciones proposicionales les asignan propiedades a cualquiera de estos por medio de la función ε junto a un término aristotélico como segundo argumento (ver Subsección 2.2), sin embargo, se establece una ontología mínima por medio de la teoría de conjuntos y la notación s-σ que ejecuta una interpretación de este proceso de *distinción,* esta se hace explicita en la definición semántica de su función de interpretación (en las Definiciones 4.1 y 4.2 pp. 54-56).

9. $\mathbf{T_t}$: en el contexto de este trabajo T_t es usado para representar el conjunto de variables/términos aristotélicos, en circunstancias puramente sintácticas la única particularidad de los elementos de T_t (que usualmente pero no *exclusivamente* representamos como t_i) es que nunca pueden ser el primer argumento de la función proposicional ε pero son el único argumento posible en todos los demás casos y funciones (modificado apropiadamente por su negación ver elemento *7* en este glosario*)*, además, todos los elementos de T_t son distintos a los de T_u, es decir, $T_u \cap T_t = \varnothing$. Conceptualmente hablando no se puede establecer un significado *estricto* de lo que es ser un «término aristotélico», la interpretación con menos compromisos ontológicos y epistemológicos sería simplemente «propiedad» o «combinación de propiedades» en el sentido de «identificador(es) intuible(s) subsistente(s) al objeto en cuestión», donde dicho(s) identificador(es) puede(n) ser sensible(s) o inteligible(s) (excepto por el identificador mismo de «existir [ostensivamente]» que es el propio de los elementos de T_u), mientras que más adecuado a las intenciones de esta indagación sería inclinarnos por una interpretación metafísica y filológicamente adecuada y análoga a la noción de *ousía* en Aristóteles (ver la Subsección 2.3, pp. 27-34); computacionalmente hablando, la interpretación semántica usada en 4.1 debería de ser compatible con ambas nociones y la mayoría de nociones intermedias.

10. $\sim$ **- negación de términos**: este es uno de los dos operadores *monádicos* del lenguaje $\mathcal{L}$ (es decir, que solo utilizan un argumento), y es aplicado sobre cualquier elemento arbitrario de T_t cuando esta en la posición de argumento en una función proposicional díadica (de dos argumentos, es decir,

de alguna de los cuatro operadores/funciones que constituyen propiamente sentencias) *excepto como primer argumento de una función* χ y puede ser entendido como una *negación de términos*, lingüísticamente hablando, transforma una afirmación de la forma «u_i/t_i es un t_j» en la afirmación «u_i/t_i es un *no* t_j» (similarmente, si se aplica sobre el primer término en una función sentencial compatible se convierte en «el/los *no* t_i es/son un t_j»), semánticamente hablando y dentro de la interpretación aristotélica se entiende como la transformación de un término *finito* en uno *infinito* (ver nota 59 en pp. 35), lo que significa que el «sujeto» (i. e. primer argumento) de la sentencia es *cualquier cosa menos el término en cuestión o cualquier otra cosa que sea dicho término* (donde dichas «cosas» son propiedades o conjuntos de propiedades, o alguna noción de *ousías*; véase la Subsección 4.1, pp. 54 para su construcción semántica computacional).

11. $\neg$ **- negación sentencial**: este es el segundo operador monádico del lenguaje $\mathcal{L}$ y es aplicado sobre funciones sentenciales, específicamente sobre las funciones I y A (pues no es aplicable a las funciones ε y χ) convirtiéndolas en sus opuestos canónicos según el cuadro de Bohecio, es decir, convierte a la sentencia particular afirmativa en una universal negativa ($\neg I$) lingüísticamente significando «ningún [*no*]t_i es un [*no*]t_j» (se agrega el posible «no» en el posible caso de la presencia del operador $\sim$), y a la universal afirmativa en una particular negativa ($\neg A$) significando lingüísticamente «algún [*no*] t_i no es un [*no*]t_j». La interpretación semántica concreta de este tipo de sentencias «negadas» puede ser vista en la Subsección 4.1, dicha interpretación depende de la *no-satisfacción intensional* de los términos de la sentencia I en vez de extensional (la dependencia pasa a las sentencias χ y únicamente al universo T_t de «conjuntos de propiedades» y no de sentencias ε sobre el universo de atómicos T_u), mientras que una conversión inversa de intensionalidad a extensionalidad pasa con la *no-satisfacción* de A (véase la Definición 4.1) aunque como dicta la propiedad de saturación por medio de correspondencia de dominios (Subsección 3.4, pp. 47-49), hay una relación entre la existencia de individuales que poseen ciertas propiedades y la reificación de nuevas relaciones intensionales, lo que permite conservar la solidez y completitud del modelo (Sección 5, pp. 56-77).

12. $\varepsilon(\mathbf{u_i}, \mathbf{t_j})$ **- sentencia atómica incompleta**: la función[83] proposicional que

[83]Los operadores lógicos son formalmente, funciones, en tanto toman argumentos y retornan *sentencias compuestas* a partir de ellos; utilizamos al respecto de las proposiciones su representa-

relaciona términos atómicos con aristotélicos, teniendo el significado lingüístico de «la entidad u_i es un [*no*] t_j», conceptualmente hablando se toma una interpretación aristotélica, es decir que la entidad concreta que es el primer argumento posee subsistentemente al término (finito o infinito) que es el segundo argumento. Se titula incompleta porque siguiendo a Aristóteles, no es la afirmación de una ousía en otra (como en las proposiciones bohecianas canónicas) sino de algo *indefinido* en lo cual se percibe cierta propiedad (ver la Subsección 2.2, en particular pp. 23, también la Subsección 3.1). Por otro lado, la satisfacción semántica de esta sentencia es realizada cuando dentro del conjunto s del primer argumento, se encuentran todos los elementos del conjunto s del segundo, y análogamente para el conjunto σ (lo cual es trivialmente satisfecho si ya esta la sentencia ε con ambos argumentos; ver *16 y 17* del glosario para los significados de s y σ, y las Subsecciones 4.1 y 4.2 para su aplicación en este sistema); si el segundo argumento aparece como infinito, basta conque no aparezca el segundo argumento dentro del conjunto s del primero, ni ninguna término que dentro de su conjunto s lo contenga, y por otro lado, que haya al menos un término que *contenga* al segundo término en su conjunto s dentro del conjunto σ del primer argumento.

13. $\chi(\mathbf{t_i}, \mathbf{t_j})$ **- sentencia aristotélica incompleta**: la función proposicional que relaciona dos términos aristotélicos *específica e individualmente* (por oposición a las sentencias I y A que pueden ser satisfechas por alguno o todos los términos aristotélicos que estén relacionados por medio de una sentencia χ a cada *término argumento* de la sentencia actual) y debe de ser entendida como «t_i es un [*no*] t_j», interpretado aristotélicamente como que un conjunto de propiedades (posiblemente *intensionado hasta el concepto de ousía*, ver Subsección 2.3 para las implicaciones metafísicas de dicha interpretación) contiene a otro, o en el caso de que el segundo argumento sea infinito (el primero solo puede ser finito), que no contiene ni al término mismo, ni a ningún conjunto de propiedades que lo contenga (ver la definición semántica en la Subsección 4.1, pp. 54). Es de notar que si bien este tipo de función proposicional tiene un comportamiento similar al de las funciones ε para el universo T_t, permitiendo construir orgánicamente sentencias A (ver regla 1, Subsección 3.1, pp. 38), no están *específicamente designadas* en el canon aristotélico a diferencia de las sentencias incompletas ε (aunque naturalmente hay casos donde se hacen afirmaciones entre relaciones individuales

ción como «función» para recalcar el papel de los argumentos.

de géneros y/o ousías específicos a lo largo de la bibliografía de Aristóteles, y no parecen sintacticamente fuera de lugar).

14. $\mathbf{I(t_i,t_j)}$ **- sentencia particular afirmativa**: la función proposicional de $\mathcal{L}$ que relaciona dos términos aristotélicos particularmente pero *indirectamente* (no hace referencia como tal a un término aristotélico concreto que este relacionado por medio de dos sentencias χ a ambos argumentos de la sentencia en cuestión, sino que afirma la existencia indirecta de *alguna entidad concreta* que «es» ambos términos por medio de dos sentencias ε) y debe de ser leída como «hay alguna *entidad* que es [*no*] t_i y [*no*] t_j»; su satisfacción semántica solo requiere que haya al menos un elemento cuyo «nombre» (ver *16* en este glosario) esta en T_u tal que «sea» t_i (por medio de una sentencia ε) y también sea t_j (por medio de otra sentencia ε; ver la Subsección 4.1). Una definición semántica similar se da para las sentencias de tipo $\neg A$.

15. $\mathbf{A(t_i,t_j)}$ **- sentencia universal afirmativa**: la función proposicional de $\mathcal{L}$ que relaciona dos términos aristotélicos *universalmente*, es decir, que para todo término aristotélico que este relacionado con el primer argumento por medio de una sentencia χ, también lo estará con el segundo argumento por medio de otra sentencia χ (incluyendo al primer argumento mismo) y debe de ser leído como «todo lo que es [*no*] t_i es [*no*] t_j» o simplemente «todo [*no*] t_i es [*no*] t_j», es de notar que si bien de acuerdo a la regla *1 (UA-I)* en 3.1 el significado de la sentencia A solamente esta determinado específicamente por los términos aristotélicos, la regla *3* (*EK1*) lo extiende a los términos concretos (en tanto los concretos siempre aparecen relacionados con al menos un término aristotélico, y si este es el primer argumento de A, automáticamente participaran del segundo argumento); la noción semántica no es particularmente distinta, solo integrando la idea de implicación semántica y determina que A es semánticamente *verdadera* si para todo término que satisfaga semánticamente la función χ con el primer argumento, también satisface semánticamente la función χ con el segundo argumento (ver la Subsección 4.1).

16. $\mathbf{a(x)}$ **- función de asignación**: esta función establece un mapa entre los elementos de un universo de objetos de cualquier tipo y algún universo de términos del sistema sintáctico de un lenguaje lógico, esto usualmente se entiende como *asignar nombres de un lenguaje lógico a las entidades de un universo ontológico*, esta clase de funciones no solo permite hacer explicita la relación que un modelo semántico tiene con cierto tipos de objetos, sino

que, si en una aplicación concreta se ha sido suficientemente explicito en la asignación de un nombre a un objeto «tangible», los resultados computacionales del sistema lógico sobre el nombre, debe de traducirse en la inferencia de una relación actual o potencial sobre el objeto en cuestión; en nuestro sistema en particular existen dos tipos de funciones de asignación, la asignación de objetos atómicos $a_u(x)$ y la función de asignación de elementos del conjunto potencia generado sobre propiedades elementales $a_t(x)$ (Subsección 4.1, pp. 53-54).

17. **i(x) - función de interpretación**: la función de interpretación establece el mapa entre los elementos de un sistema lógico (términos, constantes, funciones y relaciones) y elementos particulares o sistemas de relaciones entre elementos del o los universos de discursos que están dispuestos como denotación posible como *modelo*, la función de asignación es un subtipo de función de interpretación específica para la asignación de términos (cuando estos mismos no son sentencias), mientras que las funciones sentenciales son mapeados a los valores de verdad a utilizar, las condiciones de dicho mapa veritativo pueden ser que la función sentencial en cuestión tenga sus argumentos con un mapa bien establecido por la misma función de interpretación, y que dichos argumentos se encuentren en la relación establecida como definición metalingüística para la función sentencial, entre otras posibilidades si se trata de *n>1* posibles valores de verdad[84]; si el sistema tiene otra clase de elementos como funciones o relaciones no propiamente sentenciales, se establecen mapas específicados entre estos y elementos que poseen correlaciones determinadas, o las correlaciones mismas como objetos. En el caso de nuestro sistema, además de la función de asignación (de objetos a nombres), existen otras cuatro funciones de interpretación, la primera que tiene por argumento *nombres* de términos atómicos, y retorna un par ordenado de conjuntos $(s(x), \sigma(x))$, y análogamente para los términos aristotélicos finitos y los términos aristotélicos infinitos, y el último, que asigna el valor de *verdadero* o *falso* a las funciones sentencias ε, χ, I, $\neg A$, A, $\neg I$ según las condiciones especificadas (ver Definición 4.1, pp. 54-55).

18. **s(x)**: es una mitad del par ordenado retornado por la función de interpretación *i(x)* cuando su argumento es un término atómico o aristotélico, representa todas las cosas que algo «es», o de manera sintáctica-computacional,

[84]En los sistemas binarios, la «falsedad» usualmente se asume como falta de satisfacción del valor de verdad «verdadero» más que como un valor de verdad concreto.

las funciones ε sin términos infinitos que satisface el posible concreto que es argumento de *i(x)* o si es un término aristotélico, las funciones tipo χ que satisface, aristotélicamente hablando, en ambos casos este conjunto representa el cúmulo de propiedades que define el «concepto» del término que esta como argumento, esto puede ser entendido como el «género» extremo o «especie», mientras que en el objeto análogo al que hace referencia sería propiamente su *ousía* como *unidad quidditativa* (véase la Subsección 2.3, pp. 27-34); en el caso de los términos *infinitos*, hablamos que lo que es, es todas aquellas cosas que no contienen en su definición (como género) el término en cuestión que esta siendo negado, por tanto, todo el *resto de términos aristotélicos* que no poseen a dicho término constituyen lo que es el *no término* o *término infinito*.

19. $\sigma(\mathbf{x})$: es la otra mitad del par ordenado retornado por la función de interpretación *i(x)* cuando su argumento es un término atómico o aristotélico, representa todas las cosas que algo *«necesariamente* no es», la palabra «necesariamente» debe de ser entendida en el sentido de imposibilidad conceptual y no en nociones modales más extensas, esto se representa en el caso de los términos no infinitos, por medio de las sentencias ε con su segundo argumento infinito (que significan que ha sido determinado *positivamente* que algo *no es*) cuando x es un terminó atómico, y por medio de las sentencias $\neg I$ para los términos aristotélicos, pues el grado universal de la sentencia determina la incompatibilidad intensional de los términos que funcionan como argumentos de la proposición; por otro lado, para los términos infinitos, naturalmente lo que «necesariamente no es» intensionalmente se entenderá como todas aquellos términos aristotélicos que posean en su «definición» (o género más adecuadamente al Estagirita) al término que esta siendo «negado», es decir, el conjunto de todas aquellas cosas que poseen en su definición al término (incluyendo al término mismo; ver la Definición 4.1 en pp. 54).

20. $\models_{\mathbf{i}} \phi$ **y** $\mathbf{i}(\phi) =$ **verdadero**: ambas estructuras representan la misma idea, la primera, $\models_i \phi$ indica que la sentencia ϕ es semánticamente satisfecha bajo la función de interpretación i, es decir, que en el universo de discurso, con las asignaciones e interpretaciones definidas, se encuentra un conjunto de objetos que satisface las condiciones de *verdad* de ϕ. $i(\phi) = verdadero$ por otro lado, hace énfasis en que el valor de verdad retornado por la función de interpretación i con la sentencia ϕ como argumento es verdadero, es de-

cir, de que se ha encontrado un conjunto de objetos o relaciones de objetos que satisface las condiciones semánticas de ϕ; estas formas son usadas especialmente a lo largo de las pruebas de la Sección 5 (pp. 56-76) dado que parten de presumir el valor de verdad en el sentido semántico (de acuerdo a las nociones en la Subsección 1.2, pp. 9-15) de la sentencia por si misma, y no necesariamente en relación con el conjunto sentencial, para luego probar que es necesario que dicha relación debe de existir, es decir, que es satisfecha semánticamente por el conjunto Γ definido.

Referencias

[1] Aristóteles (1957). Aristotle's Prior and Posterior analytics (W. D. Ross, Ed.). Harvard University Press.

[2] Aristóteles (1962). Categories, De Interpretione and Prior Analytics (H.P Cook y H. Tredennick, Trad.). Harvard University Press.

[3] Aristóteles (1975). Aristotle's Metaphysics. Vol. 2 (W. D. Ross, Ed.). Oxford University Press.

[4] Aristóteles (1998). Metafísica de Aristóteles (V. G. Yebra, Trad.). Gredos.

[5] Corcoran, J. (1972). Completeness of an ancient logic. *Journal of Symbolyc Logic*, **37**(4), 696-702.

[6] Corcoran, J. (1982). The contemporary relevance of ancient logical theory. En *The philosophical quarterly* 32 (126), pp. 76-86. https://https://doi.org/10.2307/2219004.

[7] Czelakowski, J. (2001). Protoalgebraic logics. Springer.

[8] de Rijk, L. (2002a). Aristotle: semantics and ontology Vol. 1. General Introduction. The Works on Logic. Leiden: Brill.

[9] de Rijk, L. (2002b). Aristotle: semantics and ontology Vol. 2. The Metaphysics. Semantics in Aristotle's Strategy of Argument. Leiden: Brill.

[10] Dummett, M. (1991). Inference and truth. En M. Dummet (Ed.) *The Logical Basis of Metaphysics* (pp. 40-60). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

[11] Gentzen, G. (1969). Investigations into logical deduction. En E. Szabo (Ed.) *The collected papers of Gerhard Gentzen* (pp. 53-67). North-Holland Publishing Company.

[12] Goddard, L. (2000). The inconsistency of Aristotelian logic?. *Australasian journal of philosophy* **78**(4), 434-437. doi:10.1080/00048400012349731

[13] Glashoff, K. (2005). Aristotelian syntax from a computational-combinatorial point of view. *Journal of Logic and Computation,* **15**(6), 949-973.

[14] Glashoff, K. (2011). An intensional Leibniz semantics for Aristotelian Logic. *The Review of Symbolic Logic,* **3(2)**,262-272. doi:10.1017/S1755020309990396.

[15] Henkin, L. (1996). The discovery of my completeness proofs. *Association for Symbolic Logic*, **2**(2), 127-158.

[16] Leibniz, G. W. (1989). Two Studies in the Logical Calculus. En L. Loemker (Ed.) *Philosophical papers and letters* (2da ed., pp. 235-247). Kluwer academic publishers.

[17] Lukasiewicz, J. (1957). Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic. Oxford University Press.

[18] Lukasiewicz, J. (1977). La silogístca de Aristóteles: desde el punto de vista de la lógica formal moderna. Tecnos.

[19] Lukasiewicz, J. (1979). On the history of the logic of propositions. En Lukasiewicz selected works. North Holland Publishing Company (pp. 197- 218).

[20] Martin, J. (1997). Aristotle's natural deduction reconsidered. *History and Philosophy of Logic*, **18**(1), pp. 1-15.

[21] Moravcsik, J. (2004). Logic before Aristotle: development or birth?. En D. Gabbay y J. Woods (Ed.) *Handbook of the History of Logic. Vol 1,* pp. 1-25. Elsevier.

[22] Quine, W. (1949). On decidability and completeness. En *Synthese 7 (6-A)* (pp. 441-446).

[23] Quine, W. (1964). Ontological reduction and the world of numbers. En *The journal of philosophy 61 (7), pp. 209-216.*

[24] Quine, W. (1969). Los métodos de la lógica. Editorial Ariel.

[25] Quine, W. (1977). Filosofía de la lógica. Alianza Editorial.

[26] Quine, W. (1986). Philosophy of logic. Harvard University Press.

[27] Reichenbach, H. (1952). The syllogism revised. *Philosophy of Science **19**(1), pp. 1-16.*

[28] Smith, R. (1983). Completeness of ecthetic syllogistic. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **24,** pp. 224-232.

[29] Tarski, A. (1944). The semantic conception of truth and the foundations of semantics. En *Philosophy and Phenomenological Research* 4 (3), 341-376. https://doi.org/10.2307/2102968

[30] Tarski, A. (1956). The concept of truth in formalized languages. En J. H Woodger (Trad.) *Logic, semantics, metamathematics* (pp. 152-278). Oxford University Press.

[31] Tarski, A. (1977). Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas (3.a ed.). Espasa-Calpe.

[32] Tarski, A. & Tarski, J. (1994). Introduction to logic and to the methodology of the deductive sciences (4.a ed.). Oxford University Press.

[33] Thom, P. (2011). On formalizing the logics of the past. En M. Cameron y J. Marenbon (Ed.) *Methods and Methodologies: Aristotelian logic east and west, 500-1500*, pp. 191-206. Leiden: Brill.

[34] Zach, R. (2022). Sets, logic, computation. LibreTexts.