Universidad de El Salvador

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Escuela de Matemática

“Análisis de errores en ecuaciones de primer grado: un estudio con alumnos de primer año de bachillerato del sistema educativo público”

Presentado por:

Lic. Jonatan Anival Guevara Alvarado

Asesor interno:

M.Sc. Ingrid Carolina Martínez Barahona

Universidad de El Salvador

Asesor externo:

MEd. Jeser Candray

Universidad Francisco Gavidia

Noviembre 2022

Ciudad universitaria, San Salvador, El Salvador

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Maestro Roger Armando Arias

Rector

PhD. Raúl Ernesto Azcúnaga López

Vicerrector Académico

Ing. Juan Rosa Quintanilla

Vicerrector Administrativo

Ing. Francisco Alarcón

Secretario General

Licdo. Rafael Humberto Peña Marín

Fiscal General

Licdo. Luis Antonio Mejía Lipe

Defensor de los Derechos Universitarios

FACULTAD DE CIENCIAS Y MATEMÁTICA

Licdo. Mauricio Hernán Lovo Córdoba

Decano

M.Sc. Zoila Virginia Guerrero Mendoza

Secretaria de Facultad

ESCUELA DE MATEMÁTICA

Dr. Dimas Noé Tejada

Director

M.Sc. Carlos Ernesto Gámez Rodríguez

Secretario

ASESORES

Vo.Bo. M.Sc. Ingrid Carolina Martínez Barahona

Docente de la Escuela de Matemática

Universidad de El Salvador

Vo.Bo. MEd. Jeser Caleb Candray Menjívar

Investigador en el Instituto de Ciencia, Tecnología e Innovación

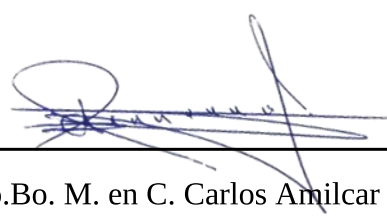
Universidad Francisco Gavidia

TRIBUNAL EVALUADOR

Vo.Bo. M.Sc. Martín Enrique Guerra Cáceres

Docente de la Escuela de Matemática

Universidad de El Salvador



Vo.Bo. M. en C. Carlos Amilcar Fuentes

Docente de la Universidad de San Carlos, Guatemala.

DEDICATORIA

A DIOS TODO PODEROSO por regalarme la vida, brindarme sabiduría, paciencia y fuerza, para culminar con éxito este triunfo.

A mis padres, Enma Alvarado de Guevara y Paulino Antonio Guevara Peraza quienes me han brindado, amor, confianza y apoyo incondicional durante toda mi vida, por enseñarme a luchar y nunca darme por vencido en cada dificultad que se me ha presentado.

A mi amor, Angela Yesenia Miranda Argueta, que siempre estuvo para mí en la elaboración de esta tesis. Eres mi amor, mi fuerza y mi compañera perfecta, deseo una larga vida a tu lado, porque eres una mujer maravillosa.

A mis hermanos y familia en general, por el apoyo incondicional, cada uno de sus consejos y muestras de cariño que me alentaron a seguir adelante.

A quienes me asesoraron en la investigación, **MSc. Ingrid Carolina Martínez Barahona y MEd. Jeser Candray**, muchas gracias por su dedicación, paciencia y el tiempo que se tomaron para corregir cada uno de los avances de este trabajo.

A quienes revisaron el documento del trabajo de investigación, **MSc. Martín Enrique Guerra y MSc. Carlos Amílcar Fuentes,** muchas gracias por todas las observaciones que hicieron en el momento oportuno. Sin duda alguna, estas mejoraron de forma sustancial el documento final.

A las autoridades del **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología**, les agradezco infinitamente por la beca de estudios que me proporcionaron para poder estudiar mis estudios de educación superior.

A todos aquellos que de manera directa o indirecta hicieron posible el desarrollo de la presente investigación.

INDICE

INDICE DE TABLAS

INDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

El presente documento contiene el trabajo de investigación titulada: **“Análisis de errores en ecuaciones de primer grado: un estudio con alumnos de primer año de bachillerato del sistema educativo público”,** en el cual se abordan todos los aspectos teóricos que se deben conocer sobre el análisis de errores en Matemática. Para comenzar, se presenta una aproximación a la definición de error, la cual se aborda en el sentido filosófico y pedagógico. Luego, se analizan las causas, características del error y las concepciones docentes que se tienen sobre el error en Matemática y cómo esto influye en el proceso de Enseñanza de los alumnos. Seguidamente, se muestran algunas clasificaciones de errores, las cuales son el resultado de trabajos de investigación de algunos matemáticos y especialistas en educación dedicados a este campo. Entre las cuales podemos mencionar las tipologías de errores de Brousseau, Socas, Movshovitz, Radatz y Astolfi. Este último, especialista en educación, propone una tipología que se puede aplicar a cualquier materia de estudio y no solamente a Matemática. En este apartado, se analiza cada tipología y se mencionan los elementos más importantes que caracterizan a cada una de ellas; esto con el fin de construir una categorización propia que nos ayude a describir el tipo de errores producidos por los alumnos de primer año de bachillerato en la solución de ecuaciones lineales.

Además, se describe la metodología que se utilizó para realizar la investigación. En este apartado se resumen las técnicas que se utilizaron para realizar la investigación, las cuales son el Análisis de Contenido de Bardin y el Análisis de errores de Cury, lo cual nos muestra cómo realizar este trabajo enfocado en el área de Matemática.

Seguidamente, se muestran las diferentes categorizaciones que se realizaron con el trabajo producido por los estudiantes que participaron en la investigación. Son ocho diferentes categorizaciones que se describen en el trabajo, una por cada ejercicio que contiene la prueba escrita. Estas categorizaciones se diseñaron siguiendo la metodología de Bardín y Cury, las cuales se diferencian de las categorizaciones presentadas en el marco teórico, en que estas son específicas para un tipo de ejercicio en particular.

Con esta investigación se pretende proporcionar un marco de referencia sobre el tipo de errores producidos por nuestros alumnos al resolver ecuaciones lineales ya que se presenta información relevante sobre el contenido, entre los cuales están muchos aportes importantes que nos han brindado algunos investigadores en Didáctica de la Matemática y un análisis exhaustivo de estos errores. También es importante mencionar que, en el país, son pocas las investigaciones que se realizan en el campo de la educación matemática, en particular en Didáctica de la Matemática; así que la investigación también pretende motivar a otros compañeros docentes para investigar las diversas problemáticas que se dan en la Enseñanza de la Matemática y que afectan su aprendizaje. Por último, se espera generar espacios de interacción educativa con otros compañeros docentes, a fin de compartir los hallazgos de la investigación y poder desarrollar acciones en conjunto para poder darle un mejor tratamiento a los errores producidos por los estudiantes. Todo con el objetivo de mejorar la Educación Matemática en nuestro sistema educativo nacional.

JUSTIFICACIÓN

Analizando el concepto de ecuación, este tema es de importancia fundamental en la enseñanza de las matemáticas. En muchas áreas de esta, resolver una ecuación es parte de la solución de otros problemas mucho más complejos. Las ecuaciones las utilizamos en Álgebra, Geometría, Estadística y en áreas más avanzadas como Cálculo y Álgebra lineal también. Están presentes en la matemática escolar y también en matemáticas universitarias.

En nuestro país, el tema de ecuaciones se comienza a impartir como tal en séptimo grado. Luego, en octavo grado aparecen los sistemas de ecuaciones lineales, en noveno grado se desarrollan las ecuaciones cuadráticas y en primer año de bachillerato, se hace un repaso general de todos estos contenidos (Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología [MINEDUCYT], 2018). La metodología de la enseñanza en este último nivel de estudio asume que los alumnos tienen un conocimiento y significado de lo que es resolver una ecuación lineal. Sin embargo, desde mi experiencia docente he podido identificar que al trabajar algunos contenidos que involucran la solución de algún tipo de ecuación lineal (por ejemplo, en trigonometría) se observa que algunos errores todavía persisten en los alumnos. Analizar esta situación hace que el profesor reflexione sobre el proceso de enseñanza y a establecer algunas conclusiones del por qué los alumnos siguen reproduciendo estor errores. Incluso, los errores persisten después de realizar algunas actividades, que se pueden considerar como prácticas que comúnmente se desarrollan en el aula para mejorar la solución de ecuaciones como, por ejemplo: resolver guías de ejercicios adicionales o repetir la solución de un ejercicio en específico una cierta cantidad de veces.

Al dialogar con otros colegas del área sobre este punto, generalmente, el profesor de bachillerato suele culpar las metodologías usadas por los profesores de educación básica para impartir el contenido, según esta idea las metodologías usadas no permitieron que el alumno se apropiara del contenido y no le resultó significativo. Otra interpretación suele ser señalar al alumno de falta de compromiso, de desinterés en el aprendizaje o incluso al olvido. Estas ideas me hacían pensar que alguien era responsable del surgimiento de los errores en el aula de matemática y que quizás había una forma de evitar que surjan los errores. Pese a esto, consideraba que el problema es mucho más complejo y se debe realizar un análisis profundo de la situación, ¿será cierto que es responsabilidad de las metodologías del docente?, ¿es responsabilidad del estudiante?, ¿cómo entender el error? Estas preguntas sin respuestas rondaban en mi mente en mi práctica como docente de matemática.

En ese sentido, se considera importante estudiar el tipo de errores que cometen los alumnos al resolver ecuaciones lineales ya que las ecuaciones es un tema fundamental en el desarrollo de cualquier contenido matemático y en el desarrollo de los programas de estudio de bachillerato es una herramienta que el alumno debe tener a la mano para resolver cualquier tipo de ejercicio.

Fue así que durante mis estudios de posgrado en el módulo Psicología del aprendizaje en Matemática, se abordó la temática de errores. En este módulo se analizaron los aportes en el estudio de errores, brindados por algunos matemáticos dedicados al campo de la investigación en esta área y que son referentes en el campo de la Didáctica Matemática, tal es el caso de Guy Brousseau, Martín Socas, entre otros. Se revisaron las diferentes categorizaciones de errores de estos autores y también la relación de los errores con algunas teorías psicológicas del aprendizaje como lo es el constructivismo, teoría desarrollada por Piaget y Vigotsky.

En discusiones desarrolladas en las sesiones de clase, se llegó a la conclusión que, en este campo, es muy poco lo que se está investigando en nuestro país y, además, es necesario realizar investigaciones de este tipo para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de nuestros estudiantes.

También, es importante mencionar que los errores de los estudiantes pueden aportar mucha información para enriquecer el proceso de enseñanza. Según Socas (1997), un conocimiento de los errores básicos es importante para el profesor porque le provee de información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas y utilizan los diferentes procedimientos para alcanzar una buena nota. Esta información después puede ser útil para hacer una valoración del proceso, mejorar las acciones que han dado resultado y reforzar las áreas débiles de los estudiantes. De esta forma, la interpretación y análisis de los errores puede enriquecerse con el apoyo de algunas teorías de la psicología educativa, algunas de ellas se refieren a determinados procesos que se dan en la Matemática.

La posición cognitiva sugiere que la mente del alumno no es una página en blanco. El alumno tiene un conocimiento anterior que parece suficiente y establece en la mente del alumno un cierto equilibrio.

Es así como, tomando en cuenta estas ideas, decidí retomar mis preguntas y consideré la oportunidad de profundizar en el estudio de los errores producidos por los alumnos en la resolución de ecuaciones en mi tesis de maestría. Por ello considero conveniente e importante realizar la investigación, porque ofrecerá orientaciones a la comunidad de educadores matemáticos sobre una categorización de los errores producidos en la solución de ecuaciones lineales por los estudiantes de bachillerato, lo que permitirá hacer un tratamiento más profundo del proceso de enseñanza y aprendizaje y potenciar la enseñanza de este contenido.

OBJETIVOS

3.1. Objetivo general

Categorizar los errores producidos por alumnos de primer año de bachillerato del sistema educativo público en la resolución de ejercicios y problemas sobre ecuaciones de primer grado.

3.2. Objetivos específicos:

Describir los errores producidos por alumnos de primer año de bachillerato del sistema educativo público en la resolución de ejercicios y problemas sobre ecuaciones de primer grado.

Analizar los errores producidos por alumnos de primer año de bachillerato del sistema educativo público en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la enseñanza de las Matemáticas, es común que el profesor transmita al alumno la necesidad de realizar un trabajo impecable al resolver los problemas o ejercicios de un determinado contenido. Es más, cuando el profesor ya cuenta con algunos años de experiencia, sabe en qué puntos debe mejorar la explicación del tema para que el alumno no cometa algunos errores que posiblemente los alumnos de años anteriores sí los cometieron. En este contexto, al preparar la clase, también es importante conocer las debilidades y fortalezas del grupo de alumnos para hacer énfasis en algunos pasos de un determinado proceso matemático que puede ocasionarles alguna dificultad.

Ahora bien, en muchas ocasiones observamos que, a pesar de que se tomen estas consideraciones en las explicaciones de los contenidos, los alumnos siguen mostrando dificultades en la solución de ejercicios. ¿Cuántas veces en nuestros salones de clase, hemos sido testigos de diferentes situaciones en las cuales los estudiantes han cometido diferentes tipos de errores, ya sea al resolver una evaluación o en la práctica de algún tema determinado? Posiblemente han sido muchas, pero ¿a qué se deberán estos fallos de los alumnos?, ¿cuáles son los factores que determinan estas dificultades de aprendizaje de los alumnos?

En el desarrollo del programa de estudio de primer año de bachillerato, hay algunos contenidos muy importantes que, para poder aprenderlos, el estudiante debe tener un dominio aceptable de otros contenidos tratados en años anteriores. Tal es el caso de las ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita. Este es un tema que bien cabe en la problemática que se ha descrito en los párrafos anteriores. A pesar de que se hace énfasis en el proceso que deben seguir para resolver una ecuación, los estudiantes reproducen algunos tipos de errores.

Por ejemplo, al resolver ecuaciones lineales como la siguiente:

$$3(x-2)-2(x+5)=4(x-1)$$

Uno de los errores que es común observar en la solución de estos ejercicios es que los alumnos aplican mal la propiedad distributiva. Al resolver la multiplicación $3(x-2)$, únicamente multiplican el 3 por el primer término del paréntesis y no por el segundo. También, al resolver la segunda multiplicación, no toman en cuenta el signo negativo al multiplicar $-2(5)$ y el resultado lo escriben con signo positivo. Otro error muy común aparece al realizar la transposición de términos. Algunos estudiantes comienzan bien la solución de la ecuación:

$$\begin{array}{ccc} 3(x-2)-2(x+5) & = & 4(x-1) \\ 3x-6-2x-10 & = & 4x-4 \\ x-16 & = & 4x-4 \end{array}$$

Pero al llegar a este punto, cuando deben colocar las incógnitas a un lado de la ecuación el término $4x$ lo dejan positivo, no hacen el cambio de signo. El error se observa también con los valores conocidos. Continuando en la solución:

$$\begin{array}{ccc} 3(x-2)-2(x+5) & = & 4(x-1) \\ 3x-6-2x-10 & = & 4x-4 \\ x-16 & = & 4x-4 \\ x-4x & = & -4+16 \\ -3x & = & 12 \end{array}$$

En este punto de la solución, surge otro error muy particular. Al despejar la incógnita, los alumnos pasan el coeficiente a dividir al otro lado de la igualdad, pero le cambian el signo.

Es necesario que los profesores conozcan las causas de estos errores; por qué se dan después de explicar el contenido y hacer énfasis en cada paso. También es importante mencionar que a diferencia como muchos profesores piensan, el hecho de que el estudiante tenga estos fallos no significa que el alumno no ha aprendido o desconozca totalmente el proceso de solución. Por supuesto que hay aprendizaje, pero se necesita conocer a profundidad estos errores para reorientar el proceso de enseñanza y aprendizaje, y en base a esto mejorar nuestras estrategias de enseñanza, de manera que las explicaciones de nuestras clases sean más efectivas.

En tal sentido, surge la pregunta de investigación: ¿Qué tipo de errores producen los alumnos de primer año de bachillerato del sistema educativo público en la resolución de ejercicios y problemas sobre ecuaciones de primer grado? Para darle respuesta, se aplicará como instrumento de recolección de información una prueba con ejercicios y problemas de ecuaciones lineales con una incógnita a una sección de cuatro centros escolares distintos. Las respuestas se analizarán y se clasificarán sus procedimientos agrupándolos en categorías de acuerdo con los procedimientos de Bardin (1996) y Cury (2008, 2017).

Por último y dado que esta investigación se enfocará en el análisis de los procedimientos de los alumnos en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, no se contempla estudiar la relación de estos errores con elementos de las concepciones de los profesores de Matemática de este grupo de estudiantes. Aunque es de puntualizar que sí se mencionan de manera general, algunas concepciones docentes sobre los errores en Matemática. Este elemento se dejará a criterio en investigaciones posteriores.

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se hará una discusión sobre los conceptos básicos relacionados al análisis de errores y como estos serán entendidos en la investigación en curso. En primer lugar, se abordará la definición de error, desde el punto de vista filosófico, pedagógico y desde la didáctica de la matemática. Luego, se abordarán las causas de los errores y sus características. Se explicará de qué forma se concibe el error en la escuela y cuáles son las implicaciones que este tiene en el aula de matemática.

Seguidamente, se describen concepciones que los docentes tienen sobre el error, su relación con el tratamiento didáctico y cómo lo aprovechan los maestros para lograr los objetivos de aprendizaje. Por último, se presentan algunas clasificaciones de errores a nivel general.

5.1. Una aproximación a la definición de error

Es importante mencionar que los errores forman parte de los trabajos de la mayoría de los alumnos, y constituyen, generalmente, un elemento estable en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en todos los niveles del sistema educativo. Comprender los errores producidos por ellos es de mucho interés, ya que proporciona información valiosa que nos puede ayudar a enriquecer el proceso de enseñanza de los estudiantes. No puede verse como una señal de deficiencias en el logro de los aprendizajes, ya que estos son diversos y tienen diferentes causas.

Desde el punto de vista filosófico, tomando la definición de Sponville (2005):

> Lo propio del error es que se considera una verdad. Es lo que distingue el error de la simple falsedad (uno puede saber que miente, pero no que se equivoca) y que le impide ser voluntario. Así, el error no es sólo una idea falsa: es una idea falsa que se cree verdadera. En tanto que es falsa, sólo tiene una existencia negativa. Pero en tanto que idea, forma parte de lo real o de la verdad (uno se equivoca realmente: el error es verdaderamente falso…

> Uno sólo se equivoca por ignorancia o impotencia. El error no es nada positivo: sólo hay conocimientos parciales o inacabados. Por eso el pensamiento es un trabajo, y el error, un momento necesario. (p. 189).

Es decir, que el error es más que una falsedad, es algo falso que se cree verdadero. En tanto que falsa, sólo tiene una existencia negativa. Pero en tanto que idea, forma parte de lo real o de la verdad. También establece que el error no es nada positivo: sólo hay conocimientos parciales o inacabados. Por eso el pensamiento es un trabajo, y el error, un momento necesario.

Desde esta perspectiva, se puede pensar que los errores son inevitables, porque los seres humanos somos falibles. Según Hernández (2021), hay que considerar que sólo cometiendo errores se cambia nuestra perspectiva, se mejora o se corrige nuestro entendimiento de las cosas, si no se cometieran errores y si no se reconocieran, no se podría reconocer cuándo se tienen creencias falsas que pueden parecer verdaderas. Así pasa con los alumnos, de ahí la importancia de distinguir los errores y que sepan reconocerlos; ya que de esa forma se pueden corregir algunas fallas en los desarrollos de ejercicios y se puede mejorar el proceso de aprendizaje.

> En matemática o en física un error de cálculo, en algún proceso, significa que el valor del resultado de una operación o un cálculo no corresponde con el real, es decir, que no sabemos dónde está el número que nos faltó o nos sobró. En este sentido, omitir un paso puede ser un error; pero esto no significa que la acción sea falsa, el error está en haber creído que el cálculo se hizo, cuando hubo una equivocación. El error yace, en el juicio o en la creencia sobre algo que resulta ser falso. Esto lo distingue de la mentira, se comunica como algo verdadero aun sabiendo que es falso. El alumno cree que el resultado es el correcto, cuando no lo es. (Hernández, 2021, parr. 2).

Por otra parte, el diccionario de la Lengua Española (Real Academia Española, s.f.) ofrece diferentes acepciones de "error", entre las cuales podemos mencionar: 1. Concepto equivocado o juicio falso; 2. Acción desacertada o equivocada y; 3. Cosa hecha erradamente. En el primer caso, se observa que tiene relación con la definición filosófica que se ha tomado de referencia, ya que el error se define como un juicio falso. Algo que se cree verdadero, pero en realidad no es de la forma en que se piensa. Esto pasa en muchas ocasiones con los estudiantes, al resolver algún ejercicio. Realizan algunos procesos de forma errónea y al consultarles por qué lo hicieron de esa forma, responden que creyeron que esa era la forma correcta de realizarlo.

En el segundo caso, podemos notar acciones desacertadas en los alumnos al trabajar en Matemática como, por ejemplo: realizar una operación en lugar de otra, extraer datos directamente de una figura, sin verificar si eso lo sustenta alguna propiedad o teorema. Esto último, se observa mucho más en las áreas de Geometría y Trigonometría.

El tercer caso lo podemos ilustrar, por ejemplo, en la solución de problemas verbales por medio de ecuaciones. Este tema es bastante complicado para los alumnos y les da muchas dificultades comprenderlo y lograr un buen dominio de este. Al inicio les cuesta comprender el planteo de las ecuaciones, pasar los enunciados de lenguaje común a lenguaje matemático y por ende formulan mal la ecuación. Con frecuencia, en estos casos, el profesor hace comentarios como: Este alumno andaba perdido en la solución, haciendo referencia al hecho que el alumno realizó de forma errónea toda la solución del problema.

Al hablar de los aprendizajes como adquisiciones naturales, Astolfi (2003, p. 10) hace una critica al modelo naturalista, ya que en este modelo se tiene la creencia que si el profesor prepara muy bien la clase, toma en cuenta el ritmo de aprendizaje de los alumnos, si selecciona cuidadosamente los ejemplos que desarrollara, y lo más importante, si los alumnos prestán atención y están motivados, no debería -normalmente- haber errores.

Desde esta perspectiva naturalista, señala Astolfi (2003), podemos pensar que todos los temas que se han visto y desarrollado en clase han producido aprendizajes en los alumnos, como si ver y hacer llevaran naturalmente a adquisiciones. En ese sentido, Astolfi (2003) considera que asumir que los aprendizajes son descubrimientos tranquilos, cómodos, sin aventuras, sin sobresaltos ni pasiones es una consecuencia de este modelo naturalista del aprendizaje; es por eso que no es raro que un modelo de enseñanza de estas características se valore en los alumnos cualidades similares, prefiriéndose a los que trabajan silenciosa y regularmente frente a los que se arriesgan por caminos alternativos.

Para Pérez et al. (2018), citando a Socas (1997), considera que un error es la manifestación visible de una dificultad de aprendizaje, es decir, de una circunstancia que impide o entorpece lograr los objetivos de aprendizaje pretendidos en relación con un contenido matemático. Este marco reconoce las numerosas variables que intervienen en un proceso de aprendizaje y la consiguiente complejidad para identificar las causas de los errores, proponiéndose estructurar esta complejidad.

Astolfi (2003), señala que los errores pueden verse como una falta, un fallo del programa o como un obstáculo. En el primero, argumenta que los errores sólo pueden ser "fallos de un sistema que no ha funcionado correctamente, fallos que hay que castigar. Y esto se traduce de muchas maneras convergentes, La primera es el "síndrome del rotulador rojo". En el mismo momento en que se percibe un error, el reflejo casi pavloviano es subrayar, tachar, materializar la falta en el cuaderno o en el control. Antes de pararse a pensar en sí tendrá alguna utilidad en términos didácticos, se siente la incapacidad de actuar de otro modo. Interminables y agotadoras correcciones, sin pensar que vayan a ser eficaces, y sin creer que los estudiantes van a tenerlas en cuenta, y aun así, se sigue perseverando. Aunque, esta acción se debe seguir haciendo. No debemos prescindir de la corrección porque es algo que tiene que ver con nuestra identidad profesional, con la idea de la acción y de los deberes del enseñante: al menos los estudiantes podrán ver que "está corregido".

La segunda percepción, más íntima y penosa, es que los errores de los alumnos hacen que los profesores duden de sí mismos y que piensen en lo ineficaz de la enseñanza impartida. Algo se ha resistido a nuestras explicaciones y a nuestro deseo de explicar, incluso a la "esencia" del poder pedagógico. Por tanto, sienten malestar y despecho cuando los alumnos cometen esos errores, que se habían tratado de evitar por todos los medios.

En el segundo, el error se ve como un fallo de programa. Es decir, el error se lo carga al que concibió la programación y a su falta de capacidad para adaptarse al nivel real de los estudiantes. En ese sentido, se culpa la programación de los contenidos, la estructuración de la carga académica y a las actividades de evaluación.

Por último, el error se puede ver como un obstáculo; es decir, como una dificultad objetiva en la apropiación del contenido enseñado. En ese sentido, el obstáculo consiste en actuar y reflexionar con los medios de los que se dispone, mientras que el aprendizaje consiste en construir medios mejor adaptados a la situación.

Ahora bien, ¿cómo es comprendido el error desde la didáctica de la matemática? Según Rico (1995), el error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. Es decir, incluso en los momentos en los cuales surgen errores, los alumnos pueden aprender y ese aprendizaje puede ser significativo en el proceso de enseñanza de nuestros estudiantes.

En Matemática y en cualquier área numérica, siempre es común que los estudiantes practiquen un nuevo tema, dediquen horas extras a la ejercitación de cualquier contenido y entre más complejo es, posiblemente necesitarán más horas de estudio y la probabilidad de equivocarse puede ser mayor. El error juega un papel fundamental en la adquisición de conocimientos, sin embargo, en los procesos de enseñanza – aprendizaje a menudo se reprime el error. Muchos estudiantes se ven intimidados y tienen miedo a consultar en clase o participar por el temor a equivocarse.

Según Rico (1995), si bien el error puede tener procedencias diferentes, generalmente tiende a ser considerado como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimientos. Es de destacar que los errores no aparecen por azar, sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente, y todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunas de las cuales se presentan inevitablemente. En este caso, ambos investigadores, Astolfi y Rico, coinciden en que los errores tienen diferentes causas, pero no se deben a situaciones que se dan al azar.

También se debe tener en cuenta que las oportunidades de los estudiantes para aprender Matemática dependen del entorno y del tipo de tareas y discurso en que participan, dependiendo lo que aprenden de cómo se implican en las actividades matemáticas, lo que marca, a su vez, las actitudes que tienen hacia esta ciencia. Es decir, que puede darse el caso, que los estudiantes reproduzcan menos errores en aquellos contenidos que le sean significativos, y que le vean una aplicación práctica. Así, en esta situación, los alumnos no desarrollarían esquemas cognitivos inadecuados ya que no presentarían obstáculos porque se apropiarían del contenido de forma más rápida.

Los errores aparecen en el trabajo de los estudiantes principalmente cuando se enfrentan a nuevos conocimientos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Como señala Matz (1980) citado y traducido por Socas (1997), “los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p. 94). Entendemos que el error tendrá distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de falta de conocimiento o de un despiste.

Considerando estas ideas y definiciones se considerará error en esa investigación “cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (GODINO; BATANERO; FONT, 2003, P.73). Asimismo, “cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta” (RADATZ, 1980, apud RICO, 1995, P.76).

5.2. Causas del error

Anteriormente, se ha mencionado que un error es la manifestación visible de una dificultad de aprendizaje, es decir, de una circunstancia que impide o entorpece lograr los objetivos de aprendizaje pretendidos en relación con un contenido matemático (Socas, 1997). Así, se describen tres grandes ejes no disjuntos para organizar los errores que cometen los estudiantes en relación con tres orígenes distintos: los obstáculos (epistemológico, cognitivo y didáctico), la ausencia de sentido, y las cuestiones afectivas y emocionales. (Socas, 1997)

Para definir los obstáculos cognitivos, consideramos la adaptación de la definición original de Bachelard (1938) realizada por Palarea y Socas (1994, p. 94) utilizada para analizar las dificultades en el aprendizaje del álgebra; los obstáculos cognitivos son “conocimientos que han sido satisfactorios para la resolución de ciertos problemas durante un tiempo, se fijan en la mente y, sin embargo, resultan inadecuados y de difícil adaptación al tenerse que enfrentar el estudiante a otros problemas”.

Los obstáculos didácticos tienen su origen en el proceso de enseñanza seguido por el estudiante y se asocian a características propias del sistema educativo, como por ejemplo la metodología de enseñanza, la organización curricular de los contenidos, el significado parcial que se transmite en un momento dado, etc. Desde el punto de vista de los errores relacionados con la ausencia de sentido, se considera que estos errores se originan en los tres estadios de desarrollo cognitivo[1] —semiótico, estructural y autónomo— que se dan en los sistemas de representación asociados al álgebra, por lo que se diferencian tres posibles causas (Ruano et al., 2008; Socas, 2007):

5.2.1. Errores debidos a una falta de asimilación de nociones aritméticas.

Los primeros pasos en el aprendizaje de las ecuaciones se sustentan en la manipulación de nociones aritméticas básicas (las operaciones aritméticas, los números negativos, las relaciones de igualdad entre números expresados de distinta manera, etc.).

5.2.2. Errores debidos a la manipulación del lenguaje algebraico.

Se trata de errores asociados a la simbología propia del álgebra: el uso de letras (incógnitas) y símbolos (signo igual) a los que hay que atribuir nuevos significados.

5.2.3. Errores debidos a la aplicación inapropiada de fórmulas o reglas de procedimiento.

La utilización de procedimientos memorizados genera errores cuando se aplica sin sentido a situaciones que no admiten una técnica o se introduce alguna técnica inventada.

[1] Los estadios del desarrollo intelectual “se caracterizan como los periodos definidos funcionalmente por la característica de una nueva unidad de, complejización u organización, entendiendo a esa unidad como una estructura en función”. (Schwartz, 1979).
El estadio semiótico es aquel en el que el alumno aprende y usa los nuevos signos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos y usados por él. El estadio estructural se caracteriza porque el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo y el estadio autónomo es aquel en el que los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior. (Socas, 1997, pág. 31).

5.3. Características fundamentales de los errores

Abrate (2006, p. 34-35), citando a Rico (1995), señala cuatro vías mediante las cuales el error puede presentarse, las que enuncian del siguiente modo:

1) Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.
2) Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.
3) También los errores pueden presentarse cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.
4) Los estudiantes con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales, pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas.

No obstante, Abrate (2006, p. 35), citando a Rico (1995), considera como características generales de los errores cometidos por los estudiantes, los siguientes:

1. Los errores surgen en la clase por lo general de una manera espontánea. Sorprenden al profesor, aunque pueden gestarse desde mucho antes.
2. Son persistentes y particulares de cada individuo. Son difíciles de superar porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el estudiante.
3. Hay un predominio de los errores sistemáticos con respecto a los errores por azar u ocasionales. Los errores sistemáticos revelan los procesos mentales que han llevado al estudiante a una comprensión equivocada.

4. Los estudiantes en el momento no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabajan.
5. Los errores sistemáticos son en general el resultado de concepciones inadecuadas de los fundamentos de la Matemática, reconocibles o no reconocibles por el profesor.
6. Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el estudiante de la información que da el profesor. Los estudiantes, por ejemplo, recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el profesor.

5.4. Concepciones docentes sobre el error en Matemáticas

Las creencias y concepciones de los profesores sobre la matemática y su aprendizaje están fuertemente ligadas con su enseñanza. Las creencias pueden considerarse como verdades personales indiscutibles sustentadas por cada uno, que se derivan de la experiencia o de la fantasía y que tienen un fuerte componente evaluativo y afectivo (Pajares, 1992). “No se fundamentan en la racionalidad sino sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo” (Moreno & Azcárate, 2006, p. 67). Es decir, que la mayoría de los profesores repite en los salones de clase, las estrategias de enseñanza y actividades de evaluación que sus profesores utilizaron cuando fueron estudiantes en su momento y las siguen replicando debido a la falta de información sobre el tema de errores en el área de Matemática.

Sin duda alguna, los errores son una fuente de información valiosa para analizar en el proceso de enseñanza aprendizaje y son una preocupación constante para el profesor. En el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos de cualquier contenido en estudio, siempre aparecen errores y, por eso, dicho proceso siempre debe incluir criterios de diagnóstico, corrección y superación mediante actividades que promueven el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones. En general, en el salón de clases, lo que más preocupa es la persistencia y la masividad de algunos de ellos. Evidentemente estos errores influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos y es imprescindible que ellos los reconozcan y asuman la necesidad de superarlos a fin de obtener logros de aprendizaje. Su análisis sirve para ayudar al docente a organizar estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y contribuyen a una mejor preparación de instancias de corrección.

En tal sentido, señala Franchi et al. (2004) que conocer el tipo de error que cometen los estudiantes permite al docente seleccionar las estrategias idóneas que optimen su acción y faciliten la superación de los errores mediante la adquisición de un nuevo conocimiento por parte de sus estudiantes.

García, Azcárate y Moreno (2006), citado por Ramírez (2017) presentan algunas características de las creencias del profesor: se asocian a ideas personales e influyen en su toma de decisiones, influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tienen un valor afectivo, son un tipo de conocimiento y se justifican sin rigor alguno. Es decir, que las ideas que los profesores tienen sobre el error, inciden en todos los elementos del proceso educativo. Estas concepciones inciden en la metodología, en la evaluación y en la forma en la cual se realizará la realimentación en los estudiantes para mejorar las áreas deficitarias y potenciar aquellas en las cuales se posee un excelente dominio.

Para García, Azcárate y Moreno (2006) las concepciones "consisten en la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes" (p. 87). Estos autores adicionalmente caracterizan algunas de las concepciones del profesor: forman parte del conocimiento, son producto del entendimiento, actúan como filtros en la toma de decisiones e influyen en los procesos de razonamiento.

D'Amore (2008) define epistemológicamente la concepción como: un conjunto de convicciones, de conocimientos y de saberes científicos, que tienden a decir cuáles son los conocimientos de los individuos o de los grupos de personas, su funcionamiento, las formas de establecer su validez, de adquirirlas y por tanto de enseñarlas y de aprenderlas. (p. 2)

En una investigación realizada por Mejía et. al (2018) sobre las concepciones de alumnos y profesores sobre el error en Matemática, en profesores de Primaria y Secundaria, señala que los profesores perciben el error como una oportunidad de aprendizaje. Consideran, asimismo, que los estudiantes en general no son conscientes de sus errores y que aquello que lo son, no les prestan mucha importancia. También destacaron que, al relacionar el tipo de retroalimentación realizada por los profesores y la falta de consciencia del estudiante sobre sus errores, se evidencia que es una especie de ciclo en el que has pocas posibilidades de que los estudiantes identifiquen las causas de sus desaciertos, y por lo mismo, que se vean involucrados en superarlos, pues no hay una participación activa de ellos en la retroalimentación que hace el profesor. En la misma investigación, señalan que los estudiantes conciben el error como un obstáculo en el proceso de aprendizaje, aunque en su gran mayoría manifiesta que sirve de base para llegar al verdadero conocimiento y para lo cual deben hacerse conscientes de ellos. Por último, mencionan que los estudiantes consideran que la retroalimentación es un complemento necesario para completar los procesos evaluativos y una forma de validarlos.

Una vez se discutió sobre el papel de las concepciones docentes sobre el tratamiento del error en el aula de matemática, a continuación, se presentan algunas categorizaciones sobre los errores en matemática.

5.5. CLASIFICACIONES DE ERRORES

La clasificación de los errores hace posible centrar la atención hacia los diferentes aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje, y permite una evaluación y diagnóstico más eficaz para poder ayudar a los estudiantes en sus dificultades cognitivas y sus carencias de sentido de los objetos matemáticos y en el desarrollo de una actitud racional hacia la matemática. (Engler et al. 2004)

A continuación, se muestran cinco tipologías que se han desarrollado para clasificar el error en el área de la matemática y ciencias en general. Las dos primeras corresponden a Brousseau (2001) y Socas (1997); las dos siguientes a Movshovitz et al. (1987) y Radatz (1979), presentadas por Rico (1997); y la última corresponde a la desarrollada en el ámbito de las ciencias por Astolfi (2003).

5.5.1. Tipología de errores de Brousseau (2001), citado por Franchi (2004).

Para este autor los profesores suelen clasificar al error como un:

5.5.1.1. **Error a un nivel práctico.** Cuando el profesor considera que son errores de cálculo.

5.5.1.2. **Error en la tarea.** Cuando el profesor los atribuye al descuido.

5.5.1.3. **Error de técnica.** Cuando el profesor critica la ejecución de un modo operativo conocido.

5.5.1.4. **Error de tecnología.** Cuando el profesor critica la elección de la técnica.

5.5.1.5. **Error de nivel teórico.** Cuando el profesor incrimina los conocimientos teóricos del estudiante que sirven de base a la tecnología y a las técnicas asociadas.

5.5.2. Tipos de errores según Socas (1997).

Según el autor, los errores en el aprendizaje de las matemáticas se deben a ciertas dificultades que se pueden agrupar en cinco categorías: dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, dificultades asociadas a los procesos del pensamiento matemático, dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes y dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Tomando en cuenta estas dificultades, clasifica los errores en el nivel secundario de acuerdo con su origen en

5.5.2.1. Errores que tienen su origen en un obstáculo.

Según Brousseau (1983), citado por Socas (1997), los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser:

De origen ontogénico o psicogénico, debidos a las características del desarrollo del niño.

De origen didáctico, resultado de una opción o de un proyecto sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza.

De origen epistemológico, intrínsicamente relacionadas con el propio concepto.

Tall (1989) citado por Socas (1997) distingue dos tipos de obstáculos:

5.5.2.1.1. Obstáculos basados en la secuencia de un tema.

En este caso, hace referencia al hecho de que ciertos contenidos tienen mayor complejidad que otros, por lo que es preciso impartirlos en cierto orden. Se parte de los conceptos más simples a los más complejos. Por ejemplo, el caso del Álgebra, en el que las destrezas operatorias son enseñadas con anterioridad a ideas conceptuales aparentemente más profundas.

5.5.2.1.2. Obstáculos basados sobre casos simples.

Posiblemente causados por limitar al estudiante a casos simples por un período sustancial de tiempo, antes de pasar a casos más complejos. En ese sentido, se debe seleccionar el número de ejemplos que se explicará y su nivel de complejidad para que el estudiante asimile el nuevo conocimiento y los ejemplos simples le permiten desarrollar acciones más complejas.

5.5.2.2. Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido.

En esta categoría se encuentran los siguientes tipos de errores:

5.5.2.2.1. Los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.

Por lo general, en este tipo de errores, las dificultades que los estudiantes encuentran del álgebra no son tantas dificultades en el álgebra, si no procesos incorrectos que los estudiantes los arrastran desde la aritmética que se quedan sin corregir.

5.5.2.2.2. Los errores de procedimiento

Estos errores se derivan del uso inapropiado que hacen los alumnos de las fórmulas o de las reglas de procedimiento. Por ejemplo, mal uso de la propiedad distributiva, $2(4 + 3) = 2(4) + 3$. Otro error muy común, es al desarrollar el cuadrado de un binomio. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$; cuando lo correcto es $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

5.5.2.2.3. Los errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Estos errores son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo igual en álgebra y la sustitución formal.

5.5.2.2.4. Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Estos errores tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

5.5.3. Tipología de errores según Movshovitz et al. (1987), citado por Bocco (2010)

Los errores pueden enmarcarse en las siguientes categorías para estos autores:

5.5.3.1. Errores debidos a datos mal utilizados.

Incluye los errores que pueden ser relacionados con alguna discrepancia entre los datos dados en el problema y cómo el estudiante los trató.

5.5.3.2. Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje.

Incluye los errores que surgen por una traducción incorrecta de hechos matemáticos a un lenguaje coloquial y viceversa. Por ejemplo, cuando el estudiante resuelve problemas de aplicación por medio de una ecuación lineal, construye de forma incorrecta la ecuación porque no ha sabido interpretar el problema.

5.5.3.3. Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente.

Incluye los errores cometidos por un razonamiento incorrecto. Esta nueva información, inválida, es luego utilizada para resolver el problema planteado ocasionando una respuesta errónea.

5.5.3.4. Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados.

Incluye los errores que aparecen por una distorsión de un principio, una regla, teorema o definición. En esta categoría se encuentran los errores por aplicaciones de teoremas sin las condiciones necesarias, por aplicación de propiedades que no corresponden, por la realización de una valoración inadecuada de una definición, teorema o formula.

5.5.3.5. Errores debidos a la falta de verificación en la solución.

Incluye los errores cometidos en el resultado final pero no en el proceso, es decir, cada paso dado por el examinado es correcto en sí mismo, pero el resultado final, tal como se presenta, no es una solución para el problema dado. En esta categoría se incluyen los errores que de haber existido una verificación por parte de alumno hubiesen sido eliminados.

5.5.3.6. Errores técnicos

Incluye los errores de cálculo, los errores en la extracción de datos de las tablas, los errores en la manipulación de símbolos algebraicos elementales, etc.

5.5.4. Tipología de errores según Radatz (1979) (citado por Rico, 1995).

El autor realiza una clasificación de los errores partiendo del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales:

5.5.4.1. Errores debidos a la dificultad del lenguaje.

Se presentan en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático, y al efectuar el pasaje del lenguaje corriente al lenguaje matemático.

5.5.4.2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.

Aparecen en la representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico.

5.5.4.3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Esta categoría abarca todas las deficiencias sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Son los cometidos por deficiencias en el manejo de algoritmos, hechos básicos, procedimientos, símbolos y conceptos matemáticos

5.5.4.4. Errores debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. Son causados por la falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas; comprenden los errores por perseveración, los errores de asociación, los errores de interferencia, los errores de asimilación.

5.5.4.5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Referidos a los que surgen por aplicar con éxito una estrategia en áreas de contenidos diferentes.

Esta clasificación es muy completa, ya que abarca los errores que se pueden dar en varias áreas de la matemática, entre ellas la Geometría. Ya que otras clasificaciones no hacen referencia al plano espacial y solamente analizan las áreas de Aritmética y Álgebra.

5.5.5. Tipología de errores de Astolfi (2003).

Este autor establece una tipología para los errores que constituye una perspectiva general de los errores, la cual pretende romper con las categorías tradicionales adoptadas para hablar sobre ellos.

5.5.5.1. Errores debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas. Relacionados con la dificultad que tienen los alumnos para comprender las instrucciones de trabajo que se les dan, ya sea en forma oral o escrita. Astolfi (2003) señala que la dificultad en la lectura puede estar relacionada a la claridad de las preguntas, que muchas veces son más claras para el que las plantea. Es indispensable posicionarse desde el punto de vista del que va a contestar a la pregunta (que no conoce la respuesta con anterioridad) para percibir lo que puede ser su dificultad. Es decir, que se debe ser cuidadoso al dar las indicaciones a los alumnos para realizar algún trabajo o al redactar algún problema matemático. Los conceptos matemáticos deben ser dados de forma tal, que el estudiante pueda comprenderlos para que los pueda asimilar de mejor manera. En otras palabras, el conocimiento debe ser asequible para los estudiantes.

5.5.5.2. Errores que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas.

Los errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos: están relacionados con los obstáculos. En este contexto, según Astolfi (2003, p. 56), la clase funciona con una mecánica, a menudo eficaz y bien engrasada, que permite llegar a las respuestas correctas, pero donde se paga muchas veces el precio de evitar los aprendizajes, es el problema de este funcionamiento didáctico. Los alumnos logran estrategias para llegar a la respuesta correcta, para asumir el comportamiento adecuado, pero falseando los errores a través de falsos éxitos, donde realmente no existió un real aprendizaje.

5.5.5.3. Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas.

Algunos errores están relacionados más directamente con la diversidad de las operaciones intelectuales que deben utilizarse para resolver los problemas y que, aparentemente, están al alcance de los estudiantes. Astolfi (2003) destaca los casos en aritmética presentados por Gérard Vergnaud donde los problemas de suma son más fáciles si se corresponden con una "ganancia" que con una pérdida. También la dificultad simétrica a anterior, presentada por Rémi Brissiaurd que surge cuando hay que realizar una sustracción en un problema donde existe un aumento. La dificultad reside en la construcción progresiva de los conceptos de suma y sustracción. La misma operación aritmética, pueden corresponder operaciones lógicas extremamente diferentes desde el punto de vista del esfuerzo de abstracción que implican. Un problema se puede resolver correspondiendo a la concepción primitiva de suma: dado un estado inicial y una transformación positiva, se pregunta el estado final. En otra situación la resolución del problema puede ser más compleja en la medida en que lo que se da es el estado final y la transformación negativa corresponde a la pérdida en el transcurso, y donde lo que se pide es el estado inicial. Y en un caso más complejo, se puede tratar de una composición de transformaciones, con estados intermedios desconocidos.

5.5.5.4. Errores debidos a los procesos adoptados.

En muchas ocasiones, los alumnos optan por un proceso distinto del esperado por el profesor entonces, de forma acelerada, son tachados como errores. Pero en realidad, es la variedad de estrategias de resolución que los estudiantes ponen en marcha.

Astolfi (2003) señala que a menudo se consideran erróneas las propuestas cuando se apartan del método-tipo que se ha imaginado, y más si se acompañan de fallos puntuales que enmascaran la lógica del recorrido.

Por ejemplo, se pueden mencionar algunos problemas aritméticos que se resuelven por medio de una división, pero el estudiante opta por resolverlos utilizando sumas sucesivas o restas. Es un procedimiento más largo, pero al final el estudiante puede ser que llegue a la solución del problema.

Para Astolfi (2003, p. 70), este tipo de trabajo favorece conflictos sociocognitivos, la metacognición, y la zona de desarrollo próximo. Los conflictos sociocognitivos permiten los progresos intelectuales por medio del juego de la interacción entre estudiantes, sin que sea necesario que alguno de ellos esté más avanzado. El progreso está en la calidad de las interacciones y todas las formas de interacción los que aprenden, y todas las ocasiones de colaboración entre ellos, favorecen en distinto grado el avance cognitivo.

5.5.5.5. Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad

Según Astolfi (2003, p. 71-72), la memoria no es un sistema pasivo y se distingue en ella dos etapas correspondientes a la memoria de trabajo y a la memoria a largo plazo, teniendo cada una de ellas sus propias implicaciones.

La memoria de trabajo se caracteriza por su limitada capacidad y por el corto tiempo de conservación de las operaciones, siendo sensible a las interferencias. En cambio, la memoria a largo plazo es de gran capacidad. Distintas condiciones influyen en la eficacia del recuerdo: el intervalo de retención, el número de "rasgos" analizados al captarla, la buena integración de la información en la estructura cognitiva, etc. Es importante volver a instaurar las condiciones de codificación para el acceso a la información buscada.

Por tanto, la sobrecarga cognitiva puede darse, por ejemplo, cuando el número de operaciones mentales que deben efectuarse y conservarse es superior al límite soportado, que es estructural. En este sentido, debemos seleccionar lo esencial de los contenidos que se van a enseñar y profundizar en ellos, solamente si se observa que los estudiantes pueden asimilarlo. También, debemos proporcionar condiciones y propiciar un ambiente adecuado, para que los límites de la memoria se amplíen, y de esa manera favorecer el aprendizaje en el aula.

5.5.5.6. Errores que tienen su origen en otra disciplina.

Estos errores se presentan como la no transferencia de contenidos previos de otras disciplinas o dentro de la misma disciplina. Es muy común el hecho de exigir a los estudiantes que dominen contenidos de otras asignaturas para poder cumplir con los objetivos propuestos en Matemática. Un caso particular es el tema de vectores que se estudia en Ciencias Naturales y en Matemática de Primer Año de Bachillerato. El profesor espera que los estudiantes dominen algunos procesos básicos del contenido, porque ya lo estudiaron en la otra asignatura, pero no es el caso.

La escuela debe trabajar por la transferencia, ya que, en sí, es una confirmación que se han dado aprendizajes significativos. Para eso hay que hacerla posible y ello pasa por una actitud a priori y por un trabajo permanente.

El parecido superficial de situaciones en disciplinas distintas o incluso en la misma juega un papel esencial frente a los alumnos. Aunque no basta con que sean estructuralmente cercanas para provocar en los alumnos la movilización de herramientas de pensamiento utilizadas con anterioridad o disponibles en la memoria. Ellos no piensan en establecer una relación, por muy natural que parezca. A veces les ocurre que transfieren un saber indebidamente, porque existen parecidos circunstanciales entre situaciones (Astolfi, 2003).

5.5.5.7. Errores causados por la complejidad del contenido.

Este tipo de errores se relaciona con la complejidad interna del contenido y su mirada pasa del punto de vista psicológico del sujeto que aprende al punto de vista epistemológico de la estructura del contenido.

El análisis didáctico de este tipo de errores pone en cuestión los contenidos teóricos y prácticos de la enseñanza, así como los métodos y procedimientos que habitualmente se les asocian (Astolfi, 2003, p. 78).

Al desarrollar un contenido que se piensa como ampliación de otro contenido anteriormente estudiado, dicha ampliación que se considera a menudo por los docentes como una simple generalización de las adquisiciones anteriores, requiere de una renovación teórica importante.

No todos los estudiantes construyen su representación de determinados contenidos a partir de un mismo punto de vista, pero en algunos casos no tienen mucha importancia pues las consecuencias, en términos de respuestas, son las mismas. Cuando la diferente movilización de las concepciones construidas en el curso anterior va a conducir a conclusiones opuestas, se presenta el problema.

Los errores cometidos sistemáticamente, se comprenden como una ampliación no rectificada de la solución aprendida el año anterior. Se puede contribuir involuntariamente a esta generalización abusiva por la falta de profundidad en el análisis del contenido de estas nociones (Astolfi, 2003, p. 81).

A partir de estas ideas, se puede observar que:

Para Movshovitz-Hadar et-al (1987) la mayor parte de los errores que cometen los estudiantes de la escuela, en matemática, no son accidentales, sino que son derivados de un proceso cuasi-lógico que de alguna manera tiene sentido para el estudiante.

Astolfi (1999), propone una clasificación de los errores donde se tenga en cuenta la naturaleza del error ya que de ese modo se facilita el análisis del tipo de mediaciones posibles para remediar el mismo. Además, de todas las tipologías explicadas, Astolfi es el único que propone una categorización no solamente orientada al área de Matemática; si no que se puede aplicar en cualquier asignatura. Ya que los tipos de errores que plantean, claramente se pueden encontrar en cualquier área de trabajo de los alumnos.

Socas (1997), hace énfasis en las dificultades que genera en los estudiantes el aprendizaje de la matemática, las mismas, indica, que se manifiestan en forma de errores. Asegura que las procedencias de los errores son muy diversas, no solo son consecuencia de falta de conocimiento o despiste, sino que también debe asociarse a la presencia, en el estudiante, de un esquema cognitivo inadecuado. De hecho, en el desarrollo del conocimiento matemático destaca la importancia del error como base para el nacimiento de nuevos conceptos y teorías que, tal vez, no se hubiesen desarrollado sin el análisis crítico de lo anterior. Este tipo de situaciones también se da en el ámbito educativo ya que los alumnos desarrollan métodos válidos en algunos casos solamente y con el tiempo los mejoran o descubren otros. En ese caso, el profesor debe tener cuidado al explicar el concepto matemático, definición o teorema ya que, si el alumno no comprende perfectamente la información, puede desarrollar esquemas mentales erróneos y estos pueden manifestarse al desarrollar los ejercicios.

METODOLOGÍA

6.1. Diseño de la investigación

Considerando estos elementos teóricos y a partir del interés profesional y personal del investigador en profundizar en el estudio de los errores y tomando en cuenta el objetivo de esta investigación es analizar y categorizar los tipos de errores producidos por alumnos de primer año de bachillerato del sistema educativo público en la resolución de ecuaciones primer grado con una incógnita, que busca construir subjetividades a partir de la producción escrita de los estudiantes, diseñando una clasificación de errores que vaya más allá de producir tablas estadísticas e inferencias de ellos, se considera que una investigación de tipo cualitativa y exploratoria es el mejor camino para alcanzar nuestros objetivos.

Para Garnica (2013), se puede llamar a una investigación de tipo cualitativa cuando cumple algunos criterios tales como:

> a) La transitoriedad de sus resultados; b) la imposibilidad de una hipótesis a priori, cuyo objetivo de investigación será comprobar o refutar; c) la no neutralidad del investigador que, en el proceso interpretativo, se vale de sus perspectivas y filtros vivenciales previos de los cuales no consigue desvincularse; d) que la constitución de sus comprensiones no se da como resultado, pero en una trayectoria en que esas mismas comprensiones y también medios de para obtenerlas puede ser (re)configurados; y e) la imposibilidad de establecer reglamentaciones, en los procedimientos sistemáticos, previos, estáticos y generalistas. (Garnica, 2013, p. 99, traducción nuestra).

Al ponderar estos criterios en esta investigación, se considera que se configuran dentro de nuestros objetivos trazados, a decir, no se pretende generalizar los resultados, las interpretaciones y resultados pretender aportar insumos para su análisis, dado que no se puede saber previamente qué resultados pueden tenerse se excluye la posibilidad de establecer hipótesis previas y las interpretaciones se darán como resultado del dialogo entre las teorías consultadas y las comprensiones del investigador.

A su vez, se considera que esta investigación es de carácter exploratorio. Una investigación se considera exploratoria cuando “se realizan cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes” (Sampieri, Collado y Lúcio, 2010, p. 19) esto tiene más realce al verificar lo poco estudiado que es el tema de errores en las investigaciones en El Salvador.

Ahora bien, para la categorización y análisis de resultados esta investigación se inspiró en los procedimientos metodológicos del análisis de contenido de Bardin (1996) y el análisis de errores de Cury (2017), ya que, para realizar la investigación se hará una organización del análisis, la cual comprende las siguientes etapas:

El preanálisis. En la cual se realizó la elección de los documentos que se analizaron, la formulación de los objetivos, la señalización de los índices y la elaboración de los indicadores.

El aprovechamiento del material que consiste esencialmente en operaciones de codificación, descomposición o enumeración en función de consignas formuladas previamente. Bardin (1996, p. 76).

El tratamiento de los resultados, la inferencia y la interpretación. Ya que Los resultados brutos son tratados de manera que resulten significativos (que "hablen") y válidos. Operaciones estadísticas simples (porcentajes) o más complejas (análisis factorial) permiten establecer cuadros de resultados, diagramas, figuras, modelos que condensan y ponen de relieve las informaciones aportadas por el análisis. Bardin (1996, p. 76).

Con estos presupuestos metodológicos, y retomando nuestros objetivos de investigación, se definen los sujetos de investigación, el instrumento de recolección de información, la validación y aplicación del instrumento y el tratamiento de los datos en las seccione siguientes.

6.2. Sujetos de investigación

Tomando en cuenta que el estudio se debe realizar con estudiantes de primer año de bachillerato del sistema público, para desarrollar la investigación se realizó un muestreo intencional (es una técnica de muestro no probabilístico donde los sujetos son seleccionados dada la conveniente accesibilidad y proximidad de los sujetos para el investigador), en el cual se tomó una muestra de 4 institutos y complejos del sistema educativo nacional, bajo el criterio de cercanía con el investigador y también, fueron instituciones en las cuales se facilitó el acceso para trabajar con los alumnos ya que por las restricciones de la pandemia por Covid – 19, no todas las instituciones estaban trabajando de manera presencial. Estos son: Instituto Nacional de San Pablo Tacachico, Instituto Católico "San Pablo Apóstol", Centro Escolar de San Isidro y el Instituto Nacional de La Nueva Concepción. Las primeras 3 instituciones están ubicadas en el municipio de San Pablo Tacachico, departamento de La Libertad; mientras que la última institución educativa está ubicada en el municipio de Nueva Concepción, departamento de Chalatenango. Al inicio, se consideró tomar de cada institución educativa, una sección que contara, por al menos, 25 alumnos; sin especificar de qué modalidad fuera (general o técnico) ya que estaba sujeto de la disponibilidad del centro educativo y en diálogo con el docente de la sección.

Al realizar la prueba, las secciones que se nos facilitaron tenían menos de 25 alumnos, ya que los centros educativos todavía están trabajando en formato semipresencial y no todos los alumnos están asistiendo en forma presencial a recibir las clases.

6.3. Instrumentos de recolección de información

Para el diseño del instrumento de recolección de la información se establecieron las siguientes características. Dado que se pretende analizar los errores producidos por los estudiantes de primer año al resolver ecuaciones lineales, se estableció que se utilizaría un único instrumento que será contestado por una sección de primer año de bachillerato de cada uno los centros escolares antes mencionados. Debido a que se necesita obtener los procedimientos realizados por los estudiantes, el instrumento fue diseñado para contestarlo de forma presencial, ya que se necesitó analizar las respuestas brindadas por los estudiantes, para clasificar los errores producidos en una categoría emergente. Este instrumento contiene siete ítems entre problemas y ejercicios, para contestarlo en un tiempo máximo de 60 minutos. Para elegir los problemas de la prueba, se revisaron algunas pruebas PAES de años anteriores, también se revisaron algunos libros de texto de bachillerato y Precálculo. El objetivo fue tomar ejercicios que se adecuaran al nivel de exigencia de estas pruebas estandarizadas y los libros de texto que se utilizan en los grados de séptimo y octavo grado que es en los cuales aparecen estos contenidos en los programas de estudio de la asignatura de Matemática.

6.4. Validación del instrumento

Después de diseñar el instrumento, se procedió a validarlo en dos momentos. Primero, se compartió con dos especialistas en el tema (asesores de la tesis) para que revisen el instrumento y hagan observaciones de tipo teórico y de redacción. Esta etapa concluyó con la integración de las observaciones hechas por los especialistas. Luego, en una segunda validación, se aplicó el instrumento corregido a una sección de primer año de bachillerato, de un centro escolar que no formó parte de la investigación para verificar que no hay ninguna duda con respecto a lo que se le solicita en cada pregunta, que tampoco hay problemas de redacción en cada pregunta y el tiempo que se llevaron para responder el instrumento. Esta etapa finalizó integrando las observaciones de este grupo de estudiantes, validando de esta forma el instrumento.

6.5. Aplicación del instrumento

Una vez validado el instrumento de recolección de la información, este se aplicó de la siguiente manera. Previamente se solicitó permiso con cada director del centro escolar, para poder agendar un día entre la última semana de septiembre y la primera semana de octubre, con una sección de primer año de bachillerato en acuerdo con el docente encargado. Se programó una reunión con los estudiantes, en el horario de clases normal, se les explicó el objetivo de la reunión y se procedió a aplicar el instrumento a cada estudiante.

En el Instituto Nacional La Nueva Concepción se trabajó con una sección de bachillerato general. En el Instituto Nacional de San Pablo Tacachico participaron 3 secciones, 2 de bachillerato general y una sección de bachillerato técnico. En el Instituto Católico “San Pablo Apóstol participó una sección de bachillerato técnico y en el Instituto Nacional de San Matías se trabajó con una sección de bachillerato técnico. A continuación, se detallan el número de alumnos con los que se realizó la investigación en cada centro educativo:

Tabla 1

Número de estudiantes que se tomó por cada centro educativo.

Institución educativa	Grado	Número de alumnos		Total
		M	F	
Instituto Católico "San Pablo Apóstol"	1ero técnico	6	17	23
Instituto Nacional de San Matías	1ero técnico	2	12	14
Instituto Nacional La Nueva Concepción	1ero general	1	5	6
Instituto Nacional de San Pablo Tacachico	1ero técnico	5	8	13
Instituto Nacional de San Pablo Tacachico	1ero general A	7	9	16
Instituto Nacional de San Pablo Tacachico	1ero general B	5	12	17
		26	**63**	**89**
Fuente: elaboración propia.				

Una vez concluida la fase de recolección de información, se describe en la sección siguiente el tratamiento y el análisis de los resultados.

6.6. Tratamiento y Análisis de resultados

Para el tratamiento de la información se procedió al análisis de cada uno de los ítems utilizando el análisis de contenido de Bardin (1996) y el análisis de errores de Cury (2017).

Cury (2017), adapta la propuesta metodológica de Bardin (1996) que está compuesta de tres etapas básicas de trabajo, preanálisis, exploración del material y tratamiento de los resultados, las cuales se describieron anteriormente; estableciendo primero una lectura fluctuante de todo el material, para evaluar las respuestas. Luego, se separaron las respuestas en tres categorías, "totalmente correctas, parcialmente correctas e incorrectas" contando para cada una de estas el número de respuestas. En este proceso inicial de categorización obtendremos el *corpus* de la investigación.

En el siguiente paso se profundizó el análisis del *corpus,* realizando la unitarización y categorización de las respuestas (Cury, 2017). Se realizó la interpretación de los datos obtenidos, estableciendo las categorías. Dado que no se tiene como objetivo verificar alguna tipología ya construida, se decidió por la construcción de categorías emergentes, es decir, el autor construirá una categorización a partir de las producciones de los alumnos.

Por último, en la fase de tratamiento de los resultados "las categorías fueron presentadas por medio de cuadros con los valores de las frecuencias y porcentajes o con la producción de un 'texto-síntesis' que resume cada una, incluyéndose, también, ejemplos de los errores cometidos" (Cury, Bisognin y Bisognin, 2008, p. 3).

Es importante destacar que todo el análisis y categorización de los errores se ha realizado tomando como base la producción escrita de los alumnos. En ese sentido y dadas las restricciones que se han tenido al momento de obtener la información para su respectivo procesamiento, no se contempló desde el inicio tener entrevistas individuales con los alumnos que participaron en la investigación. Tampocó fue posible entrevistar a los docentes encargados de estos grupos de clase para profundizar en algunos elementos esenciales del proceso de enseñanza, tales como metodología o estrategias didácticas utilizadas para impartir los contenidos en el salón de clases.

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Como ya se mencionó, el trabajo de campo se realizó en 4 centros educativos, Instituto Nacional La Nueva Concepción, ubicado en el departamento de La Nueva Concepción Chalatenango; Instituto Nacional de San Matías, ubicado en el municipio de San Matías; Instituto Nacional de San Pablo Tacachico y el Instituto Católico “San Pablo Apóstol”, ambos institutos ubicados en el municipio de San Pablo Tacachico, departamento de la Libertad.

Se hizo la solicitud con cada uno de los directores de los centros escolares, para tener una sesión de clases de 60 minutos con secciones de alumnos de primer año de bachillerato con el objetivo de pasarles la prueba que se diseñó para obtener la información que se analizó. Es así como se trabajó con los siguientes alumnos: del Instituto de La nueva Concepción se trabajó con una sección de primer año general, con el Instituto de San Matías, se trabajó con una sección de bachillerato técnico, en el Instituto Nacional de San Pablo Tacachico se trabajó con dos secciones de bachillerato general y una de técnico; y en el Instituto Católico se trabajó con una sección de bachillerato técnico. En total, participaron 89 estudiantes. Este proceso se realizó entre septiembre y octubre del año 2021. Se tomaron en cuenta otras instituciones educativas de la zona, pero por el tema del Covid-19 no fue posible visitarlas ya que, al momento de realizar las visitas, estas se encontraban cerradas por detectarse casos positivos entre personal docente y alumnos de la institución.

Al realizar la prueba, se les comentó a los estudiantes el objetivo de la investigación y que no tuvieran ningún temor de realizar el examen. Se les mencionó que realizaran lo que ellos creían conveniente, que no pasaba nada si se equivocaban o si el proceso estaba incorrecto ya que esos procesos eran los que interesaban para realizar las categorizaciones de los errores de cada problema. En cada una de las sesiones de trabajo, el proceso se desarrolló de manera normal, el tiempo que se les dio para realizar la prueba fue suficiente porque los estudiantes entregaron sus pruebas antes o justo al finalizar la sesión de trabajo. Solo mencionar, que, aunque se les pidió que no dejaran ejercicios sin trabajar, varios estudiantes entregaron sus pruebas con problemas sin desarrollar.

La prueba que se diseñó contiene ejercicios y problemas que se resuelven utilizando ecuaciones lineales. Como el objetivo es realizar un análisis de errores, se necesita analizar los procesos de los estudiantes para desarrollar los ejercicios, así que por esta razón solo se incluyeron preguntas abiertas y no se optó por colocar preguntas de otro tipo como preguntas de opción múltiple o preguntas de falso – verdadero.

Para diseñar la prueba, se revisaron pruebas PAES de años anteriores. Se revisaron las pruebas de año 2008 al 2014. Se retomaron algunos ejercicios de estas pruebas, para que el nivel del instrumento fuera acorde al nivel de exigencia de esta prueba estandarizada. También se retomaron ejercicios de libros de texto del programa ESMATE de séptimo grado porque es en ese grado que se estudia el tema de las ecuaciones lineales, se revisaron algunos libros de primer año de bachillerato del programa de estudios vigente hasta el año 2008 porque según ese programa, el tema de ecuaciones lineales se retomaba en primer año de bachillerato. Por último, se retomaron ejercicios de algunos libros de Precálculo; con este último, se tuvo especial cuidado en incluir problemas acordes al nivel de exigencia del programa ESMATE. Primeramente, se diseñaron 20 ejercicios y problemas. Esta colección de ejercicios pasó a manos de los tutores para su revisión y es así como se acordó dejar únicamente 6 ejercicios y 2 problemas de aplicación.

Después de recolectar la información, con las sesiones de trabajo que se tuvo con las diferentes secciones de alumnos que participaron en la investigación, se procedió a analizar los resultados por institución educativa. Aunque, se aclara que en la descripción de los resultados no se hizo la distinción por grupos de las diferentes instituciones educativas, sino que se ha tomado un solo grupo. Se realizó el análisis de cada ejercicio de la prueba, creando para cada uno, una categorización de errores diferente, ya que cada ejercicio tiene su particularidad, los errores cometidos por los estudiantes han variado considerablemente. Algunos se repiten en más de un ejercicio, en otros no.

En cada ejercicio, la primera categoría que se ha definido, son las respuestas correctas. Se menciona cuántos estudiantes resolvieron de forma correcta el ejercicio y se brinda el porcentaje. Luego, tanto en esta categoría como las demás que se han definido para cada ejercicio, se ilustra cada error y se describe la situación que se presenta. Al final, se brinda un cuadro resumen sobre los resultados de cada categoría por institución educativa.

En estos cuadros resúmenes se utiliza la siguiente abreviatura para referirse a cada institución educativa:

PA: Instituto Católico “San Pablo Apóstol”

PTGB: Instituto Nacional de San Pablo Tacachico (1 General B)

PTT: Instituto Nacional de San Pablo Tacachico (1 Técnico A)

PTG: Instituto Nacional de San Pablo Tacachico (1 General A)

LA: Instituto Nacional de La Nueva Concepción (1 General)

SM: Instituto Nacional de San Matías (1 Técnico)

Los ejercicios de la prueba que se diseñó para obtener la información que se analizó, son los siguientes[2]:

1) Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:
   a) $8a - 30 = 2a - 6$
   b) $2.25n + 1.97 = 3.75n - 4.03$
   c) $3(-2x + 1) = -x$
   d) $8 - \frac{5}{y} = 2 + \frac{3}{y}$
   e) $(3m - 2)^2 = (m - 5)(9m + 4)$
   f) $\frac{3x+4}{2} + 2 = 14 - x$
2) Resuelva cada uno de los siguientes problemas, planteando una ecuación lineal para cada uno.
   a) La mitad de un número supera en 2 a un tercio de este. Determine el número.
   b) Las entradas de un parque ecológico valen $5 para los extranjeros y $2 para salvadoreños, Sabiendo que asistieron 280 personas y que se recaudaron $800, ¿cuántos extranjeros ingresaron al parque?

Ahora damos paso al análisis de los resultados de cada ejercicio

7.1. Ejercicio 1 a)

La ecuación que se planteó en el literal a es la siguiente:

$$8a - 30 = 2a - 6$$

Se revisaron las pruebas de los estudiantes que resolvieron este problema, ya sea de forma correcta o de forma incorrecta. En primer lugar, se separaron las respuestas correctas, las cuales forman la primera categoría y después se analizaron las respuestas incorrectas. Para la categorización se tiene en cuenta sólo lo que el alumno realiza sin considerar qué no entiende; es

[2] Para ver el instrumento completo ir a anexos.

decir, no se profundiza en determinar por qué realizó determinado proceso o si comprendió cada paso que realizó en la solución del problema.

Una vez identificados los errores en este ejercicio, se determinaron las frecuencias con las que se produjeron; es así como se formuló la siguiente categoría de errores:

7.1.1. Respuestas correctas.

En esta categoría consideramos todas las soluciones correctas. Esta ecuación, la resolvieron de forma correcta 18 estudiantes, lo que equivale al 20.22 % del total de alumnos que se les pasó el instrumento de evaluación. La mayoría de los alumnos que contestaron bien realizaron el proceso tradicional que se sigue para resolver una ecuación lineal: colocar las incógnitas al lado izquierdo y los valores conocidos al lado derecho de la igualdad. Solamente un estudiante hizo lo contrario: colocar las incógnitas al lado derecho y los valores conocidos al lado izquierdo de la igualdad. Estas soluciones se muestran en la figura 1 y figura 2:

Figura 1

Respuestas correctas. Forma tradicional.

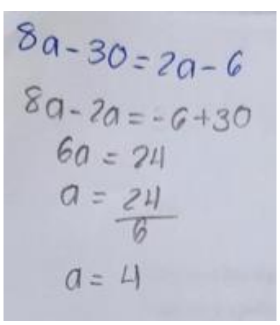
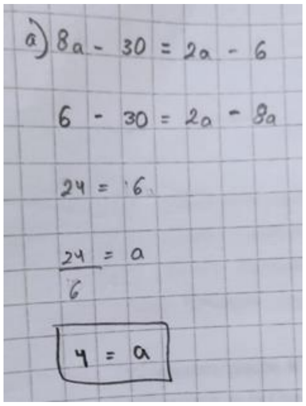


Figura 2

El estudiante trasladó las incógnitas al lado derecho.

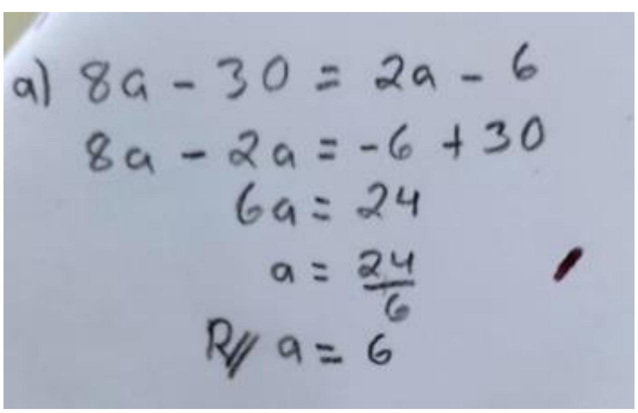


7.1.2. Errores en las operaciones con números enteros.

Se tomaron aquellos errores al realizar operaciones con números enteros. En este caso, solamente hubo dos alumnos que se equivocaron en una división de números enteros, lo que representa el 2.25 %. Realizaron de forma correcta todo el proceso, pero al efectuar la división para calcular el valor de la incógnita, se equivocaron.

Figura 3

Error en las operaciones con números enteros.



Como podemos observar en la imagen, el alumno domina el proceso para resolver una ecuación lineal, pero erró en el último paso. En este caso, puede ser una desatención del estudiante al resolver la ecuación y al final, posiblemente no se dio un proceso de revisión del trabajo realizado para verificar la respuesta final.

7.1.3. Omite el signo de la igualdad o la variable.

En esta categoría se consideran aquellos errores que tienen que ver con la omisión del signo de igualdad y aquellos en los cuales el estudiante se olvida de colocar la variable. Este error se visualizó en 8 exámenes, lo que representa el 8.99 % del total de alumnos que realizaron la prueba.

En la figura 4, se observa que el estudiante omite por completo el símbolo de igualdad y reduce todos los términos de la ecuación, aunque también de forma correcta. En este caso, puede ser por el hecho de que el estudiante no recuerda el significado de una igualdad. De igual forma en la figura 5, podemos apreciar que el estudiante omite también el signo de igualdad, pero en el proceso que realiza, se observa que procedió a trasladar todos los términos al lado izquierdo de la ecuación, hizo la reducción de términos semejantes, y luego ya no siguió. Posiblemente pensó que la expresión a la que llegó era la solución de la ecuación lineal.

Figura 4

Omite el símbolo de igualdad.

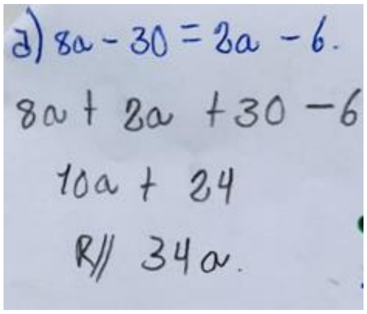
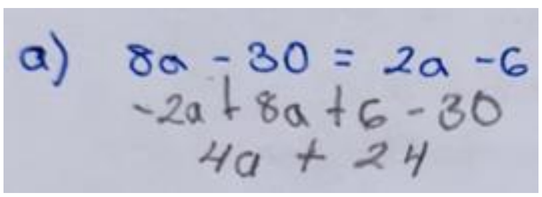


Figura 5

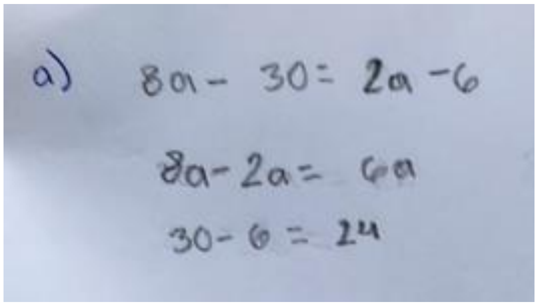
Omite el símbolo de igualdad.



Hay otro caso particular en esta categoría. Algunos estudiantes hacen bien la transposición de términos, aunque no dejan evidencia de este proceso. Luego, reducen los términos semejantes por separado, pero después ya no siguen resolviendo la ecuación porque ya no logran visualizar los miembros izquierdo y derecho de la ecuación. Se pierde el sentido de la igualdad en el proceso que realizaron. Tal como aparece en la figura 6.

Figura 6

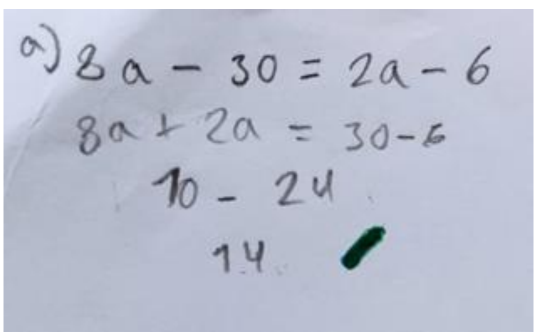
Reducen por separado las variables y los valores conocidos.



Por otra parte, según se muestra en la figura 7, algunos alumnos también cometieron el error de no colocar la incógnita en el proceso de solución. Hacen la transposición de términos (ya sea de forma correcta o incorrecta), luego omiten la incógnita y solamente trabajan con los coeficientes de las incógnitas y los valores conocidos. Esto, posiblemente se deba, a que los estudiantes todavía tienen problemas de pasar de los procedimientos aritméticos a los procedimientos algebraicos.

Figura 7

El estudiante omite el signo de igualdad y la variable.



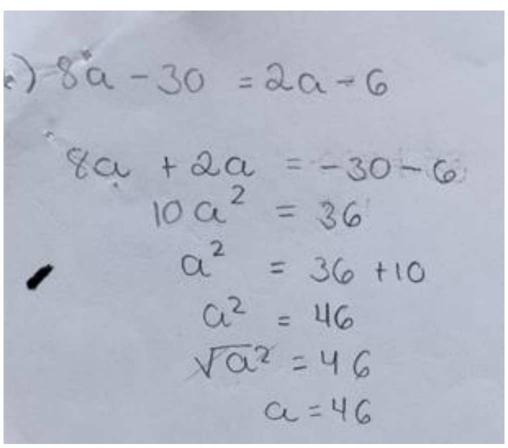
7.1.4. Error en la reducción de términos semejantes.

Es decir, aquellos errores en los cuales el estudiante en lugar de sumar o restar las incógnitas (según el signo), las multiplica. Este tipo de error lo cometieron 14 estudiantes, lo que representa el 15.73 %.

Al revisar las soluciones incorrectas proporcionadas por los estudiantes, se pueden observar procedimiento en los cuales los estudiantes realizan de forma incorrecta la reducción de términos semejantes. La idea que ellos tienen de reducir estos términos no es la sumar o restar los coeficientes; sino que aparte de reducir los coeficientes, multiplican la parte literal. Como se puede apreciar en la figura 8, en la cual el alumno suma 8+2=10 y la parte literal la multiplica, dejando como respuesta a la operación $8a + 2a = 10a^2$.

Figura 8

Error en la reducción de términos semejantes.



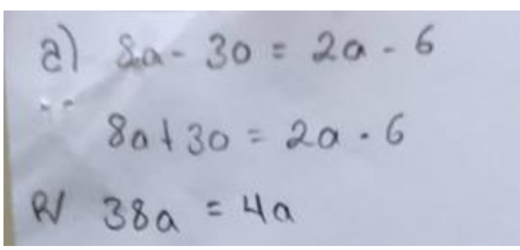
Vale mencionar que, en la imagen anterior, el alumno también se equivoca en la transposición de términos, pero este error se analiza más adelante.

Siguiendo con la solución que se ilustra en la figura 8, podemos observar que al final, el alumno ha buscado despejar la incógnita y como en el proceso (incorrecto) la variable aparece elevada al cuadrado, entonces ha eliminado el cuadrado calculando la raíz cuadrada pero solamente al lado izquierdo donde se ubica la incógnita. Esto nos arroja información valiosa, ya que el estudiante sabe que la incógnita debe quedar elevada a la potencia 1, pero por otro lado, desconoce (o no se recuerda) de las operaciones de las igualdades ya que solamente desarrolló la operación de la raíz cuadrada a un miembro de la ecuación.

En esta misma categoría, también encontramos errores en los cuales los estudiantes suman incógnitas y valores conocidos. Es decir, los estudiantes no reconocen cuáles son los términos semejantes y para él, es lo mismo sumar una incógnita con un término independiente como se ilustra en la figura 9 en donde el estudiante ha realizado, de manera incorrecta, la operación $8a + 30 = 38a$.

Figura 9

El estudiante no reconoce los términos semejantes.

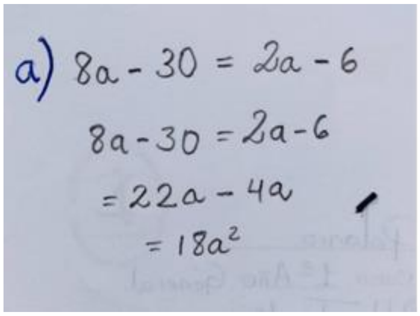


Nota: el alumno reduce incógnitas con términos independientes.

También, aparecen algunos casos, en los cuales se da una mezcla de ambos errores: no distinguen entre incógnitas y términos independientes y al reducir las incógnitas, las elevan al cuadrado. Este caso se ilustra en la figura 10.

Figura 10

No se distingue entre incógnitas y términos independientes.



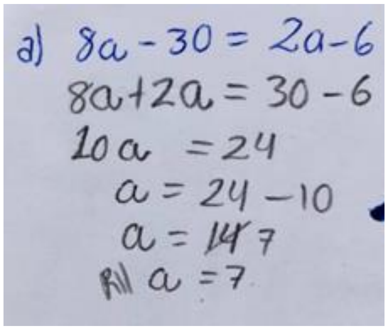
7.1.5. Error en el uso de las propiedades de las igualdades.

En esta categoría se consideran aquellos procesos en los cuales los alumnos se equivocaron al colocar las incógnitas a un lado de la ecuación y los valores conocidos al otro lado, donde no cambiaron el signo al término respectivo; o cuando despejaron la incógnita. Es decir, se equivocaron al utilizar las propiedades de las igualdades. Este tipo de errores se observó en 14 pruebas, lo que representa el 15.73 % de las pruebas realizadas. En este caso, también es importante mencionar que todos los alumnos que trabajaron este ejercicio buscaron trasladar las incógnitas al lado izquierdo y los valores conocidos al lado derecho de la igualdad.

En la figura 11 podemos observar que el alumno hace la transposición de términos, pero no le cambia el signo al término $2a$ y lo escribe siempre positivo. Puede ser que el estudiante tiene la creencia que el signo de este término es el que está afectando a 6 y por eso lo paso al otro lado con signo positivo.

Figura 11

Error en la transposición de términos

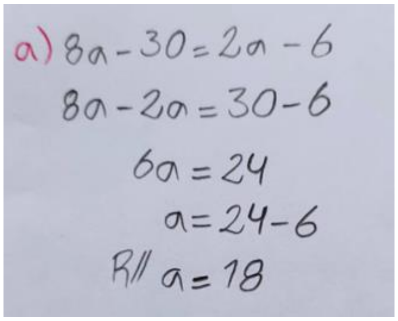


También, aparecen soluciones en las cuales los alumnos se equivocaron al realizar el despeje final. No aplicaron la operación inversa. Específicamente, no pasaron al otro lado de la igualdad a dividir, una cantidad que estaba multiplicando en el otro lado. En términos formales, los alumnos no utilizaron de forma correcta la propiedad de las igualdades que dice: si dividimos ambos miembros de la expresión por el mismo valor, la igualdad se mantiene.

Como se puede observar en la figura 12, los alumnos realizaron de forma correcta los primeros pasos para la solución, hacen la transposición de términos y reducen de forma correcta los términos semejantes, pero al llegar a este punto, en lugar de pasar a dividir el coeficiente de la incógnita al otro lado de la igualdad, lo pasaron a restar. No podemos decir que el estudiante no sabe resolver este tipo de problemas.

Figura 12

Error al despejar la incógnita.



7.1.6. Error en la concepción de la solución de una ecuación lineal.

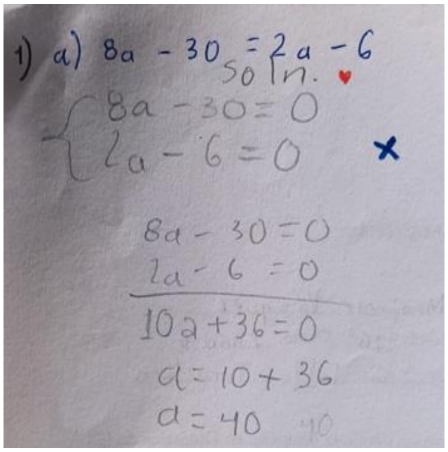
En esta categoría, tomamos aquellas pruebas en las cuales han confundido la ecuación lineal con otro tipo de ecuaciones o han trabajado la solución de la ecuación como un proceso en el cual deben reducir términos semejantes nada más y no llegar a un valor numérico para la incógnita, que satisface la igualdad. También, entran en esta categoría, aquellas pruebas en las cuales los jóvenes trabajaron el problema y se observan que hay intentos por resolver la ecuación, pero con procesos que no tienen relación con la solución de una ecuación lineal.

Este error se encontró en 11 pruebas, lo que representa el 4.5 % de los alumnos que respondieron el examen.

En la figura 13 podemos observar que el estudiante cree que, para resolver la ecuación lineal, debe tomar cada miembro de la ecuación lineal e igualarlos a cero. En este caso compara una ecuación lineal con una ecuación cuadrática y posiblemente por esa situación procedió de esa forma. Pero luego reduce términos semejantes, resolviendo ambas ecuaciones lineales como un sistema de ecuaciones lineales. Vemos que en este ejercicio ha procedido de varias formas diferentes y no hay una idea clara de cómo resolver la ecuación.

Figura 13

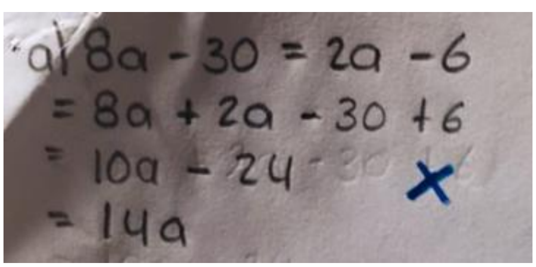
El proceso no corresponde a la solución de una ecuación lineal.



En la figura 14, el estudiante lo que hace es trasladar todos los términos a un lado de la ecuación, equivocadamente, porque no realiza de forma correcta la transposición de términos, y luego reduce los términos semejantes sin despejar la incógnita. En esta situación, lo que pasa es que el estudiante confunde el proceso de resolver una ecuación literal con reducir los términos semejantes nada más.

Figura 14

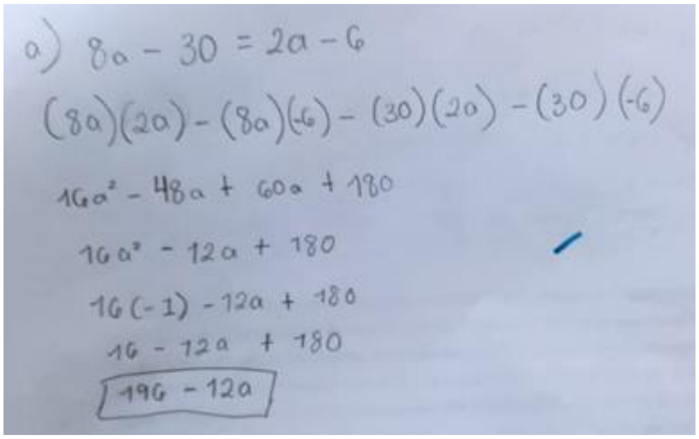
El proceso de solución consistió en reducir términos.



En la figura 15 podemos observar el mismo tipo de error. El alumno toma los lados de la ecuación como binomios y los multiplica, luego reduce la expresión y deja la respuesta final como un binomio.

Figura 15

El alumno multiplica ambos lados de la ecuación como binomios



En la figura 16 de igual manera, el estudiante, de alguna manera reduce los términos y luego elimina la variable y deja como respuesta un valor numérico y en la figura 17 se observa que el estudiante multiplica los términos de cada lado de la ecuación, elimina el signo de la igualdad y deja como respuesta una expresión en términos de la incógnita a. En estos ejemplos que hemos analizado, se observa que el estudiante no tiene una idea clara de lo que significa resolver una ecuación lineal.

Figura 16

Se sigue un proceso que no corresponde al de una ecuación lineal.

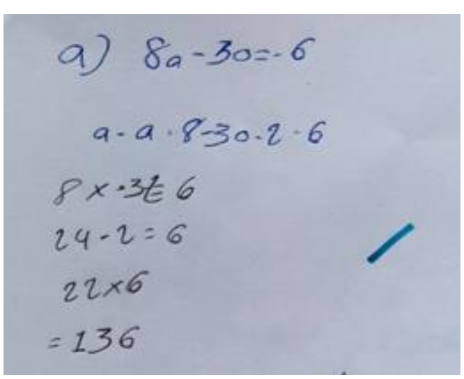
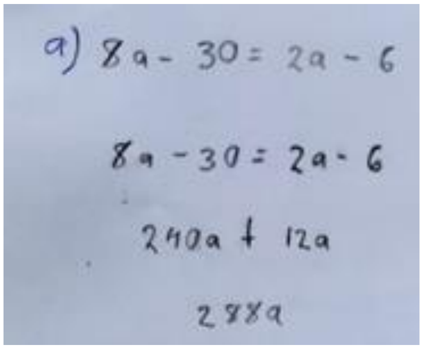


Figura 17

El proceso no corresponde a la solución de una ecuación lineal.



7.1.7. Incompleto.

En esta categoría, se han tomado los procesos en los cuales el estudiante inició de forma correcta la solución del ejercicio, pero no lo terminó. Al revisar las pruebas, se encontró que 6 alumnos dejaron el ejercicio 1 de forma incompleta, lo que equivale al 6.74 % del total de alumnos que participaron en la investigación. Esta situación se ilustra con las siguientes imágenes. En la figura 18, aparte que la solución se deja incompleta, el estudiante reproduce el error en la reducción de términos semejantes multiplicando la variable.

Figura 18

El estudiante deja la solución incompleta, aunque previamente comete otro tipo de error.

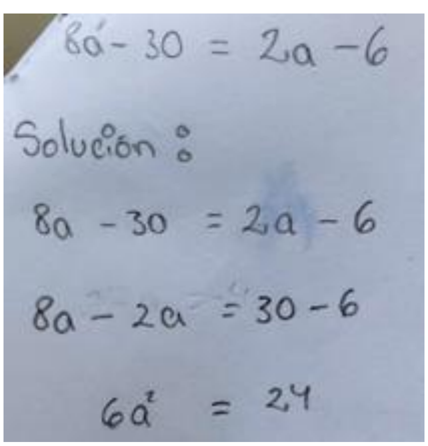
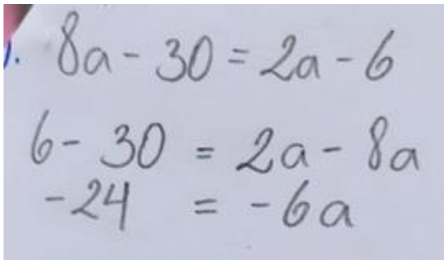


Figura 19

La solución de la ecuación está incompleta.

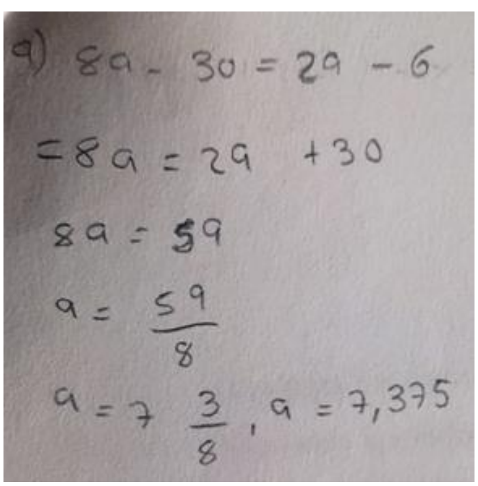


7.1.8. Error en la transcripción del ejercicio.

En dos pruebas, lo equivale al 2.25 %, se encontró que los alumnos se equivocaron en la transcripción del ejercicio. En ese caso nos referimos a soluciones de alumnos que al escribir el problema confundieron una letra o un número por otro. Como se observa en la figura 20, el alumno confundió el término $2a$ con 29 y luego trabajó con ese número.

Figura 20

El alumno confundió el término $2a$ *con 29.*

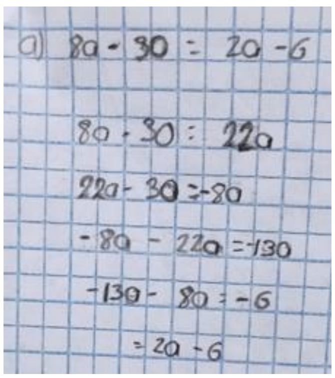


7.1.9. No se pueden interpretar.

Por último, agrupamos en esta categoría todas aquellas soluciones que no pueden interpretarse. Encontramos que 10 alumnos, lo que equivale al 11.24 % del total, presentan soluciones equivocadas, pero los errores cometidos en este caso no se pueden agrupar en ninguno de los anteriores.

Figura 21

No se puede interpretar.



Nota: La solución del ejercicio es incorrecta pero no se puede interpretar el tipo de error que el alumno cometió.

En la siguiente tabla se presenta un resumen de las frecuencias de los errores encontrados en el ejercicio 1.

Tabla 2

Resumen de las frecuencias de los errores encontrados en el ejercicio 1 a.

Categoría	**Número de alumnos**						**Total (por categoría)**
Respuestas correctas.	8	5		4	1		**18**
Errores en las operaciones con números enteros.		1		1			**2**
Omite el signo de la igualdad o variable.	1	1	2	1		3	**8**
Error en la reducción de términos semejantes.	2	2	1	3	1	5	**14**
Error en el uso de las propiedades de las igualdades.	7	1	2	3	1		**14**
Error en la concepción de la solución de una ecuación lineal.	1	3	2	2	1	2	**11**
Incompleto	1		1		2	2	**6**
Error en la transcripción del ejercicio		1	1				**2**
No se pueden interpretar.	2	3	3	2			**10**
Total (por institución)	**22**	**17**	**12**	**16**	**6**	**12**	**85**
Institución educativa	**PA**	**PTGB**	**PTT**	**PTG**	**LA**	**SM**	
Fuente: elaboración propia.							

PA: Instituto Católico “San Pablo Apóstol”

PTGB: Instituto Nacional de San Pablo Tacachico (1 General B)

PTT: Instituto Nacional de San Pablo Tacachico (1 Técnico A)

PTG: Instituto Nacional de San Pablo Tacachico (1 General A)

LA: Instituto Nacional de La Nueva Concepción (1 General)

SM: Instituto Nacional de San Matías (1 Técnico)

Como se puede apreciar en el cuadro 2, 85 alumnos (de los 89 que se sometieron a la prueba) desarrollaron el primer ejercicio. Lo que llama la atención es la cantidad de respuestas correctas, ya que era el ejercicio de menor nivel que se consideró en la prueba. Solamente el 20.22 % de los 89 alumnos desarrolló de forma correcta el ejercicio. De forma general, podemos observar que la mayoría de los alumnos posee cierto dominio de la solución de ecuaciones lineales. Los errores que más se repitieron tienen que ver con la reducción de términos semejantes (categoría 4) y las propiedades de las igualdades (categoría 5).

7.2. Ejercicio 1 b)

La ecuación que se planteó en el literal b es la siguiente:

$$2.25n + 1.97 = 3.75n - 4.03$$

Se revisaron las 89 pruebas que se pasaron en total. Luego, se analizaron las pruebas de los estudiantes que resolvieron este problema, ya sea de forma correcta o de forma incorrecta.

De igual forma que se procedió en el ejercicio anterior, se separaron las respuestas correctas, las cuales forman la primera categoría y después se analizaron las respuestas incorrectas.

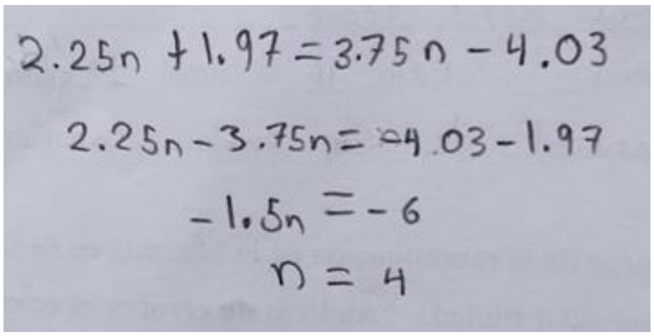
Una vez identificados los errores en este ejercicio, se determinaron las frecuencias con las que se produjeron; es así como se formuló la siguiente categorización de errores:

7.2.1. Respuestas correctas.

Esta ecuación, la resolvieron de forma correcta 7 estudiantes, lo que equivale al 7.87 % del total de alumnos que se les pasó el instrumento de evaluación. Aquí, todas las soluciones se han desarrollado de la forma tradicional: colocar las incógnitas al miembro izquierdo y los valores conocidos en el miembro derecho de la ecuación. Como se puede observar en la figura 22, en este caso el alumno muestra un dominio aceptable del proceso para resolver la ecuación, así como de las operaciones con números decimales.

Figura 22

Respuesta correcta.

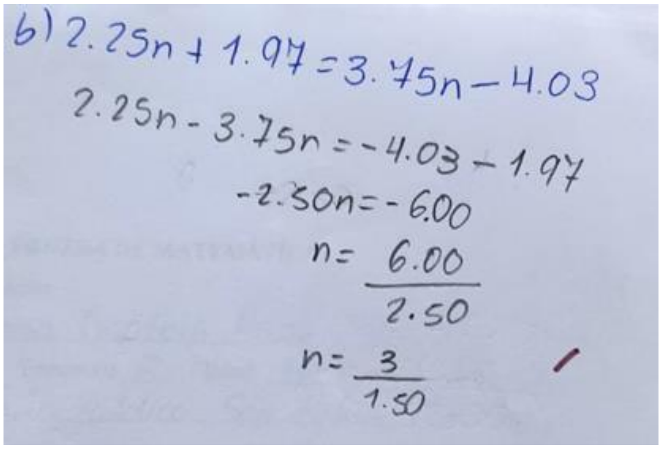


7.2.2. Errores en las operaciones con números decimales.

En este caso, 4 alumnos se equivocaron al realizar operaciones con números enteros. Este número equivale al 4.49 % de los alumnos que realizaron la prueba. Al revisar estas pruebas, se observa que los estudiantes dominan el proceso, pero fallaron en la aplicación de los conocimientos previos. Tal como aparece en la figura 23, el alumno ha despejado la incógnita, pero al simplificar la fracción, se equivoca al dividir 2.50 entre 2. Ha colocado 1.50 en lugar de 1.25. Posiblemente, fue una desatención, ya que domina el proceso para resolver la ecuación.

Figura 23

Error en las operaciones con números decimales.

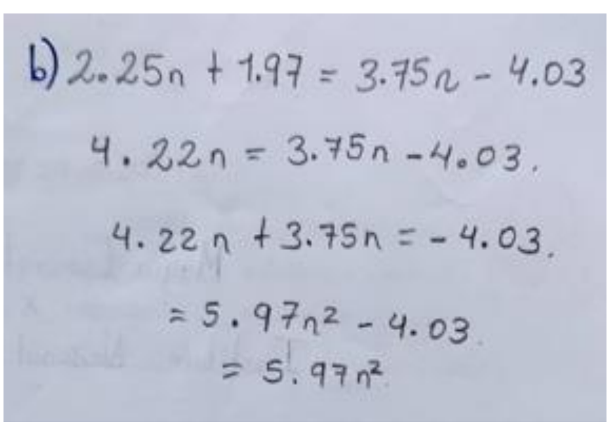


7.2.3. Error en la reducción de términos semejantes

Con respecto a este error, se observó en 13 pruebas, lo que equivale al 14.61 % del total de alumnos que participaron en la investigación. Lo que más se repitió en este tipo de error es que los alumnos sumaban incógnitas con valores conocidos. Es decir, desconocen que solamente se pueden reducir términos que son semejantes. Como por ejemplo en la figura 24, se observa que el alumno no reconoce los términos semejantes y suma $2.25n + 1.97$, obteniendo como resultado (incorrecto) de la operación 4.22n.

Figura 24

Error en la reducción de términos semejantes.



7.2.4. Error en el uso de las propiedades de las igualdades

Este tipo de errores se observó en 25 pruebas, lo que representa el 28.09 % de las pruebas realizadas. Es importante mencionar que todos los alumnos que trabajaron este ítem buscaron trasladar las incógnitas al lado izquierdo y los valores conocidos al lado derecho de la igualdad, porque es el proceso tradicional que los profesores enseñan para resolver una ecuación lineal en tercer ciclo o bachillerato.

Prácticamente, los alumnos se equivocaron al trasladar un término positivo al otro lado de la igualdad y no le cambiaron el signo o viceversa. También, se equivocaron al despejar la incógnita: el coeficiente de la incógnita lo pasaban a sumar o a restar. Aunque, en algunas soluciones si pasaban a dividir el coeficiente, pero le cambiaban el signo. Este tipo de errores es muy común observarlo en el trabajo de los estudiantes. Es donde más problemas presentan al trabajar con ecuaciones lineales. Estas situaciones se ilustran en la figura 25 donde el alumno se equivoca al realizar la transposición de términos, y en la figura 26 donde se equivoca al despejar la incógnita.

Figura 25

Error en el uso de las propiedades de las igualdades.

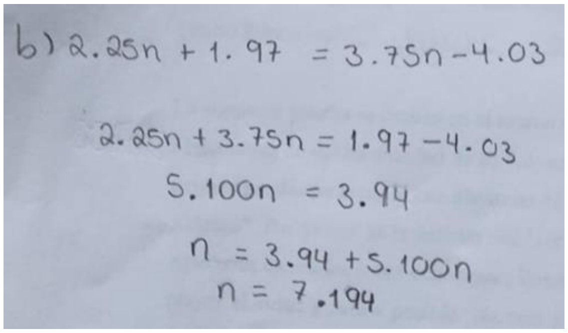
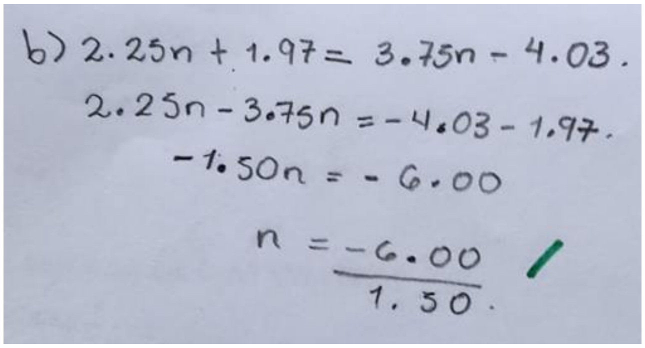


Figura 26

Error en el uso de las propiedades de las igualdades.



7.2.5. *Error en la concepción de la solución de una ecuación lineal.*

Este error se encontró en 7 pruebas, lo que representa el 7.87 % de los alumnos que participaron en la investigación.

Al igual que en el ejercicio anterior agrupamos en esta categoría aquellas soluciones en las cuales los alumnos han trabajado la solución de la ecuación como un proceso en el cual deben reducir términos semejantes nada más y no llegan a un valor numérico para la incógnita. Este error se ilustra en la figura 27 y figura 28. En la figura 27, el estudiante realiza la transposición de términos, desarrolla correctamente la reducción de términos semejantes, pero al despejar la incógnita, no solamente pasa a dividir el coeficiente de la incógnita, sino que también lo acompaña de la incógnita. En la figura 28 el estudiante opera todos los términos sin llegar a determinar un valor para la incógnita. No diferencia entre valores conocidos e incógnitas.

Figura 27

El alumno se equivoca al despejar la incógnita.

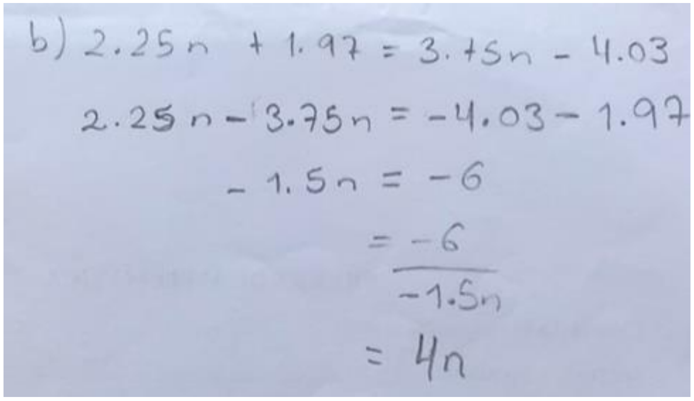
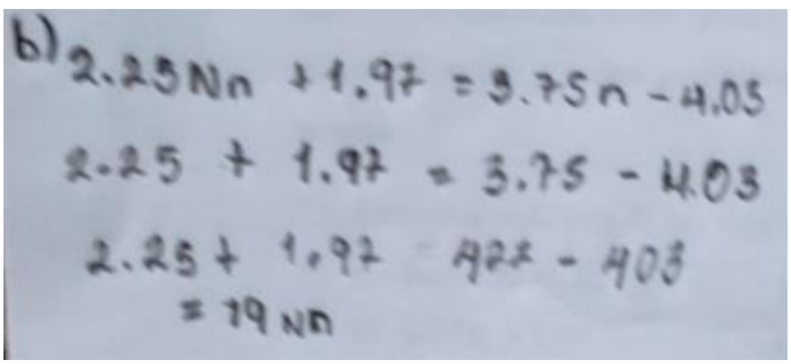


Figura 28

Error en la concepción de la solución de una ecuación lineal.

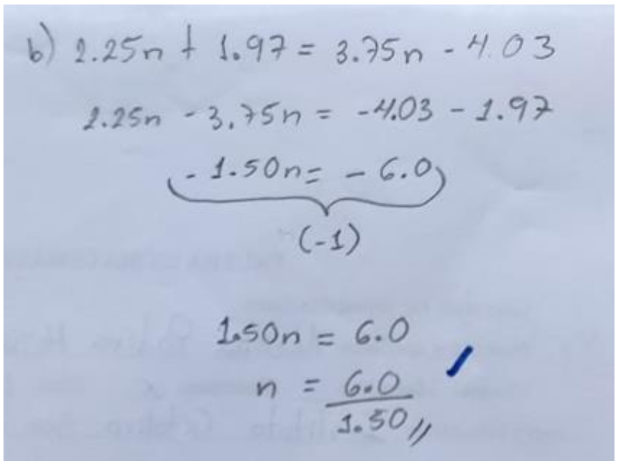


7.2.6. Incompletos

Al revisar las soluciones se encontró que dos estudiantes, lo que representa el 2.25 %, desarrollaron el ejercicio de forma incompleta. Hicieron bien todo el proceso, pero al resolver la última operación para determinar el valor de la incógnita, no la desarrollaron. Posiblemente porque no se recordaron cómo realizar la operación o por otra parte, pensaron que el valor al cual llegaron era la solución de la ecuación lineal. Como se ilustra en la figura 29, el alumno realiza el proceso de forma correcta pero no simplifica la fracción 6/1.5.

Figura 29

Solución incompleta.

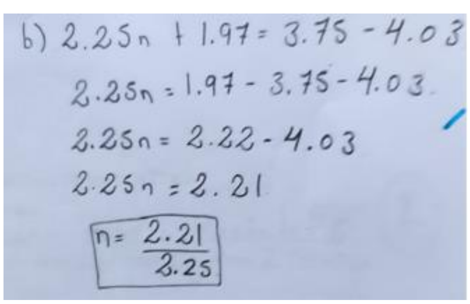


7.2.7. *Error en la transcripción del ejercicio.*

Aunque solamente un alumno (1.12 %) se equivocó por transcribir de forma incorrecta el ejercicio, es importante mencionarlo porque, aunque no se da con mucha frecuencia, pero sí suele suceder que los estudiantes fallan en la solución de algún ejercicio porque no lo transcriben de forma correcta. En la figura 30 podemos observar que el alumno se equivocó al transcribir el ejercicio para desarrollarlo. En lugar de $3.75n$, sol0 copió 3.75.

Figura 30

Error en la transcripción del ejercicio.



7.2.8. No se pueden interpretar

En esta categoría hay 14 soluciones, que equivale al 15.73 % de las pruebas realizadas, del segundo problema que no se pueden interpretar. Es decir, las soluciones son incorrectas pero los errores que presentan, no se pueden colocar en ninguno de los anteriores.

Por ejemplo, en la figura 31 se observa que el alumno se equivoca al reducir términos semejantes y luego, no se comprende el proceso que realizó para llegar a la expresión final.

Figura 31

La solución no puede interpretarse.

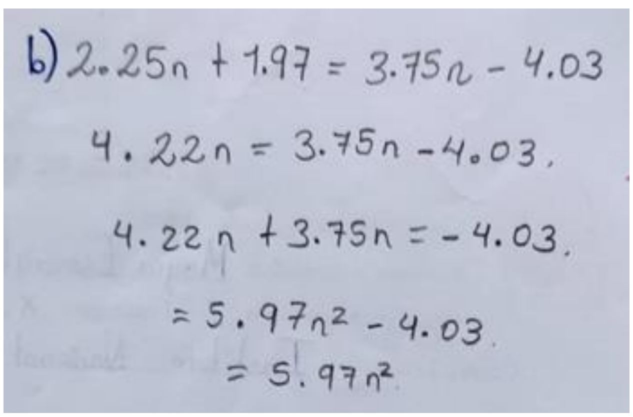


Tabla 3

Resumen de las frecuencias de los errores encontrados en el ejercicio 1 b).

Categoría	**Número de alumnos**						**Total (por categoría)**
Respuestas correctas.	2	5	0	0	0	0	**7**
Errores en las operaciones con números decimales.	2	0	1	0	1	0	**4**
Error en la reducción de términos semejantes.	0	3	2	4	0	4	**13**
Error en el uso de las propiedades de las igualdades.	12	1	1	5	4	2	**25**
Error en la concepción de la solución de una ecuación lineal.	1	4	2	0	0	0	**7**
Incompletos.	1	0	0	1	0	0	**2**
Error en la transcripción del ejercicio.	1	0	0	0	0	0	**1**
No se pueden interpretar.	2	3	2	4	1	2	**14**
Total (por institución)	**21**	**16**	**8**	**14**	**6**	**8**	**73**
	PA	**PTGB**	**PTT**	**PTG**	**LA**	**SM**	
Fuente: elaboración propia.							

Nota. 16 estudiantes no desarrollaron el ejercicio.

7.3. Ejercicio 1 c)

La ecuación que se planteó en el literal c es la siguiente:

$$3(-2x+1) = -x$$

Se revisaron las 89 pruebas que se pasaron en total. Luego, se analizaron las pruebas de los estudiantes que resolvieron este problema, ya sea de forma correcta o de forma incorrecta. Se separaron las respuestas correctas, las cuales forman la primera categoría y después se analizaron las respuestas incorrectas.

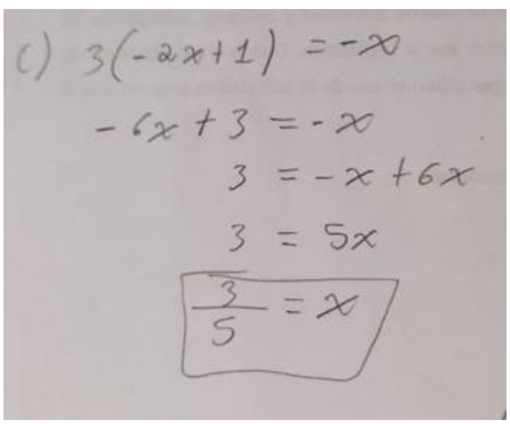
Una vez identificados los errores en este ejercicio, se determinaron las frecuencias con las que se produjeron; es así como se formuló la siguiente categorización de errores:

7.3.1. Respuestas correctas

Esta ecuación, la resolvieron de forma correcta 10 alumnos, lo que equivale al 11.24 % del total de alumnos que resolvieron la prueba. Llama la atención, la solución que aparece en la figura 32, donde el alumno ha colocado las incógnitas al lado derecho de la ecuación y los valores conocidos al lado izquierdo. Esto demuestra un excelente dominio del alumno, resolviendo este tipo de ejercicios.

Figura 32

Respuesta correcta.



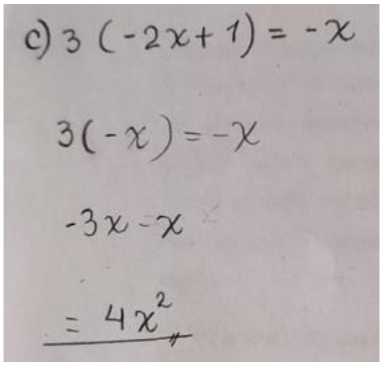
7.3.2. Error en la reducción de términos semejantes

Este error, se observó en 5 pruebas, lo que equivale al 5.62 % del total de alumnos que participaron en la investigación. En este ejercicio también se observó que algunos alumnos no distinguen entre incógnitas y valores conocidos, y terminan reduciéndolos (sumándolos o restándolos según el signo). En la figura 33 se observa que, en esa solución, el alumno operó

$-2x+1$, como si fuera la operación $-2x+x=-x$. Después se observan otros procesos incorrectos, pero, de entrada, el primer error que está a la vista es el que ya hemos comentado.

Figura 33

Error en la reducción de términos semejantes.

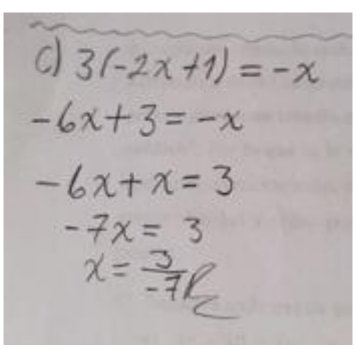


7.3.3. Error en las operaciones con números enteros

Al revisar las soluciones, se ha encontrado que 2 alumnos, lo que representa el 2.25 %, muestran errores de tipo aritméticos. Se han equivocado al resolver alguna operación con números enteros. Por ejemplo, en la figura 34 podemos observar que, en la solución, se desarrolla de forma correcta la propiedad distributiva y la transposición de términos, pero el alumno se equivoca al operar $-6x+x$.

Figura 34

Error al operar números enteros.

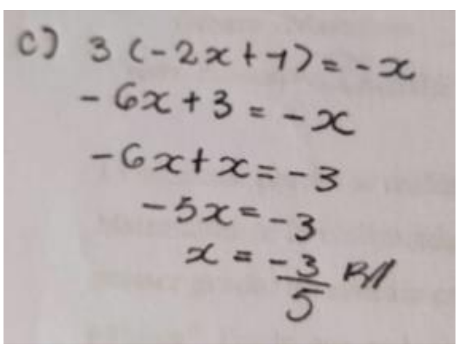


7.3.4. Error en el uso de las propiedades de las igualdades

Revisando las soluciones de este ejercicio se encontró que 11 alumnos, lo que representa el 12.36 % de las pruebas realizadas, se equivocaron al utilizar las propiedades de las igualdades para resolver esta ecuación. Al igual que en los ejercicios anteriores, en esta categoría se agruparon aquellas soluciones donde los alumnos se equivocaron al trasladar un término positivo al otro lado de la igualdad y no le cambiaron el signo o viceversa. También, los que se equivocaron al despejar la incógnita: el coeficiente de la incógnita lo pasaban a sumar o a restar; o lo pasaron a dividir, pero le cambiaron el signo. Tal como aparece en la figura 35, donde el alumno realiza correctamente todo el proceso, pero al despejar la incógnita, el coeficiente lo pasa a dividir, cambiándole el signo.

Figura 35

El alumno se equivocó al despejar la incógnita.

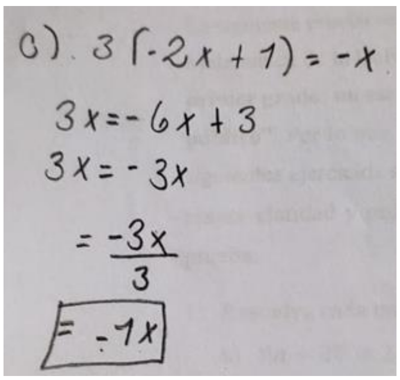


7.3.5. Error en el uso de la propiedad distributiva

Este tipo de errores se observó en 26 pruebas, lo que representa el 29.21 % de las pruebas realizadas. En esta categoría se agruparon aquellas soluciones donde los alumnos se equivocaron al resolver la multiplicación $3(-2x + 1)$. Los procesos que se observaron con mayor frecuencia son aquellos en los cuales los estudiantes solamente multiplican el factor 3 únicamente por uno de los términos que están dentro del paréntesis, resuelven la multiplicación, pero se equivocan en los signos de los resultados, o multiplican ambos lados de la igualdad por el factor 3. Como aparece en la figura 36, donde el alumno, multiplica tanto el lado izquierdo como el derecho por 3. Esta categoría no aparece en los dos ejercicios anteriores porque en estos, no aparece ninguna multiplicación que se resuelva haciendo uso de esta propiedad.

Figura 36

Error al utilizar la propiedad distributiva.



7.3.6. No se pueden interpretar

En esta categoría, hay 18 soluciones, lo que equivale al 20.22 % de las pruebas realizadas, del tercer problema que no se pueden interpretar. Las soluciones son incorrectas pero los errores que se observan no corresponden a ninguna categoría que se ha establecido para este ejercicio. Tal es el caso del proceso que aparece en la figura 37.

Comparando este total con la misma categoría para los ejercicios anteriores, observamos que este ha aumentado. Esto se debe a que en este ejercicio tenían que aplicar un conocimiento previo que no lo aplicaron en los ejercicios anteriores. Así que, de acuerdo con la revisión, debemos mencionar que varios alumnos que participaron en la investigación presentan problemas para aplicar la propiedad distributiva.

Figura 37

El error producido por el estudiante no se puede interpretar.

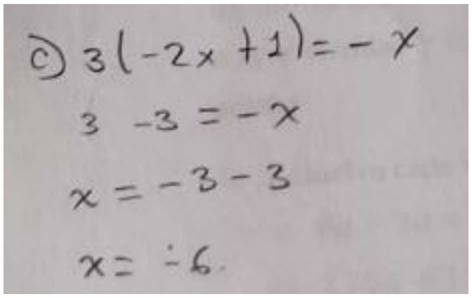


Tabla 4

Resumen de las frecuencias de los errores encontrados en el ejercicio 1 c).

Categoría	**Número de alumnos**						**Total (por categoría)**
Respuestas correctas.	4	6	0	0	0	0	**10**
Error en la reducción de términos semejantes.	1	1	0	1	0	2	**5**
Error en las operaciones con números enteros.	1	0	0	1	0	0	**2**
Error en el uso de las propiedades de las igualdades.	3	2	0	3	2	1	**11**
Error en el uso de la propiedad distributiva.	7	3	5	7	1	3	**26**
No se pueden interpretar.	4	3	5	3	0	3	**18**
Total (por institución)	**20**	**15**	**10**	**15**	**3**	**9**	**72**
	PA	**PTGB**	**PTT**	**PTG**	**LA**	**SM**	
Fuente: elaboración propia.							

Nota. 17 estudiantes no desarrollaron el ejercicio

7.4. Ejercicio 1 d)

La ecuación que se planteó en el literal d es la siguiente:

$$8-\frac{5}{y}=2+\frac{3}{y}$$

Esta ecuación ya tiene un nivel de complejidad mayor que las anteriores, ya que los alumnos tenían que utilizar nuevos procedimientos para resolverla, como por ejemplo multiplicar toda la ecuación por el mínimo común de los denominadores o realizar las operaciones con fracciones.

Se revisaron las 89 pruebas que se pasaron en total. Luego, se analizaron las pruebas de los alumnos que resolvieron este ejercicio, ya sea de forma correcta o de forma incorrecta. Se separaron las respuestas correctas, las cuales forman la primera categoría y después se analizaron las respuestas incorrectas.

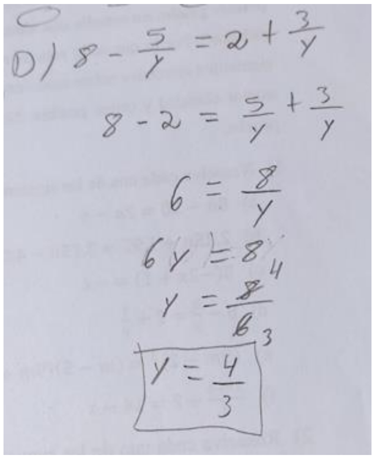
Una vez identificados los errores en este ejercicio, se determinaron las frecuencias con las que se produjeron; es así como se formuló la siguiente categorización de errores:

7.4.1. Respuestas correctas

Esta ecuación, la resolvieron de forma correcta 8 estudiantes, lo que equivale al 8.99 % del total de alumnos que resolvieron la prueba. En la figura 38 se muestra la solución de uno de los alumnos que resolvió de forma correcta la ecuación:

Figura 38

Respuesta correcta.

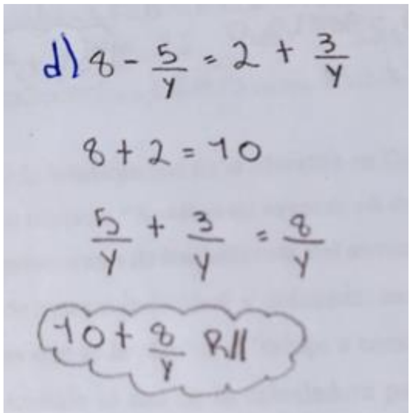


7.4.2. Omite el signo de igualdad o variable

Este error se observó en 3 pruebas, lo que equivale al 3.37 % del total de alumnos que participaron en la investigación. En la figura 39, se observa que el estudiante omite por completo el símbolo de igualdad de la ecuación. Reduce por separado (de forma incorrecta) los términos independientes y los términos que contienen la incógnita. Al final, deja como respuesta una expresión formada por la suma del término que obtuvo como resultado de reducir los términos independientes y el término que obtuvo al reducir las variables. Podemos observar que el alumno ignora por completo el hecho que debe llegar a un valor numérico para la incógnita; o a lo mejor, la idea que tiene sobre resolver ese tipo de ecuación es solamente operar los términos que se pueden reducir.

Figura 39

Omite el signo de igualdad o variable.

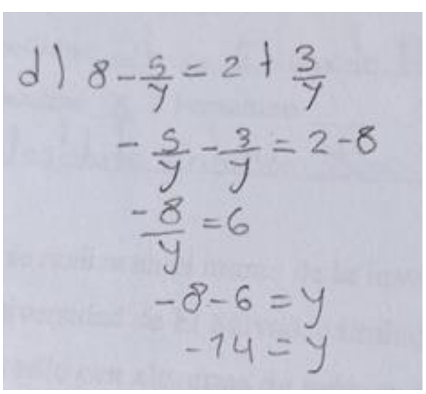


7.4.3. *Error al operar números enteros*

Al revisar las soluciones, se ha encontrado que 2 estudiantes, lo que representa el 2.25 %, muestran errores al realizar sumas o restas con números enteros. En la figura 40, se observa que un alumno se equivocó al reducir los términos independientes, ya que desarrolló de forma incorrecta la operación $2-8=6$, siendo el resultado correcto -6.

Figura 40

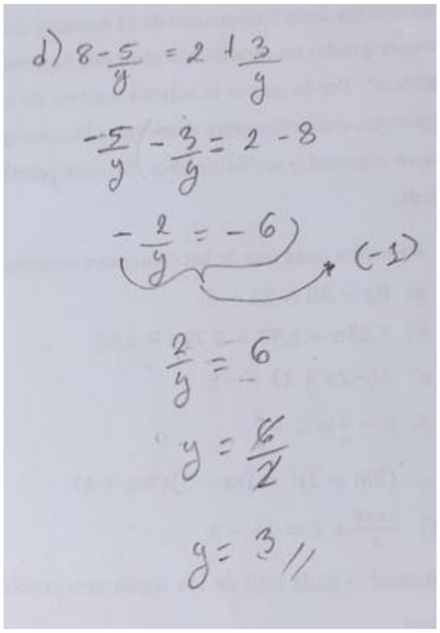
Error al reducir términos.



Por otra parte, en la figura 41 podemos apreciar que el alumno cometió un error del mismo tipo. Se equivocó al operar $-5-3$ al reducir las variables y lo desarrolló como $5-3$.

Figura 41

Error al reducir términos.



7.4.4. Error en las operaciones con fracciones

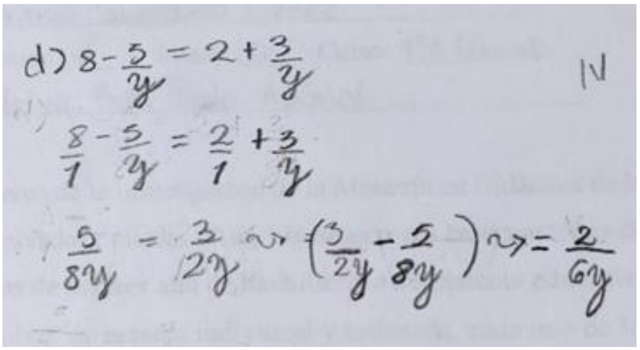
Revisando las soluciones de este ejercicio se encontró que 11 alumnos, lo que representa el 15.73 % de las pruebas realizadas, se equivocaron al operar fracciones. Esta categoría no se había considerado en los ejercicios anteriores porque no aparecían términos fraccionarios.

Según Abrate (2006) citado por Pérez (2019), los errores en operaciones con fracciones contienen los que comenten los estudiantes al dividir una fracción entre un número, al multiplicar y dividir fracciones, o al calcular el mínimo común múltiplo. También, es común observar que los alumnos se equivocan al sumar o restar fracciones, utilizan procesos similares al de la multiplicación o división.

En la figura 42 podemos observar que para sumar o restar fracciones, el alumno realiza un proceso similar al de dividir fracciones: multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y ese término lo coloca en el denominador de la fracción resultante. Luego, multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda y ese término es el numerador de la nueva fracción.

Figura 42

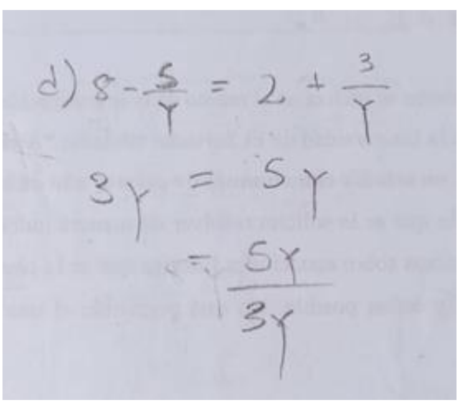
Error en las operaciones con fracciones.



En la figura 43, se puede apreciar otro proceso diferente: el alumno opera los numeradores y a ese número le agrega la variable que aparece en el denominador.

Figura 43

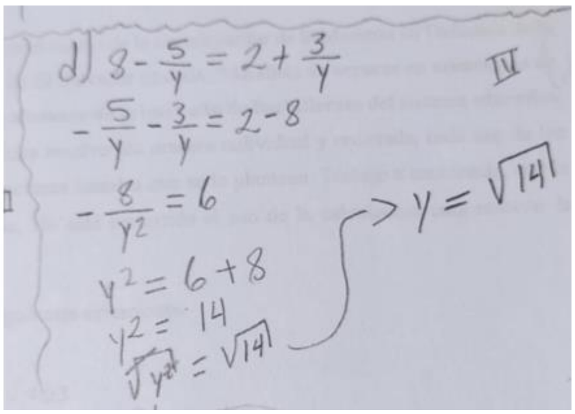
Error en las operaciones con fracciones.



Por último, en la figura 44, se observa que el alumno hace correctamente la transposición de términos y realiza las operaciones con números enteros, pero para reducir las fracciones de igual denominador lo que hace es que suma los numeradores y multiplica los denominadores, es así como al operar $-\frac{5}{y}-\frac{3}{y}$ ha llegado al resultado $-\frac{8}{y^2}$.

Figura 44

Error en las operaciones con fracciones.



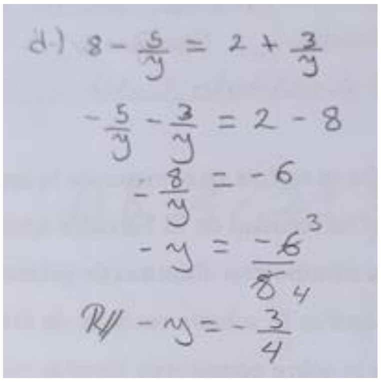
7.4.5. Error en el uso de las propiedades de las igualdades

Revisando las soluciones de este ejercicio se encontró que 13 alumnos, lo que representa el 14.61 % de las pruebas realizadas, se equivocaron al utilizar las propiedades de las igualdades para resolver esta ecuación. Al igual que en los ejercicios anteriores (literales a, b y c), en esta categoría se agruparon aquellas soluciones donde los alumnos se equivocaron al trasladar un término positivo al otro lado de la igualdad y no le cambiaron el signo o viceversa. También, los que se equivocaron al despejar la incógnita: el coeficiente de la incógnita lo pasaban a sumar o a restar; o lo pasaron a dividir, pero le cambiaron el signo.

En la figura 45 observamos que, al despejar la incógnita, el alumno omite el numerador 1 en el lado izquierdo de la ecuación y realiza el proceso como que esté resolviendo la ecuación $-8y=-6$, en lugar de la ecuación $-\frac{8}{y}=-6$.

Figura 45

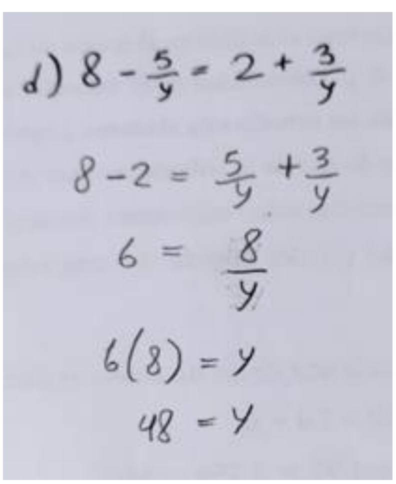
El alumno se equivocó al despejar la incógnita.



En la figura 46, de igual manera se puede apreciar un proceso similar: el alumno realiza los primeros pasos de forma correcta, pero se equivoca al resolver la ecuación $6=\frac{8}{y}$. El alumno deduce incorrectamente que esta ecuación es equivalente a la ecuación $6=\frac{y}{8}$, y la resuelva de esa manera, despejando la incógnita, pasando a multiplicar el número 8 al otro lado de la igualdad.

Figura 46

El alumno se equivocó al despejar la incógnita.

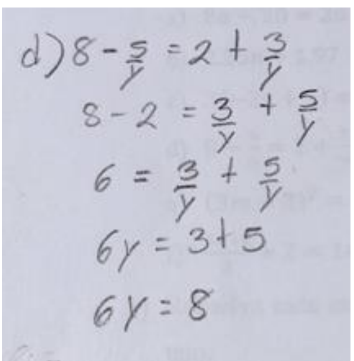


7.4.6. Incompletos

Al revisar las soluciones de los ejercicios se encontró que un alumno, lo que representa el 1.12 % del total, realizó el ejercicio de forma incompleta. En la figura 47 se puede observar que el estudiante tiene dominio del proceso para resolver una ecuación de este tipo, ya que realiza de forma correcta la transposición de términos, suma los números enteros y multiplica toda la ecuación por el mínimo común múltiplo para eliminar la variable de los denominadores. Pero, al final no despeja la variable.

Figura 47

Proceso incompleto.



7.4.7. No se pueden interpretar

En esta categoría hay 19 soluciones, lo que equivale al 21.35 % de las pruebas realizadas, del tercer problema que no se pueden interpretar. Las soluciones son incorrectas pero los errores que se observan no corresponden a ninguna categoría que se ha establecido para este ejercicio. Tal es el caso del proceso que aparece en la figura 48 en donde el alumno realiza la transposición de términos, pero luego realiza una especie de simplificación que le conduce a un resultado que no se puede interpretar cómo lo obtuvo y en la figura 49 donde no se puede explicar de qué forma el alumno ha trabajado las fracciones.

Comparando este total con la misma categoría para el ejercicio anterior, se observa que esta ha aumentado. Esto se debe a que en este ejercicio tenían que aplicar conocimientos de fracciones y de acuerdo con la revisión de las pruebas que realizaron los estudiantes, se puede observar que a los alumnos se les dificulta operar fracciones. Se evidencia poco dominio sobre este tema.

Figura 48

El error producido por el estudiante no se puede interpretar.

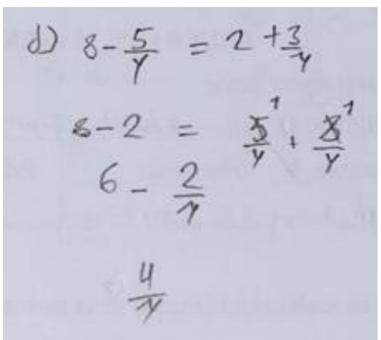


Figura 49

El error producido por el estudiante no se puede interpretar.

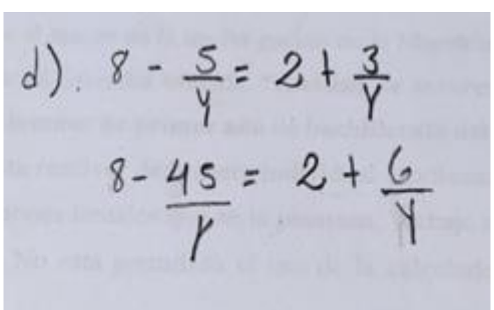


Tabla 5

Resumen de las frecuencias de los errores encontrados en el ejercicio 1 d).

Categoría	**Número de alumnos**						**Total (por categoría)**
Respuestas correctas.	1	5	0	2	0	0	**8**
Omite el signo de igualdad o variable.	0	0	1	1	0	1	**3**
Error al operar números enteros.	2	0	0	0	0	0	**2**
Error en las operaciones con fracciones.	6	1	1	5	0	1	**14**
Error en el uso de las propiedades de las igualdades.	5	3	3	0	1	1	**13**
Incompletos.	0	0	0	0	1	0	**1**
No se pueden interpretar.	2	5	3	4	0	5	**19**
Total (por institución)	**16**	**14**	**8**	**12**	**2**	**8**	**60**
	PA	**PTGB**	**PTT**	**PTG**	**LA**	**SM**	
Fuente: elaboración propia.							

Nota: 29 estudiantes no desarrollaron el ejercicio.

7.5. Ejercicio 1 e)

La ecuación que se planteó en el literal e es la siguiente:

$$(3m-2)^2 = (m-5)(9m+4)$$

Esta ecuación es de mayor complejidad que las anteriores, ya que los alumnos deben recordar otros temas de álgebra para desarrollar la ecuación. Tales como productos notables y multiplicación de binomios.

Se revisaron las 89 pruebas que se pasaron en total. Luego, se analizaron las pruebas de los alumnos que resolvieron este ejercicio, ya sea de forma correcta o de forma incorrecta. Se separaron las respuestas correctas, las cuales forman la primera categoría y después se analizaron las respuestas incorrectas. Cabe mencionar que en este ejercicio aumentó considerablemente el número de pruebas en las cuales no se puede interpretar el proceso que desarrollaron los alumnos para resolver la ecuación.

Una vez identificados los errores en este ejercicio, se determinaron las frecuencias con las que se produjeron; es así como se formuló la siguiente categorización de errores:

7.5.1. Respuestas correctas

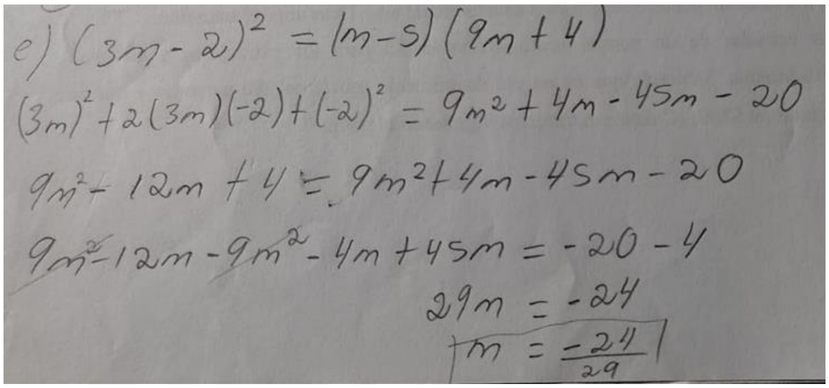
Esta ecuación la resolvió correctamente un alumno, lo que equivale al 1.12 % del total de alumnos que realizaron la prueba resolvió de forma correcta este ejercicio. Como se mencionó anteriormente, esta ecuación es de mayor complejidad y requiere que el alumno utilice algunos temas de álgebra para resolverla.

En la figura 50, podemos observar que el alumno desarrolló correctamente la ecuación del literal e: aplicó correctamente la regla para calcular el cuadrado de un binomio, muestra dominio para resolver la multiplicación de dos binomios, despeja la incógnita y calcula de forma correcta la solución.

De acuerdo con la revisión de las pruebas, se puede constatar que los alumnos tienen poco dominio sobre productos notables y multiplicación de polinomios. Esas pueden ser las principales causas por las cuales la cantidad de soluciones correctas es muy baja.

Figura 50

Respuesta correcta.



7.5.2. Error al resolver el cuadrado del binomio

Este error se observó en 16 pruebas, lo que equivale al 17.98 % del total de alumnos que participaron en la investigación. En esta categoría se agruparon todas aquellas soluciones en las cuales se equivocaron al resolver la operación $(3m-2)^2$. Los errores que más reproducen los estudiantes al desarrollar este tipo de productos notables, es que distribuyen el exponente para cada término, resolviéndolo equivocadamente así:

$$(3m-2)^2 = (3m)^2 + (-2)^2 = 9m^2 + 4$$

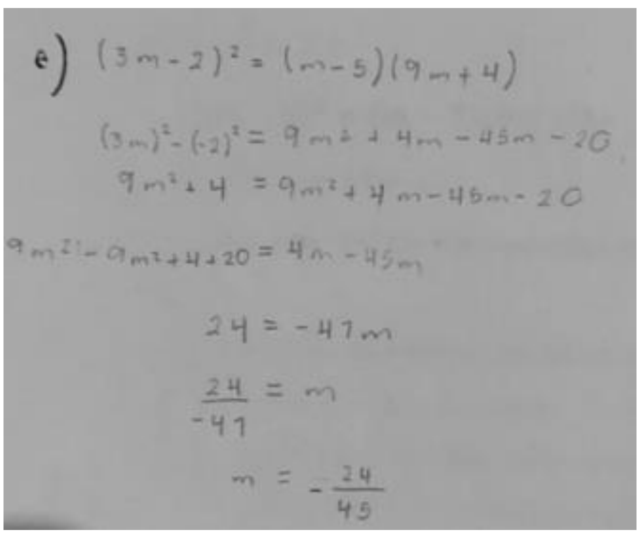
Para (Ruano et al., 2008; Socas, 2007), citado por Pérez (2019), desde el punto de vista de los errores relacionados con la ausencia de sentido, se considera que estos errores se originan en los tres estadios de desarrollo —semiótico, estructural y autónomo— que se dan en los sistemas de representación asociados al álgebra, una de las causas (Ruano et al., 2008; Socas, 2007) es la siguiente: errores debidos a la aplicación inapropiada de fórmulas o reglas de procedimiento. La utilización de procedimientos memorizados genera errores cuando se aplica sin sentido a situaciones que no admiten una técnica o se introduce alguna técnica inventada.

Es decir, Posiblemente los alumnos se equivocan al desarrollar el cuadrado de un binomio porque no le encuentran sentido al contenido matemático, no se ha interiorizado el concepto y tampoco el procedimiento, y lo único que hace el alumno es tratar de memorizarse la regla para desarrollar el ejercicio.

En la figura 51 podemos observar que el alumno se equivoca al desarrollar el cuadrado del binomio, reproduce el mismo error que mencionamos anteriormente: solamente distribuye el exponente a cada término del binomio y luego desarrolla la potencia para cada término.

Figura 51

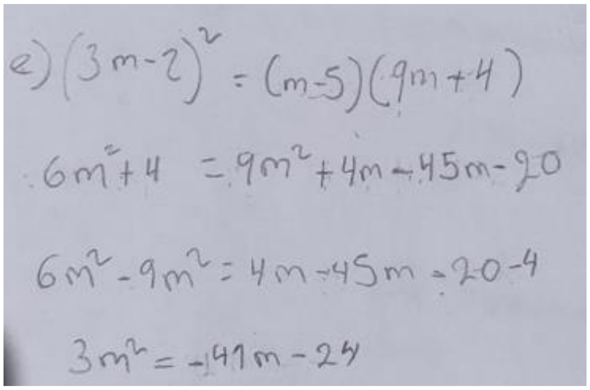
Error al resolver el cuadrado del binomio.



En la figura 52, podemos apreciar que el alumno trabaja de manera similar. Desarrolla de forma incorrecta el cuadrado del binomio, pero también se equivoca al elevar cada término al cuadrado. Luego, al reducir términos semejantes le ha quedado una ecuación cuadrática y ha dejado incompleto el desarrollo.

Figura 52.

Error al resolver el cuadrado del binomio



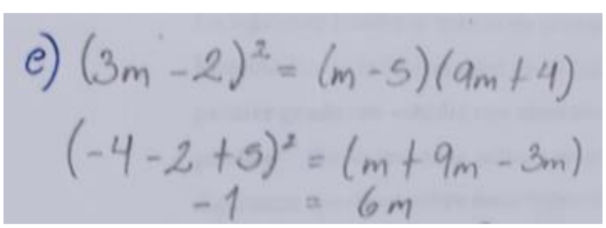
7.5.3. Error al multiplicar binomios

Al revisar las soluciones, se ha encontrado que 5 estudiantes, lo que representa el 5.62 %, muestran errores al resolver la multiplicación de binomios del lado derecho de la ecuación.

En la figura 53, se observa que el alumno no desarrolló de forma correcta la multiplicación de polinomios. Lo que se puede apreciar es que el alumno directamente hace la transposición de términos, trasladando al lado izquierdo los valores conocidos y al lado derecho las incógnitas, obviando la potencia que debe desarrollar, antes que nada.

Figura 53

Error al multiplicar binomios.

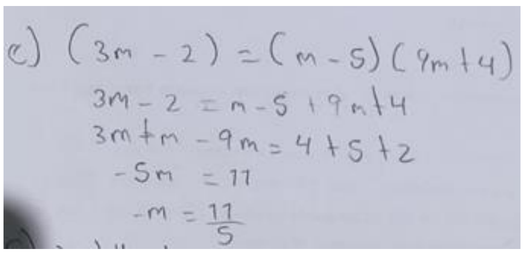


También aparecen algunas soluciones en las cuales los alumnos se equivocan en ambos procesos: no desarrollan correctamente la potencia y tampoco la multiplicación de polinomios.

En la figura 54 se observa que el alumno no copió el exponente del lado izquierdo y para multiplicar los binomios lo que hace es que los toma como términos. Luego reduce términos, despeja la incógnita y llega a una solución numérica (incorrecta).

Figura 54

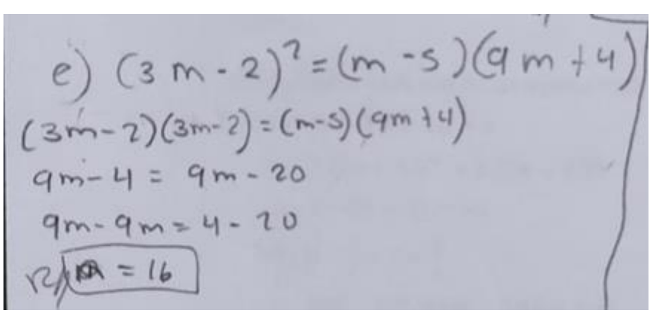
Error al multiplicar binomios



En la figura 55 se puede apreciar que el alumno a pesar de que no se recuerda cómo elevar un binomio al cuadrado, sí aplica la definición de potencia y procede a multiplicar el binomio $3m - 2$ por él mismo pero la multiplicación de polinomios la desarrolla de forma incorrecta: multiplica incógnita con incógnita (sin tomar en cuenta la ley de los exponentes, no suma los exponentes) y valores conocidos.

Figura 55

Error al multiplicar binomios.



7.5.4. No pueden interpretarse

En este ejercicio se encontraron 28 pruebas, lo que equivale al 31.46 % del total, cuya solución del ejercicio es incorrecta pero los procesos realizados por los alumnos no pueden interpretarse. Comparando este dato con el ejercicio anterior, observamos que ha aumentado considerablemente. Esto también puede ser que se deba al hecho que la complejidad de la ecuación es mayor que en los ejercicios anteriores y para resolverla se deben utilizar procedimientos algebraicos en los cuales, de acuerdo con la experiencia docente, el estudiante falla muy a menudo.

En la figura 56 podemos observar que el estudiante desarrolla de forma incorrecta el cuadrado del binomio, pero luego realiza una especie de multiplicación que le conduce a un resultado que no se puede interpretar cómo lo obtuvo y en la figura 57 donde no se puede explicar de qué forma el alumno ha trabajado las multiplicaciones.

Figura 56

El error no puede interpretarse.

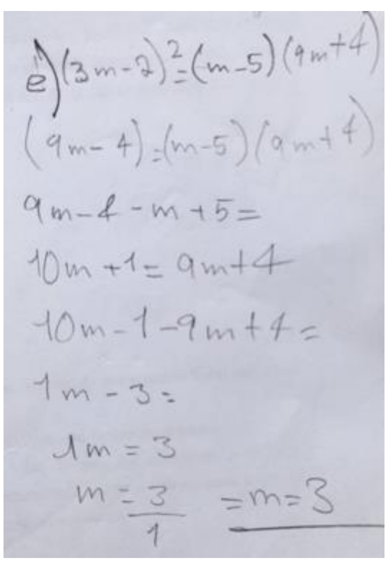


Figura 57

El error no puede interpretarse.

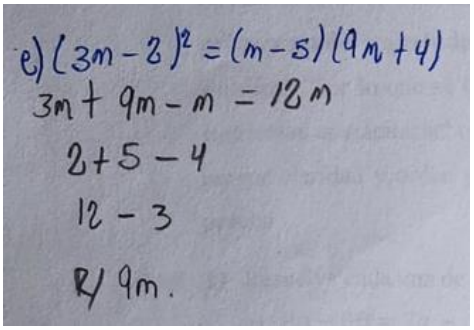


Tabla 6

Resumen de las frecuencias de los errores encontrados en el ejercicio 1 e)

Categoría	Número de alumnos						Total (por categoría)
Respuestas correctas.	1	0	0	0	0	0	**1**
Error al resolver el cuadrado del binomio.	4	4	1	5	0	2	**16**
Error al multiplicar binomios.	2	0	1	1	0	1	**5**
No pueden interpretarse	8	4	7	3	1	5	**28**
Total (por institución)	**15**	**8**	**9**	**9**	**1**	**8**	**50**
	PA	**PTGB**	**PTT**	**PTG**	**LA**	**SM**	
Fuente: elaboración propia.							

Nota: 39 estudiantes no desarrollaron el ejercicio

7.6. Ejercicio 1 f)

La ecuación que se planteó en el literal f es la siguiente:

$$\frac{3x+4}{2}+2=14-x$$

Para resolver esta ecuación, el alumno debe poseer dominio sobre las operaciones con fracciones. Por ese motivo, esta ecuación es de mayor complejidad que algunas de las ecuaciones anteriores de la prueba.

Se revisaron las 89 pruebas que se pasaron en total. Luego, se analizaron las pruebas de los alumnos que resolvieron este ejercicio, ya sea de forma correcta o de forma incorrecta. Se separaron las respuestas correctas, las cuales forman la primera categoría y después se analizaron las respuestas incorrectas.

En este ejercicio aumentó considerablemente el número de estudiantes que no lo trabajaron y de igual manera hay varios alumnos que no se puede interpretar el proceso que desarrollaron para resolver la ecuación. Una vez identificados los errores en este ejercicio, se determinaron las frecuencias con las que se produjeron; es así como se formuló la siguiente categorización de errores:

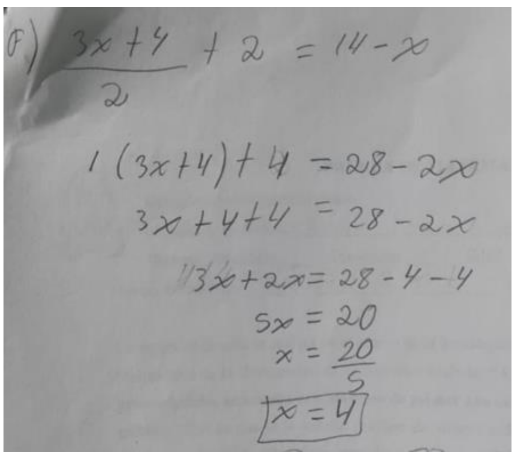
7.6.1. Respuestas correctas

Esta ecuación la resolvió correctamente un alumno, lo que equivale al 1.12 % del total de alumnos que realizaron la prueba. Como se mencionó anteriormente, esta ecuación es de mayor complejidad y requiere que el alumno utilice operaciones con fracciones para poder resolverla, y de acuerdo con la experiencia, se ha observado que la mayoría de los alumnos de primer año de bachillerato tienen un dominio bajo en ese contenido. Esta puede ser una de las razones por las cuales el número de estudiantes que resolvieron correctamente la ecuación es muy bajo.

En la figura 58, podemos observar que el alumno desarrolló correctamente la ecuación del literal f: multiplicó ambos lados de la ecuación lineal por 2, para eliminar el denominador y trabajar con números enteros, realizó correctamente la transposición de términos y luego despejó la incógnita para concluir que la solución de la ecuación es $x = 4$

Figura 58

Respuesta correcta.



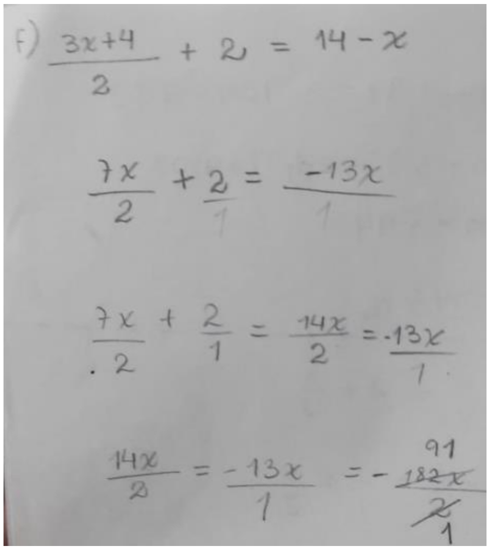
7.6.2. Error al reducir términos semejantes

Con respecto a este error, se observó en 7 pruebas, lo que equivale al 7.87 % del total de alumnos que participaron en la investigación. Lo que más se repitió en este tipo de error es que los alumnos sumaban incógnitas con valores conocidos. Es decir, no tomaron en cuenta que solamente se pueden reducir términos que son semejantes.

En la figura 59 se puede observar que el alumno opera $3x + 4$, pensando que el término 4 es $4x$. De igual manera reduce la expresión $14 - x$ colocando como respuesta $-13x$. No distingue entre incógnitas y valores conocidos, ya que los reduce como que todos los términos poseen la incógnita.

Figura 59

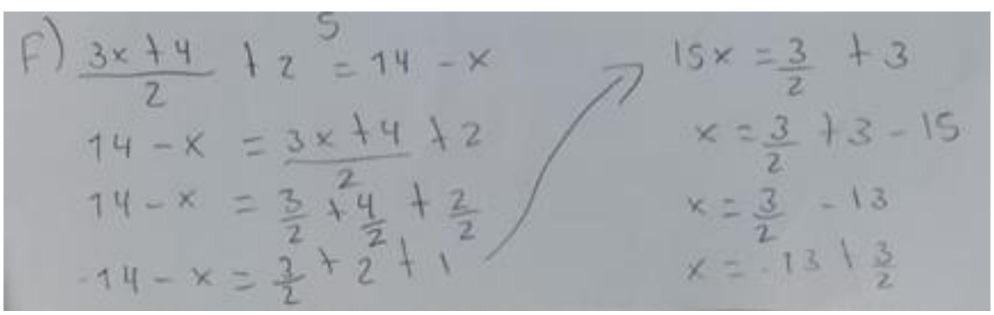
Error al reducir términos semejantes.



En la figura 60 se puede apreciar que de igual manera el alumno reduce de forma incorrecta los términos semejantes al operar $14 - x$, no toma en cuenta que estos términos no son semejantes y por lo tanto no se pueden sumar ni restar.

Figura 60

Error al reducir términos semejantes.



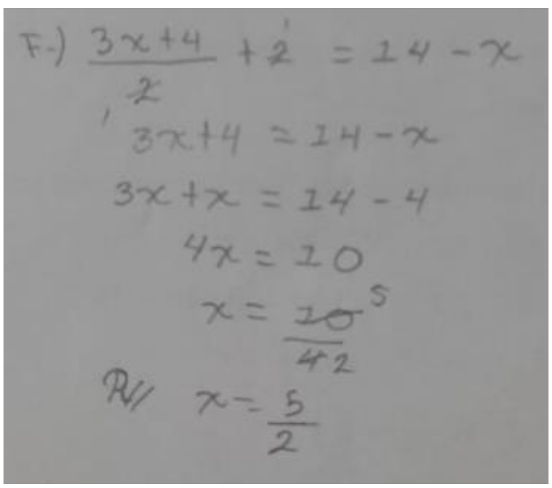
7.6.3. Error al operar fracciones algebraicas

Revisando las soluciones de este ejercicio se encontró que 5 alumnos, lo que representa el 5.62 % de las pruebas realizadas, se equivocaron al operar fracciones algebraicas. En esta categoría se consideraron todos aquellos procesos incorrectos en los que los estudiantes se equivocaron al operar la fracción $\frac{3x+4}{2}$.

En la figura 61 se puede observar que el alumno, de entrada, se equivoca al simplificar la fracción algebraica, ya que simplifica el 2 del denominador con el término 2 que está a la par de la fracción. Ese proceso incorrecto le impide al alumno determinar la respuesta correcta de la ecuación.

Figura 61

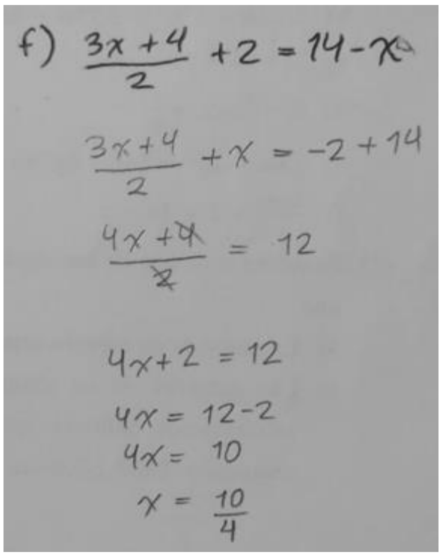
Error al operar fracciones algebraicas.



En la figura 62 se puede apreciar que el estudiante primeramente reduce de forma incorrecta los términos semejantes ya que suma el término $3x$ que está en el numerador de la fracción con el término x. Seguidamente, el alumno reproduce un error que es muy común observarlo en los estudiantes cuando trabajan con fracciones algebraicas: simplifica el término 4 del numerador con el denominador 2. Esos dos números no se pueden simplificar porque el 4 del numerador no es un factor, se toma como un término.

Figura 62

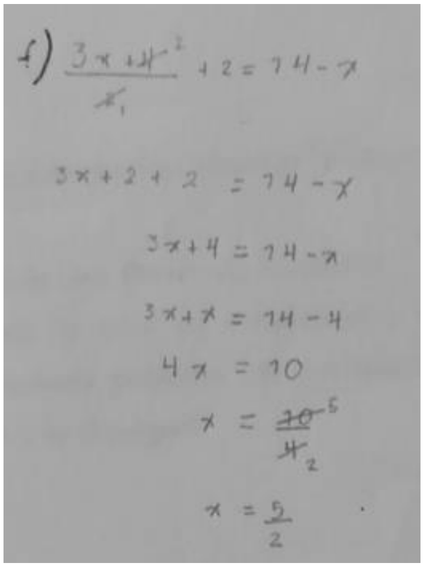
Error al operar fracciones algebraicas.



De igual manera, en la figura 63 podemos observar que el alumno reproduce el mismo error: en la fracción $\frac{3x+4}{2}$, simplifica el término 4 en el numerador con el factor 2 del denominador. A causa de ese error, el alumno no llegó a la respuesta correcta, porque todo lo demás lo desarrolló de forma correcta.

Figura 63

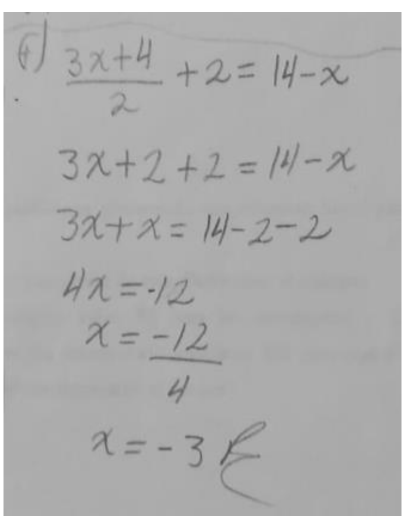
Error al operar fracciones algebraicas.



Por último, en la figura 64 se observa que el alumno sigue el camino de multiplicar toda la ecuación por el denominador común pero sólo lo multiplica por la fracción, eliminando el denominador y los otros términos los mantiene igual.

Figura 64

Error al operar fracciones algebraicas.



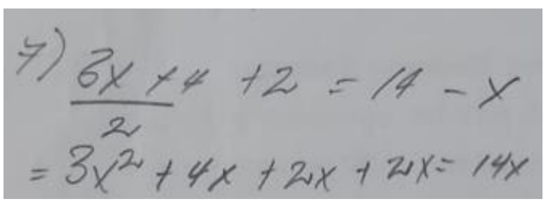
7.6.4. No pueden interpretarse

En este ejercicio se encontraron 19 pruebas, lo que equivale al 21.35 % del total, cuya solución del ejercicio es incorrecta pero los procesos realizados por los alumnos no pueden interpretarse. Comparando este dato con el ejercicio anterior (28 pruebas), observamos que el número ha disminuido considerablemente. Aunque también debemos mencionar que el número de alumnos que no desarrollaron el ejercicio es mucho mayor que los anteriores.

En la figura 65 podemos observar que el estudiante multiplica toda la ecuación por x y elimina el denominador de la fracción, pero luego no se puede describir el proceso que siguió para llegar a la expresión final.

Figura 65

No se puede interpretar.



De igual forma, en la figura 66, 67 y 68 se muestran otros procesos incorrectos que no se pueden interpretar.

Figura 66

El proceso no puede interpretarse.

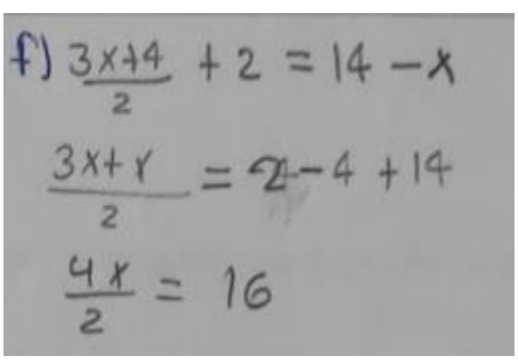


Figura 67

El proceso no puede interpretarse.

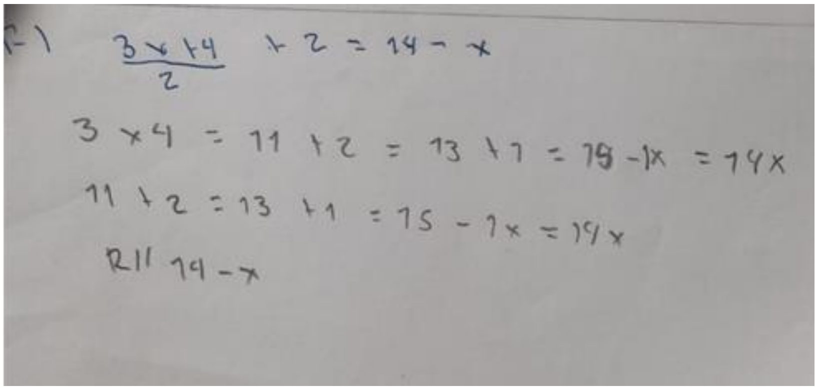


Figura 68

El proceso no puede interpretarse.

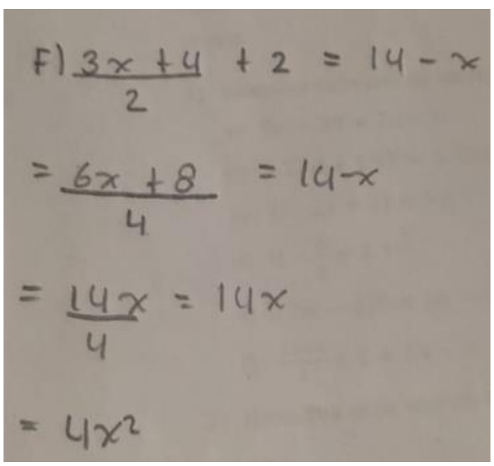


Tabla 7

Resumen de las frecuencias de los errores encontrados en el ejercicio 1 f).

Categoría	**Número de alumnos**						**Total (por categoría)**
Respuestas correctas	1	0	0	0	0	0	**1**
Error al reducir términos semejantes	2	1	0	2	1	1	**7**
Error al operar fracciones algebraicas	3	2	0	0	0	0	**5**
No pueden interpretarse	4	6	2	3	0	4	**19**
Total (por institución)	**10**	**9**	**2**	**5**	**1**	**5**	**32**
	PA	**PTGB**	**PTT**	**PTG**	**LA**	**SM**	
Fuente: elaboración propia.							

Nota: 57 estudiantes no desarrollaron el ejercicio.

7.7. Problema 2 a)

El problema que se planteó en el literal a es la siguiente:

La mitad de un número supera en 2 a un tercio de este. Determine el número.

Se les solicitó a los alumnos que resolvieran el problema por medio de una ecuación lineal así que se revisaron las 89 pruebas que se pasaron en total. Luego, se analizaron las pruebas de los alumnos que resolvieron este ejercicio, ya sea de forma correcta o de forma incorrecta. Se separaron las respuestas correctas, las cuales forman la primera categoría y después se analizaron las respuestas incorrectas.

Este problema solamente lo desarrollaron 13 alumnos, y de ellos solamente un alumno obtuvo la respuesta correcta, pero lo resolvió a prueba y error.

Este tipo de problemas siempre se les dificulta a los alumnos, ya que se debe formular la ecuación lineal que dé solución a la problemática planteada.

Una vez identificados los errores en este ejercicio, se determinaron las frecuencias con las que se produjeron; es así como se formuló la siguiente categorización de errores:

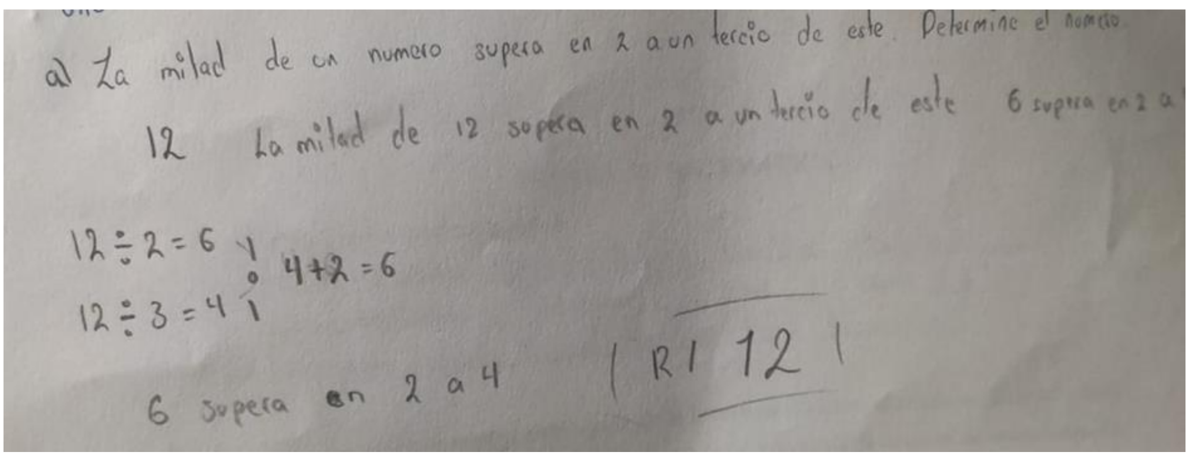
7.7.1. Respuestas correctas

Este problema lo resolvió correctamente un alumno, lo que equivale al 1.12 % del total de alumnos que realizaron la prueba. Cabe mencionar que este alumno resolvió el problema a prueba y error. No se observa un proceso formal, en el cual se define la incógnita y luego se construye la ecuación lineal.

En la figura 69 se puede apreciar que el alumno deduce que el número al cual se refiere el problema es 12 y lo divide entre 6, después entre 4; esto con el objetivo de comprobar que efectivamente el número que ha determinado (no se observa cómo lo determinó) cumple con las condiciones del problema.

Figura 69

Respuesta correcta.



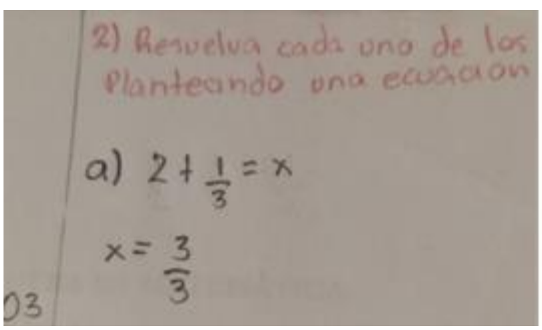
7.7.2. Error en la construcción de la ecuación

Con respecto a este error, se observó en 3 pruebas, lo que equivale al 3.37 % del total de alumnos que participaron en la investigación. En esta categoría, se tomaron en cuenta aquellas soluciones en las cuales los alumnos formularon una ecuación lineal incorrecta para resolver el problema verbal. Ningún alumno definió la incógnita como proceso inicial de solución del problema.

En la figura 70 podemos observar que el estudiante considera a x como el número a determinar, pero para expresar la tercera parte del número, solo escribe la fracción $\frac{1}{3}$ sin la variable y no toma en cuenta la mitad del número para formular la ecuación. Confunde términos variables con cantidades conocidas.

Figura 70

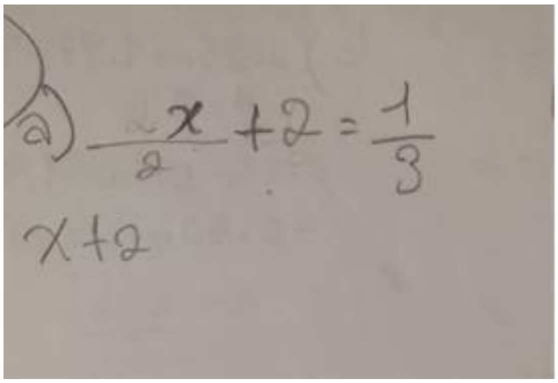
Error en la construcción de la ecuación.



En la figura 71, de igual manera se puede observar que el alumno se ha equivocado al formular la ecuación. Ha considerado todos los términos que menciona el problema, pero a la fracción $\frac{1}{3}$ no le ha agregado la variable y se equivocó también con la posición en la que agregó el término 2. Ese número debe ir (en este caso) en el lado derecho de la ecuación. Así que, al igual que en la figura anterior, podemos notar que los alumnos no han expresado estos términos en función de la incógnita.

Figura 71

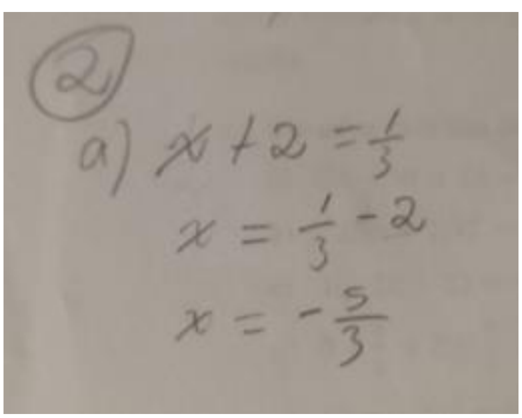
Error en la construcción de la ecuación.



De igual forma en la figura 72, se puede observar que el alumno confunde los términos constantes con los términos variables y construye de forma incorrecta la ecuación. Ya que no considera la mitad del número y tampoco agrega la variable x a la fracción $\frac{1}{3}$.

Figura 72

Error en la construcción de la ecuación.



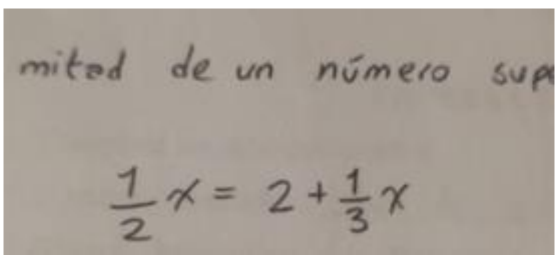
7.7.3. Incompleto

En esta categoría, se han tomado los procesos en los cuales el estudiante inició de forma correcta la solución del ejercicio, construyó de forma correcta la ecuación, pero no la terminó. Al revisar las pruebas, se encontró que un alumno dejó el problema de forma incompleta, lo que equivale al 1.12 % del total de alumnos que participaron en la investigación.

En la figura 73 observamos que el alumno construyó de forma correcta la ecuación, pero no la resolvió.

Figura 73

Incompleto.



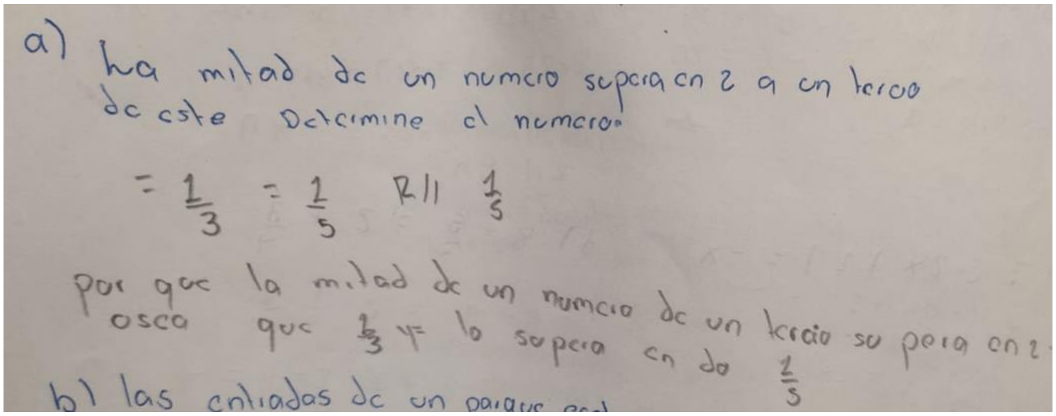
7.7.4. No se pueden categorizar

Por último, agrupamos en esta categoría todas aquellas soluciones que no pueden categorizarse. Al revisar las pruebas, se encontró que 8 alumnos, lo que equivale al 8.99 % del total, presentan soluciones equivocadas, pero los errores cometidos en este caso no se pueden agrupar en ninguno de los anteriores.

En la figura 74 se puede observar que el alumno únicamente ha colocado algunas fracciones y ha concluido incorrectamente en la solución del problema.

Figura 74

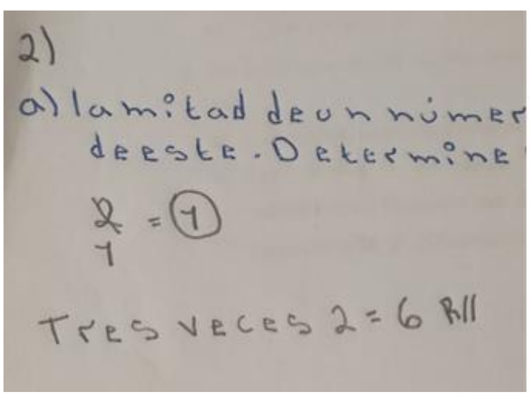
No se puede categorizar.



En la figura 75 observamos que el alumno solamente ha colocado el número 2, a lo mejor porque el problema menciona la mitad del número.

Figura 75

No se puede categorizar.



En la figura 76, 77 y 78 de igual forma se pueden observar procesos incorrectos que no se pueden categorizar.

Figura 76

No se puede categorizar.

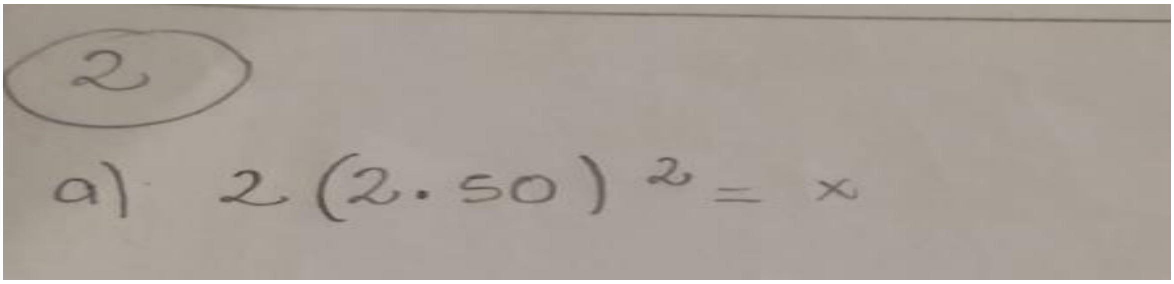


Figura 77

No se puede categorizar.

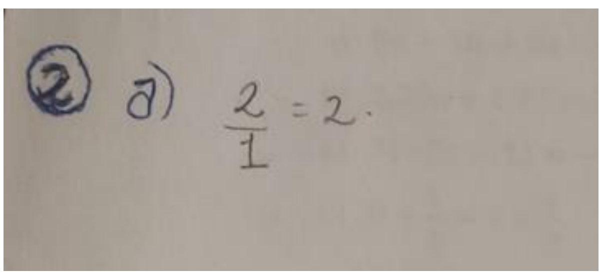


Figura 78

No se puede categorizar.

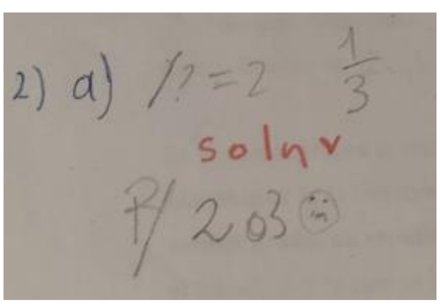


Tabla 8

Resumen de las frecuencias de los errores encontrados en el ejercicio 2 a).

Categoría	**Número de alumnos**						**Total (por categoría)**
Respuestas correctas.	0	0	0	1	0	0	**1**
Error en la construcción de la ecuación.	0	1	1	0	0	1	**3**
Incompleto	0	0	0	0	0	1	**1**
No se pueden categorizar	3	3	0	0	1	1	**8**
Total (por institución)	**3**	**4**	**1**	**1**	**1**	**3**	**13**
	PA	**PTGB**	**PTT**	**PTG**	**LA**	**SM**	
Fuente: elaboración propia.							

Nota: 76 estudiantes no desarrollaron el ejercicio.

7.8. Problema 2 b)

El problema que se planteó en el literal b es el siguiente:

Las entradas de un parque ecológico valen $5 para los extranjeros y $2 para salvadoreños. Sabiendo que asistieron 280 personas y que se recaudaron $800, ¿cuántos extranjeros ingresaron al parque?

Se les solicitó a los alumnos que resolvieran el problema por medio de una ecuación lineal así que se revisaron las 89 pruebas que se pasaron en total. Luego, se analizaron las pruebas de los alumnos que resolvieron este ejercicio, ya sea de forma correcta o de forma incorrecta. Se separaron las respuestas correctas, las cuales forman la primera categoría y después se analizaron las respuestas incorrectas.

Este problema solamente lo desarrollaron 11 alumnos, y de ellos solamente un alumno obtuvo la respuesta correcta, pero lo resolvió a prueba y error. Cabe mencionar que en la solución solamente se observa la respuesta del problema, no aparece el proceso que siguió para deducir la respuesta correcta.

Una vez identificados los errores en este ejercicio, se determinaron las frecuencias con las que se produjeron; es así como se formuló la siguiente categorización de errores:

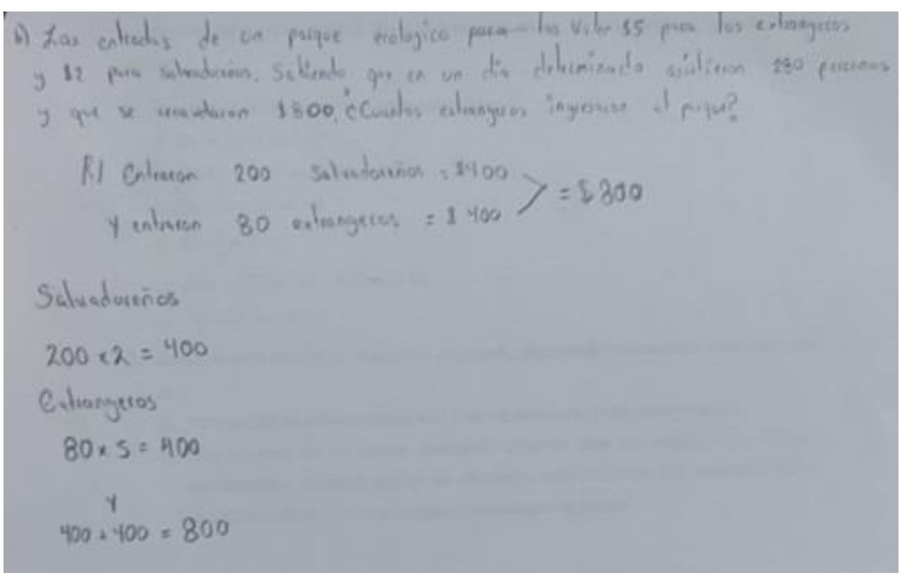
7.8.1. Respuestas correctas

Este problema lo resolvió correctamente un alumno, lo que equivale al 1.12 % del total de alumnos que realizaron la prueba. Es importante mencionar que este alumno resolvió el problema a prueba y error. No se observa un proceso formal, en el cual se define la incógnita y luego se construye la ecuación lineal.

En la figura 79 se puede observar que el alumno deduce correctamente el número de extranjeros y salvadoreños que ingresaron al parque, se observa también un proceso de comprobación de la respuesta, pero no se observa de qué forma obtuvo dichos números. Se asume que el alumno probó varios números hasta encontrar los que cumplen con la condición del problema, pero no dejó evidencia alguna.

Figura 79

Respuesta correcta.



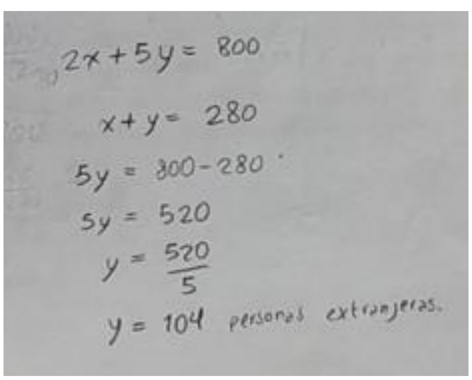
7.8.2. Error en la solución de la ecuación

Con respecto a este error, se observó en una prueba, lo que equivale al 1.12 % del total de alumnos que participaron en la investigación. En esta categoría, se tomó en cuenta aquellas soluciones que formularon de forma correcta la ecuación (o sistema de ecuación) pero se equivocaron al resolverla.

En la figura 80 podemos observar que el alumno construye de forma correcta un sistema de ecuaciones lineales para resolver el problema. Aunque no define quién es la variable x y quién es la variable y, se comprende que la primera variable es el número de salvadoreños y la segunda representa al número de extranjeros. Luego se puede apreciar que, en el proceso, se equivoca en el tercer paso al formular la ecuación $5y = 800 - 280$. Posiblemente, el alumno no recordó ningún método para resolver un sistema de ecuaciones lineales y por eso desarrolló de manera incorrecta la ecuación.

Figura 80

Error en la solución de la ecuación.



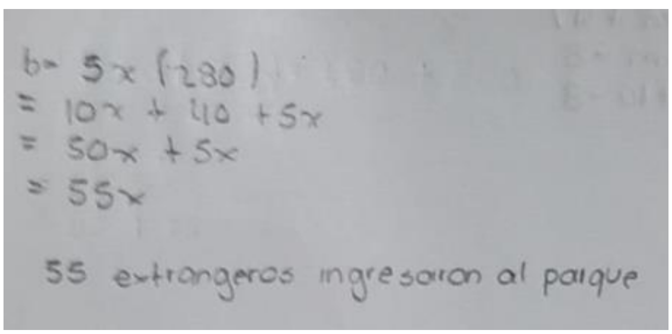
7.8.3. *No se pueden categorizar*

Por último, agrupamos en esta categoría todas aquellas soluciones que no pueden categorizarse. Al revisar las pruebas, se encontró que 9 alumnos, lo que equivale al 10.11 % del total, presentan soluciones equivocadas, pero los errores cometidos en este caso no se pueden agrupar en ninguno de los anteriores.

En la figura 81 se puede observar que el alumno construye una ecuación lineal multiplicando el precio de las entradas para extranjeros, acompañado de la variable x sin definir qué representa, por la cantidad total de personas que ingresaron al parque. En este caso, no se puede interpretar por qué razón formuló la ecuación (incorrecta) de esa forma.

Figura 81

El error no se puede interpretar.

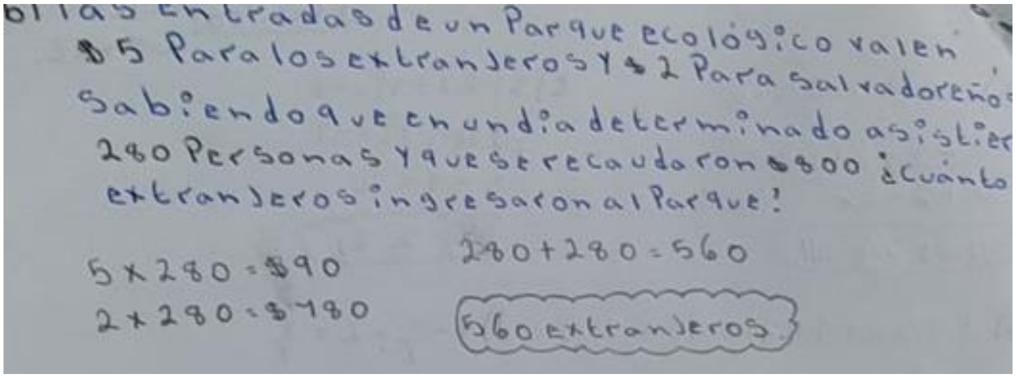


En la figura 82 se aprecia que el alumno únicamente multiplica el valor de las entradas por el total de personas que ingresaron al parque, calcula de manera errónea cada resultado y por último suma dos veces 280 para, finalmente, concluir que el resultado es 560 extranjeros, sin realizar un proceso de comprobación. De igual manera que el proceso anterior, no se puede determinar por qué procedió de esa forma.

+

Figura 82

No se puede categorizar.



De igual manera, en la figura 83, el proceso es incorrecto, pero no se puede categorizar. En este caso, de una vez el alumno presenta la respuesta (incorrecta) del problema, pero no hay un proceso que fundamente su respuesta.

Figura 83

No se puede categorizar.

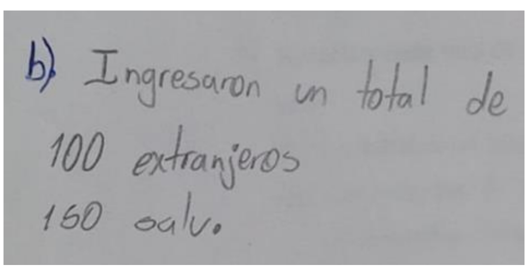


Tabla 9

Resumen de las frecuencias de los errores encontrados en el ejercicio 2 b)

Categoría	**Número de alumnos**						**Total (por categoría)**
Respuestas correctas.	0	0	0	1	0	0	**1**
Error en la solución de la ecuación.	1	0	0	0	0	0	**1**
No se pueden categorizar	0	4	2	1	0	2	**9**
Total (por institución)	**1**	**4**	**2**	**2**	**0**	**2**	**11**
	PA	**PTGB**	**PTT**	**PTG**	**LA**	**SM**	
Fuente: elaboración propia.							

Nota: 78 estudiantes no desarrollaron el ejercicio.

CONCLUSIÓN

Llegado a este punto, es momento de hacer un balance del trabajo realizado. No se considera de forma amplia que esta sea una conclusión de la investigación, dado que el análisis y estudio de errores ha sido un tema de mucho interés y se espera continuar problematizándolo. No obstante, es necesario finalizar formalmente la investigación y hacer reflexiones investigativas.

Desde el principio se mencionó la importancia que tiene para los alumnos de bachillerato saber resolver ecuaciones lineales porque en ese nivel, se convierte en una herramienta fundamental para poder entender y comprender otros temas en los cuales se requiere resolver ecuaciones. Si el alumno tiene un dominio aceptable de este contenido, podrá enfrentarse con éxito a otros contenidos de mayor complejidad.

En primer año de bachillerato, son varios contenidos del programa de estudios vigentes en los cuales el alumno debe saber resolver ecuaciones lineales. En temas como números complejos, desigualdades, ecuaciones trigonométricas y vectores, aparecen algunos ejercicios que, para darles solución, es necesario dominar temas de álgebra como la solución de ecuaciones.

Partiendo de esa base, se vuelve necesario que los estudiantes en séptimo y octavo grado dominen el contenido de solución de ecuaciones porque es una herramienta que les será útil tanto en la matemática del nivel de bachillerato, así como a nivel universitario y dada la importancia del contenido. No obstante, como se dijo anteriormente, la experiencia docente del autor señalaba que aprender esta temática era fuente de errores de los alumnos y el interés por conocerlos incentivó esta investigación.

Así, este estudio se propuso como objetivo analizar los tipos de errores producidos por alumnos de primer año de bachillerato del sistema educativo público en la resolución de ecuaciones primer grado con una incógnita. Como el interés de esta investigación es elaborar comprensiones acerca de los errores producidos, se decidió por un camino cualitativo. Como procedimientos metodológicos se inspiró en las ideas de Cury (2017) y Bardin (1996), quienes propusieron estrategias para el tratamiento y análisis de resultados. Respecto al tipo de categorización a construir, se pensó en una categorización de errores de tipo emergente, es decir, se hizo un proceso de inmersión en las producciones de los estudiantes construyendo una tipología propia. Por último, la presentación y análisis de los resultados se inspiró en el trabajo de Cury (2017), describiendo para cada ítem del instrumento construido: el ejercicio o problema, estadísticas de resolución, texto-síntesis y ejemplos de los errores.

A pesar de que no se tiene como objetivo hacer una propuesta de trabajo, pues se considera que esto conllevaría otro trabajo de investigación, tomando en cuenta lo discutido hasta aquí, y sin ser repetitivos, se presentan a continuación algunas principales conclusiones y recomendaciones.

Como ideas concluyentes, se puede señalar que:

Entre los errores que más se repitieron, están aquellos que tienen relación con las operaciones con números enteros o fraccionarios. Es interesante observar en la mayoría de las soluciones, que los alumnos de primer año de bachillerato que participaron en la investigación tienen problemas para operar números enteros. Se puede observar que, en algunos casos, puede ser que el error se deba a una falta de concentración y el alumno al final no revisó el proceso realizado, pero en otros procesos sí se observa un desconocimiento completo de las reglas a seguir para resolver operaciones de suma y resta con números enteros.

El ejercicio con más respuestas correctas es el primero literal a, en el cual tenían que resolver la ecuación $8a - 30 = 2a - 6$. Este ejercicio lo resolvieron de forma correcta 18 estudiantes. Es de mencionar que este ejercicio era el más fácil que se había colocado en la prueba. En los demás ejercicios, el nivel de dificultad era mayor.

Los ejercicios que obtuvieron menor número de respuestas correctas son los ejercicios 1 e: $(3m - 2)^2 = (m - 5)(9m + 4)$; 1 f: $\frac{3x+4}{2} + 2 = 14 - x$; 2 a: La mitad de un número supera en 2 a un tercio de este. Determine el número; y 2 b, que se muestran a continuación: Las entradas de un parque ecológico valen $5 para los extranjeros y $2 para salvadoreños, Sabiendo que asistieron 280 personas y que se recaudaron $800, ¿cuántos extranjeros ingresaron al parque? Estos ejercicios solamente fueron resueltos por 1 alumno. En el caso de las ecuaciones, a los alumnos siempre les cuestan las temáticas de los productos notables y las operaciones con fracciones y luego con los problemas, los alumnos siempre presentan dificultades para resolver este tipo de ejercicios.

Se debe mencionar que el número de alumnos que desarrollaron los últimos dos problemas verbales que se resuelven por medio de una ecuación lineal es muy bajo en comparación con los ítems que llamamos ejercicios. El ejercicio 2a únicamente fue desarrollado por 13 alumnos y el ejercicio 2b fue desarrollado por 11 estudiantes. De estos, solamente un alumno lo desarrolló de forma correcta. Estos problemas fueron los que más estudiantes los dejaron en blanco, 76 y 78 alumnos no desarrollaron estos problemas respectivamente. Ahora bien, también es de señalar, de acuerdo con los procesos observados en las pruebas, que los alumnos tienen poco o ningún conocimiento sobre cómo se resuelva un problema de aplicación por medio de una ecuación lineal ya que muchos de los alumnos no lograron plantear una ecuación lineal para resolver el problema. Una observación muy importante, es que el número de alumnos cuyos procesos no se pudieron interpretar en cada problema es alto y va aumentando conforme al número de ejercicio. Posiblemente, se deba a que el nivel de complejidad de los ejercicios va aumentando, como se mencionó anteriormente.

El análisis de los procesos realizados por los alumnos ha sido muy gratificante porque en este caso se han analizado procesos que posiblemente el profesor no se imagina que el alumno puede cometer este tipo de errores. Ahora, con el análisis de errores diseñado, sabemos en cuáles áreas presentan dificultad esto alumnos y podemos explicar estos contenidos haciendo énfasis en esos pasos para que el alumno pueda solventar estas dificultades de aprendizaje.

Por otra parte, es importante destacar también que muchos de estos errores eran los que se esperaban determinar en las soluciones de los estudiantes. Varios errores que se detectaron son los que más reproducen los alumnos. No hubo mayor sorpresa en este caso. Por ejemplo, se esperaba que los estudiantes cometieran errores al operar fracciones porque es un contenido que, de acuerdo con la experiencia docente, les genera problemas a los alumnos de todos los niveles. También, los alumnos cometen errores al calcular productos notables o realizar la multiplicación de polinomios. En este caso, en las categorizaciones que hemos presentado, se mencionan estos errores y se describen algunos procesos que se han tomado de las soluciones proporcionadas por lo estudiantes. Aunque, el error que más se repite en todos los ejercicios, es con respecto a las propiedades de las igualdades que se utilizan para resolver una ecuación lineal. Al despejar la incógnita, los alumnos se equivocan al transponer los términos.

También, es de mencionar que el nivel de complejidad de los ejercicios de la prueba iba aumentando de nivel, luego, hasta cierto punto puede resultar normal el hecho de que el número de estudiantes que resolvieron cada ejercicio (ya sea de manera incorrecta o correcta) disminuye de acuerdo con el número de ejercicio. Por ejemplo, el ejercicio 1 lo desarrollaron 88 alumnos, pero el ejercicio 2 solamente lo desarrollaron 73 alumnos. Mientras avanzamos en el análisis de los ejercicios este número disminuye considerablemente. Esta situación también se debe a los conocimientos que tenían que utilizar para resolver los diferentes ejercicios de la prueba, ya que conforme iban avanzando en la solución, tenían que utilizar otros contenidos matemáticos para resolverla. Luego, se hace una acotación muy importante: hay algunos errores que se cometieron en algunos ejercicios y en otros no. Por ejemplo, al resolver la ecuación $2.25n + 1.97 = 3.75n - 4.03$, los estudiantes se equivocaron al operar números decimales pero este tipo de error no se observó en el primer ejercicio porque no aparecían números decimales.

Realizar una categorización de errores por cada ejercicio (o problema) del instrumento ha sido muy importante porque este trabajo nos permite visualizar cuáles son los errores más frecuentes que los alumnos reproducen al resolver ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios, o con coeficientes decimales o ecuaciones donde aparecen productos notables.

Para finalizar, sería muy interesante poder analizar la relación que tienen la metodología aplicada por los docentes al explicar estos contenidos y su impacto en la producción de errores por los alumnos. Es decir, ¿será que algunos errores disminuyen o no?

También, otra línea de investigación que se puede tomar sería la relación entre la metodología utilizada por los docentes para impartir los contenidos en el marco de la emergencia por la enfermedad COVID – 19 y el dominio que los estudiantes poseen sobre algún contenido en específico; ya que los alumnos que se tomaron para la investigación son alumnos que cursaron su noveno grado en el año 2020.

RECOMENDACIONES

Por último, se cierra esta investigación con algunas reflexiones del proceso de investigador. Cuando se inició esta investigación se tenía una idea sobre los errores, la concepción que se tenía es que los alumnos se equivocan porque no entienden el contenido, porque son distraídos o porque trabajan muy rápido al desarrollar los ejercicios; pero al profundizar en las teorías de análisis de errores, nos ha servido para comprender que los errores que cometen los alumnos en cualquier contenido son muy importantes y proporcionan información valiosa sobre cómo han comprendido el contenido que se ha impartido. Esto nos permite hacer énfasis en los procesos que desarrollan de forma incorrecta para que los errores se puedan minimizar. Conocer el tipo de error que cometen los alumnos nos permite también reorientar, de alguna forma, el proceso educativo: se potencializa las practicas pedagógicas que dan los resultados esperados y se revisan aquellos procesos que están fallando. Todo con el fin de ayudarles a nuestros alumnos a comprender los contenidos matemáticos que se imparten en el aula.

En vista de lo anterior, se hacen las siguientes recomendaciones:

Los procesos de formación de profesores se deben enfocar en cambiar la percepción del error del docente en la formación inicial y continua, ya que actualmente es mínima la formación en esta temática. Es por eso que los profesores abordan los errores de los estudiantes de una forma equivocada y tienden a reprimir estas condutas de los alumnos. Tal como lo hemos mencionado, los errores de los estudiantes deben verse como una oportunidad para mejorar el proceso de Enseñanza y Aprendizaje. En ese sentido, nos ayudan a potencializar las buenas prácticas didácticas y pedagógicas para minimizar estos fallos de los alumnos.

También se recomienda buscar las herramientas necesarias para cambiar la percepción del error en los alumnos. El docente debe propiciar confianza en el salón de clases y generar un ambiente en el cual los alumnos se sientan motivados a participar sin temor a cometer errores y si los cometen, estos deben ser aprovechados por el profesor.

De acuerdo con los resultados obtenidos, los estudiantes solamente se animan a resolver ejercicios y no problemas. Así que es necesario que los docentes cambien su metodología, de aplicación de algoritmos a una metodología de resolución de problemas.

Por otra parte, también se puede mencionar que los procesos metodológicos de Curry (2017) y Bardín (1996) nos ayudan mucho para realizar un análisis de errores exhaustivo en la producción de nuestros alumnos. De esta manera es mucho más sencillo detectar en qué se equivocan los jóvenes al desarrollar los ejercicios de algún tema determinado. El proceso no es fácil, conlleva mucho más trabajo que lo que comúnmente hacemos al revisar cualquier examen, pero los resultados del análisis nos proporcionan mucha más información que el simple hecho de asignar una nota.

No se debe dejar de mencionar, que el proceso para obtener los resultados de la prueba que se utilizó en la investigación se complicó un poco por la emergencia del COVID – 19 que estamos viviendo desde el año 2020. A parte de los institutos que se visitaron se tenía pensado visitar dos escuelas más, pero al momento que se hicieron las gestiones necesarias para que nos dieran el permiso para llegar a la escuela, nos manifestaron que se encontraban cerradas por el aparecimiento de casos positivos tanto en alumnos como en personal docente de la institución.

En el futuro, se considera que unas oportunidades de ampliar el estudio es conocer un poco más las concepciones e ideas de los docentes acerca de los errores de los estudiantes, ¿cómo y en qué medida estas concepciones inciden en la planificación y la enseñanza de ecuaciones lineales y en otras temáticas? Además, algunos de estas producciones de los estudiantes generaron inquietud; se considera que otro camino a explorar sería que una vez se aplique el instrumento y se analicen los resultados sería interesante metodológicamente volver al aula y consultar con el alumno, indagar con él por qué resolvió un problema de esta forma, ¿qué metodologías podrían ayudar en este ejercicio?, ¿cómo sería el proceso de abordarlo? Esta sería otra investigación posible para considerar.

Por lo demás, se espera que esta investigación sirva de impulso para el estudio de las producciones de los estudiantes y no queden en el olvido. Lo que hacen los estudiantes, en su proceso de aprender matemática, incluido los errores, es muy importante.

BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R.; Pochulu, M.; y Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo. 1ra Edición. Buenos Aires, Universidad Nacional de Villa María.

Astolfi, J. P. (2003). El “error”, un medio para enseñar. 2da Edición. Díada editora. Original, *L’erreur, um outil pour enseigner*. (1997). ESF éditeuer.

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bocco, M., & Canter, C. (2010). Errores en geometría: clasificación e incidencia en un curso preuniversitario. *Revista Iberoamericana De Educación*, *53*(2), 1-13.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathémat ques i . Traducido por Brigitte Bernard. Artículo no publicado.

Comte-Spinville. (2005). *Diccionario filosófico.* México: Paidós.

Cury, H. N.; Bisognin, E.; y Bisognin, V. (2008). A análise de erros como metodologia de investigação.

Cury, H. N. (2017). *Análise de erros: o que podemos aprender das respostas dos alunos*. 2da Edición. Autêntica editores: Belo Horizonte.

D’Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. Enseñanza de la matemática. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática), 17(1), 87–106. Recuperado de https://rsddm.dm.unibo.it/articoli-di-ricerca-e-diffusione/182-2/

El Salvador. (2018). Programa de Estudios Matemática: Tercer Ciclo de Educación Básica. Ministerio de Educación. EL SALVADOR. (2018). Programa de Estudios Matemática: Educación Media. Ministerio de Educación.

Engler, A.; Gregorini, M y otros (2004). *Los errores en el aprendizaje de matemática.* Premisa, 23, pp. 23-32

Esteley, C.; Villareal, M. (1996). Análisis y categorización de errores en matemática.

Franchi, L.; Hernández de Rincón, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de la Geometría plana. Parte II Educere, vol. 8, núm. 25, abril-junio, 2004, pp. 196-204 Universidad de los Andes Mérida, Venezuela.

García, L., Azcárate, C., y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 9(1), 85–116.

Garnica, A.V.M. (2013). História Oral e Educação Matemática. In. Borba, M.C.; Araújo, J.L. Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. 5ta Ed. Belo Horizonte, Brasil: Autores Associados.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Departamento de las Didácticas de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-6-2. 155 páginas. (Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/)

Gutiérrez, L. G., García, J. C., y Gómez, F. J. (2018). Experiencias de investigación en escenarios escolares. En I. T. Metropolitano, *Elementos para una transformación educativa y cultural.* (págs. 61-69). Medellín: Textos académicos.

Hernández Vallejo, Á. U. (2021). *gob.mx*. Obtenido de gob.mx: http://humanidades.cosdac.sems.gob.mx/temas/vocabulario/error-ai-9/

Mejía, S. M., Rincón, F. A. y Córdoba, F. (2018). Las concepciones que tienen estudiantes y profesores sobre el error en matemáticas. Experiencias de investigación en escenarios escolares, pp. 61 – 79.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. Journal of Children's Mathematical Behaviour, 3(1), 93-166.

Moreno, M., y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemática acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 21(2), 265–280.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. Review of educational research, 62(3), 307–332.

Palarea, M. M. y Socas, M. M (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Suma. Monográfico Leguaje y Matemáticas, V. 16, pp. 91 – 98. Granada.

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Revista Iberoamericana de Educación. Disponible en: https://rieoei.org/historico/deloslectores/849Pochulu.pdf

Pérez, M., Diego, J. M., Polo, I. y González, M. J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. PNA 13(2), 84-103.

Ramírez, H. A, (2017). *Cambio de concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática.* En REDUMATE, Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (Ed.), II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (pp. 1-9). México: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Real Academia Española: *Diccionario de la lengua española*, 23.ª ed., [versión 23.4 en línea]. <https://dle.rae.es> [10-7-2021]RICO, L. (1995). Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas.

Ruano, R. M., Socas, M. M. Y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por estudiantes de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, *2*(2), 61-74.

Sampieri, R. H., Collado, C. F. & Lúcio, M. P. (2010). Metodología de la investigación. 5ta edición. McGraw – Hill.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico, (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.

Socas, M. M (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. Investigación en educación matemática XI, pp. 19 – 52.

Schwartz, L. E. (1979). El concepto de estadio en la teoría epistemológica de Jean Piaget. Revista de Psicología, vol 7, pp. 44 – 46. https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/pr.2434/pr.2434.pdf

5 maneras de enseñar a premiar el error entre tus alunos. (s.f). Educrea. Recuperado de: https://educrea.cl/5-maneras-de-ensenar-a-premiar-el-error-entre-tus-alumnos/

Muestro probabilístico y no probabilístico. Recuperado de: https://prezi.com/h-zypgfuwq8s/muestreo-intencional-o-de-conveniencia/

ANEXOS

11.1. Examen que se utilizó para recolectar la información de los estudiantes

PRUEBA DE MATEMÁTICA

Completa los siguientes datos

Nombre y apellidos: ____

Género: Masculino ___ Femenino ____ Edad: _____ Curso: ______

La siguiente prueba se realiza en el marco de la investigación de la Maestría en Didáctica de la Matemática de la Universidad de El Salvador titulada: **"Análisis de errores en ecuaciones de primer grado: un estudio con alumnos de primer año de bachillerato del sistema educativo público"**. Por lo que se le solicita resolver de manera individual y ordenada, cada uno de los siguientes ejercicios sobre ecuaciones lineales que se le plantean. Trabaje a conciencia, con la mayor claridad y orden posible. No está permitido el uso de la calculadora para resolver la prueba.

1) Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:
   a) $8a - 30 = 2a - 6$
   b) $2.25n + 1.97 = 3.75n - 4.03$
   c) $3(-2x + 1) = -x$
   d) $8 - \frac{5}{y} = 2 + \frac{3}{y}$
   e) $(3m - 2)^2 = (m - 5)(9m + 4)$
   f) $\frac{3x+4}{2} + 2 = 14 - x$
2) Resuelva cada uno de los siguientes problemas, planteando una ecuación lineal para cada uno.
   a) La mitad de un número supera en 2 a un tercio de este. Determine el número.
   b) Las entradas de un parque ecológico valen \$5 para los extranjeros y \$2 para salvadoreños. Sabiendo que asistieron 280 personas y que se recaudaron \$800, ¿cuántos extranjeros ingresaron al parque?

11.2. Carta para los directores de las instituciones en las que se realizó la investigación.

Universidad de El Salvador

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Escuela de Matemática

Estimado Director/a

Reciba un cordial saludo, esperando que goce de excelente salud y que tenga muchos éxitos laborales y personales.

Mi nombre es Jonatan Anival Guevara Alvarado, estoy egresado de la carrera de Maestría en Didáctica de la Matemática de la Universidad de El salvador y laboro en el Instituto Nacional de San Pablo Tacachico impartiendo la materia de Matemática a estudiantes de primer y segundo año de bachillerato.

El motivo de esta carta es el siguiente: actualmente estoy realizando un trabajo de investigación para culminar mis estudios de Maestría que se titula: ***"Análisis de errores en ecuaciones de primer grado: un estudio con alumnos de primer año de bachillerato del sistema educativo público"*** que busca identificar, describir, categorizar y analizar errores en la resolución de ecuaciones lineales, producidos por los estudiantes de primer año de bachillerato. Para lograr este objetivo, se pretende realizar una prueba escrita a estudiantes que cursen este nivel y luego se pretende realizar el análisis respectivo. Tal prueba será utilizada única y exclusivamente en esta investigación, para la realización del trabajo de graduación y/o en artículos académicos guardando la confidencialidad de los estudiantes, de los docentes y de la institución, si así lo desea.

Con esto en consideración, nos gustaría solicitar y contar con la colaboración de usted, de su grupo de docentes y de estudiantes. Dicha colaboración se limitará en proporcionarnos el permiso respectivo para poder tener una sesión de trabajo con una sección de primer año de bachillerato de cualquier modalidad (general o técnica), en una de las aulas de su centro escolar. Esta sesión durará alrededor de 60 minutos y se pretende realizar una prueba sobre solución de ecuaciones lineales.

En vista que pueden surgir dudas e inquietudes al respecto, dejo mi número de contacto y mi correo electrónico para dar mayor información.

Sin más que agregar y a la espera de contar con su apoyo en esta investigación, me despido.

Atte.

Lic. Jonatan Anival Guevara Alvarado

Para mayor información respecto a esta investigación se deja a disposición el teléfono 7502-XXXX y el correo electrónico jonatan.anival.guevara@clases.edu.sv