UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
ESCUELA DE POSGRADO

TESIS DE DOCTORADO

UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DESDE EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE TERCER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA

PARA OPTAR AL GRADO DE

DOCTORA EN EDUCACIÓN, CON ESPECIALIDAD EN EDUCACIÓN BÁSICA

PRESENTADO POR

MAESTRA RODRÍGUEZ DE CHICAS, SARA VILMA

DIRECTOR DE TESIS

DR. C. JOSÉ RON GALINDO

MAYO, 2023

SANTA ANA, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES CENTRALES

M.Sc. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

RECTOR

DR. RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ

VICERRECTOR ACADÉMICO

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA QUINTANILLA

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

ING. FRANCISCO ANTONIO ALARCÓN SANDOVAL

SECRETARIO GENERAL

LICDO. LUIS ANTONIO MEJÍA LIPE

DEFENSOR DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS

LICDO. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

FISCAL GENERAL

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE

AUTORIDADES DE LA FACULTAD

M.Ed. ROBERTO CARLOS SIGÜENZA CAMPOS

DECANO

M.Ed. RINA CLARIBEL BOLAÑOS DE ZOMETA

VICEDECANA

LICDO. JAIME ERNESTO SERMEÑO DE LA PEÑA

SECRETARIO

DR. JOSÉ GUILLERMO GARCÍA ACOSTA

DIRECTOR DE ESCUELA DE POSGRADO

DR. MAURICIO AGUILAR CICILIANO

COORDINADOR DEL PROGRAMA DE DOCTORADO

Agradecimientos

La gloria sea a mi padre celestial por darme la vida y las fuerzas para culminar este importante proyecto.

A mi esposo Jorge Chicas y a mis hijas Kelly y Becky por darme de su tiempo para el logro de esta meta, por su amor, comprensión y apoyo incondicional.

A mis padres Natividad Reyes (quien Dios en gloria la tenga) y Félix Rodríguez porque siempre creyeron en mí, por su apoyo emocional y espiritual.

A mis hermanos y sus familias por celebrar conmigo todos mis triunfos.

A mi asesor Dr. C. José Ron, por su paciencia, sus enseñanzas y su guía en todo el proceso para concluir esta tesis.

A la Dra. C Carmen Luz López Miari por sus asesorías muy asertivas

Al equipo de coordinación y de docentes del Programa de doctorado por ser parte de mi formación como doctora.

A la dirección del centro escolar Dr. Salvador Ayala, a los profesores y estudiantes de Tercer Ciclo de Educación Básica del turno vespertino, en especial a los estudiantes de séptimo grado sección "C" que fueron el grupo experimental para la validación de la estrategia didáctica. Al profesor Jaime Eduardo Aguiñada Zepeda por su apoyo y empeño en la puesta en práctica de la estrategia didáctica.

Al tribunal evaluador Dr. C. Abelardo López, Dr. Álvaro Artavia, Dr. Rodrigo Orellana, Dr. Mauricio Aguilar y Dr. C. José Ron, por el tiempo dedicado a leer mi tesis, por sus oportunos y sabios señalamientos.

A la Universidad de El Salvador y a la Facultad Multidisciplinaria de Occidente por brindarme el apoyo para estudiar y terminar con éxito esta carrera.

A la Dra. C. Ileana Domínguez, Dr. C. Fidel Cordoví, Dra. C. Mirta García y Licda. Velariz Mendoza y a todas las personas que colaboraron y me animaron en el desarrollo de esta investigación, gracias.

Dedicatoria

A Dios todopoderoso

A mis hijas Kelly y Becky que seguramente me superarán

A mi esposo Jorge Chicas

A la memoria de mi madre que siempre creyó en mí y estaba segura de que culminaría con éxito este proyecto

A mi padre que aún disfruta mis triunfos

Resumen

En la tesis se resume el trabajo de investigación para contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de Tercer Ciclo de Educación Básica en El Salvador. El desarrollo de este pensamiento constituyó la variable principal para lograr un adecuado desempeño en la Matemática de los niveles inmediatos superiores, donde se evidenció dificultades para los estudiantes. Se estudian los referentes teórico-metodológicos para el desarrollo del pensamiento algebraico, describiendo su evolución en la historia y permitió observar diferentes investigaciones de desarrollo del pensamiento algebraico, pero ninguna en este nivel ni con las dimensiones utilizadas. Se caracteriza el objeto de estudio y se diseña una estrategia didáctica para dar respuesta al problema científico: ¿Cómo desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de Tercer Ciclo de Educación Básica? que fundamenta la operacionalización de las variables cuyas dimensiones son: indeterminancia, analiticidad, designación simbólica y la dimensión participación consciente y razonada del estudiante. Los componentes que conforman la estrategia didáctica son: Misión, Objetivo, fundamentos y principios, etapas: diagnóstico, planificación, ejecución y evaluación. La estrategia didáctica se validó satisfactoriamente mediante un cuasi-experimento con 21 estudiantes de séptimo grado en la asignatura de Matemática en la unidad: “Comunicación con símbolos” en el año 2022 en el municipio de Santa Ana. Esta estrategia junto con las clases y evaluaciones diseñadas, los instrumentos utilizados para el diagnóstico y para la validación y el redimensionamiento de la variable constituyen el aporte práctico de esta investigación.

Tabla de contenido

Introducción xv

Capítulo 1: Referentes teórico-metodológicos que sustentan el desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática 28

1.1 El desarrollo del pensamiento y el pensamiento matemático 28

1.1.1 Definiciones de pensamiento 28

1.1.2 Desarrollo del pensamiento 31

1.1.3. Pensamiento matemático: desarrollo en civilizaciones antiguas 34

1.1.4 Evolución de la Matemática en América Latina 38

1.2. El desarrollo del pensamiento algebraico 42

1.2.1. Pensamiento algebraico: definición, caracterización y desarrollo 42

1.2.2 pensamiento algebraico temprano 47

1.2.3. Estudio de patrones: desarrollo del pensamiento algebraico 50

1.2.4 Formas de desarrollo del pensamiento algebraico 51

1.3 Contribución del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática al desarrollo del pensamiento algebraico 60

1.3.1. Objetivos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Cómo influyen en el desarrollo del pensamiento algebraico 60

1.3.2. Los contenidos de la enseñanza. Contenidos en la Matemática 63

1.3.3. Dirección del proceso de enseñanza - aprendizaje 66

Conclusiones parciales del capítulo I 70

Capítulo 2: Una estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática 72

2.1 Diseño metodológico de la investigación 72

2.1.1 Tipo de investigación 72

2.1.2 Ruta metodológica 73

2.1.3 Operacionalización de variable 74

2.1.4 Población y muestra 75

2.1.5 Descripción y validación de instrumentos 77

2.2 Caracterización del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB en el municipio de Santa Ana 83

2.2.1 Dimensión: indeterminancia 86

2.2.2 Dimensión: analiticidad 92

2.2.3 Dimensión: designación simbólica 95
2.2.4 Dimensión: participación consciente y razonada del estudiante 99
2.2.5 Revisión documental 103
2.2.6 Triangulación de resultados 110
2.3 Una estrategia didáctica para contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática 115
Conclusiones parciales del capítulo 2 129
Capítulo 3: Puesta en práctica de la estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB y sus resultados 131
3.1 Caracterización del grupo experimental 134
3.1.1 Categoría: trabajo con variables 135
3.1.2 Categoría: matemática en la vida 135
3.1.3 Categoría: Destreza algorítmica 135
3.1.4 Categoría: resolución de problemas 136
3.1.5 Categoría: generalización de patrones 136
3.1.6 Categoría: lenguaje algebraico 136
3.1.7 Categoría: interacciones en el aula 136
3.1.8 Categoría: metacognición 137
3.1.9 Resultados de la aplicación de la prueba pedagógica 138
3.2. La puesta en práctica de la estrategia didáctica 141
3.3. Resultados de la puesta en práctica de la estrategia didáctica 151
3.3.1 Análisis cualitativo del trabajo de los estudiantes en la clase de matemática 152
3.3.2 Análisis estadístico de los cambios evidenciados en el grupo experimental antes-después y su comparación con el grupo control 163
Conclusiones parciales del capítulo 3 170
Conclusiones 171
Recomendaciones 173
Referencias
Anexo A. Guía de observación de clase
Anexo B. Cuestionario dirigido a estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana
Anexo C. prueba pedagógica a estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana
Anexo D. guía de entrevista dirigida a profesores que laboran en TCEB en el municipio de Santa Ana

Anexo E. Guía de revisión de libro de texto, programa de matemática de TCEB y documentos normativos de la educación matemática

Anexo F. Guía de entrevista al jefe regional de occidente

Anexo G. Prueba pedagógica de salida dirigida a estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana

Anexo H. Cuestionario de participación dirigido a estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana

Anexo I. fotografÍas de la implementación de la estrategia didáctica C.E. Dr. Salvador Ayala

Anexo J. Forma de calificación de la prueba pedagógica de entrada

Lista de tablas

Tabla 1	Elementos coincidentes en las definiciones de pensamiento según autor…………………………………………………………	29
Tabla 2	Elementos diferentes en las definiciones de pensamiento según autor…………………………………………………………	30
Tabla 3	Elementos diferentes en las definiciones de pensamiento algebraico según autor …………………………………………	43
Tabla 4	Tabla del 3 como un patrón o secuencia numérica …………	48
Tabla 5	Formas de desarrollo de pensamiento algebraico por diferentes autores………………………………………………………	52
Tabla 6	Operacionalización de la variable de investigación de acuerdo con dimensiones e indicadores………………………	74
Tabla 7	Centros Escolares que componen la muestra en la investigación …………………………………………………………	76
Tabla 8	Tamaño de población y de muestra por CE……………………	76
Tabla 9	Prueba alfa de Cronbach para cuestionarios a estudiantes…	78
Tabla 10	Fórmulas para calificar la prueba pedagógica de acuerdo con cada dimensión ………………………………………………	79
Tabla 11	Cálculo del alfa de Cronbach para la prueba pedagógica ……	81
Tabla 12	Sugerencias de modificación a la prueba pedagógica por parte de los expertos………………………………………………	81
Tabla 13	Categorías de análisis cualitativo según dimensión …………	84
Tabla 14	Acciones del profesor que favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico mediante la indeterminancia según la opinión de los estudiantes (porcentajes) ……………………	90
Tabla 15	Media aritmética de los resultados dimensión “indeterminancia” …………………………………………………	91
Tabla 16	Acciones de los profesores para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico según la opinión de los estudiantes (porcentajes) …………………………………………………	93

Tabla 17	Media aritmética de los resultados de la prueba pedagógica para la dimensión analiticidad en estudiantes de TCEB ……	94
Tabla 18	Acciones de los estudiantes que favorecen su desarrollo del pensamiento algebraico utilizando lenguaje algebraico, porcentajes …………………………………………………………	96
Tabla 19	Motivo por el que a los estudiantes no aprenden el lenguaje algebraico según los profesores ………………………………	97
Tabla 20	Media aritmética de los resultados de la prueba pedagógica para la dimensión designación simbólica en estudiantes de TCEB …………………………………………………………………	98
Tabla 21	Interacciones en el aula provocadas por el profesor según la opinión de los estudiantes (porcentajes) ……………………	99
Tabla 22	Participación voluntaria y razonada de los estudiantes según sus propias opiniones (porcentajes) ……………………………	102
Tabla 23	Competencias en matemática para TCEB según grado …….	105
Tabla 24	Comparación de resultados según instrumento administrado	110
Tabla 25	Acciones por desarrollar entre el profesor y los estudiantes …	125
Tabla 26	Resultados de la prueba pedagógica de entrada en grupo experimental según dimensión …………………………………	138
Tabla 27	Medias y desviación estándar de las calificaciones de las pruebas pedagógicas de entrada y de salida para el grupo experimental ………………………………………………………	165
Tabla 28	Prueba de supuesto de normalidad de D'Agostino Pearson para calificaciones del grupo experimental y control según dimensión y prueba pedagógica …………………………………	166
Tabla 29	Prueba de supuesto de homogeneidad de varianzas de calificaciones de los grupos experimental y control por dimen sión y prueba ………………………………………………………	167
Tabla 30	Prueba T de Student para muestras relacionadas pre-post según dimensión en prueba de entrada y salida del grupo experimental …………………………………………………….	168

Tabla 31 Prueba T de Student de muestras independientes suponiendo varianzas iguales en prueba de salida de grupo experimental y control ………………………………………………………………. 169

Lista de figuras

Figura 1	Analogía entre pensamiento y pensamiento algebraico ………	47
Figura 2	Esquema del desarrollo del pensamiento algebraico …………	59
Figura 3	Gusto por la clase de matemática de los estudiantes de TCEB…………………………………………………………………	86
Figura 4	Facilidad para los estudiantes del uso de contenidos matemáticos en la solución de ejercicios………………………	87
Figura 5	Interrelación de contenidos algebraicos en TCEB ……………	107
Figura 6	Elementos de la estrategia didáctica …………………………	116
Figura 7	Ejercicio desarrollado en clase………………………………	153
Figura 8	Ejercicio desarrollado en clase por una estudiante……………	154
Figura 9	Ejercicio desarrollado en el cuaderno……………………………	156
Figura 10	Desarrollo de ejercicios en la clase de matemática……………	157
Figura 11	Problema de generalización de patrones desarrollado en pizarra ……………………………………………………………..	158
Figura 12	Ejercicio de patrones desarrollado en una tarea ……………	159
Figura 13	Comparación de la prueba pedagógica de salida respecto a la de entrada para el grupo experimental …………………	164

Lista de Siglas

Sigla	Significado
TCEB	Tercer Ciclo de Educación Básica
UES	Universidad de El Salvador
FMOcc	Facultad Multidisciplinaria de Occidente
MINED	Ministerio de Educación
PEA	Proceso de enseñanza-aprendizaje
CE	Centro Escolar
FCEN	Fundamentos Curriculares de la Educación Nacional
LGE	Ley General de Educación
PEMTCEB	Programa de Estudio de Matemática para Tercer Ciclo de Educación Básica
UMA	Unión Matemática Argentina

Introducción

El aprendizaje de la Matemática es un reto para los estudiantes y el Álgebra es una de sus ramas que se caracteriza por su alto nivel de abstracción y utilización de símbolos para representar cantidades numéricas. Entre los conocimientos del álgebra están las operaciones con polinomios, la resolución de ecuaciones e inecuaciones, sistemas de ecuaciones, operaciones con matrices y determinantes. El dominio de estas operaciones garantiza el desarrollo de otras áreas de la Matemática.

Los estudiantes en las asignaturas de matemática para el nivel superior, con frecuencia experimentan fracasos que les impiden cumplir con los requisitos mínimos para aprobar. Esta situación, obliga al estudiante a cambiar de carrera, o dejar de estudiar aquellas que demandan un considerable trabajo con la Matemática, porque se socializa el paradigma que esta disciplina es difícil y que solo determinadas personas la pueden aprender, en cierta manera la sociedad perdona el fracaso en matemática; los estudiantes terminan por aceptar bajas calificaciones convencidos que es una situación normal.

A inicios del siglo XXI se evidencia el gran esfuerzo de investigadores y docentes por la incorporación de los procesos relacionados con el Álgebra, su enseñanza, dificultades y el pensamiento para el desarrollo de su aprendizaje. Tales procesos forman parte de la actividad algebraica, la cual es tratada como la interacción del estudiante con los objetos algebraicos.

En el plano internacional se destacan los trabajos de Kieran (2004) y Radford (2012) en Canadá; Callejo (1994), Katz (1997), Socas (1999), García (2008), y Rico (2012) en España; Guzmán (2013) y Vergel (2016) en Colombia; Butto y Rojano (2010), Chalé (2013) y Aké (2021) en México; Espinoza et. al. (2014) en Costa Rica; Ochoviet (2011) en Uruguay; Chevallar (1997) en Francia; Lozada y Díaz (2018), Alvis y Aldana (2019), Coro (2019), Navarro (2019) en Cuba.

Son significativos los trabajos de Katz (1997), Rico et ál. (1997), Butto y Rojano (2010), Socas (2011), Guzmán (2013) y Vergel (2014) sobre las dificultades identificadas en los estudiantes para el aprendizaje de la Matemática donde se destacan: entender los conceptos matemáticos, el uso del lenguaje de los símbolos algebraicos, el desarrollo de algoritmos básicos para operar con expresiones algebraicas, la resolución de problemas matemáticos, la identificación de patrones y la comprensión del concepto de variable.

Con respecto al lenguaje simbólico, Katz (1997), argumenta que tiene que ver con la construcción y comunicación de los conceptos algebraicos, por lo que hay que emplearlo correctamente de lo contrario puede provocar en el estudiante una crisis con relación al aprendizaje del álgebra. En relación con el desarrollo de algoritmos en el estudiante se presentan dos situaciones: por un lado, la capacidad para desarrollarlos correctamente y por otro, el acomodamiento a ejercicios que responden a un modelo establecido que reconoce con facilidad y que su resolución no requiere de mayor elaboración. Esta última, mantiene al estudiante en una zona de confort carente de una constante búsqueda de lo nuevo.

Referente a las limitaciones en la capacidad para resolver problemas matemáticos George Polya (1989), afirma que la solución de un problema inicia con su interpretación y comprensión, luego se resuelve y se finaliza con una reflexión sobre la solución para ver si hay otras formas de hacerlo y cuál es la más elegante, la más fácil o la más difícil. Desde esta perspectiva, la resolución de problemas enfrenta a los estudiantes a la constante búsqueda de nuevos conocimientos, entre ellos, los conceptos, definiciones, procedimientos y proposiciones que conducen a la solución.

Rico et ál. (1997) organizaron las dificultades del aprendizaje de la Matemática en las asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos del pensamiento y del desarrollo cognitivo, a los procesos de enseñanza y a las actitudes afectivas y emocionales. Estos autores son los primeros que hacen referencia al proceso de enseñanza como una de las dificultades en el aprendizaje de esta disciplina en tal proceso está involucrado el profesor. También se refieren a las actitudes afectivas y emocionales que corresponden tanto a profesores como a estudiantes en las diferentes interacciones que surgen dentro y fuera de la clase de matemática.

En este mismo orden de ideas, la transición de la aritmética al álgebra constituye para el estudiante, un obstáculo epistemológico y cognitivo, debido a que este pasa repentinamente de estudiar operaciones y relaciones entre números, a operar expresiones algebraicas y manipular variables. Los autores Vergel (2012) y Guzmán (2013) sugieren que esta transición tome como punto de partida un estudio con significado de la sintaxis del álgebra y uso paulatino del lenguaje simbólico desde la primaria; así como también se deben revisar los momentos claves de una etapa histórica muy importante, en la construcción del sentido y significado de la variable. También, desde el punto de vista didáctico, estos autores sugieren tomar como referencia la incorporación de procesos algebraicos vinculados al estudio de patrones numéricos y geométricos.

Son muchos los problemas relacionados con el aprendizaje de la Matemática que inciden directamente en la adquisición de los conocimientos algebraicos. Los autores Callejo (2016), Vergel (2016) y Aké (2017) sostienen que el dominio del lenguaje simbólico, uso y aplicación de algoritmos, resolución de problemas matemáticos, identificación y generalización de patrones numéricos y algebraicos contribuyen para que el estudiante desarrolle su pensamiento algebraico, haciendo énfasis en la importancia de crear espacios favorables para la interacción de los estudiantes con los objetos algebraicos de manera natural.

Con respecto al pensamiento algebraico en esta investigación se tienen como referentes las investigaciones de los autores Manrique y Losada (2000), Butto y Rojano (2010), Radford (2012), Garzón y Causado (2013) y Callejo et ál. (2016). En el caso de Radford caracterizó el pensamiento algebraico mediante los vectores: el sentido de indeterminancia que se refiere a la interpretación dada a las incógnitas, la analiticidad relacionada con el carácter operatorio de las variables y la designación simbólica que tiene que ver con el uso de símbolos para nombrar lo desconocido. Los otros autores desarrollaron investigaciones sobre la manera de desarrollar este pensamiento, lo que se evidencia en el capítulo I.

Socas (2011) reclama la necesidad de profundizar en la comprensión del desarrollo del pensamiento algebraico, argumentando que no hay respuestas claras sobre el tipo de aprendizajes que indiquen la presencia de este pensamiento en los estudiantes. Pero Vergel (2014) considera los patrones algebraicos el corazón del álgebra, porque su identificación y formulación de un modelo que los represente requiere de un considerable trabajo para los estudiantes y no todos logran enunciar tal modelo, por esta razón esta actividad la considera como distintiva del desarrollo del pensamiento algebraico.

Vergel (2012), también explica que la creación del contexto influye en el desarrollo del pensamiento algebraico, por lo que los aspectos históricos culturales forman parte de las actividades en el aula; en este sentido, el estudiante podrá plantearse diferentes ejercicios o problemas algebraicos referenciados tanto en el contexto escolar como en el marco cultural en que está inmerso. Este autor, argumenta que el estudiante refiere lo indeterminado, es decir, la incógnita, según su contexto cultural. Por lo tanto, hay que hacer un esfuerzo por construir los entornos en los que emerja y se desarrolle el pensamiento algebraico.

Por otra parte, Espinoza et ál. (2014), manifiestan que cuando los estudiantes inventan sus propios problemas matemáticos, desarrollan sus niveles de pensamiento algebraico y mejoran sus actitudes hacia esta disciplina, estos resultados se corresponden con los de Chevallard (1997), quien afirma que en la clase hay que dar espacio a los estudiantes para que hagan matemática, es decir, que construyan sus propios problemas. Esta actividad es similar a la de inventar problemas ambas conducen al desarrollo del pensamiento algebraico.

En función de lo expuesto por los autores, una parte esencial de la clase de matemática se debe dedicar a desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes, donde se integran dialécticamente la docencia, los contenidos y la participación del estudiante, esto exige trascender la metodología tradicional y dar espacio a metodologías activas que exigen en profesores y estudiantes alto compromiso con la formación integral cultivando la capacidad crítica, ética y moral para convertirse en ciudadanos responsables de su comunidad. Por tal razón es importante explorar los lineamientos que se tienen como país con relación a los elementos que debe incluir la formación matemática.

En la última década, la enseñanza de la Matemática en El Salvador avanza desde el Ministerio de Educación (en adelante MINED) donde se promueven diferentes estilos de enseñanza y se actualiza el Programa de estudio de Matemática para Tercer Ciclo de Educación Básica (en adelante PEMTCEB) y los libros de texto bajo la cobertura del Proyecto Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (en adelante ESMATE). En el año 2015 el MINED inició un cambio curricular en Matemática con la intención de mejorar los aprendizajes de los estudiantes en esta asignatura que culminó con la creación del proyecto ESMATE.

La Ley General de Educación (en adelante LGE) determina los objetivos generales de la educación salvadoreña; se aplica a todos los niveles y modalidades y regula la prestación del servicio de las instituciones oficiales y privadas. En el artículo 21 se contemplan los objetivos de la Educación Básica en los literales b), c) y d) donde se propone inculcar una disciplina de trabajo, orden, responsabilidad, tenacidad y autoestima, desarrollar capacidades que favorezcan el desenvolvimiento eficiente en la vida diaria a partir del dominio de las disciplinas científicas, humanísticas y tecnológicas, y acrecentar la capacidad para observar, retener, imaginar, crear, analizar, razonar y decidir. Entre los deberes de los estudiantes, está participar en las actividades de enseñanza y de formación que desarrolle la institución donde están inscritos (Ley General de Educación, 2011).

También desde los Fundamentos Curriculares de la Educación Nacional (en adelante FCEN) del sistema educativo salvadoreño estos tienen entre sus propósitos contribuir al logro de procesos, habilidades, destrezas, valores y capacidades que permitan el desarrollo del pensamiento y de la construcción del conocimiento científico y técnico y potenciar la capacidad para resolver situaciones de la vida cotidiana. También se espera que la Matemática a impartir a los estudiantes de Tercer Ciclo de Educación Básica (en adelante TCEB), en las diferentes instituciones educativas, contribuya “al desarrollo de capacidades cognitivas, de razonamiento, de abstracción, deducción y análisis” (Fundamentos Curriculares, 2005, p. 47). Pero en ninguno de los documentos se expresa cómo hacerlo desde la clase de Matemática.

Otro de los propósitos de esta disciplina es potenciar capacidades operatorias básicas aplicables a la vida cotidiana y habilidades para redescubrir hechos, conceptos y relaciones matemáticas. En este sentido hay que atender aspectos formativos para desarrollar destrezas cognitivas de carácter general e incluir lo instrumental porque se necesita proporcionar las bases que conduzcan a los estudiantes hacia niveles superiores. También lo práctico y utilitario, pues se espera que los estudiantes valoren y apliquen sus conocimientos matemáticos en situaciones de la vida cotidiana.

El PEMTCEB sugiere un enfoque de resolución de problemas en los ámbitos científicos, técnicos, sociales y de la vida cotidiana. Se parte de que la solución de todo problema implica cierto descubrimiento y, además, si se orienta a situaciones de la vida cotidiana del estudiante, constituye un aprendizaje significativo (Programa de estudio Matemática Tercer Ciclo de Educación Básica, 2018).

También el PEMTCEB incluye la competencia de razonamiento lógico para desarrollar las capacidades de identificar, nombrar, interpretar, comprender procedimientos, algoritmos y relacionar conceptos. La competencia del lenguaje se incluye con el objetivo de promover la descripción, el análisis, la argumentación y la interpretación, utilizando el lenguaje natural como base para interpretar el lenguaje simbólico.

En la LGE, los FCEN y el PEMTCEB, se encuentra una base sólida, desde la perspectiva teórica, de los objetivos que se persiguen con la formación matemática en El Salvador, en el nivel especificado. Desde el punto de vista de la autora, estos objetivos incluyen tanto el aspecto instructivo como educativo de la Matemática, considerándolos una herramienta potente que sumada con la intención pedagógica contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático-algebraico en los estudiantes.

Es positivo que existan normativas sobre la educación en matemática, pero es necesario dar las indicaciones de cómo instrumentarlas en el aula, para que el Proceso de Enseñanza y Aprendizaje (en adelante PEA) sea un espacio donde el profesor al diagnosticar el estado real del conocimiento de sus estudiantes, en función de las competencias y contenidos programáticos desarrolle actividades encaminadas al estudio de los contenidos, de seguimiento a las competencias propuestas, considerando el enfoque de resolución de problemas, creando espacios reflexivos y llevando la evaluación como un eje transversal del proceso.

De acuerdo con el PEMTCEB, la enseñanza de la Matemática se asume desde un modelo por competencias el cual se define como una metodología educativa cuyo fundamento es facilitar que los estudiantes adquieran los contenidos desde situaciones prácticas y entornos experimentales. En este sentido cada unidad del PEMTCEB tiene declarada una competencia con contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales e indicadores de logro de la competencia. También se contemplan competencias transversales para fortalecer las capacidades productivas y ciudadanas (Programa de estudio de Matemática para TCEB, 2018).

A pesar de los esfuerzos que se hacen como país, desde la práctica profesional de la autora de la investigación, se observa que la mayoría de los estudiantes llegan a la Educación Superior con insuficientes habilidades algebraicas. Este problema se evidencia en la medida que los estudiantes avanzan en el sistema educativo donde muestran falta de comprensión de la forma de operar los algoritmos algebraicos, en las limitantes que presentan para plantear y resolver problemas matemáticos, la poca habilidad para reformular un problema a partir de otro y para crear y resolver sus propias tareas o retos. Estas dificultades les impiden afrontar con naturalidad las exigencias de esta disciplina.

En correspondencia con lo anterior, los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje del álgebra en TCEB. El análisis del estado actual del objeto de estudio desde las observaciones de clases de matemática (Anexo A), de los cuestionarios a estudiantes (Anexo B), de la prueba pedagógica inicial a los estudiantes (Anexo C) y entrevistas a profesores (Anexo D) permitió identificar las siguientes problemáticas:

- ✓ se trabaja siguiendo fielmente la metodología ESMATE lo que limita el trabajo diferenciado y el desarrollo de la creatividad,

- ✓ una minoría de estudiantes presenta sus soluciones a los problemas planteados en clase y es el profesor quien comenta o induce la solución,
- ✓ los estudiantes que presentan sus soluciones a los problemas planteados en clase por lo general son los que las hacen correctamente, situación que impide mostrar y discutir la forma de pensar de quienes no pueden resolver los ejercicios o problemas,
- ✓ se carece de oportunidad para que los estudiantes reformulen o creen sus propios problemas,
- ✓ predominan los problemas tipo del libro ESMATE en el proceso de enseñanza-aprendizaje,
- ✓ los profesores modelan la solución de los problemas y con los impulsos inducen a los estudiantes a las soluciones esperadas,
- ✓ los profesores generalmente desconocen formas de desarrollar el pensamiento algebraico, como consecuencia no lo potencian,
- ✓ faltan orientaciones metodológicas en los documentos rectores; LGE, FCEN, PEMTCEB y libros ESMATE; así como también ejercicios, y problemas en los libros de texto para desarrollar el pensamiento algebraico,
- ✓ existen dificultades en los estudiantes para codificar y decodificar símbolos,
- ✓ hay carencia de problemas en los que la solución implique buscar generalidades,
- ✓ cuando los estudiantes participan en pizarra no explican lo que pensaron para llegar a la solución,
- ✓ el desarrollo del pensamiento algebraico está en un nivel bajo con una puntuación de 3.7 de 10 puntos.

De los planteamientos derivados de la exploración teórica, lo observado en el estado actual del objeto de estudio y la experiencia profesional de la autora, se evidencia una contradicción, entre las insuficientes habilidades que presentan los estudiantes en la actividad algebraica y las competencias exigidas en los documentos rectores de esta disciplina para TCEB propuestos por el MINED, situación que evidencia que el PEA de la Matemática no es efectivo en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Tal situación lleva a plantear el siguiente **problema científico:** ¿Cómo desarrollar el pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en estudiantes de Tercer Ciclo de Educación Básica?

Para dar solución al problema científico se asume como **objeto de estudio** el desarrollo del pensamiento algebraico; como **campo de acción,** el desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en estudiantes del TCEB en el municipio de Santa Ana, y como **objetivo** de la investigación la *e*laboración de una estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en estudiantes de TCEB.

Preguntas científicas

1. ¿Cuáles son los referentes teórico-metodológicos que sustentan el desarrollo del pensamiento algebraico, desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en estudiantes de TCEB?
2. ¿Cuál es el estado actual del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB en el municipio de Santa Ana?
3. ¿Qué componentes tiene una estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB?
4. ¿Cuál sería el resultado de la aplicación de una estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática?

Tareas Científicas:

1. Sistematización de los referentes teórico-metodológicos del desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

2. Caracterización del estado actual del desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en estudiantes de TCEB en el municipio de Santa Ana.
3. Elaboración de una Estrategia Didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.
4. Constatación de la efectividad de la estrategia didáctica elaborada, mediante la puesta en práctica en un grupo de estudiantes de TCEB en el municipio de Santa Ana.

La investigación se realizó en el marco temporal comprendido entre 2018 y 2022, bajo un enfoque metodológico mixto con énfasis en lo cualitativo, fundamentado en la aplicación de una estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico a partir de metodologías activas en el marco cognitivo y social.

Para el desarrollo de las tareas científicas se emplearon los métodos teóricos: ***Histórico-lógico*** para investigar la historia y las tendencias actuales del desarrollo del pensamiento algebraico y el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, conocer su evolución y establecer regularidades y formas de su desarrollo para tomarlos como guía para orientar el PEA en la actualidad.

Por su parte el método ***Analítico-sintético*** *p*ermitió hacer una adecuada selección de las fuentes bibliográficas para analizar desde el punto de vista teórico, las formas de desarrollo del pensamiento algebraico, por lo que se revisaron y analizaron estrategias existentes en la literatura científica para desarrollar el pensamiento algebraico y a partir de ello visionar una estrategia que se ajuste al entorno salvadoreño mediante un cuerpo de dimensiones e indicadores derivados del análisis. También, mediante un diagnóstico se caracterizó el estado actual del objeto de estudio desde el PEA de la Matemática, para el cual se hizo una reflexión de los hallazgos obtenidos a través de los instrumentos aplicados, hasta alcanzar un conocimiento general del estado del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB. A través de la **Inducción-deducción** se caracterizó la estrategia didáctica en el PEA de la Matemática de TCEB en el municipio de Santa Ana, y su concreción en la unidad “Comunicación con símbolos” de séptimo grado.

Se utilizó el método empírico ***observación*** para constatar los modos de actuación de los actores del PEA, y su incidencia en el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB en el municipio de Santa Ana, para obtener la información se utilizó una guía de observación (Anexo A). La **encuesta** (Anexo B) se utilizó para obtener información de estudiantes de TCEB, sobre las interacciones que se dan entre los actores del PEA en la clase de matemática y el tipo de ejercicios o problemas que se consideran acerca del objeto en estudio, y constatar los resultados con la observación realizada.

Se aplicaron dos **Pruebas pedagógicas** una de entrada (Anexo C) y otra de salida (Anexo G) utilizando un cuestionario que permitió conocer el estado actual del desarrollo del pensamiento algebraico y contrastar los resultados de inicio con los resultados obtenidos después de la intervención a través de la aplicación de la estrategia didáctica en la muestra seleccionada. Además, se utilizó la **entrevista** para obtener información de profesores que imparten matemática en TCEB y del jefe regional de occidente sobre el desarrollo del pensamiento algebraico. Se utilizaron las guías de entrevista de los Anexos D y F respectivamente y se grabaron las conversaciones, con el permiso de los informantes, para luego hacer las transcripciones.

Mediante la técnica de **análisis documental** se revisó el PEMTECB y los libros ESMATE para el mismo nivel (Anexo E). En el análisis de datos se utilizaron los métodos estadísticos: análisis univariado para describir los resultados de los instrumentos administrados y análisis multivariado de datos para hacer las pruebas de hipótesis que constataron la efectividad de la estrategia didáctica.

Para la organización, presentación y análisis de los datos recolectados mediante los instrumentos administrados, se utilizaron métodos de estadística descriptiva y para hacer las pruebas de hipótesis que constataron la efectividad de la estrategia didáctica se utilizó análisis multivariado. Para desarrollar los procedimientos se usó una hoja de cálculo Excel y el software estadístico SPSS.

La fundamentación teórica permitió definir las dimensiones de la variable objeto de estudio para su operacionalización y determinar los indicadores que sirvieron de base para el diseño de los instrumentos de recolección de información. Por lo anterior, se reconoce como fundamental partir de los diversos saberes para construir una estrategia que sea coherente con el conocimiento y el criterio de estudiantes, profesores y autoridades. Es así como esta investigación hace énfasis en la descripción e interpretación del fenómeno desde la perspectiva de los actores involucrados en el desarrollo del pensamiento algebraico, haciendo una triangulación de los métodos empleados.

La población se constituye de 6 centros escolares, un jefe regional, 7 profesores y 295 estudiantes de TCEB. Para los centros escolares y profesores, se empleó el muestreo no probabilístico con un diseño muestral por criterios. En el caso de los estudiantes se utilizó muestreo probabilístico aleatorio simple con un tamaño de muestra de 295 sujetos.

La **novedad científica** de la investigación radica en la elaboración de una estrategia para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB, sustentada en metodologías activas con énfasis en la participación del estudiante, mediante la cual el profesor asume el rol de guía y mediador, potenciando el trabajo en equipo, generando espacios de debate, colaboración y construcción cooperativa de los aprendizajes, contribuyendo a una formación integral de los estudiantes.

La **contribución a la práctica social y educativa** es el conjunto de acciones y modos de actuación del profesor para la dirección del PEA de la Matemática y la colección de ejercicios y problemas que permiten desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB en El Salvador.

Para la **contribución a la teoría pedagógica** la concepción del PEA de la Matemática desde el redimensionamiento de la definición del desarrollo del pensamiento algebraico, a partir de las dimensiones e indicadores elaboradas para TCEB en El Salvador.

El documento de tesis consta de introducción, tres capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. En el capítulo 1 se analizan los referentes teórico-metodológicos que sustentan el desarrollo del pensamiento algebraico desde el PEA de la Matemática. En el capítulo 2 inicia con el diseño metodológico de la investigación, la variable en estudio, dimensiones e indicadores, la caracterización del estado inicial del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en estudiantes de TCEB en el municipio de Santa Ana y la estrategia didáctica para contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. En el capítulo 3 se presentan la puesta en práctica y sus resultados.

Capítulo 1: Referentes teórico-metodológicos que sustentan el desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática

En este capítulo se analizan los referentes teórico-metodológicos que sustentan y fundamentan la elaboración de una estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB; incluye elementos teóricos que permiten comprender la complejidad del pensamiento y del pensamiento algebraico, se identifican metodologías de enseñanza que facilitan su desarrollo y la adquisición de aprendizajes de álgebra por los estudiantes. Por tal razón, es fundamental reflexionar sobre las bases científicas que están presentes en la práctica, para identificar las que contribuyen al desarrollo del pensamiento algebraico.

1.1 El desarrollo del pensamiento y el pensamiento matemático

1.1.1 Definiciones de pensamiento

Se analizan definiciones de pensamiento desde los fundamentos filosóficos, psicológicos y cognitivos, con el propósito de identificar los elementos necesarios para mejorar el PEA de la Matemática y desarrollar el pensamiento algebraico. Se analizan las definiciones de pensamiento de diferentes autores y se identifican tanto los elementos que tienen en común como aquellos en los que difieren, para tomar posición sobre la definición de pensamiento que se asume en la investigación.

El pensamiento según Vega (1990) es una actividad global del sistema cognitivo que ocurre cuando el sujeto se enfrenta a una tarea o problema con un objetivo y un cierto nivel de incertidumbre sobre la forma de realizarla. Aunque se asienta sobre procesos de atención, comprensión y memoria no es reductible a estos.

Subirana (2015) desde la filosofía educativa da una definición de pensamiento y argumenta que este implica una actividad global del sistema cognitivo con intervención de los mecanismos de memoria, atención, procesos de comprensión, aprendizaje y procesamiento de la información. Lo relaciona con una experiencia interna e intrasubjetiva.

Desde la perspectiva psicológica, pensamiento “es el proceso psíquico socialmente condicionado de búsquedas y descubrimientos de lo esencialmente nuevo y está indisolublemente ligado al lenguaje” (Petrovski, 1986, p.22). Para Vergel (2016) “es una actividad reflexiva y sensible mediada por signos, materializada en la corporeidad de las acciones, gestos y artefactos” (p.57).

Para Dorsch (1985), el pensamiento es la elaboración interpretativa y ordenadora de informaciones y el ejercicio de funciones intelectuales o cognitivas como la formación de conceptos y operaciones mediante esquemas de diferentes grados de abstracción, se consideran conocimientos y estructuras cognitivas para reconocer, descubrir o proponer sus relaciones.

Tabla 1

Elementos coincidentes en las definiciones de pensamiento según autor

Autores		
Vega (1990) *Petrovski (1986)*	*Vega (1990)* *Subirana (2015)*	*Vergel (2016)* *Dorsch (1985)*
Surge cuando el sujeto se enfrenta a un proceso de descubrimiento para desarrollar una tarea o un problema	Incluye procesos de atención, comprensión, memoria	Actividad reflexiva del sistema cognitivo, de elaboración interpretativa y ordenadora

Las definiciones de pensamiento en esta investigación presentan elementos comunes, en la Tabla 1 los autores reconocen que el pensamiento emerge en un escenario de confrontación entre el sujeto y una tarea por resolver mediante actividad reflexiva que incluye procesos de atención, comprensión, memoria, elaboración, interpretación y ordenación de información.

Tabla 2

Elementos diferentes en las definiciones de pensamiento según autor

Autor				
Vega (1990)	Petrovski (1986)	Dorsch (1985)	Vergel (2016)	Subirana (2015)
La tarea o problema que se resuelve tiene un cierto nivel de incertidumbre sobre la forma de realizarla	*Proceso socialmente condicionado * búsqueda y descubrimiento de lo esencialmente nuevo	Considera la formación de conceptos y operaciones mediante esquemas de diferentes grados de abstracción	Incluye corporeidad de las acciones, gestos y artefactos	Lo relaciona con una experiencia interna e intrasubjetiva

Por otra parte, entre los autores que se analizan se observa que relacionan elementos diferentes con el pensamiento. En la Tabla 2, Vega (1990) considera que el pensamiento surge ante una tarea que presenta un cierto nivel de incertidumbre sobre cómo realizarla, por lo que se selecciona atendiendo a una determinada exigencia, mientras que Dorsch (1985) considera diferentes grados de abstracción en la formación de conceptos; Petrovski (1986) se refiere a la búsqueda de lo esencialmente nuevo e interpreta el pensamiento como un proceso socialmente condicionado, Vergel (2016) destaca la actividad reflexiva con énfasis en los signos y las acciones, gestos y movimientos corporeizados y Subirana (2015) relaciona el pensamiento con una experiencia intrasubjetiva.

Se destacan elementos valiosos en estas definiciones que se relacionan con lo cognitivo de los aprendizajes, entre ellos la relación con la solución de problemas, la intervención de los procesos de atención, comprensión, elaboración, interpretación, memoria y la formación de conceptos. Vergel (2016) vincula el pensamiento con una actividad reflexiva y sensible.

Le Bretón (2010) en su obra “Cuerpo sensible” explora las diferentes capacidades del cuerpo para relacionarse con el mundo en un contexto social. Relaciona lo “sensible” con la capacidad de manifestarse a través de emociones, estas a la vez pueden exteriorizarse en experiencias y aprendizajes. Sin embargo, en este contexto la postura crítica frente a la realidad es un desafío puesto que en las aulas predomina lo cognitivo de los aprendizajes y poca oportunidad a las experiencias afectivo-emocional, que desde las neurociencias juegan un papel importante en la adquisición de los aprendizajes. Se considera necesario incluir lo sensible en esta investigación.

A partir de la literatura analizada se asume como definición de pensamiento la perspectiva de la psicología cognitiva combinada con la sociología ya que interesan los procesos sociales en el sentido de que en el aula existe una dinámica de interacción entre los estudiantes y los distintos grupos que se forman a medida que entablan y reajustan sus patrones de conducta. Se define pensamiento como *un proceso psíquico mediante una actividad reflexiva y sensible dirigida hacia la búsqueda y descubrimiento de lo nuevo a través de procesos de atención, comprensión, elaboración, interpretación y memoria*.

1.1.2 Desarrollo del pensamiento

El ser humano con frecuencia enfrenta situaciones desconocidas, incomprensibles e inesperadas, lo que significa que sus conocimientos son limitados y necesita un conocimiento profundo del mundo que le rodea. El pensamiento se aproxima a estas profundidades de lo ilimitado y lo nuevo, por lo que cada sujeto, al pensar, descubre algo nuevo para él o la humanidad.

Es desde el pensamiento que se dividen y desenredan las interdependencias existentes entre los objetos, fenómenos y acontecimientos, el resultado observado exteriormente es la consecuencia regular del proceso interno del pensamiento en el ser humano. De los procesos de pensamiento pueden ser la resolución de una tarea o problema por parte del estudiante, la asimilación de determinados conocimientos, la formación de conceptos o ideas nuevas (Petrovski, 1986).

El pensamiento surge y se desarrolla en conexión con el lenguaje, existe relación directa de la realización de una tarea y la palabra discursiva; el pensar en voz alta hace posible la confrontación clara y correcta de todas las ideas fundamentales que surgen en el proceso del pensamiento. Este inicia ante la necesidad de resolver un problema, donde se necesita un proceso de búsqueda y conocimiento de las relaciones existentes entre los elementos conocidos, así como los algoritmos necesarios para su solución, a este proceso, Petrovski (1986) le llama, lo “nuevo”.

Las leyes del análisis, la síntesis y la generalización son específicas del pensamiento, y sobre su base se pueden explicar todas las manifestaciones exteriores de la actividad racional. El conocimiento es dividido en partes y el estudio de cada una por separado se concreta en el análisis, luego la unión, la correlación, e interrelación es la síntesis que a la vez se interrelaciona con el análisis, el estudiante vivencia este proceso cuando se enfrenta a un problema o al confrontarse con la metodología de las indicaciones dadas.

El estudiante se confronta con la metodología de las indicaciones cuando siente necesidad de resolver un problema y tiene que encontrar el proceso de solución, este recibe una indicación en forma de ayuda, pero será capaz de entenderla solo cuando se acerca a la solución del problema, porque en ese momento podrá incorporar la indicación a su sistema de conexiones y relaciones correspondientes en calidad de respuesta parcial, caso contrario no comprenderá la indicación. El estudiante desarrolla su pensamiento al enfrentarse a actividades de análisis, síntesis, metodología de las indicaciones, formulación de problemas a partir de uno ya existente o cuando elabora uno nuevo. Estas actividades exigen esfuerzo mental.

Petrovski (1986) clasifica el pensamiento en efectivo, figurativo y abstracto. El primero nace a partir de la actividad práctica y es el primer tipo de pensamiento que desarrollan los seres humanos. Se verifica tanto en el desarrollo histórico de la humanidad como en el proceso de desarrollo psíquico de cada niño. Sobre la base de los conocimientos de la actividad práctica surge, paulatinamente, la actividad racional teórica.

El pensamiento figurativo se produce con base a imágenes, el objeto se percibe y representa claramente y se dominan los conceptos (en el sentido estricto). Los expertos sugieren que no es recomendable saturar al estudiante por mucho tiempo con detalles a manera de imágenes, pues es necesario avanzar a otros niveles hasta trascender al pensamiento abstracto. Este último se produce sobre la base de la experiencia práctica y sensorial y se expresa en forma de conceptos y razonamientos abstractos, surge desde la edad escolar en la que se enseña al estudiante un sistema de conceptos con los que comienza a operar.

Además, Petrovski (1986) caracteriza el pensamiento mediante las cualidades de independencia, flexibilidad y rapidez. La primera tiene que ver con su carácter creador y se manifiesta en la capacidad de plantear y resolver una nueva tarea o un nuevo problema. La flexibilidad es la capacidad de cambiar un camino tomado al resolver un problema por otro que al principio era imposible considerar, y la rapidez tiene que ver con la capacidad de tomar decisiones en un tiempo limitado.

Se considera que entre los tipos de pensamiento que define Petrovski (1986), se mantiene un vínculo indisoluble. Aunque es ideal que durante el proceso de asimilación de conceptos se desarrolle en el estudiante el pensamiento abstracto, en la práctica, se inicia desde el nivel básico, es decir, el efectivo y figurativo y muchos estudiantes se quedan en estos niveles, sin embargo, siempre hay un perfeccionamiento constante como apoyo a la actividad intelectual.

Por otra parte, se indagaron formas de desarrollar el pensamiento, se encontró a Castellanos (2020) quien define desarrollo del pensamiento como “la capacidad propia que tiene el ser humano que se va desarrollando despacio y naturalmente con la maduración cuando el ser humano crece y se desarrolla “(p. 8). El autor considera que la aptitud natural para pensar indica entenderse a sí mismo y al mundo que lo rodea, utilizando la percepción, la atención, la memoria y la transferencia.

Sánchez (2012) no precisa una definición de desarrollo del pensamiento, sino que afirma que mediante el desarrollo del pensamiento es posible ampliar, clarificar, organizar o reorganizar la percepción y la experiencia, lograr visiones más claras de los problemas y situaciones, dirigir deliberadamente la atención, regular el uso de la razón y la emoción, desarrollar sistemas y esquemas para procesar información, desarrollar modelos y estilos propios de procesamiento, aprender en forma autónoma, tratar la novedad, supervisar y mejorar la calidad del pensamiento e interactuar satisfactoriamente con el ambiente.

La autora consideró necesario crear una definición de desarrollo del pensamiento que se corresponda con los alcances de esta investigación: movimiento dialéctico de la realidad histórica cultural, y un individuo que responde con sus propias interpretaciones, con la finalidad de llegar a una respuesta de una situación problemática a través de procesos de atención, comprensión, elaboración, interpretación y memoria, mediante la actividad reflexiva del sistema cognitivo, y aunque no se exprese explícitamente es deseable que transite desde los niveles de pensamiento básicos hasta la abstracción. Por lo que se analizará cómo estos elementos se desarrollaron en la actividad matemática.

1.1.3. Pensamiento matemático: desarrollo en civilizaciones antiguas

1.1.3.1 Pensamiento matemático

Dado que la definición de pensamiento asumida en esta investigación involucra un proceso mediado por la actividad reflexiva y sensible e interesa la actividad matemática, es importante analizar las acciones de los sujetos ante las tareas matemáticas simples o complejas, para entender el proceso de construcción de los conocimientos y los procesos matemáticos.

Polya (1945) argumenta que el pensamiento matemático trata de procesos que permiten entender fenómenos; entre ellos, la exploración, experimentación, planteamiento de conjeturas y prueba de hipótesis. Por su parte, Schoenfeld (1998) señala que, en la escuela, se debe promover una actividad semejante a la de los matemáticos, para que los estudiantes puedan desarrollar un punto de vista matemático.

El pensamiento matemático incluye una variedad de procesos mentales que dependen de los recursos matemáticos disponibles y la forma en que éstos son utilizados. Guerrero y Rivera (2003) clasifican el pensamiento matemático en tres categorías: pensamiento inductivo, deductivo y lógico, no es del alcance de esta investigación profundizar en ellas.

"Una de las tendencias generales y más difundidas, consiste en poner hincapié en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática, más que en la mera transferencia de contenidos" (Guzmán, 1993). La autora coincide con este autor en el sentido que en esta investigación importa la construcción de ideas matemáticas y no solo la transmisión de los conocimientos, por lo que propone una definición de pensamiento matemático que siga este hilo de pensamiento.

Pensamiento matemático: el desarrollo de conceptos, definiciones, procedimientos y proposiciones de la matemática en las formas posibles de construir ideas matemáticas en el enfrentamiento cotidiano a ejercicios y problemas.

1.1.3.2 Pensamiento matemático en las civilizaciones antiguas

El Álgebra como rama de la Matemática que tiene por objeto de estudio la generalización del cálculo aritmético mediante expresiones compuestas de constantes y variables, tiene sus raíces en la Matemática desarrollada por las antiguas civilizaciones. El pensamiento algebraico es parte del pensamiento matemático por lo que se consideró hacer una revisión de la forma en que evolucionó el pensamiento matemático desde las civilizaciones antiguas. Kline (1992) plantea que la forma natural en que evolucionó la Matemática se parece a la forma en que se desarrolla en el cerebro de cualquier individuo. Por tal razón, se describen los problemas y la metodología utilizada por los babilonios, egipcios, chinos y griegos, a efectos de visualizar con sentido crítico, formas de resolución de problemas matemáticos que puedan servir de guía en el PEA.

Según Morales (2002), lo que se sabe de la antigua civilización de Babilonia, se logró conocer desde 300 tablillas de arcilla con información matemática. Los babilonios no disponían de símbolos por lo que sus notaciones eran bastante ambiguas, se apoyaban en los contextos en los que escribían las expresiones para su respectiva interpretación. La multiplicación de enteros la hacían usando la descomposición de números.

Según los autores Heaviside (1992), Dalcí y Olave (2007), los babilonios resolvían ecuaciones cuadráticas utilizando las ternas pitagóricas, no conocían los números negativos ni el cero lo que limitó el estudio de ciertas ecuaciones e interpretaciones. La metodología utilizada para resolver problemas matemáticos fue por la vía de reducción a otros más sencillos, su pensamiento matemático se evidenció mediante la estrategia de construir una cadena de razonamientos donde cada nuevo resultado estaba fundamentado en el anterior, y de manera retórica explicaban solo las etapas necesarias para llegar a la solución.

De la Matemática desarrollada en la civilización de los egipcios se tiene información desde los papiros de Henry Rhind y de Moscú, según Morales (2002), en estos se encontraron 110 problemas1 de la vida cotidiana resueltos a través de aritmética o ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ ó $x + ax + cx = b$. A la incógnita "x" la llamaron "aha", no utilizaban símbolos, el método de resolución utilizado fue el de "falsa posición" el cual consistía en ir probando con diferentes valores de x hasta cumplir la igualdad. Los procesos de solución fueron puramente aritméticos, formulados verbalmente con ligeras instrucciones para su solución. Se infiere escaza evidencia del desarrollo de un pensamiento matemático abstracto.

De la civilización China, se tiene el tratado "Matemáticas en nueve Libros" que data de 250 a.C. El texto contiene problemas aplicados a la medición de campos, construcción de canales, cálculo de impuestos. Contaron con un procedimiento que permitió resolver sistemas de ecuaciones lineales similar al método de Gauss, reconocieron los números negativos constituyendo uno de los principales descubrimientos de la Matemática en su civilización. En el siglo XIII descubrieron un procedimiento para resolver ecuaciones de grado superior llamado método del elemento celeste donde a la incógnita le llamaron "elemento celeste". En la resolución de problemas se utilizaron métodos por tanteo (Martínez y Arrieche, 2012).

[1]En el papiro de Henry Rhind se encontraron 85 problemas de matemática y 25 en el de Moscú.

En la civilización griega se fundó la escuela pitagórica en el siglo V a. C, aunque sus orígenes fueron de corte religioso, hicieron importantes aportes al Álgebra con elementos geométricos, en los años 450-300 a. C, incluyeron áreas para resolver ecuaciones, consolidando el álgebra geométrica. La mayor contribución de los griegos a la Matemática fue la insistencia en deducir todos los resultados matemáticos a partir de axiomas, aunque no fue así desde el principio, ya que las demostraciones fueron fundamentadas en casos particulares. Según Kline (1992) los primeros matemáticos fueron filósofos y ejercieron una influencia formativa, también mostraron interés por las abstracciones en muchos campos, les gustaba el razonamiento y la especulación.

Los griegos le dieron significado geométrico a x^2 y x^3 de allí proviene la lectura que se hace de "x cuadrado" y "x cubo". Transformaron la mayor parte del álgebra en geometría. En esta era, Herón, Nicómaco (sobre el año 100) y Diofanto (sobre el año 250) fueron los primeros en tratar problemas aritméticos y algebraicos separados de la Geometría. Herón resolvió problemas algebraicos utilizando aritmética, sin usar símbolos, solo narración verbal porque seguían la influencia de los babilonios y egipcios (Kline, 1992).

En 1600 d.C. René Descartes y otros matemáticos, dieron un avance a las matemáticas puras[2]. Diofanto impulsó el Álgebra al introducir el simbolismo y la resolución de ecuaciones indeterminadas. Alrededor el siglo XVIII tanto la Aritmética como el Álgebra alcanzaron, paulatinamente, sus propios fundamentos y con mayor auge en Europa, promoviendo el desarrollo de matemáticos por Inglaterra, Francia, Alemania, Holanda e Italia. Con el trabajo de Descartes, Fermat, Wallis y Newton el Álgebra se convirtió en la sustancia dominante de las matemáticas. Wallis fue uno de los pioneros en darle al álgebra un lugar privilegiado como el que ya tenía la Geometría en Alejandría (Kline, 1992). Se introdujo el lenguaje simbólico, predominado las formas retórica y sincopada.

[2]"Las Matemáticas puras sostienen un conjunto de axiomas haciendo caso omiso de todo objeto o contenido intuitivo que pudiera ligarse a ello.

El pensamiento matemático en las civilizaciones antiguas se desarrolló en el nivel básico porque se utilizaron formas de resolución de problemas por reducción, por tanteo y prueba y error, los problemas con ecuaciones se resolvían utilizando formas retóricas y sincopadas. La introducción de símbolos especiales para las incógnitas constituyó el punto de partida del álgebra. La autora de esta investigación reconoce que la metodología que utilizaban en estas civilizaciones constituye un punto de partida para introducir al estudiante en el estudio del álgebra y potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico.

1.1.4 Evolución de la Matemática en América Latina

En América Latina, en el siglo XVI (época de la colonia), dominaba el virreinato de México y el reino unido de Guatemala; El Salvador no existía como nación sino que la llamaban “provincia de San Salvador”. En la colonia aparecen las primeras escuelas de matemática superior se inicia el estudio de la Aritmética, el Álgebra, la Geometría y el Cálculo Diferencial e Integral. De 14347, obras manuscritas e impresas, solo 83 se vincularon con actividad matemática, de estas, 11 eran de autores guatemaltecos y ninguno de la provincia de San Salvador. En esa época el estado de la Matemática en la provincia no era alentador. En la provincia solo se enseñaban las cuatro operaciones básicas debido a que la actividad más importante era la agricultura (Castro y Alvarado, 1996).

Según Arboleda (2012), la Matemática comienza a tomar auge en América Latina a inicios del siglo XX con la llegada de inmigrantes españoles y europeos. Se menciona a Julio Rey Pastor, Mieli y Beppo Levy quienes desde mediados de los años veinte se preocuparon por crear espacios de reflexión para la investigación matemática, específicamente en Argentina. El argentino José Babini y Rey Pastor escribieron uno de los primeros textos de historia de la Matemática que influyó en Latinoamérica.

Julio Rey Pastor comenzó a escribir cuando era estudiante, entre 1905 y 1909 publicó nueve artículos sobre temas de álgebra, a pesar de que escribía sobre sus propias resoluciones según Llorente (1985), con frecuencia se preocupaba por generalizar las cuestiones tratadas, y aunque no fueran inéditas, se reconocía el mérito porque era un joven estudiante. Entre 1911 y 1913 ya como doctor, publicó seis artículos más sobre álgebra. A pesar de que sus escritos fueron valiosos no se calificaron como "trabajos científicos", sin embargo, se reconocieron dos aportes que este joven dio al álgebra: "Por una parte, sus comunicaciones a los congresos de Granada (1911) y de Madrid (1913); y por otra, sus *Lecciones de Álgebra* originadas en el discurso que dictó en Oviedo en 1913" (Llorente, 1985, p.123).

Después Rey Pastor escribió *Lecciones de Álgebra* en cinco ediciones, la última en 1960 la primera parte sobre álgebra clásica en los campos real y complejo y la segunda sobre álgebra teórica en un campo cualquiera. En sus textos remarcó la diferencia entre los abordajes clásicos, y los modernos (que él hacía), también aceptó sus limitantes, puesto que valoró el teorema de Hilbert sobre la existencia de ecuaciones "sin efecto" y afirmó que "La difícil demostración de Hilbert, existencial y no constructiva, no permite dar ejemplos de ecuaciones sin efecto" (Llorente, 1985, pág. 129). Se opuso al método deductivista por razones didácticas. No estuvo de acuerdo en elevar la generalidad de los métodos y complicar la terminología, pues temía ahuyentar incipientes vocaciones en lugar de captarlas y formarlas.

En octubre de1924 se fundó la Sociedad Matemática de Argentina, que fundó la "Revista Matemática" en la que hasta 1927 había publicado 36 fascículos, la mayoría de matemática y otros de física. Entre los autores figuraron: Rey Pastor, Babini, Blaquier, Baidaff entre otros (Santaló, 2001). Por ocho años en Argentina solo se produjo el Seminario Matemático Argentino publicado por Rey Pastor, este autor y otros contemporáneos fundaron la Unión Matemática Argentina (en adelante UMA) en 1936.

Según Santaló (2001), en la década de 1940 perduró el sano criterio de seriedad y rigor científico impuesto por Rey Pastor, desde 1941 a 1968 José Babini pasó a ser el director de la revista, que cobró importancia en el desarrollo del pensamiento matemático en América Latina, porque se convirtió en la principal fuente de información de la actividad matemática de la región, en 1984 se escribió en el volumen 31 una nota necrológica a José Babini por su entrega al trabajo de la revista. A mediados del siglo XX varios países de Latinoamérica se unieron a las jornadas de matemática que promovían los que dirigían la revista.

También entre los precursores de la Matemática en América Latina se menciona a Luis Santaló, quien participó activamente en las actividades promovidas por la revista UMA. A partir de los años ochenta, esta disciplina sufre cambios debido a la configuración de una masa crítica de investigadores formados, en su mayoría, en Europa y que asumieron el reto de continuar el trabajo ya iniciado.

Mientras, en El Salvador en tiempos de la colonia, como provincia, se ejecutaba una economía colonial, que consistía en la explotación de sus recursos agrícolas con fines comerciales; se producía el cacao, el bálsamo y el añil. Según Castro y Alvarado (1996), los movimientos giraban en torno a la fuerza del trabajo del indio y el conocimiento que tenía, con poca cultura letrada, suscitaba una actividad matemática con pocas exigencias, generalmente, se ejecutaban operaciones con la aritmética.

De acuerdo con Castro y Alvarado (1996) desde 1841, año en que el estado de El Salvador fue declarado soberano e independiente en C.A., se realizaron diferentes reformas educativas. Entre 1841 y 1940, la Matemática a impartir era un listado de contenidos, las actividades en esta disciplina estuvieron influenciadas por una serie de factores de corte económico y político.

En 1940, se dio la primera reforma educativa[3] de El Salvador, en la cual se elaboraron planes de estudio con Orientaciones Pedagógicas que significaron un avance en el sistema educativo nacional. Previo a esta fecha, los profesores disponían solamente de un listado de contenidos que debían “enseñar” (Castro y Alvarado, 1996). Esto significa que no se contaba con un plan estructurado sobre la manera de abordar la Matemática, ni con los objetivos que se pretendían alcanzar.

[3]Se le llama primera reforma con relación al siglo XX, sin embargo, en 1883 el ministro de educación Salvador Gallegos implementó un método uniforme de enseñanza. Se dio una primera reforma educativa significativa a la educación, implementando técnicas más avanzadas en la enseñanza en la que apareció el método Lancasteriano.

En 1949, con el surgimiento de algunas estructuras dentro de la Universidad de El Salvador (en adelante UES), nace la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, la cual incluyó la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales que dio origen a la creación de la Facultad de Ciencias. En 1953 se creó la Escuela Normal Superior y en la educación superior no universitaria se creó la especialidad en Física-Matemática.

En 1968, se asume la segunda Reforma Educativa y, en el ámbito matemático, se introdujo la llamada “Matemática Moderna” en el currículo nacional, que incluyó la enseñanza de la Teoría de Conjuntos, la Lógica Matemática, la Programación Lineal, el Álgebra Abstracta, las Probabilidades, y el Cálculo Vectorial y Matricial, haciendo uso de la axiomática, como forma de construcción de las teorías matemáticas (Castro y Alvarado, 1996). En la UES, se creó la Licenciatura en Matemática lo cual dio un incremento significativo del material bibliográfico y en el año 1991 en la misma institución se creó la carrera de profesorado en matemática.

En el período 1993-1995 dentro del plan decenal 1995-2005 se implementó la “Reforma Educativa en Marcha”, que incluyó un cambio en los planes de estudio a nivel nacional. Se aplicaron nuevos enfoques al proceso de enseñanza-aprendizaje, se redujo en un año la educación media, se crearon nuevos planes de estudio para las carreras de profesorado donde, para la especialidad de matemática, se mantuvieron vigentes hasta el año 2013.

En el año 2008 desde el MINED se planteó una actualización que enfocó a las matemáticas en la solución de problemas en los ámbitos científico, técnico, artístico y de la vida cotidiana, respondiendo a la naturaleza de las matemáticas e intentando fijar el aprendizaje para la vida y no solo para aprobar una evaluación. Este aprendizaje se enfocó al desarrollo de competencias en los estudiantes, y al fortalecimiento del razonamiento lógico matemático, se incluyó, la traducción de los problemas del lenguaje natural al lenguaje matemático. Los lineamientos metodológicos se orientaron hacia la participación, la iniciativa, la comunicación de ideas y el desarrollo del razonamiento lógico por partes de los estudiantes.

Este análisis demuestra que, en El Salvador, progresa la enseñanza de la Matemática, al pasar de simples listados a programas estructurados, en todos los niveles de enseñanza. Para la autora de esta investigación, desde la reforma de 1940 donde se estructuraron los programas para la enseñanza de la Matemática esta disciplina experimentó un avance en el PEA, pero no es suficiente, porque los estudiantes siguen presentando insuficiencias al enfrentar la Matemática en niveles superiores, por lo que se considera necesario analizar la manera en que desde el PEA se da cumplimiento a los programas que están vigentes.

Se infiere que, al seguir los lineamientos descritos en los programas de asignaturas, según lo detallado, desde la lógica del contenido en cada una de las reformas, se tiene la posibilidad de formar en el estudiante habilidades matemáticas que le permitan desenvolverse adecuadamente en el nivel inmediato superior. En el caso del estudiante de TCEB, se prepararía para estudiar las matemáticas de nivel medio y posteriormente las de nivel superior.

1.2. El desarrollo del pensamiento algebraico

En este apartado se analizan los referentes teórico-metodológicos del pensamiento algebraico, para determinar elementos fundamentales del diseño de una estrategia didáctica que desarrolle el pensamiento algebraico.

1.2.1. Pensamiento algebraico: definición, caracterización y desarrollo

Se analizan definiciones de pensamiento algebraico tomando como referencia fundamentos psicológicos, cognitivos, y sociológicos, para identificar elementos que mejoren el PEA de la Matemática para el desarrollo del pensamiento algebraico. Por tal razón, se analizan las definiciones de pensamiento algebraico de los autores Radford (2012), Walkowiak (2014) y Vergel (2014) identificando coincidencias y diferencias, para asumir la definición de pensamiento algebraico en la investigación.

1.2.1.1 Definiciones de pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico según Radford (2012), es una forma particular de reflexionar en matemática y es considerado práctica cognitiva mediada por signos. Para Walkowiak (2014) el pensamiento algebraico es un elemento fundamental del pensamiento matemático, ya que posibilita en el estudiante la capacidad de establecer reglas generales de relaciones matemáticas observadas en los números, los objetos y las formas geométricas. Vergel (2014) asume el pensamiento algebraico como una forma particular de reflexionar matemáticamente, y desde consideraciones filosóficas afirma que el pensamiento algebraico, en tanto saber, es un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente.

Un análisis de las definiciones de pensamiento algebraico en esta investigación permite identificar elementos comunes en la definición de Radford (2012), la de Vergel (2014) y la de Walkowiak (2014). Los tres autores afirman que el pensamiento algebraico es una forma particular de reflexionar en matemática. Sin embargo, en la Tabla 3 se observan algunos elementos diferentes que se incluyen en las definiciones. Radford (2012) considera el uso de elementos simbólicos como parte de una práctica cognitiva. Walkowiak (2014) que facilita en el estudiante la capacidad de identificar reglas generales de relaciones matemáticas. Vergel (2014) toma en cuenta en la definición de pensamiento aspectos semióticos e históricos culturales al referirse a un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente.

Tabla 3

Elementos diferentes en las definiciones de pensamiento algebraico según autor

	Autor	
Radford (2012)	*Walkowiak (2014)*	*Vergel (2014)*
es considerado una práctica cognitiva mediada por signos	posibilita en el estudiante la capacidad de establecer reglas generales de relaciones matemáticas	conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente.

Las definiciones de pensamiento analizadas en esta investigación recogen elementos de la psicología cognitiva que posibilitan capacidades en los estudiantes para identificar relaciones matemáticas observadas en el campo matemático mediante la práctica incluyendo procesos corporeizados de acción y reflexión en un contexto histórico y cultural. Para esta investigación, en su concepción de pensamiento algebraico es fundamental incluir la identificación de relaciones entre los elementos en una situación problemática declarado por Walkowiak (2014) sin embargo, falta el dominio de algoritmos necesarios para la solución, desde la perspectiva de Petrovski (1986) estos dos elementos forman lo “nuevo”.

El campo de los números, las letras y los símbolos pertenecen al ámbito algebraico y el lenguaje que opera es el simbólico o algebraico. En la interacción con este, el estudiante codifica, que es el paso del natural al simbólico y decodifica que es asignarle significado en el contexto natural a las expresiones simbólicas (del simbólico al natural); así se enfrenta a lo nuevo en el sentido de las diversas interpretaciones que se asignan a las variables.

Sobre lo expuesto, y para el desarrollo de esta investigación se define pensamiento algebraico *el proceso psíquico mediatizado por la actividad intelectual dirigida hacia la búsqueda y descubrimiento de lo nuevo de los objetos que pertenecen al campo de los números, las letras y los símbolos*.

1.2.1.2 Características del pensamiento algebraico

De acuerdo con Radford (2012), el pensamiento algebraico se caracteriza por tres vectores: el sentido de indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica. El primero se refiere a la interpretación dada a las incógnitas, es decir, lo opuesto a la determinancia numérica y se refiere a una sensación de indeterminación que es propio de los objetos algebraicos básicos como incógnitas, variables y parámetros. El carácter indeterminado de las variables hace posible la sustitución de un objeto variable o desconocido por otro.

La analiticidad es el reconocimiento del carácter operatorio de los conceptos básicos, es decir la forma de trabajar los objetos indeterminados o las variables. Esta característica incluye el dominio de la sintaxis de los objetos algebraicos mediante el uso de algoritmos algebraicos. El tercer vector, también llamado expresión semiótica, se relaciona con la manera específica de nombrar a los objetos algebraicos. Estos tres vectores están estrechamente relacionados.

Radford (2012) divide el pensamiento algebraico en tres estratos: El pensamiento algebraico factual, el contextual y el simbólico. El primero se desarrolla mediante medios semióticos de objetivación como los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y la palabra discursiva. En este estrato la indeterminancia no avanza hacia el nivel de la enunciación, solo queda implícita, no se usan variables. Un ejemplo de este tipo de pensamiento surge cuando el estudiante señala con la mirada o con su índice, mueve su lápiz, dice “aquí”, “allí”. Este estrato se puede homologar con el pensamiento efectivo de Petrovski (1986) que se refiere a la actividad práctica. En ambos casos es el nivel elemental de las formas de pensamiento y el primero en desarrollarse.

El pensamiento algebraico contextual se desarrolla a través de frases clave o formas reducidas de expresión llamadas contracción semiótica, porque hay evolución de los nodos semióticos tendientes a formular una expresión que sustituya a los gestos. Incluye símbolos en el discurso a manera de reducción tendientes a crear una expresión simbólica o fórmula. En este estrato la indeterminancia está explícita y es objeto del discurso, lo que significa que aparecen variables, operadores, las frases discursivas del primer estrato se van reduciendo. Este estrato está asociado con el pensamiento figurativo de Petrovski (1986) porque comienzan a aparecer expresiones o imágenes.

El pensamiento algebraico simbólico, se representa por símbolos alfanuméricos o fórmulas. Hay un cambio drástico en la forma de nombrar los objetos del discurso, lo que representa un avance en el proceso de objetivación de la contracción, desarrollar esta forma de pensamiento, que desde la psicología se corresponde con el pensamiento abstracto.

1.2.1.3 Analogía del pensamiento con el pensamiento algebraico

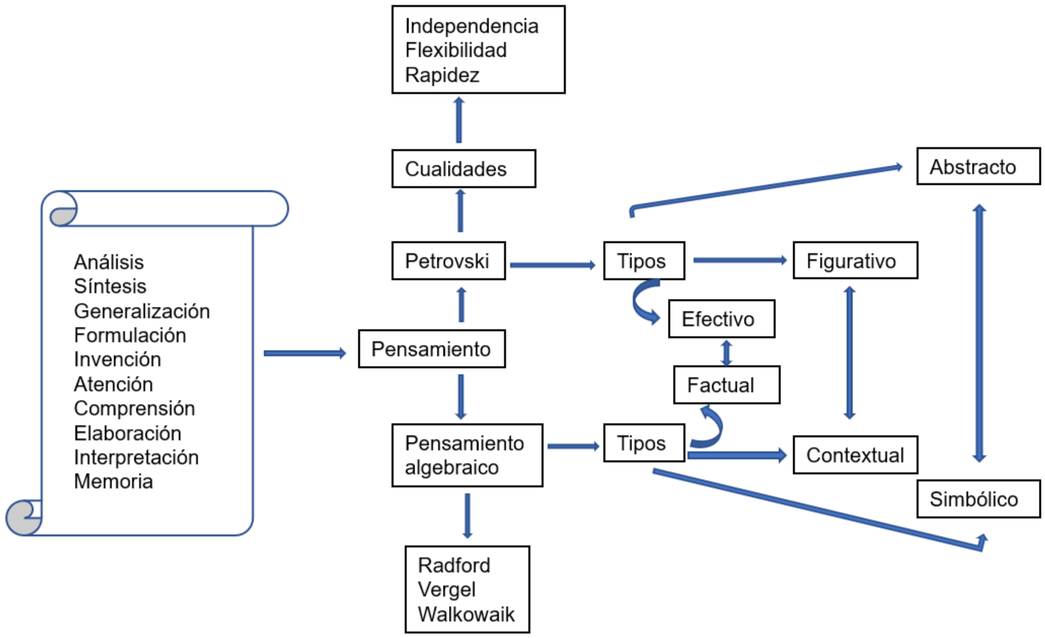
En la Figura 1 se observa una analogía entre los aportes de Radford (2012) y Petrovski (1986) ya que están estrechamente relacionados, la clasificación de pensamiento de Petrovski (1986) efectivo, figurativo y abstracto se corresponde con los estratos de Radford (2012) que son el pensamiento algebraico factual, el contextual y el simbólico. El pensamiento efectivo se relaciona con la actividad práctica y el pensamiento algebraico factual con los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y la palabra discursiva.

El pensamiento efectivo se produce con base a imágenes y objetos y hay dominio de los conceptos; el pensamiento algebraico contextual se desarrolla a través de frases, formas reducidas, expresiones, símbolos tendientes a crear una expresión simbólica o fórmula. Por su parte el pensamiento abstracto se expresa en forma de conceptos y razonamientos abstractos y el pensamiento algebraico simbólico se representa por símbolos alfanuméricos o fórmulas y se verifica un cambio drástico en la forma de nombrar los objetos porque se utilizan símbolos.

Por otra parte, el pensamiento algebraico según Walkowiak (2014) permite al estudiante identificar reglas generales de relaciones matemáticas en los ejercicios o problemas, este proceso es equivalente al proceso de simbolizar que es parte del pensamiento algebraico simbólico de Vergel (2014). Tanto el pensamiento en forma general como en el pensamiento algebraico se desarrollan respetando cierto orden, en ambos, se tiene como ideal llegar al nivel más avanzado, es decir, al pensamiento abstracto o algebraico simbólico, sin que esto signifique dejar de desarrollar los dos primeros. Además, se evidencian las características del pensamiento: independencia, flexibilidad y rapidez y los procesos generales del pensamiento que son: análisis, síntesis, generalización, formulación, atención, comprensión y memoria. Lo cual se puede ver sistematizado desde la Figura 1.

Figura 1

Analogía entre pensamiento y pensamiento algebraico



1.2.2 pensamiento algebraico temprano

Butto y Rojano (2010), Callejo (2016) y Vergel (2016) coinciden con la necesidad de incluir formas de pensamiento algebraico desde el currículo de primaria para favorecer la comprensión del álgebra cuando los escolares[4] lleguen a secundaria. Los autores tienen opiniones diferentes, pero con una intención común que es iniciar las nociones de álgebra en los escolares.

Butto y Rojano (2010) explican que no se trata de ver el Álgebra como una transición lineal, es decir, como una mera extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal y como una herramienta para la manipulación de símbolos, desprovista de significados. Vergel (2016) en sus investigaciones en matemática ha encontrado que es posible iniciar ideas algebraicas en los escolares, afirma que: “alumnos de escuela primaria pueden, efectivamente, empezar a ser expuestos a

[4] Se utilizará escolares para referirse a estudiantes de escuela primaria, en otros casos se usará estudiantes.

los primeros rudimentos de algebra” (Vergel, 2016, p.15); Callejo (2016) propone “organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas, tratando de que haya una continuidad sin necesidad de introducir nuevos tópicos” (p.6).

La discusión entre los autores citados explicita la factibilidad de exponer a los escolares al álgebra temprana (*Early algebra*) sin exponerlos ante contenidos de álgebra, sino a partir de los de aritmética enfrentarlos con actividades que faciliten la transición del pensamiento aritmético al algebraico mediante una visión diferente del uso de la simbología y las operaciones aritméticas, para cultivar en el niño un nuevo modo de pensamiento aritmético, y a partir de este, producir nociones básicas de álgebra temprana. Esto significa atribuir carácter algebraico gradual a la actividad aritmética.

Por ejemplo, las tablas de multiplicar se abordan de manera tradicional induciendo al estudiante a que las memorice. Sin embargo, se pueden mostrar con una expresión $y = mx$, donde x e y representen números enteros y m puede ser el factor de la tabla que para este caso es la del 3, es decir $m = 3$. Se toman valores para: $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$ y obtienen los números que resulten para y, ver Tabla 4, este proceso es conocido por los estudiantes como la tabla de multiplicación del 3. Pueden discutirse algunas variantes, observar el patrón que se genera, dar algunos valores para x, en la Tabla 4 se tienen valores desde 1 al 10 y se encuentran los valores que toma y utilizando la expresión $y = 3x$, llenar los espacios en blanco.

Tabla 4

Tabla del 3 como un patrón o secuencia numérica

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = 3x$	3		9			18		24		30

También, se puede dar la tabla con las dos filas llenas y que el estudiante determine el valor de $m = 3$. En esta actividad se relacionan el concepto aritmético básico de la multiplicación de dos números enteros con uno más avanzado que es una relación funcional entre los valores de x e y, al mismo tiempo que se potencia el desarrollo del pensamiento variacional. Existen numerosas formas de plantear actividades, desde contenidos básicos, que estimulan el pensamiento algebraico y que a la vez sirven de preámbulo para introducir la noción de variable, concepto clave en el ámbito algebraico. Carpenter et ál. (2004) citado por Aké (2015, p.2) sostiene que:

El pensamiento algebraico se puede desarrollar en los niños como resultado de la realización de actividades planificadas, que, partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido (medida y geometría), vayan creando progresivamente la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico.

La autora de esta investigación considera que se pueden emanar beneficios importantes al hacer una introducción temprana del álgebra en los escolares, y como lo señala Callejo (2016) no se trata de incluir temas de álgebra en el currículo, sino de desarrollar los conceptos aritméticos de una manera creativa, incluyendo relaciones entre cantidades donde haya variación, así el estudiante se identificará con estructuras de cambio, de prueba y hasta de predicción, como en el caso de la tabla del 3 preguntarle qué le sucede a y si $x = 15$.

Existen otras formas de conducir al estudiante hacia el desarrollo del pensamiento algebraico como la identificación de estructuras y la modelización, que en criterio de la autora de esta investigación se incluyen en la generalización de patrones numéricos, idea que también es apoyada por autores como Bednarz et ál. (1996); Radford (2012); Callejo (2016), Vergel (2016), Aké (2017); (Butto y Rojano, 2010), como resultado de sus investigaciones en álgebra.

La autora de esta investigación concuerda con estas posiciones, porque el proceso para encontrar el término general de un patrón requiere de un a elaboración compleja, producto de la búsqueda y descubrimiento de las relaciones existentes entre los objetos que lo conforman, tal procedimiento contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico. Por esta razón se incluye un análisis de la generalización de patrones.

1.2.3. Estudio de patrones: desarrollo del pensamiento algebraico

Los patrones numéricos o algebraicos son secuencias numéricas o figurales que se representan mediante una expresión algebraica llamada término general, a partir de este se pueden generar otros términos dentro de la secuencia. Radford (2012) introdujo el término figural para referirse a una secuencia compuesta por figuras que siguen un patrón con relación a su forma, más tarde Vergel (2016) le llama secuencia figural con apoyo tabular, cuando a la par de cada figura aparece el número de elementos que la forman.

La generalización es el término general, utilizado en matemática para indicar el paso de lo particular a lo general y para ver lo general en casos particulares. Su descubrimiento requiere de un proceso de identificación, de descripción y abstracción, manifestada esta última en una expresión simbólica, apodícticamente llamada fórmula.

El proceso de descubrir el término general en una secuencia no siempre representa una tarea fácil para el estudiante. En investigaciones sobre patrones algebraicos, se descubrió que los estudiantes presentan dificultades para describir y expresar algebraicamente los patrones mediante un término general. De acuerdo con Vergel (2016), este proceso lleva implícito un grado de indeterminancia, acompañado de las limitaciones que los estudiantes tienen para pasar de manera espontánea de lo particular a lo general.

En la expresión de un patrón, el estudiante pone en práctica su habilidad para comunicar mediante el lenguaje algebraico. En los estratos de Radford (2012) aparece el pensamiento algebraico factual, donde el estudiante describe la o las comunalidades encontradas (porque puede haber más de una) en forma discursiva, posteriormente se construye una contracción semiótica para finalizar su representación con una expresión simbólica.

Para Vergel (2016), la generalización de patrones es el punto de partida hacia la abstracción matemática, porque es una de las actividades que más se vincula con el desarrollo del pensamiento algebraico, pues enfrenta al estudiante con situaciones que implican variación, acompañada por las formas discursivas, gestuales y procedimentales como evidencia de los intentos por construir argumentos y explicaciones de sus modos de pensar, en este escenario, el estudiante se desafía a descubrir algo nuevo. Este autor le da importancia a las formas de recursos cognitivos, físicos y perceptuales, como comunicaciones simbólicas y orales, dibujos y gestos.

El abordaje de los patrones inicia desde la percepción, experimentación, identificación y expresión de las comunalidades en forma discursiva, Radford (2012) sugiere aplicar la o las comunalidades a todos los elementos y luego deducir una expresión que permita calcular el valor de cualquier término de la secuencia que no esté presente en el campo fenomenológico. Vergel (2016) y Radford (2012) sugieren utilizar los medios semióticos culturales tales como gestos, señalamientos corporales y palabras.

A la generalización de la comunalidad, Pierce (2003), le llama abducción y la utiliza para deducir una fórmula o término general. En este sentido la característica común extraída del trabajo realizado sobre el campo fenomenológico juega un papel epistemológico. La abducción, es asumida como un principio aplicable a todos los términos de la secuencia.

Radford (2012) identifica tres niveles de generalización el primero es el factual donde el estudiante describe las comunalidades solo en forma discursiva, se generaliza en un nivel elemental. El segundo es el contextual, aquí aparecen gestos que ayudan a los estudiantes a comprender las relaciones que ocurren dentro del patrón combinado con el discurso y la visión, y el tercer nivel es el simbólico, donde el estudiante expresa la generalización desde símbolos alfanuméricos. Estos niveles están estrechamente relacionados con los estratos del pensamiento algebraico que el mismo autor define.

1.2.4 Formas de desarrollo del pensamiento algebraico

Los autores Manrique y Losada (2000), Butto y Rojano (2010), Radford (2012), Garzón y Causado (2013), Callejo et ál. (2016), Cabañas y Núñez (2018) y Sánchez (2022) en sus investigaciones han identificado maneras de desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes. En la Tabla 5 se muestran tales resultados.

Tabla 5

Formas de desarrollo de pensamiento algebraico por diferentes autores

Autor	Estrategia	Aporte	Limitante
1. Manrique y Losada (2000) Universidad Nacional de Colombia	Formación del pensamiento algebraico en los docentes	Enlaza elementos de la formación pedagógica y la disciplinar para fortalecer ambas, empleando como estrategias la construcción cuidadosa de significado de conceptos algebraicos que incluye un análisis de su evolución histórica, el estudio de los nexos, de los elementos y argumentos compartidos con otros dominios matemáticos. Plantean el valor de la reconstrucción histórica del álgebra y transmisión del conocimiento matemático como elementos que permiten construir nexos entre las nociones elementales y	Constituye una alternativa para la formación de docentes de matemática, dejando como tarea la creación de una propuesta curricular innovadora. No relaciona el trabajo con el desarrollo de pensamiento algebraico en los estudiantes.

Autor	Estrategia	Aporte	Limitante
		la teoría formal del álgebra.	
2. Butto y Rojano (2010) Universidad Pedagógica Nacional-Ajusco, México	Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. (5to y 6to grado)	A través de una secuencia de enseñanza con lápiz y papel y el programa Logo, se logró en los estudiantes: comprensión de ideas básicas de variación proporcional, descubrimiento de un patrón y formulación de una regla general, a medida que transita del pensamiento aditivo al multiplicativo	Aunque se utilizó lápiz y papel, el trabajo se enfocó en el uso del programa Logo mediante la variación proporcional y patrones por lo que su mayor incidencia recae sobre la indeterminancia y designación simbólica y solo se consideró el nivel de Primaria Básica.
3. Radford (2012) Laurentian University Ontario, Canadá	Desarrollo de pensamiento algebraico temprano	Sostiene que el pensamiento está compuesto por componentes materiales y del mundo de las ideas tales como el discurso (interior y exterior), formas de imaginación sensitiva, gestos, tacto y acciones reales con signos y artefactos culturales. La práctica en el aula con un seguimiento a	Innovador el hecho de considerar los movimientos corporeizados de acción conjunta, la percepción y el uso de los símbolos, sin embargo, se limita al estudio de patrones y con estudiantes de Primaria Básica.

Autor	Estrategia	Aporte	Limitante
		estudiantes de segundo grado a tercero y a cuarto mostró formas en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de sí-mbolos a medida que los estudiantes participan en actividades sobre patrones.	
4. Garzón y Causado (2013) Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia	Procesos de generalización y pensamiento algebraico	Una propuesta sobre el trabajo con secuencias de figuras, números o letras. Enfatiza el trabajo sobre hacer conjeturas encaminadas a descubrir el patrón de formación de una secuencia y se procura expresar ese patrón oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones. Finalmente se desea identificar una fórmula que permita reproducir el mismo patrón y calcular otros términos.	Si bien, es una propuesta interesante y que siguiendo a autores como Radford potencian el desarrollo del pensamiento algebraico, no se puso en práctica. Potenció la característica de indeterminancia.

Autor	Estrategia	Aporte	Limitante
		Se sugiere tomar la noción de pensamiento variacional como eje fundamental para dar estructura y sentido al aprendizaje y desarrollo del pensamiento algebraico.	
5. Callejo, García y Fernández (2016) Universidad de Alicante, España	Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales	Destaca como aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico la coordinación entre las estructuras espacial y numérica. En la práctica, se evidenció dominio en el sentido de indeterminancia al referirse a las mesas en general y no en un número específico, poniendo de manifiesto desarrollo de pensamiento algebraico contextual. Relacionaron la forma espacial con la numérica, lo que indica indicios de dominio en las relaciones funcionales.	Un experimento que arrojó resultados claros sobre ciertos dominios ya explicados queda limitado en el desarrollo de otras características que potencian este pensamiento como la analiticidad.

Autor	Estrategia	Aporte	Limitante
6. Cabañas y Núñez Universidad autónoma de Guerrero, México (2018)	Pensamiento geométrico y algebraico en secundaria	Mediante un taller se presentan ejercicios y problemas de patrones numéricos, algebraicos y geométricos con el propósito de contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico y algebraico. Se conoció el razonamiento utilizado de los participantes en la solución de algunas tareas.	Se enfocó solo en resolver ejercicios y problemas de patrones. Solo describe un mínimo de tareas a desarrollar por parte de las docentes facilitadoras
7. Vázquez y Cabañas-Sánchez Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero, México (2022)	Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado	A partir de los razonamientos y formas de representar los procedimientos en la resolución de problemas de generalización de patrones lineales, se documentó las estrategias de generalización de patrones y las diferentes formas de uso en el trabajo de los estudiantes. Algunos utilizaron formas asociadas a las	La propuesta se limita al trabajo con patrones dejando de lado otros contenidos. También no contempla la parte socioemocional de los estudiantes.

Autor	Estrategia	Aporte	Limitante
		estrategias: fragmentar, que consiste en construir la representación de un patrón con valores conocidos en el tratamiento de cuestiones que demandan términos cercanos y lejanos. Otros determinaron el patrón de una secuencia utilizando una representación verbal escrita, luego estableciendo una generalización constructiva estándar, otros usaron patrón de recursividad y finalmente, construyeron la relación funcional asociada al patrón.	

De las propuestas de la Tabla 5, se observa que seis de siete se enfocaron en el estudio de patrones numéricos y algebraicos para desarrollar el pensamiento algebraico, de esas seis solo la número cuatro incluyó los tres niveles del desarrollo del pensamiento algebraico, el factual el contextual y el simbólico porque se procura expresar un patrón de forma oral, por escrito, por medio de dibujos y otras representaciones. Dos estrategias incluyeron pensamiento variacional. Solo en una se consideró un análisis de la evolución histórica, en otra se incluyó relaciones funcionales, en otra utilizaron la semiótica expresada en formas de imaginación sensitiva, gestos, tacto y acciones reales con signos y artefactos culturales y uso de símbolos y en otra de las estrategias se usó fragmentación. Por otra parte, solo una de las estrategias relacionó la pedagogía con la parte disciplinar.

Un análisis de estas propuestas deja al descubierto las limitantes con relación al abordaje teórico que se ha hecho en el cual se considera que el desenvolvimiento del estudiante con la identificación, uso e interpretación de variables y relaciones entre ellas, habilidad en la utilización de algoritmos algebraicos, el dominio del lenguaje simbólico para producir conocimiento y comunicación de ideas son indicativos del desarrollo del pensamiento algebraico. Las limitantes observadas en las propuestas de la Tabla 5 son:

- ✓ enfocada en el desarrollo de pensamiento algebraico solo para profesores,
- ✓ se centró en el uso del programa Logo mediante la variación proporcional y patrones por lo que su mayor incidencia recae sobre la indeterminancia y designación simbólica y solo se consideró el nivel de primaria,
- ✓ se diseñó una propuesta para el desarrollo del pensamiento algebraico, pero no se puso en práctica, focalizó la característica de indeterminancia,
- ✓ un experimento que desarrolló las características de indeterminancia y designación simbólica no la analiticidad,
- ✓ aunque consideró los movimientos corporeizados de acción conjunta, la percepción y el uso de los símbolos, se limita al estudio de patrones y con estudiantes de primaria,
- ✓ se enfocó solo en resolver ejercicios y problemas de patrones. Solo describe un mínimo de tareas a desarrollar por parte de las docentes facilitadoras.

De la revisión de la teoría científica respecto a las formas de desarrollar pensamiento algebraico se tiene:

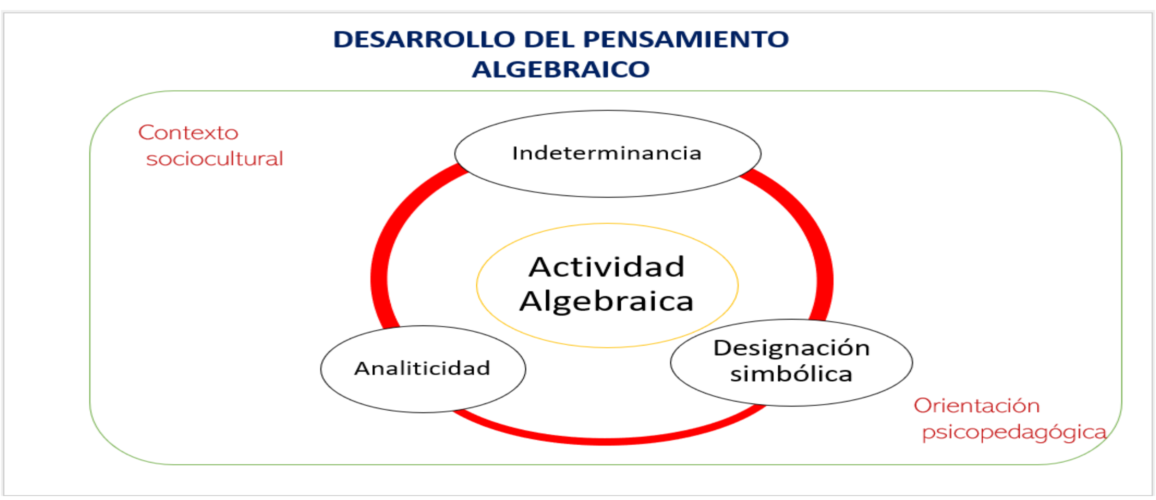
- ✓ no existe un ordenamiento en las acciones para desarrollar el pensamiento algebraico, sin embargo, se propone llevarlo del factual al contextual y al simbólico,
- ✓ aunque es el ideal, no siempre los estudiantes alcanzan el desarrollo del pensamiento algebraico simbólico,

- ✓ la generalización de patrones numéricos, algebraicos y geométricos contribuyen al desarrollo del pensamiento algebraico,
- ✓ las características de independencia, flexibilidad y rapidez se encuentran implícitas en la actividad algebraica y se explicitan en la participación consciente y voluntaria del estudiante,
- ✓ la resolución de problemas constituye una vía para el desarrollo del pensamiento algebraico en el sentido de la búsqueda de lo nuevo, según Petrovski,
- ✓ las características de indeterminancia, analiticidad y designación simbólica son indicativas del desarrollo del pensamiento algebraico porque incluyen el dominio del trabajo con variables, algoritmos algebraicos y lenguaje simbólico.

Sobre la base de lo expuesto, en esta investigación se define el desarrollo del pensamiento algebraico como la *evolución de este pensamiento mediante la orientación psicopedagógica del profesor, y la participación del estudiante en la comprensión e interpretación de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica en un contexto sociocultural*, lo que permite por el nivel de generalización de las mismas tenerlas en cuenta para medir el desarrollo del pensamiento algebraico como sus dimensiones.

Figura 2

Esquema del desarrollo del pensamiento algebraico



En esta investigación se asume la actividad intelectual como la categoría rectora donde mediante la orientación psicopedagógica del profesor y el estudiante enfocado en la búsqueda de nuevos conocimientos desarrolla su pensamiento. Si tal actividad se enfoca en el dominio matemático-algebraico a través de la indeterminancia, analiticidad y designación simbólica, se tiene la posibilidad de desarrollar el pensamiento algebraico. Estas se interrelacionan entre sí con igual orden de importancia.

1.3 Contribución del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática al desarrollo del pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico no solo se desarrolla desde el PEA del álgebra, hay que desarrollarlo desde cada una de las áreas de la Matemática (la aritmética, el álgebra, la geometría, las funciones y la estadística), todas se complementan unas a otras. El PEA hay que verlo desde la Matemática, aunque se particularicen algunos conocimientos desde un área específica. Por lo que el análisis siempre se realizará desde el PEA de la Matemática en primera instancia.

1.3.1. Objetivos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Cómo influyen en el desarrollo del pensamiento algebraico

Los objetivos constituyen el componente didáctico rector que guía el PEA, condicionan la actividad pedagógica tanto de los profesores como de los estudiantes, con el fin de alcanzar el cumplimiento de las competencias esperadas. No se hará distinción entre objetivo de estudiante y profesor porque este lleva implícito el trabajo del estudiante, lo instructivo, lo educativo, el saber, el poder ser, lo intelectual, lo moral y lo ideológico todo en una unidad dialéctica.

Los objetivos se conciben en función de las competencias que se quieren lograr en el estudiante, de acuerdo con Caballero et ál. (2018) y Castellanos (2002), estos deben partir de una visión desarrolladora e integradora en cuanto al aspecto cognitivo-instrumental, afectivo-motivacional y reflexivo-regulador.

El aspecto cognitivo-instrumental de los objetivos se refiere a la formación del conocimiento conceptual al que se aspira que el estudiante asimile. Según Caballero et ál. (2018), este se relaciona con hábitos, habilidades intelectuales y capacidades. Por su parte el aspecto afectivo-motivacional se relaciona con la motivación e intereses del estudiante por su aprendizaje, potenciando la necesaria significación entre los conocimientos y la vida en su contexto sociocultural.

Cuando se refiere al aspecto reflexivo-regulador, se tienen presente las acciones que muestran tanto la presencia como el control de procedimientos que permiten el análisis reflexivo de las condiciones de los ejercicios y problemas y la búsqueda de su solución, así como también un control valorativo de las posibilidades de acercarse con objetividad al conocimiento de su propio aprendizaje y de sus errores como forma de regulación individual y colectiva.

1.3.1.1. Los objetivos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática

En la Matemática, los objetivos son el componente didáctico rector de su PEA y comprenden tanto lo instructivo como lo educativo. Lo instructivo se refiere a la adquisición de conocimientos matemáticos sólidos entre los que se mencionan: conceptos, proposiciones, axiomas, teoremas, procedimientos, símbolos y fórmulas, todos mediados por el lenguaje matemático. Según Ballester (2018) la consecución de los objetivos demanda una planificación estratégica de la enseñanza de la Matemática, en la que se evidencie tanto la forma de trabajo como el pensamiento específico de esta disciplina.

De acuerdo con Ballester (2018) el aspecto educativo de los objetivos en la enseñanza de la Matemática está relacionado con: “la formación de nociones, convicciones, actitudes y normas de conducta, así como cualidades morales acordes con los fines y objetivos de la educación” (p. 35). Este autor, divide este aspecto en dos componentes, el filósofo-ideológico y el político-moral.

La Matemática desde el enfoque filósofo-ideológico, contribuye a la formación de una concepción científica del mundo, los profesores pueden ejercer una influencia educativa mediante un análisis reflexivo de fenómenos significativos, entre ellos su origen desde la abstracción de la realidad objetiva, la relación dialéctica entre su desarrollo y el de la sociedad, su evolución, sus limitantes y su aporte en la solución de diversos problemas.

El componente político-moral de la Matemática se relaciona con la formación de convicciones, normas de conducta y actitudes. Ballester (2018) sostiene que en las clases de matemática se puede formar en los estudiantes una conciencia planetaria, desarrollar cualidades como: la perseverancia, la disciplina y el aprendizaje consciente, así como también el amor a la patria, a la verdad, al trabajo y la lucha inclaudicable por las causas justas.

El objetivo en las clases de matemática no se limita solo a desarrollar contenidos, el enfoque filósofo-ideológico y el político-moral, hacen alusión al componente formativo, esta postura es también apoyada por González (2004) "Convendría enseñar Matemáticas yendo más allá de las propias Matemáticas: considerando sus relaciones y buscando su sintonía con las corrientes principales del pensamiento". Esta nueva actitud motivaría a los estudiantes, crearía nuevas aplicaciones y abriría nuevas vías de debate. Polya (1989) afirma que el primer y gran objetivo de la enseñanza de la matemática es enseñar a pensar, pero un pensar dirigido hacia un objetivo voluntario.

Un aspecto que limita el PEA es precisamente enseñar la matemática acabada, hecha, cerrada. Puga (2015) sostiene, "uno de los objetivos esenciales de la Matemática, es precisamente que lo que se enseña esté cargado de significado, y que este tenga sentido para el estudiante" (p.303). Estos autores sugieren que se construya el conocimiento junto con los estudiantes, por lo que los objetivos conducen a la construcción de conocimientos matemáticos a partir de su entorno. Para este propósito, el profesor debe lograr un acercamiento con el estudiante con el fin de crear problemas significativos[5] a su realidad.

Es imperativo definir los objetivos que deben regir el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática para desarrollar el pensamiento algebraico, se deben considerar los conceptos de álgebra que juegan un rol imponente en este propósito. Por ejemplo, variable es un concepto polifacético porque se puede usar como una incógnita, un número genérico o como una relación funcional, los estudiantes a

[5] Lo significativo no necesariamente es lo cotidiano, aquí el término se incluye para hacer referencia a aspectos que emerjan de los intereses de los estudiantes, solo así se podrán construir conocimientos sobre la base de lo significativo para ellos.

menudo enfrentan dificultades con cada uno de estos usos. Ochoviet y Oktac (2011) sostienen que esto se debe a que los profesores no enfatizan la diferencia de los usos que se le dan a algunos conceptos.

En esta investigación se asume que uno de los objetivos en la enseñanza de conceptos algebraicos, enfatice en la distinción entre cada uno de los usos de la variable para que el estudiante integre en una entidad conceptual, de tal forma que ante la necesidad de resolver un problema sea capaz de interpretar el uso de la variable que se considera. También, hay que utilizar la generalización de patrones como punto de partida hacia el desarrollo del pensamiento algebraico.

Otra situación por considerar es plantear como objetivos transversales, el desarrollo de actividades que conduzcan al estudiante desde el pensamiento algebraico factual y contextual hasta el simbólico o abstracto, así como facilitar la transición del pensamiento aritmético al algebraico, mediante una visión diferente que cultive un nuevo modo de pensamiento aritmético para transitar de manera gradual al algebraico. También, vincular el desarrollo de algoritmos algebraicos con la toma de decisiones por parte del estudiante, con el propósito de que este vaya adquiriendo autonomía en su formación y pueda entender mejor los contenidos de la Matemática.

1.3.2. Los contenidos de la enseñanza. Contenidos en la Matemática

Existe estrecha relación entre objetivos y contenido de enseñanza, este último se relaciona con las preguntas ¿Qué debe aprender el estudiante?, ¿Qué ha de enseñar el profesor? y ¿Qué exigencias se deben tener en cuenta para estimular el desarrollo de los estudiantes? Algunas respuestas se reflejan en los programas de estudio de las asignaturas. Caballero et ál. (2018) afirman que el contenido debe "comprender exigencias relacionadas con la instrucción, la educación y el desarrollo de los alumnos" (p. 72).

El contenido como categoría didáctica tiene componentes, uno es el sistema de conocimientos, habilidades y hábitos. Este, comprende la información básica que el estudiante ha de aprender, así como los procedimientos para implementar tales conocimientos. Es necesario enseñar a los estudiantes una concepción del mundo que les rodea como forma de acercarse al conocimiento de la verdad, para ello hay que identificar las relaciones entre los conceptos, así como saber cuál es antecedente de otro. Caballero et ál. (2018) definen habilidad como “dominio consciente y exitoso de la actividad mediante las acciones que realiza el estudiante en estrecha reciprocidad con los hábitos que también garantizan el dominio de la acción, pero de forma más automática y con un bajo nivel de conciencia” (p.73).

En esta investigación se asume que para para lograr un aprendizaje eficiente en los estudiantes sea eficiente, los profesores deben facilitar la adquisición de los conocimientos, del valor personal que representan, así como también enseñar a disfrutar los avances que alcanzan, y favorecer el desarrollo de habilidades y la formación de hábitos.

Otro componente del contenido es el sistema de relaciones con el mundo que beneficia la comprensión entre lo instructivo y lo educativo de la enseñanza. Incluye sentimientos, normas de conducta y valores que reflejan la relación activa del estudiante con la realidad que estudia y analiza, y sobre la cual emite juicios y valoraciones. En este componente inciden los procesos de autorregulación que orientan la manera correcta de sentir, pensar y actuar. El sistema de experiencias de la actividad creadora es un tercer componente del contenido, tiene una exigencia superior porque integra sus diferentes elementos. Este componente garantiza la preparación del estudiante para la búsqueda del conocimiento y la investigación.

No se puede dejar de mencionar el vínculo que guarda el contenido con la asignatura, ya que este facilita el cumplimiento de los objetivos que se plantean en función de las competencias a lograr en el grado específico. También se establecen relaciones con otras áreas que conforman el currículo escolar. Por ser parte de un programa hay más posibilidad que el estudiante adopte una disposición positiva ante el contenido, a la vez se logra una adecuada articulación entre la actividad práctica, cognoscitiva y valorativa de los estudiantes.

1.3.2.1 Contenidos en la enseñanza de la Matemática

A partir de los objetivos declarados en la enseñanza de la Matemática en un nivel específico, se consideran los contenidos a desarrollar, de tal forma que se logre en el estudiante ciertas transformaciones con relación a su cultura matemática, capacidades de razonamiento, argumentación, deducción y análisis, así como también el desarrollo de habilidades, hábitos, puntos de vista, convicciones, actitudes, cualidades y sentimientos (Ballester, 2018).

El sistema de conocimientos como componente del contenido en la Matemática se refleja en los conceptos de los objetos matemáticos, relaciones, operaciones, significados, formas de representación, descripciones y características, proposiciones expresadas en axiomas, conjeturas, teoremas y demostraciones. También los procedimientos de identificación, construcción y algoritmos.

Respecto a las habilidades y hábitos, se trabajan del dominio de las operaciones y procedimientos para desarrollar los algoritmos matemáticos; acciones que permitan elaborar, interpretar y comunicar ideas matemáticas; aprender a aprender utilizando la simbología de la Matemática, detectar y corregir sus posibles errores derivados de los procesos matemáticos. En matemática se requiere desarrollar hábitos de planificación, organización, ejecución, monitoreo y control, así como de búsqueda de posibles vías de solución de problemas.

En la actividad creadora son importantes los métodos para resolver problemas que pueden ser inductivos, deductivos y por analogía. Estos requieren de instrucción heurística, adiestramiento lógico lingüístico, capacidades cognitivas, metacognitivas y estratégicas. También se plantean situaciones significativas a los estudiantes para que comprendan el papel de la Matemática ante la humanidad.

Respecto al sistema de relaciones con el mundo, se incluyen las convicciones filosóficas, ideológicas, políticas y morales relativas a la Matemática. En este sistema prevalece el carácter educativo de la enseñanza de la Matemática, de tal forma que transcienda lo instrumental, sin que esto deje de ser importante.

En esta investigación se fundamenta este componente de la categoría contenido, para proponer a los agentes educativos, que conciban el contenido matemático con un sentido más amplio, en donde se reflexione su carácter filosófico-ideológico y político-moral y que se forme en los estudiantes convicciones y cualidades de la personalidad, traducidas en actitudes y normas de conducta. Esta postura permite contribuir de manera efectiva al logro de los objetivos de la disciplina y el cumplimiento de las competencias, y aportando elementos para el desarrollo de la personalidad de los educandos.

1.3.3. Dirección del proceso de enseñanza - aprendizaje

Una vez definidos los objetivos y contenidos de la enseñanza de la Matemática, surge la interrogante ¿Cómo el profesor desarrolla el PEA para lograr que los estudiantes se apropien del contenido y cumplan los objetivos y las competencias propuestas? Esta interrogante lleva a pensar en el método de conducción del proceso, que es la categoría didáctica "que se refiere a cómo los docentes desarrollan el proceso de enseñanza-aprendizaje en función de alcanzar el fin y los objetivos" (Caballero et ál., 2018, p. 81).

También se requiere de un método que permita orientar al estudiante para desarrollar su pensamiento. En la literatura pedagógica existen varias definiciones de método, en la investigación se asume la de Ballester (2018): "sistema de acciones previstas como vías y modos de planificar y organizar la actividad cognoscitiva de los estudiantes, con la finalidad de contribuir a la conducción efectiva y planificada del proceso de enseñanza y aprendizaje para lograr el objetivo" (p.95).

En la orientación del PEA para desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes, se toman como fundamento teórico algunas teorías cognitivas porque guían la forma en cómo el cerebro interpreta, procesa y almacena la información, entre ellas: la epistemología genética de Piaget (1973), la escuela histórico-cultural de Vigotsky (1984), el aprendizaje significativo de Ausubel (1983) y de manera electiva la teoría de la Gestalt. También, como fundamento psicopedagógico se considera la teoría de objetivación del conocimiento de Radford (2014).

Según la epistemología genética de Jean Piaget, el pensamiento surge de una relación dinámica de acciones: abstracciones reflexivas, diferenciaciones, reorganizaciones e integraciones. En esta teoría se reconocen cuatro etapas en el desarrollo del niño: la sensorio-motora, preconceptual, de las operaciones concretas y la etapa de las operaciones formales. Esta última es la que interesa en esta investigación por tratarse con estudiantes de 11 a 15 años y porque en esta el estudiante desarrolla una visión más abstracta del mundo, comienza a utilizar la lógica formal, a resolver problemas más complejos y abstractos, aprecia las abstracciones simbólicas, las funciones intelectuales de adaptación, asimilación y acomodación que a la vez le ayudan a cambiar ciertos esquemas existentes, por otros nuevos que vayan surgiendo en el proceso psíquico de adquisición de nuevos conocimientos (Iglesias, 1972).

La Escuela histórico-cultural de Lev Vigotsky, considera el desarrollo cognitivo inseparable de la sociedad donde el estudiante vive, transmite formas de actuar y organizar el conocimiento. En esta teoría, las funciones intelectuales superiores se originan de las relaciones entre individuos, y luego son interiorizadas. Sostiene que el aprendizaje y el desarrollo psicológico no necesariamente se dan al mismo tiempo, por lo que define un desfase al que le llama zona de desarrollo próximo, que es la distancia entre el nivel de desarrollo real y el potencial. Este último el estudiante lo alcanza con la ayuda del profesor.

El aprendizaje significativo de David Ausubel se aplica en la organización del conocimiento en el cerebro del estudiante, porque se busca incorporar a la estructura cognitiva existente, nuevos conocimientos. Este aprendizaje utiliza un modelo de enseñanza basada en los conocimientos previos del estudiante, conocidos mediante un diagnóstico (Ausubel, 1983). Tal teoría justifica una forma secuencial de organizar los contenidos a trabajar el Álgebra.

De manera electiva se utiliza la teoría de la Gestalt, la cual se basa en el estudio de las formas, será de mucha utilidad para la comprensión de ciertos contenidos como la factorización, los productos notables, las ecuaciones, entre otros, en los cuales a partir de las formas se eligen los métodos de resolución. La práctica revela que en muchos casos los estudiantes fracasan en la solución de un ejercicio o problema por no identificar la forma de la expresión algebraica a trabajar y por lo tanto no reconocen la fórmula a utilizar.

Por otra parte, la teoría de la Objetivación de Radford (2014) tiene una posición política conceptual, ya que considera la educación matemática como algo más que una tarea centrada en los saberes, sino en saberes y seres. En esta teoría, interesa tanto el estudio de los conocimientos como la formación del estudiante, en este sentido el reto del profesor es entender las producciones que se dan en el aula.

“De manera más específica, la teoría de la objetivación plantea el objetivo de la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente” (Radford, 2014, p. 135).

Lo político- conceptual coloca al profesor ante una reflexión de la finalidad de la educación matemática más allá de desarrollar contenidos y cumplir con un programa preestablecido por las autoridades de educación, para formar estudiantes éticos, solidarios, responsables y reflexivos capaces de posicionarse de manera crítica ante las prácticas matemáticas conformadas histórica y culturalmente.

Radford (2014) define dos objetivos que fundamentan la teoría de la objetivación, la comprensión y producción de saberes y subjetividades en el aula y la identificación de formas pedagógicas de acción que pueden conducir al estudiante hacia un aprendizaje significativo.

Esta teoría tiene como principio el materialismo dialéctico hegeliano referente a la relación dinámica entre individuos y cultura y la idea de labor concebida por Hegel, Marx y Leóntiev. La labor es entendida como una forma social de acción conjunta en la que los sujetos se desarrollan y se transforman continuamente, como un “ir hacia la adquisición de conocimientos y un volver hacia la transformación perpetua del alumno” (Radford, 2014, p.139). Esta teoría, rompe los límites instrumentalistas de la educación matemática y la coloca ante una visión social y cultural. Radford define: “La objetivación es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas histórica y culturalmente” (2014, p.141).

Desde la perspectiva de estas teorías y la opinión de los expertos consultados, en esta investigación se asume que el PEA de la Matemática de TCEB:

- ✓ tiene que fundamentarse desde el PEMTCEB, en relación con las competencias y contenidos, desde los objetivos que como parte de este análisis se sugieren, y que, desde el diagnóstico, donde se conoce el estado real de las estructuras cognitivas de la Matemática en el cerebro del estudiante, el profesor diseñe actividades que contribuyan a la creación de nuevas estructuras del conocimiento matemático. De esta forma el estudiante transitará hacia el desarrollo potencial deseado,
- ✓ asumir el enfoque de resolución de problemas matemáticos, donde enfrenta al estudiante a la búsqueda de procedimientos y conocimientos nuevos, y a la práctica de los algoritmos matemáticos para alcanzar destrezas que en conjunto propician el desarrollo del pensamiento matemático,
- ✓ considerar el desarrollo de los adolescentes respecto a su capacidad de abstracción identificada desde Piaget, esto implica la inclusión de problemas que potencien el perfeccionamiento de tal capacidad. Todas las actividades tienen que apoyarse, por formas o imágenes, ya que desde la teoría de Gestalt el cerebro se apoya en ellas para internalizar el conocimiento. Tal situación exige un esfuerzo considerable en la búsqueda y creación de materiales didácticos que se ajustan a las actividades propuestas,
- ✓ crear espacios reflexivos entre profesor - estudiante, estudiante - estudiante y estudiante consigo mismo, para abordar concepciones filosóficas de la Matemática, fomentar el desarrollo de conductas positivas, participativas, de cooperación, de retos, de responsabilidades con la tarea, de creatividad, de debate, de apropiación de nuevas formas de hacer las cosas, la verificación de errores, entre otras que permitan implementar de capacidades éticas,
- ✓ los criterios de evaluación a partir de los indicadores definidos en el PEMTCEB medirán el avance del estudiante en la comprensión y apropiación de las herramientas algebraicas, en la participación, consciente y razonada, en la invención de nuevas tareas, así como también evaluar el trabajo en equipo, la posición crítica reflexiva de problemas matemáticos y la evolución en el modo de actuar del estudiante durante la actividad algebraica,

- ✓ el proceso de evaluación conducirá a la retroalimentación constante del estudiante, que permita avanzar hacia la identificación de nuevas necesidades y problemas.

Para esta investigación se asume implementar la evaluación como un eje transversal en todo el PEA de la Matemática, al plantear la creación de criterios que permitan observar pautas e indiquen el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, y desarrollar procesos de autorregulación que reorienten la manera correcta de actuación en la actividad algebraica. En este proceso se pueden explicitar prácticas docentes que no estén sistematizadas, pero que son influyentes en el PEA.

Conclusiones parciales del capítulo I

1. En las civilizaciones antiguas la Matemática se desarrolló en un nivel básico, se resolvían problemas con ecuaciones utilizando la forma retórica y sincopada. Diofanto en el siglo III introdujo el simbolismo algebraico y junto a Herón y Nicómaco separaron los problemas aritméticos y algebraicos de la geometría que hasta entonces era el fundamento de esta disciplina, pero a partir del siglo XVIII tanto la Aritmética como el Álgebra alcanzaron sus propios fundamentos.
2. En tiempos de la colonia en la provincia de San Salvador, la actividad matemática consistía en simples listados de temas a desarrollar, pero a partir de la Reforma de 1940 se cuenta con programas estructurados y carreras universitarias en el área de la Matemática, pero que no presentan estrategias que permitan desarrollar el pensamiento algebraico.
3. El desarrollo del pensamiento algebraico se favorece con actividades como: la identificación y generalización de patrones, resolución de problemas matemáticos, invención o formulación de nuevos problemas, y desarrollo de algoritmos algebraicos, tales procesos dirigidos desde acciones de reflexión, identificación, relaciones entre objetos matemáticos y el establecimiento de estructuras o reglas con apoyo del lenguaje algebraico. Se desarrolla respetando el tránsito desde el factual y contextual al simbólico o abstracto.

4. En las clases hay que abordar concepciones filosóficas de la Matemática, fomentar el desarrollo de conductas positivas, participativas, de cooperación, de retos, de responsabilidad, de creatividad, de debate, la apropiación de nuevas formas de hacer las cosas, la verificación de errores en el proceso, que permitan la implementación de capacidades éticas.
5. El profesor de Matemática debe considerar las características del pensamiento algebraico según Radford: indeterminancia, analiticidad y designación simbólica como eje transversal para desarrollar el pensamiento algebraico, ya que incluyen el trabajo con variables y su carácter operatorio utilizando la sintaxis del álgebra y el lenguaje simbólico. Por otra parte, estas características están estrechamente relacionadas con el desarrollo del pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico que se corresponden con las características del pensamiento declaradas por Petrovski: efectivo, figurativo y abstracto. Además, Vergel y Walkowiak se refieren a la identificación de propiedades, relaciones entre elementos, relaciones en conjunto, incluso en una jerarquía continua que permitan llegar a la generalización, lo que se corresponde con el pensamiento simbólico.

Capítulo 2: Una estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática

En el capítulo se especifica el diseño metodológico de la investigación, la operacionalización de la variable, la caracterización del estado actual del objeto de estudio según los resultados de los instrumentos aplicados y la propuesta de solución al problema científico expresada en una estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB.

2.1 Diseño metodológico de la investigación

En el epígrafe se describe: el tipo de investigación, la ruta metodológica, la operacionalización de variable y la descripción de la población y muestra. También, se presentan los resultados de los métodos teóricos y empíricos aplicados, incluyendo la descripción de los instrumentos de recolección de información.

2.1.1 Tipo de investigación

La investigación se desarrolló con enfoque mixto con énfasis en lo cualitativo, donde se logra una perspectiva amplia y profunda del objeto estudiado, validar y complementar datos mediante indagaciones dinámicas, se garantiza confianza en los resultados disminuyendo el sesgo, se apoya con mayor solidez las inferencias científicas y finalmente, permite una mejor “exploración y explotación de los datos (Sampieri, 2018). Esta investigación se caracteriza por una primacía del enfoque cualitativo, con rasgos cuantitativos. A través de los métodos utilizados se obtuvo información descriptiva; en determinadas categorías de análisis, la información recopilada se convierte en numérica, logrando una mayor amplitud de la visión para efectos del análisis.

La utilización de este enfoque de investigación de acuerdo con Sampieri (2018), permite verificar convergencia, confirmación o correspondencia al contrastar datos cuantitativos y cualitativos, así como corroborar o no los resultados y descubrimientos, examinar los procesos holísticamente, conteo de su ocurrencia, descripción de su estructura y sentido de entendimiento, en aras de una mayor validez interna y externa del estudio, lo cual robustece el análisis de resultados. En este contexto, la elección de cada segmento poblacional se realizó tomando en consideración el enfoque mixto, dado que:

La selección de los Centros Escolares responde a un enfoque cualitativo, ya que no se requiere una “representatividad” de elementos, sino una cuidadosa y controlada elección de ellos, que cumplan con ciertos criterios; la selección no requiere de un muestreo probabilístico, sino que fueron elegidos siguiendo un muestreo conceptual, según Mejía (2000) este tipo de muestreo especifica las características más importantes que delimitan los niveles estructurales del objeto de estudio y se eligen informantes, en este caso centros escolares, según los tipos o niveles estructurales delimitados.

La selección de los profesores para la entrevista también responde a un enfoque cualitativo, pues no se requiere una “representatividad”, sino de una elección de informantes clave, que cumplan con ciertos criterios. No se utilizó muestreo probabilístico, sino que fueron elegidos de forma intencional por ser profesores de matemática en TCEB.

La selección de estudiantes de TCEB se realizó bajo el enfoque cuantitativo, al conocer el número de estudiantes de cada Centro Escolar por lo que se utilizó el muestreo probabilístico aleatorio simple para definir el tamaño muestral (Sampieri, 2018), la utilización de este método asegura representatividad de los resultados.

2.1.2 Ruta metodológica

La ruta metodológica concebida para el cumplimiento de las tareas científicas declaradas en esta investigación consta de cuatro etapas que se fundamentan en los métodos teóricos y empíricos utilizados.

En la primera etapa se determinaron los referentes teórico-metodológicos del objeto de estudio; en la segunda etapa se caracterizó el estado actual del desarrollo del pensamiento algebraico desde el PEA de la Matemática en estudiantes de TCEB en el municipio de Santa Ana. En la tercera etapa se elaboró una estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico desde el PEA de la Matemática en estudiantes de TCEB y en la cuarta etapa se puso en práctica y se validó mediante un cuasi-experimento de la estrategia diseñada.

2.1.3 Operacionalización de variable

Mediante la fundamentación teórica discutida en el capítulo I, se realizó la operacionalización de la variable en estudio, definiendo las dimensiones con sus respectivos indicadores, estos fundamentan el diseño de los instrumentos de recolección de información. Con la operacionalización se obtuvieron 4 dimensiones y 16 indicadores, los cuales tienen presencia en los instrumentos de medición. Posteriormente, se realizó la parametrización de los instrumentos y se establecieron las reglas de decisión.

***Tabla* 6**

Operacionalización de la variable de investigación de acuerdo con dimensiones e indicadores

Variable: Desarrollo del pensamiento algebraico	
Dimensión	**Indicadores**
1.*Indeterminancia*: Se refiere al trabajo con variables: su identificación en situaciones del entorno histórico cultural, las relaciones entre diferentes variables, su uso en situaciones no determinadas.	1.1. Identifica la variable en una situación. 1.2. Identifica las relaciones que guardan las variables. 1.3. Asigna significados a situaciones no determinadas. 1.4. Identifica cómo la Matemática emerge en un trasfondo histórico cultural de la interacción social.
2. *Analiticidad*: Incluye las reglas de la sintaxis del álgebra, el dominio de algoritmos, modelaje de situaciones de la vida cotidiana mediante un problema matemático y el uso de conjeturas para resolver problemas.	2.1. Muestra dominio en el uso y aplicación de algoritmos. 2.2. Opera con objetos del campo algebraico utilizando su sintaxis. 2.3. Resuelve problemas complejos. 2.4. Crea nuevas tareas o problemas. 2.5. Descubre y establece conjeturas en la solución de un problema.

Dimensión	Indicadores
3.*Designación simbólica*: Se orienta al trabajo con secuencias numéricas o figurales para identificar una regla de formación desde el nivel básico al simbólico algebraico.	3.1. Identifica la expresión simbólica de una secuencia numérica, figural (geométrica) o algebraica. 3.2. Realiza la contracción semiótica de una secuencia numérica, figural (geométrica) o algebraica. 3.3. Codifica y decodifica símbolos algebraicos. 3.4. Expresa generalidad observada en una secuencia numérica, figural (geométrica) o algebraica.
4.*Participación consciente y razonada del estudiante*: Tiene que ver con el interés del estudiante por participar en todas las formas posibles en la clase de matemática, y con la capacidad de reflexionar sobre su propio trabajo.	4.1. Muestra interés por compartir sus hallazgos. 4.2. Se hace preguntas sobre situaciones matemáticas y cuestiona la solución de ejercicios y problemas. 4.3. Muestra indicios de desarrollo metacognitivo.

2.1.4 Población y muestra

Los segmentos poblacionales se constituyen de centros escolares, profesores y estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana. En el caso de los centros escolares y profesores, se utilizó el muestreo no probabilístico con un diseño muestral con base en criterios. Los centros escolares se seleccionaron según: zona geográfica y tipo de institución, tal selección permitió recoger información de estudiantes de la zona urbana y rural, del sector público y privado para lograr una mejor representación del objeto de estudio en los diferentes estratos. Atendiendo a estos criterios se seleccionaron los centros escolares que aparecen en la siguiente tabla:

***Tabla* 7**

Centros Escolares que componen la muestra en la investigación

Institución	Zona	Tipo
C. E. Valle El Carmen	Rural mixto	Público
C. E. Dr. Salvador Ayala	Rural mixto	Público
C. E. Santa Leonor	Urbano mixto	Público
C. E. Mayén Torres	Urbano mixto	Público
Liceo Latinoamericano	Urbano mixto	Privado
C. E. Napoleón Ríos	Urbano de niñas	Público

Para seleccionar a los profesores que se entrevistaron, se empleó el muestreo no probabilístico, bajo el criterio de ser profesor graduado de la especialidad de matemática que esté impartiendo clases de matemática en TCEB en uno de los centros escolares seleccionados o que sea un profesor graduado de la especialidad de matemática y que ocupe un puesto de dirección en el municipio de Santa Ana. Considerando estos criterios se seleccionaron 7 profesores de matemática y 1 jefe regional quien también es de la especialidad de matemática y ha laborado en el nivel de TCEB.

Para determinar el tamaño de muestra de estudiantes, se empleó el muestreo probabilístico aleatorio simple, con la población de estudiantes de los centros escolares seleccionados según se detalla en la Tabla 8:

Tabla 8

Tamaño de población y de muestra por CE

No.	CE	Población	Muestra
1	C. E. Valle El Carmen	155	36
2	C. E. Dr. Salvador Ayala	280	66
3	C. E. Santa Leonor	302	70
4	C. E. Mayén Torres	275	64
5	Liceo Latinoamericano	166	39
6	C. E. Napoleón Ríos	87	20
Total		**1265**	**295**

El tamaño de muestra $\boldsymbol{n}$ se calculó utilizando un muestreo aleatorio simple con un nivel de confianza del 95%, un límite de error del 5% y variabilidad: $p = 0.5$. La fórmula para el tamaño de muestra es: $n = \frac{z^2 Npq}{(N-1)(LE)^2 + z^2 pq}$. Sustituyendo los datos se tiene: $n = \frac{(3.8416)*(1265)*(0.5)*(0.5)}{(1265-1)*(0.0025)+(3.8416)*(0.5)*(0.5)} = 295$. La muestra de 295 estudiantes se conformó de manera proporcional al tamaño de población dentro de cada CE para establecer un equilibrio en los tamaños tal como se observa en la Tabla 8. El criterio de inclusión y exclusión de estudiantes seleccionados fue que estuvieran matriculados en séptimo grado en el año 2022 en uno de los centros escolares seleccionados.

La estrategia metodológica articula una serie de métodos que facilitaron el cumplimiento de cada fase investigativa, según se describen a continuación:

2.1.5 Descripción y validación de instrumentos

En correspondencia con los métodos empíricos declarados en esta investigación, se diseñaron y se validaron los instrumentos para la recolección de datos, a partir de métodos de validación como la consulta a especialistas y la validez de contenido (Sampieri, 2018), que consistió en la revisión de los referentes teórico-metodológicos de la literatura científica relacionada con el objeto de la investigación, pruebas piloto y coeficiente alfa de Cronbach.

a) Se utilizó **la técnica de observación** para verificar la metodología del desarrollo de las clases, se observaron veinte clases presenciales y cinco videoclases, se utilizó una guía de observación (ver Anexo A), los profesores observados imparten clases en los tres grados de TCEB. De las clases observadas presencialmente, nueve fueron en séptimo grado, cinco en octavo y seis en noveno. De las videoclases dos fueron de séptimo grado, dos de octavo y una de noveno.

El instrumento guía de observación se validó a través de una prueba piloto en un CE diferente a los seleccionados en la muestra de la investigación, tal aplicación contribuyó en la realización de mejoras en su estructuración, no así en los aspectos a observar porque se consideró que correspondían con lo requerido según las dimensiones e indicadores de la variable de investigación.

b) Validez y confiabilidad del **cuestionario** (Anexo B) **y la prueba pedagógica** (Anexo C). En estadística el término confiabilidad se refiere a la consistencia de una medida. En investigación se requiere que un instrumento tenga alta confiabilidad y validez porque significa que proporciona mediciones consistentes a lo largo del tiempo. Según Oviedo (2005) la confiabilidad se define como el grado en que un instrumento de varios ítems mide consistentemente una muestra de población.

El alfa de Cronbach es una medida de consistencia interna, es decir, cuán estrechamente relacionados están un conjunto de elementos como grupo. Las pruebas alfa de Cronbach sirven para ver si los cuestionarios con escalas de Likert de preguntas múltiples son confiables para un cuestionario. Se midió la confiabilidad del cuestionario utilizado en esta investigación con el coeficiente alfa de Cronbach, obteniendo una alta confiabilidad del 85.18 % como se aprecia en la Tabla 9.

Tabla 9

Prueba alfa de Cronbach para cuestionario a estudiantes

Valores	**Significado**	**Cálculos**
K	Número de ítems	24
$\sum s^2$	Suma de las varianzas de los ítems	32.3428
${s_r}^2$	Varianza de la suma de los ítems	176.0607
α	Coeficiente alfa de Cronbach	0.8518

El propósito del cuestionario fue explorar las percepciones de los estudiantes con relación al proceso didáctico metodológico que tiene lugar en la clase de matemática, para interpretar cómo este contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico, se aplicó a 295 estudiantes de TCEB según se detalla en la Tabla 8.

La validación del contenido del cuestionario se hizo mediante la revisión de especialistas de Matemática quienes sugirieron incluir las preguntas 8, 11, 22 y 23 para saber si al profesor le interesa indagar la manera en que los estudiantes piensan la solución de un problema matemático y si los confrontan ante problemas cuya solución implica ampliar una expresión algebraica. También para indagar si los estudiantes son capaces de explicar cómo piensan la solución de un ejercicio o problema matemático.

c) La **prueba pedagógica** se aplicó a 124 estudiantes de TCEB, 53 de séptimo grado, 30 de octavo y 41 de noveno. La misma está integrada por 23 dificultades o ítems de los cuales 6 pertenecen a la dimensión indeterminancia, 9 a la analiticidad y 8 a designación simbólica, cada dificultad vale 1.0 y se asignaron según la rúbrica descrita en el Anexo J. Para efecto de análisis se obtuvo una calificación para cada dimensión y la calificación total. En la Tabla 10 se detalla la forma en que se calificó la prueba por dimensiones.

Tabla 10

Fórmulas para calificar la prueba pedagógica de acuerdo con cada dimensión

Dimensión	Símbolo	Fórmula
Indeterminancia	CIN: calificación para la dimensión indeterminancia IN: número de puntos obtenidos en la dimensión indeterminancia.	CIN=$\frac{IN*10}{6}$
Analiticidad	CAN: calificación para la dimensión analiticidad AN: número de puntos obtenidos en la dimensión analiticidad.	CAN=$\frac{AN*10}{9}$
Designación simbólica	CDS: calificación para la dimensión analiticidad DS: número de puntos obtenidos en la dimensión designación simbólica.	CDS=$\frac{DS*10}{8}$

Una prueba contestada de manera correcta suma 23 puntos. La calificación total es una media ponderada de las calificaciones por dimensión, el cálculo de la ponderación de cada dimensión se hizo por una regla de tres directa, donde 10 puntos los hacen 23 respuestas correctas, de las cuales $\frac{6}{23}$ (4, 5, 7, 8, 9, 10) son de indeterminancia que corresponden a 2.6 de la nota total, $\frac{9}{23}$ (1, 2, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 18) de analiticidad que hacen 3.9 y $\frac{8}{23}$ (3, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23) de designación simbólica que representan 3.5 de la nota total. A continuación, se muestra la fórmula con la que se hace el cálculo de la calificación total de la prueba.

$$\boldsymbol{C = (CIN) * (0.26) + (CAN) * (0.39) + (CDS) * (0.35)}$$

Donde

C: Calificación total

CIN: Calificación de la dimensión indeterminancia

CAN: Calificación de la dimensión analiticidad

CDS: Calificación de la dimensión designación simbólica

Para asignar una ponderación a la variable objeto de investigación, a partir del cómputo de la calificación total de la prueba pedagógica que incluye la medida de cada una de las dimensiones e indicadores que se relacionan directamente con la parte cognitiva del objeto de investigación, se consideraron tres niveles para el desarrollo del pensamiento algebraico, en orden ascendente por calificación se nombró cada nivel: bajo, medio y alto. Se asignó una valoración a cada nivel de acuerdo con la calificación total considerando que la calificación de 10 puntos representa al estado ideal del objeto de investigación. También se valoró que en sistema educativo salvadoreño una calificación por debajo de 5 puntos cae en una categoría de reprobado, por lo que se determinó el rango de valores para cada nivel, siendo C la calificación total en la prueba pedagógica, como se muestra a continuación:

Nivel bajo: $0 \leq C < 5.0$

Nivel medio: $5.0 \leq C < 8.5$

Nivel alto: $8.5 \leq C$

También se creó una base de datos en una hoja de cálculo de Excel de las calificaciones de la prueba pedagógica y se realizó un análisis de fiabilidad basado en el coeficiente alfa de Cronbach. Los resultados se presentan en la Tabla 11.

Tabla 11

Cálculo del alfa de Cronbach para la prueba pedagógica

Valores	Significado	Cálculos
K	Número de dificultades	23
$\sum s^2$	Suma de las varianzas de los ítems	5.8611
${s_r}^2$	Varianza de la suma de los ítems	35.5399
α	Coeficiente alfa de Cronbach	0.8672

El resultado del coeficiente alfa de Cronbach demuestra alta confiabilidad para esta prueba.

La validez del contenido fue avalada por especialistas de matemática, quienes revisaron la prueba e hicieron sugerencias de modificación de redacción que aparecen en la Tabla 12.

Tabla 12

Sugerencias de modificación a la prueba pedagógica por parte de los expertos

Observación
Situación 1
Cambiar la expresión: ¡Malditas matemáticas" por ¡Inútiles matemáticas! Se hizo el cambio respectivo. Cuando pide la edad de Lucía no se especifica si con relación a Miguel o Dinora Se corrigió y se pide la edad de Lucía con respecto a la edad de Dinora. …al inicio se hace la mención que las matemáticas no sirven para nada y de eso parte todo, en ese sentido los estudiantes pueden quedarse con dudas sobre la conclusión de la situación. Sugiero establecer conclusión donde incluso se puede dejar una chispa de motivación y aprendizaje sobre la materia… *Al final se incluyó:* "Dinora sostuvo una conversación con aquel personaje hasta convencerse que estaba equivocada respecto de las matemáticas." Cambiar "que de detrás" por "que detrás" Se *hizo el cambio respectivo.*

Situación 2

Cambiar “cada a manzana” por “cada manzana”

Se hizo el cambio respectivo.

Situación 3

“Conjetura” es una palabra técnica sugiero utilizar la palabra “supuesto”

También sugiero: ayuda a Bryan a contestar la siguiente pregunta…

En la situación se presentan dos semanas diferentes, …especificar exactamente el tiempo al que refiere el problema…para evitar confusión de cálculos

Situación 4

Cambiar la palabra “intenta” … por “escribe una expresión …”

Cambiar la palabra “patrón” por “secuencia”

A partir de estas observaciones se realizó un ajuste del instrumento para su aplicación final (Anexo C).

d) De las entrevistas a profesores, seis se aplicaron frente a frente y una por videoconferencia en Google Meet se utilizó el Anexo D con 15 preguntas abiertas. La entrevista al jefe regional con ocho preguntas abiertas, Anexo F, se aplicó frente a frente. El propósito de estas fue diagnosticar el nivel de conocimiento sobre el desarrollo del pensamiento algebraico, la valoración del trabajo de los estudiantes y la opinión del trabajo que se debe hacer en la asignatura de Matemática según se instruye en el PEMTCEB y en los libros ESMATE para TCEB.

A todos los entrevistados se les solicitó la autorización para grabar las respuestas, con la finalidad de capturar todos los detalles vertidos sobre el tema y luego hacer su respectiva transcripción, para ello se utilizó grabadora de voz, celular para toma de fotos, libreta y lapicero. Cabe señalar que se validó la guía de entrevista, teniendo en cuenta los indicadores de la variable de investigación, por tres especialistas en Matemática.

A sugerencia de los especialistas se realizaron modificaciones en la redacción de las preguntas 4, 5, 11, también en todas las preguntas se hizo el cambio de la palabra “alumnos” por la palabra “estudiantes”. Posteriormente, se pasó la entrevista a dos profesores de un CE diferente a los de la muestra para pilotear el instrumento, como resultado de esta aplicación se decidió ampliar la pregunta 11 agregando un indicativo de la participación del estudiante, la guía con todas las incorporaciones están en el anexo D.

e) Para el análisis documental, se utilizó como instrumento una guía de revisión documental (ver anexo E), con la cual se revisó el programa de Matemática para TCEB y los libros ESMATE para TCEB, con el propósito de identificar elementos significativos que van en correspondencia con potenciar el pensamiento algebraico. El instrumento guía de análisis documental no sufrió modificaciones, se consideró que incluyó todos los aspectos que se necesitaron verificar. Para revisar la Ley General de Educación y los Fundamentos Curriculares de la Educación Básica no se aplicó guía de revisión porque solo presenta una página con lineamientos de Matemática para TCEB y se realizó un análisis directo.

Por lo anterior, es importante destacar que los hallazgos obtenidos a partir de la aplicación de los instrumentos permitieron el diseño de una estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB, poniendo especial énfasis en la descripción e interpretación del fenómeno desde la perspectiva de los actores involucrados. Se aplicó una triangulación de los métodos utilizados, para que la estrategia esté construida considerando la ecología de los saberes.

2.2 Caracterización del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB en el municipio de Santa Ana

Para caracterizar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB del municipio Santa Ana, se utilizaron instrumentos de recolección de información y para hacer el análisis se construyeron categorías dentro de cada dimensión de la variable con el propósito de visualizar la tendencia del objeto de estudio.

El análisis cualitativo se realizó para cada dimensión analizando las categorías creadas en cada una y que se muestran en la Tabla 13. En cada dimensión se analizaron las categorías considerando la información proporcionada por los instrumentos que para esta oportunidad fueron: observación de clase (Anexo A), cuestionario a estudiantes (Anexo B), prueba pedagógica a estudiantes (Anexo C), entrevista a profesores (Anexo D) y al jefe regional (Anexo F) y revisión documental (Anexo E).

Tabla 13

Categorías de análisis cualitativo según dimensión

Dimensión	Categoría de análisis
Indeterminancia	**Trabajo con variables:** ✓ Representación de objetos de la vida cotidiana mediante símbolos ✓ Significado de variables en contextos cotidianos ✓ Relaciones entre variables **Matemática en la vida:** ✓ Problemas relacionados con los entornos de los estudiantes y sus intereses ✓ Relación de la Matemática con otras áreas del saber ✓ Utilidad de la Matemática en la vida
Analiticidad	**Destreza algorítmica:** ✓ Habilidad en el uso de la sintaxis del algebra ✓ Manejo de fórmulas **Resolución de problemas:** ✓ Formulación y validación de conjeturas ✓ Resuelve problemas con cualquier método
Designación simbólica	**Generalización de patrones:** ✓ El tratamiento de lo general ✓ La puesta en juego de una coordinación entre diferentes registros de una representación semiótica **Lenguaje algebraico:**

	✓ Traducción de expresiones algebraicas al lenguaje verbal ✓ Codificación de situaciones de la vida cotidiana mediante símbolos algebraicos
Participación consciente y razonada del estudiante	**Interacciones en el aula:** ✓ Relación entre estudiante y estudiantes, profesor y estudiante, estudiante y tarea ✓ Desarrollo de trabajo cooperativo ✓ Exposición del trabajo ante los demás ✓ Práctica de valores **Metacognición:** ✓ Autonomía en el desempeño ✓ Identificación fortaleza y debilidades propias ✓ Creación de problemas

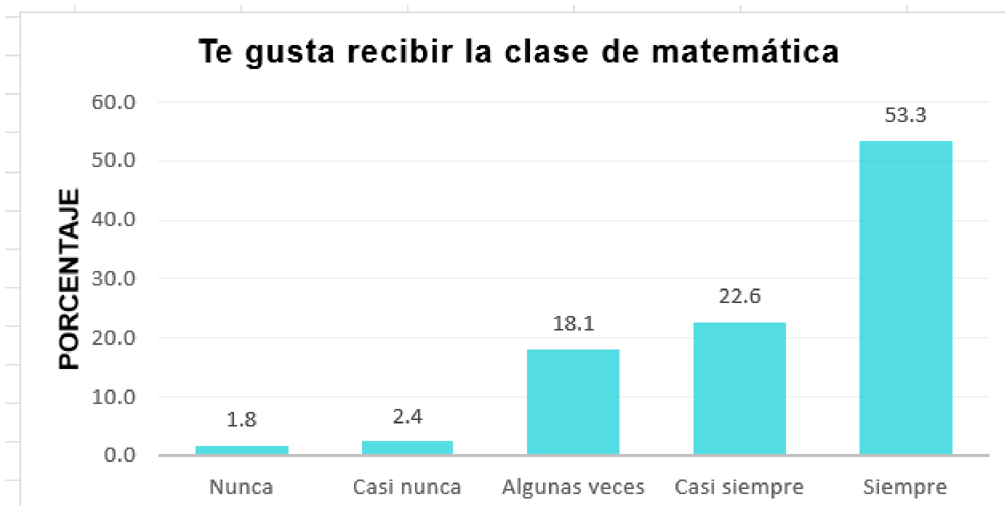
Se inicia con el análisis de la información recogida mediante la implementación del cuestionario diagnóstico. Se aplicó a 295 estudiantes de TCEB del municipio Santa Ana referente a las interacciones que se dan en la clase de matemática, el tipo de ejercicios y problemas y cuánto les gusta esta asignatura, con el propósito de relacionar estos elementos con el desarrollo del pensamiento algebraico.

Se realizó una descripción general de las características de los estudiantes para caracterizar el desarrollo del pensamiento algebraico a partir de un grupo de estudiantes de TCEB que representa a los diferentes estratos de estudiantes del nivel en el municipio de Santa Ana. Del total de estudiantes el 87.7% pertenecen al sector público y el 12.3% al privado el 53.9 % son del sexo femenino y el 46.1% del masculino. El rango de edad varía de 12 a 21 años. Sin embargo, el 92.5% tenía edades entre 13 y 16 años, el 24.4% estaba en séptimo grado, el 38.3% en octavo y 36.7% en noveno. El 31% son la zona rural y el resto de la urbana.

En la pregunta 19 del cuestionario: ¿Te gusta recibir la clase de matemática? sólo un 4.2% respondió que casi nunca o nunca les gusta recibirla según se muestra en la Figura 3. Estas respuestas representan un elemento favorable para el profesor cuando enseña matemática, pues está ante estudiantes que en un 76% siempre o casi siempre les gusta recibir la clase.

Figura 3

Gusto por la clase de matemática de los estudiantes de TCEB



A continuación, se evalúan los resultados con respecto a las dimensiones declaradas para la variable de investigación de acuerdo con las categorías de análisis creadas para cada una. El análisis se hace en función de los instrumentos aplicados.

2.2.1 Dimensión: indeterminancia

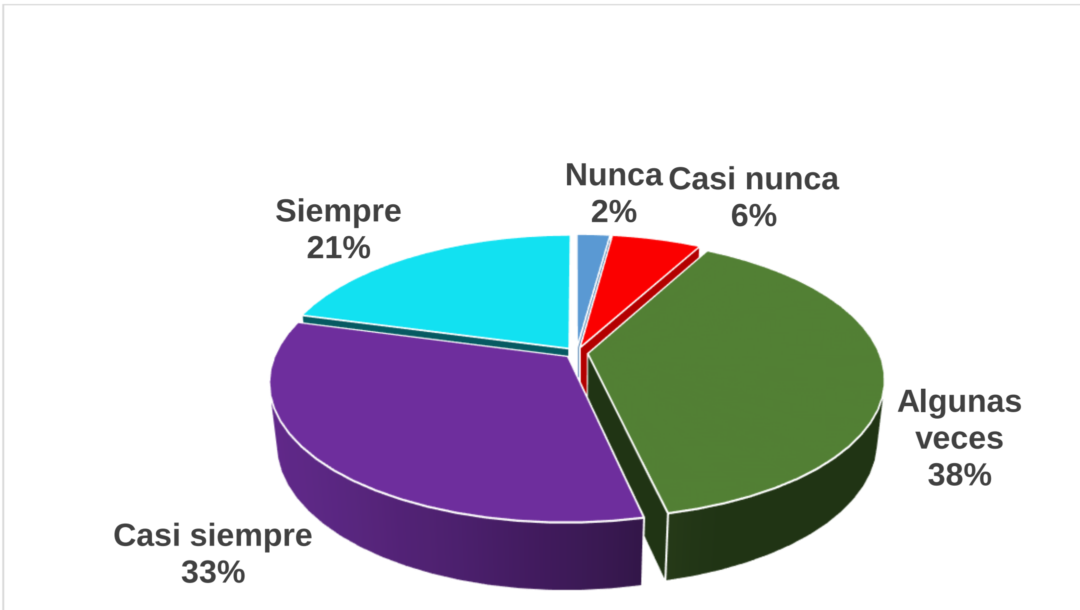
2.2.1.1 Categoría: Trabajo con variables

El álgebra escolar está relacionada con diferentes significados de los símbolos que utiliza, esta, mediante el lenguaje algebraico comunica ideas de la matemática, sirve de herramienta para resolver problemas y diseñar modelos matemáticos. El álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética, supone un cambio en el pensamiento del estudiante y es precisamente la transición desde lo que puede considerarse modo informal de representación y resolución de problemas, al modo formal lo que la dificulta para los estudiantes que inician su estudio.

Cuando el estudiante se enfrenta a la resolución de un problema matemático si identifica las variables que intervienen y la relación que guardan podrá crear un modelo y con apoyo de los algoritmos pertinentes lo resuelve. El modelo y los algoritmos por utilizar se consideran contenido matemático.

Figura 4

Facilidad para los estudiantes del uso de contenidos matemáticos en la solución de ejercicios y problemas



En la Figura 4 se presentan las respuestas a la pregunta 16 del cuestionario a estudiantes (Anexo B) referentes a la facilidad de utilizar el contenido matemático en los ejercicios o problemas que se proponen en la clase de matemática. El 54% de los estudiantes mencionaron que siempre o casi siempre les resultaba fácil usar contenido matemático en los ejercicios o problemas que proponían sus profesores en la clase de matemática. Tal situación se asocia con identificar relaciones entre las variables que intervienen en una situación problémica, asignarles significado, descubrir y establecer conjeturas y utilizar correctamente los algoritmos pertinentes.

Para tener una mejor perspectiva del trabajo con variables de parte de los estudiantes, se realizó la observación no participante en las clases de matemática con el propósito de verificar las actividades orientadas por el profesor y que desarrollan los estudiantes. Esta observación se hizo a partir de la guía de entrevista

(Anexo A). Para esta categoría el análisis se focalizó en el tipo de ejercicios que incluyen trabajo con variables.

Entre los resultados se destaca que en séptimo grado el desarrollo de contenidos de aritmética se hace con escasa inclusión de variación y reconocimiento de variables u objetos indeterminados. En octavo grado en el tema de ecuaciones se trabajó en un 20% problemas aplicados que incluían trabajo con variables. Las clases se impartieron según las indicaciones del libro ESMATE, por lo que abordaron sólo aplicaciones del libro, no se evidenciaron problemas propios del profesor. En noveno grado se observó mayor involucramiento de contenidos de álgebra, pues las tres primeras unidades son de esta área. Para iniciar las operaciones con polinomios utilizaron el contexto geométrico con áreas de rectángulos y la propiedad distributiva, luego se trabajaron ejercicios sin contexto.

Por las observaciones a clase se infiere escasez de contenidos de álgebra vinculados con las distintas áreas de la matemática, los ejercicios que incluyen contextos significativos para los estudiantes son pocos porque se limitan a los que aparecen en el libro ESMATE que no siempre son del interés de todos los estudiantes. Por lo general el profesor desarrolla el primer ejercicio que presenta el libro, explica su solución como parte de la metodología ESMATE. No se observó análisis de diferentes soluciones sean correctas o no y como actividades de retroalimentación los estudiantes trabajan los ejercicios del libro.

La autora tuvo acceso a cinco videoclases en las que solo se observó al profesor explicando, muy bien, los contenidos y no se evidenció participación de los estudiantes. Las explicaciones estuvieron conforme a la instrucción del libro ESMATE, donde según el grado octavo o noveno, hay involucramiento de variables, en las clases de séptimo grado el profesor trabajó los contenidos de aritmética sin procesos que indiquen variación.

En las entrevistas los profesores admiten que para los estudiantes es difícil comprender el trabajo con variables “muchos estudiantes no logran comprender que las incógnitas representan números reales”; “no logran conectar con el concepto de variable” “les cuesta relacionar una variable x con algo de la vida cotidiana”. En estas afirmaciones se intuye un cierto conformismo por los profesores con relación a que el estudiante no internaliza el trabajo con variables y si lo ven como algo natural no se espera que le den importancia a que el estudiante cambie esta perspectiva.

El trabajo con variables como elemento distintivo del campo algebraico en las clases de matemática se desarrolla con escaso contexto significativo para el estudiante, su abordaje se limita a lo establecido en el libro ESMATE no obstante es necesario señalar que es posible identificar tendencia que impliquen variación en contenidos aritméticos, geométricos y estadísticos que son las áreas que se estudian en TCEB. La no identificación de estas tendencias obstaculiza su uso como medio de desarrollo de pensamiento algebraico.

2.2.1.2 Categoría: matemática en la vida

Tal como otras ciencias la matemática forma parte de varios aspectos de la vida, desde los más complejos hasta los más simples. Los profesores en la clase de matemática pueden relacionar contenidos matemáticos con otras ciencias, con entornos cercanos a los estudiantes como intereses individuales, familiares y de sociedad. También pueden explicar aspectos relacionados con la matemática desde el enfoque filósofo-ideológico que contribuye a la formación de una concepción científica del mundo, a evidenciar una relación dialéctica entre su desarrollo y el de la sociedad, su evolución, sus limitantes y su aporte en la solución de diversos problemas. De esta manera los profesores pueden demostrar el uso que tiene la matemática en la vida cotidiana.

Los datos de la Tabla 14 reflejan las respuestas de los estudiantes a las preguntas 6, 9 y 10 del cuestionario (Anexo B). Tales preguntas se relacionan con la presencia de la Matemática en el entorno del estudiante

***Tabla* 14**

Acciones del profesor que favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico mediante la indeterminancia según la opinión de los estudiantes (porcentajes)

En la clase de Matemática tu profesor:	**Siempre**	**Casi siempre**	**Algunas veces**	**Casi nunca**	**Nunca**
Vincula el contenido de la clase con contenidos anteriores	46.1	31.6	19.6	1.5	0.6
Utiliza ejercicios vinculados con la vida, la sociedad y la práctica	30.4	26.2	28.9	7.8	4.8
Propone ejercicios y problemas que vinculen el álgebra con las distintas áreas de la matemática	40.1	29.2	24.1	3.3	1.8

De los resultados mostrados en la Tabla 14, se infiere que: el 77.7% de los estudiantes manifestaron que siempre o casi siempre el profesor vincula los contenidos que desarrolla con los de las clases anteriores, por lo que se infiere que identifica relaciones entre los conceptos o variables que se están estudiando. Un 56.6% opinó que siempre o casi siempre el profesor en las clases les muestra cómo la Matemática emerge en un trasfondo histórico cultural de la interacción social al utilizar ejercicios vinculados con la vida, la sociedad y la práctica. El 69.3% de los estudiantes respondieron que el profesor siempre o casi siempre exige descubrir y establecer conjeturas al proponerles ejercicios y problemas que vinculan el álgebra con las diferentes áreas de la Matemática.

También se realizó observación no participante en algunas clases de matemática en las que se evidenció el desarrollo de ejercicios que se relacionan con el contexto de la vida cotidiana del libro ESMATE, no hubo ejercicios elegidos o creados por el profesor que impartía la clase. Por otra parte, en las entrevistas los profesores coincidieron en que desarrollan los problemas del libro ESMATE y que allí hay ejercicios que vinculan la Matemática con la vida y la sociedad, lo cual es hasta cierto punto cierto solo que en forma limitada.

El análisis cualitativo se nutre de un análisis cuantitativo mediante la aplicación de una prueba pedagógica (Anexo C) orientada a obtener una vista de la manera en que los estudiantes responden a situaciones relacionadas con las diferentes dimensiones de la variable. Se aplicó la prueba pedagógica a 124 estudiantes de TCEB y se calificó por dimensión de acuerdo con lo declarado en el Anexo J. Los datos de la Tabla 15 muestran las calificaciones alcanzadas por los estudiantes según el grado para la dimensión “indeterminancia”

***Tabla* 15**

Media aritmética de los resultados dimensión “indeterminancia”

Grado	**Promedio**	**Desviación estándar**
Séptimo	2.45	1.2812
Octavo	4.71	2.3120
Noveno	6	1.7108
Media	**4.39**	**1.7970**

En los resultados reflejados en la Tabla 15, se observa que los estudiantes de séptimo grado obtuvieron una media de 2.45, los de octavo registraron 4.71, los de noveno 6.0 y la media aritmética de todas las medias es 4.39. El dominio de esta característica aumenta con el avance que el estudiante alcanza en los grados. Esta situación, es, hasta cierto punto normal puesto que cuando los estudiantes llegan a séptimo grado inician el estudio de los contenidos que involucran las variables, no han trabajado procesos donde se les enfrente con el reconocimiento de variables y relaciones entre ellas, sin embargo, todavía el desarrollo de esta característica para el noveno grado es bajo.

2.2.2 Dimensión: analiticidad

2.2.2.1 Categoría: Destreza algorítmica

Uno de los elementos distintivos del desarrollo del pensamiento algebraico en el estudiante es la habilidad que tiene para operar con los objetos del campo algebraico, esto supone un dominio importante de las leyes que los rigen o su sintaxis. Este dominio junto con la modelación favorece la solución de problemas matemáticos.

En las observaciones a clases que se llevaron a cabo (anexo A) se evidenció que en los tres grados de TCEB hubo un trabajo continuo en el desarrollo de ejercicios que se ajustan a ciertos algoritmos. En los grados octavo y noveno se trabajó con objetos del campo algebraico utilizando su sintaxis, aunque eso no significa que los estudiantes tengan la habilidad para desarrollar tales procesos, ya que se observó falta de dominio de los algoritmos y de la sintaxis de los objetos algebraicos, porque los estudiantes con mucha frecuencia aplican los algoritmos de manera incorrecta por lo que llegan a respuestas equivocadas. Cuando el estudiante está desarrollando una actividad evaluada, obtiene calificaciones bajas lo que en la mayoría de los casos les provoca frustración.

En las entrevistas los profesores se mostraron conscientes de que a los estudiantes les cuesta mucho operar con objetos algebraicos: “les cuesta entender que las variable representan números reales y que todas las propiedades de los números reales también las cumplen por ejemplo la ley conmutativa de la suma que se cambia el orden”; “muchos no comprenden como simplificar que deben estar factorizadas las expresiones y lo hacen cuando están sumando”; “están encajonados a las operaciones aritméticas y dicen ¿Cómo hago esta suma?, ¿Cómo encuentro lo otro? Les cuesta analizar como calcular”; “si tienen x más x dicen que es x al cuadrado y x por x dicen $x2$”. Tales afirmaciones coinciden con lo observado en las clases.

La falta de dominio de esta categoría lleva al estudiante al fracaso escolar. Es un imperativo buscar maneras de ayudar al estudiante a internalizar las leyes del álgebra estas deben incluir una metodología activa donde el estudiante participe en la construcción de sus aprendizajes.

2.2.2.2 Categoría: resolución de problemas

Se entiende como problema cualquier situación que representa una incertidumbre y sobre el cual se provoca una conducta tendiente a encontrar una solución. El proceso de resolver un problema contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico porque el estudiante realiza un esfuerzo mental al identificar los elementos que intervienen y la relación que guardan para formar el modelo y con ayuda de los algoritmos adecuados lo resuelve. Para enfrentar al estudiante a este proceso se necesita que en la clase de matemática el profesor proponga actividades de resolución de problemas que inicien desde la lectura del enunciado hasta su solución.

En la Tabla 16 se muestra resultados de las respuestas del cuestionario para las preguntas11 y 7 respectivamente (Anexo B).

***Tabla* 16**

Acciones de los profesores para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico según la opinión de los estudiantes (porcentajes)

En la clase de Matemática tu profesor:	Siempre	Casi siempre	Algunas veces	Casi nunca	Nunca
Propone ejercicios en los que se necesita ampliar una expresión algebraica para su solución	39.2	28.0	25.3	5.1	1.2
Enfatiza la resolución de problemas matemáticos	59.9	21.1	14.2	2.1	6

Con los resultados de la Tabla 16 observe que el 67.2% de los estudiantes manifestaron que siempre o casi siempre los profesores proponen ejercicios en los que se necesita ampliar una expresión algebraica como parte del proceso de solución de un problema o ejercicio. El 81% de los estudiantes afirmaron que en el desarrollo de las clases de matemática los profesores siempre o casi siempre enfatizan la resolución de problemas matemáticos.

En las clases observadas hubo ausencia de resolución de problemas complejos. La resolución de problemas se resume en que los estudiantes casi siempre en grupo resuelven los ejercicios propuestos en el libro ESMATE, aunque es preciso aclarar que es un número limitado de estudiantes que los resuelven por si solos, la mayoría espera a que el profesor los resuelva y ellos copian. En las entrevistas los profesores explicaron que casi no se resuelven problemas complejos debido al tiempo limitado para la clase que consta de 45 minutos.

***Tabla* 17**

Media aritmética de los resultados de la prueba pedagógica para la dimensión analiticidad en estudiantes de TCEB

Grado	Promedio	Desviación estándar
Séptimo	2.68	0.8832
Octavo	4.36	1.9264
Noveno	3.44	1.6492
Media	**3.49**	**0.8413**

La analiticidad es la dimensión que más se trabajó en las clases de matemática durante la observación, sin embargo, de acuerdo con los resultados de la prueba pedagógica alcanzó un promedio de 3.49 para los tres grados que se evaluaron (ver Tabla17). En la prueba se midió el carácter operatorio de objetos numéricos combinados con algebraicos. En la Tabla 17 se observa que en esta dimensión los estudiantes de séptimo grado promediaron 2.68, los de octavo 4.36 y los de noveno 3.44.

Hay deficiencias muy notorias en el dominio de algoritmos de álgebra y en la resolución de problemas, estas se ven reflejadas en el objeto de estudio de esta investigación. La autora considera que, con este nivel de destreza en estos procesos, evidenciado en la información recabada en cada instrumento, el estudiante no está en la capacidad de desarrollar su pensamiento algebraico. Se necesita de una intervención que les ayude a elevar tales destrezas.

2.2.3 Dimensión: designación simbólica

2.2.3.1 Categoría: generalización de patrones

De la teoría científica (capítulo I) se sabe que la identificación-generalización de un patrón numérico, algebraico o figural constituye un punto de partida hacia la abstracción matemática, ya que enfrenta al estudiante con situaciones que implican identificar el paso de lo particular a lo general y ver lo general en casos particulares. Este proceso debe ir acompañado por las formas discursivas, intentos por construir argumentos y explicaciones de sus modos de pensar tendientes a encontrar una fórmula que represente el comportamiento de este.

De acuerdo con la pregunta 17 del cuestionario administrado a los estudiantes (Anexo B) hay opiniones divididas sobre la facilidad de encontrar generalidades en la solución de un problema o ejercicio matemático, porque el 48.2% respondieron que siempre o casi siempre les resulta fácil hacerlo mientras que el 49.1% manifestaron que algunas veces, casi nunca o nunca les resulta fácil.

En las clases observadas hubo ausencia de trabajo por relacionar secuencias numéricas, algebraicas o figurales, enunciar generalidad, modelar situaciones problémicas y realizar contracciones semióticas. Aunque los patrones aparecen en el desarrollo de contenidos matemáticos no necesariamente algebraicos, en TCEB se observan en el contenido de potencias, en el tratamiento de los múltiplos por consiguiente en las tablas de multiplicar, pero en las clases no se da tratamiento de patrones a secuencias o tendencias sino no se trata expresamente tal contenido.

En el libro ESMATE de séptimo grado aparece seis veces la palabra “patrones” y tres veces la palabra “patrón” y los profesores en las entrevistas confirmaron que se trabaja con los ejercicios del libro solamente “*por el tiempo nos limitamos a trabajar solo los ejercicios del libro*” y por lo observado ellos abordan el tema patrones tal como aparece en el libro con 2 de 200 horas al año. Esta situación dificulta la identificación de los niveles de generalización (Radford, 2012) que hayan alcanzado los estudiantes a través del estudio del contenido.

En las entrevistas los profesores admiten que el contenido de patrones representa dificultad para los estudiantes "con respecto a los patrones, les cuesta bastante, ese tipo de problemas les gusta, pero les cuesta y cuando no pueden hacerlo mejor se ponen a hacer otra cosa", "les cuesta mucho el análisis de un patrón para llegar a una cosa". Además de parte de los profesores no se evidencia una disposición a buscar formas variadas para que los estudiantes puedan identificarlos, más bien se advierte un conformismo a dejar que los estudiantes sigan un rumbo pasivo en el aprendizaje de este tema.

En los diferentes instrumentos se observa poco trabajo con el contenido de patrones numéricos y algebraicos, que en opinión de la autora se está desaprovechando este recurso para desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes.

2.2.3.2 Categoría: lenguaje algebraico

A través del lenguaje algebraico el estudiante comunica sus ideas del ámbito algebraico. En la Tabla 18 se muestran las respuestas a las preguntas 14 y 15 del cuestionario administrado a los estudiantes (Anexo B)

Tabla 18

Acciones de los estudiantes que favorecen su desarrollo del pensamiento algebraico utilizando el lenguaje algebraico (porcentajes)

En la clase de Matemática:	Siempre	Casi siempre	Algunas veces	Casi nunca	Nunca
Puedes darles significado a las expresiones algebraicas	13.6	27.7	40.4	10.8	4.8
Te es fácil traducir expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico	11.4	24.1	44.3	15.1	3.9

De los resultados evidenciados en la Tabla 18 se infiere que los estudiantes tienen insuficientes habilidades para decodificar o darles significado a las expresiones algebraicas, ya que el 56% manifestó que algunas veces, casi nunca o nunca pueden hacerlo. El 63.3% admitió tener dificultades para codificar porque manifestaron que algunas veces, casi nunca o nunca les resulta fácil traducir expresiones del lenguaje natural al algebraico.

En la observación a clase se evidenció que en octavo grado en el trabajo con ecuaciones se codifican y decodifican símbolos al resolver problemas de aplicación porque el estudiante traduce el problema verbal a modelos o fórmulas matemáticas (codificación), al resolverlo responde al problema inicial (decodificar). Se comprobó que esta parte se trabajó en un 20% de lo observado, y fueron notables las dificultades presentadas por los estudiantes al codificar o decodificar símbolos algebraicos, en general para comprender lenguaje matemático.

En la literatura científica (capítulo I) se encuentra que el lenguaje algebraico permite la expresión de la generalidad de un patrón, la creación o formulación de nuevos enunciados de situaciones problemáticas y en general la comunicación de ideas matemáticas.

Tabla 19

Motivo por el que los estudiantes no aprenden el lenguaje algebraico según profesores entrevistados

Opinión de los profesores	Motivo
“la mayoría de estudiantes tienen problemas con el lenguaje algebraico sobre todo porque no hay mucho tiempo para profundizar en eso, la gran mayoría tiene problemas para traducir del lenguaje cotidiano al algebraico”	falta de tiempo
operar con letras ya se vuelve un problema para ellos	El acto de operar con letras

la traducción se les hace difícil porque están encajonados en lo aritmético, está difícil pegar el salto de lo aritmético al algebraico	Acomodado a lo aritmético

Se advierte poco compromiso de los profesores con la preparación de los estudiantes para que adquieran dominio en la codificación y decodificación de símbolos, porque descargan en el estudiante la responsabilidad de aprender y los motivos de por qué no lo logran los centran en acciones de su propia responsabilidad. Por la literatura científica se sabe que esta habilidad es necesaria para comunicar ideas en el campo matemático-algebraico y para construir conocimientos algebraicos y como lo dice Radford (2012) es el vector que permite cristalizar el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la simbolización donde se alcanza la abstracción que corresponde al nivel más alto en este ideal.

En la dimensión designación simbólica se registra el promedio más bajo de los estudiantes del TCEB con 3.30, como se aprecia en la Tabla 20.

Tabla 20

Media aritmética de los resultados de la prueba pedagógica para la dimensión designación simbólica en estudiantes de TCEB

Grado	**Promedio**	**Desviación estándar**
Séptimo	1.5	1.0784
Octavo	3.9	1.6999
Noveno	4.5	2.4111
Media	**3.3**	**1.5875**

En séptimo grado se obtuvo 1.5, en octavo 3.9 y en noveno 4.5. la prueba incluyó ejercicios correspondientes a las categorías generalización de patrones y lenguaje algebraico. Los estudiantes de noveno grado respondieron con mayor asertividad y son los que han estado más expuestos a los contenidos que se incluyen en esta dimensión.

Los resultados del diagnóstico para la dimensión no son alentadores, de acuerdo con las estrategias analizadas en el capítulo I seis de siete se enfocaron en desarrollar pensamiento algebraico utilizando el estudio de patrones algebraicos. Los investigadores encontraron que el área es propicia para este propósito. La autora considera que es necesario dar más espacio a la generalización de patrones y al desarrollo del lenguaje algebraico como una apuesta para desarrollar el pensamiento en los estudiantes, además, estos contenidos se encuentran implícitamente en el desarrollo de otros contenidos, pero parece ser que los profesores no lo identifican y por consiguiente no le prestan la debida atención.

2.2.4 Dimensión: participación consciente y razonada del estudiante

2.2.4.1 Categoría: interacciones en el aula

En la Tabla 21 se muestran las respuestas a las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 8 del cuestionario administrado a los estudiantes (Anexo B)

***Tabla* 21**

Interacciones en el aula provocadas por el profesor según la opinión de los estudiantes (porcentajes)

En la clase de matemática tu profesor	Siempre	Casi siempre	Algunas veces	Casi nunca	Nunca
Orienta actividades que te motivan a participar frente al grupo	27.7	19.9	39.8	7.5	4.2
Te brinda oportunidad para que expreses tus soluciones	64.5	21.1	13.0	0.3	0.0
Te proporciona ayuda extra para que encuentres tus soluciones	74.1	18.4	6.0	0.9	0.3
Te da la oportunidad para crear tus propios problemas o ejercicios	22.6	17.8	34.4	12.7	10.2

Promueve la discusión de los diferentes procedimientos lleven o no a la solución de un problema	41.0	31.0	26.6	2.7	1.8
Crea un ambiente agradable entre todos los estudiantes	73.8	15.7	6.3	1.8	1.2

De acuerdo con los resultados de la Tabla 21, el 89.5% de los estudiantes manifestaron que en clases siempre o casi siempre el profesor crea un ambiente agradable. Por otra parte, respecto a las opiniones acerca de que el profesor orienta actividades que motiven a participar frente al grupo hay respuestas divididas con un 51.5% que respondieron algunas veces, casi nunca o nunca lo hace, el resto manifestó que siempre o casi siempre reciben la orientación.

También, el 85.6% de los estudiantes manifestaron que siempre o casi siempre el profesor brinda la oportunidad para que expresen sus soluciones. El 74.1% de los estudiantes afirmaron que el profesor siempre proporciona ayuda para encontrar la solución de los problemas o ejercicios. En opinión del 57.3% de los estudiantes en la clase algunas veces, casi nunca o nunca el profesor da oportunidad para crear sus propios problemas o ejercicios. El 72% de los estudiantes coincidieron en que el profesor siempre o casi siempre promueve la discusión de los diferentes procedimientos lleven o no a la solución.

Las observaciones de clases permitieron hacer las siguientes valoraciones: excelentes relaciones entre estudiantes y profesores, y entre los estudiantes. A los estudiantes les gusta la clase de matemática, pero más por las relaciones de amistad que por las experiencias de aprendizaje. Se evidenció poco compromiso de los estudiantes con la tarea en términos de trabajo consciente, participación frente a sus compañeros, exposición de sus soluciones, entrega de tareas ex aula.

Por otra parte, se observó poca motivación por parte del profesor para que los estudiantes participen más allá de preguntar si entendieron y si tienen preguntas y a veces hacen algunas preguntas, pero no insisten en que el estudiante de una respuesta. Además, hay ausencia de oportunidad para que los estudiantes presenten sus soluciones, creen sus propios problemas, para la discusión de los diferentes procedimientos ya sea que lleven o no a la solución.

En las entrevistas los profesores dieron sus opiniones de cómo es la participación en la clase de matemática:

- ✓ casi siempre dos son los que responden y a veces casi obligados por las preguntas que les hago, los demás no participan y cuando les digo entendieron me dicen que sí, pero al final no es seguro que eso sea cierto, como que llega un punto en que los estudiantes detectan quien responde y dicen no si aquel va a contestar,
- ✓ respecto a la participación en clases cuesta ya que siempre existe el temor a equivocarse y cómo no van a tener dudas de lo que hacen si solo lo aprenden de forma mecánica y no analizan el problema, como no entienden lo que hacen, tienen temor a opinar en clases,
- ✓ con respecto a la participación, les da miedo pasar adelante, algunos hasta llegan a decir que no quieren pasar a hacer el ridículo así que me toca motivarlos y siempre comienzo lo más sencillo que se pueda para que vayan ganando confianza porque cuando ellos entienden si se animan a pasar,
- ✓ hay un sector que está bastante atento y participa de forma correcta quizá como un 25% de los estudiantes, el resto no responde o no les gusta participar de hecho generalmente los estudiantes que participan se sientan adelante, los que están hasta atrás a veces están haciendo otra cosa o están copiando solo por copiar.

De las entrevistas a profesores se sabe que a los estudiantes no les gusta participar frente a sus compañeros, ni en pizarra, se acomodan a que los compañeros sean los que siempre lo hacen, en algunos casos argumentan que no quieren hacer el ridículo, tienen miedo o temor a equivocarse. Sin embargo, los profesores creen que cuando los estudiantes entienden participan. ¿Se puede inferir que cuando ellos no participan es porque no entienden?

2.2.4.2 Categoría: metacognición

En la Tabla 22 se muestran las respuestas a las preguntas 12, 13, 18, 19, 20, 22, 23 y 24 del cuestionario administrado a los estudiantes (Anexo B).

Tabla 22

Participación voluntaria y razonada de los estudiantes según sus propias opiniones (porcentajes)

En la clase de Matemática:	**Siempre**	**Casi siempre**	**Algunas veces**	**Casi nunca**	**Nunca**
Te gusta participar frente al grupo	14.2	14.2	45.2	16.0	9.3
Muestras disposición a participar en clase	25.0	26.5	38.3	8.1	0.9
Tienes una relación muy cordial con tu profesor	65.4	15.4	12.7	3.6	1.5
Tu relación con tus compañeros es muy buena	59.3	18.7	13.0	2.7	3.6
Te gusta recibir la clase de matemática	53.3	22.6	18.1	2.4	1.8
Cuando un compañero presenta una solución diferente a la tuya, ¿Expones tu solución?	18.7	20.2	29.8	16.6	13.0
En tus participaciones ¿Explicas lo que pensaste para llegar a la solución?	18.1	23.8	34.9	13.9	7.8
Te gusta recibir clase virtual	53.3	22.6	18.1	2.4	1.8

De los datos de la Tabla 22 se observa que al 70.5% de los estudiantes algunas veces, casi nunca o nunca les gusta participar frente al grupo. El 51.1% siempre o casi siempre muestran disposición para participar en la clase. El 80.8% de los estudiantes siempre o casi siempre tienen una relación muy cordial con el profesor. El 78% de los estudiantes siempre o casi siempre mantienen muy buena relación entre ellos.

Al 75.9% de los estudiantes siempre o casi siempre les gusta recibir la clase de matemática. El 59.4% de los estudiantes cuando un compañero expone una solución diferente a la suya algunas veces, casi nunca o nunca expone su solución. El 56.6% de los estudiantes algunas veces, casi nunca o nunca explica lo que pensó para llegar a la solución de un problema o ejercicio. Al 75.9% siempre o casi siempre les gusta recibir la clase de matemática de manera virtual.

Además, no se observó en los estudiantes indicios de desarrollo metacognitivo, en la encuesta manifestaron no tener interés en participar ni en presentar sus soluciones a los problemas planteados en clase. Por otra parte, no explican sus modos de razonar la solución de los ejercicios o problemas. Son conscientes de las buenas interrelaciones que, entre ellos y sus profesores, reconocen que los profesores les incentivan a participar y que son ellos quienes deciden no lo hacerlo. En las clases observadas se evidenció tal situación ya que un porcentaje mínimo era el que participaba y en ocasiones casi obligados.

2.2.5 Revisión documental

Para la revisión documental primero se explica el proyecto ESMATE porque de esta deriva el PEMTCEB, la guía metodológica y el libro de clases denominado “libro ESMATE”. También se realiza una descripción general de lo planificado para esta asignatura en este nivel de acuerdo con la guía del Anexo E. Posteriormente se analizan los documentos integrados en cada categoría de análisis cualitativos descrita en la Tabla 13. El análisis por categorías facilitó la identificación de los elementos que aparecen en estos documentos que favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico.

2.2.5.1 ESMATE: Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática

Se llama ESMATE al Proyecto Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media, que nace en el año 2015 por iniciativa del MINED con el propósito de mejorar los aprendizajes de los estudiantes en la asignatura Matemática que culminó con la creación del proyecto. El esfuerzo contó con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA por sus siglas en inglés), se actualizaron y diseñaron materiales educativos para los niveles de Educación Básica y Media.

Se crearon tres documentos principales: el Libro de texto, el Cuaderno de ejercicios y la Guía metodológica, para orientar al docente en el desarrollo de las clases en el aula tales documentos están relacionados con el Programa de Estudio de Matemática para Tercer Ciclo que es de interés en esta investigación. ESMATE tiene tres componentes principales: aprendizaje activo por parte de los estudiantes, materiales educativos de calidad y asistencia y facilitación (por parte del docente y los familiares).

A partir del año 2018 el MINED distribuye paquetes escolares en los que se incluye el Libro texto ESMATE a todos los estudiantes de Tercer Ciclo; al mismo tiempo, se desarrolló con los docentes un proceso de inducción de la estrategia técnica de este proyecto. El PEMTCEB es un documento base de la propuesta curricular que responde a las interrogantes de los profesores al planificar sus clases y se operacionaliza con la guía metodológica para el profesor y el libro texto para estudiantes. El PEMTCEB en cada grado tiene ocho unidades de las cuales en séptimo y octavo tres son de álgebra y en noveno cuatro son de esta área.

Todos los contenidos se desarrollan siguiendo la misma secuencia didáctica que consiste en cinco pasos: problema inicial para introducir el contenido, solución que en teoría dice que en el texto se propone una o varias soluciones, pero en la mayoría de ejemplos hay una solución. Sigue la conclusión que es donde se explica el contenido a desarrollar tomando como referencia el problema inicial. El cuarto paso es un ejemplo de repaso y el quinto solución de problemas que en general son ejercicios que se resuelven similar a los explicados en el desarrollo del contenido. Como recurso se utiliza la secuencia didáctica del libro y los dominios cognitivos reflejados en las competencias establecidas por el MINED reflejadas en la siguiente tabla.

Tabla 23

Competencias de Matemática para TCEB según grado

Grado		
Séptimo	**Octavo**	**Noveno**
Aplicar diferentes estrategias y procedimientos aritméticos al proponer soluciones a problemas del quehacer diario referidos al uso de los números positivos y negativos.	Generalizar las operaciones aritméticas básicas a nivel algebraico y utilizarlas para modelar propiedades numéricas o para resolver situaciones cotidianas.	Utilizar el álgebra simbólica y los diferentes métodos de factorización para resolver problemas matemáticos.
Interpretar y valorar el lenguaje simbólico del álgebra como una herramienta, que facilita la generalización de lo cotidiano.	Modelar y resolver situaciones cotidianas mediante el uso de la función lineal.	Realizar operaciones con números reales, utilizando las propiedades de la raíz cuadrada y aplicándolas a situaciones del contexto.
Participar con actitud propositiva, al resolver problemas del entorno, utilizando ecuaciones de primer grado.	Modelar y resolver situaciones cotidianas mediante el uso de la función lineal.	Plantear una ecuación cuadrática y resolverla mediante los diferentes métodos.
Utilizar la información estadística presentada en	Participar en la toma de decisiones al analizar y	Resolver problemas sobre figuras y cuerpos

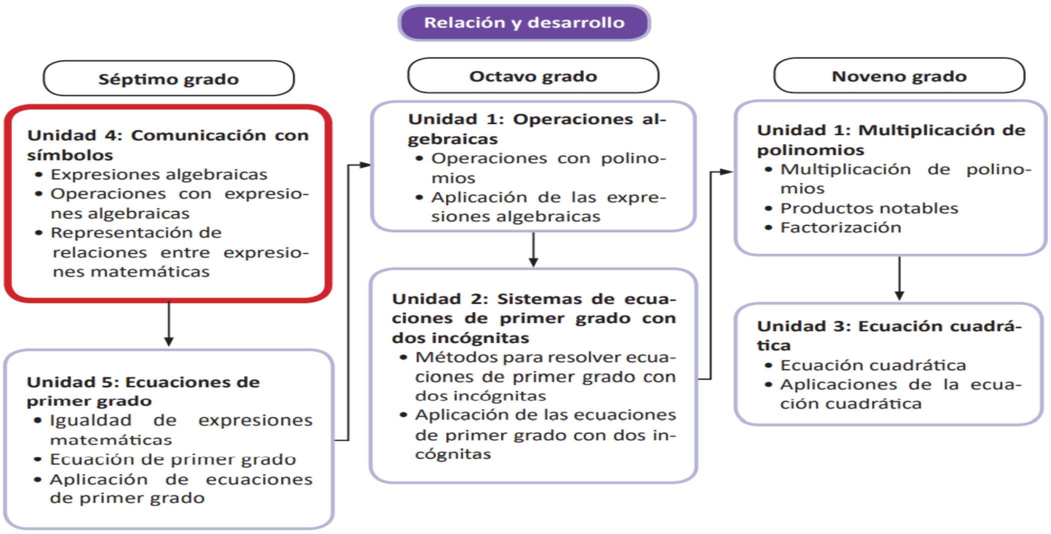
gráficas de faja y circular con criticidad, al interpretar la información del entorno.	discutir la información mediante la representación gráfica de datos y la aplicación de las medidas de tendencia central.	geométricos utilizando la semejanza de figuras y el teorema de Pitágoras.
Resolver con seguridad, problemas del entorno, utilizando la proporcionalidad directa e inversa.		Organizar e interpretar la información obtenida en su entorno y utilizar las medidas de dispersión para el análisis de los datos.

2.2.5.2 Categoría: Trabajo con variables

El programa describe las competencia y contenidos por grado, en séptimo y octavo se tienen tres de Álgebra y en noveno cuatro. Los contenidos de séptimo a noveno están dispuestos de manera ascendente de menor a mayor profundidad de tal forma que entre los tres grados se desarrolla el área de Álgebra que sirve de fundamento para que el estudiante enfrente la Matemática en los niveles superiores de su formación. Se intuye que la organización de los contenidos se hace bajo el supuesto de que el aprendizaje por parte de los estudiantes es lineal y hay una interrelación mostrada en la Figura 5.

Figura 5

Interrelación de los contenidos de álgebra en TCEB



Los ejercicios del libro obedecen al contenido que se desarrolla en cada clase, se evidencia escaza relación de estos con otras áreas de la matemática, todos los ejercicios presentan una vía de solución que se enfoca al área que se desarrolla en la clase, si es aritmética, álgebra, geometría o estadística. Tanto en el Programa como el Libro no se evidencian los diferentes estratos del desarrollo pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico, este último es el que más se evidencia en el trabajo con álgebra, lo que significa que no se tratan los niveles básicos previamente al abordaje del nivel simbólico o abstracto.

En el nivel de TCEB no se evidencia uso de materiales concretos, situación que también se manifestó en las entrevistas a profesores y el jefe regional. Las formas de evaluar en el Libro son las tradicionales mediante ejercicios y se ratificó en la observación a clase. En el desarrollo de contenidos en el Libro se evidencia un fuerte componente de la dimensión analiticidad para el área de Álgebra, escaso número de ejercicios con contexto. La generalización de patrones se aborda solo como un contenido dentro del programa, lo que en opinión de la autora es un recurso muy valioso que podría aprovecharse como un eje transversal.

Por otra parte, en los FCEN, se declara que el Álgebra se desarrolla únicamente en TCEB y en un primer momento orientada a iniciar a los estudiantes en la interpretación de expresiones que utilizan símbolos, y en la simbolización de relaciones sencillas, expresadas mediante enunciados verbales o leyes.

2.2.5.3 Categoría: Matemática en la vida

En la normativa de educación Básica en El Salvador se instruye a inculcar disciplina de trabajo, orden, responsabilidad, tenacidad y autoestima, así como hábitos para la excelencia física y conservación, respecto a la organización curricular para TCEB se sugiere profundizar en la integración cultural y enfatizar la formación de valores, el desarrollo de habilidades y estrategias, para la construcción de conocimientos útiles y pertinentes, para la formación del educando y su aplicación creativa.

2.2.5.4 Categoría: destreza algorítmica

En los FCEN, se declara que el Álgebra en un segundo momento trata las destrezas relacionadas con la trasformación de expresiones algebraicas sencillas que llevan consigo la posibilidad de resolver problemas con ayuda de ecuaciones. Esta declaración se relaciona directamente con el carácter operatorio del Álgebra y por lo tanto es de rigor prestarle la debida atención. En el Libro ESMATE la mayor parte de los ejercicios pertenecen a esta categoría.

2.2.5.5 Categoría: Resolución de problemas

Se instruye en el PEMTCEB trabajar el eje transversal resolución de problemas, se espera que cada estudiante intente resolver los problemas y ejercicios planteados en las páginas del libro ESMATE, por lo menos 20 minutos en cada clase. Con esta actividad se pretende contribuir al fortalecimiento del aprendizaje de los estudiantes y por consiguiente a mejorarlo, así como incrementar la capacidad de interpretación de la situación problemática planteada.

2.2.5.6 Categoría: generalización de patrones

En el PEMTCEB para el tratamiento del contenido multiplicación de números positivos y negativos en séptimo grado se recomienda utilizar patrones numéricos como herramienta, y luego se encuentra el tema patrones numéricos. En octavo grado aparece la sugerencia de aplicar polinomios para resolver problemas donde se tenga que reconocer patrones. En noveno grado el tema no se menciona.

2.2.5.7 Categoría: lenguaje algebraico

En séptimo grado utilizan el lenguaje algebraico para expresar patrones y para introducir las operaciones de expresiones y la traducción del lenguaje algebraico al lenguaje coloquial y viceversa. En octavo grado se pide realizar operaciones de polinomios utilizando las diferentes operaciones de números y las propiedades de potencia, para modelar situaciones en las cuales se usa el lenguaje algebraico en polinomios. También, ante posibles dificultades de los estudiantes en el tema se orienta enfatizar la relación entre lenguaje común y lenguaje algebraico para que puedan expresar situaciones en lenguaje algebraico. En noveno grado no aparece el contenido, aunque el lenguaje algebraico se utiliza en todo el ámbito algebraico.

2.2.5.8 Categoría: interacciones en el aula

En la guía metodológica se instruye al profesor a generar aprendizaje interactivo entre estudiantes porque tiene varias ventajas entre ellas: el trabajo en parejas, si un estudiante no entiende un contenido, puede consultar a su compañero y se genera trabajo colaborativo y un ambiente de convivencia donde todos los estudiantes tienen más oportunidad de aprender. De esta forma se evita dejar sin atención a algunos estudiantes.

Por otro lado, según los FCEN la educación en este nivel se propone contribuir a la capacidad de comunicarse de diferentes formas, al desarrollo de habilidades para el uso correcto de las formas de expresión y comprensión, de actitudes favorables para participar en beneficio de su formación integral y del desarrollo socio-cultural, así como al desarrollo autodidáctico para desenvolverse exitosamente en los procesos de cambio y en su educación permanente.

2.2.5.9 Categoría: metacognición

En la guía del docente se sugiere el desarrollo de las clases de Matemática basándose en el socioconstructivismo desde el enfoque de Resolución de Problemas. En las clases impartidas con este enfoque el centro del proceso de aprendizaje son los estudiantes, por lo que ellos construyen sus conocimientos y procedimientos a partir de la situación didáctica o problemática planteada, además, se considera que cuando un estudiante trabaja de forma individual, leyendo el libro, resolviendo problemas en su cuaderno de apuntes aprende activamente y de manera independiente.

En este proceso, el rol principal del docente es facilitar o asistir el aprendizaje de los estudiantes. También, se recomienda garantizar un espacio de tiempo donde cada uno de sus estudiantes aprenda activamente en forma individual.

2.2.6 Triangulación de resultados

Tras el análisis de los resultados de la aplicación de los instrumentos, se realizó una triangulación para determinar las coincidencias en aspectos positivos y deficientes relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico.

El estado inicial de los indicadores resultó de la triangulación de los resultados de cada uno de los instrumentos aplicados en las condiciones reales en las que se desarrolla el PEA de la Matemática en TCEB, cuyas descripciones más detalladas **s**e presentan en la Tabla 24.

Tabla 24

Comparación de resultados según instrumento administrado

Aspecto/ instrumento	Encuesta: opinión de los estudiantes	Entrevista a profesores	Observación de clase	Prueba pedagógica
Reconocimiento de variables y relaciones entre ellas y adecuaciones al entorno del estudiante	afirmaron que les resultaba fácil utilizar el contenido matemático en los ejercicios o problemas que resuelven.	Constataron el uso de ejercicios solo del libro ESMATE. Y que a menudo utilizan ejercicios con contexto para	se evidenció escaza inclusión de ejercicios con variación y reconocimiento de variables u objetos	Presentaron problemas para utilizar contenido matemático en los problemas de aplicación y mostraron

Aspecto/ instrumento	Encuesta: opinión de los estudiantes	Entrevista a profesores	Observación de clase	Prueba pedagógica
		los estudiantes	indeterminados.	falencias en el trabajo con variables
Identificar y establecer conjeturas para la solución de un problema matemático	contestaron que pueden identificar y establecer conjeturas y que sus profesores se lo exigían al proponerles ejercicios y problemas que vinculaban el álgebra con las diferentes áreas de la Matemática	opinaron que se debe ayudar al estudiante a descubrir y establecer conjeturas para la solución de un problema y, además, que ellos les indican que entiendan el problema, que extraigan los datos e intenten explicarlo con sus palabras.	no se evidenció trabajo de resolución de problemas y como consecuencia tampoco se observó el establecimiento de conjeturas	La mayoría de estudiantes no resolvieron el problema complejo que tenía la prueba pedagógica en la situación 3 pregunta 4.
Generalización de patrones	existen opiniones divididas sobre la facilidad de encontrar generalidades	Se imparten solo cuando se da la clase del Libro ESMATE y el	En las clases hubo ausencia de trabajo de relacionar secuencias	Una minoría de los estudiantes desarrollo correctamente los

Aspecto/ instrumento	Encuesta: opinión de los estudiantes	Entrevista a profesores	Observación de clase	Prueba pedagógica
	en la solución de un problema o ejercicio matemático.	contenido es de patrones.	numéricas o algebraicas, enunciar generalidad, modelar situaciones problémicas y realizar contracciones semióticas	ejercicios de patrones que se incluyeron en la prueba.
Lenguaje algebraico: codificación y decodificación de símbolos.	La mayoría de estudiantes manifestó tener problemas con la codificación y decodificación de símbolos algebraicos.	Los profesores argumentaron que se les puede ir poniendo diferentes situaciones, casos sencillos donde ellos puedan ir codificando, por medio de casos y que vayan cambiando palabras escribirlas	Se observaron muchas dificultades con el uso del lenguaje algebraico ya sea para codificar como con el proceso inverso, decodificación.	La mayoría de los estudiantes evaluados tuvieron errores en codificación y su proceso inverso en los ejercicios de la prueba pedagógica.

Aspecto/ instrumento	Encuesta: opinión de los estudiantes	Entrevista a profesores	Observación de clase	Prueba pedagógica
		como una letra o un objeto para ir generalizando		
Vinculación de la Matemática con el entorno del estudiante y otras áreas.	En opinión de los estudiantes los profesores les vinculan los ejercicios con la vida, la sociedad y distintas áreas de la Matemática	Los profesores manifestaron que desarrollan los ejercicios del libro y solo en algunas ocasiones buscan otros ejercicios, pero que el tiempo no les alcanza.	Se observó una minoría de ejercicios vinculados con el entorno del estudiante en el Libro ESMATE	Una minoría de los estudiantes respondieron correctamente los ejercicios de la prueba pedagógica que se vinculaban con su entorno
Participación en la clase de matemática	La mayoría de los estudiantes manifestó que no les gusta participar	Los profesores opinaron que a lo más unos cuatro estudiantes de cada salón les gusta participar.	No se observó fluidez en la participación de los estudiantes, una minoría participaba voluntariamente, otros por obligación.	No aplica

De forma general se observan puntos coincidentes para cada una de las dimensiones:

- ✓ existe escaso trabajo en el aula de reconocimiento de variables y relaciones entre ellas y adecuaciones al entorno del estudiante. El estudio de las variables se inicia solo con el contexto de geometría, específicamente áreas de rectángulos. En opinión de la autora hace falta crear otros contextos de la vida cotidiana del estudiante para ir gradualmente introduciéndolos en este estudio,
- ✓ los estudiantes en la encuesta afirmaron que pueden identificar y establecer conjeturas y que sus profesores les exigen tal trabajo. Los profesores en las entrevistas expresaron que se debe ayudar al estudiante a descubrir y establecer conjeturas para la solución de un problema. En las observaciones de clase no se evidenció tal situación, por el contrario, fueron escasas las oportunidades de resolver problemas concretos. Los resultados en la prueba pedagógica mostraron la existencia de carencias en estos procesos,
- ✓ en el carácter operatorio de los números enteros y fraccionarios hay mucha deficiencia, y como efecto dominó se evidencia en las operaciones con expresiones algebraicas, que, aunque los estudiantes identifican términos semejantes, se equivocan en las operaciones,
- ✓ no se observó participación consciente y razonada de los estudiantes, solo participaban en ocasiones cuando el profesor insistía, y en la encuesta, los estudiantes confirmaron que no les gusta participar. Esto contradice la declarado en los FCEN que exige se potencien las diferentes formas de participación y comunicación, por lo tanto, el profesor tiene el reto de contribuir en el cambio conductual de sus estudiantes con la finalidad de motivarlos a estudiar.

2.3 Una estrategia didáctica para contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática

Como resultado de la sistematización teórico - metodológica realizada en los capítulos I y II y la caracterización del estado actual del pensamiento algebraico desde el PEA de la Matemática a través del diagnóstico, se propone una estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB, donde se toman como punto de partida los resultados de investigaciones precedentes entre los que se destacan la generalización de patrones numéricos y algebraicos, la resolución de problemas, los niveles del desarrollo del pensamiento algebraico el factual el contextual y el simbólico y el pensamiento variacional.

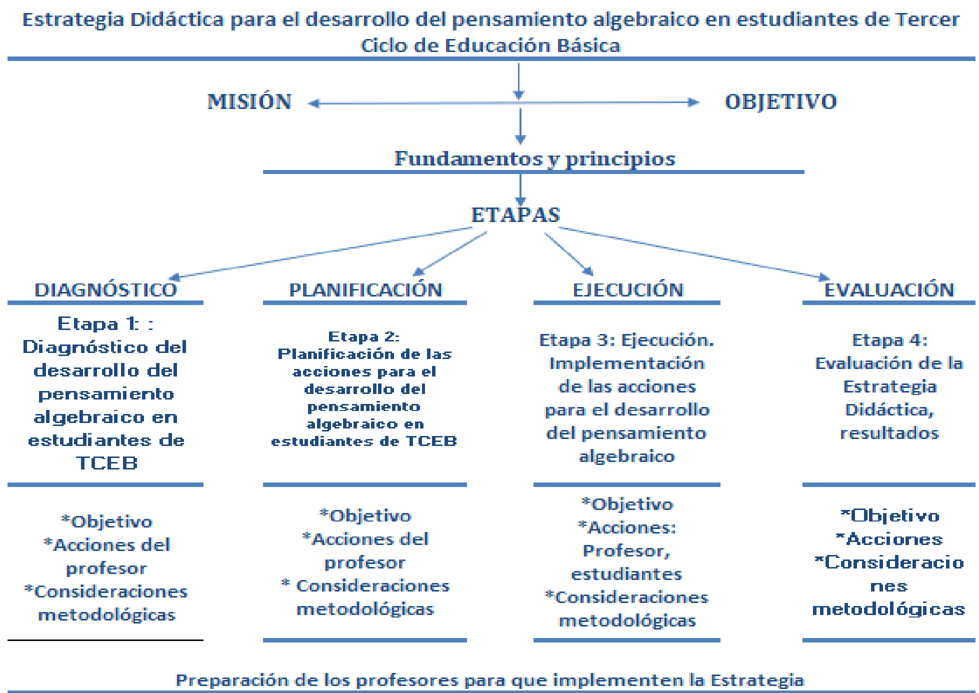
Se propone una estrategia didáctica ya que las problemáticas detectadas en el diagnóstico y desde la práctica profesional de la autora, predominan en el campo de la didáctica a partir de las relaciones que se dan en la triada profesor_ estudiante_ contenido, estas no conducen al estudiante a un adecuado desarrollo del pensamiento algebraico.

La autora considera agregar en la estrategia otros aspectos, que, de acuerdo con el diagnóstico es necesario potenciar:

- ✓ abordaje de la indeterminancia desde los contextos de la vida cotidiana del estudiante,
- ✓ participación consciente y razonada de los estudiantes que permita compartir hallazgos, formas de pensar y desarrollo metacognitivo, a fin de formar individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente,
- ✓ reforzar la analiticidad para fomentar destreza en las operaciones con los objetos del campo algebraico. En la Prueba Pedagógica se evidenció un rendimiento bajo en esta dimensión.

***Figura* 6**

Elementos de la estrategia didáctica



La Figura 6 muestra los elementos principales de la estrategia didáctica que se propone, la cual se define de acuerdo con Font (2017) como un conjunto de acciones secuenciales de motivación, orientación, ejecución, control y valoración que ejecutan coordinadamente docentes y estudiantes, a partir del diagnóstico del contexto educativo, donde se involucran todos los componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje, en función de mejorar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB.

En esta definición se hace referencia al carácter secuenciado con que se implementan las acciones de la estrategia, en esta investigación están dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico. Parten de los resultados del diagnóstico, de la variable en estudio y del objetivo a lograr a partir de la problemática existente. La transformación se logra mediante la actividad intelectual enmarcada en el PEA de la Matemática, donde se involucran y modifican sus componentes.

Misión: Contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en estudiantes de TCEB.

Objetivo: Elaborar una forma de dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB.

Los fundamentos de la estrategia:

Filosóficos: *la teoría de la Objetivación de* ***Radford*** fundamentada en el materialismo dialéctico instituye una forma de concebir la clase de matemática, argumenta que interesa el estudio de los conocimientos y la formación del estudiante para que sea ético, solidario, responsable y reflexivo capaz de posicionarse de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente. Para lograrlo el profesor debe asumir una dirección del PEA que conduzca al estudiante hacia un aprendizaje significativo de los saberes matemáticos y a la vez introducirlo en una relación dinámica de transformación sociocultural.

Psicología cognitiva resalta el papel que juega el procesamiento de la información para que los aprendizajes sean efectivos**.** Fundamenta cualquier intervención de procesos de enseñanza-aprendizaje. El cognitivismo afirma que el ser humano procesa información con una motivación intrínseca buscando un orden lógico, un significado personal y una predicción razonable en su entorno por lo que desarrollan estructuras cognitivas o constructos y les dan significado. En esta estrategia se consideran algunas teorías que pertenecen a la psicología cognitiva.

Epistemología genética de ***Jean Piaget*** de lo explicado en el capítulo I se prioriza la etapa de las operaciones formales que inicia desde los 11 años y en la cual el estudiante comienza a desarrollar la capacidad de utilizar la lógica para resolver problemas, es capaz de distinguir múltiples soluciones, de recurrir a la abstracción, de plantearse sus propios experimentos y probarlos o rechazarlos.

El *enfoque histórico cultural de* ***Lev Vigotsky*** como fundamento de la estrategia considera al estado inicial del estudiante antes de desarrollar la intervención, es decir lo revelado por el diagnóstico, nivel de desarrollo real, y se espera ayudarle a llegar al nivel de desarrollo potencial o deseado. Como se explicó en el capítulo I, existe la zona de desarrollo próximo en la que el estudiante puede avanzar en su aprendizaje con ayuda que para este propósito se cuenta con la implementación de la estrategia. Este autor considera el aprendizaje como una construcción social por parte del estudiante a través de la interacción con su entorno que para este propósito es la clase de matemática. El profesor se convierte en un mediador activo para que el estudiante desarrolle su potencial en Álgebra, este interviene con mayor énfasis en las actividades en las que el estudiante no es capaz de realizar por sí solo, de tal forma que con el tiempo pueda enfrentar la tarea con menor grado de dificultad.

El *aprendizaje significativo de* ***David Ausubel*** sostiene que para que un estudiante incorpore un concepto matemático nuevo a su estructura cognitiva, este debe relacionarse con los conceptos relevantes que él ya posee. Esto sugiere que tanto el profesor como el estudiante deben conocer el punto de partida conceptual que también se llaman conceptos inclusores y se refieren a las ideas que existen en la estructura cognitiva del estudiante y que sirven de anclaje de los nuevos conocimientos. Cuando éstos últimos son asimilados surge el aprendizaje significativo y se aumenta la estructura cognitiva del estudiante y estará lista para recibir información nueva.

La teoría de ***la Gestalt*** como ya se explicó en el capítulo I se utilizó como fundamento de las acciones en la clase de matemática, en el sentido que esta teoría se ocupa de la percepción y según la cual la significación de una forma radica en el todo, que es algo más que la suma de sus partes. Así el estudiante tras identificar las formas de las expresiones, que los psicólogos de la Gestalt le llaman experiencia previa, se dan cuenta de los algoritmos a utilizar, que también se le llama *el insight.*

Pedagógicos: Ideas vigentes en la pedagogía salvadoreña.

De acuerdo con los FCEN la teoría educativa y pedagógica del currículo nacional se nutre de un conjunto de fuentes que corresponden a dominios de las ciencias: la *filosofía*, *epistemología, psicología*, *sociología y la biología*. Desde la **filosofía** se caracteriza al ser humano integral, histórico, social y teleológico, se concibe como el fin de la sociedad y del estado por lo que la educación como un proceso de desarrollo integral es un derecho, de ejercicio irrenunciable, a nivel individual y social, es un proceso propio de la naturaleza humana, necesario para la perpetuidad de la sociedad.

La fuente **epistemológica** entiende al conocimiento como un proceso dialéctico de relación intransferible entre el sujeto y el objeto. Se intuye que en el desarrollo del currículo el conocimiento es construido por el sujeto y no puede ser transferido por terceros, el conocimiento es, a la vez, un hecho singular (personal) y social, el conocimiento es perfectible e inacabado. Por esta razón se considera una concepción constructivista del aprendizaje como pilar de la teoría pedagógica que sustenta el Currículo Nacional, lo mismo que el énfasis en el doble objetivo de aprender a aprender, de aprender haciendo y de enseñar a aprender.

También se asumen principios básicos de la **psicología educativa** y se considera que las experiencias educativas del estudiante se condicionan por el nivel de su desarrollo evolutivo, los nuevos aprendizajes se realizan sobre la base de la experiencia previa por lo que es protagonista de su propio proceso de conocimiento.

Las orientaciones **sociológicas:** considera, en el diseño curricular, condiciones relativamente homogéneas para todos los estudiantes considerando cierto margen de variabilidad y equidad social por lo que al estudiante se le debe formar en valores, conocimientos científicos, tecnologías, técnicas, procesos organizacionales, y demás condiciones necesarias para el despliegue de la productividad y la producción en beneficio social. La educación debe tomar en cuenta la estructura y dinámica poblacional sus características, variables y evolución, así como su relación con el desarrollo económico y social, la producción, el medio ambiente, valoración de la cultura propia para favorecer la autoestima y la asimilación crítica de los valores culturales, científicos y sociales de carácter universal.

La fuente **biológica** toma en cuenta el crecimiento y desarrollo del estudiante según las reglas de la naturaleza, también considera que el crecimiento, la salud y la nutrición, inciden en el desarrollo psíquico, psicomotor y por ende en los aprendizajes. Por esta razón, se deben considerar variables del contexto al que pertenecen los estudiantes y orientarles a desarrollar actitudes de compromiso con su vida, como un sistema de interdependencia entre él y su medio externo.

Didácticos: La Didáctica de la Matemática es una disciplina científica cuyo objeto de estudio es la relación entre los saberes, la enseñanza y el aprendizaje estos tres guardan una relación recíproca. Los sabes que para esta estrategia son los contenidos que se encuentran en el PEMTCEB y el cómo se enseñan se refiere a los métodos y estrategias con los que se abordarán estos contenidos. Para ello se propone no trabajar los contenidos acabados sino construirlos con base en las teorías de la psicología cognitiva consideradas en esta estrategia y utilizar el enfoque de resolución de problemas que es el eje transversal propuesto por el MINED para la enseñanza de la Matemática en TCEB en El Salvador.

Matemáticos: El PEMTCEB, las estructuras algebraicas, la clasificación del pensamiento algebraico: factual, contextual y simbólico; caracterización del pensamiento algebraico mediante los vectores: indeterminancia, analiticidad y designación simbólica.

Principios que rigen la Estrategia Didáctica

Contextualizada: Responde al contexto socio-académico donde se desarrolla la actividad algebraica y con las exigencias teórico-metodológicas vigentes de la Matemática para TCEB en El Salvador.

Flexible: Parte del diagnóstico para determinar las necesidades de cambio, los cuales se introducen desde los resultados que surgen cuando se ejecutan y controlan las acciones, si son oportunas y necesarias. Además, existe la posibilidad de rediseñar, reiterar o simplificar sus acciones de acuerdo con los resultados. Combina las acciones del desarrollo del pensamiento con el aprendizaje de la Matemática. Explora diversos caminos en la búsqueda de la solución a un problema.

Motivadora: Responde a las necesidades de aprendizaje, aporta al conocimiento, interpretación y transformación de la actividad practico – social del estudiante, lo que se refleja en un mejor desempeño tanto del estudiante como del profesor de Matemática que la ejecuta.

Participativa: Se espera que los estudiantes sean protagonistas del PEA de la Matemática realizando una parte considerable de las acciones que contempla la estrategia en la etapa de implementación y a la vez siendo constructores de su propio aprendizaje.

Etapas

Etapa 1: Diagnóstico del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB

Objetivo: Diagnosticar el estado inicial del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB.

El diagnóstico constituye el punto de partida para la implementación de la estrategia.

Acciones del profesor

1.1 Elaboración y aplicación de instrumentos que posibiliten la medición de los indicadores que caracterizan el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB. En esta acción el estudiante participa en el proceso respondiendo a los instrumentos que se apliquen e interactuando oportunamente con el profesor y con sus compañeros.

1.2 Procesamiento de los instrumentos aplicados para la medición de los indicadores que caracterizan el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB.

1.3 Análisis de los indicadores, las dimensiones, las dimensiones y la variable según los resultados de los instrumentos y técnicas aplicadas.

1.4 Determinación de las fortalezas, debilidades, amenazas y oportunidades de los estudiantes de TCEB para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico.

1.5 Valoración de los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en función del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB.

1.6 Control del cumplimiento del objetivo de esta etapa.

Consideraciones metodológicas para la etapa

Para diagnosticar el estado inicial del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB, es necesario precisar su desempeño de acuerdo con la operacionalización del objeto de investigación en la Matemática. Se tomarán en cuenta los contenidos desarrollados antes de la implementación de la estrategia, ya que esta forma de pensamiento no es exclusiva del álgebra, por ejemplo, se manifiesta también en el abordaje de contenidos numéricos, de geometría y estadística. Para ello se aplicarán instrumentos elaborados para tal efecto. El instrumento principal es una prueba pedagógica y, en caso de ser necesarias, algunas entrevistas no estructuradas a estudiantes claves para complementar resultados.

El diseño de la prueba pedagógica se corresponde con los contenidos desarrollados antes de implementar la estrategia y en función de los indicadores de la variable. Su análisis se centrará en la identificación de las fortalezas, oportunidades, debilidades y amenazas de los indicadores. A partir de los resultados se valora cómo implementar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en función del desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

Etapa 2: Planificación de las acciones para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB.

Objetivo: Planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en función del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB. Se tomará como referencia los documentos del proyecto ESMATE, entre los que se mencionan el Programa de Matemática para TCEB, el libro ESMATE y la guía metodológica del grado específico en que se implementará la estrategia. Se seleccionarán los contenidos de álgebra con los que se trabajará y se planificarán las tareas que garanticen la ejecución de las acciones que desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática contribuyan al logro del objetivo propuesto. En esta etapa solo participa el profesor, por lo tanto, no se planifican acciones para los estudiantes.

Acciones del profesor:

2.1 Análisis del programa de Matemática para TCEB para la identificación de la forma de trabajar cada uno de los contenidos para contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico.

2.2 Análisis de los libros de texto y guía metodológica ESMATE para la identificación de potencialidades que contribuyan al desarrollo del pensamiento algebraico.

2.3 Determinación de indicadores sobre los que se centrará la atención a las diferencias individuales y colectivas de los estudiantes, en correspondencia con los resultados obtenidos en los instrumentos aplicados en la etapa de diagnóstico.

2.4 Diseño de actividades investigativas y selección de ejercicios y problemas que permitan desarrollar el pensamiento algebraico. Por ejemplo, diseñar ejercicios que correspondan a los contenidos del programa, pero que respondan al menos a una de las dimensiones tratadas.

2.5 Narrar anécdotas de matemáticos importantes que detallen cierta curiosidad en los estudiantes desde el contenido con el propósito de captar su atención.

2.6 Brindar un espacio para que los estudiantes trabajen en los ejercicios o problemas buscando sus propias soluciones antes de recibir impulsos para guiar la solución de parte del profesor.

2.7 Seleccionar y elaborar los medios de enseñanza e identificación de sus potencialidades en cuanto a la estimulación del desarrollo del pensamiento algebraico.

Consideraciones metodológicas para la etapa

Los resultados del diagnóstico de la etapa anterior brindan información fundamental para planificar las acciones previstas para esta etapa, por lo que es importante que las acciones que se conciban contemplen el seguimiento de este atendiendo a las diferencias individuales de los estudiantes. En el análisis de los programas de los diferentes grados de TCEB y tomando como base los indicadores declarados en la operacionalización de la variable, el profesor debe identificar los elementos que potencien el desarrollo del pensamiento algebraico.

La planificación se realiza considerando tanto las competencias expresadas en los programas de las asignaturas, como el contenido, las indicaciones metodológicas que se ofrecen en cada uno.

La selección de ejercicios y problemas estarán en sintonía con los indicadores de cada una de las dimensiones indeterminancia, analiticidad y designación simbólica.

Para la dimensión de participación consciente y razonada de los estudiantes, planificar acciones que potencien las habilidades comunicativas mediante diferentes formas, tal como se declara en los FCEN.

Etapa 3: Implementación de las acciones

Objetivo: Realizar las acciones planificadas para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB desde el PEA de la Matemática, en correspondencia con los resultados del diagnóstico.

Esta es la etapa de implementación de la estrategia, se caracteriza por la puesta en práctica de las acciones propuestas en las etapas precedentes, las acciones las realizan el profesor y los estudiantes. El pensamiento algebraico se aborda desde una concepción del aprendizaje significativo por lo que es determinante considerar en los estudiantes sus conocimientos previos identificados en el diagnóstico para incorporar nuevos conocimientos a la estructura cognitiva, además, los contenidos se organizan de manera secuencial. Esto implica un trabajo intenso en la atención a las diferencias individuales de los *estudiantes* respecto con su zona de desarrollo actual encaminadas a ampliar cada vez más su zona de desarrollo próximo.

***Tabla* 25**

Acciones por desarrollar entre el profesor y los estudiantes

Profesor	Estudiantes
1. Desarrolla las clases de la asignatura teniendo en cuenta las exigencias del programa ESMATE y los resultados del diagnóstico, observando que cada acción contribuya al cumplimiento del objetivo propuesto para la estrategia.	1. Participa en las clases de matemática, con atención a los planteamientos del profesor y de los otros estudiantes, realiza preguntas, establece conjeturas, toma nota sobre los aspectos esenciales del contenido. Brinda apoyo a los demás en caso de necesitarlo.
2. Orienta la resolución de los ejercicios y problemas seleccionados para contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico. Promueve el debate de las diferentes vías de solución de los ejercicios y problemas para identificar la más fácil, más difícil, más elegante, más extensa, más racional desde la perspectiva de los estudiantes. Organiza el intercambio de soluciones entre los estudiantes, con el propósito de socializar las diferentes soluciones, errores que surgen en el proceso y la comunicación entre iguales.	2. Representa los datos de los ejercicios y problemas a resolver mediante gráficos, tablas, figuras u otros recursos que faciliten su comprensión y el análisis de una posible vía de solución. Socializa y valora diferentes ideas para trazar un plan de solución para cada ejercicio y problema, resaltando la comprensión del problema, posibles métodos a utilizar en su resolución, y potencialidades que contribuyan al desarrollo del pensamiento algebraico. Resuelve los ejercicios y problemas, empleando la teoría correspondiente para fundamentar las proposiciones verdaderas que forman parte de la solución.

	Analiza y reflexiona las vías de solución empleadas por otros estudiantes incluyendo la del profesor, identificando la más fácil, más difícil, más elegante, más extensa, más racional. Observa errores cometidos y busca formas de solucionarlos. Elabora contraejemplos para refutar las proposiciones falsas y las reformula para que sean verdaderas. Reformula otros ejercicios o problemas a partir de los resueltos en clase.
3. Desarrolla actividades que requieren el uso de material didáctico concreto. Ejemplo: Para desarrollar el tema de ecuaciones se sugiere que los estudiantes hagan una balanza, la lleven a clase y observen, mediante diferentes pruebas, lo que sucede al quitar o agregar objetos de diferente peso a la balanza. Hacer una analogía de lo que sucede en el proceso de despejar una variable en una ecuación de primer grado.	3. Diseña y elabora materiales concretos que le faciliten su aprendizaje de los contenidos que se trabajan en la asignatura de Matemática. Ejemplo: Elabora una balanza con su creatividad y materiales de su entorno. Analiza, valora y socializa las potencialidades que brindan los materiales concretos elaborados, en el aprendizaje de la Matemática y en particular el Álgebra, en correspondencia con la identificación de potencialidades que contribuyen al desarrollo del pensamiento algebraico
4. Diseña y elabora actividades donde se evidencie el modo de actuación de los estudiantes, así como el análisis y discusión de situaciones que	4.Participa, y muestra, el análisis y discusión del proceso de solución de los ejercicios o problemas, enfatizando en las potencialidades que contribuyan al desarrollo del pensamiento algebraico

favorezcan el desarrollo del pensamiento algebraico.	Reflexiona en el colectivo sobre las acciones encaminadas al desarrollo del modo de actuación en el proceso de solución de los ejercicios o problemas planteados.
5. Orienta actividades investigativas mediante consultas al libro ESMATE, otros libros, sitios especializados en Internet y consulta a otros profesores, que potencien el desarrollo del pensamiento algebraico para interpretar y transformar la realidad.	5. Investiga aspectos incluidos en las actividades diseñadas por el profesor, incluyendo aspectos históricos de los principales conceptos de interés dentro de la actividad, indicando la manera en que influyen en el desarrollo del pensamiento algebraico
Ejemplo: Ante una actividad investigada por el estudiante, preguntar ¿Qué situación de su entorno pudiera transformarse positivamente con su ejecución?	Socializa los resultados de las actividades investigadas, explicando su importancia en el desarrollo del pensamiento algebraico.
6. Promueve el análisis de las diferentes actividades realizadas, así como del empleo de estrategias cognitivas y metacognitivas.	6. Reflexiona sobre las formas en que se desarrolla su aprendizaje, cómo piensa ante diferentes situaciones dadas y qué recursos utiliza para obtener las soluciones. Hace un FODA de su participación en la clase de matemática. Valora su participación en el colectivo.
7. Utiliza diferentes formas de evaluación en las clases de Matemática, de modo que faciliten el análisis de las competencias declaradas en los documentos rectores y los objetivos de la estrategia.	7. Autoevalúa, con criterios propios, su desempeño individual y grupal en la realización de las acciones que contribuyen al desarrollo del pensamiento algebraico

Participación en la realización de la coevaluación.

8. Control y cumplimiento del objetivo de la etapa (actividad solo para profesores)

Consideraciones metodológicas para la etapa

En esta etapa se ejecutarán las acciones planificadas en la etapa anterior, se dinamizan desde metodologías activas, considerando la dimensión participación consciente y razonada del estudiante a fin de que desarrolle diferentes capacidades comunicativas y actitudes favorables para participar en beneficio de su formación integral y del desarrollo sociocultural.

Se inicia la clase con un chequeo emocional para entrar en una interrelación amistosa de actitudes positivas, pues según los neurocientíficos un escenario así favorece el flujo de los neurotransmisores, en el cerebro y hay mayor concentración y por lo tanto más posibilidad de que los estudiantes aprendan.

Se tiene que hacer retroalimentación constante con el propósito de garantizar la internalización de los aprendizajes en el cerebro del estudiante. También, desarrollar un laboratorio semanal para practicar lo aprendido en la semana y hacer pruebas cortas a manera de examen corto o tareas ex aula.

El enfoque de la clase se centra en la resolución de problemas para desarrollar en los estudiantes las capacidades de razonamiento, de construcción del conocimiento científico y técnico, a la vez capacidad para resolver situaciones de la vida cotidiana.

Etapa 4: Evaluación del estado deseado

Objetivo: Evaluar el cumplimiento del objetivo general de la estrategia a partir del análisis de los resultados del control de los objetivos de cada una de las etapas.

Acciones:

1. Análisis de los resultados obtenidos en cada etapa de la estrategia según las acciones que fueron planificadas y el cumplimiento de los objetivos parciales.

2. Elaboración de un plan que permita realizar modificaciones necesarias para el perfeccionamiento de la estrategia y el logro de su objetivo general.
3. Planificación de actividades que estimulen la autoevaluación por los estudiantes, así como las acciones de control y valoración del trabajo de los otros a través de:
   - ✓ la participación consciente y razonada,
   - ✓ la solución de ejercicios y problemas elaborados por los estudiantes,
   - ✓ discusión de las diferentes formas de solucionar los ejercicios o problemas,
   - ✓ respuesta a los problemas planteados,
   - ✓ desarrollo de evaluaciones cada mes con ejercicios y problemas que incluyan los contenidos aprendidos.

Conclusiones parciales del capítulo 2

1. Los estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana tienen insuficientes habilidades para operar con los objetos algebraicos, manifestado en la dimensión de analiticidad, correspondiente al carácter operatorio de los objetos algebraicos, con un promedio de 3.49 de 10 puntos.

2. El desarrollo del pensamiento algebraico para los estudiantes de TCEB en el municipio de Santa Ana está en un nivel bajo pues el promedio de las medias aritméticas de las calificaciones correspondientes a las características del pensamiento algebraico fue de 3.7 de 10 puntos.

3. En los estudiantes de TCEB se aprecia carencia en el reconocimiento de variables y objetos indeterminados, así como de las relaciones existentes entre ellas al obtener una media de 4.39 en la dimensión indeterminancia.

4. La dimensión que tuvo el promedio más bajo fue designación simbólica que se relaciona con generalización de patrones, el lenguaje algebraico y con la modelización de situaciones problémicas, tuvo un promedio de 3.3.

5. Se fundamentó y elaboró una estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB.

Capítulo 3: Puesta en práctica de la estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB y sus resultados

La puesta en práctica de la estrategia se desarrolló mediante un *cuasi-experimento*[6], cuyo objetivo fue la constatación de la efectividad de la estrategia didáctica elaborada, para el desarrollo del pensamiento algebraico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en estudiantes de TCEB, en la unidad: "Comunicación con símbolos" de séptimo grado. En el cuasi-experimento participaron los 21 estudiantes del séptimo "C" del turno vespertino y el profesor de la asignatura Matemática. Se ejecutó a finales del primer semestre e inicios del segundo del año escolar 2022 por el profesor que impartía la asignatura en el grado y la autora de la investigación.

Se decidió escoger intencionalmente para la puesta en práctica de la estrategia, un grupo de estudiantes de séptimo grado por ser el que inicia el TCEB y no tiene influencia de otros grados del nivel por otra parte, se tiene la posibilidad de evaluar transformaciones a largo plazo. El programa de estudios de este grado tiene tres unidades de álgebra: la cuatro, cinco y seis, lo que permite aplicar la estrategia a mediados del año escolar.

Se eligió el CE "Dr. Salvador Ayala" porque tiene estudiantes tanto del área rural como de la urbana, y aunque está clasificado como rural, con el crecimiento de la ciudad su ubicación está en una zona semiurbana o semirrural, lo único que no tiene para ser declarado urbano es alcantarillado de aguas negras. El CE tiene una matrícula de 280 estudiantes de TCEB organizados en dos turnos, en el matutino hay 151 estudiantes y en el vespertino 129 en los tres grados de este nivel.

La directora es la misma para ambos turnos, y el subdirector por turno es diferente. El profesor que imparte matemática en el turno matutino es joven; tiene cinco años de servicio en la docencia, graduado del profesorado en la enseñanza de la Matemática para TCEB y Media y de la Licenciatura en Educación opción

[6]En esta investigación se llama cuasi-experimento al escenario en el que se ponen en práctica la estrategia didáctica y las hipótesis de modo tal de observar los resultados de estas. Se le llamará grupo experimental al séptimo grado sección "C" del turno vespertino, donde se aplicó la estrategia.

matemática. El profesor del turno vespertino es mayor, con 28 años de ejercer la docencia y es graduado de profesorado en matemática y cursó dos años de la carrera de ingeniería civil.

Homogenización de los grupos experimental y control

El cuasi-experimento se desarrolló con un grupo al que se le llamó experimental y se seleccionó otro grupo en el que no se implementó la estrategia didáctica al que se le denominó **control.** Se asumió como población los estudiantes de los turnos matutino y vespertino que en el año 2022 cursaban séptimo grado y sus respectivos profesores. Para la *homologación de la muestra* los estudiantes de ambos grupos son de séptimo grado, de condición sociocultural y socioecómica similar, pues provienen de las mismas comunidades y el CE al que pertenecen es del sector público.

En ambos grupos, antes de la intervención, las clases de matemática se desarrollan bajo la dirección del programa de TCEB, la guía metodológica y los libros ESMATE y la misma metodología porque todos los profesores de matemática de TCEB del sistema educativo nacional, fueron capacitados para trabajar con el PEMTCEB y el libro ESMATE implementando la forma detallada en el libro, la hora clase tenía una duración de 45 minutos y en cada grupo se impartía una hora cada día. En ambos grupos se aplicó la misma prueba de entrada y de salida (Tabla 27). La muestra para aplicar la estrategia didáctica se integró con el grupo de séptimo grado sección “C” del turno vespertino y los estudiantes del séptimo grado sección “A” del turno matutino se tomaron como grupo control.

Para la puesta en práctica de la estrategia se realizaron las siguientes acciones:

1. Elaboración de instrumentos que permitieron caracterizar el grupo de estudiantes en función de los indicadores que miden el desarrollo del pensamiento algebraico. Para la recogida de la información se utilizó una Prueba Pedagógica de entrada (Anexo C). Esta consistió en cuatro situaciones adidácticas[7] del contexto de los estudiantes a manera de cuentos

[7] Se llama situación adidáctica a las decisiones que toma el alumno sin intervención del maestro (buenas o males) en lo concerniente al saber que se pone en juego.

y anécdotas para motivar su participación se midieron las dimensiones indeterminancia, analiticidad y designación simbólica. Entre las cuatro situaciones que comprende la prueba se midieron todos los indicadores de las dimensiones.

Para medir la dimensión participación consciente y razonada del estudiante, se plantea hacerlo mediante observación directa y se enumeraron a los estudiantes que participaban.

2. Diagnóstico del estado inicial de los estudiantes del séptimo grado sección “C” del turno vespertino, con respecto a las características del pensamiento algebraico expresada en las dimensiones indeterminancia, analiticidad y designación simbólica y sus respectivas categorías de análisis, después de haber concluido la unidad antes de la puesta en práctica de la estrategia didáctica en la unidad: “Comunicación con símbolos”, de séptimo grado en el año 2022 con la aplicación de la Prueba Pedagógica elaborada para tal fin (Anexo C).

3. Diagnóstico del estado inicial de los estudiantes del séptimo grado sección “C” del turno vespertino, con respecto a la participación consciente y razonada, después de haber concluido la unidad antes de la puesta en práctica de la estrategia didáctica en la unidad: “Comunicación con símbolos”, de séptimo grado en el año 2022 con la aplicación del cuestionario de participación elaborada para tal fin (Anexo H).

4. Preparación del profesor del séptimo grado sección “C” del turno vespertino, que utilizará la estrategia didáctica elaborada, antes de poner en práctica el cuasi-experimento.

5. Instrumentación e implementación de la estrategia didáctica en la unidad: “Comunicación con símbolos”, de séptimo grado sección “C” del turno vespertino en el año 2022.

6. Análisis de resultados de la puesta en práctica de la estrategia en la unidad: “Comunicación con símbolos”, de séptimo grado en el año 2022, mediante:

- ✓ La evaluación, por las tareas de clase, de las características del pensamiento algebraico a través de las dimensiones: indeterminancia, analiticidad y designación simbólica, de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el desarrollo de la unidad: “Comunicación con símbolos”, de séptimo grado en el año 2022, utilizando los mismos indicadores que en el diagnóstico realizado al iniciar esta unidad.
- ✓ La evaluación de la participación consciente y razonada de los estudiantes, en el desarrollo de la unidad: “Comunicación con símbolos”, de séptimo grado sección “C” del turno vespertino en el año 2022, utilizando el mismo criterio de *participación consciente y razona* que en el diagnóstico inicial de la unidad mediante el cuestionario de participación (Anexo H).
- ✓ La prueba pedagógica aplicada al concluir la unidad: “Comunicación con símbolos”, de séptimo grado sección “C” del turno vespertino en el año 2022 (Anexo G). Esta se aplicó a todos los estudiantes del cuasi-experimento y a los del grupo control para contrastar los resultados y valorar el éxito en el desarrollo del pensamiento algebraico en relación con el grupo control donde no se aplicó la estrategia.

3.1 Caracterización del grupo experimental

En el mes de abril de 2022 (antes de la puesta en práctica) se caracterizó el estado inicial de los estudiantes de séptimo grado donde se implementó la estrategia, para el desarrollo del pensamiento algebraico. Se evaluaron los resultados obtenidos a partir de dos instrumentos aplicados: la guía de observación a clase y la prueba pedagógica. La observación permitió obtener información sobre las categorías: trabajo con variables, matemática en la vida, destreza algorítmica, resolución de problemas, generalización de patrones, lenguaje algebraico, interacciones en el aula y metacognición. La prueba pedagógica reveló insumos para analizar cuantitativamente las dimensiones indeterminancia, analiticidad y designación simbólica.

3.1.1 Categoría: trabajo con variables

Esta categoría no se visualizó en la observación de clases porque los contenidos desarrollados eran de aritmética y no hay cultura de los profesores de trabajar la aritmética con sentido de variación que de acuerdo con los expertos es lo ideal. Esto influye cuando se introducen las variables como contenido ya que para los estudiantes es totalmente nuevo y por investigaciones anteriores se observa que hay una tendencia de ir por lo conocido y en muchas ocasiones tratar los contenidos algebraicos como si fueran aritméticos.

3.1.2 Categoría: matemática en la vida

Con la observación se evidenció el trabajo en la unidad número tres y en el libro ESMATE solo hay un contenido donde se incluyen ejercicios con contexto, lo restante es de tratamiento algorítmico. Los profesores siguen fielmente la metodología ESMATE y en lo observado no se desarrollaron ejercicios diferentes por el profesor, tampoco reflexiones de las bondades de la Matemática en la vida.

A la luz de la teoría científica la falta de ejercicios con contexto no favorece el interés y la motivación por el aprendizaje de esta disciplina. De acuerdo con Vergel (2012) el estudiante describe lo indeterminado o la incógnita, según su contexto cultural, por lo que sugiere construir escenarios donde se desarrolla el pensamiento algebraico. En la estrategia que se propone se incluyen actividades investigativas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico para interpretar y transformar la realidad, además, entre sus principios está ser motivadora capaz de responder a las necesidades de aprendizaje, transformadora de la actividad práctica por lo que se espera un mejor desempeño tanto del estudiante como del profesor de Matemática.

3.1.3 Categoría: Destreza algorítmica

En las observaciones de clases en séptimo C solo se desarrolló trabajo algorítmico con multiplicación y división de números enteros. A pesar de que todo el año se trabajó con operaciones de enteros los estudiantes mostraron falta de dominio de esta categoría, lo que también se evidenció en la prueba pedagógica. Una vez más se ratifica la necesidad de mediar con el objetivo de ayudar a los estudiantes a apropiarse del aprendizaje algorítmico con números enteros, con la certeza que este dominio unido al conocimiento con variables hará posible un mejor desarrollo del pensamiento algebraico y como consecuencia evitará el fracaso escolar provocado por las deficiencias en álgebra.

3.1.4 Categoría: resolución de problemas

En las clases no se observó trabajo con problemas con contexto y tampoco resolución de problemas. Los ejercicios que involucran operaciones con números enteros para los estudiantes se convierten en problemas por las dificultades que para ellos representa. La común de los ejercicios en el libro es conocer dos o más cantidades relacionadas con unos operadores para que el estudiante encuentre el resultado, solo en un número limitado de ejercicios se da una cantidad un operador el resultado para que el estudiante encuentre la otra cantidad que se tuvo que haber relacionado para obtener dicho resultado. Este último tipo de ejercicio implica mayor elaboración por el estudiante.

3.1.5 Categoría: generalización de patrones

En las clases observadas no se trabajó con ejercicios de esta categoría, aunque patrones algebraicos es un contenido de la unidad cuatro, también hay secuencia de números enteros que pudieron tratarse con las operaciones, pero no se observó. También se pudo verificar que identificar patrones numéricos (en este caso) no es interés del profesor, pues no lo menciona.

3.1.6 Categoría: lenguaje algebraico

Por observar clases de la unidad número tres de séptimo grado no se observó trabajo con expresiones algebraicas, por lo que no se pudo evidenciar la manera en que los estudiantes se apropian del lenguaje algebraico. Sin embargo, se espera que en la implementación de la estrategia se observe el trabajo de los estudiantes en esta categoría.

3.1.7 Categoría: interacciones en el aula

Durante la observación a clase se evidenció en los estudiantes apatía para participar en pizarra resolviendo algún ejercicio, solo dos estudiantes se proponían voluntariamente, otros pasaban después que el profesor exigía y casi los obligaba, al ponerles el plumón en la mano. Cuando no podían hacer un ejercicio, preferían no intentarlo y esperar a que el profesor lo resolviera y lo explicara. Mostraron buenas relaciones interpersonales entre estudiante y estudiante y entre profesor y estudiantes, pero muy separadas de la actividad académica.

El profesor que imparte matemática a estos estudiantes también desarrolla esta asignatura en otro grupo de séptimo, dos de octavo y uno de noveno grado. Disfruta dar clases, muestra dominio de la especialidad en el nivel y el trabajo de grupos, su metodología es tradicional, aunque manifiesta disposición para adoptar nuevas estrategias metodológicas y está interesado en el aprendizaje de sus estudiantes, además, es bien aceptado por sus estudiantes y padres de familia, estos aspectos se observaron durante la aplicación de la estrategia.

3.1.8 Categoría: metacognición

Los estudiantes no mostraron empatía con sus compañeros que participan en la pizarra en el sentido de ayudarles o mostrar sus soluciones con el propósito de ser partícipes en las construcciones de conocimientos en el aula. Se muestran conscientes de que no pueden resolver un ejercicio o problema, pero no se interesan por buscar una solución ni por entender dónde está la dificultad, se limitan a decir “no puedo hacer, a saber, cómo se hace”. Una actitud pasiva casi conformista no contribuye a dar un salto cualitativo en relación con los aprendizajes de los estudiantes.

Falta de responsabilidad en la entrega de tareas ex aula. Al dejarles tarea en hoja aparte para ser entregada tres o cuatro días después, más de la mitad no la entrega, argumentan que perdieron la hoja de tarea o que no asistieron cuando se asignó, en algunos casos se les volvía a dar, pero igual no la entregaban. No mostraban preocupación por no entregarla. De igual manera la asistencia era muy irregular, faltaban hasta dos o tres semanas consecutivas y luego llegaban sin explicar la razón de sus faltas y sin interés de ponerse al día con sus responsabilidades. Se sostuvo una reunión con padres y madres de familia, se adquirieron compromisos, pero no todos cumplieron.

3.1.9 Resultados de la aplicación de la prueba pedagógica

La prueba pedagógica que se aplicó tiene 23 ítems correspondientes a las dimensiones indeterminancia (6), analiticidad (9) y designación simbólica (8) (Anexo C). Los resultados se ilustran en la Tabla 26.

***Tabla* 26**

Resultados de la prueba pedagógica de entrada en grupo experimental según dimensión

		Calificación en cada dimensión			
No.	**Estudiante**	**Indeterminancia**	**Analiticidad**	**Designación simbólica**	**Nota**
1	ARAJ	0	4	3.5	2.8
2	ALCS	2	4	3	3.1
3	BCAM	6	3	0	2.7
4	CPDS	2	4	4	3.5
5	CMJM	2	1	2	1.6
6	CMAJ	0	0	1	0.4
7	ESMY	0	2	4	2.2
8	FOJS	2	4	0	2.1
9	FPJA	0	5	4	3.4
10	GAWE	2	4	5	3.8
11	GMSM	0	1	0	0.4
12	LUFA	2	2	0	1.3
13	MICD	0	4	5	3.3
14	MVEA	2	2	8	4.1
15	MPBS	6	6	4	5.3
16	MHKM	2	5	0	2.5
17	MCNM	4	3	4	3.6
18	PGCA	8	2	0	2.9
19	RHAN	2	2	4	2.7
20	RABE	0	3	0	1.2
21	VMME	0	2	6	2.9
Promedio por dimensión		**2**	**3**	**2.70**	**2.65**

De acuerdo con los promedios (Tabla 26) los estudiantes muestran un rendimiento bajo, en las tres dimensiones. En la dimensión de analiticidad hay mayor afinidad de los estudiantes pues se refiere a las operaciones que son procesos que desarrollan desde la primaria, aún con este antecedente el promedio en esta dimensión es de 3.0. Además, 8 de 21 (38,1%) estudiantes no resolvieron correctamente ningún problema de indeterminancia, 1 de 21 (4,8%) no resolvió correctamente ningún ejercicio de analiticidad y 7 de 21 (33,3%) no resolvieron correctamente ningún problema de designación simbólica. Por otra parte, ningún estudiante alcanzó el 100% de puntuación en la prueba y solo un estudiante alcanzó más de 5 puntos en el total

Estos resultados confirman el bajo rendimiento de los estudiantes en el desarrollo del pensamiento algebraico, lo cual se verifica mediante *el cálculo* de la nota total que aparece en la columna 6 de la Tabla 26 que es de **2.65** para el que se utilizó la fórmula creada en la Tabla 13, y de acuerdo con los niveles declarados para el desarrollo del pensamiento algebraico, los estudiantes del grupo experimental están en nivel bajo. Por lo que hacer una intervención es un imperativo.

A partir de la información obtenida en el diagnóstico de partida del séptimo grado C, se determina que el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes se encuentra en un nivel bajo. Sin embargo, se percibe un clima agradable en la clase porque hay buenas interrelaciones personales entre los estudiantes y su profesor lo que convierte en potencialidad que se pueden aprovechar para crear un escenario adecuado en el que se construyan aprendizajes. También, el profesor está en la disposición de aprender nuevas formas de orientar el PEA de la Matemática por lo que se espera un aprovechamiento de la estrategia diseñada.

La estrategia que se propone está dirigida a elevar el nivel del desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes para lo que se considera un tratamiento para mejorar las deficiencias encontradas en cada categoría y en general en las dimensiones indeterminancia, analiticidad y designación simbólica. Para ello se propone Una estrategia didáctica que desde sus desde el PEA de la Matemática se esperan transformar el objeto de investigación.

La ***segunda etapa*** correspondiente a la planificación consistió en la selección, preparación y desarrollo de los ejercicios y problemas a utilizar en las clases de la unidad 4 de séptimo grado.

UNIDAD 4. “Comunicación con símbolos” (33 horas-clase).

1. Patrones numéricos; generalización de un patrón numérico.
2. Expresiones algebraicas de una variable; expresiones algebraicas con más de una variable; representación de expresiones algebraicas sin signo “x”; expresiones algebraicas multiplicadas por 1 o -1; potencia de una expresión algebraica; expresión algebraica con división; expresiones algebraicas con multiplicación y división.
3. Traducción del lenguaje coloquial al algebraico; traducción del lenguaje algebraico al coloquial.
4. Valor numérico de una expresión algebraica.
5. Términos y coeficientes de una expresión algebraica; multiplicación de una expresión algebraica de un términos por un monomio; división de una expresión algebraica de un término por un número; multiplicación de una expresión algebraica con dos términos por un número; división de una expresión algebraica con dos términos entre un número; multiplicación de una expresión de dos términos por un número; reducción de expresiones algebraicas; reducción de términos semejantes; suma de expresiones algebraicas; resta de dos expresiones algebraicas; operaciones combinadas.
6. Representación de la relación de igualdad; representación de la relación de desigualdad.

3.2. La puesta en práctica de la estrategia didáctica

El éxito obtenido del cuasi-experimento dependió de los siguientes aspectos:

1. La preparación del profesor que imparte la asignatura Matemática para el grupo en el que se aplicó la estrategia.
2. El diseño creativo de las clases, respetando el programa de la asignatura
3. La cuidadosa selección o creación de los ejercicios y problemas que se utilizaron en las clases, así como los métodos de enseñanza y las formas en que se fueron presentando los contenidos.
4. La participación consciente y razonada lograda en los estudiantes y su profesor durante la puesta en práctica de la estrategia.

Para la preparación del profesor se desarrollaron varios encuentros, en los que se explicó la filosofía de trabajo según lo planificado en la estrategia didáctica, ajustando a las características de sus estudiantes. No obstante, el profesor tuvo dificultades para adoptar la forma de trabajo requerido en el cuasi-experimento, por lo que la investigadora impartió el 60% de las clases, con el profesor de observador y el profesor el 40%. El profesor fue internalizando la forma de trabajo al punto de aplicar elementos de la estrategia en su trabajo con otros grados.

Algunos de los ejemplos y ejercicios desarrollados en la puesta en práctica de la estrategia, en correspondencia con las dimensiones para el desarrollo del pensamiento algebraico, se exponen a continuación.

Dimensión: Indeterminancia

1. Gabriela es una estudiante de séptimo grado en su mochila lleva un lápiz, un borrador, un lapicero azul y uno rojo, un libro de matemática, cinco cuadernos rayados y uno cuadriculado. Lucas es compañero de Gabriela y debería llevar lo mismo que ella, pero confundió su libro de matemática con el de ciencias. Josué otro estudiante de séptimo grado, lleva lo mismo que Gabriela más un lapicero negro. Utiliza la siguiente notación: l: lápiz; b: borrador; la: lapicero azul; lr: lapicero rojo; lm: libro de matemática; cr:

cuaderno rayado; cc: cuaderno cuadriculado; lc: libro de ciencias; ln: lapicero negro.

a) Describe lo que cada estudiante lleva en su mochila

Gabriela: ____

Lucas: ____

Josué: ____

Con las letras elegidas indica:

b) La cantidad de objetos que llevan en sus mochilas entre los tres estudiantes: _______________________________________

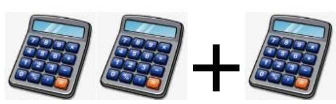
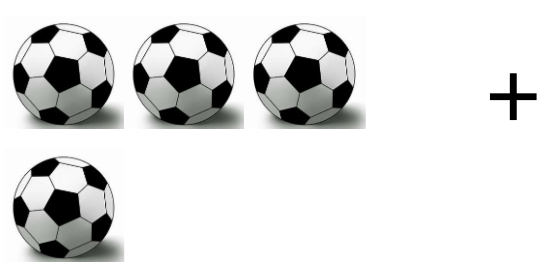
c) Escribe lo que indica cada expresión:

2b: _______________ 5l: _________________ 3 la: ____________________

4ln: _______________ 1l: _________________ 2 lc: ____________________

2cc+3cr: ___________ 3 lm+2lr: _____________.

2. Completa la siguiente tabla, eligiendo un símbolo para cada objeto [8]

No. Fila	Objeto	Letras por utilizar	Expresión que representa la cantidad de objetos por fila
1			
2			
3			

1. [8] Un símbolo es un elemento representativo de un objeto, puedo ser una letra

4  +  -  +

---

3. El precio de la entrada a la reserva natural del Parque “El imposible” para un adulto es x dólares y para un estudiante y dólares. Con esta información responde lo que se pide en cada literal:

   a) Escribe una expresión que represente que el costo de entrada de cuatro adultos y tres estudiantes es menor o igual a veinticinco dólares.

   b) Escribe un significado para la expresión: $9x + 7y \geq 43$

4. Rosita y Karlita van juntas al mercado a comprar frutas. A su regreso a casa Rosita lleva en su canasta 5 mangos y 2 sandías, Karlita lleva 4 mangos y 1 sandía. Llámale x a la fruta mango e y a la fruta sandía. Escribe una expresión algebraica que indique lo que lleva en su canasta:

a) Rosita:

b) Karlita:

c) Rosita y Karlita juntas: ____________________ ¿Cómo lo supiste? ____

5. Luis compró un pantalón por el precio de a dólares más 4 dólares. Mario también compró un pantalón al mismo precio y pagó b dólares más 7 dólares. Escribe una relación de igualdad que represente la situación descrita.

6. Al comprar 5 libras de frijol de x dólares cada una y una de café que cuesta y dólares, el costo total fue de 9 dólares, escribe una igualdad que indique el costo de la compra.

7. En el salón de clase hay x estudiantes y una caja con y lapiceros. Se reparte a cada estudiante 4 lapiceros, es decir: $4x$ lapiceros.

- ✓ Situación 1: Si no sobraron lapiceros es porque la cantidad de lapiceros es igual al número que se repartió, en este caso se tiene la igualdad: $y = 4x$
- ✓ Situación 2: Si sobran lapiceros es porque hay más lapiceros que el número que se repartió, es decir: $y > 4x$.

8. Escribe por cada literal una igualdad en la situación presentada

   a) La estatura de Carmen es $a\,cm$ y Ana es 4 centímetros más alta que Carmen cuya altura es b. Expresa en una relación de igualdad las estaturas de Carmen y Ana.

   b) El costo de comprar 4 libros de matemática que cuestan a dólares cada uno es de b dólares.

   c) Una planta cuesta x dólares, se paga con un billete de 20 dólares y el vuelto es y dólares.

   d) La diferencia entre el precio de una camisa de n dólares y un pantalón de m dólares es 12 dólares (considera que la camisa es más cara que el pantalón).

Orientaciones al profesor

- ✓ Exigir al estudiante que lea cada situación presentada en el ejercicio o problema e intente comprenderlo
- ✓ No comenzar a resolver el ejercicio o problema sino dejar que el estudiante intente resolverlo con sus propios conocimientos.
- ✓ Dar impulsos para la solución sólo cuando sea muy necesario

- ✓ Orientar al estudiante para la identificación de las variables y establezca la relación entre ellas.
- ✓ Brindar oportunidad para que los estudiantes compartan sus soluciones con el grupo

Dimensión: Analiticidad

9. Juan transporta algunas pelotas en sus dos furgones y otras las guarda en 10 cajas. Transportó 8 pelotas en cada furgón y guardó 8 pelotas en cada caja.

a) ¿Cuántas pelotas tiene Juan? _______________.

b) ¿Qué operaciones hiciste para conocer el número de pelotas que tiene Juan? ____

10. Reduce las siguientes expresiones algebraicas

a) $4a + 2a$

b) $y + y$

c) $3x - 8x$

d) $-5x + 2x$

11. Reduce términos semejantes

a) $4x + 3 + 3x + 2$

b) $6x - 4 - 4x - 1$

c) $2y + 5 - y - 1$

12. Suma las siguientes expresiones algebraicas reduciendo términos semejantes cuando sea necesario

a) $2x \ con \ 3x - 4$

b) $-5x \; con \; 4x+2$

c) $3x-4 \; con \; 5x+2$

d) $2x+5 \; con \; 5x-4$

e) $4x-5 \; con \; 4x-7$

f) $-7y+8 \; con \; 4y+5$

g) $-2x+6 \; con \; x-3$

h) $2y-4 \; con -4y+6$

13. Resta las siguientes expresiones reduciendo términos semejantes cuando sea necesario

a) $De \; 3x+7 \; restar \; 9x+2$

b) $De \; 5x-4 \; restar \; 3x+4$

c) $De \; 5m-7 \; restar \; 3m-2$

d) $De - y - 5 \; restar \; 2y+5$

e) $De \; 6p-2 \; restar - 4p+4$

f) $De - 7q+5 \; restar - 9q-8$

14. Efectúa las siguientes multiplicaciones reduciendo términos semejantes cuando sea necesario

a) $5(3x+2)$

b) $4(3x-2)$

c) $(2x+6)(-2)$

15. Efectúa las siguientes divisiones

a) $(2x+4) \div 2$

b) $(6x-9) \div 3$

c) $(-15x+10) \div 5$

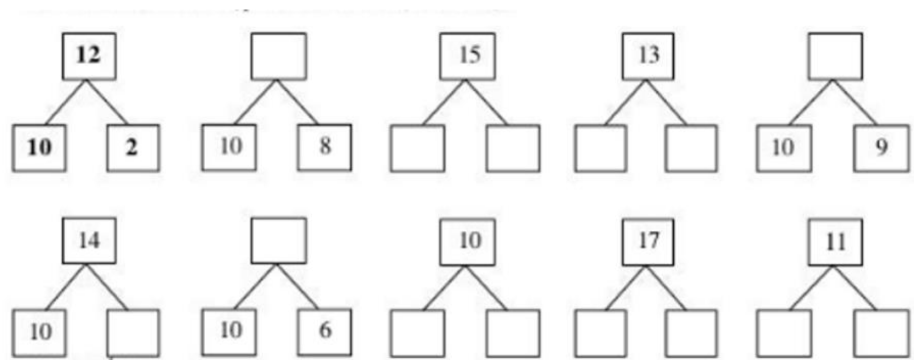
Orientaciones al profesor:

✓ exigir a los estudiantes el uso correcto de la ley de los signos y los algoritmos estudiados como la ley distributiva, la división por un número y la operación resta,

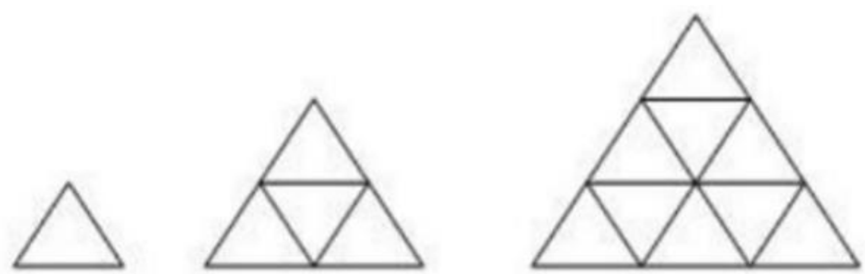
- ✓ sugerir a los estudiantes reducir de términos semejantes cuando sea necesario.

Dimensión: Designación simbólica

16. Llena los espacios vacíos con el número que corresponde según la secuencia numérica observada



17. Dada la secuencia de figuras, dibuja la que sigue



18. La mamá de Laurita es doña Marina quien va al mercado a comprar camisetas blancas a $2.00 cada una, lleva un billete de $20.00. Responde las siguientes preguntas:

   a) Si Marina compró 1 camiseta blanca ¿Cuál es el costo de la compra? _____ y ¿Cuántos dólares le dieron de vuelto? ____________

   b) Si varía la cantidad de camisetas compradas por Marina, también varía el costo de la compra y la cantidad en dólares del vuelto recibido. Completa la siguiente tabla variando estas cantidades

Número de camisetas	Costo de la compra	Vuelto recibido
1	$2	$18
2	$4	
	$6	
4		$12
	$10	
6		
		$6

c) Identifica los patrones numéricos que siguen las secuencias de números en cada columna del cuadro anterior:

Número de camisetas: ______________________________________

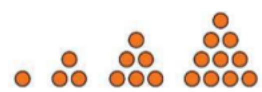
Costo de la compra: ____

Vuelto recibido: ____

d) ¿Cuál es el máximo de camisetas que puede comprar Marina? ____

¿Por qué? ____

19. Dada la secuencia de figuras dibuja la figura que ocupa la quinta posición



a) ¿Cuántas bolitas tiene la primera figura? ____________

b) ¿Cuántas bolitas tiene la segunda figura? ____________

c) ¿Cuántas bolitas tiene la tercera figura? _____________

d) ¿Cuántas bolitas tiene la cuarta figura? ______________

e) ¿Cuántas bolitas tendrá la figura de la posición 20? ____

f) ¿Cómo lo sabes? ____

g) ¿Hay alguna fórmula que permita saber la cantidad de puntos que tiene una figura de una posición determinada? Por ejemplo, la figura 100: ______ ¿Y para la figura número n?

Orientaciones al profesor:

- ✓ exigir a los estudiantes evidenciar que comprenden el lenguaje algebraico usado, así como la habilidad para codificar y decodificar símbolos algebraicos,
- ✓ sugerirle a los estudiantes dibujar la siguiente figura en una secuencia o patrón, seguido de expresar por escrito como se forma el patrón e intentar escribir una expresión simbólica que lo represente.

Dimensión: Participación consciente y razonada

20. En pareja leerás en la página No.80 de tu libro de trabajo la situación relacionada a las compras que hacen José y Julia. Luego reflexiona con tu compañero ¿Cómo se suman dos expresiones algebraicas?

    Puesta en común: Participa en la discusión grupal sobre la respuesta a la pregunta anterior, haz anotaciones en tu cuaderno.

21. Efectúa las siguientes multiplicaciones en tu cuaderno, trabaja con un compañero

a) $(3y)(-4)$
b) $(\frac{3}{5}m)(-2)$
c) $(-\frac{3}{5}y)(-\frac{2}{21})$
d) $(7x)(-\frac{3}{7})$

Comparte en pizarra uno de los ejercicios que hiciste con tu compañero de trabajo

22. Para las siguientes expresiones algebraicas identifica cada término y para cada término su coeficiente

a) $-a + 3b - 5$
b) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y - 1$

Comparte tus resultados con un compañero o compañerade la clase.

23. Efectuar las siguientes divisiones

a) $-5x \div \frac{5}{11}$

b) $3x \div (-\frac{12}{7})$

Comparte en pizarra uno de los ejercicios que has resuelto

24. Efectúa las siguientes multiplicaciones

a) $\frac{2}{3}(6y - 9)$

b) $-(2x + 3)$

c) $-\frac{3}{4}(8x - 16)$

Comparte tus resultados con un compañero o compañera de la clase.

Orientaciones al profesor:

- ✓ promover la participación de los estudiantes por diferentes vías, se sugieren: Pasar a pizarra y explicar el proceso que lleva a la solución, compartir las soluciones en parejas en esta técnica cada estudiante explica lo que realizó, aunque se trate del mismo procedimiento para dar la oportunidad a que aprenda a comunicar sus ideas,
- ✓ enfatizar la participación voluntaria y explicar el valor agregado que esta implica en la formación como futuros profesionales y ciudadanos responsables,
- ✓ dirigir la puesta en común del trabajo colectivo,
- ✓ no adelantar las soluciones.

Los ejercicios desarrollados en la implementación de la estrategia se seleccionaron siguiendo los criterios:

- ✓ responden cuando menos a una de las dimensiones de las características del pensamiento algebraico, incluyendo en algunos la dimensión participación consciente y razonada,
- ✓ se redactaron tomando en cuenta el contexto del estudiante,

- ✓ vinculan la Geometría con el Álgebra,
- ✓ no uso de fórmulas para su resolución,
- ✓ creativos y con un cierto grado de ingenio para atraer la motivación del estudiante.

La tipología de ejercicios seleccionados y los métodos y formas de trabajo utilizados, propiciaron que los estudiantes expusieran de forma independiente sus posibles soluciones y los profesores orientaran el proceso desde las diferentes vías propuestas sin adelantar la solución. Se brindó la oportunidad para la participación, enfatizando que fuera consciente y razonada. De igual forma se trabajó en actividades que implicaron el uso del libro de texto y cumplieran con las condiciones requeridas en la estrategia.

3.3. Resultados de la puesta en práctica de la estrategia didáctica

Los resultados del diagnóstico fueron el punto de partida para la aplicación de la estrategia didáctica. Al inicio de la puesta en práctica, se presentaron dificultades en el cumplimiento de las acciones por parte de los estudiantes debido a factores como el acomodamiento a una metodología tradicional, carencia en el dominio de las operaciones con números enteros, específicamente la ley de los signos en suma o resta y en multiplicación, pues no distinguían cuando debían multiplicar los signos y cuando se conservan porque se trata de sumar o restar cantidades según los signos que tenían. Se evidenció en el estudiante poca independencia en el trabajo, se observó que al entregar la hoja de trabajo y los ejercicios a desarrollar esperaban que el profesor trabajara o dijera cómo proceder.

El profesor utilizaba formas de trabajo que había desarrollado a lo largo de su experiencia, pero no lograba la dinámica de trabajo que permitiera un mayor desarrollo en el aprendizaje de sus estudiantes, pues pensaba que los estudiantes necesitaban ayuda y procedía de inmediato a orientar las soluciones, limitando su desarrollo.

Por su parte, los estudiantes no estaban acostumbrados a ser protagonistas de su aprendizaje y exigirse a producir conocimientos, se negaban a buscar estrategias para resolver las situaciones problémicas presentadas, adoptaban la ley del mínimo esfuerzo y simplemente decían “yo no sé cómo se hace, no entiendo nada” y esperaban a que el profesor hiciera el ejercicio. El profesor daba impulsos para que resolvieran los ejercicios, y en la medida de lo posible dejaba que la investigadora asumiera la responsabilidad de conducir el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero conforme avanzaba el tiempo fue adoptando metodologías activas y cediendo más espacio a los estudiantes.

Una de las mayores dificultades se presentó en la operación con números enteros, se observó que la mayoría de los estudiantes aprendió a identificar términos algebraicos semejantes, pero al reducirlos se equivocaban al operar sus coeficientes. Para ayudar a solucionar esta dificultad se proporcionó un gafete con una tarjeta con la ley de los signos, aun cuando portaban su gafete, no lo utilizaban cuando hacían los ejercicios, otras veces lo dejaban en casa, tanto el profesor como la investigadora les motivaban a tenerlo en cada clase y a que lo usaran correctamente.

A pesar de las dificultades anteriormente expuestas se pudo observar que los estudiantes aprendieron nuevos conceptos y transfirieron otros de la aritmética y como consecuencia se logró mayor solidez de los contenidos que se estaban desarrollando, se fue propiciando en los estudiantes diferentes formas de pensar, de utilizar los contenidos aprendidos que a la vez se tradujo en una mejoría de su desempeño.

3.3.1 Análisis cualitativo del trabajo de los estudiantes en la clase de matemática

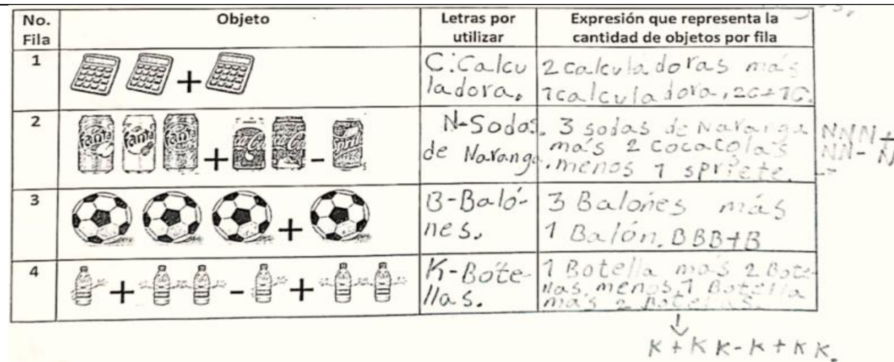
3.3.1.1 Categorías: Trabajo con variables, matemática en la vida y lenguaje algebraico

En la actividad de la Figura 7 se pidió a los estudiantes completar la tabla. Deberían elegir una variable (letra) para representar cada objeto y escribir una expresión algebraica que represente a los objetos en cada fila.

***Figura* 7**

Ejercicio desarrollado en clase

Estudiante No.1



No. Fila	Objeto	Letras por utilizar	Expresión que representa la cantidad de objetos por fila
1		C:Calculadora.	2 calculadoras más 1 calculadora, 2C+1C.
2		N-Sodas de Naranja	3 sodas de Naranja más 2 cocacolas menos 1 spriete.
3		B-Balones.	3 Balones más 1 Balón. BBB+B
4		K-Botellas.	1 Botella más 2 Botellas, menos 1 Botella más 2 Botellas.

NNN+NN-N

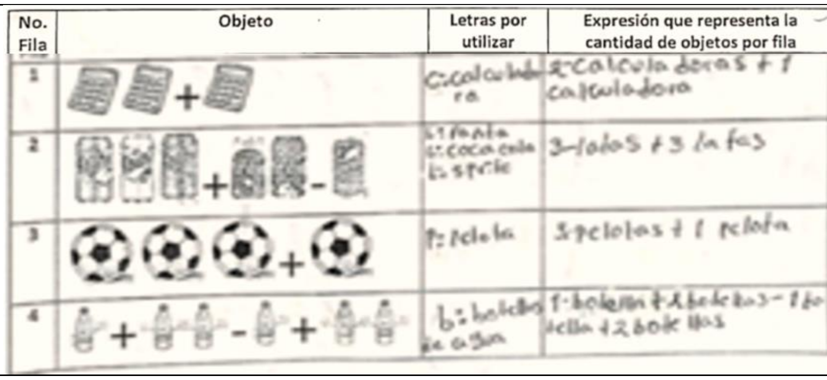
K+KK-K+KK.

Trabajo con variables

Los tres estudiantes eligieron correctamente variables para representar a cada objeto de la columna dos.

El estudiante No.1 Utilizó contracción semiótica en la última columna porque mezcló números con la palabra discursiva. Al margen se observa intentos por simbolizar en la fila dos y cuatro de manera muy natural pues nombró uno a uno los objetos.

Estudiante No.2



No. Fila	Objeto	Letras por utilizar	Expresión que representa la cantidad de objetos por fila
1		C:calculadora	2 calculadoras + 1 calculadora
2		f:fanta c:cocacola s:sprite	3-[illegible] + 3 fantas
3		P:Pelota	3 pelotas + 1 pelota
4		b:botellas de agua	1 botella + 2 botellas - 1 botella + 2 botellas

El estudiante No.2 avanzó más en la contracción semiótica porque sustituyó las palabras “más” y “menos” por los símbolos “+” y “- “respectivamente, sin embargo, tampoco utilizó las variables declaradas en la columna tres.

Estudiante No.3

No. Fila	Objeto	Letras por utilizar	Expresión que representa la cantidad de objetos por fila
1		C:calculadora	2C+1C
2		F:Fanta C:cocacola S:sprite	3F+2CC-S
3		P:Pelota	3P + 1P
4		b:botellas de agua	1b+2b-1b+2b

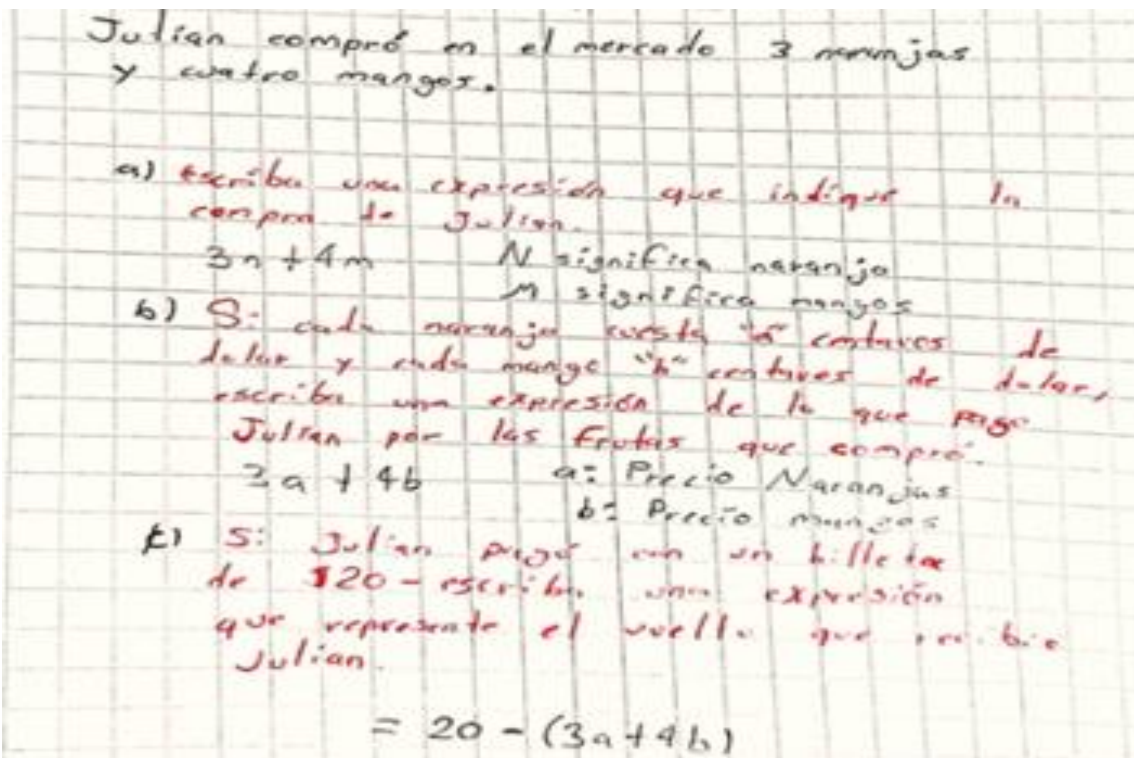
El estudiantes No.3 definió adecuadamente variables para representar los objetos y simbolizó correctamente, pues escribió una expresión algebraica para representar los objetos en cada fila.

Se verificó, como explica Radford (2012), que algunos estudiantes se quedan en el primer estrato del desarrollo del pensamiento algebraico, otros avanzan al segundo y otros al tercero que es el simbólico. Los estudiantes No.1 y No.2 se quedaron en el segundo estrato que es el contextual donde se evidencia la contracción semiótica y la indeterminancia está implícita, en cambio el estudiante No.3 alcanzó en nivel más avanzado que es el simbólico o abstracto donde la indeterminancia está explícita ya que escribió la expresión simbólica que representa a los objetos en cada fila.

En el ejercicio de la Figura 8 se pidió a los estudiantes que escribieran expresiones algebraicas que representaran las acciones en cada literal según la compra que hizo Julián.

***Figura* 8**

Ejercicio desarrollado en clase por una estudiante



En el literal a) la estudiante eligió la letra "n" para simbolizar "naranja" y "m" para mango esto demuestra que fue capaz de designar variables para representar objetos de su entorno, en este caso, frutas. Cuando escribe la expresión $3n + 4m$

está codificando una acción mediante símbolos, además tuvo la capacidad de identificar la relación entre las variables que designó para naranja y mango y la acción de Julián. Poco a poco se evidencia cierto dominio en el lenguaje algebraico que hasta antes de la implementación de la estrategia los estudiantes no habían trabajado tal dominio.

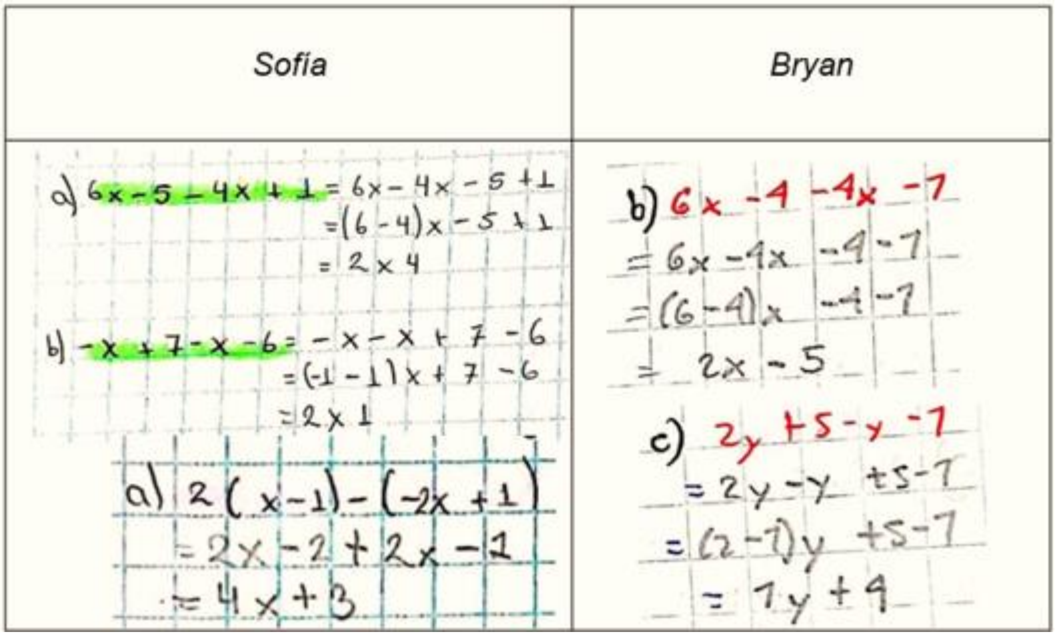
En el literal b) se dan símbolos para los precios de cada fruta y ella codifica mediante una expresión la cantidad de dinero que pagó Julián por las frutas que compró, en el literal c) pudo expresar el vuelto que el sujeto recibe al pagar con un billete de $20.00. En este ejercicio hay una combinación de las categorías trabajo con variables, lenguaje algebraico y matemática en la vida y se observa que el estudiante trabajó los ejercicios.

En la intervención se hicieron mediciones intermedias a manera de tareas, para medir el dominio por los estudiantes de la asimilación del trabajo con variables, se incluyeron situaciones del contexto del estudiante y se observó el avance en las operaciones con los dominios numéricos y algebraicos. A pesar de que esta categoría no se visualizó en las observaciones de clase antes de la implementación de la estrategia, pues fue un contenido nuevo, se evidenció que el trabajo con objetos del campo algebraico tuvo muy buena acogida por los estudiantes, sin embargo, se pudo constatar de acuerdo con la literatura científica, que hay una tendencia de ir por lo conocido y algunos estudiantes trataron los contenidos algebraicos como si fueran aritméticos, la autora argumenta que esta situación mejora con la práctica.

3.3.1.2 Categoría: Destreza algorítmica

***Figura* 9**

Ejercicio desarrollado en el cuaderno

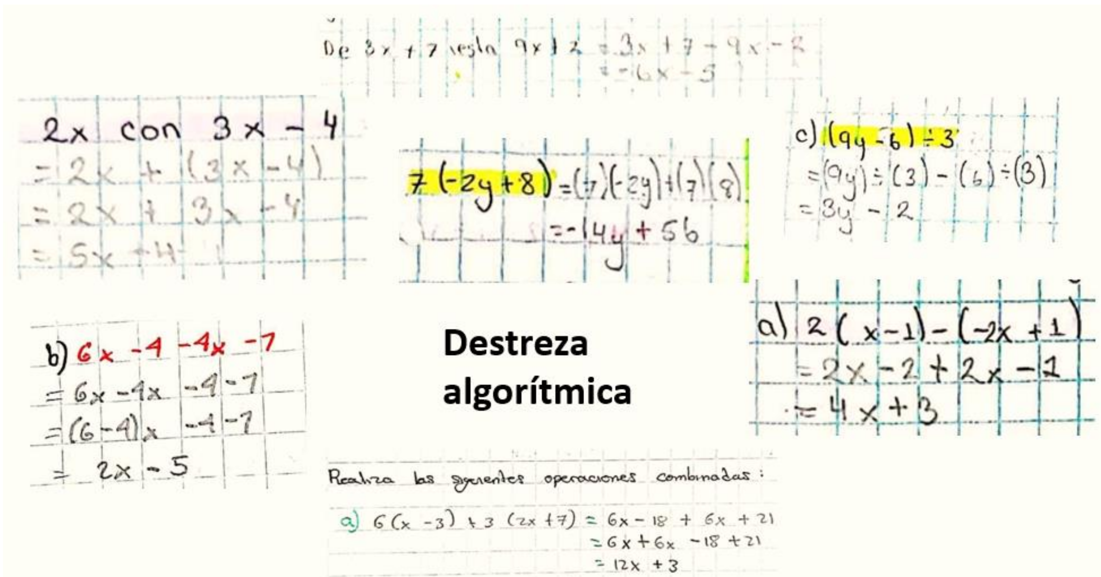


En la Figura 9 se precia el trabajo de dos estudiantes muy destacados por su responsabilidad y empeño en desarrollar la tarea. Ambos reconocen términos semejantes en x o en y, usan correctamente la ley conmutativa de la adición al escribir a la par los términos que tienen la variable $x\ o\ y$ dejando juntos los numéricos. Es notorio el uso de la ley distributiva de derecha a izquierda, a manera de factor común, para reducir términos semejantes, a pesar de haber enseñado la particularidad de esta ley, no todos la comprendieron La mayoría de los casos preferían operar directamente con números según la ley de signos.

Se ilustra el caso de Sofía quien identifica y opera correctamente términos semejantes, pero al operar los términos no escribió el singo más en la respuesta, observar en los ejercicios marcados con color verde los dos primeros literales, en la respuesta al omitir el signo de la parte numérica escribió: $2x4$ en vez de $2x - 4$ en el otro ejercicio $2x1$ en vez de $2x + 1$. En el último ejercicio, aplica correctamente la ley distributiva de izquierda a derecha multiplicando correctamente los signos, sin embargo, se equivoca al operar $-2 - 1$ que es -3 pues respondió +3. Este error se evidenció en muchos estudiantes que les costaba trabajo identificar cuando era solo “signos iguales se suman y se conserva el mismo signo” y cuando operar “menos por menos igual a más”. En la Figura 10 se evidencia el desempeño de otros estudiantes en la destreza algorítmica.

Figura 10

Desarrollo de ejercicios en la clase de matemática



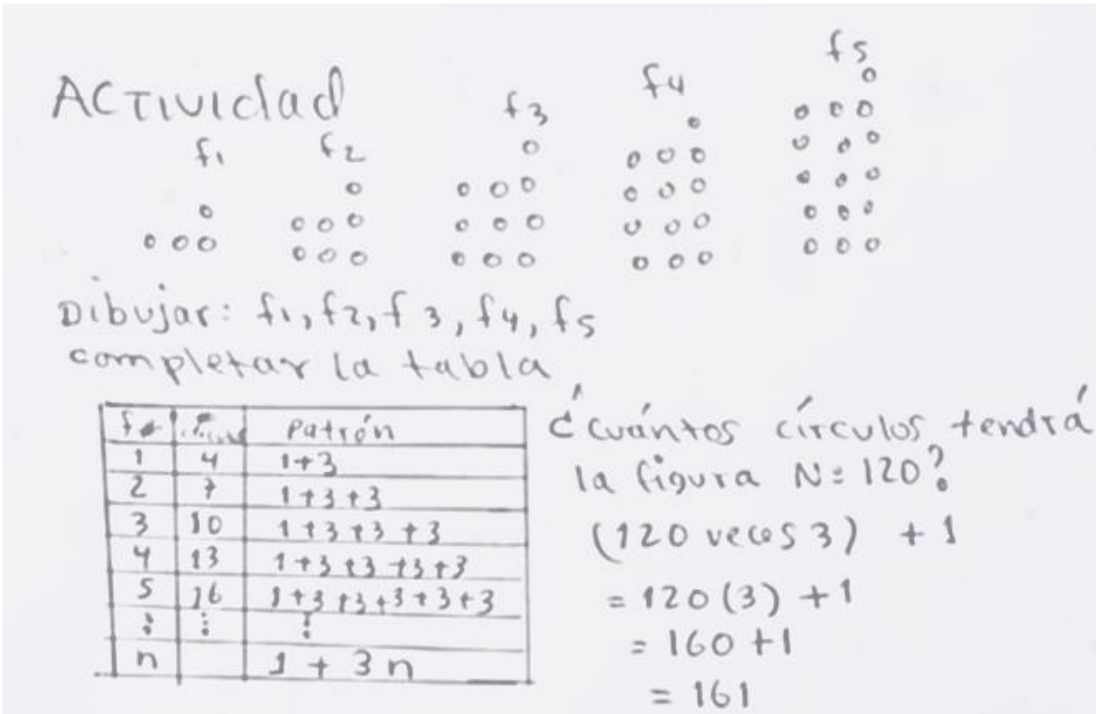
Esta categoría fue la más trabajada antes de la puesta en práctica de la estrategia, aun así, el estado inicial de los estudiantes mostró falta de dominio. Con la implementación de la estrategia los estudiantes lograron un avance significativo. En la Figura 10 se observan diferentes ejercicios desarrollados correctamente y las pruebas de hipótesis del epígrafe 3.3.2 lo confirman.

3.3.1.3 Categoría: resolución de problemas

Esta categoría se trabajó con problemas relacionados al trabajo con variables, con matemática en la vida y con generalización de patrones porque dentro de la unidad que se trabajó son los contenidos más apropiados para tal fin. En la Figura 11 se encuentra la solución trabajada en la pizarra de un problema de patrones desarrollado mediante trabajo colaborativo.

Figura 11

Problema de generalización de patrones desarrollado en pizarra



En la Figura 11 se aprecia la solución que los estudiantes dieron al problema. Un estudiante paso a pizarra y entre todos completaron la tabla. Para identificar el patrón en la columna tres escribieron los números de la columna dos de forma recursiva utilizando la suma de los círculos de la figura anterior. Observaron que cada figura se construye con un círculo más tres círculos sumados reiteradamente de acuerdo con el número de la posición de la figura. Así para la figura cuatro se construye con una bolita más tres bolitas sumadas cuatro veces $\mathbf{1}+(\mathbf{3}+\mathbf{3}+\mathbf{3}+\mathbf{3})$ con los datos en la tabla hicieron una inducción para figura n así:

$$\mathbf{1}+\xrightarrow{\boldsymbol{n\ veces}}(\,\mathbf{3}+\mathbf{3}+\cdots+\mathbf{3})=\mathbf{1}+\mathbf{3}\boldsymbol{n}.$$

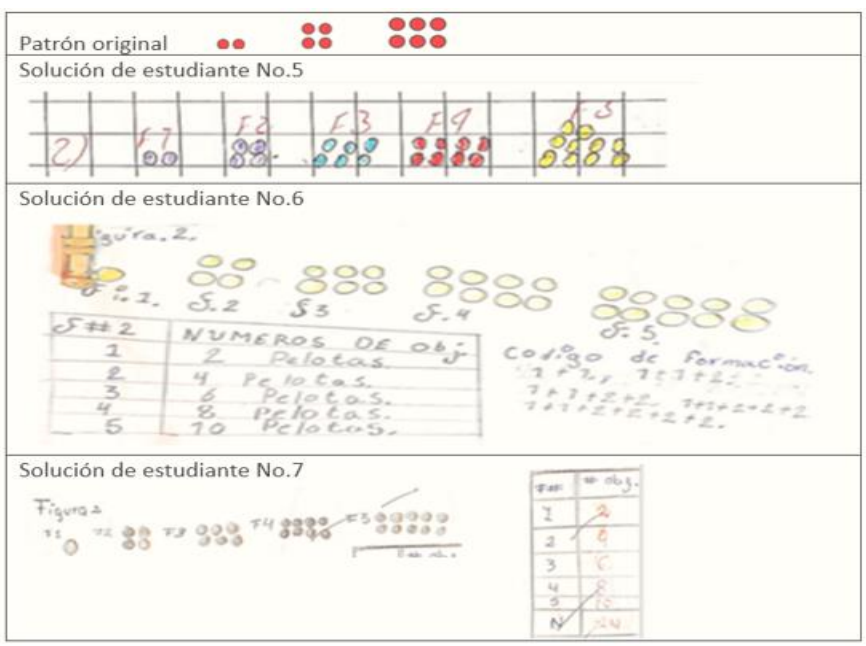
Cabe aclarar que no todos los estudiantes lograron un desarrollo exitoso en la resolución de problemas, pero con la implementación de la estrategia se logró un avance pues en el diagnóstico no se evidenció trabajo en esta categoría. En la intervención se desarrollaron diversos problemas de carácter algebraico utilizando contexto significativo al estudiante y se observó un trabajo, que, sin llegar a la categoría de excelente, fue muy bueno.

3.3.1.4 Categoría: generalización de patrones y lenguaje algebraico

La Figura 12 muestra la solución de un ejercicio de la dimensión designación simbólica, específicamente el reconocimiento de un patrón figural. Se dio al estudiante la secuencia de las primeras tres figuras y se indicó dibujar las dos figuras siguientes, después debería completar la tabla (se dio vacía) y finalmente escribir una expresión simbólica que represente el patrón que sigue tal secuencia.

***Figura* 12**

Ejercicio de patrones desarrollado en una tarea



El trabajo registrado en la Figura 12 muestra que el estudiante No.5 se quedó en el primer estrato del desarrollo del pensamiento algebraico de Radford (2012) que corresponde al factual en el que la indeterminancia no está presente, el estudiante identificó el patrón de formación de la secuencia figural y logró dibujar correctamente la primera de las dos figuras solicitadas, aunque en la segunda figura dibujó correctamente el número de bolitas, pero no la forma exacta.

En el desarrollo del estudiante No.6 se observa un avance con respecto al No.5 porque dibujó correctamente las dos figuras solicitadas, llenó la tabla y además creó su propio código de formación del patrón. Se intuye que entendió perfectamente el patrón de formación de la secuencia figural a manera de una contracción semiótica avanzada, pero no logró simbolizar, por lo que se quedó en el segundo estrato del desarrollo del pensamiento algebraico que es el contextual.

El estudiante No.7 dibujó correctamente las dos figuras, llenó la tabla e intuyó el patrón de formación de la secuencia expresándolo de manera simbólica tal como se muestra en la última fila de la tabla donde aparece que para la figura $n - ésima$ se tendrán $2n$ bolitas, este estudiante alcanzó el último estrato del desarrollo del pensamiento algebraico, es decir el simbólico o abstracto.

En las clases observadas no se trabajó con ejercicios de esta categoría, sin embargo, en la puesta en práctica de la estrategia se notó interés, por parte de los estudiantes, para trabajar con patrones ya que elaboraban los dibujos de las secuencias figurales, los pintaban tal como se aprecia en la Tabla 11, elaboraban tablas para identificar el patrón de formación y el número de elementos que la conformaban. Algunos estudiantes describieron patrones de forma verbal haciendo uso de la palabra discursiva, otros avanzaron hacia la contracción semiótica y otros encontraron expresiones simbólicas, transitando, como se describe en la literatura científica, desde el desarrollo de pensamiento factual al contextual y finalmente al simbólico.

3.3.1.5 Categoría: interacciones en el aula

Los estudiantes aprendieron a participar en una discusión colectiva dando sus opiniones sobre el desarrollo de un ejercicio o problema, pasando a pizarra. Cabe mencionar que al principio no querían participar, pero en la medida que la investigadora les generó confianza al ayudarles en sus dificultades con la Matemática, adoptaron este dicho “paso a la pizarra, si me ayuda” otros: “seño mañana puedo pasar a la pizarra para que me ayude a entender” y de esta manera fueron perdiendo el miedo de pasar frente a sus compañeros, mostraron interés por participar y compartir sus soluciones, aunque pocos explicaban frente a sus compañeros, pues aún les daba pena.

Algunos estudiantes terminaron la etapa de intervención muy motivados, mostrando compromiso con su aprendizaje, pues se les preparaba infografías para motivarles a asistir, se hacía un chequeo emocional cada día y se preparaban clases creativas. En el caso de las infografías se hacían para leerlas en el celular y se enviaban a un grupo WhatsApp que se había creado, y algunos estudiantes desarrollaban los ejercicios enviados a su WhatsApp antes de llegar a la clase, lo que indica una modificación en su actuar.

Durante la clase se permitió a los estudiantes formular preguntas de lo que no entendían, disponer de un tiempo necesario para pensar en la solución de un ejercicio, pedir una pista solo cuando la necesitaran, mostrar el proceso que hicieron al resolver un ejercicio. También se pidió compartir sus resultados llegaran o no a la solución, porque interesaba todo el proceso no solo la respuesta. Algunas veces compartían con otro compañero o compañera, con el profesor y otras pasaban a pizarra. Además, se indicó que fuera de clase se esperaba que desarrollaran las tareas semanales que se darían los viernes y las entregarán el lunes, que leyeran los materiales adicionales que se entregaban para el desarrollo de la clase y que trajeran a la clase algún material solicitado. Esta forma de actuar propició un aumento en la comprensión, la actividad reflexiva y el intercambio de los modos y estrategias generales de pensamiento.

Empezó a desaparecer el miedo a participar en pizarra y explicar los procesos, si había error, el profesor o la investigadora ayudaba a identificarlo y a encontrar cómo superarlo. La conversación en clase se convirtió en discutir los diferentes procesos y estrategias utilizadas en la solución de los ejercicios o problemas.

La investigadora incluyó un chequeo emocional donde les presentaba figuras de emojis u otras figuras y se conversaba cómo se sentían, todos opinaban y se logró una conversación fluida, evidenciándose un grado de amistad. De esta manera todos se escuchaban (estudiantes, profesor e investigadora) lo cual propició un escenario en el que la participación caía por su peso. Tales momentos permitieron la reflexión y aumento de la autoestima, la motivación intrínseca, la participación, se fortalecieron las relaciones en el grupo, lo que favoreció el trabajo con los valores, en particular la honradez pues los objetos personales permanecían en el aula y nunca se perdió alguno.

De los resultados del cuestionario de participación del Anexo H y de la observación en clases durante la puesta en práctica de la estrategia, se infiere que: el 66.67% comparten sus soluciones con su profesor y sus compañeros, el 71.43% les gusta participar o muestran disposición para participar en clases. Es preciso señalar que la puesta en práctica de la estrategia no tuvo igual efecto en todos los estudiantes, aunque los resultados fueron superiores con relación a ellos mismos al comparar el antes y el después de aplicar la estrategia.

3.3.1.6 Categoría: metacognición

Antes de la implementación de la estrategia los estudiantes no mostraron interés por construir sus propios conocimientos, por buscar una solución con sus propios esfuerzos a los ejercicios de clase ni por entender sus propias dificultades. Su conducta era pasiva. Además, hubo falta de responsabilidad en la entrega de tareas ex aula. También se observó asistencia irregular en algunos de ellos. Después de la intervención con la estrategia se evidenció que el 62% de los estudiantes se cuestiona la manera en que resolvió un ejercicio o problema, el 90% argumentó que puede mejorar su desempeño si hacían sus tareas. El 100% opinó que el trabajo con variables fue más fácil de aprender y la ley de signos es lo que más se les dificultó y el 60% se atreve a inventar un ejercicio o problema.

La autora considera que la manifestación de este cambio en los estudiantes tiene como causa esencial un cambio en el aula, propiciando un ambiente de confianza, donde los estudiantes podían equivocarse y no había retribución negativa, esto provocó en ellos la pérdida del miedo y la decisión de participar, como consecuencia las interacciones en el aula fluyeron con cierta normalidad y los propósitos de la estrategia se fueron cumpliendo con nivel aceptable, pues esta forma de proceder crea independencia en el estudiante lo cual aumenta la probabilidad de elevar su desarrollo del pensamiento algebraico.

3.3.2 Análisis estadístico de los cambios evidenciados en el grupo experimental antes-después y su comparación con el grupo control

Después de aplicadas todas las acciones previstas en la estrategia didáctica, se midieron nuevamente los indicadores declarados para la variable en estudio. Se aplicó la prueba pedagógica de salida (Anexo G) y un cuestionario de validación del trabajo en aula (Anexo H), la prueba pedagógica, aunque mide los mismos indicadores que la prueba de entrada, los ejercicios y situaciones presentadas varían. Los instrumentos aplicados permitieron precisar los cambios en el comportamiento de la variable.

Los resultados se presentan en tablas y figuras, mediante medidas de tendencia central y de dispersión; se aplicaron las siguientes pruebas estadísticas: prueba de normalidad de D'Agostino Pearson, pruebas de homogeneidad de varianzas y pruebas T Student para muestras independientes suponiendo varianzas iguales. Se consideró significancia estadística de p

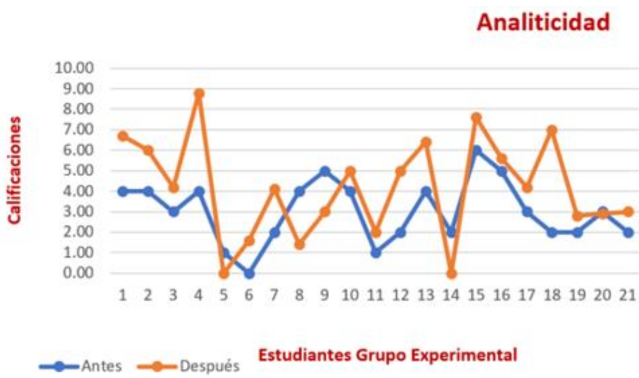
En este análisis se llamó “antes” o “prueba de entrada” a la prueba pedagógica aplicada al grupo experimental y grupo control antes de implementar la estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico, y “después” o “prueba de salida” a la prueba pedagógica aplicada después de implementar la estrategia en ambos grupos.

Se realizó un análisis descriptivo del antes - después para el grupo experimental, para registrar los cambios experimentados por la aplicación de la estrategia. En la Figura 13 se evidencia un cambio importante en las calificaciones de los estudiantes en la prueba de salida con relación a la prueba de entrada para cada una de las dimensiones, en la prueba de salida las calificaciones de los estudiantes aumentaron significativamente, lo que evidencia mejora en la asimilación de los aprendizajes.

***Figura* 13**

Comparación de la prueba pedagógica de salida respecto a la de entrada para el grupo experimental

En la dimensión indeterminancia $\frac{19}{21}$ estudiantes tuvieron mayor calificación en la prueba de salida con respecto a la de entrada.



En la dimensión Analiticidad $\frac{17}{21}$ estudiantes tuvieron mayor calificación en la prueba de salida con respecto a la de entrada.

En la dimensión designación simbólica $\frac{20}{21}$ estudiantes tuvieron mayor calificación en la prueba de salida con respecto a la de entrada

***Tabla* 27**

Medias y desviación estándar de las calificaciones de las pruebas pedagógicas de entrada y de salida para el grupo experimental

Prueba de entrada						**Prueba de salida**					
IN		**AN**		**DS**		**IN**		**AN**		**DS**	
$\bar{\bar{x}}$	σ	$\bar{\bar{x}}$	σ	$\bar{\bar{x}}$	σ	$\bar{\bar{x}}$	σ	$\bar{\bar{x}}$	σ	$\bar{\bar{x}}$	σ
2.0	2.28	3.0	1.52	2.7	2.40	5.8	2.17	4.2	2.44	6.0	1.68

La Tabla 27 muestra los valores de las medias y desviaciones estándar de las calificaciones de los estudiantes en las pruebas de entrada y salida del grupo experimental. La calificación total de la prueba de salida para este grupo fue de **5.7** lo que posiciona a los estudiantes en el **nivel medio del desarrollo del pensamiento algebraico**. Un análisis más específico demuestra que en la dimensión indeterminancia la media aritmética pasó de 2.0 en la prueba de entrada a 5.8 en la de salida, aumento de 3.8 puntos y la desviación estándar disminuyó; en analiticidad de 3.0 a 4.2 con un aumento de 1.2 puntos, en esta dimensión aumentó la desviación estándar y en designación simbólica de 2.7 a 6.0 aumentando en 3.3 puntos y la desviación estándar disminuyó.

En la dimensión analiticidad los estudiantes tuvieron menos avance a pesar de que la destreza algorítmica se trabaja desde lo aritmético y cuando se implementa la sintaxis algebraica se espera que el estudiante adhiera esta última a sus estructuras del cerebro. Sin embargo, en la práctica se evidencia que tales estructuras no se crearon con la solidez necesaria para continuar la construcción de los aprendizajes con los objetos del campo algebraico. La autora infiere que esto se debe específicamente a las insuficientes habilidades en el manejo con las operaciones de números enteros, situación que se trató en la intervención que se hizo con la estrategia y que se debe seguir trabajando en función de superarlas.

En las calificaciones de las dimensiones indeterminancia y designación simbólica se observa un cambio mayor, los estudiantes se identificaron con el trabajo relacionado a las variables y matemática en la vida, secuencias numéricas y figurales y con el lenguaje algebraico. Todo lo que tiene que ver con variables con contexto significativo, patrones numéricos y figurales y lenguaje algebraico constituyen elementos que despiertan la motivacional porque implica acciones de relacionar situaciones de su interés con símbolos, dibujar, pintar, contar, hacer uso de la creatividad, inferir. Estas acciones representan un apego emocional con la tarea y se reflejó en las calificaciones.

3.3.2.1 Pruebas de hipótesis

Por otro lado, se propusieron hipótesis a favor de la prueba de salida, argumentando que las medias aritméticas obtenidas en dicha prueba son mayores que las de las pruebas de entrada en cada una de las dimensiones de la variable. Para comprobar estas hipótesis, se realizó primero una prueba de normalidad de los datos, seguida de una prueba de homogeneidad de varianzas y, finalmente, se aplicaron las pruebas T de Student, asegurándose de que se cumplieran los supuestos anteriores. Esta última prueba se utilizó para comparar las medias antes y después del experimento en el grupo experimental, así como para comparar las medias entre el grupo experimental y el grupo de control, por lo que se realizaron pruebas para verificar los supuestos en ambos grupos.

En el grupo control de aplicó la misma prueba de salida que el grupo experimental.

Supuesto de normalidad

H0: Los datos son normales

H1: Los datos no son normales

Tabla 28

Prueba de supuesto de normalidad de D'Agostino Pearson para calificaciones del grupo experimental y control según dimensión y prueba pedagógica

GRUPO	VALORES	PRUEBA DE ENTRADA			PRUEBA DE SALIDA		
EXPERIMENTAL		IN	AN	DS	IN	AN	DS
	DA-stat	1.14781	0.13465	0.45949	0.63689	0.74579	0.2485

	p-value	0.56332	0.93489	0.79474	0.72728	0.68874	0.88316
	alpha	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	normal	yes	yes	yes	yes	yes	yes
CONTROL	DA-stat	2.41663	2.77692	2.05674	2.32564	1.41025	1.15299
	p-value	0.2987	0.24946	0.35759	0.3126	0.49405	0.56186
	alpha	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	normal	yes	yes	yes	yes	yes	yes

La prueba de D'Agostino Pearson, indicó normalidad de los datos para todas las dimensiones tanto del grupo experimental como del grupo control. Se procedió a probar homocedasticidad.

Supuesto de homogeneidad de varianzas

H0: homocedasticidad en las dos muestras

H1: heterocedasticidad

Tabla 29

Prueba de supuesto de homogeneidad de varianzas para calificaciones del grupo experimental y control según dimensión y prueba pedagógica

Grupo	**Estadístico**	**IN entrada**	**IN salida**	**AN entrada**	**AN salida**	**DS entrada**	**DS salida**
Experimental	Media	2	5.8	3	4.2	2.7	6
	Varianza	5.2	4.7265	2.3	5.97	5.7405	2.8255
	F	1.1001		0.7834		2.0317	
	P(F<=f) una cola	**0.4165**		**0.2952**		**0.0606**	
Control	Media	2	2.7	2	4	0.4	5.4
	Varianza	3.8476	4.1333	0.975	5.0476	1.4476	7.3571
	F	0.9309		0.5184		0.8607	
	P(F<=f) una cola	**0.4372**		**0.0752**		**0.3703**	

La prueba de supuesto de homocedasticidad indicó igualdad de varianzas de las calificaciones para todas las dimensiones tanto del grupo experimental como del grupo control.

Habiendo comprobado los supuestos de normalidad en las calificaciones y varianzas iguales se procedió a comprobar las hipótesis de diferencias de medias antes-después para el grupo control y comparación de grupos experimental y control.

Hipótesis

H0: media de prueba de entrada = media de prueba de salida

H1: media de prueba de entrada < media de prueba de salida

Tabla 30

Prueba T de Student para muestras relacionadas pre-post según dimensión en prueba de entrada y salida del grupo experimental

Grupo	**Estadístico**	**IN entrada**	**IN salida**	**AN entrada**	**AN salida**	**DS entrada**	**DS salida**
Experimental	Media	2	5.8	3	4.2	2.7	6
	Varianza	5.2	4.7265	2.3	5.9676	5.7405	2.8255
	Estadístico t	-6.6909		-2.6825		-5.8432	
	P(T<=t) una cola	**8.1924E-07**		**0.0072**		**5.1169E-06**	

De forma descriptiva se observa que las medias son diferentes, pero la prueba además de indicar que la de entrada es menor que la de salida, le da significancia estadística, es decir que el cambio que se dio no fue dado por el azar y que hay mayor probabilidad que sea por la intervención de la estrategia.

Esta mejora puede ser explicada en parte, por las clases creativas y significativas al entorno del estudiante en lo relacionado al trabajo con variables dado que se construyeron situaciones problemáticas en las que los estudiantes se identificaron y que respondan a ciertos procesos ya probados en la literatura científica entre ellos la identificación y generalización de patrones y pensamiento variacional que contribuyen al desarrollo del pensamiento algebraico. Por otra parte, el desarrollo de las clases con una metodología participativa donde el estudiante se involucra de manera consciente y razonada. También, se hizo la comparación con el grupo control según se muestra en la Tabla 31.

Hipótesis

H0: media del grupo experimental = media del grupo control

H1: media del grupo experimental > media del grupo control

Tabla 31

Prueba T de Student para muestras independientes suponiendo varianzas iguales en prueba de salida de grupos experimental y control

Grupo	**Estadístico**	**IN experimental**	**IN control**	**AN experimental**	**AN control**	**DS experimental**	**DS control**
Experimental	Media	5.8	2.7	4.2	4	6.0	5.4
	Varianza	4.7265	4.1335	5.9676	5.0476	2.8255	7.3571
	Estadístico t	4.7470		2.0553		4.5865	
	P(T<=t) una cola	**1.321E-05**		**0.0232**		**0.0092**	

De manera descriptiva se observa diferencia en las medias de la prueba de salida del grupo experimental respecto a la prueba de salida del grupo control. La prueba T de Student indicó que la media de la prueba de salida del grupo experimental es mayor que la del grupo control para todas las dimensiones con una significancia estadística que indica que la diferencia no se da por el azar, sino que hay mayor probabilidad que sea por la forma en que se desarrollaron las clases en el grupo experimental. Esta prueba sustenta el análisis cualitativo y se confirma que hubo cambio positivo en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes con la aplicación de la estrategia didáctica.

El análisis estadístico refuerza los resultados descritos en el análisis cualitativo, las categorías utilizadas en este análisis incluyen todo lo relacionado con cada una de las dimensiones de la variable desde lo cuantitativo, según se declaró en la Tabla 13 para que haya una cohesión del análisis cualitativo con el cuantitativo. Desde ambos análisis de evidencia que con la puesta en práctica de la estrategia los estudiantes mejoraron su aprendizaje en matemática y elevaron su desarrollo del pensamiento algebraico.

Conclusiones parciales del capítulo 3

Después de realizado el cuasi-experimento y como conclusión, la autora es del criterio que:

1. La etapa de diagnóstico inicial ofreció las condiciones en las cuales se pretendía realizar la estrategia. Esto permitió entrenar de forma efectiva al profesor del grupo experimental. Además de una utilización más segura de los métodos de enseñanza y el aprendizaje significativo, en particular, el poder intercambiar soluciones y la tarea ex aula, que convirtió en la clase un mejor ambiente para el desarrollo del pensamiento algebraico, por cuanto se llevaba a cabo a partir de la preparación de los estudiantes para debatir, discutir y reflexionar sus soluciones.
2. Determinar los ejercicios y problemas en función de las dimensiones indeterminancia, analiticidad y designación simbólica y la dimensión participación consciente y voluntaria del estudiante, mediante las acciones del profesor y los estudiantes, así como el método de enseñanza y la evaluación, no como componentes aislados, están en función del objetivo planteado, expresan la lógica y el carácter científico del PEA de la Matemática en estudiantes de TCEB.
3. La estrategia didáctica favorece la formación de la personalidad a que aspira la educación en El Salvador y su utilización desde el PEA de la Matemática en estudiantes de TCEB, permite desarrollar modos de actuación, en los estudiantes.

Conclusiones

La investigación parte del problema que enfrentan los estudiantes en las clases de Matemática por la falta de dominio del Álgebra. Desde inicios del siglo XXI se asume la tarea de indagar los procesos relacionados con el PEA del Álgebra. Aquí se une este esfuerzo y se focaliza la investigación en el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB, encontrando importantes aportes expuestos de los cuales se derivan conclusiones generales que se dan en su contexto y para el objeto de estudio investigado. A partir de las preguntas de investigación y los hallazgos más significativos del estudio se establecen las siguientes conclusiones:

1. La revisión de la literatura científica permitió sistematizar los referentes teórico - metodológicos asumidos en la investigación los que integran la teoría de: Petrovski (1986), Radford (2012), Vergel (2016), Butto y Rojano (2010), Callejo (2016), Manrique y Losada (2000), que comparten problemáticas comunes y aportan al desarrollo del pensamiento algebraico. Los fundamentos teóricos derivados de la Indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica que incluyen aspectos del trabajo con variables y lenguaje algebraico, generalización de patrones, destreza algorítmica, resolución de problemas y la producción de saberes en el aula evidenciada por la intervención psicopedagógica del profesor, y la participación de estudiantes en su contexto sociocultural, permiten asumir un sistema de dimensiones e indicadores con sólidas bases científicas que constituyen referentes para una estrategia didáctica que desarrolla el pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB.
2. La determinación del estado actual del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB en el municipio de Santa Ana, El Salvador, a partir de los métodos de investigación aplicados, permitieron constatar que el desarrollo del pensamiento algebraico es deficiente pues los estudiantes tienen dificultades al operar correctamente los objetos del campo algebraico; del mismo modo, no se tienen hábitos de participación consciente y razonada en el aula ni entrega de tareas extraclases. Sin embargo, se identificó que al 76% les gusta recibir clases de matemática y durante la observación a clases

se pudo constatar estrechas relaciones profesor – estudiante que pueden ser mejor aprovechadas para incrementar la participación desde la didáctica. Se evidencia la necesidad de desarrollar acciones que contribuyan a la didáctica de la Matemática y fomentar la producción de saberes en el aula mediante la participación consciente y razonada de los estudiantes.

3. La estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico fue elaborada desde fundamentos filosóficos, psicológicos, pedagógicos y didácticos que facilitan su aplicación y adaptación a otros centros escolares en condiciones similares. Estos incluyen una metodología activa, al abordar los saberes desde la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica donde se considera el contexto del estudiante dirigido a la formación de individuos éticos y reflexivos. La estrategia se estructuró en cuatro etapas: diagnóstico, planificación, ejecución y evaluación y se caracteriza por ser contextualizada, flexible, motivadora y participativa.

4. La estrategia didáctica se validó mediante un cuasiexperimento en un grupo de estudiantes de 7mo grado en un CE en el año 2022. Mediante la observación y la aplicación de instrumentos de evaluación antes, durante y después de su puesta en práctica, se pudo constatar su efectividad en el desarrollo del pensamiento algebraico porque se pasó de un nivel bajo de 2.65 a un nivel medio de 5.70 de 10 puntos. Tales resultados fueron sustentados con las pruebas de hipótesis que indicaron diferencia significativa a favor de las calificaciones de la prueba de entrada respecto a las de salida del grupo experimental y a favor de la prueba de salida del grupo experimental respecto al grupo control. Además, hubo un aumento significativo de la participación consciente y razonada del estudiante. La estrategia da respuesta a las necesidades de orden cognitivo, didáctico – pedagógico y psicológico que la educación matemática demanda en este país por lo que representa un apoyo esencial al cumplimiento del objetivo de la investigación.

Recomendaciones

Teniendo en cuenta los resultados alcanzados en esta investigación se recomienda:

1. La estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico que se implementó en esta tesis pudiera ser utilizada con las adecuaciones correspondientes en todos los niveles de educación Básica y Media en la enseñanza de la Matemática.
2. Considerar la posibilidad de aplicar la estrategia didáctica presentada en otros municipios o departamentos del país y en la formación de profesores de matemática para TCEB y Educación Media, con las adecuaciones necesarias.
3. El desarrollo de esta investigación no agotó todas las dificultades con relación al desarrollo del pensamiento algebraico, por lo que se recomienda continuar las investigaciones científicas sobre este tema en otros niveles de la enseñanza en este país con el fin de contribuir a que el estudiante valore la importancia de esta disciplina, aumente sus habilidades, el gusto por la Matemática y tenga éxito en estudios superiores que requieran del uso de la matemática.

Referencias

Águila, C. (2021). El aprendizaje de las matemáticas a partir de las teorías del conductismo y la psicología de la Gestalt. *Mérito-Revista de Educación, 3*, 26-37.

Aké, L. (2021). El caracter algebraico en el conocimiento matemático de maestros en formación. *Tecné. Epistema y Didaxis, 49*, 15-34.

Aké, L. P. (3-7 de Mayo de 2015). Distinción del pensamiento algebraico del aritmético en actividades matemáticas escolares. *XIV CIAEM-IACME. Conferencia Interamericana de Educación Matemática* , 1-9. Retrieved 12 de Abril de 2020, from https://pdfs.semanticscholar.org/56bf/a8f408a6b6efc29d7a73c8373decd941f626.pdf

Aké, L., & Cuevas, J. (2017). *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques* (Primera ed.). Aguascalientes, San Luis Potosí, México: CENEJUS-UASLP. https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/60075540/PENSAMIENTO_ALGEBRAICO-_AKE_Y_CUEVAS20190721-71236-ghxu98.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DPensamiento_algebraico_en_Mexico_desde_d.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-

Aké, L., Mojica, M., & Ramos, B. (2015). Introducción del pensamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la educación básica en México. *Conferencia Interamenricana de Educación Maatemática*, 1-8.

Alfaro C., C., & Barrantes, C. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la Enseñanza Media costarricense. *Cuadernos de investigación y formación en edicación matemática, 3*(4), 83-98.

Alsina, A. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Educación matemática en la infancia, 8*(1), 1-19.

Alvis, J. F., & Aldana, E. (2019). Los ambientes de aprendizaje reales como estrategia pedagógica para el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de básica secundaria. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 10*(1), 135-147.

Araya, P. (2022). Promoviendo el pensamiento creativo en la clase de matemática: dos casos de estudio en las aulas de primaria. *Bolema-Boletim de Educación Matemática, 35*, 1369-1390.

Araya, P., Giaconi, V., & Martínez, M. (2019). Pensamiento matemático creativo en aula de enseñanza primaria entornos didácticos que faciloitan su desarrollon. *Calidad en la educación, 30*, 319-356.

Arboleda, L. (1 de Julio de 2012). Historia de las matemáticas en América Latina. (J. Saldaña, & D. L., Entrevistadores)

Ausubel, D. (1983). Toerìa del aprendizaje significativo. *Fascìculos de CEIF*, 1-10.

Avalos, T. E., & Valentin Cruz Oliva. (2012). *Del Sentido numérico al pensamiento Algebraico* (Primera Edición ed.). (P. Education, Ed.) México, México: Pearson.

Ballester, S. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Ballester, S. (2018). *Didáctica de la Matemática* (Carlos Andino ed.). La Habana, Cuba: Editorial Universitaria Félix Varela.

Baum, W., Danto, S., & Honderich, T. (2001). *Enciclopedia Oxford de filosofía.* Madrid: Tecnos.

Bautista, R., Padilla, J. C., & Elizondo, C. C. (2021). *Estrategias académicas para la inducción al pensamiento matemático.* México: UNAN. Facultad de Estudios Superiores Acatlán.

Bednarz, N., & Lee, L. (1996New Journal series Discover Leard More). Approaches to algebra: Perspectives for reasearch and teaching. 3-12.

Bisquerra, R. (2016). *Metodología de la investigación educativa* (5a ed.). Madrid España: Arcos/libros-La Muralla.

Bosch, M. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 15-37.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Ruíz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulción de la matemática escolar. *Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matema´tica* , 37-74.

Brousseau, G. (1998). Fondementset méthodes de la didactiques des mathematiques. *Recherchesen Didactiques des mathematiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didáctica* (Primera ed.). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Burgos, M., Castillo, M., Beltran-Pellicer, P., & Giacomone, B. G. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema-Boletin de Educación Matemática, 34*, 40-68.

Butto, C., & Rojano, T. (Diciembre de 2010). Early algebraic thinking: The role of the environment Logo. *Scielo, 22*(3).

Caballero, E., Santos, E., & Gozález, M. (2018). *Introducción a la Didáctica para escuelas pedagógicas.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Callejo, M. (1994). *Un club matemático para la diversidad.* Madrid: Narcea Ediciones.

Callejo, M. L., García-Reche, A., & Fernández, C. (8 de Enero de 2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de patrones lineales. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*(10), 5-25. Retrieved 12 de Abril de 2020, from file:///C:/Users/Usuario/Desktop/Monograf%C3%ADa%20Dra%20Olga/Pensamiento%20Algebraico%20temprano%20Maria%20L.%20Callejo%20Espa%C3%B1a%202016.pdf

Cantoral, R. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático .* México D.F.: Universidad virtual.

Cantoral, R., Farfán, R. F., Alanis, J., Rodríguez, R., & Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Capote, M. (2003). *Una estructuración didáctica para la etapa de orientación en la solución de problemas aritméticos con contexto en el primer ciclo de la* *escuela primaria.* Pinar del río Cuba: Universidad Hermanos Saiz Montes de Oca.

Cardozo, E., & Cerecedo, M. (2008). El desarrollo de las competencias matemáticas en la primera infancia. *Revista Iberoamericana de educación*, 11.

Castellanos, D. (2002). *Aprender y enseñar en la escuela: Una concepción desarrolladora.* La Habana.

Castellanos, R. (2020). *Razonamiento lóico-matemátio en e desarrollo de los niños dee qunto año de Educación Básica de la unidad educativa "Dario C. Guevara" de la parroquia El Salto, cantón Babahoya.* Universidad Técnica Babahoyo.

Castillo, R., & Lopez-Mairena, E. (2018). Estrategias didácticas en el aprendizaje de las operaciones de polinomio con el uso de la geometría. *Revista electrónica de conocimientos saberes y prácticas, 1*(1), 28-41.

Castro, M., & Alvarado, E. (1996). *Origen y desarrollo histórico de la matemática en El Salvador* (Primera ed.). San Salvador: Editorial Universitaria Universidad de El Salvador.

Chalé, S. (2013). El desarrollo del pensamiento algebraico: la visualización en el caso. *I Congreso de matemática de centro américa y el caribe*, 12.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, 51-64.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *ESTUDIAR MATEMÁTICAS. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje* (Vol. Primera edición). (M. Clemente, Ed.) Barcelona, España: Horsori.

Coro, F. (2017a). *El desarrollo del pensamiento geométrico espacial en la formación del profesor de Matemática.* Matanzas Cuba: Memorias del evento: Matecompu CD-ROM universidad de Matanzas.

Coro, F. (2019). *Estrategia Didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico - espacial en la formación del profesor de Matemática.* La Habana, Cuba: UCPEJV.

Coro, F. (2019). Estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico-espacial desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. *Revista Orbita Científica, 25*, 105.

Dalcí, M., & Olave, M. (2007). Ecuaciones de primer grado: Su historia. *Acta Latinoamericana de matemática educativa*, 156-161.

Dorsch, F. (1985). *Diccionario de psicología.* Barcelona: HERDER.

Educación, M. d. (1999). *Fundamentos curriculares. Versión divulgativa.* San Salvador: MINED.

Embid, S. (2022). *Una mirada a los números pares, impares e igualdades numéricas ¿Cámo justifican generalizaciones los niños de 9-10 años según su pensamiento algebraico.* Granada: Universidad de Granada.

Espinoza, F. E. (2018). Las variables y su operacionalización en la investigación educativa. Parte I. *Conrado, 14*, 39-49.

Espinoza., J., Lupiañez, J., & Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital Matemática Educación e Internet*.

Falk de Losada, M. (1994). Enseñanzas acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático extraídas de la historia del álgebra. *Boletín de matemáticas, 1*(1), 35-59.

Fernández, J. (2010). Neurociencias y enseñanza de las matemáticas prólogo de algunos retos educativos. *Revista Iberoamericana de educación*, 12.

Font, O. (2017). *Manual sobre estrategias didácticas. UCPEJV.* La Habana: Soporte digital.

Fraga, D. (2009). *Una estrategia didáctica desarrolladora para la asignatura matemática para la secundaria básica y su metodlogía, en la formación del profesor General Integral.* Tesis doctoral, La habana Cuba.

Gaita, R., & Wilhelmi, M. (2019). Desarrollo del razonamiento algebraico elemental mediante recuento de tareas con patrones. *Bolema-Boletin*, 269-289.

García, F. (2008). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio en las relaciones funcionales en la educación secundaria. *Sociedad Española de investigación en matemática, SEIEM*, 71-92.

Godino, J. (2012). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática.* Granada, España: Ministerio de ciencia e innovación.

González Urbaneja, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMa 45*, 17-28.

González, N. R., Chavarro, M., Mojica, C., & Peña, C. Y. (2019). La geometría, eje integrador del pensamiento matemático en educación básica. *Educación y Ciencia, 23*, 495-511.

Graus, M. (2018). Estadística aplicada a la investigación educativa. *Dilemas contemporáneos. Educación, políticas y valores*, 1-32.

Graus, M. (2022). La enseñanza de las matemáticas y el desarrollo del pensamiento en la Educación Básica. *Dilemas contemporáneos: Educación, política y valores, 2*(1), 1-27.

Graus, M. E. (2022). La enseñanza de las matemáticas y el desarrollo del pensamiento en la educación básica. *Dilemas contemporáneos: educación, política y valores*, 1-17.

Graus, M. E., & Pérez, J. J. (2018). *Open journal Systems en Revista: REVISTA DE ENTRENAMIENTO, 1*(3), 01-28.

Guzmán, N. (2013). *Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada.* Tesis, Bogotá Colombia.

Heaviside, O. (1992). La Matemática en Mesopotamia. En M. Kline, *El pensamiento Matemático de la antiguedad a nuestros días* (Primera ed., Vols. 1,2 y 3, págs. 18-34). Madrid, España: Alianza editorial S.A.

Hernández, N., & Cardoso, E. (2010). *Desarrollo del pensamiento algebraico a través del uso de los algeblocks.*

Hernández, R. (2005). *La elaboración de conceptos en la escuela y el desarrollo de los procesos lógicos del pensamiento.* La Habana Cuba: Educación Cubana.

Hidalgo, M. I. (2018). Estrategias metodológicas para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. *Didáctica y educación, 9*(1), 125-132.

Iglesias, S. (1972). *Jean Piaget: Epistemología matemática y psicología.* Cuaderno, Monterrey. Retrieved 20 de septiembre de 2020, from https://cd.dgb.uanl.mx/bitstream/handle/201504211/6313/18546.pdf?sequence=1

Jiménes-Espinosa, A. (2019). La dinámica de la clase de matemática mediada por la comunicación. *Revista de investigación, desarrollo e innovación, 10*(1), 121-134.

Jimenez, -E. A., & Sánchez-Bareño, D. (2019). La práctica pedagógica desde las situaciones a-didácticas. *Desarrollo e innovación, 9*(2), 333-346.

Juarez, M., & Aguilar, M. A. (2018). El método Singapur, propuesta para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas en primaria. *Revista de didáctica de las matemáticas, 98*, 75-86.

Katz, S. (1997). Aportes para un cambio curricular: El lenguaje de la Matemática y la matemática como lenguaje. *Zona Educativa*.

Katz, V. (1997). Algebra its teaching: An historical Survey. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25-38.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. *Handbook of research on mathematic teaching and learning*, 390-419.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kline, M. (1992). La Matemática Egipcia. En M. Kline, *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días* (págs. 35-46). Madrid, España: Alianza Editorial.

Kline, M. (1992). La Matemática en Mesopotamia. En M. Kline, *El pensamiento Matemático de la antiguedad a nuestros días* (Primera ed., Vols. 1,2 y 3, págs. 18-34). Madrid, España: Alianza editorial S.A.

Kline, M. (1992). Los orígenes de la Matemática clásica griega. En M. Kline, *El pensamiento Matemático de la antiguedad a nuetsros días* (págs. 47-87). Madrid, España: Alianza Editorial.

Le Breton, D. (2010). *Cuerpo sensible.* Santiago: Metales pesados.

Leontiev, A. (1975). *El pensamiento. Psicología para maestros.* La Habana, Cuba: Instituto cuabano del libro.

Llorente, P. (1985). *Una presentación de la obra de Julio Rey Pastor en álgebra.* Barcelona: Instituto de estudios Riojanos.

Londoño, J., & Eliécer, A. (2013). La competencia matemática de la representación en estudiantes de Educaci{on B{asica. (págs. 3183-3193). Uruguay: VII SIBEM.

Lozada, J., & Díaz, R. (2018). Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Bolema:Boletim de Educacao*, 57-74.

Martínez, A., & Arrieche, M. (2012). Configuraciones epistémicas de la ecuación de segundo grado, en la antigua civilización china. *Acta Latinoamericana de matemática educativa. A.C*, 85-94.

Mason, J., Stephens, M., & Waltson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematic Education Research Journal*, 10-32.

Maure, L., González, R., Maya, C., & Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Revista inclusiones*, 142-162.

MINED, M. d. (2018). *Programa de estudios para Tercer Ciclo de Educación Básica.* Ministerio de Educación. San Salvador: MINED.

Ministerio de Educación. (2005). *Fundamentos Curriculares de la Educación Nacional.* San Salvador: MINED. https://webquery.ujmd.edu.sv/siab/bvirtual/BIBLIOTECA%20VIRTUAL/LIBROS/F/ADMF0000411.pdf

Ministerio de Educación. (2011, 13 de mayo). *La ley General de Educación.* San Salvador: Diario Oficial. file:///C:/Users/saryc/Downloads/Ley_General_de_Educaci%C3%B3n_2017%20(2).pdf

Ministerio de Educación. (2018). *Programas de Estudio. Tercer Ciclo de Educación Básica.* San Salvador: Ministerio de Educación. https://sveducacionenlinea.com/esmate/programas-de-estudios/tercer-ciclo/

Morales, L. (2002). Las matemáticas en el antiguo egito. *Apuntes de historia de las matemáticas*, 5-13.

Muller, P. Y. (2022). *Una propuesta didáctica de introducción al álgebra a través de la noción de función y sus distintas representaciones.* Universidad de Comahue. Comahue: Repositorio digital institucional .

Muñoz-Catalán, M. C., Yáñez, & C.., J. (2018). *Didáctica de las matemáticas para maestros ene ducación infantil.* Madrid: Ediciones paraninfos.

Nabirahni, D., Evans, B., & Persaud, A. (2019). Al-Khwarizmi (Algorithm) and the development of algebra. *Mathematics Teaching Research Journal, 11*, 13-17.

Navarro, L. (2019). *Estrategia Didáctica para el desarrollo del pensamiento numérico desde el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra en la formación de pregrado del profesor de Matemática.* La Habana, Cuba: UCPEJV.

Ocaña, A., Pulido, D., Gil, S. M., & Zuluaga, S. M. (2019). Cambios en el desempeño de estudiantes de pensamiento matemático desde la evaluación formativa con un banco de preguntas en línea. Changes in the performance of students of a mathematical thinking course through formative assessment with an online questi. *Interdisciplinaria, 36*(1), 7-22.

Ochoviet, C., & Oktac, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raiz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. *Educación matemática, SciELO, 23*(3), 91-121.

Olvera, G. S. (2022). *Desarrollo del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de primaria a través de equivalencias.* México: Universidad autónoma de Querétero.

Ordoñez-Ortega, O., Guadrón-Pinto, E., & Amaya-Franky, G. (2019). Pensamiento variacional mediado con baldosas algebraicas y manipuladores virtuales. *Revista de investigación, desarrollo e innovación*, 347-362.

Orrú, S. E. (2012). Bases conceptuales del enfoque histórico-cultural para la comprensión del lenguaje. *Scielo*.

Oviedo, H. C., & Campos-Arias, A. (2005). Aproximación al uso del coeficiente alfa de Cronbach. An approach to the use of Cronbach´s Alfa. *Revista Colombiana de psiquiatría, 34*(4), 572-580.

Pedagógicas, C. d. (2007). *Modelo de escuela Secundaria Básica.* La habana: ME Ministerio de Educación, UNESCO.

Pedroso, J. (2021). *Didáctica de la matemática en la escuela primaria.* Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Pereyra, L. (2020). *Metodología de la investigación.* México: Klik.

Pérez, A. G., Valdés, M., & Garriga, A. (2019). Estrategia Didáctica para enseñar a planificar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Revista educación, 43*(2), 170-188.

Pérez, G. (1996). *Metodología de la investigación educacional.* La Habana, Cuba: Pueblo y educación.

Pérez, M., Barrera, M., & Socas, M. (2017). Números enteros y expresiones algebraicas. Estudio Bibliográfico. *Formación del profesorado e investigación en Educación matemática, 7*, 299-320.

Petrovski, A. (1986). *Psicología General.* San Salvador: Editorial Universitaria, Universidad de El Salvador.

Piaget, J. (1977). *Seis estudios de psicologìa.* Barcelona: Seix Barral Barcelona.

Piaget, J., & Battro. (1973). *Estudios de psicologìa genètica.* Buenos Aires: Emece.

Pierce, W. (2003). *Metacognition:Study strategies, monitoring and motivation.* Prince Georg`s conmunity college.

Polya, G. (1989). *Cóomo plantear y resolver problemas. How to solve it* (Décimo quinta ed.). México: Editorial Trillas.

Polya, G. (2020). *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. 1). New Jersey: Princeton University Press.

Puga, L. (2015). Metodología activa en la construccion del conocimiento matemático. Active methodology in th e construction of mathematical knowledge. *Sofía*, 291-314.

Quiles-Fernandez, E., Hizmeri, J., & Fajardo, R. H. (2018). Formarse en la investigación educativa: Una comunidad de pensamiento en torno a la escritura de la tesis doctoral. *Qualitative Research in Education, 7*(3), 241-264.

Radford, L. (2006). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa: Relime*, 7-21.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*, 117-133. Retrieved 12 de Abril de 2020, from https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/20052/PNA6%284%29_1.pdf?sequence=1

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 132-150.

Radford, L., & André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemática. *Revista Latinoamericana de matemática educativa: Relime*, 215-250.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en didáctica de la Matemática. Avances de investigación en educación matemática. *Revista de la sociedad española de investigación en educación matemática*, 33-63.

Rico, L., & Sierra, M. (2000). Didáctica de la Matemática e investigación. 77-131.

Rico, L., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L. M., & Socas, M. (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanaza secundaria.* Barcelona: ICE/HORSORI.

Rodríguez, M. M. (2021). Pensamiento matemático y cuentos en educación infantil. *Edma 0-6. Educación matemática en la infancia, 10*(1), 30-44.

Rodríguez, M., Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., & Pochulu, M. (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educacián matemática.* Buenos Aires, Argentina: Ediciones UNG5.

Rodrìguez, S. (2021). Hallazgos neurocientíficos relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de secundaria. Neuroscientific findings related to the development of algebraic thinking in high school students. *Varona digital: Revista Cientìfico metodològica, 73*, 1-8.

Rodrìguez, S., & Ron, J. (2022). Desarrollo del pensamiento algebraico temprano mediante generalización de patrones. Development of thinking early algebraic by pattern generalization. *Òrbita Cientìfica, 28*, 1-10.

Ron, J. (2007). *Una estrategia didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas en las clases de matemática en la educación secundaria básica.* Tesis doctoral, La Habana.

Rosental, & Ludin. (1984). *Diccionario de Filosofía.* (I. T. Frolov, Ed., & O. Razinkov, Trad.) Moscú, Rusia: Editorial Progreso. Retrieved 24 de marzo de 2022, from https://www.filosofia.org/urss/ddf1984.htm

Salvador, A. L. (1996). *Ley General de Educación.* Ley, San Salvador, San Salvador.

Sampieri, R. (2018). *Metodología de la investigación las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* México: McGraw Hill.

Sánchez, M. (2002). La inveestigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. Research on te Development and Teaching of Thinking Skills. *Revista electrónica de investigación educativa, 4*(1), 127-159. Retrieved 30 de enero de 2023, from https://www.redalyc.org/pdf/155/15504108.pdf

Santaló, L. (2001). Los primeros 60 años de la UMA. *Revista de la Unión Matemática de Argentina*, 1-187.

Schoenfeld, A. (1985). *Students Beliefs About Mathematics and Theirs Effects on Mathematical Performance : A questionnaire Analyses .* Chicago: EDgovies.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas* (Vol. 2). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Sibrián, W. (2011). *Propuesta curricular de fundamentos básicos de matemática y física para la carrera de Arquitectura de la Universidad de El Salvador.* San Salvador.

Socas, M. (1999). Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico. *Actas del III SEIEM*, 261-282.

Socas, M. (2011). *Investigación en didáctica de la matemática vía modelos de competencia: Un estudio en relación con el lenguaje algebraico.* San Cristobal de la Laguna: Universidad de la Laguna.

Subirana, V. (2015). *La pedagogía transformadora. Filosofía educativa.* Sans y Torres.

Valeiro, E., Barrionuevo, M., & Villenas, F. (2021). Ordenamientos de registros semióticos en la didáctica del álgebra en la escuela secundaria. *Educación matemática, 33*(2), 173-204.

Valle, A. (2007). *La secundaria Básica en Cuba, sus transformaciones, diferencias y semejanzas con América Latina.* La Habana: Simposio 14.

Valle, A. (2008). *Algunos Modelos importantes en la investigación pedagógica.* La Habana: Material en soporte magnético.

Valvuena, S., Rivera, A., & Padilla, I. (2022). Desarrollo del álgebra temprana en estudiantes con capacidades excepcionales de Educación Básica Primaria. *DIalnet*, 499-504.

Vanegas, Y., D´Ambrosio, U., & Rodríguez, J. (2019). Discurso docente y prácticas matemáticas democráticas en la clase de matemáticas. *REDIMAT, 8*(2), 139-165.

Vargas, R. (2013). Matemáticas y neurociencias: Una aproximación al desarrollo del pensamiento matemático desde una perspectiva biológicas. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 37-46.

Vega, M. (1990). *Introducción a la psicología del pensamiento.* Presentación. Retrieved 3 de octubre de 2022, from http://www4.ujaen.es/~cparedes/Documentos/T1Pens_08_09_al.pdf

Vélez, J. J., Vizcaino, C. F., Alvarez, J. C., & Zurita, I. N. (2020). Aprendizaje basado en problemas como estrategia didáctica para el desarrollo del razonamiento lógico matemático. *Revista Arbitrada Interdisciplinaria Koinonia, 5*(1), 753-772.

Vergel, R. (23 de Febrero de 2012). La zona de emergencia del pensamiento algebraico: una zona largamente ignorada. Bogotá, Colombia.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano.* Tesis, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Vergel, R. (2015). Generación de patrones y formas de pensamiento temprano. *Revista de la universidad de granada*, 193-215.

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.* Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Retrieved 12 de Abril de 2020, from http://funes.uniandes.edu.co/8434/1/sobre_la_emergencia_del_pensamiento_algebraico_temprano0ay_su_desarrollo_en_la_educacion_primaria.pdf

Vigotski, L. (1984). Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. Learning and intellectual development during school age. *Journal for the Study of Education and Development, 7*, 105-116.

Vigotsky, L. (1960). *Historia del Desarrollo de las Funciones Psíquicas Superiores .* La Habana: Científico Técnica.

Vigotsky, L. (2004). *Pensamiento y Lenguaje.* (A. Zayas, Ed.) La Habana, Cuba: Editorial pueblo y educaci{on.

Walkowiak, T. A. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns. . *The Journal of Mathematical Behavior*, 56-71.

Wood, P., & Smith, J. (2018). Investigar en educación. Conceptos básicos y metodología para desarrollar proyectos de investigación. *Education Siglo XXI, 36*(1), 263-266.

Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Zambrano, V. C., & Naranjo, A. (2020). Estrategia didáctica en las matemáticas. *Digital publisher CEIT, 5*(1), 67-77.

Zapatera, A. (2022). La generalización de patrones como herramienta para introducir el pensamiento algebraico en educaión primaria. *Educación MatEMática, 34*(2), 134-152.

Zapatera, L. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones una secuencia de tareas para Educación Infantil y primaria. *Revista de didáctica de las matemáticas, 30*, 1-8.

Zarzar, C. B., & Rojano, T. (Diciembre de 2010). Early algebraic thinking: The role of the environment Logo. *Scielo, 22*(3).

Anexo A. Guía de observación de clase

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
ESCUELA DE POSGRADOS

PROGRAMA DE DOCTORADO INTERDISCIPLINARIO EN EDUCACIÓN

GUIA DE OBSERVACIÓN DE CLASE

C.E: __________________ Turno: ___________Grado: ________

Sexo Profesor/a: _______Fecha: ________________Hora de inicio: __________

Hora de finalización: _________

Actividad del profesor	Actividad del estudiante
Dio a conocer los objetivos de la clase: SI___ NO____ Indicó el o los contenidos a desarrollar en la clase: SI___ NO____ La estructura de la clase fue: Recursos utilizados en el desarrollo de la clase: Con relación a los ejercicios y/o problemas propuestos para hacerlos en la clase: ¿Cuántos se desarrollaron en la clase? ________ ¿Cuántos vinculan el álgebra con las distintas áreas de la matemática?:- ___________ ¿Cuántos incluyen contextos significativos para los estudiantes?: __________ ¿Cuántos incluyen procesos de generalización numérica o algebraica? ____________ ¿Cuántos incluyen codificación o decodificación de símbolos algebraicos? _________ El profesor lee el ejercicio en voz alta: SI___ NO_____ El profesor orienta la solución: SI___ NO_____ El profesor resuelve el ejercicio: SI___ NO_____ El profesor explica la solución: SI___ NO_____	En la actividad algebraica el estudiante: Lee correctamente expresiones algebraicas Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: ________ Opera correctamente expresiones algebraicas Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: ________ Da significados a variables de manera correcta Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: ________ Traduce correctamente expresiones del lenguaje natural al algebraico: Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____ Traduce correctamente expresiones del algebraico al natural: Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____ Muestra dominio en la aplicación de algoritmos algebraicos Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____ Resuelve correctamente ejercicios matemáticos Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____ Resuelve correctamente problemas matemáticos Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____ Utiliza fácilmente el contenido matemático en los ejercicios propuestos:

<table>
<tr>
<td rowspan="2">El profesor utiliza ejercicios donde se necesita de ampliación y de reducción ______de expresiones
La complejidad con respecto a la clase impartida es:
De menor nivel: ________ igual que la clase: _________ o de mayor complejidad a la clase: ___________
Brinda oportunidad para que los estudiantes reformulen o inventen sus propios problemas: SI___ NO____
Se analizan diferentes soluciones sean o no correctas: SI___ NO____
Brinda oportunidades que promueven la participación de los estudiantes en el desarrollo de la clase de manera individual: SI___ NO____ y de manera grupal:
SI___ NO____
Pasa lista de asistencia: SI___ NO____
Revisa tareas: SI___ NO____
Asigna nuevas tareas: SI___ NO____
Acciones que evidencian interés en el aprendizaje de sus estudiantes:

Qué actividades de retroalimentación se desarrollaron en la clase:</td>
<td>Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____
Encuentran y describe generalidades en la solución de un problema o ejercicio matemático
Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____
Intercambia soluciones diferentes
Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____
Reformula y resuelve ejercicios y/o problemas matemáticos a partir de otros conocidos
Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____
Inventa y resuelve sus propios ejercicios o problemas matemáticos: Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: ___</td>
</tr>
<tr>
<td>Participa frente a sus compañeros y/o en pizarra de manera voluntaria explicando cómo ha llegado a las soluciones que plantea:
Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____
Cuestiona las soluciones de sus compañeros
Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____
Tiene una relación muy cordial con sus compañeros:
Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____
Tiene una relación muy cordial con su profesor de matemática:
Todos: ______ Algunos: ______Ninguno: _____</td>
</tr>
</table>

Observaciones:

____

Anexo B. Cuestionario dirigido a estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
ESCUELA DE POSGRADOS

PROGRAMA DE DOCTORADO INTERDISCIPLINARIO EN EDUCACIÓN

CUESTIONARIO DIRIGIDO A: ESTUDIANTES DE TCEB DEL MUNICIPIO DE SANTA ANA

OBJETIVO: Examinar la opinión de los estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana, referente al desarrollo del pensamiento algebraico y sus expectativas sobre la manera en que pueden aprender los conceptos algebraicos.

Indicación: Estimado estudiante se te solicita llenar este cuestionario marcando con un cheque el espacio que según tu opinión responde a la interrogante planteada en cada numeral, o escribiendo la respuesta si así fuere el caso.

Datos personales

Centro Educativo: ____;

Zona: 1. Urbana: ____2. Rural: ____; Tipo Institución: 1. Pública____ 2. Privada ____ Sexo: 1. Masculino _____ 2. Femenino ___; Edad en años: ____; Grado: _____

¿Qué entiendes por “pensamiento algebraico?

No.	Con relación a la intervención de tu profesor o profesora en el desarrollo de la clase de matemática	Siempre	Casi siempre	Algunas veces	Casi nunca	Nunca
1	Orienta actividades que te motivan a participar frente al grupo en pizarra					
2	Te brinda la oportunidad para que expreses tus soluciones					
3	Te proporciona ayuda extra cuando la necesitas, para guiarte y que encuentres por ti mismo la solución					
4	Te da la oportunidad de crear tus propios problemas o ejercicios matemáticos					
5	Crea un ambiente agradable entre todos los estudiantes					
6	Vincula el contenido de clase con contenidos anteriores					
7	Enfatiza la solución de ejercicios y problemas matemáticos					

8	Ante un problema promueve la discusión de los diferentes procedimientos pensados por los estudiantes ya sea que lleven o no a la solución					
9	Utiliza ejercicios vinculados con la vida, la sociedad y la práctica					
10	Propone ejercicios y problemas que vinculen el algebra con las distintas áreas de la matemática					
11	Propone ejercicios donde se necesite ampliar una expresión algebraica para su solución					

No.	**Con relación a tu intervención en la clase de matemática en el Centro Escolar donde estudias**	**Siempre**	**Casi siempre**	**Algunas veces**	**Casi nunca**	**nunca**
12	Te gusta participar frente al grupo					
13	Muestras disposición a participar en clase					
14	Puedes darles significado a las expresiones algebraicas					
15	Te es fácil traducir expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico					
16	Te es fácil utilizar el contenido matemático en los ejercicios que te proponen					
17	Te resulta fácil encontrar generalidades en la solución de un problema o ejercicio matemático					
18	Tienes una relación muy cordial con tu profesor de matemática					
19	Te gusta recibir la clase de matemática					
20	Tu relación con tus compañeros es muy buena					
21	Asistir a la escuela es una experiencia fascinante para ti					
22	Cuando participas en pizarra o de manera virtual, explicas lo que pensaste para llegar a esa solución					
23	Cuando un compañero en pizarra o de manera virtual presenta una solución diferente a la tuya, expones tu solución					
24	Recibir tus clases de manera virtual es una experiencia fascinante para ti					

Anexo C. prueba pedagógica a estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
ESCUELA DE POSGRADOS

PROGRAMA DE DOCTORADO INTERDISCIPLINARIO EN EDUCACIÓN

PRUEBA PEDAGÓGICA DIRIGIDA A: ESTUDIANTES DE TCEB DEL MUNICIPIO DE SANTA ANA

OBJETIVO: Conocer el estado actual del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana.

Indicación: estimado estudiante gracias por participar en esta actividad, esperando que te diviertas y desarrolles tu creatividad, se te solicita que leas cada situación que se te presenta y respondas las preguntas en los espacios en blanco que allí aparecen. Se añade una hoja de papel bond para que hagas los cálculos o procesos que necesites.

Datos personales
Centro Educativo: ________________________________; Zona: 1. Urbana: ____2. Rural: ____; Tipo Institución: 1. Pública____ 2. Privada ____ Sexo: 1. Masculino _____ 2. Femenino ___; Edad en años: ____; Grado: _____
Nombre: ____

Situación 1:
Dinora estaba sentada en una silla a un costado de su casa, con un libro, un cuaderno y un lapicero en la mano. Estaba de mal humor porque tenía que hacer los deberes. — ¡Inútiles matemáticas! — se quejó en voz alta—. ¡Las matemáticas no sirven para nada! No se había dado cuenta que detrás de unos matorrales estaba un curioso personaje, larguirucho, de rostro melancólico y vestido a la antigua; preguntó a Dinora ¿por qué no te gustan las matemáticas? Porque no me sirven, le contestó. ¿Cuántos años tienes Dinora? Diez contestó. Dinora sostuvo una conversación con aquel personaje hasta convencerse que estaba equivocada respecto de las matemáticas. De acuerdo con esta historia, contesta las siguientes preguntas:

1. Hace cinco años ¿Cuál era la edad de Dinora?: ______
2. ¿Qué valor resulta si a 50 le restas la edad de Dinora multiplicada por cuatro? _______.
3. Si a la edad de Dinora le llamas “d” ¿Cómo representas la expresión de la pregunta anterior?
4. Miguel hermano de Dinora es cinco años mayor que ella. Llámale “m” a la edad de Miguel, ¿Cómo escribes “m” utilizando la letra “d”? _______________.
5. El papá de Dinora se llama Pedro, sea “p” la edad de Pedro y es el doble de la edad de Dinora más la edad de Miguel, expresa “p” utilizando las letras “d” y “m”. __________
6. Si se te pide que encuentres el valor de “p” argumenta ¿Cómo lo encontrarías?
7. La amiga de Dinora se llama Lucía y tiene dos años menos que Miguel. Escribe una expresión que indique los años de Lucía utilizando la información de los años de Dinora: __
8. Si a toda la historia se le da un 100% ¿Cuánto de ese porcentaje se lo asignas a la matemática que se incluye en la historia? ___________ ¿Por qué crees que Dinora cambio de opinión respecto de las matemáticas?

Situación 2:
Cuando Lupita va a la escuela su mamá le pone como refrigerio una naranja, ella se junta con Pamela a quien su mamá le pone el doble de naranjas que a Lupita. Ronald lleva el doble de naranjas que Pamela. A Francisco y Ariel les gusta ganar dinero mientras van a estudiar, así que venden naranjas y manzanas a sus compañeros que no llevan. Francisco lleva el doble de naranjas que las que llevan

Ronald y Pamela juntos, más seis manzanas, Ariel lleva ocho naranjas más que Francisco y el doble de manzanas que Francisco.
Utiliza algunas letras para escribir una expresión que represente las frutas:

9. Que lleva Pamela: ___________________________________
10. Que vende Francisco: __________________________________
11. Francisco vende cada naranja a \$0.20 y cada a manzana a \$0.30 y vende todo lo que lleva ¿Cuánto dinero recoge?
12. Ariel vende las naranjas al mismo precio que Francisco y recoge el doble de dinero que Francisco más cuarenta centavos, ¿A qué valor vendió las manzanas?

Situación 3:

Bryan es un estudiante de Tercer Ciclo que estudia en un Centro Escolar en el turno matutino, por la tarde trabaja en un taller de reparación de bicicletas para pagar sus pasajes y sus refrigerios en la escuela, los clientes dejan sus bicicletas para que se las reparen entre los tres días siguientes. Bryan es el encargado de reparar las llantas de las bicicletas. Si en el taller hay un cierto número de bicicletas también hay un cierto número de llantas. Completa la tabla y ayuda a Bryan a contestar las siguientes preguntas

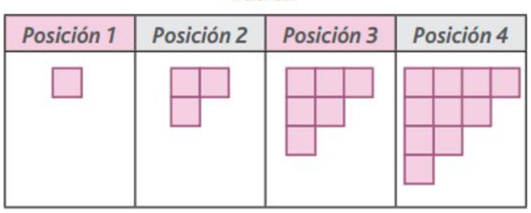
Ruedas de bicicletas	
Cantidad de bicicletas	Cantidad de ruedas
1	2
2	4
3	
4	

13. ¿Cuántas ruedas hay en tres bicicletas? ___
14. ¿Cuántas ruedas hay en cuatro bicicletas?
15. En una semana llegaron muchos clientes y Bryan revisó 48 llantas, ¿Cuántas bicicletas hubo en el taller durante esa semana? _____.
16. En un mes se reparó una cierta cantidad de bicicletas, escribe una expresión que indique el número de llantas que revisó Bryan durante ese mes______________________.
17. El salario de Bryan se calcula de acuerdo con a la cantidad de llantas que repara más un bono extra por buena atención al cliente. ¿Qué significado le das a la expresión $S = Cll + BA$?.
18. En una semana el salario de Bryan fue \$22.5 según la relación $S = Cll + BA$, si se sabe que gana \$0.5 por cada llanta reparada más un bono de \$0.5 por buena atención al cliente ¿Cuántas bicicletas reparó, si se sabe que a todos los clientes atendió bien y se asume que reparó las dos llantas de cada bicicleta?

Situación 4:

Observa la siguiente secuencia de figuras y completa la tabla de valores que relaciona el número de cuadrados pequeños utilizados en la figura con la posición dada.

Patrón



Tabla

posición	cantidad de cuadrados
1	
2	
3	
4	
5	
6	

19. Observa la siguiente secuencia de figuras y completa la tabla de valores que relaciona el número de cuadrados pequeños utilizados en la figura con la posición dada.
20. Describe con tus palabras la secuencia que se utiliza para crear las figuras en cada posición de la tabla de la izquierda.
21. ¿Cuántos cuadrados pequeños tendrá la figura de la posición 10?
22. ¿Cómo supiste cuántos cuadrados pequeños tendrá la figura de la posición 10?
23. Intenta escribir una expresión que represente el número de cuadrados que tendría la figura en la posición n.

Anexo D. guía de entrevista dirigida a profesores que laboran en TCEB en el municipio de Santa Ana.

GUÍA DE ENTREVISTA DIRIGIDA A PROFESORES DE MATEMÁTICA QUE LABORAN EN TCEB DEL

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
ESCUELA DE POSGRADOS

PROGRAMA DE DOCTORADO INTERDISCIPLINARIO EN EDUCACIÓN

MUNICIPIO DE SANTA ANA

Introducción. Saludo. Estimado profesor con el objeto de indagar sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB, se le solicita responder a cada interrogante según su opinión, las cuales serán procesadas para tal fin. Se le garantiza confidencialidad, se le solicita permiso para grabación de audio y se le asegura el compromiso de socialización de los resultados de la investigación.

Objetivo: Diagnosticar la forma en que el profesor orienta la clase para desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes.

Datos sociodemográficos
Centro Educativo: ________________________; Zona: 1. Urbana: ____2. Rural: ____; Tipo Institución: 1. Pública____ 2. Privada ____ Sexo: 1. Masculino _____ 2. Femenino ___; Grado que imparte: _____años de experiencia Laboral: ______ años de experiencia en la especialidad: ___Titulación: ________________

1. En sus palabras ¿Cómo define pensamiento algebraico?
2. De acuerdo con su experiencia profesional ¿Qué actividades propician el desarrollo del pensamiento algebraico en sus estudiantes?
3. ¿Qué tipo de actividades considera pertinentes incluir en la clase para desarrollar en los estudiantes la habilidad de codificar y decodificar símbolos algebraicos?
4. ¿Qué instrucciones da a sus estudiantes para que desarrollen habilidades de generalización y de modelización?
5. ¿Qué orientaciones brinda a sus estudiantes para el descubrimiento de conjeturas en la solución de un problema matemático?
6. ¿Cuáles son las dificultades que con mayor frecuencia presentan los estudiantes en la solución de problemas matemáticos relacionados con el álgebra?
7. ¿Qué elementos toma en cuenta para evaluar la capacidad de los estudiantes en la solución de problemas matemáticos relacionados con el álgebra?
8. ¿De qué fuentes adquiere los ejercicios o problemas que propone a sus estudiantes para que desarrollen en las clases o en las tareas?
9. Explique si en el desarrollo de las clases provee la oportunidad a los estudiantes para que inventen sus propios ejercicios o problemas matemáticos.
10. ¿Qué tipo de situaciones problemáticas propone en el desarrollo de las clases?
11. Durante el desarrollo de las clases explique el tipo de actividades didáctico-pedagógicas en las que participan sus estudiantes y qué nivel alcanza tal participación ¿Se evidencia participación consciente, voluntaria y razonada por parte de los estudiantes?
12. Explique, a manera de ejemplo, cómo es el desarrollo de una clase normal
13. Describa cómo se desarrollan comúnmente las relaciones interpersonales en la clase
14. ¿Qué opinión le merece el uso de la tecnología con relación al desarrollo del pensamiento algebraico en sus estudiantes?
15. ¿Qué limitaciones profesionales posee para orientar a sus estudiantes hacia el desarrollo del pensamiento algebraico?

Gracias por sus opiniones seguramente tributarán a la mejora del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB
Fecha___________ Hora de inicio: _______ Hora de finalización: ______Entrevistador: _____

Anexo E. Guía de revisión de libro de texto, programa de matemática de TCEB y documentos normativos de la educación matemática

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
ESCUELA DE POSGRADOS

PROGRAMA DE DOCTORADO INTERDISCIPLINARIO EN EDUCACIÓN

GUÍA DE REVISIÓN DE LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA DE TERCER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA

OBJETIVO: Identificar las unidades con sus respectivos contenidos donde se trabaja el área de álgebra para analizar su metodología, recursos, evaluación y algunas habilidades y procedimientos asociados con el desarrollo del pensamiento algebraico

Grado: ________

1. Número de unidades que tiene el programa
2. Número de unidades de contenidos algebraicos
3. De las unidades con contenidos algebraicos determinar:
   - 3.1 Contenidos: Forma de introducir los contenidos
     Cuantos ejercicios relacionan el algebra con la aritmética, con la geometría, si los ejemplos resueltos utilizan una sola vía u otras vías de solución, aunque no sean las que se están trabajando en ese momento, se evidencian los estratos y la caracterización del pensamiento algebraico
   - 3.2 Metodología: Describir la estructura de la clase y la forma de abordar los contenidos
   - 3.3 Recursos o medios de enseñanza
   - 3.4 Formas de evaluación
   - 3.5 Habilidades y procedimientos asociados con el desarrollo del pensamiento algebraico.

Anexo F. Guía de entrevista al jefe regional de occidente

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
ESCUELA DE POSGRADOS

PROGRAMA DE DOCTORADO INTERDISCIPLINARIO EN EDUCACIÓN

GUÍA DE ENTREVISTA.

DIRIGIDA AL JEFE REGIONAL DE OCCIDENTE DEL MINED

Introducción. Saludo. Estimado jefe Regional de Occidente con el objeto de indagar sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de TCEB, se le solicita responder a cada interrogante según su opinión, las cuales serán procesadas para tal fin. Se le garantiza confidencialidad, se le solicita permiso para grabación de audio y se le asegura el compromiso de socialización de los resultados de la investigación

Objetivo: Diagnosticar la forma en que el profesor orienta la clase para desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes.

Datos sociodemográficos

Tipo Instituciones que supervisa: 1. Pública____ 2. Privada ____ Sexo: 1. Masculino _____ 2. Femenino __ años de experiencia Laboral en el cargo: ______ Titulación: ________________

1. En sus palabras ¿Qué entiende por pensamiento algebraico?
2. De acuerdo con su experiencia profesional ¿Qué actividades sugiere para contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes?
3. ¿Qué opinión le merece el uso de material concreto para enseñar Matemática en Tercer Ciclo de Educación Básica?
4. ¿El proyecto ESMATE incluye el uso de material concreto para enseñar matemática en Tercer Ciclo de Educación Básica?
5. Según su supervisión al trabajo docente ¿Cómo es la respuesta del profesorado de cara al proyecto ESMATE?
6. ¿Qué aspectos cree necesarios actualizar o agregar en los documentos rectores de la Educación Matemática en este país?
7. ¿Qué valoración hace del aprendizaje en la modalidad virtual?
8. ¿Quiere agregar algún detalle que no le haya preguntado y que se relacione con el trabajo de esta disciplina?

   Gracias por sus opiniones seguramente tributarán a la mejora del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de Tercer Ciclo de Educación Básica

Fecha___________ Hora de inicio: _______ Hora de finalización:

Anexo G. Prueba pedagógica de salida dirigida a estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana

Universidad de El Salvador
Hacia la libertad por la cultura

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
ESCUELA DE POSGRADOS

PROGRAMA DE DOCTORADO INTERDISCIPLINARIO EN EDUCACIÓN

PROGRAMA INTERDISCIPLINARIO DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

PRUEBA PEDAGÓGICA DE SALIDA DIRIGIDA A: ESTUDIANTES DE TERCER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA DEL MUNICIPIO DE SANTA ANA

OBJETIVO: conocer el estado de salida del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de Tercer Ciclo de Educación Básica del municipio de Santa Ana después de la puesta en práctica de la estrategia didáctica.

Indicación: estimado estudiante gracias por participar en esta actividad, esperando que te diviertas y desarrolles tu creatividad. se te solicita que leas cada situación que se te presenta y respondas las preguntas en los espacios en blanco que allí aparecen. Se añade una hoja de papel bond para que hagas los cálculos o procesos que necesites

Datos personales

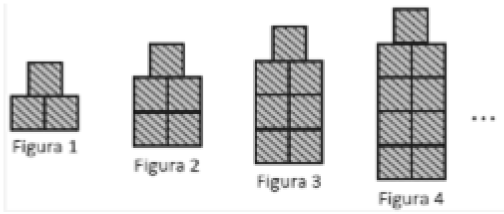
Centro Educativo: ________________________; Zona: 1. Urbana: ____2. Rural: ____; Tipo Institución: 1. Pública____ 2. Privada ____ Sexo: 1. Masculino _____ 2. Femenino ___; Edad en años: ____; Grado: _____

Nombre: ____

Resolver los siguientes ejercicios dejando constancia de todos los procesos desarrollados

1. Reducir términos semejantes: $x + 2x - 4x$
2. Reducir términos semejantes: $-2x + 4x - 6 + 7$
3. Reducir términos semejantes: $-3x + 2y + 2x + 5y - 4x - 6y + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}$
4. $3(5x - 4)$
5. $\frac{-6(2x-6)}{2} - 18$
6. $\frac{4(-5x+6)}{2} - 5(7x - 3)$
7. De: $5a - 2b - 6a + 5b$ Restar: $4a - 6b + \frac{1}{3}a + \frac{2}{5}b + \frac{1}{6}$
8. Restar: $-3x + 2y - \frac{2}{7}$ De: $6x + 8y + \frac{5}{7}$
9. Representa la igualdad matemática de la expresión que está en la siguiente balanza, luego encuentre el valor de x que hace cierta la igualdad, comprueba el resultado.

10. Observa la siguiente figura



a) Dibuja la figura número 5
b) Describe con tus palabras la regla que se utiliza para generar esta secuencia de figuras
c) Escribe en la siguiente tabla la cantidad de cuadraditos que tiene cada figura

Figura No.	1	2	3	4	5	6	7	…	n
No. Cuadraditos	3	5							

a) ¿Cuántos cuadraditos tendrá la figura número 24?

11. Ejercicio creativo: Escribe una pequeña historia donde utilices algunas variables de tu elección, puede ser de comprar o vender, de dar vueltos o de otra situación que tú decidas donde utilices expresiones algebraicas.

Anexo H. Cuestionario de participación dirigido a estudiantes de TCEB del municipio de Santa Ana

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
ESCUELA DE POSGRADOS

PROGRAMA DE DOCTORADO INTERDISCIPLINARIO EN EDUCACIÓN

CUESTIONARIO DE PARTICIPACIÓN DIRIGIDO A: ESTUDIANTES DE TERCER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA DEL MUNICIPIO DE SANTA ANA

OBJETIVO: Examinar la opinión de los estudiantes de Tercer Ciclo de Educación Básica del municipio de Santa Ana, referente a su participación en las clases de Matemáticas.

Indicación: Estimado estudiante se te solicita llenar este cuestionario marcando con un cheque el espacio que según tu opinión responde a la interrogante planteada en cada numeral, o escribiendo la respuesta si así fuere el caso.

Datos personales
Centro Educativo: ____; Zona: 1. Urbana: ____2. Rural: ____; Tipo Institución:
1. Pública____ 2. Privada ____ Sexo: 1. Masculino _____ 2. Femenino ___; Edad en años: ____; Grado: _____

No.	**Con relación a tu intervención en la clase de matemática en el Centro Escolar donde estudias**	**Siempre**	**Casi siempre**	**Algunas veces**	**Casi nunca**	**Nunca**
1	Después de resolver un ejercicio compartes tus soluciones con tus profesores					
2	Compartes tus soluciones con tus compañeros					
3	Después de resolver un ejercicio te cuestionas sobre la manera en que lo resolviste					
4	Inventas ejercicios o problemas matemáticos					
5	Te gusta participar frente al grupo					
6	Muestras disposición a participar en clase					

7. Explica de qué manera puedes mejorar tu desempeño en Matemática ___________________
8. Qué es lo que fue más fácil de aprender ____
9. Que fue lo que más se te dificultó aprender ____

Anexo I. fotografÍas de la implementación de la estrategia didáctica C.E. Dr. Salvador Ayala

Fuente: Elaboración propia

Anexo J. Forma de calificación de la prueba pedagógica de entrada

Situación 1: dimensiones: indeterminancia, analiticidad y designación simbólica

Dinora estaba sentada en una silla a un costado de su casa, con un libro, un cuaderno y un lapicero en la mano. Estaba de mal humor porque tenía que hacer los deberes. — ¡Inútiles matemáticas! — se quejó en voz alta—. ¡Las matemáticas no sirven para nada! No se había dado cuenta que detrás de unos matorrales estaba un curioso personaje, larguirucho, de rostro melancólico y vestido a la antigua; preguntó a Dinora ¿por qué no te gustan las matemáticas? Porque no me sirven, le contestó. ¿Cuántos años tienes Dinora? Diez contestó. Dinora sostuvo una conversación con aquel personaje hasta convencerse que estaba equivocada respecto de las matemáticas. De acuerdo con esta historia, contesta las siguientes preguntas:

Dimensión: Indeterminancia	**Indicador**	**Puntaje asignado según respuesta**	
		Correcta (1.0)	**Incorrecta (0.0)**
Miguel hermano de Dinora es cinco años mayor que ella. Llámale “m” a la edad de Miguel ¿Cómo escribes “m” utilizando la letra “d”?	Identifica las relaciones que guardan las variables.	Identificó las relaciones que guardan las variables.	No identificó correctamente las relaciones que guardan las variables, o no contestó.
El papá de Dinora se llama Pedro, sea “p” la edad de Pedro y es el doble de la edad de Dinora más la edad de Miguel, expresa “p” utilizando las letras “d” y “m”	Identifica las relaciones que guardan las variables.	Identificó las relaciones que guardan las variables.	No identificó correctamente las relaciones que guardan las variables, o no contestó.
La amiga de Dinora se llama Lucía y tiene dos años menos que Miguel. Escribe una expresión que indique los años de Lucía utilizando la información de los años de Dinora según las relaciones descritas en la pregunta 2	Identifica las relaciones que guardan las variables.	Identificó las relaciones que guardan las variables.	No identificó correctamente las relaciones que guardan las variables, o no contestó.
Si a toda la historia se le da un 100% ¿Cuánto de ese porcentaje se lo asignas a la matemática que se incluye en la historia?	Identifica cómo la Matemática emerge en un trasfondo histórico cultural de la interacción social.	Escribió cualquier porcentaje.	No contestó.
Dimensión: Analiticidad	**Indicador**	**Correcta (1.0)**	**Incorrecta (0.0)**
Si Dinora hoy tiene diez años. Hace cinco años ¿Cuál era la edad de Dinora?	Muestra dominio en el uso de algoritmos.	Contestó que la edad de Dinora es 5 años.	Contesto que la edad de Dinora es diferente a 5 años, o no contestó.

¿Qué valor resulta si a 50 le restas la edad de Dinora multiplicada por cuatro?	Muestra dominio en la aplicación de algoritmos algebraicos.	Si responde 10.	Si responde un valor diferente a 10, o no contestó.
Si se te pide que encuentres el valor de “p” de la pregunta anterior argumenta ¿Cómo lo encontrarías?	Descubre y establece conjeturas en la solución de un problema. Opera con objetos del campo algebraico utilizando su sintaxis.	Explicó cómo encontró el valor de p.	No explicó cómo encontró el valor de p.
Dimensión: Designación simbólica	**Indicador**	**Correcta (1.0)**	**Incorrecta (0.0)**
Si a la edad de Dinora le llamas “d” ¿Cómo representas la expresión “a 50 le restas la edad de Dinora multiplicada por cuatro”?	Codificación y decodificación de símbolos	Escribió la expresión: $50 - dx4$	No escribió la expresión: $50 - dx4$, o no contestó.

Situación 2: subdimensiones: indeterminancia y analiticidad

Cuando Lupita va a la escuela su mamá le pone como refrigerio una naranja, ella se junta con Pamela a quien su mamá le pone el doble de naranjas que a Lupita. Ronald lleva el doble de naranjas que Pamela. A Francisco y Ariel les gusta ganar dinero mientras van a estudiar, así que venden naranjas y manzanas a sus compañeros que no llevan. Francisco lleva el doble de naranjas que las que llevan Ronald y Pamela juntos, más seis manzanas, Ariel lleva ocho naranjas más que Francisco y el doble de manzanas que Francisco.

Dimensión: Indeterminancia	**Indicador**	**Puntaje asignado según respuesta**	
		Correcta (1.0)	**Incorrecta (0.0)**
Utiliza algunas letras para escribir una expresión que represente las futas que lleva Pamela	Asigna significado a situaciones no determinadas	Escribió una expresión indicativa de las naranjas que lleva Pamela	No escribió una expresión indicativa de las Naranjas que lleva Pamela o no contestó
Utiliza algunas letras para escribir una expresión que represente las futas que vende Francisco	Asigna significado a situaciones no determinadas	Escribió una expresión indicativa de las frutas que lleva Francisco	No escribió una expresión indicativa de las frutas que lleva Francisco o no contestó
Subdimensión: Analiticidad	**Indicador**	**Correcta (1.0)**	**Incorrecta (0.0)**

Francisco vende cada naranja a $0.20 y cada a manzana a $0.30 y vende todo lo que lleva ¿Cuánto dinero recoge?	*Muestra dominio en la aplicación de algoritmos algebraicos *Opera con objetos del campo algebraico utilizando su sintaxis	Francisco recoge $4.2 Escribió $4.2	Escribió una cantidad diferente de $4.2 o no contestó
Ariel vende las naranjas al mismo precio que Francisco y recoge el doble de dinero que Francisco más cuarenta centavos, ¿A qué valor vendió las manzanas?	*Muestra dominio en la aplicación de algoritmos algebraicos *Opera con objetos del campo algebraico utilizando su sintaxis *Resuelve problemas complejos	Ariel vendió las manzanas a un precio de $0.40	Escribió una cantidad diferente de $0.4 o no contestó

Situación 3: Dimensiones: analiticidad y designación simbólica

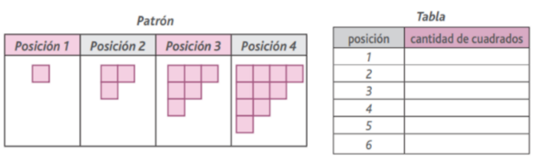
Bryan es un estudiante de Tercer Ciclo que estudia en un Centro Escolar en el turno matutino, por la tarde trabaja en un taller de reparación de bicicletas para pagar sus pasajes y sus refrigerios en la escuela, los clientes dejan sus bicicletas para que se las reparen entre los tres días siguientes. Bryan es el encargado de revisar las llantas de las bicicletas. Si en el taller hay un cierto número de bicicletas ¿Cuántas ruedas de bicicletas tiene que revisar Bryan? Hizo algunos cálculos considerando que cada bicicleta tiene dos ruedas. Ayuda a Bryan a contestar la siguiente pregunta:

Dimensión: analiticidad	**Indicador**	**Puntaje asignado según respuesta**	
		Correcta (1.0)	**Incorrecta (0.0)**
¿Cuántas ruedas hay en tres bicicletas?	Muestra dominio en el uso y aplicación de algoritmos	Escribe: 6	Escribe un número diferente a 6 o no contestó
¿Cuántas ruedas hay en cuatro bicicletas?	Muestra dominio en el uso y aplicación de algoritmos	Escribe: 8	Escribe un número diferente a 8 o no contestó
En una semana llegaron muchos clientes y Bryan revisó 48 llantas, ¿Cuántas bicicletas hubo en el taller durante esa semana?	Muestra dominio en el uso de algoritmos	Escribe: 24	Escribe un número diferente a 24 o no contestó

En una semana el salario de Bryan fue \$22.5 según la relación $S = Cll + BA$, si se sabe que gana \$0.5 por cada llanta reparada más un bono de \$0.5 por buena atención al cliente ¿Cuántas bicicletas reparó, si se sabe que cada cliente lleva una bicicleta y le repara las dos llantas y además que a todos los clientes atendió bien?	Resuelve problemas complejos	Escribe: 15	Escribe un número diferente de 15 o no contestó
Subdimensión: Designación simbólica	**Indicador**	**Correcta (1.0)**	**Incorrecta (0.0)**
En un mes se reparó una cierta cantidad de bicicletas, escribe una expresión que indique el número de llantas que revisó Bryan durante ese mes	Identifica la variable en una situación Expresa generalidad algebraicamente Codifica símbolos algebraicos	escribió una expresión indicativa del número de llantas que revisó Bryan durante ese mes	No escribió una expresión indicativa del número de llantas que revisó Bryan durante ese mes o no contestó
El salario de Bryan se calcula de acuerdo con a la cantidad de llantas que repara más un bono extra por buena atención al cliente. ¿Qué significado le das a la expresión $S = Cll + BA$?	Decodifica símbolos algebraicos	Escribió una frase que indique que la “ s" representa al salario de Bryan y que “Cll" es la cantidad de llantas que reparó más o sumándole "BA" que indica buena atención al cliente	No escribió una frase indicativa de la expresión o no contestó

Situación 4: Dimensiones: designación simbólica

Observa la siguiente secuencia de figuras y completa la tabla de valores que relaciona el número de cuadrados pequeños utilizados en la figura con la posición dada.

Dimensión: designación simbólica	**Indicador**	**Puntaje asignado según respuesta**	
		Correcta (1.0)	**Incorrecta (0.0)**
Observa la siguiente secuencia de figuras y completa la tabla de valores que relaciona el número de cuadrados pequeños utilizados en la figura con la posición dada 	Expresa generalidad observada en una secuencia numérica, figural (geométrica) y algebraica.	Coloca en los espacios de la tabla de la derecha en orden de arriba hacia abajo: 1, 3, 6, 10, 15, 21.	Coloca otros números o no contestó. Los primeros cuatro números se colocan por observación directa, en cuyo caso se pudiera dar medio punto si se coloca solo esos de manera correcta.
Describe con tus palabras la secuencia que se utiliza para crear las figuras en cada posición de la tabla de la izquierda	Expresa generalidad observada en una secuencia numérica, figural (geométrica) y algebraica.	Alude a aumentar una diagonal con un cuadrado pequeño más que la diagonal anterior.	No describe correctamente el patrón de formación de la figura o no contestó.
¿Cuántos cuadrados pequeños tendrá la figura de la posición 10?	Realiza la contracción semiótica de una secuencia numérica figural (geométrica) o algebraica.	Escribe: 55	Escribe un número distinto a 55 o no contestó.
¿Cómo lo supiste cuántos cuadrados pequeños tendrá la figura de la posición 10?	Expresa generalidad observada en una secuencia numérica, figural (geométrica) y algebraica	Observó que cada diagonal que se aumenta tiene el número de cuadrados pequeños igual al número de figura,	No explica de manera correcta el patrón que sigue la secuencia o no contestó.

Dimensión: designación simbólica	**Indicador**	**Puntaje asignado según respuesta**	
		Correcta (1.0)	**Incorrecta (0.0)**
		entonces se genera la secuencia: $1+2+3+..+10=55$	
Intenta escribir una expresión que represente el número de cuadrados que tendría la figura en la posición n	Identifica la expresión simbólica de una secuencia numérica, figural (geométrica) o algebraica.	Al ser la figura "n" se tendrá la suma de 1 hasta n. El estudiante podría escribir la expresión: $1+2+3+\cdots+n$ como un intento por generalizar y en un nivel alto de desarrollo de pensamiento descubriría la expresión simbólica $\frac{n(n+1)}{2}$ o $\frac{n^2+n}{2}$	No escribió una expresión que represente correctamente el patrón de formación de la secuencia o no contestó.

Resumen de dificultades en la prueba

Situación No.	Indeterminancia	Analiticidad	Designación simbólica	Total
1	4	3	1	8
2	2	2	0	4
3	0	4	2	6
4	0	0	5	5
Total	6	9	8	23