UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
INGENIERIA ELECTRICA

TEMA DE TRABAJO DE GRADUACION

"Investigación de la Aplicación de los Métodos Matemáticos de Optimización no Lineales a la Solución del Flujo de Carga en Sistemas de Potencia"

PRESENTADO POR

EDGAR HUMBERTO DE ASIS ESCALANTE

NELSON ROLANDO MUÑOZ NAJARRO

PARA OPTAR AL TITULO DE

INGENIERO ELECTRICISTA

CIUDAD UNIVERSITARIA, MARZO DE 1999

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR :

DR. JOSE BENJAMIN LOPEZ GUILLEN

SECRETARIO GENERAL :

LIC. ENNIO ARTURO LUNA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO :

ING. JOAQUIN ALBERTO VANEGAS AGUILAR

SECRETARIO a.i. :

ING. OSCAR EDUARDO MARROQUIN HERNANDEZ

ESCUELA

DIRECTOR :

ING. JOSE ROBERTO RAMOS

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
INGENIERIA ELECTRICA

TRABAJO DE GRADUACION PREVIO A LA OPCION DE:

INGENIERIA ELECTRICA

TITULO :

"Investigación de la Aplicación de los Métodos Matemáticos de Optimización no Lineales a la Solución del Flujo de Carga en Sistemas de Potencia"

PRESENTADO POR :

EDGAR HUMBERTO DE ASIS ESCALANTE

NELSON ROLANDO MUÑOZ NAJARRO

TRABAJO DE GRADUACION APROBADO POR:

COORDINADOR :

ING. MARVIN JORGE HERNANDEZ

ASESOR :

ING. RICARDO COLORADO

SAN SALVADOR, MARZO DE 1999

TRABAJO DE GRADUACION APROBADO POR:

COORDINADOR :

REGISTRO NACIONAL DE ARQUITECTOS E INGENIEROS
GERARDO MARVIN JORGE HERNANDEZ
INGENIERO ELECTRICISTA – Registro No IE 0565
M.O.P - V.M.V.D.U. EL SALVADOR, C. A.

ING. MARVIN JORGE HERNANDEZ

ESCUELA DE INGENIERIA ELECTRICA
FACULTAD DE INGENIERIA
Y ARQUITECTURA
Universidad de El Salvador

ASESOR :

ING. RICARDO COLORADO

ACTA DE CONSTANCIA DE NOTA Y DEFENSA FINAL

En esta fecha, 11 de marzo de 1999 en el local de Sala de Lectura de la Escuela de Ingeniería Eléctrica, a las diecisiete horas y treinta minutos, en presencia de las siguientes autoridades de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de El Salvador:

Firma

1- Ing. José Roberto Ramos López
Director

2- Ing. Gerardo Marvin Jorge Hernández
Secretario

ESCUELA DE INGENIERIA ELECTRICA
FACULTAD DE INGENIERIA
Y ARQUITECTURA
Universidad de El Salvador

Y con el Honorable Jurado de evaluación integrado por las personas siguientes:

Firma

1- Ing. Carlos René Pérez Ramos

2- Ing. Armando Martínez Calderón

Se efectuó la defensa final reglamentaria del Trabajo de Graduación:

"Investigación de la Aplicación de los Métodos Matemáticos de Optimización no Lineales a la Solución del Flujo de Carga en Sistemas de Potencia"

A cargo de los Bachilleres:

DE ASIS ESCALANTE, EDGAR HUMBERTO
MUÑOZ NAJARRO, NELSON

Habiendo obtenido el presente trabajo una nota final, global de 8.6

(Ocho punto seis)

AGRADECIMIENTO.

A DIOS todo poderoso por haberme dado confianza, sabiduría, tenacidad por alcanzar este logro.

A mis padres María Antonia de Asís y Humberto Escalante por su ayuda en los momentos más difíciles y su constante apoyo y fe en mi.

A mis hermanos Edwin Orlando, Juan Antonio, Miguel Angel, José Tomas (Q.D.D.G.) y en especial a mi hermana Daysi Lorena por toda su ayuda y comprensión.

A mis amigos por su ayuda a mis profesores por su enseñanza al personal de EIE por su cooperación.

Al ingeniero Mario Arturo Hernández por su cooperación y consejo.

A todos gracias por contribuir el alcanzar este logro.

Edgar Humberto de Asís Escalante

AGRADECIMIENTO.

A DIOS todo poderoso por haberme dado la vida, salud y oportunidad para lograr terminar la meta impuesta.

A mis padres Victoria Edelmira Najarro de Muñoz y Manuel Muñoz por su incondicional apoyo en todos los momentos de la vida.

A mis hermanos Delmy Lorena, Hector José, Claudia María, Carlos Manuel y de una manera especial a mi hermano mayor Manuel Wilfredo por sus constantes consejos y por siempre encontrarse conmigo cuando lo necesitaba.

A todos los profesores que en algún momento de la carrera aportaron sus conocimientos para enseñanza y formación de un nuevo profesional, en especial al Ing. Ricardo Colorado por su gran apoyo y al Ing. Marvin Hernández por su confianza puesta en mi.

A todos gracias por contribuir en alcanzar este triunfo.

Nelson Rolando Muñoz Najarro

PREFACIO.

Debido a que las pérdidas han sido y serán un problema con el cual se debe de lidiar, en toda clase de transmisión de energía, con mucha mas razón las empresas que tienen el trabajo de transportar grandes cantidades de energía hacen énfasis en la optimización de pérdidas de transmisión (objetivo final optimización de inversión requerida), es de suponer que con la libre competencia, que existe en el mercado de la transmisión de energía eléctrica, será de la empresa que tenga los costos mínimos de generación y de transmisión el que tenga la mayor posibilidad de crecer y aumentar sus utilidades.

El análisis de optimización de pérdidas no es nuevo; pero el método tradicional del despacho económico, comienza dependiendo de la solución de flujos de cargas, necesita de múltiples transformaciones para la representación de las pérdidas de transmisión, lleva consigo mucho trabajo de cálculos, complejidad, espacio de máquina; lo cual podría evitarse con métodos distintos relacionados con el tema de optimización, dentro de los objetivos planteados desde el principio del trabajo, se han logrado obtener resultados satisfactorios principalmente en la parte de la optimización de pérdidas; aunque resultados alcanzados parcialmente fueron los planteamientos de las ecuaciones que describen el sistema de análisis.

RESUMEN.

El presente trabajo desarrolla los trabajos de optimización de pérdidas tanto tradicionales como el propuesto, desde sus ecuaciones y teorías, más básicas posibles, de manera que todo lo contenido en él, sea de la más fácil y completa compresión para el lector; comienza desde sus primeras páginas con definiciones y bases teóricas de necesario conocimiento, principalmente en el tema de optimización, sé continua haciendo comparación con métodos tradicionalmente ocupados, los cuales ya tiene mucho tiempo de estar en uso, en el documento se presentan tres etapas de soluciones del trabajo de optimización, las cuales describen el camino y objetivos perseguidos en toda la elaboración del documento y se concluye con el ejercicio de la cuarta etapa, en donde muestra la solución de optimización con todos los parámetros involucrados en un sistema de potencia.

TABLA DE CONTENIDOS

LISTA DE TABLAS

Tabla **página**

LISTA DE FIGURAS

CAPITULO I

LA MATRIZ DE INCIDENCIA Y ANALISIS DE COSTOS Y PÉRDIDAS INCREMENTALES.

Introducción:

El capítulo comienza con un breve historial del problema de las pérdidas de transmisión y la manera en que estas han sido analizadas en el pasado, principalmente por grandes investigadores ó empresas interesadas en el ahorro de energía, ya que en lo que se refiere a los estudios de tesis en las universidades de el país no existen estudios específicos de optimización de pérdidas, mas bien estudios como el de despacho económico tradicional. A continuación se introducen los conocimientos básicos de representación de sistemas de potencia, así como los términos generales para la determinación de la matriz de incidencia, por medio del uso de la matriz de admitancias primitivas de Gabriel Kron; además se describen tres de los métodos más conocidos para el análisis de costos incrementales de producción y pérdidas incrementales de transmisión.

1.1 Antecedentes.

La función de una compañía es suministrar potencia eléctrica hasta las cargas o clientes, los clientes no se preocuparan ya sea que la potencia venga desde miles de kilómetros ó miles de millas ó que está energía sea generada por una eficiente ó ineficiente unidad tan lejos como la fuente natural de suministro se encuentre; pero todas éstas consideraciones son importantes para la compañía generadora de energía que por cada kilómetro de línea de transmisión y cada unidad ineficiente, significará aumento de pérdidas de energía y por lo tanto costos adicionales. En general un sistema de potencia tiene varias estaciones generadoras y muchas cargas esparcidas a través de las áreas geográficas servidas a las que dan servicio y esto tiene mucho capital invertido en viejos equipos los cuales no son eficientes como las unidades modernas; así que las operaciones económicas no pueden alcanzarse simplemente por eficientes localidades de las unidades "cercanas" a las cargas.

Con los generadores y las cargas esparcidas son un número infinito de combinaciones de salidas de generación las cuales satisfacen los requerimientos de carga; pero solo una de estas minimizará los costos de la compañía generadora de energía. Para averiguar cual combinación minimiza los costos es que se ha desarrollado el problema de despacho económico.

Los problemas flujo de carga y despacho económico han sido con anterioridad tratados, para ser más precisos fue tratado como tema de tesis en 1978 bajo el tema de "Estudio de despacho Económico en Sistemas de Potencia" en la Universidad de El Salvador [ver cap. 3, ref. 2]; pero está tesis no tiene un estudio específicamente de optimización de pérdidas, y en otras universidades el tema no ha sido tratado y tal vez se pueda mencionar la tesis de la Universidad Centroamericana José Simeón Cañas, bajo el titulo de "Consideraciones técnicas y económicas de los voltajes de distribución en la zona 17 de electrificación rural de CEL", en la cual resalta la intención de ahorro de pérdidas; pero por métodos de conductores económicos, configuraciones estratégicas, y otras; pero no por métodos económicos y mucho menos por análisis de optimización, está tesis fue hecha en el año de 1976. Los años de elaboración de ambas tesis nos dan una referencia de los últimos años en que el tema fue tratado, por lo cual se insiste en que el tema urge de reformas y nuevos métodos de análisis.

En general el problema de despacho económico ha sido aprovechado por dos diferentes direcciones. En los primeros métodos económicos alcanzados indirectamente a través de cálculos de pérdidas de transmisión; mientras en las siguientes décadas han sido presentados varios métodos más rigurosos los cuales minimizan los costos en las líneas de transmisión así mismo en los buses de generación. Los primeros métodos propuestos fueron por George, Page, y Ward (1943-1953), luego fueron mejorados por Kron y llevados a su completa aplicación por Kirchmayer en su libro de operación económica de sistemas de potencia. Esto se conoció bien como un método estándar que fue discutido en sus documentos y solo así pudo ser éste método comparado con otros.

Otro método aproximado envuelve directamente las pérdidas de transmisión que fue formulada por Tudor y Lewis (1963), las cuales fueron mejoradas por Hill y Stevenson en los últimos dos documentos (1968). Tres documentos por Calvert y Sze (1956-1958) resultaron en una rigurosa formulación de pérdidas las cuales fueron remejoradas por Squires (1960) dentro de los primeros costos mínimos de formulación. Otras formulaciones rigurosas de costos mínimos fueron originadas por Carpentier (1962), El-Abiad y Jaimes (1969). A.M. Sasson construyó un unificado y aproximado flujo de carga, minimizó pérdidas usando el método del problema de despacho económico de Carpentier con técnicas de programación no lineal.

1.1.1 Historial del despacho económico.

La historia del despacho económico se puede resumir de manera gráfica como se muestra en la siguiente figura.

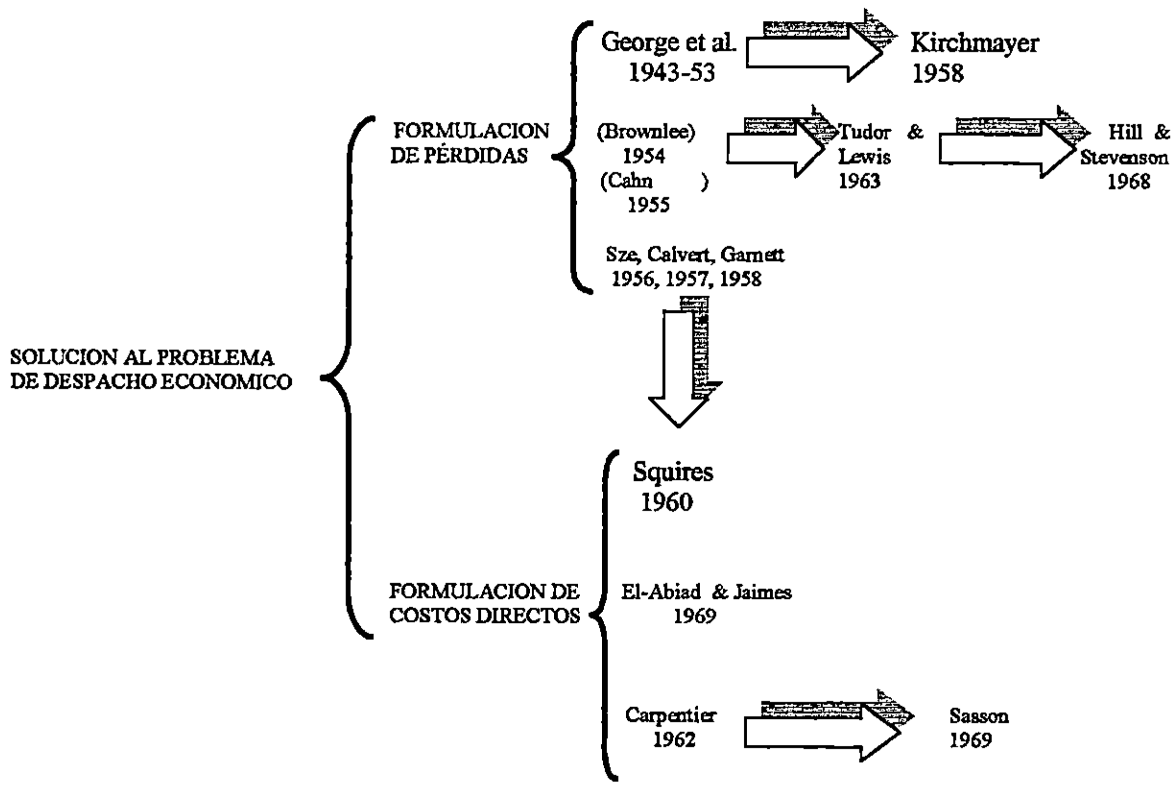

Figura 1.1 Resumen historial del despacho económico.

1.2 Pérdidas de transmisión.

La energía físicamente es la capacidad de un sistema para realizar un trabajo; el ser humano lleva cientos de miles de años transformando la energía que nos ofrece la naturaleza, para bienestar y provecho propio, con el tiempo se ha visto con la necesidad de transmitir la energía transformada a grandes distancias y encontrarse con el inevitable problema e inherente característica de la energía como son ***"las pérdidas por transmisión"***.

Hoy en día las transmisiones forman una importante parte de la vida cotidiana de todas las personas, por lo cual el interés por optimizar el ahorro de energía sigue siendo tema para los investigadores. Una de estas energías y tal vez la de más uso en la actualidad sea la energía eléctrica y debido a las grandes cantidades y las grandes distancias que está recorre, las pérdidas por transmisión es de cuantiosos valores; ejemplo palpable de este tipo de transmisiones es la línea de transmisión que unirá a Centro América.

Como se mencionó con anterioridad, grandes compañías e investigadores han unido esfuerzos por optimizar el ahorro de energía (objetivo final ahorro de dinero por pérdidas de transmisión y conservación de las fuentes naturales de energía), personalidades que nos han legado grandes estudios de mucha utilidad en la optimización de pérdidas por transmisión de energía eléctrica. Pero nosotros creemos que entre aquellos días y la actualidad existe una inmensa diferencia en lo que respecta a las técnicas de cálculos; en la actualidad contamos con la poderosa ayuda de modernas computadoras, las cuales nos facilitan enormemente los cálculos y reducen el tiempo de análisis; pero no basta con solo ocupar las herramientas adecuadas, creemos que no se deben de seguir ocupando los métodos tradicionales de estudios que exigen largos cálculos, miles de iteraciones y mucha memoria de las computadoras.

Basado en lo anterior, proponemos un método novedoso que facilite los cálculos de optimización de pérdidas, haciendo uso de la combinación adecuada de fórmulas tradicionalmente conocidas y aplicación de técnicas de optimización, el método de optimización que se presenta en las siguientes paginas de este documento, como propuesta de los autores y de asesor de trabajo de graduación es llamado **"investigación de la aplicación de los métodos matemáticos de optimización no lineales a la solución del flujo de carga en sistemas de potencia"**, el cuál esperando que sirva de base para futuros estudios y que cumpla con las expectativas del lector y a la ves que le sea de utilidad para todo aquel que tenga interés en el conocimiento de las técnicas de optimización tanto tradicionales como las nuevas.

1.3 Tradicionalismo de la optimización de pérdidas.

Nuestro interés principal no es en esencia como transmitir la energía eléctrica; sino la forma mas económica de transmisión de energía eléctrica, ya es conocido que debido a la variedad de cargas y generadores que forman una red de potencia, existe una gran cantidad de configuraciones posibles que podrían realizarse, este número se ve reducido ya que son pocas las permitidas por las restricciones que el sistema debe cumplir, algunas de estas configuraciones son en materia de transmisión más económicas o más costosas que otras, y solamente una de ellas tendrá el costo más económico para transmisión de una configuración de red específica a carga constante.

Los trabajos tradicionales para optimización de pérdidas, han sido siempre representación de grandes esfuerzos y de muchos cálculos, ahora con la ayuda de las computadoras, aunque el tiempo de cálculo se ha reducido enormemente este sigue ocupando tiempo relativamente largos (con nivel de referencia, el tiempo de cálculo de la computadora), gasto de espacio considerable de memoria y se debe de tener el conocimiento de muchas variables a manejar para su completo análisis, como son por mencionar algunas: los datos de un previo flujo de carga, cuál es la barra compensadora, el generador de mayor capacidad, las cargas (en todos los métodos), la barra que tendrá el voltaje de referencia, los ángulos de las unidades generadoras etc.

Ahora por todos es sabido que las pérdidas por transmisión no son más que la energía que se transforma en calor en el recorrido de la transmisión, entonces según James Joule dice “que el flujo de calor es una transferencia de energía que se lleva a cabo como consecuencia de las diferencias de la temperatura únicamente" lo cual eléctricamente viene denotado por el valor de I^2R de cualquier sistema eléctrico. Entonces porqué no simplificar y reducir los cálculos, incluyendo solo las variables de mayor interés o que estén involucradas directamente en el cálculo de las pérdidas de transmisión, con está inquietud es como nace el estudio presente.

Métodos de optimización para sistemas de potencia existen muchos, pero nuestro objetivo del trabajo es proponer un nuevo método con técnicas de cálculos de optimización que más bien no están difundidas como los demás, aunque muchos matemáticos lo caracterizan como un “método ingenioso de optimización” tal como es conocido **"el multiplicador de Lagrange".**

Dentro de los objetivos propuestos en la elaboración de este trabajo existe la completa intensión en hacer el método sencillo, entendible que ocupe poca capacidad de memoria de la computadora, que sea rápido, en conclusión que el método propuesto sea óptimo.
Para el previo estudio de este documento es necesario aunque alguno de ellos no indispensable el conocimiento de algunas bases matemáticas como son la álgebra matricial, el flujo de carga, despacho económico, y el multiplicador de Lagrange. Pero para facilitar mucho de esto hacemos un pequeño repaso de temas esenciales para poder desarrollar con mayor libertad el método propuesto, con el alivio de que todos los estudios anteriores ya son del conocimiento de los interesados en el tema.

1.4 Conceptos básicos.

Como se menciona con anterioridad, será necesario unos breves recordatorios o repasos de conceptos básicos de manera que el método pueda ser rápidamente entendido y con esto lograr uno de los objetivos propuestos, que el método sea de fácil aplicación y de fácil entendimiento, basado en los términos anteriores; a continuación se hace referencia a temas que creemos de interés para el desarrollo de la optimización de pérdidas utilizando el multiplicador de Lagrange.

1.4.1 La matriz de incidencia.

Para el desarrollo del problema del método propuesto partimos con valores ya colocados en la fórmula general de pérdidas, sin indicar algunos trabajos previos que se han hecho para la obtención de los valores utilizados, partiendo de la configuración de red conocida, uno de estos trabajos es la obtención de la Zbus del sistema lo cual se explica a continuación.

Tomando como base para explicación la siguiente figura de la red de un sistema de potencia, compuesta por dos generadores y 5 buses sin tomar en cuenta el de referencia (esperando que el lector sepa, el por que no se toma en cuenta el bus de referencia).

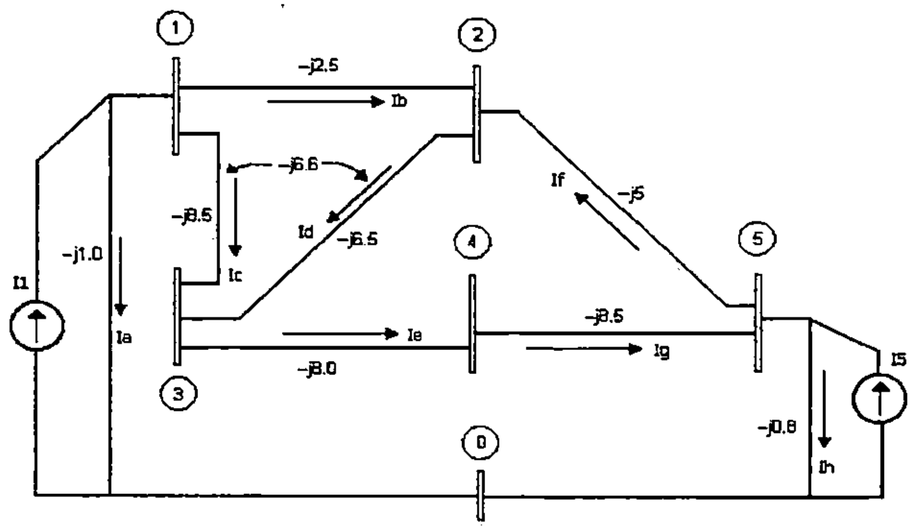

Figura 1.2. Representación de una red de potencia.

La figura anterior es la representación de una red de un sistema de potencia, dónde las ramas están representadas por su equivalente de línea de transmisión corta y los generadores han sido transformados a un equivalente de manera de facilitar el uso de las leyes de Kirchhoff tanto, la de corriente como la de voltaje, las cuales serán de mucha utilidad para encontrar la matriz de incidencia.

Las matrices de las admitancias de nodos de las ramas individuales se combinan con el fin de construir la Ybus (o Zbus) del sistema, objetivo que perseguimos para el previo uso de la matriz Zbus en el método propuesto. La matriz de coeficientes es la matriz de admitancias elementales que se forman al analizar con cuidado la red de la figura 1.2. Cada rama de la red contribuye a un elemento diagonal que es igual al reciproco de su impedancia de cada rama con la excepción del caso en que las ramas estén mutuamente acopladas, el resultado del análisis de este sistema es el siguiente:

MATRIZ DE ADMITANCIA PRIMITIVA.
(GABRIEL KRON)

$$\begin{pmatrix} -j1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -j2.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -j8.5 & j6.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & j6.6 & -j6.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -j8.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -j5.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -j8.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -j0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Va \\ Vb \\ Vc \\ Vd \\ Ve \\ Vf \\ Vg \\ Vh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ia \\ Ib \\ Ic \\ Id \\ Ie \\ If \\ Ig \\ Ih \end{pmatrix}$$

La ecuación anterior se puede escribir de manera compacta de la siguiente forma:

$$Y_{ele} \cdot V_{ele} = I_{ele} \qquad 1.4.1$$

Donde:
V*ele* e I*ele*: Son los vectores columnas respectivos de las ramas de voltaje y corriente.
Y*ele*: Es la matriz de admitancias elementales de la red.

Se puede observar que las ecuaciones elementales no dan información en relación de la forma en que está configurada cada rama que conforman la red, a tal configuración que da esa información se le conoce con el nombre de <u>topología</u> y su configuración geométrica está dada por la llamada gráfica <u>dirigida</u> la cual se muestra en la siguiente figura de la red en estudio:

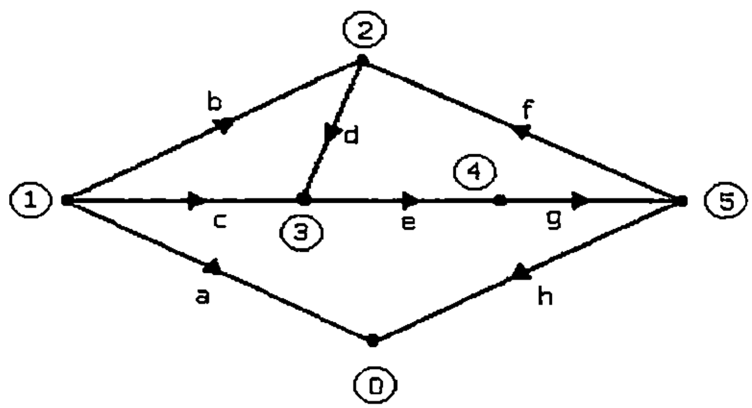

Figura 1.3. Gráfica dirigida

En la figura anterior cada rama de la red está representada entre sus nodos terminales por un segmento de línea recta con la punta dirigida en el sentido de la corriente que es asumida a conveniencia de él análizador.

Cuando una rama se conecta a un nodo se dice que la rama y el nodo son incidentes (de donde se deriva el nombre de matriz de incidencia). Las ramas de la figura anterior que enlaza a todos los nodos de la gráfica sin formar una trayectoria cerrada constituyen un árbol y las ramas que no forman parte del árbol se llaman enlaces.

Una gráfica se puede escribir en términos de una matriz de incidencia o de conexiones. En el presente trabajo haremos énfasis en la matriz de incidencia rama-nodo Â que tiene una fila para cada rama y una columna por cada nodo con un elemento a_{ij} en la fila *i* y en la columna *j* respetando a la siguiente convención (está convención puede ser cambiada; ya que es asumida a conveniencia de él analizador):

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si la rama } i \text{ no está conectada al nodo} \\ 1 \text{ si la corriente en la rama } i \text{ se aleja del nodo} \\ -1 \text{ si la corriente en la rama } j \text{ se dirige hacia el nodo} \end{cases}$$

Por lo general, se selecciona un nodo de referencia para los cálculos de redes. Entonces, la columna que corresponde al nodo de referencia se omite de Â y la matriz que resulta se denomina matriz de incidencia A, por lo general se escoge al nodo cero como el de referencia. A los nodos que no son de referencia en una red se les llama con frecuencia nodos independientes o buses y cuando nos referimos, que una red tiene N buses, nos referiremos a que hay N nodos independientes sin incluir el de referencia.

La matriz de incidencia A tiene una dimensión de R X N elementos (fila X columna) para cualquier red con R ramas y N nodos, sin considerar el de referencia. El voltaje de cada rama se puede expresar como la diferencia de los voltajes en cada terminal de bus, medidos con respecto al nodo de referencia, como sigue:

$$\begin{aligned} Va &= V1 \\ Vb &= V1 - V2 \\ Vc &= V1 - V3 \\ Vd &= V2 - V3 \\ Ve &= V3 - V4 \\ Vf &= V5 - V2 \\ Vg &= V4 - V5 \\ Vh &= V5 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} Va \\ Vb \\ Vc \\ Vd \\ Ve \\ Vf \\ Vg \\ Vh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ V5 \end{pmatrix}$$

Donde la matriz de coeficientes (de unos y ceros) es la matriz de incidencia A. Una representación del resultado anterior (para una red de N buses):

$$V_{ele} = A \cdot V_{bus} \qquad 1.4.2$$

Ahora en la misma configuración podemos aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en todos los nodos y el resultado seria de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ia \\ Ib \\ Ic \\ Id \\ Ie \\ If \\ Ig \\ Ih \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I5 \end{pmatrix}$$

Lo que se puede escribir en forma compacta de la siguiente manera:

$$A^T \cdot I_{ele} = I_{bus} \qquad 1.4.3$$

Entonces se puede observar que la matriz de incidencia A describe por completo la topología de la red y es independiente de los valores particulares de los parámetros de la rama. Lo anterior nos da a entender que si algún parámetro de la red cambia, cambiara la Y*ele* pero no la matriz de incidencia A ya que la configuración de la red a sido mantenida.

El objetivo de la introducción de ésta base de teoría es con el fin de encontrar para nuestro trabajo la matriz de Zbus de la red a analizar por lo cuál los pasos a seguir después de haber obtenido la matriz de incidencia se describen a continuación.

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación 1.4.1 por A^T tendremos que:

$$A^T \cdot Y_{ele} \cdot V_{ele} = A^T I_{ele} \qquad 1.4.4$$

Entonces tenemos que de las ecuaciones número 1.4.2 y 1.4.3, la ecuación resultante nos queda de la siguiente forma:

$$A^{T} \cdot Y_{ele} \cdot A \cdot V_{bus} = I_{bus} \qquad 1.4.5$$

Entonces despejando tenemos que

$$Y_{bus} \cdot V_{bus} = I_{bus} \qquad 1.4.6$$

Donde la matriz de admitancias de bus Ybus siempre es una matriz N x N dada por la siguiente formula:

$$Y_{bus} = A^{T} Y_{ele} A \qquad 1.4.7$$

Entonces por simple transformación la Zbus se puede encontrar de la siguiente forma:

$$Z_{bus} = Y_{bus}^{-1} \qquad 1.4.8$$

1.5 Costos incrementales de producción y pérdidas incrementales de transmisión.

Un problema importante envuelto en la operación de grandes sistemas de potencia integrados es la determinación de horarios (o programación) de generación para que un sistema funcione económicamente, incluyendo los efectos de ambos, los costos de producción incrementales y pérdidas de transmisión incrementales.

En orden, para combinar los costos de producción y las pérdidas de transmisión incrementales es necesario primero expresar las pérdidas de transmisión incrementales en términos de los costos incrementales. Las pérdidas de transmisión anteriores deben ser limitadas a un coeficiente igual a los costos incrementales de la potencia del receptor (carga). A continuación se presenta tres de los métodos utilizados tradicionalmente en el manejo de los costos de producción y los costos de transmisión incrementales, estos métodos son expuestos de manera general ya que no se enfatiza en detalles ni se profundiza ya que no son los temas de interés; mas bien demuestran que prácticamente todos los métodos utilizados tienen un común detalle que son los costos incrementales.

1.5.1 Tres métodos de coordinación de costos incrementales de producción y pérdidas incrementales de transmisión.

a) Método Exacto envolviendo ecuaciones simultáneas no lineales:
La entrada mínima en colones por hora para una carga dada es obtenida por la solución de las siguientes ecuaciones simultaneas:

$$\frac{dFn}{dPn} + \lambda \cdot \frac{\partial P_L}{\partial Pn} = \lambda \qquad 1.5.1$$

Donde:

Fn = Entrada a planta n en colones por hora.
$\frac{dFn}{dPn}$ = Costos de produccion incrementales de la planta n en colones por MWh
Pn = Salida de planta n en MW.
P_L = Pérdidas de transmisión totales.
λ = Costo incremental de la carga (potencia recibida) en ¢/MW-h.
$\partial P_L/\partial Pn$ = Pérdidas de transmisión incrementales de la planta n en Mwatts/Mwatt.

Despejando y ordenando la ecuación anterior, tenemos:

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{dFn}{dPn} + \frac{\partial P_L}{\partial Pn} = 1 \qquad 1.5.2$$

En general, las pérdidas de transmisión incrementales de la planta n pueden ser expresados por:

$$\frac{\partial P_L}{\partial Pn} = \sum 2\ B_{mn}\ P_m \qquad 1.5.3$$

Donde; Bmn = Son constantes de la fórmula de pérdidas de transmisión.

Los costos de producción incrementales de una planta dada sobre un rango limitado pueden ser representados por:

$$\frac{dF_n}{dP_n} = F_{nn} P_n + f_n \qquad 1.5.4$$

Donde:

F_{nn} = Pendiente de la curva de costos de producción incrementales.
f_n = Intercepto de la curva de costos de producción incrementales.

Entonces la ecuación 1.5.1 queda así:

$$F_{nn}P_n + f_n + \lambda \cdot \sum 2 \cdot B_{mn} \cdot P_m = \lambda \qquad 1.5.5$$

Las soluciones para diferentes cargas totales, son obtenidas por la variación de la magnitud de λ.

b) Método aproximado envolviendo ecuaciones simultáneas lineales.

Las pérdidas de transmisión incrementales en la planta *n* en la ecuación 1.5.1 es limitada en λ, los costos incrementales de la potencia recibida. Si Las pérdidas de transmisión incrementales en la planta *n* son limitadas con una constante del coeficiente β, la siguiente serie de ecuaciones simultáneas lineales resultan:

$$\frac{dFn}{dPn} + \beta \cdot \frac{\partial P_L}{\partial Pn} = \lambda \qquad 1.5.6$$

Donde: β = Promedio de costos incrementales de la potencia recibida en colones por MWh.
La ecuación anterior puede además ser escrita como:

$$\frac{1}{\beta} \cdot \frac{dFn}{dPn} + \frac{\partial P_L}{\partial Pn} = \frac{\lambda}{\beta} = \phi \qquad 1.5.7$$

Donde:

$$\phi = \frac{\lambda}{\beta}$$

Está serie de ecuaciones simultáneas lineales corresponden para aquellos descritos por George, Page, y Ward. Soluciones para diferentes cargas totales son obtenidas por variación de $\phi = \lambda / \beta$ y cuando $\lambda / \beta = \phi = 1$, una solución exacta es obtenida, correspondiendo a la solución de ecuaciones simultáneas no lineales.

c) Método del factor de penalización.

De la ecuación 1.5.1,

$$\frac{dFn}{dPn} + \lambda \cdot \frac{\partial P_L}{\partial Pn} = \lambda$$

entonces:

$$\frac{dFn}{dPn} = \lambda - \lambda \cdot \frac{\partial P_L}{\partial Pn} = \lambda\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial Pn}\right) \qquad 1.5.8$$

$$\lambda = \frac{dFn}{dPn}\left[\frac{1}{1 - \frac{\partial P_L}{\partial Pn}}\right] \qquad 1.5.9 \qquad\qquad \lambda = Ln \cdot \frac{dFn}{dPn} \qquad 1.5.10$$

Donde:
L*n* = Factor de penalización de la planta *n* es igual a:

$$Ln = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_L}{\partial Pn}}$$

La solución de la ecuación 1.5.9 lleva a resultados, los cuales son idénticos a los de la ecuación 1.5.1.
La ecuación 1.5.9 puede ser aproximada por:

$$\lambda = \frac{dFn}{dPn}\left(1 + \frac{\partial P_L}{\partial Pn}\right) \qquad 1.5.11$$

Donde:

$$Ln = 1 + \frac{\partial P_L}{\partial Pn}$$

Ln= Factor de penalización aproximado de la planta n.

La ecuación 1.5.11 puede ser escrita como:

$$\frac{dFn}{dPn} + \frac{dFn}{dPn}\frac{\partial P_L}{\partial Pn} = \lambda \qquad 1.5.12$$

De está ecuación se ve que el método del factor de penalización aproximado, corresponde a los costos de las pérdidas de transmisión incrementales de la planta n con una proporción correspondiente a los costos de producción incrementales de la planta n.

CONCLUSIONES DEL CAPITULO I.

- Aunque los estudios realizados en el flujo de carga y despacho económico son muy buenos y han dado excelente servicio tecnológico; no necesariamente se deben seguir aplicando de la manera que originalmente fueron hechos, se debe recordar que la mayoría de estos estudios datan de varias décadas atrás, por tal razón estos métodos urgen reformas y adaptaciones, a las nuevas técnicas computacionales y nuevos métodos de optimización que faciliten los cálculos, además de reducir los tiempos de trabajo.

- Todos los métodos de despacho económico han sido prácticamente la continuación o mejoría de los estudios anteriormente realizados, por lo cual en todos ellos se observa una similitud o parecido en sus ecuaciones generales o planteamientos de las variables a ocupar.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

[1] Kirchmayer, Leon K.
Economic Operation of Power Systems
U.S.A
General Electric Company
1958

[2] Grainger John J. & Stevenson, William D. Jr.

Análisis de Sistemas de Potencia
México
McGRAW-HILL/Interamericana de México S.A de C.V.
1994 por McGRAW-HILL-Inc., U.S.A.

[3] Dr. Bowen, D.W & Dr. Kruempel, K.C
Power System Interconnections Short Course
U.S.A.
Iowa State University
1974.

CAPITULO II

EL PROBLEMA DE OPTIMIZACION DE PÉRDIDAS.

Introducción:

En las siguientes páginas se hace una descripción del método propuesto de los multiplicadores de Lagrange, para la optimización de pérdidas en líneas de transmisión, en problemas con *n* variables y *m* limitantes, aplicando ecuaciones como restricciones a la función que representa las pérdidas del sistema en estudio. Además se hace una interpretación económica del método y se presenta un ejemplo de cálculo de pérdidas en un sistema de cuatro buses, desarrollado por un método tradicional, conocido comúnmente como método de reducciones sucesivas.

2.1 Método de optimización de pérdidas utilizando el multiplicador de Lagrange.

En este campo existen problemas particulares donde lo que se busca es determinar los valores extremos de un campo escalar $f(x)$ cuando x tiene la restricción de pertenecer a un subconjunto dado del dominio de f.

Con frecuencia los problemas de extremos condicionados son muy dificiles; no se conoce un método general para resolverlos con toda generalidad. Se utilizan métodos particulares cuando el subconjunto restringido tiene una estructura sencilla. Está sección está dedicada al método de los multiplicadores de Lagrange para resolver tales problemas. Ante todo se expone el método en su forma general.

2.1.1 Optimización.

La optimización de una función tiene un objetivo, por ejemplo para nuestro caso particular, obtener costos mínimos de generación, pérdidas mínimas en las líneas, etc. lo cual en la industria de potencia es muy fundamental e importante.

Los costos incrementales de generación se regulan a través de las pérdidas de transmisión. Si la carga de un generador es incrementada por ΔMW en un costo de $\lambda = dF/dP$ (porcentaje o razón de cambio del costo del consumo de combustible por ejemplo), y si las pérdidas del sistema son incrementadas como un resultado de la variación en la generación, el incremento en pérdidas $\Delta L = dL/dP_L$ será pagado por el costo incremental de producción λ. Por consiguiente, el costo de producción de cada planta ó generador será incrementado por el costo de producción del cambio incremental en pérdidas, causadas por el incremento de la potencia consumida por el sistema, de un generador particular.

2.1.2. El problema de optimización.

En un problema típico de ingeniería, el problema de optimización puede envolver una gran cantidad de variables para el cual se desee la determinación de un mínimo ó un máximo, lo cuál dependerá de las necesidades del problema en particular. Para esto se debe tener cuidado para hacer una distinción entre un máximo, un mínimo o un punto establecido sobre la gráfica, y esto se determinará considerando sólo la primera derivada de la función que describa matemáticamente a dicho problema.

2.2 Método de los Multiplicadores de Lagrange.

Si un campo escalar $f(x_1,............,x_n)$ tiene un extremo relativo cuando está sometido a m condiciones, por ejemplo:

$$g_1(x_1,.................,x_n)=0,$$

$$g_m(x_1.................,x_n)=0,$$

Siendo $m<n$, existen entonces m escalares $\lambda_1, ... ,\lambda_m$ tales que

$$\nabla f=\lambda_1\nabla g_1+...........+\lambda_m\nabla g_m$$

En cada punto extremo.

Para determinar los puntos extremos en la práctica consideramos el sistema de $n+m$ ecuaciones formado con las m ecuaciones de condición y las n ecuaciones de escalares determinadas por la relación vectorial. Se resuelve el sistema (sí ello es posible) respecto a las $n+m$ incógnitas $x_1, ... , x_n$ y $\lambda_1, ... , \lambda_m$. Los puntos $(x_1, ... , x_n)$ en los que se presentan los extremos relativos se encuentran entre las soluciones de aquel sistema.
Los escalares $\lambda_1, ... , \lambda_m$ que se introdujeron para ayudarnos a resolver este tipo de problemas se denominan **multiplicadores de Lagrange**. Se introduce un multiplicador por cada condición. El campo escalar f y las funciones de condición $g_1, ... , g_m$ se suponen diferenciables. El método es valido si el número de condiciones, m, es menor que el número de variables, n, y si no todos los determinantes jacobianos de las funciones

de condición con respecto a *m* de las variables $x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n$ son nulos para los valores extremos que se consideran.

2.2.1 Otra forma de interpretación del método de Lagrange

Suponer que se desea minimizar la función $f(x1,x2) = K$
Sujeta a la condición o limitante $g(x1,x2) = 0$.
Es decir, $f(x1,x2)$ está permitida que incremente hasta un valor donde justo toque a la curva de $g(x1,x2) = 0$, donde en este punto precisamente la pendiente de las funciones f y g son iguales.

Aquí es donde se manifiesta el concepto de funciones cóncava y convexa, es decir que si en este problema se desea minimizar, entonces la forma de la gráfica de la función f representada en un plano de ejes coordenados debe ser cóncava; y la gráfica de la función g en el mismo plano debe ser convexa y a la vez debe existir un punto donde las gráficas de f y g se toquen, donde este punto es el que representará la solución del problema.
Matemáticamente se encuentra el punto donde las curvas se tocan, y esto se desarrolla de la siguiente manera: - La $dx1/dx2$ de $f(x1,x2)$ debe ser igual a $dx1/dx2$ de $g(x1,x2)$ en el punto donde las dos curvas se tocan.
Por lo tanto:

$$\frac{dx\,1}{dx\,2} = -\frac{\partial f / \partial x\,2}{\partial f / \partial x\,1} \qquad\qquad \frac{dx\,1}{dx\,2} = -\frac{\partial g / \partial x\,2}{\partial g / \partial x\,1}$$

$$\frac{\partial f / \partial x2}{\partial f / \partial x1} = \frac{\partial g / \partial x2}{\partial g / \partial x1}$$

Lo cual puede ser escrito como:

$$\frac{\partial f / \partial x1}{\partial g / \partial x1} = \frac{\partial f / \partial x2}{\partial g / \partial x2} = \lambda$$

Está relación común es llamada λ, que se le conoce con el nombre de multiplicador de Lagrange.

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x1} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x2} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x2} = 0$$

Pero estas son exactamente las mismas condiciones que se obtendrían si una nueva función la definiéramos en términos de los parámetros o variables *x1, x2* y λ así:

$$h(x1, x2, \lambda) = f(x1, x2) - \lambda \cdot g(x1, x2)$$

Note que ***h*** es una función de tres variables, y las condiciones que serán satisfechas para un mínimo son:

$$\frac{\partial h}{\partial x1} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x2} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0$$

Las tres ecuaciones anteriores se resuelven simultáneamente para obtener la solución para las variables *x1,x2 y* λ

2.2.2 Limitantes con desigualdades

Para minimizar una función $f(x1,x2)$ sujeta a la desigualdad $g(x1,x2) \geq 0$, se usa un método similar al anterior.

A la desigualdad se le debe de agregar un termino no negativo Z^2 el cual solo tomara un valor mas que cero si la desigualdad $g(x1,x2) \geq 0$ es violada. Esto es, si $g(x1,x2) < 0$, entonces Z^2 tendrá el valor requerido para satisfacer la ecuación $g(x1,x2)+Z^2 = 0$.

Si g(x1,x2) ≥ 0, entonces Z2 =0.

Con lo anterior podemos representar a una función, incluyendo la desigualdad de la siguiente forma:

$$h(x1,x2) = f(x1,x2) - \lambda(g(x1,x2) + Z^2) = 0$$

La función ***h*** ahora tiene cuatro variables, *x1, x2,* λ y Z^2. Lo que sigue a continuación es obtener las derivadas parciales de ***h*** con respecto a estas variables e igualar a cero cada una de ellas para resolver el sistema.
Es decir:

$$\frac{\partial h}{\partial x1} = \frac{\partial f}{\partial x1} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x1} = 0$$
$$\frac{\partial h}{\partial x2} = \frac{\partial f}{\partial x2} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x2} = 0$$
$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = -g(x1, x2) - Z^2 = 0$$
$$\frac{\partial h}{\partial Z} = -2 \cdot \lambda Z = 0$$

Para las condiciones anteriores, λ o Z, o ambas λ y *Z* serán iguales a cero.

2.3 Ejemplo de la aplicación del método del multiplicador de Lagrange

Minimizar la función *f(x1,x2) = x1 + x1x2 + 3x2 = k*, sujeta a la condición o limitante *g(x1,x2) =* $x1^2$ *+ x2 = 8*, para valores positivos de las variables *x1, x2*. Minimizar la función limitante, definida por la siguiente expresión: *h(x1,x2,λ) = f(x1,x2) -λg(x1,x2)*, es decir:

$$h(x1, x2, \lambda) = x1 + x1x2 + 3x2 - \lambda\left(x1^2 + x2 - 8\right)$$

El extremo (máximo ó mínimo) ocurrirá cuando todas las derivadas parciales de ***h*** con respecto a las tres variables sean iguales a cero, es decir:

$$\frac{\partial h}{\partial x1} = 1 + x2 - 2\lambda x1 = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x2} = x1 + 3 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = -x1^2 - x2 + 8 = 0$$

La solución a éstas tres ecuaciones es la siguiente:
x1 = 1 *x2 = 7* *y* $\lambda = 4$
Así:

f(x1,x2) = x1 + x1x2 + 3x2 = k = 29

El valor mínimo para *f(x1,x2)* en el primer cuadrante sujeta a la limitante *g(x1,x2)* es 29. Refiriéndonos a la figura 2.1 se puede observar que los valores de *k* representan el miembro de la familia de curvas *f(x1,x2)* que es tangente a la curva *g(x1,x2)* en el punto *x1 = 1 y x2 = 7.*
Esto es visto en la siguiente gráfica donde una curva es convexa y la otra es cóncava.

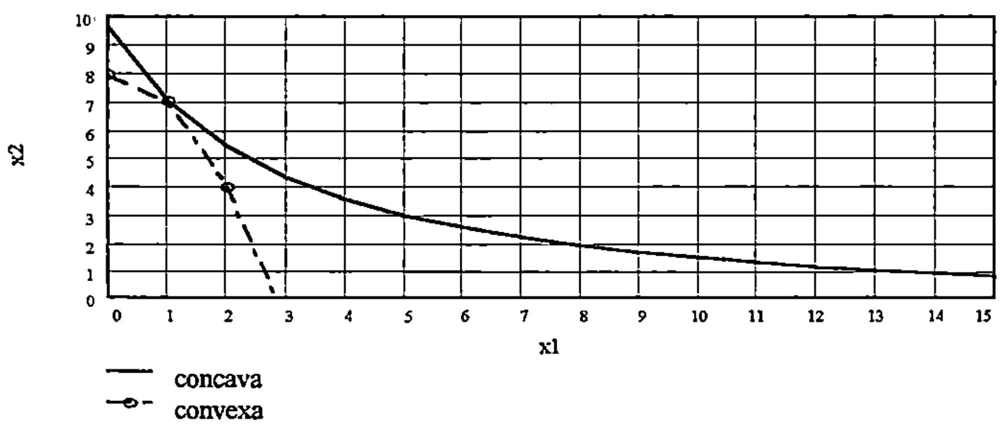

Figura 2.1. Gráfica de las curvas cóncava y convexa.

2.4 Optimización con ecuaciones como limitantes: n variables, m limitantes.

El método de Lagrange puede fácilmente ser generalizado para un problema, de la forma siguiente:

$max_x f(x)$ sujeto a $g_j(x) = C_j$ para $j=1,....,m$.

Con n variables y m limitantes (donde $x=(x_1,....,x_n)$)

El Lagrange para este problema es :

$$L(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - C_j)$$

Es decir que hay un multiplicador de Lagrange para cada limitante.

Como en el caso de un problema de dos variables y una limitante, la condición de primer-orden es que x^* sea un punto fijo de Lagrange. La condición de "nondegenerancy" en el caso de dos variables--sabiendo que ambas $g_1'(x,y)$ y $g_2'(x,y)$ no puede ser cero-- es menos sencillo de generalizar.

El resultado exacto es el siguiente.

Propuesta (necesaria condición para un extremo).
Dado f y $g_1,...,g_m$ son funciones continuamente diferenciables en un dominio A y suponiendo que $x^*=(x_1^*,....,x_n^*)$ es interior a A y solución al problema

$max_x f(x)$ sujeto a $g_j(x) = C_j$ para $j=1,....,m$.

O al problema

$min_x f(x)$ sujeto a $g_j(x) = C_j$ para $j=1,....,m$.

O es máximizador o mínimizador local de $f(x)$ sujeto a $g_j(x) = C_j$ para $j=1,....,m$. Suponiendo también que el rango de la matriz Jacobiana $((\partial g_i/\partial x_i)(x^*))_{ij}$ es m.

Entonces estos son números únicos $\lambda_1,...,\lambda_m$ tal que el Lagrange

$$L(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - C_j)$$

Teniendo un punto fijo en x^*. Es decir, x^* satisface las **condiciones de primer-orden.**

$$f'(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\frac{\partial g_j}{\partial g_j})(x^*) = 0$$

Para

$$i = 1,....,n$$

Además $g_j(x^*,y^*)=C_j$ *para* $j=1,...,m$.

Como en el caso de un problema con dos variables y una limitante, la condición de primer-orden y las limitantes son suficientes para un máximo si el Lagrangiano es cóncavo; y será suficiente para un mínimo si el Lagrangiano es convexo, como es afirmado precisamente en el siguiente resultado.

Propuesta (condiciones bajo las cuales condiciones necesarias para un extremo son suficientes).

Suponiendo que f y g son funciones continuamente diferenciables definidas sobre un subgrupo convexo abierto de A de espacio de n-dimensiones y dado que $x^* \in$ A es un punto interior estacionario de el Lagrangeano.

$$L(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - C_j)$$

Suponiendo además que $g_j(x^*) = C_j$ para $j=1,....,m$. Entonces

- Si L es cóncavo --en particular si f es cóncavo y $\lambda_j{}^*g_j$ es convexo para $j=1,....,m$-- entonces x^* resuelve el problema de limitante de maximización.

- Si L es convexo --en particular si f es convexo y $\lambda_j{}^*g_j$ es cóncavo para $j=1,....,m$-- entonces x^* resuelve el problema de limitante de minimización.

EJEMPLO N° 1:

Considera el problema

$Min_{x,y,z} x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a $x + y + z = 1$ y $2x - y - 3z = 4$

El Lagrangiano es

$L(x,y,z)=x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + 2y + z - 1) - \lambda 2(2x + y - 3z - 4)$

Si las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L(x,y,z)}{\partial x} = 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L(x,y,z)}{\partial y} = 2y - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L(x,y,z)}{\partial z} = 2z - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$$

Y las limitantes son:

$$x + 2y + z = 1$$
$$2x - y - 3z = 4$$

Resolviendo las dos primeras condiciones de primer orden para λ_1 y λ_2 lo que resulta:

$$\lambda_1 = \frac{2x}{5} + \frac{4y}{5}$$
$$\lambda_2 = \frac{4x}{5} - \frac{2y}{5}$$

Ahora sustituyendo en las siguientes condiciones de primer-orden y entonces usando las dos limitantes resulta que:

$$x = {}^{16}\!/_{15} \qquad y = {}^{1}\!/_{3} \qquad z = -{}^{11}\!/_{15}$$

$$\lambda_1 = {}^{52}\!/_{75} \qquad \lambda_2 = {}^{54}\!/_{75}$$

Ahora, el Lagrangiano es una función convexa, puesto que el objetivo de la función es convexo, las limitantes son lineales, y los multiplicadores de Lagrange son positivos. Nosotros concluimos que $(x,y,z)=(16/15,1/3,-11/15)$ es la solución del problema.

2.5 Interpretación económica del multiplicador de Lagrange.

En el caso de un problema de dos variables y una limitante nosotros concluimos que el multiplicador de Lagrange tiene una interpretación de interés económico. Está interpretación generalizada para el caso de un problema de n variables y m limitantes.

Considerar el problema.

$max_x f(x)$ sujeto a $g_j(x)= C_j$ para $j=1,....,m$.

Donde $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Dado que $x^*(c)$ es la solución de este problema, donde c es el vector $(c_1,\ldots,c_n)$ y permitiendo que

$$f^*(c) = f(x^*(c))$$

Entonces nosotros tenemos

$$f^*{}_j{}'(c) = \lambda_j(c)$$

Para

$$j = 1,\ldots,m$$

Donde λ_j es el valor del multiplicador de Lagrange de la j-ésima limitante en la solución del problema.

Si la j-ésima limitante surge debido a una limitante de la cantidad de algún recurso, entonces nosotros nos referimos a $\lambda_j(c)$ como el valor oculto de el j-esimo recurso.

EJEMPLO N° 2.

Ejercicio sobre el problema de optimización con iguales-limitantes con varias variables y limitantes.

Resolver el problema

$Max_{x,y,z}(x+y)$ sujeto a $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z = 1$

(Asumiendo sin revisar, que la "condición nondegenerancy" es satisfecha)

SOLUCION.

1.- Por el teorema del valor extremo el problema tiene una solución

Las limitantes de primer orden son:

$$1-2\lambda_1 x-\lambda_2=0$$
$$1-4\lambda_1 y-\lambda_2=0$$
$$-2\lambda_1 z-\lambda_2=0$$

Y las limitantes son $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z = 1$.

Para encontrar valores de x,y,z, λ_1 y λ_2 que resuelven estas ecuaciones, nosotros podemos primero usar la tercera limitante de primer-orden para eliminar λ_2 , entonces usando la segunda limitante z.

Entonces nosotros obtenemos:

$$1-\lambda_1[4x+2y-2]=0$$
$$1-\lambda_1[2x+6y-2]=0$$
$$2x^2+3y^2-2y+2xy-2x=0$$

La primera de estas dos ecuaciones produce $x = 2y$, así que la segunda ecuación es $3y\,(5y - 2) = 0$, para cualquiera $y = 0$ o $y = 2/5$.

Entonces las dos soluciones de las condiciones de primer orden y las limitantes, a saber son $(0,0,1)$ con $\lambda 1= -1/2$ y $\lambda 2 = 1$, y $(4/5,2/5,-1/5)$ con $\lambda_1 = 5/8$ y $\lambda_2 = 1/9$.

Ahora, la función objetivo $x + y$ es cóncava y la cada limitante es convexa, así que $\lambda_j g_j$ es convexo para cada j para la segunda solución del problema.

2.6 Cálculo de pérdidas en las líneas utilizando el multiplicador de Lagrange (etapa I).

El cálculo presentado a continuación es realizado para un sistema ya conocido, por varias razones, la principal de estas es que en este sistema ya se realizaron previos estudios de flujos de cargas y análisis de despacho económico, los cuales facilitan hacer comparaciones entre las respuestas del ejemplo del libro de Análisis de Sistemas de Potencia [ref. N° 2] y el método propuesto ocupando el multiplicador de Lagrange. El sistema en el que se aplicará el método de optimización de pérdidas, utilizando el multiplicador de Lagrange es el siguiente:

SISTEMA DE CUATRO BARRAS.

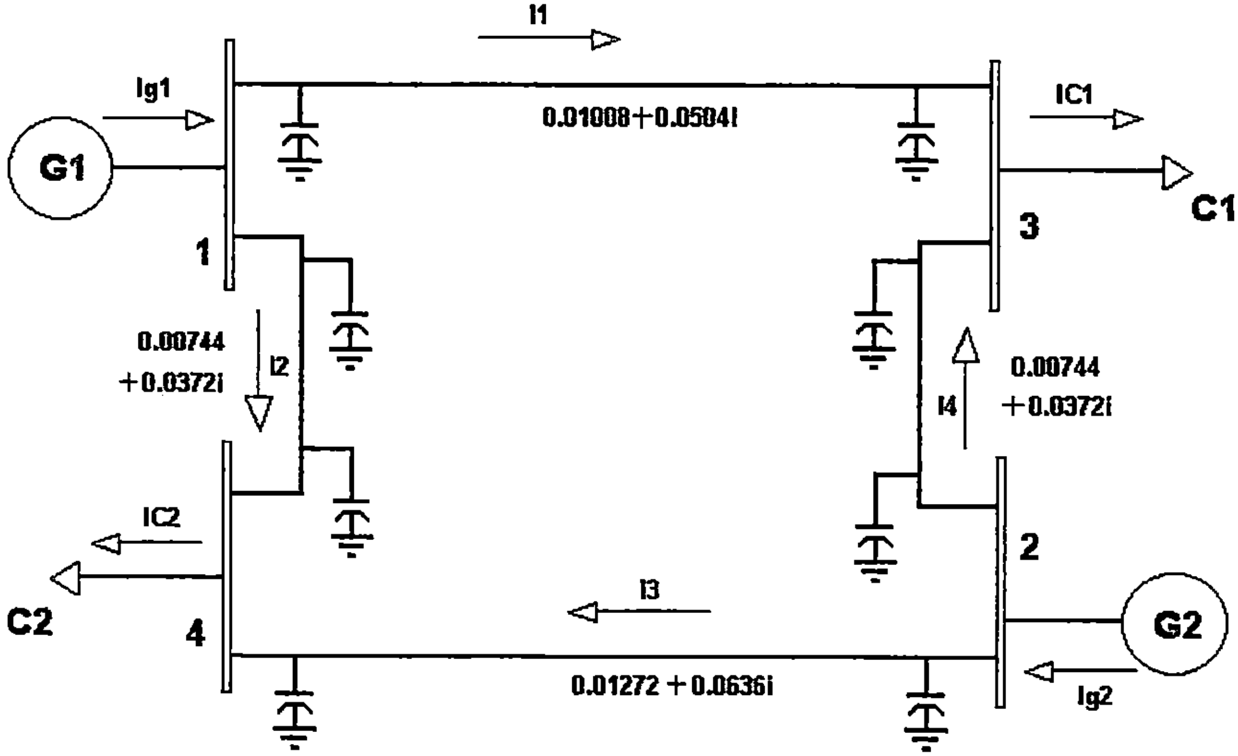

Figura 2.2. Diagrama de un sistema de potencia

El sistema de cuatro buses de la Figura 2.2 tiene los datos de líneas y buses dados en la tabla 2.1. Los costos incrementales en este caso en particular de combustible en colones por megawatt-hora (podría ser de otra fuente de energía) de las dos unidades generadoras están dados por:

$$\frac{0.0080}{2}P_g1^2 + 8.0P_g1 + c$$

Para el Generador #1, y

$$\frac{0.0096}{2}P_g2^2 + 6.4P_g2 + c$$

Para el generador #2.

Determinar las pérdidas mínimas de transmisión del sistema.

Tabla 2.1. Datos de parámetros del sistema de la Figura 2.2

De bus a bus	Datos de Líneas				Datos de Buses			
	Z serie		Y Paralelo	BUS	Generación		Carga	
	R	X	B		P	$\|V\| \angle\theta$	P	Q
Línea 1-4	0.00744	0.0372	0.0775	1		$1.0\angle 0°$		
Línea 1-3	0.01008	0.0504	0.1025	2	3.18	1.0		
Línea 2-3	0.00744	0.0372	0.0775	3			2.2	1.3634
Línea 2-4	0.01272	0.0636	0.1275	4			2.8	1.7352

Todos los valores están en por unidad sobre la base de 230 kV y 100 MVA

La ecuación general de pérdidas en función de las corrientes y las resistencias en las líneas, en donde no se están considerando por el momento las funciones de costo de los generadores, sino que lo trataremos en la parte II de este análisis:

$$
\begin{aligned}
P_L &= 3\cdot Ig_1^2\cdot Rg_1 + 3\cdot Ig_2^2\cdot Rg_2 + 3\cdot I_1^2\cdot R_1 + 3\cdot I_2^2\cdot R_2 + 3\cdot I_3^2\cdot R_3 + 3\cdot I_4^2\cdot R_4 - \lambda_1(Ig_1 + I_1 + I_2) \\
&- \lambda_2(Ig_2 + I_3 + I_4) - \lambda_3\left(\frac{Sc_1}{Vc_1\cdot\sqrt{3}} + I_1 + I_4\right) - \lambda_4\left(\frac{Sc_2}{Vc_2\cdot\sqrt{3}} + I_2 + I_3\right) - \lambda_5(VBG_1 - Vc_1 - I_1\cdot R_1) \\
&- \lambda_6(VBG_1 - Vc_2 - I_2\cdot R_2) - \lambda_7(VBG_2 - Vc_2 - I_3\cdot R_3) - \lambda_8(VBG_2 - Vc_1 - I_4\cdot R_4) \\
&- \lambda_9(VG_1 - VBG_1 - Ig_1\cdot Rg_1) - \lambda_{10}(VG_2 - VBG_2 - Ig_2\cdot Rg_2) - \lambda_{11}(VG_1 - 1.05\cdot 230KV + Z_A^2) \\
&- \lambda_{12}(VG_2 - 1.05\cdot 230KV + Z_B^2)
\end{aligned}
$$

Donde:

Ig_1, Ig_2:	son las corrientes de los generadores 1 y 2 respectivamente.
I_1, I_2, I_3, I_4:	son las corrientes de las líneas 1, 2, 3 y 4 respectivamente.
Rg_1, Rg_2:	son las resistencias de los generadores 1 y 2.
R_1, R_2, R_3, R_4:	son las resistencias de las líneas 1,2,3 y 4 respectivamente.
Sc_1, Sc_2:	son las potencias de las cargas 1 y 2 respectivamente.
P_L:	función objetivo.
VBG_1, VBG_2:	son las corrientes de las cargas 1 y 2.
Vc_1, Vc_2:	son los voltajes de las cargas 1 y 2.

$VG_1, VG_2 =$	son los voltajes de los generadores 1 y 2.
$\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n =$	Multiplicadores de Lagrange.
$ZA,\ ZB =$	son las constantes que se agregan a las desigualdades.

Derivando P_L parcialmente e igualando a cero:

$$\frac{\partial P_L}{\partial Ig_1} = 2 \cdot 3 \cdot Ig_1 \cdot Rg_1 + \lambda_9 \cdot Rg_1 - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial Ig_2} = 2 \cdot 3 \cdot Ig_2 \cdot Rg_2 + \lambda_{10} \cdot Rg_2 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial I_1} = 2 \cdot 3 \cdot I_1 \cdot R_1 + \lambda_5 \cdot R_1 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial I_2} = 2 \cdot 3 \cdot I_2 \cdot R_2 + \lambda_6 \cdot R_2 - \lambda_1 - \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial I_3} = 2 \cdot 3 \cdot I_3 \cdot R_3 + \lambda_7 \cdot R_3 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial I_4} = 2 \cdot 3 \cdot I_4 \cdot R_4 + \lambda_8 \cdot R4 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VBG_1} = \lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_9 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VBG_2} = \lambda_7 + \lambda_8 - \lambda_{10} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VG_1} = \lambda_9 + \lambda_{11} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VG_2} = \lambda_{10} + \lambda_{12} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VC_1} = \lambda_5 + \lambda_8 + \lambda_3 \cdot \frac{SC_1}{VC_1^{\ 2} \cdot \sqrt{3}} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VC_2} = \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_4 \cdot \frac{SC_2}{VC_2^{\ 2} \cdot \sqrt{3}} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial\ Z_A} = 2 \cdot \lambda_{11} \cdot Z_A$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial\ Z_B} = 2 \cdot \lambda_{12} \cdot Z_B$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_1} = -IG_1 + I_1 + I_2 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_2} = -IG_2 + I_3 + I_4 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_3} = \frac{SC_1}{VC_1 \cdot \sqrt{3}} + I_1 + I_4 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_4} = \frac{SC_2}{VC_2 \cdot \sqrt{3}} + I_2 + I_3 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_5} = VBG_1 - VC_1 - I_1 \cdot Z_1 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_6} = VBG_1 - VC_2 - I_2 \cdot Z_2 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_7} = VBG_2 - VC_2 - I_3 \cdot Z_3 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_8} = VBG_2 - VC_1 - I_4 \cdot Z_4 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_9} = VG_1 - VBG_1 - IG_1 \cdot ZG_1 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_{10}} = VG_2 - VBG_2 - IG_2 \cdot ZG_2 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_{11}} = VG_1 - 1.05 \cdot 230000 + Z_A{}^2 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_{12}} = VG_2 - 1.05 \cdot 230000 + Z_B{}^2 = 0$$

Cálculo de las resistencias en las líneas

$Ze_{1,1} := 0.00744 + .0372$

$Ze_{2,2} := 0.01008 + .0504$

$Ze_{3,3} := 0.00744 + .0372$

$Ze_{4,4} := 0.01272 + .0636$

$Ye11 := 0.0775$

$Ye22 := 0.1025$

$Ye33 := 0.0775$

$Ye44 := 0.1275$

$Ze_{5,5} := \left(\frac{Ye11}{2}\right)^{-1}$

$Ze_{9,9} := \left(\frac{Ye33}{2}\right)^{-1}$

$Ze_{6,6} := Ze_{5,5}$

$Ze_{10,10} := Ze_{9,9}$

$Ze_{11,11} := \left(\frac{Ye44}{2}\right)^{-1}$

$Ze_{7,7} := \left(\frac{Ye22}{2}\right)^{-1}$

$Ze_{12,12} := Ze_{11,11}$

$Ze_{8,8} := Ze_{7,7}$

Matriz de admitancias de elementos Ye

$$Ye := Ze^{-1}$$

Matriz de incidencia A

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz de admitancias de buses Ybus

$$Y := A^{T} \cdot Ye \cdot A$$

Matriz de impedancias de bus Zbus

$$Zbarra := Y^{-1}$$

$R := Re(Zbarra)$

$$R = \begin{bmatrix} 0.00291197 & -0.00178662 & -0.00079503 & -0.00007216 \\ -0.00178662 & 0.00293299 & -0.00007216 & -0.00130089 \\ -0.00079503 & -0.00007216 & 0.00291197 & -0.00178662 \\ -0.00007216 & -0.00130089 & -0.00178662 & 0.00293299 \end{bmatrix}$$

$Rg1 := R_{1,1}$ $\qquad Rg1 = 0.00291197460592$

$Rg2 := R_{4,4}$ $\qquad Rg2 = 0.00293298575285$

VALORES BASE

Voltaje Base: $\qquad Vb := 230$ kV

Potencia Base: $\qquad Pb := 100$ MVA

Resistencia Base: $\qquad Rb := \dfrac{Vb^2}{Pb}$ $\qquad Rb = 529$ Ω

Corriente Base: $\qquad Ib := \dfrac{100 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot Vb}$ $\qquad Ib = 251$ A

$ORIGIN \equiv 1$

$ZG1 := 0.002968949 \cdot 529$ $\qquad ZG2 := 0.00261734 \cdot 529$

$Z1 := 0.01008 \cdot 529$ $\qquad Z2 := 0.00744 \cdot 529$

$Z4 := 0.00744 \cdot 529$ $\qquad Z3 := 0.01272 \cdot 529$

$SC1 := -2.2 \cdot 100 \cdot 10^6$ $\qquad SC2 := -2.8 \cdot 100 \cdot 10^6$

CONDICIONES INICIALES:

$VC1 := 23000$ $VC2 := 23200$

$VG1 := 230000 \cdot 1.03$ $VG2 := 230000 \cdot 1.04$

$VBG1 := 230000 \cdot 1.0$ $VBG2 := 230000 \cdot 1.0$

$I1 := -352$ $I2 := -755$ $I3 := -400$ $I4 := -506$ $IG1 := 400$

$IG2 := 506$

$\lambda_1 := 32$ $\lambda_2 := 33$ $\lambda_3 := 39$ $\lambda_4 := 36$ $\lambda_5 := 52$

$\lambda_6 := 692$ $\lambda_7 := 692$ $\lambda_8 := 36$ $\lambda_9 := 52$

$\lambda_{10} := 692$

$\lambda_{11} := 692$ $\lambda_{12} := 692$

$ZA := 0$ $ZB := 0$

GIVEN

$$2 \cdot 3 \cdot IG1 \cdot ZG1 + \lambda_9 \cdot ZG1 - \lambda_1 = 0$$

$$2 \cdot 3 \cdot IG2 \cdot ZG2 + \lambda_{10} \cdot ZG2 - \lambda_2 = 0$$

$$2 \cdot 3 \cdot I1 \cdot Z1 + \lambda_5 \cdot Z1 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$2 \cdot 3 \cdot I2 \cdot Z2 + \lambda_6 \cdot Z2 - \lambda_1 - \lambda_4 = 0$$

$$2 \cdot 3 \cdot I3 \cdot Z3 + \lambda_7 \cdot Z3 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

$$2 \cdot 3 \cdot I4 \cdot Z4 + \lambda_8 \cdot Z4 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_9 = 0$$

$$\lambda_7 + \lambda_8 - \lambda_{10} = 0$$

$$\lambda_9 + \lambda_{11} = 0$$

$$\lambda_{10} + \lambda_{12} = 0$$

$$\lambda_5 + \lambda_8 + \lambda_3 \cdot \frac{SC1}{VC1^2 \cdot \sqrt{3}} = 0$$

$$\lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_4 \cdot \frac{SC2}{VC2^2 \cdot \sqrt{3}} = 0$$

$$2 \cdot \lambda_{11} \cdot ZA = 0$$

$$2 \cdot \lambda_{12} \cdot ZB = 0$$

$$-IG1 + I1 + I2 = 0$$

$$-IG2 + I3 + I4 = 0$$

$$\frac{SC1}{VC1 \cdot \sqrt{3}} + I1 + I4 = 0$$

$$\frac{SC2}{VC2 \cdot \sqrt{3}} + I2 + I3 = 0$$

$$VBG1 - VC1 - I1 \cdot Z1 = 0$$

$$VBG1 - VC2 - I2 \cdot Z2 = 0$$

$$VBG2 - VC2 - I3 \cdot Z3 = 0$$

$$VBG2 - VC1 - I4 \cdot Z4 = 0$$

$$VG1 - VBG1 - IG1 \cdot ZG1 = 0$$

$$VG2 - VBG2 - IG2 \cdot ZG2 = 0$$

$$VG1 - 1.05 \cdot 230000 + ZA^2 = 0$$

$$VG2 - 1.05 \cdot 230000 + ZB^2 = 0$$

Solución a las ecuaciones anteriores:

Tabla 2.2: Resultado del cálculo de las pérdidas (etapa I)

Descripción	*Variables*	*Resultados*	*unidades*
Corriente de la Línea 1	i1	207.98	Amperios
Corriente de la Línea 2	i2	411.90	Amperios
Corriente de la Línea 3	i3	264.76	Amperios
Corriente de la Línea 4	i4	322.54	Amperios
Corriente del Generador 1	Ig1	619.88	Amperios
Corriente del Generador 2	Ig2	587.30	Amperios
Voltaje del Generador 1	VG1	241500.00	Voltios
Voltaje en el bus del generador 1	VBG1	240526.43	Voltios
Voltaje del Generador 2	VG2	241500.00	Voltios
Voltaje en el bus del generador 2	VBG2	240686.84	Voltios
Voltaje de Carga 1	VC1	239417.39	Voltios
Voltaje de Carga 2	VC2	238905.29	Voltios
Variables de Inecuación	ZA	0.00	Adimencional
Variables de Inecuación	ZB	0.00	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 1$	7368.99	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 2$	3554.89	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 3$	2043.64	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 4$	4149.82	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 5$	517.30	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 6$	455.30	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 7$	-443.55	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 8$	-512.77	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 9$	972.60	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 10$	-956.32	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 11$	-972.60	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 12$	956.32	Adimencional

Cálculo de las pérdidas en las líneas del sistema:

$$PL := \left[\left(I_{1,1}\right)^2 \cdot Z1 + \left(I_{2,1}\right)^2 \cdot Z2 + \left(I_{3,1}\right)^2 \cdot Z3 + \left(I_{4,1}\right)^2 \cdot Z4\right] \cdot 3$$

PL = 5338635.1965180

$$PU := \frac{PL}{100 \cdot 10^6}$$

Cálculo de las pérdidas en por unidad:

PU = 0.0533863

CONCLUSIONES DEL CAPITULO II.

- Notablemente se puede observar que el método de optimización por el multiplicador de Lagrange, es un método efectivo, para encontrar el máximo o el mínimo de un sistema de ecuaciones y más importante aun es relativamente más fácil de aplicación que los métodos comúnmente aplicados.

- El ejercicio presentado en este capítulo realiza la función de optimización de pérdidas; pero no se han considerado las funciones de costo de los generadores, ejercicio pendiente para posteriores análisis.

- El valor de pérdidas encontrado es menor que el obtenido en el flujo de carga del problema tratado en el texto de Análisis de sistemas de potencia [REF 2], al ser pasado a valores reales será un valor donde será más notable la diferencia.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

[1] Kirchmayer, Leon K.
Economic Operation of Power Systems
U.S.A
General Electric Company
1958

[2] Grainger John J. & Stevenson, William D. Jr.
Análisis de Sistemas de Potencia
México
McGRAW-HILL/Interamericana de México S.A de C.V.
1994

[3]. Apostol, Tom M.
Calculus Volumen II
Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a la probabilidad.
Editorial Reverté, S.A.
2ª Edición

[4] Dr. Bowen, D.W & Dr. Kruempel, K.C
Power System Interconnections Short Course
U.S.A.
Iowa State University
1974.

CAPITULO III

DESPACHO ECONOMICO TRADICIONAL Y METODO DE EL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE.

Introducción:

En el capítulo anterior, se alcanzaron buenos resultados, al presentar además de algunos objetivos y bases teóricas para la solución del problema de optimización de pérdidas en líneas de transmisión; se presento el primer ejercicio (Etapa I) del problema de optimización de pérdidas utilizando el multiplicador de Lagrange, y aunque en este ejercicio las funciones de costos de los generadores no fueron incluidas en el análisis y solo se tomaron en cuenta las ecuaciones de pérdidas en las líneas los resultados fueron satisfactorios, aunque también hay que hacer notar que no se tiene dominio de las partes imaginarias de las variables involucradas en el análisis.

En el presente capítulo se presenta el desarrollo del problema de despacho económico de la forma en que se ha desarrollado tradicionalmente es decir utilizando el método de las reducciones múltiples y no como es tratado en algunos libros de texto de sistemas de potencia (aunque varios de los métodos sean muy similares). También se presenta el análisis de optimización de pérdidas tomando en cuenta además de las pérdidas de transmisión, las funciones de costos de los generadores con lo cual se completa la función objetivo que forma parte del ejercicio de la etapa II.

Al final de este capítulo se hacen unas pequeñas aclaraciones y restricciones del porqué tomar solo la parte real de algunas variables que en la realidad son complejas, las cuales están involucradas en la ecuación general (tanto en la función objetivo como en las limitantes).

3.1 Análisis tradicionales en el flujo de carga y despacho económico.

La importancia de los flujos de potencia radica en la útil información que brinda para la planeación y diseño de las futuras expansiones (o cambios en general) de los sistemas de potencia; la valiosa información que se obtiene de estos estudios son esencialmente la magnitud y ángulo de fase del voltaje de cada bus, así como también las potencias real y reactivas que fluyen en cada línea del sistema, aunque no es la única información útil que se puede obtener de estos análisis. El cálculo de pérdidas obtenido a través de el flujo de carga no es un cálculo parte de él, mas bien es un cálculo extra hecho con los resultados obtenidos de voltajes e impedancias ya conocidas.

Muchas de las soluciones del Flujo de Potencia, son necesarias para aliviar los períodos de sobrecarga que frecuentemente son causados por los períodos de demandas picos de energía, el flujo de potencia es de gran utilidad ya que además de minimizar los costos de instalación al evitar el aumentar líneas de transmisión y transformadores entre otros elementos, para poder cubrir la demanda de energía solicitada en las horas picos, también ayudan a conocer las respuestas (comportamiento) del sistema en condiciones de contingencias que podrían ocurrir.

Refiriéndonos a contingencias a la pérdida de un importante elemento de transmisión o de una unidad grande de generación, en los peores casos la combinación de algunos de estos.

El problema de ingeniería dentro del flujo de carga, es la minimización de la inversión requerida para construir un sistema que resistirá las más severas contingencias o las peores combinaciones esperadas de éstas.

Antes de 1930 todos los cálculos de flujo de potencia fueron hechos a "mano", sin ayuda de equipo tecnológico para los cálculos; entre 1930 y 1956 los calculadores o analizadores de redes eran los que se usaban para darles solución al problema de flujo de potencia; estos dispositivos eran modelos miniatura de las redes que serian estudiadas, el comportamiento del sistema era determinado por la medida directa de la cantidad eléctrica en el modelo.

El primer método desarrollado para la solución de las ecuaciones que describen una red eléctrica fue el algoritmo de Gauss-Seidel para la solución de ecuaciones lineales; pero tal método padecía de una grave desventaja; en 1960 debido al incremento en el número de interconexiones en alto voltaje, causaron que el número de buses usados en la representación de un sistema creciera muy rápidamente; el método de Gauss-Seidel encontró grandes dificultades en encontrar la solución de las grandes redes y el problema se encontraba en que el número de iteraciones para encontrar la solución se incrementaba dramáticamente para los grandes sistemas.

Un exitoso método de cálculo de flujo de potencia fue el resultado de varios años de investigación por Bonneville Power Administration, él cual en su método hace uso del algoritmo de Newton-Raphson para resolver las ecuaciones cuadráticas simultáneas que describen al sistema de potencia. El número de iteraciones requeridas para obtener la solución de las ecuaciones es prácticamente independiente del tamaño del sistema, así que muchos problemas que no podían ser resueltos por el método de Gauss-Seidel son exitosamente resueltos por el método de Newton-Raphson.

El algoritmo de Newton-Raphson es un poco más susceptible a las fallas que los otros métodos, solo si los valores de que son asumidos al principio del problema no son justificadamente (cuidadosamente) seleccionados.

Otro algoritmo de flujo de potencia fue desarrollado en el cual convergieron buenas características, tal método recibe el nombre de la Z-matriz, pero este método tiene la gran desventaja de que se requiere de una gran cantidad de memoria de computadora, por la razón de que no se dio a conocer como los demás métodos antes mencionados.

Como lo mencionado con anterioridad los estudios de despacho económico han llevado consigo un enorme trabajo y muchos cálculos, tradicionalmente para realizar un estudio de despacho económico (en la actualidad), se comienza con un análisis previo de flujo de cargas, el cual nos entrega valores de voltaje de buses, potencia de generación activa y reactiva y corrientes de líneas, los cuales son los datos iniciales con los cuales se comienza a trabajar en el despacho económico ocupando el algoritmo que se considera más conveniente para su solución, si nos adelantamos un poco y notamos que el resultado final del despacho económico nos entregará los valores en los cuales debe estar el sistema para que éste actúe de la manera más económica posible, que son voltajes, corrientes y potencias de generación, entonces surge la interrogante ¿para que sirven los datos del flujo de carga, si el despacho económico encontrará otros (los cambiara)?, la respuesta es simple, los valores de condiciones iniciales en el despacho económico no se pueden poner al azar, ya que es muy posible que los valores colocados sin el previo flujo de carga no sean permitidos en el sistema o que sufran una gran sensibilidad a los más pequeños casos de contingencias que podrían ocurrir, lo cual nos llevaría a un sistema que adolece de mucha sensibilidad.

Para comenzar el estudio de flujo de potencia se inicia con la introducción del diagrama unifilar del sistema, donde para cada línea son necesarios los valores de la impedancia Z y la admitancia total de carga de la línea Y, para obtener la matriz de admitancias primitivas (Gabriel Kron).

Con lo explicado con anterioridad, haremos de la manera más breve posible (ya que no es nuestro objetivo, el desarrollo de los análisis tradicionales; sino la comparación de estos con el nuevo método de optimización).

3.2 Flujo de potencia o de carga.

Para la solución de flujo de potencia es una práctica general la de identificar tres tipos de buses en la red, los cuales son: El bus de carga, el bus de voltaje controlado, el bus de compensación; en todos ellos se especifican dos de las cuatro cantidades siguientes; δi, $|Vi|$, Pi y Qi. Cada bus antes mencionado se determina con el siguiente análisis:

Buses de carga.

Son los buses que no tienen generación por lo que Pgi y Qgi son iguales a cero y las potencias Pdi y Qdi son previamente conocidas de los datos de la carga, entonces las dos cantidades desconocidas para especificar por completo el bus y a ser determinadas son δi y $|Vi|$.

Buses de voltaje controlado.

Es cualquier bus del sistema en donde la magnitud de voltaje se mantiene constante, comúnmente se eligen los buses de los generadores ya que en estos se puede controlar el voltaje a través de la excitación del generador. En tales buses se especifican Pgi y |Vi|, entonces las cantidades a determinar son δi y Qgi

Buses de Compensación.

Es el bus donde el ángulo del voltaje sirve como referencia para los ángulos de todos los demás buses del sistema, el ángulo que se le asigne al bus (δi) no es de relevancia ya que los demás ángulos serán calculados como la diferencia entre ellos (el del bus de compensación y los demás buses), comúnmente además de ser una buena práctica el ángulo es cero δi = 0 y el otro dato conocido es |Vi|, por lo cual las cantidades a determinar son Pi y Qi.

Luego de haber identificado las tres clases de buses y haberle asignado a cada uno los valores conocidos, el estudio de flujo de potencia es básicamente darle solución a la ecuación general, que relaciona la potencia demandada, la potencia generada y las perdidas del sistema, en una considerable cantidad de ecuaciones que se relacionan entre sí, y que se pueden escribir de forma compacta de la siguiente forma:

$$P_L = \sum_{i=1}^{N} P_{gi} - \sum_{i=1}^{N} P_{di}$$

Donde :
P_L = es la ecuación que representa las pérdidas totales I^2R en las líneas de transmisión y transformadores de la red.
P_{gi} = La potencia programada que se está generando en el bus *i*.
P_{di} = La potencia programada que demanda la carga en el bus *i*.

Y es en la solución de la ecuación anterior donde se vuelve de gran importancia las técnicas computacionales en el flujo de potencia, ya que la ecuación anterior puede ser solucionada por varios métodos en los que figuran tradicionalmente, los métodos ya mencionados como son los de Gauss-Seidel y Newton-Raphson, entre otros.

Entonces auxiliándonos de software matemático (MathCad) para la solución de ecuaciones múltiples lineales presentamos el siguiente ejemplo de un flujo de potencia, para el sistema de cuatro barras de la figura 2.2.

3.2.1 Ejercicio de flujo de carga o potencia, tradicional.

CONDICIONES INICIALES EN POR UNIDAD:

Sobre las siguientes bases. 230 kV y 100MVA

Voltaje de Generador 1	$VG1 := 1.0 + 0i$
Voltaje de carga 1	$VC1 := 0.97 + 0.01i$
Voltaje de carga 2	$VC2 := 0.97 + 0.01i$
Voltaje de Generador 1	$VG2 := 0.97 + 0.01i$
Potencia de Generador 1	$SG1 := 0.9 + 0.01i$
Potencia de Generador 2	$SG2 := 3.18 + 0.1i$
Potencia de Carga 1	$SC1 := -2.2 - 1.3684i$
Potencia de Carga 2	$SC2 := -2.8 - 1.7352i$

Desarrollando la ecuación general del flujo de potencia:

$$P_i - jQ_i = \overline{V_i} \cdot \sum_{n=1}^{N} Y_{in} \cdot V_n$$

Donde :

$$P_i - jQ_i = \overline{S}$$

Ya sean potencia de un generador o de la carga.

GIVEN

$$\left(\overline{SG1}\right) = \left(\overline{VG1}\right) \cdot \left(VG1 \cdot Y_{1,1} + VG2\, Y_{1,2} + VC1 \cdot Y_{1,3} + VC2_{1,4}\right)$$

$$\left(\overline{SG2}\right) = \left(\overline{VG2}\right) \cdot \left(VG1 \cdot Y_{2,1} + VG2 \cdot Y_{2,2} + VC1 \cdot Y_{2,3} + VC2_{2,4}\right)$$

$$\left(\overline{SC1}\right)=\left(\overline{VC1}\right)\cdot\left(VG1\cdot Y_{3,1}+VG2\cdot Y_{3,2}+VC1\cdot Y_{3,3}+VC2\cdot Y_{3,4}\right)$$

$$\left(\overline{SC2}\right)=\left(\overline{VC2}\right)\cdot\left(VG1\cdot Y_{4,1}+VG2\cdot Y_{4,2}+VC1\cdot Y_{4,3}+VC2\cdot Y_{4,4}\right)$$

$$Re(SG2)=3.18$$

$$|VG2|=1.0$$

$$\begin{bmatrix} VG2 \\ VC1 \\ VC2 \\ SG1 \\ SG2 \end{bmatrix} := FIND(VG2, VC1, VC2, SG1, SG2)$$

$$\begin{bmatrix} VG2 \\ VC1 \\ VC2 \\ SG1 \\ SG2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99909335 + 0.04257319i \\ 0.96021921 - 0.01807352i \\ 0.94204765 - 0.04321583i \\ 1.91322074 + 1.87451607i \\ 3.18 + 1.32852088i \end{bmatrix}$$

Valores en pu sobre la base de 230 kV y 100 MVA

$Pg1 := Re(SG1)$ $\qquad$ $Pg2 := Re(SG2)$

$Qg1 := Im(SG1)$ $\qquad$ $Qg2 := Im(SG2)$

CALCULO DE LAS PERDIDAS

$Perdidas := SG1 + SG2 + SC1 + SC2$

$Re(Perdidas) = 0.09322074$ Pérdidas obtenidas del flujo de Potencia en PU.

3.3 La ecuación de pérdidas de transmisión.

Para la solución del despacho económico es esencial el manejo de la ecuación de las pérdidas de transmisión, la cual según el método descrito en el libro de Análisis de Sistemas de Potencia de Grainger y Stevenson Jr. se escribe en forma compacta de la forma siguiente:

$$P_L = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} P_{gi} B_{ij} P_{gj} + \sum_{i=1}^{K} B_{i0} P_{gi} + B_{00}$$

Donde:
B son conocidos como los coeficientes de pérdidas.

Pero resulta la pregunta que ¿de que manera se obtiene tales coeficientes?, entonces con un poco de lectura podemos darnos cuenta que la manera en que estos coeficientes son obtenidos es un procedimiento muy largo, difícil y de mucha delicadeza, por lo cual la aclaración de este método es muy largo y tedioso por lo cual no lo desarrollaremos, así que presentaremos un método parecido y relativamente mas fácil de hacer, que el antes mencionado, son ambos, de metodología similar ya que ambos hacen uso de coeficientes, los cuales en el segundo método son encontrados por medio de arreglos matriciales encontradas por transformaciones de reducciones múltiples, y ambos métodos buscan con los coeficientes el único objetivo de colocar las pérdidas de transmisión en función de las potencias de generación.

3.3.1 Determinación de los coeficientes de las pérdidas de transmisión.

El objetivo que se persigue es obtención de las pérdidas de transmisión en función de las potencias de generación
Para comenzar se combinan las corrientes en los buses y de la carga para formar la corriente de carga total (ICT).

Corriente de carga 1

$$IC1 = \frac{\overline{SC1}}{\overline{VC1}} \qquad IC1 = -2.2635181 + 1.46769584i$$

Corriente de carga 2

$$IC2 = \frac{\overline{SC2}}{\overline{VC2}} \qquad IC2 = -2.88168637 + 1.97414056i$$

Corriente de carga total es igual:

$$ICT := IC1 + IC2 \qquad ICT = -5.14520447 + 3.4418364i$$

Entonces a continuación se presenta el cálculo de las constantes K las cuales, son el equivalente de los coeficiente (*B*) de las pérdidas de transmisión, determinados en el libro de Grainger y Stevenson Ref[4], con la diferencia que este es el método tradicionalmente ocupado, ya que este, está hecho a través del método de reducciones múltiples, ambos tienen en común que no son mas, que los coeficientes necesarios para transformar todas las pérdidas del sistema en función de las potencias de generación.

cálculo de los factores K1 y K2

$$K1 := \frac{IC1}{ICT} \qquad K1 = 0.43575439 + 0.00623872i$$

$$K2 := \frac{IC2}{ICT} \qquad K2 = 0.56424561 - 0.00623872i$$

Ip = C1 x Inueva

$$\begin{bmatrix} IG1 \\ IG2 \\ IC1 \\ IC2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K1 \\ 0 & 0 & K2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} IG1 \\ IG2 \\ ICT \end{pmatrix}$$

$$C1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K1 \\ 0 & 0 & K2 \end{bmatrix}$$

Calculando Znueva2

$$Znueva2 := C1^{T} \cdot Znueva1 \cdot C1$$

Inueva1 = C2 x Inueva2

$$\begin{pmatrix} IG1 \\ IG2 \\ ICT \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} IG1 \\ IG2 \end{pmatrix}$$

$$C3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando Znueva3 :

$$Znueva3 := C3^T \cdot Znueva2 \cdot C3$$

$$Znueva3 = \begin{pmatrix} 0.00428748 + 0.02143856i & 0.00002779 - 0.00012746i \\ 0.00002779 - 0.00012746i & 0.00518629 + 0.02528182i \end{pmatrix}$$

MATRIZ SIMETRICA "A" SERA IGUAL A Znueva3

$$A := Znueva3$$

$$R := \frac{A + \overline{A}}{2}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0.00428748 & 0.00002779 \\ 0.00002779 & 0.00518629 \end{pmatrix}$$

Los cuales son los coeficientes (R) que nos permiten colocar las pérdidas de transmisión en función de las potencias de generación.

3.3.2 Ejemplo de despacho económico con pérdidas.

Ya habiendo encontrado los coeficientes necesarios, para transformar todas las ecuaciones de pérdidas en función de las potencias de generación, lo cual es parte inherente de un despacho económico con pérdidas tradicional, pero se separo para no enredar el lector, con tal largo cálculo y presentar el despacho económico en una forma más entendible, ya que luego de encontrar los coeficientes el ejercicio se resume, en las siguientes ecuaciones y solución:

VALORES INICIALES DEL FLUJO DE CARGA Y ECUACIONES DE COSTOS INCREMENTALES DE GENERACION.

$a1 := 0.8$ $\qquad$ $a2 := 0.96$

$b1 := 8.0$ $\qquad$ $b2 := 6.4$

Condiciones iniciales:

$Sg1 := 2.6 + 0.0001i$

$Sg2 := 3.2 + 0.0001i$

$\lambda := 0.06 + 0.001i$

Giver

$$2 \cdot R_{1,1} \cdot \frac{Sg1}{VG1^2} + 2 \cdot R_{1,2} \cdot \frac{Sg2}{VG1 \cdot VG2} = 1 - \frac{a1 \cdot Sg1 + b1}{\lambda}$$

$$2 \cdot R_{1,2} \cdot \frac{Sg1}{VG1 \cdot VG2} + 2 \cdot R_{2,2} \cdot \frac{Sg2}{VG2^2} = 1 - \frac{a2 \cdot Sg2 + b2}{\lambda}$$

$$R_{1,1} \cdot \frac{Sg1^2}{VG1^2} + 2 \cdot R_{1,2} \cdot \frac{Sg1 \cdot Sg2}{VG1 \cdot VG2} + R_{2,2} \cdot \frac{Sg2^2}{VG2^2} - Sg1 - Sg2 + 5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} Sg1 \\ Sg2 \\ \lambda \end{pmatrix} := \mathrm{find}(Sg1, Sg2, \lambda)$$

$$\begin{pmatrix} Sg1 \\ Sg2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.94089269 - 0.01619649i \\ 3.12612671 + 0.01198676i \\ 9.71610473 - 0.01461783i \end{pmatrix}$$ valores en pu.

$$|SG2| = 312.61496876$$

$$|SG1| = 194.09602693$$

$$|\lambda| = 9.71611572$$

Valores Reales para las potencias dados en MW:

$$SG1 := Sg1 \cdot 100$$
$$SG1 = 194.08926917 - 1.61964912i$$

$$SG2 := Sg2 \cdot 100$$
$$SG2 = 312.61267068 + 1.19867578i$$

$$\lambda = 9.71610473 - 0.01461783i$$

Donde:

SG1= Potencia del Generador N°1
SG2= Potencia del Generador N°2
λ = Coeficiente de Lagrange, que representa el costo incremental de combustible del sistema de generación.

3.4 Cálculo de perdidas en las líneas utilizando el multiplicador de Lagrange (etapa II).

El sistema de cuatro buses de la figura 2.2 tiene los datos de líneas y buses dados en la tabla 2.1. Los costos increméntales de combustible en dólares por megawatt-hora de las dos unidades generadoras están dados por $0.0080/2Pg1^2+8Pg1$, y $0.0096/2Pg2^2+6.4Pg2$ respectivamente. Determinar las perdidas mínimas de transmisión del sistema.

La ecuación que representa las pérdidas en las líneas está dada por la suma de las pérdidas por efecto Joule en las resistencias de los generadores mas las de las líneas y a está sumatoria hay que agregarle las funciones de costo de generación de cada generador, que en este caso en particular, solo son dos generadores, y está dada por:

$$
\begin{aligned}
P_L = {} & 3\cdot C1\cdot Ig_1^2\cdot Rg_1 + 3\cdot C2\cdot Ig_2^2\cdot Rg_2 + 3\cdot C3\cdot I_1^2\cdot R_1 + 3\cdot C4\cdot I_2^2\cdot R_2 + 3\cdot C5\cdot I_3^2\cdot R_3 + 3\cdot C6\cdot I_4^2\cdot R_4 \\
& +\left(0.004\cdot VG_1^2\cdot Ig_1^2 + 8\cdot VG_1\cdot Ig_1\right)+\left(0.0048\cdot VG_2^2\cdot Ig_2^2 + 6.4\cdot VG_2\cdot Ig_2\right)-\lambda_1(Ig_1+I_1+I_2) \\
& -\lambda_2(Ig_2+I_3+I_4)-\lambda_3\left(\frac{Sc_1}{Vc_1\cdot\sqrt{3}}+I_1+I_4\right)-\lambda_4\left(\frac{Sc_2}{Vc_2\cdot\sqrt{3}}+I_2+I_3\right)-\lambda_5(VBG_1-Vc_1-I_1\cdot R_1) \\
& -\lambda_6(VBG_1-Vc_2-I_2\cdot R_2)-\lambda_7(VBG_2-Vc_2-I_3\cdot R_3)-\lambda_8(VBG_2-Vc_1-I_4\cdot R_4) \\
& -\lambda_9(VG_1-VBG_1-Ig_1\cdot Rg_1)-\lambda_{10}(VG_2-VBG_2-Ig_2\cdot Rg_2)-\lambda_{11}(VG_1-1.05\cdot 230KV+Z_A^2) \\
& -\lambda_{12}(VG_2-1.05\cdot 230KV+Z_B^2)
\end{aligned}
$$

Derivando P_L parcialmente e igualando a cero:

$$\frac{\partial P_L}{\partial Ig_1}=3\cdot 0.008\cdot IG_1\cdot VG_1^{\,2}+8\cdot\sqrt{3}\cdot VG_1+2\cdot 3\cdot C1\cdot Ig_1\cdot Rg_1+\lambda_9\cdot Rg_1-\lambda_1=0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial Ig_2}=3\cdot 0.0096\cdot IG_2\cdot VG_2^2+6.4\cdot\sqrt{3}\cdot VG_2+2\cdot 3\cdot C2\cdot Ig_2\cdot Rg_2+\lambda_{10}\cdot Rg_2-\lambda_2=0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial I_1}=2\cdot 3\cdot C3\cdot I_1\cdot R_1+\lambda_5\cdot R_1-\lambda_1-\lambda_3=0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial I_2}=2\cdot 3\cdot C4\cdot I_2\cdot R_2+\lambda_6\cdot R_2-\lambda_1-\lambda_4=0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial I_3}=2\cdot 3\cdot C5\cdot I_3\cdot R_3+\lambda_7\cdot R_3-\lambda_2-\lambda_4=0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial I_4}=2\cdot 3\cdot C6\cdot I_4\cdot R_4+\lambda_8\cdot R4-\lambda_2-\lambda_3=0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VBG_1}=\lambda_5+\lambda_6-\lambda_9=0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VBG_2} = \lambda_7 + \lambda_8 - \lambda_{10} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VG_1} = 3 \cdot 0.008 \cdot IG_1^2 \cdot VG_1 + 8 \cdot \sqrt{3} \cdot IG_1 - \lambda_9 - \lambda_{11} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VG_2} = 3 \cdot 0.0096 \cdot IG_2^2 \cdot VG_2 + 6.4 \cdot \sqrt{3} \cdot IG_2 - \lambda_{10} - \lambda_{12} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VC_1} = \lambda_5 + \lambda_8 + \lambda_3 \cdot \frac{SC_1}{VC_1{}^2 \cdot \sqrt{3}} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial VC_2} = \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_4 \cdot \frac{SC_2}{VC_2{}^2 \cdot \sqrt{3}} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial\ Z_A} = 2 \cdot \lambda_{11} \cdot Z_A$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial\ Z_B} = 2 \cdot \lambda_{12} \cdot Z_B$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_1} = -IG_1 + I_1 + I_2 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_2} = -IG_2 + I_3 + I_4 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_3} = \frac{SC_1}{VC_1 \cdot \sqrt{3}} + I_1 + I_4 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_4} = \frac{SC_2}{VC_2 \cdot \sqrt{3}} + I_2 + I_3 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_5} = VBG_1 - VC_1 - I_1 \cdot Z_1 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_6} = VBG_1 - VC_2 - I_2 \cdot Z_2 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_7} = VBG_2 - VC_2 - I_3 \cdot Z_3 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_8} = VBG_2 - VC_1 - I_4 \cdot Z_4 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_9} = VG_1 - VBG_1 - IG_1 \cdot ZG_1 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_{10}} = VG_2 - VBG_2 - IG_2 \cdot ZG_2 = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_{11}} = VG_1 - 1.05 \cdot 230000 + Z_A^{\ 2} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \lambda_{12}} = VG_2 - 1.05 \cdot 230000 + Z_B^{\ 2} = 0$$

A continuación se procederá a la solución del sistema de ecuaciones que son las condiciones de primer orden mas las ecuaciones de las limitantes, utilizando los mismos valores base del problema de la etapa I.

DATOS DEL PROBLEMA:

$Z1 := 0.01008 \cdot 529$

$Z2 := 0.00744 \cdot 529$

$Z3 := 0.01272 \cdot 529$

$Z4 := 0.00744 \cdot 529$

$ZG1 := 0.002968949 \cdot 529$

$ZG2 := 0.00261734 \cdot 529$

$SC1 := -\left(2.2 \cdot 100 \cdot 10^{6}\right)$

$SC2 := -\left(2.8 \cdot 100 \cdot 10^{6}\right)$

CONDICIONES INICIALES PARA LA SOLUCION:

$I1 := -352$

$I2 := -755$

$I3 := -400$

$I4 := -506$

$IG1 := 400$

$IG2 := 506$

$VC1 := 230000$

$VC2 := 232000$

$VG1 := 230000 \cdot 1.03$

$VG2 := 230000 \cdot 1.04$

$\lambda_1 := 32$

$\lambda_2 := 33$

$\lambda_3 := 39$

$\lambda_4 := 36$

$\lambda_5 := 52$

$\lambda_6 := 692$

$\lambda_7 := 692$

$\lambda_8 := 36$

$\lambda_9 := 52$

$\lambda_{10} := 692$

$\lambda_{11} := 692$

$\lambda_{12} := 92$

$C1 := 1110$

$C2 := 2220$

$C3 := 416$

$C4 := 118$

$C5 := 210$

$C6 := 312$

$ZA := 0$ $ZB := 0$

$VBG1 := 230000 \cdot 1.0$ $VBG2 := 230000 \cdot 1.0$

SOLUCION A LAS ECUACIONES:

$$3 \cdot 0.008 \cdot IG1 \cdot VG1^2 + \sqrt{3} \cdot 8 \cdot VG1 + 2 \cdot C1 \cdot 3 \cdot IG1 \cdot ZG1 + \lambda_9 \cdot ZG1 - \lambda_1 = 0$$

$$3 \cdot 0.0096 \cdot IG2 \cdot VG2^2 + \sqrt{3} \cdot 6.4 \cdot VG2 + 2 \cdot C2 \cdot 3 \cdot IG2 \cdot ZG2 + \lambda_{10} \cdot ZG2 - \lambda_2 = 0$$

$$2 \cdot C3 \cdot 3 \cdot I1 \cdot Z1 + \lambda_5 \cdot Z1 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$2 \cdot C4 \cdot 3 \cdot I2 \cdot Z2 + \lambda_6 \cdot Z2 - \lambda_1 - \lambda_4 = 0$$

$$2 \cdot C5 \cdot 3 \cdot I3 \cdot Z3 + \lambda_7 \cdot Z3 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

$$2 \cdot C6 \cdot 3 \cdot I4 \cdot Z4 + \lambda_8 \cdot Z4 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_9 - \lambda_5 - \lambda_6 = 0$$

$$\lambda_{10} - \lambda_7 - \lambda_8 = 0$$

$$3 \cdot 0.008 \cdot IG1^2 \cdot VG1 + 8 \cdot \sqrt{3} \cdot IG1 - \lambda_9 - \lambda_{11} = 0$$

$$3 \cdot 0.0096 \cdot IG2^2 \cdot VG2 + 6.4 \cdot \sqrt{3} \cdot IG2 - \lambda_{10} - \lambda_{12} = 0$$

$$\lambda_5 + \lambda_8 + \lambda_3 \cdot \frac{SC1}{VC1^2 \cdot \sqrt{3}} = 0$$

$$\lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_4 \cdot \frac{SC2}{VC2^2 \cdot \sqrt{3}} = 0$$

$$2 \cdot \lambda_{11} \cdot ZA = 0$$

$$2\cdot\lambda_{12}\cdot ZB=0$$

$$-IG1+I1+I2=0$$

$$-IG2+I3+I4=0$$

$$\frac{SC1}{VC1\cdot\sqrt{3}}+I1+I4=0$$

$$\frac{SC2}{VC2\cdot\sqrt{3}}+I2+I3=0$$

$$VBG1-VC1-I1\cdot Z1=0$$

$$VBG1-VC2-I2\cdot Z2=0$$

$$VBG2-VC2-I3\cdot Z3=0$$

$$VBG2-VC1-I4\cdot Z4=0$$

$$VG1-VBG1-IG1\cdot ZG1=0$$

$$VG2-VBG2-IG2\cdot ZG2=0$$

$$VG1-1.05\cdot 230000+ZA^2=0$$

$$VG2-1.05\cdot 230000+ZB^2=0$$

La solución al sistema de ecuaciones anterior es:

Tabla 3.1: Resultados del cálculo de las pérdidas (etapa II)

Descripción	*Variables*	*Resultados*	*unidades*
Corriente de la Línea 1	I1	207.98	Amperios
Corriente de la Línea 2	I2	411.90	Amperios
Corriente de la Línea 3	I3	264.76	Amperios
Corriente de la Línea 4	I4	322.54	Amperios
Corriente del Generador 1	Ig1	619.88	Amperios
Corriente del Generador 2	Ig2	587.30	Amperios
Voltaje del Generador 1	VG1	241500.00	Voltios

Tabla 3.1 (continuación).

Voltaje en el bus del generador 1	VBG1	240526.43	Voltios
Voltaje del Generador 2	VG2	241500.00	Voltios
Voltaje en el bus del generador 2	VBG2	240686.84	Voltios
Voltaje de Carga 1	VC1	239417.39	Voltios
Voltaje de Carga 2	VC2	238905.29	Voltios
Variables de Inecuación	ZA	0.00	Adimensional
Variables de Inecuación	ZB	0.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 1$	769933667000.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 2$	1066295730000.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 3$	-945183461000.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 4$	-885532212000.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 5$	-32866100100.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 6$	-29371631700.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 7$	26863500500.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 8$	30771665600.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 9$	-62237731800.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 10$	57635166100.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 11$	64464889600.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	$\lambda 12$	-55236135800.00	Adimensional

Cálculo de las pérdidas del sistema en las cuatro líneas:

$$PL := \left[\left(I_{1,1}\right)^2 \cdot Z1 + \left(I_{2,1}\right)^2 \cdot Z2 + \left(I_{3,1}\right)^2 \cdot Z3 + \left(I_{4,1}\right)^2 \cdot Z4 \right] \cdot 3$$

$$PL = 5338635.196518 \qquad PU := \frac{PL}{100 \cdot 10^6}$$

Las pérdidas en por unidad son:

$$PU = 0.05338635$$

3.5 Aclaraciones y restricciones para las etapas I y II.

P_{gi} es la potencia real la cual causa casi en su totalidad los costos de generación, debido a que cuando se demanda mayor potencia, necesitaremos mayor cantidad de energía en la generación lo que influye en mayores costos. Ahora nos preguntamos que pasa con la potencia reactiva Q_{gi}, la cual depende en su mayoría de la corriente de excitación de campo de la unidad generadora, y del tipo de carga que se conecta al sistema; pero estas no requieren fuente de energía extra, por tal razón los costos increméntales se definen como función solamente de las potencias reales activas, si profundizamos un poco nos podemos hacer la pregunta si valdrá la pena, analizar el sistema con todas las variables y constantes ocupadas, con sus valores en números complejos, con un reflejo mayor de la realidad a la que trabajan, y la respuesta es que si, y por tal razón el siguiente capitulo está dedicado al análisis total y completo del método de el multiplicador de Lagrange con todas los valores con parte real e imaginaria.

CONCLUSIONES DEL CAPITULO III.

- Al hacer una comparación directa entre los métodos tradicionalmente ocupados y el método propuesto, que es uno de los objetivos de este capitulo (la comparación), podríamos hacer mucho más sobresaliente la diferencia que estos dos muestran y enlistando todas las dificultades de trabajo, comprensión y transformaciones que involucra el desarrollo de despacho económico tradicional; pero no está en nuestros objetivos principales detallar estas diferencias, sino más bien explicar el método propuesto y comparar con el tradicional y así poder ver los beneficios que este posee, principalmente en la tarea de minimización de pérdidas.

- El método tradicional tiene la gran desventaja que necesita, de la etapa de transformación, en donde todas las corrientes y voltajes del sistema deben estar representadas en función de los voltajes y corrientes de generación, lo cual es regularmente de mucho trabajo y tiempo.

- Existen métodos mas complicados aun más que él presentado para comparación, los cuales nos llevarían varias hojas de este capítulo, pero es de nuestro pensar que para fin de comparación es evidente la diferencia por simple inspección, entre estos dos métodos, principalmente en el trabajo de análisis y los resultados obtenidos.

- El resultado del ejercicio de la primera etapa sin considerar las funciones de costos es igual al resultado obtenido en la segunda etapa al utilizar las funciones de costos de los generadores, por lo cual es de esperar que el valor obtenido en ambos casos es el valor hasta el cual se puede minimizar claro está, respetando las limitantes impuestas en el sistema.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Brown Homer E.
Solution of Large Networks by Matrix Methods
U.S.A.
Editorial John Wiley & Sons, Inc.
1975

[2] González René Andreu
Cubas Escobar Jorge Alberto
"Estudio de despacho Económico en Sistemas de Potencia "
Tesis para optar al grado de Ingeniero Electricista. Biblioteca de la F.I.A
Universidad de El Salvador
1978

[3] Hayt, William H. Jr. & Kemmerly Jack E.
Análisis de Circuitos en Ingeniería
(Tercera Edición en Español)
Editorial Mc Graw-Hill
1993 Quinta Edición.

[4] Grainger John J. & Stevenson, William D. Jr.
Análisis de Sistemas de Potencia
México
McGRAW-HILL/Interamericana de México S.A de C.V.
1994 por McGRAW-HILL-Inc., U.S.A.

CAPITULO IV

ANALISIS COMPLETO CON PARTE IMAGINARIA

Introducción:

En el análisis de este capítulo se presenta en forma completa la solución al problema de encontrar las pérdidas mínimas en líneas de transmisión utilizando la parte imaginaria de todas las variables involucradas para la solución al problema, es de hacer resaltar que además de presentarse un ejercicio sin funciones de costos, en donde solo se considera las pérdidas de transmisión; se presenta también otro ejercicio que involucra además de las pérdidas de transmisión, las funciones de costo; tal ves este capitulo contraste en gran parte con los capítulos anteriores, en especial con el capitulo 3, principalmente con la parte en que se presenta los ejercicios sin funciones de costo y con funciones de costos; pero que se analiza exclusivamente con la parte real, lo cual es justificado en el mismo capitulo (porque son los valores que al final buscamos minimizar), de igual manera a continuación se presenta la justificación de la necesidad de el análisis completo con parte imaginaria, aunque el objetivo final sigue siendo el mismo.

4.1 Justificación del Análisis de la Parte Imaginaria.

Es cierto que la única potencia de interés para la minimización de pérdidas es la parte real de estas, entonces ¿porque insistimos en que es necesaria la parte imaginaria? Con una simple inspección de los números complejos podemos notar que de la multiplicación de dos números complejos resulta otro número complejo; pero la parte real del resultado tiene una contribución de la parte imaginaria y de igual forma la parte real contribuye en el resultado de la parte imaginaria.

Esto es fácil de demostrar con el siguiente ejemplo:

Si tenemos, una corriente y una impedancia de los siguientes valores:

$$I = 5 - 2.5i \qquad\qquad Z = 0.05 + 0.4i$$

(se ocuparon los anteriores valores para hacer la diferencia mas notable).

Y si solo contamos con la parte imaginaria y luego ambas partes para su previo análisis, podríamos tener los dos siguientes casos, para el cálculo de las pérdidas por efecto Joule I^2R; es de hacer notar que únicamente se usa la parte real de la impedancia:

$$5^2 \cdot 0.05 = 1.25 \qquad\qquad (5 - 2.5i)^2 \cdot 0.05 = 0.938 - 1.25i$$

el primer resultado es igual a 1.25 W y el segundo resultado es de 0.938 W y está diferencia dependerá en gran parte del valor de la parte imaginaria del número complejo; y en el peor de los casos para demostrar la diferencia de ambos análisis, se presenta el siguiente ejemplo:

$$(5 - 2.5i)^2 \cdot (0.05 + 0.4i) = 10.938 + 6.25i$$

Donde es de manera obvia que el valor de las pérdidas reales se ve en gran proporción incrementado.

Aunque al final se persigue la minimización especialmente de la parte real de las pérdidas (Watts), será necesaria en el transcurso de su análisis la inclusión de las partes imaginarias, para que el resultado sea de la mejor forma, el verdadero reflejo de la realidad.

4.2 Definición de la potencia compleja.

Está potencia se define como el producto del voltaje por el conjugado de la corriente. Por lo general se le designa con la letra S, y en su forma rectangular está dada por:

$$S = V \cdot I^* = |V||I| \cdot \cos(\alpha - \beta) + j|V||I|\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \qquad \text{VA}$$

Donde $(\alpha-\beta)$ es el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente.

De la ecuación anterior también podemos definir a la potencia compleja de forma mas compacta de la siguiente forma:

$$S = P + jQ$$

Donde P es la potencia real dada en Watts y Q es la potencia reactiva dada en var (voltio amperio reactivo).

Si $V=I \times Z$, donde Z es la impedancia, entonces a la potencia compleja la podemos expresar de la siguiente forma:

$$S = I \cdot Z \cdot I^*$$

4.3 Cálculo de pérdidas en las líneas utilizando el multiplicador de Lagrange con parte imaginaria sin funciones de costos (etapa III).

El sistema de cuatro barras de la figura 2.2 tiene todos los datos de líneas y buses dados en la tabla 2.1. Para nuestro tercer ejercicio es de interés tomar en cuenta la parte imaginaria de todas las variables que tengan valor en números complejos; pero de igual forma como se hizo en la primera parte del capitulo del análisis real solo nos interesa la ecuación de pérdidas de transmisión y las ecuaciones limitantes con sus respectivos multiplicadores de Lagrange dentro de la función objetivo, por lo cual no se incluirán las funciones de costos.

Entonces el ejercicio consistirá en la determinación de las pérdidas mínimas de transmisión del sistema. La ecuación general de pérdidas en función de las corrientes y las resistencias en las líneas que para nuestro trabajo forma la parte esencial de la función objetivo, como sigue:

$$SL = 3 \cdot Ig_1^2 \cdot Zg_1 + 3 \cdot Ig_2^2 \cdot Zg_2 + 3 \cdot I_1^2 \cdot Z_1 + 3 \cdot I_2^2 \cdot Z_2 + 3 \cdot I_3^2 \cdot Z_3 + 3 \cdot I_4^2 \cdot Z_4$$

Donde:

Ig1, Ig2 = son las corrientes de los generadores 1 y 2 respectivamente.

I1,I2,I3,I4 =son las corrientes de las líneas 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Zg1,Zg2 = son las impedancias de los generadores 1 y 2.

Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 = son las impedancias de las líneas 1,2,3 y 4 respectivamente.

SL = Función objetivo.

LAS IMPEDANCIAS DE LAS LINEAS DE TRANSMISION SON.

$Z_1 := 0.1008 + 0.0504i$ $\qquad$ $Z_2 := 0.00744 + 0.0372i$

$Z_3 := 0.001272 + 0.0636i$ $\qquad$ $Z_4 := 0.00744 + 0.0372i$

SL es la función "objeto" para minimizar, la cual está sujeta a las siguientes limitantes, las cuales son ecuaciones de nodos y ecuaciones de caídas de voltaje en las líneas de transmisión y están dadas por:

Ecuaciones de caidas de voltaje	Ecuaciones de Nodo
$Vg1 - Vc2 - I2 \cdot Z_2 := 0$	$Ig1 + I1 + I2 := 0$
$Vg1 - Vc1 - I1 \cdot Z_1 := 0$	$Ig2 + I3 + I4 := 0$
$Vg2 - Vc2 - I3 \cdot Z_3 := 0$	$IC1 + I1 + I4 := 0$
$Vg2 - Vc1 - I4 \cdot Z_4 := 0$	$IC2 + I2 + I3 := 0$

Donde:

IC1,IC2 = son las corrientes de las cargas 1 y 2.

Vc1,Vc2 = son los voltajes de las cargas 1 y 2.

Vg1,Vg2 = son los voltajes de los generadores 1 y 2.

Entonces el Lagrangiano está dado por la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
L = {} & 3 \cdot Ig_1^2 \cdot Zg_1 + 3 \cdot Ig_2^2 \cdot Zg_2 + 3 \cdot I_1^2 \cdot Z_1 + 3 \cdot I_2^2 \cdot Z_2 + 3 \cdot I_3^2 \cdot Z_3 + 3 \cdot I_4^2 \cdot Z_4 - \lambda_1 (Ig_1 + I_1 + I_2) \\
& - \lambda_2 (Ig_2 + I_3 + I_4) - \lambda_3 \left(\frac{Sc_1}{Vc_1 \cdot 3} + I_1 + I_4\right) - \lambda_4 \left(\frac{Sc_2}{Vc_2 \cdot 3} + I_2 + I_3\right) - \lambda_5 (VBG_1 - Vc_1 - I_1 \cdot Z_1) \\
& - \lambda_6 (VBG_1 - Vc_2 - I_2 \cdot Z_2) - \lambda_7 (VBG_2 - Vc_2 + I_3 \cdot Z_3) - \lambda_8 (VBG_2 - Vc_1 + I_4 \cdot Z_4) \\
& - \lambda_9 (VG_1 - VBG_1 + Ig_1 \cdot Zg_1) - \lambda_{10} (VG_2 - VBG_2 + Ig_2 \cdot Zg_2) - \lambda_{11} (VG_1 - 1.05 \cdot 230KV + Z_A^2) \\
& - \lambda_{12} (VG_2 - 1.05 \cdot (229.760 + 9.945i)KV + Z_B^2)
\end{aligned}
$$

Donde: $\lambda_1 \ldots \lambda_{12}$: Son los multiplicadores de Lagrange para cada limitante.

Derivando L (Lagrangiano) parcialmente e igualando a cero, es decir; las condiciones de primer orden son:

$$\frac{d}{dIg1} L = 2 \cdot 3 \cdot IG1 \cdot ZG1 + \lambda_9 \cdot ZG1 - \lambda_1 = 0 \qquad \frac{d}{dIg2} L = 2 \cdot 3 \cdot IG2 \cdot ZG1 + \lambda_{10} \cdot ZG2 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{d}{dI1}L=2\cdot 3\cdot I1\cdot Z1+\lambda_5\cdot Z1-\lambda_1-\lambda_3=0 \qquad \frac{d}{dI2}L=2\cdot 3\cdot I2\cdot Z2+\lambda_6\cdot Z2-\lambda_1-\lambda_4=0$$

$$\frac{d}{dI3}L=2\cdot 3\cdot I3\cdot Z3+\lambda_7\cdot Z3-\lambda_2-\lambda_4=0 \qquad \frac{d}{dI4}L=2\cdot 3\cdot I4\cdot Z4+\lambda_8\cdot Z4-\lambda_2-\lambda_3=0$$

$$\frac{d}{dVBG1}L=\lambda_5+\lambda_6-\lambda_9=0 \qquad \frac{d}{dVBG2}L=\lambda_7+\lambda_8-\lambda_{10}=0$$

$$\frac{d}{dVG1}L=\lambda_9+\lambda_{11}=0 \qquad \frac{d}{dVG2}L=\lambda_{10}+\lambda_{12}=0$$

$$\frac{d}{dVC1}L=\lambda_5+\lambda_8+\lambda_3\cdot\frac{SC1}{VC1^2\cdot 3}=0 \qquad \frac{d}{dVC2}L=\lambda_6+\lambda_7+\lambda_4\cdot\frac{SC2}{VC2^2\cdot 3}=0$$

$$\frac{d}{dZA}L=2\cdot\lambda_{11}\cdot ZA=0 \qquad \frac{d}{dZB}L=2\cdot\lambda_{12}\cdot ZB=0$$

$$\frac{d}{d\lambda_1}L=-IG1+I1+I2=0 \qquad \frac{d}{d\lambda_2}L=-IG2+I3+I4=0$$

$$\frac{d}{d\lambda_3}L=\frac{SC1}{VC1\cdot 3}+I1+I4=0 \qquad \frac{d}{d\lambda_4}L=\frac{SC2}{VC2\cdot 3}+I2+I3=0$$

$$\frac{d}{d\lambda_5}L=VBG1-VC1-I1\cdot Z1=0 \qquad \frac{d}{d\lambda_6}L=VBG1-VC2-I2\cdot Z2=0$$

$$\frac{d}{d\lambda_7}L=VBG2-VC2-I3\cdot Z3=0 \qquad \frac{d}{d\lambda_8}L=VBG2-VC1-I4\cdot Z4=0$$

$$\frac{d}{d\lambda_9}L=VG1-VBG1-IG1\cdot ZG1=0 \qquad \frac{d}{d\lambda_{10}}L=VG2-VBG2-IG2\cdot ZG2=0$$

$$\frac{d}{d\lambda_{11}}L=VG1-1.05\cdot(230000-0.1i)+ZA^2=0$$

$$\frac{d}{d\lambda_{12}}L = VG2 - 1.05\cdot(229760 - 9945i) + ZB^2 = 0$$

A continuación se procederá a la solución del sistema de ecuaciones que son las condiciones de primer orden más las ecuaciones de las limitantes.

Valores Base

Voltaje Base:	$Vb := 230$	kV
Potencia Base:	$Pb := 100$	MVA
Resistencia Base:	$Rb := 529$	Ω

SOLUCION DEL PROBLEMA SIN FUNCIONES DE COSTO CON LAGRANGE

$ZG1 := (0.002968949 + 0.238i)\cdot 529$

$ZG2 := (0.00261734 + 0.3869i)\cdot 529$

$Z1 := (0.01008 + 0.0504i)\cdot 529$

$Z3 := (0.01272 + 0.0636i)\cdot 529$

$Z2 := (0.00744 + 0.0372i)\cdot 529$

$Z4 := (0.00744 + 0.0372i)\cdot 529$

$SC1 := -(2.2 - 1.3634i)\cdot 100\cdot 10^6$

$SC2 := -(2.8 - 1.7352i)\cdot 100\cdot 10^6$

$I1 := -(452 + 256i)$

$VC1 := 229000 - 10342i$

$I2 := -(456 + 345i)$

$VC2 := 228750 - 5345i$

$I3 := -(400 + 234i)$

$I4 := -(306 + 136i)$

$VG1 := (230000 - 10i)\cdot 1.05$

$VG2 := (230000 - 9791.627i)\cdot 1.05$

$IG1 := 900 + 234i$

$VBG1 := (229350 - 8763i)\cdot 1.0$

$IG2 := 806 + 345i$ $VBG2 := (229579 - 2563i) \cdot 1.0$

$ZA := 0 + 0i$

$ZB := 0 + 0i$

$\lambda_1 := -(326 + 234i)$ $\lambda_2 := -(337 + 123i)$

$\lambda_3 := -(398 + 233i)$ $\lambda_4 := -(360 + 278i)$

$\lambda_5 := -(520 + 346i)$ $\lambda_6 := -(692 + 423i)$

$\lambda_7 := -(692 + 239i)$ $\lambda_8 := -(367 + 278i)$

$\lambda_9 := -(526 + 324i)$ $\lambda_{10} := -(692 + 412i)$

$\lambda_{11} := -(692 + 419i)$ $\lambda_{12} := -(692 + 389i)$

GIVEN

$2 \cdot 3 \cdot IG1 \cdot ZG1 + \lambda_9 \cdot ZG1 - \lambda_1 = 0$

$2 \cdot 3 \cdot IG2 \cdot ZG1 + \lambda_{10} \cdot ZG2 - \lambda_2 = 0$

$2 \cdot 3 \cdot I1 \cdot Z1 + \lambda_5 \cdot Z1 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0$

$2 \cdot 3 \cdot I2 \cdot Z2 + \lambda_6 \cdot Z2 - \lambda_1 - \lambda_4 = 0$

$2 \cdot 3 \cdot I3 \cdot Z3 + \lambda_7 \cdot Z3 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0$

$2 \cdot 3 \cdot I4 \cdot Z4 + \lambda_8 \cdot Z4 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$

$\lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_9 = 0$

$\lambda_7 + \lambda_8 - \lambda_{10} = 0$

$\lambda_9 + \lambda_{11} = 0$

$$\lambda_{10} + \lambda_{12} = 0$$

$$\lambda_5 + \lambda_8 - \lambda_3 \cdot \frac{SC1}{VC1^2 \cdot 3} = 0$$

$$\lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_4 \cdot \frac{SC2}{VC2^2 \cdot 3} = 0$$

$$2 \cdot \lambda_{11} \cdot ZA = 0$$

$$2 \cdot \lambda_{12} \cdot ZB = 0$$

$$-IG1 + I1 + I2 = 0$$

$$-IG2 + I3 + I4 = 0$$

$$\frac{SC1}{VC1 \cdot 3} + I1 + I4 = 0$$

$$\frac{SC2}{VC2 \cdot 3} + I2 + I3 = 0$$

$$VBG1 - VC1 - I1 \cdot Z1 = 0$$

$$VBG1 - VC2 - I2 \cdot Z2 = 0$$

$$VBG2 - VC2 - I3 \cdot Z3 = 0$$

$$VBG2 - VC1 - I4 \cdot Z4 = 0$$

$$VG1 - VBG1 - IG1 \cdot ZG1 = 0$$

$$VG2 - VBG2 - IG2 \cdot ZG2 = 0$$

$$VG1 - 1.05 \cdot (230000 - 0.1i) + ZA^2 = 0$$

$$VG2 - 1.05 \cdot (229760 - 9945i) + ZB^2 = 0$$

La solución a las ecuaciones anteriores se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 4.1: Resultado del cálculo de las pérdidas (etapa III)

Descripción	*Variables*	*Resultados*	*unidades*
Corriente de la Línea 1	i1	199.552-44.963i	Amperios
Corriente de la Línea 2	i2	329.034-76.399i	Amperios
Corriente de la Línea 3	i3	126.560-34.985i	Amperios
Corriente de la Línea 4	i4	157.699-44.332i	Amperios
Corriente del Generador 1	ig1	528.591-121.362i	Amperios
Corriente del Generador 2	ig2	284.260-79.318i	Amperios
Voltaje del Generador 1	VG1	241500-0.105i	Voltios
Voltaje en el bus del generador 1	VBG1	225390.102-66360.194i	Voltios
Voltaje del Generador 2	VG2	241248-10442.25i	Voltios
Voltaje en el bus del generador 2	VBG2	224620.325-68511.965i	Voltios
Voltaje de Carga 1	VC1	223127.242-71440.824i	Voltios
Voltaje de Carga 2	VC2	222591.643-72534.597i	Voltios
Variables de Inecuación	ZA	0.00	Adimensional
Variables de Inecuación	ZB	0.00	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l1	161129.247+292434.162i	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l2	159813.723+294287.398i	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l3	-144876.034-273706.905i	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l4	-139311.737-265163.631i	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l5	-404.691-181.309i	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l6	-428.542-341.148i	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l7	190.166-209.553i	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l8	205.374-262.764i	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l9	-833.234-522.458i	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l10	395.540-472.317i	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l11	833.234+522.458i	Adimensional
Multiplicador de Lagrange	l12	-395.540+472.317i	Adimensional

Cálculo de las pérdidas de transmisión.

$$PL := \left[\left(I_{1,1}\right)^2 \cdot Z1 + \left(I_{2,1}\right)^2 \cdot Z2 + \left(I_{3,1}\right)^2 \cdot Z3 + \left(I_{4,1}\right)^2 \cdot Z4 \right] \cdot 3$$

y las pérdidas totales son:

$$PL = 8505920.18370831 + 10691234.0092754i$$

$|PL| = 13662106.82188891$ La magnitud de las pérdidas

Las pérdidas en PU son:

$$PU := \frac{PL}{100 \cdot 10^6} \qquad (PU) = 0.0850592 + 0.10691234i$$

4.4 Cálculo de pérdidas en las líneas utilizando el multiplicador de Lagrange con parte imaginaria y funciones de costos (etapa IV).

En el siguiente ejercicio se hará uso de las funciones de costos incrementales, dentro de la función objetivo, tal como se hizo anteriormente, aunque solo con la parte real de las variables, debemos tener presente que las potencias de los generadores Sg1 y Sg2 se deben de expresar en función de las corrientes y los voltajes de los generadores respectivamente, entonces las expresiones de la potencia de los generadores queda de la siguiente manera:

$$SG1 := 3 \cdot VG1 \cdot IG1 \qquad SG2 := 3 \cdot VG2 \cdot IG2$$

y su cuadrado de la siguiente manera:

$$SG1^2 := 9 \cdot VG1^2 \cdot IG1^2 \qquad SG2^2 := 9 \cdot VG2^2 \cdot IG2^2$$

El ejercicio sigue consistiendo en la determinación de las pérdidas mínimas de transmisión del sistema. Las funciones de costos incrementales y la ecuacion general de pérdidas en función de las corrientes y las resistencias en las líneas que para nuestro trabajo forma la parte esencial de la función objetivo, como sigue:

$$SL = \frac{9 \cdot 0.008}{2} VG1^2 IG1^2 + 3 \cdot 8.0 \cdot VG1 \cdot IG1 + \frac{9 \cdot 0.096}{2} VG2^2 IG2^2 + 3 \cdot 6.4 \cdot VG2 \cdot IG2$$
$$+ 3 \cdot C1 \cdot Ig1^2 \cdot Zg_1 + 3 \cdot C2 \cdot Ig_2^2 \cdot Zg_2 + 3 \cdot C3 \cdot I_1^2 \cdot Z_1 + 3 \cdot C4 \cdot I_2^2 \cdot Z_2 + 3 \cdot C5 \cdot I_3^2 \cdot Z_3 + 3 \cdot C5 \cdot I_4^2 \cdot Z_4$$

Donde:

Ig1, Ig2 = son las corrientes de los generadores 1 y 2 respectivamente.

I_1, I_2, I_3, I_4 =son las corrientes de las líneas 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Zg1, Zg2 = son las impedancias de los generadores 1 y 2.

Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 = son las impedancias de las líneas 1,2,3 y 4 respectivamente.

C1...C6 = es el valor del costo los Mega-watts por hora

SL = Función objetivo.

Ahora el Lagrangiano con la introducción de las funciones de costos incrementales queda de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
L = & \frac{9\cdot 0.008}{2} VG1^2 IG1^2 + 3\cdot 8.0\cdot VG1\cdot IG1 + \frac{9\cdot 0.096}{2} VG2^2 IG2^2 + 3\cdot 6.4\cdot VG2\cdot IG2 \\
& + 3\cdot C1\cdot Ig1^2\cdot Zg_1 + 3\cdot C2\cdot Ig_2^2\cdot Zg_2 + 3\cdot C3\cdot I_1^2\cdot Z_1 + 3\cdot C4\cdot I_2^2\cdot Z_2 + 3\cdot C5\cdot I_3^2\cdot Z_3 + 3\cdot C6\cdot I_4^2\cdot Z_4 \\
& - \lambda_1(Ig_1 + I_1 + I_2) - \lambda_2(Ig_2 + I_3 + I_4) - \lambda_3\left(\frac{Sc_1}{Vc_1\cdot 3} + I_1 + I_4\right) - \lambda_4\left(\frac{Sc_2}{Vc_2\cdot 3} + I_2 + I_3\right) \\
& - \lambda_5(VBG_1 - Vc_1 - I_1\cdot Z_1) - \lambda_6(VBG_1 - Vc_2 - I_2\cdot Z_2) - \lambda_7(VBG_2 - Vc_2 + I_3\cdot Z_3) \\
& - \lambda_8(VBG_2 - Vc_1 + I_4\cdot Z_4) - \lambda_9(VG_1 - VBG_1 + Ig_1\cdot Zg_1) - \lambda_{10}(VG_2 - VBG_2 + Ig_2\cdot Zg_2) \\
& - \lambda_{11}(VG_1 - 1.05\cdot 230KV + Z_A^2) - \lambda_{12}(VG_2 - 1.05\cdot(229.760 + 9.945i)KV + Z_B^2)
\end{aligned}
$$

SOLUCION DEL PROBLEMA CON FUNCIONES DE COSTO CON LAGRANGE

$ZG1 := (0.002968949 + 0.2381i)\cdot 529$

$ZG2 := (0.00261734 + 0.3869i)\cdot 529$

$Z1 := (0.01008 + 0.0504i)\cdot 529$

$Z3 := (0.01272 + 0.0636i)\cdot 529$

$Z2 := (0.00744 + 0.0372i)\cdot 529$

$Z4 := (0.00744 + 0.0372i)\cdot 529$

$SC1 := -(2.2 - 1.3634i)\cdot 100\cdot 10^6$

$SC2 := -(2.8 - 1.7352i)\cdot 100\cdot 10^6$

$I1 := -(452 + 256i)$

$I2 := -(456 + 345i)$

$I3 := -(400 + 234i)$

$I4 := -(306 + 136i)$

$IG1 := 900 + 234i$

$IG2 := 806 + 345i$

$ZB := 0 + 0i$

$ZA := 0 + 0i$

$VC1 := 229000 - 10342i$

$VC2 := 228750 - 5345i$

$VG1 := (230000 - 10i)\cdot 1.05$

$VG2 := (230000 - 9791.627i)\cdot 1.05$

$VBG1 := (229350 - 8763i)\cdot 1.0$

$VBG2 := (229579 - 2563i)\cdot 1.0$

$\lambda_1 := -(326 + 234i)$ $\qquad$ $\lambda_2 := -(337 + 123i)$

$\lambda_3 := -(398 + 233i)$ $\qquad$ $\lambda_4 := -(360 + 278i)$

$\lambda_5 := -(520 + 346i)$ $\qquad$ $\lambda_6 := -(692 + 423i)$

$\lambda_7 := -(692 + 239i)$ $\qquad$ $\lambda_8 := -(367 + 278i)$

$\lambda_9 := -(526 + 324i)$ $\qquad$ $\lambda_{10} := -(692 + 412i)$

$\lambda_{11} := -(692 + 419i)$ $\qquad$ $\lambda_{12} := -(692 + 389i)$

$C1 := 10$ $\qquad$ $C2 := 22$ $\qquad$ $C3 := 26$

$C4 := 8$ $\qquad$ $C5 := 21$ $\qquad$ $C6 := 31$

GIVEN

$$9\cdot 0.008\cdot IG1\cdot VG1^2 + 3\cdot 8\cdot VG1 + 2\cdot\ \ C1\cdot 3\cdot IG1\cdot ZG1 + \lambda_9\cdot ZG1 - \lambda_1 = 0$$

$$9\cdot 0.0096\cdot IG2\cdot VG2^2 + 3\cdot 6.4\cdot VG2 + 2\ C23\cdot IG2\cdot ZG2 + \lambda_{10}\cdot ZG2 - \lambda_2 = 0$$

$$2\cdot C3\cdot 3\cdot I1\cdot Z1 + \lambda_5\cdot Z1 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$2\cdot C4\cdot 3\cdot I2\cdot Z2 + \lambda_6\cdot Z2 - \lambda_1 - \lambda_4 = 0$$

$$2\cdot C5\cdot 3\cdot I3\cdot Z3 + \lambda_7\cdot Z3 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

$$2\cdot C6\cdot 3\cdot I4\cdot Z4 + \lambda_8\cdot Z4 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_9 = 0$$

$$\lambda_7 + \lambda_8 - \lambda_{10} = 0$$

$$9\cdot 0.008\cdot IG1^2\cdot VG1 + 8\cdot 3\cdot IG1 - \lambda_9 - \lambda_{11} = 0$$

$$9\cdot 0.0096\cdot IG2^2\cdot VG2 + 6.4\cdot 3\cdot IG2 - \lambda_{10} - \lambda_{12} = 0$$

$$\lambda_5 + \lambda_8 + \lambda_3\cdot\frac{SC1}{VC1^2\cdot 3} = 0$$

$$\lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_4\cdot\frac{SC2}{VC2^2\cdot 3} = 0$$

$$2\cdot\lambda_{11}\cdot ZA = 0$$

$$2\cdot\lambda_{12}\cdot ZB = 0$$

$$-IG1 + I1 + I2 = 0$$

$$-IG2 + I3 + I4 = 0$$

$$\frac{SC1}{VC1\cdot 3} + I1 + I4 = 0$$

$$\frac{SC2}{VC2\cdot 3} + I2 + I3 = 0$$

$$VBG1 - VC1 - I1\cdot Z1 = 0$$

$$VBG1 - VC2 - I2 \cdot Z2 = 0$$

$$VBG2 - VC2 - I3 \cdot Z3 = 0$$

$$VBG2 - VC1 - I4 \cdot Z4 = 0$$

$$VG1 - VBG1 - IG1 \cdot ZG1 = 0$$

$$VG2 - VBG2 - IG2 \cdot ZG2 = 0$$

$$VG1 - 1.05 \cdot (230000 - 0.1i) + ZA^2 = 0$$

$$VG2 - 1.05 \cdot (229760 - 9945i) + ZB^2 = 0$$

La solución a las ecuaciones anteriores son las siguientes:

Tabla 4.2: Resultados del cálculo de las pérdidas (etapa IV)

Descripción	*Variables*	*Resultados*	*unidades*
Corriente de la Línea 1	i1	199.508-44.941i	Amperios
Corriente de la Línea 2	i2	328.998-76.368i	Amperios
Corriente de la Línea 3	i3	126.595-34.983i	Amperios
Corriente de la Línea 4	i4	157.740-44.329i	Amperios
Corriente del Generador 1	ig1	528.507-121.309i	Amperios
Corriente del Generador 2	ig2	284.336-79.312i	Amperios
Voltaje del Generador 1	VG1	241500-0.105i	Voltios
Voltaje en el bus del generador 1	VBG1	225390.420-66377.640i	Voltios
Voltaje del Generador 2	VG2	241248-10442.25i	Voltios
Voltaje en el bus del generador 2	VBG2	224621.547-68527.535i	Voltios
Voltaje de Carga 1	VC1	223128.378-71457.209i	Voltios
Voltaje de Carga 2	VC2	222592.721-72551.375i	Voltios
Variables de Inecuación	ZA	0.00	Adimencional
Variables de Inecuación	ZB	4.141E-12-3.115E-12i	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	l1	1.635E+12-1.002E+12i	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	l2	1.711E+12-1.008E+12i	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	l3	-1700404290000+973030926000i	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	l4	-1692524380000+961470475000i	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	l5	-1473917460+2160753570i	Adimencional

Tabla 4.2 (Continuación).

Multiplicador de Lagrange	l6	-2484751490+2429468500i	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	l7	-1041262600-764147068i	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	l8	-1292367780-808446030i	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	l9	-3958668950+4590222080i	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	l10	-2333630380-1572593100i	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	l11	8.559E+9-6.819E+9i	Adimencional
Multiplicador de Lagrange	l12	3.847E+9+5.652E+8i	Adimencional

Ahora calculando las perdidas de transmisión en las líneas:

$$PL := \left[\left(I_{1,1}\right)^2 \cdot Z1 + \left(I_{2,1}\right)^2 \cdot Z2 + \left(I_{3,1}\right)^2 \cdot Z3 + \left(I_{4,1}\right)^2 \cdot Z4\right] \cdot 3$$

$PL = 8503512.24949113 + 10690851.86487516i$ en VA

y su magnitud es

$|PL| = 13660308.7144453$

Al final las pérdidas en PU son:

$$PU := \frac{PL}{100 \cdot 10^6} \qquad (PU) = 0.08503512 + 0.10690852i$$

4.5 Ecuación general de pérdidas, utilizando multiplicadores de Lagrange, en forma matricial.

A continuación se presenta la ecuación de forma general que representa las pérdidas de un sistema de potencia, utilizando la matriz de incidencia, la Z (elemento), los multiplicadores de Lagrange asociados a cada limitante, la ecuación en forma general representa los ejercicios de la etapa I y II, por lo no se incluyen las funciones de costos de los generadores, además, al final de la ecuación se adhiere las limitantes, que son desigualdades; las cuales tienen la función de limitar los voltajes de los generadores (en este caso en particular), pero estas podrían limitar cualquier otra variable.

$$SL=\begin{bmatrix} Ig1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ign \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} Ig1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ign \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} Zg1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Zgn \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} I1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Im} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Im} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} Z1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Zm \end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_P \end{bmatrix}\cdot\left[[A]^T\cdot\begin{bmatrix} I1 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_m \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} Ig1 \\ \cdot \\ Ign \\ SC1/\sqrt{3}VC1 \\ \cdot \\ SCj/\sqrt{3}VCj \end{bmatrix}\right]-\left[\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_Q \end{bmatrix}\cdot[A]\cdot\begin{bmatrix} Vg1 \\ \cdot \\ Vgn \\ VC1 \\ \cdot \\ VCj \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} Z1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Zm \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{Im} \end{bmatrix}\right]$$

$$-\begin{bmatrix} \lambda d1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda ds \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{bmatrix} v1 \\ \cdot \\ \cdot \\ vs \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} k1 \\ \cdot \\ \cdot \\ ks \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ZA^2 \\ ZB^2 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}\right]$$

Donde:

SL : La ecuación de pérdidas general
n: representa al número de generadores de la red de potencia.
j: representa al número de cargas de la red de potencia.
P y Q: son la cantidad de multiplicadores para las limitantes de corriente y voltaje respectivamente.
fcg1...fgcn: son las funciones de costo de los generadores.
A: Matriz de incidencia nodal.
Zg1...Zgn : son las impedancias de los generadores.
Z1...Zm: son las impedancias de las líneas
Ig1...Ign: son las corrientes en los generadores.
SC1...SCj: son las potencias de cargas ya conocidas.
VG1...VGn: son los voltajes en los generadores.
VC1...VCj: son los voltajes de las cargas.
$\lambda_1 ... \lambda_P, \lambda 1 ... \lambda_Q$: son multiplicadores de Lagrange.
$\lambda d1 ... \lambda ds$: son los multiplicadores que se agregan por cada desigualdad.
ZA,ZB... : son las constantes que se le deben de agregar a las limitantes con desigualdades.
v1...vs : son las variables limitadas por las desigualdades.
k1..ks: son los valores que limitaran las variables de la desigualdad.

Ahora se presenta la ecuación de forma general que representa las pérdidas de un sistema de potencia, utilizando las mismas variables que del caso anterior con la diferencia que ahora se incluye las funciones de costo de los generadores y las constantes que convierten las potencias a las unidades de las funciones de costo, está ecuación representa en forma general los ejercicios de las etapas III y IV.

$$
SL=\begin{bmatrix} C1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cn \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} Ig1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ign \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} Ig1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ign \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} Zg1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Zgn \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} C1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cm \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{bmatrix} I1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Im} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Im} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} Z1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Zm \end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix} fcg1 \\ \cdot \\ \cdot \\ fcgn \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_P \end{bmatrix}\cdot\left[[A]^T\cdot\begin{bmatrix} I1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{Im} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} Ig1 \\ \cdot \\ Ign \\ SC1/\sqrt{3}VC1 \\ \cdot \\ SCj/\sqrt{3}VCj \end{bmatrix}\right]
$$

$$
-\left[\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_Q \end{bmatrix}\cdot[A]\cdot\begin{bmatrix} Vg1 \\ \cdot \\ Vgn \\ VC1 \\ \cdot \\ VCj \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} Z1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Zm \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{Im} \end{bmatrix}\right]-\begin{bmatrix} \lambda d1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda ds \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{bmatrix} v1 \\ \cdot \\ \cdot \\ vs \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} k1 \\ \cdot \\ \cdot \\ ks \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ZA^2 \\ ZB^2 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}\right]
$$

Donde:

Las variables anteriores siguen siendo validas

fcg1...fcgn: son las funciones de costo de cada generador.

C1...Cn: son las constantes que transforman las unidades de las potencias a las unidades de las funciones de costo.

El resultado de una forma muy general de la ecuación matricial anterior (tomando la ecuación con funciones de costo) es el siguiente:

$$
SL=\begin{bmatrix} C1Ig1^2 Zg1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CnIgn^2 Zgn \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C1I1^2 Z1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Cm\,\mathrm{Im}^2\, Zm \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} fcg1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ fcgn \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda_1\left(\sum Inodo\right)_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_R\left(\sum Inodo\right)_R \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda_1\left(\sum Vrama\right)_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_F\left(\sum Vrama\right)_F \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda d_1\left(v1-k1+ZA^2\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda d_S\left(v_i-ki+ZB^2\right) \end{bmatrix}
$$

Donde:

R : es el número de ecuaciones de nodo.

F : es el número de ecuaciones de rama.

S : es la cantidad de limitantes como desigualdades.

La derivada con respecto a cada variable, las cuales incluyen las corrientes y voltajes de generación, las corrientes de línea y los multiplicadores de Lagrange, (excluyendo las impedancias de las líneas y de los generadores, las constantes de las desigualdades y las constantes que transforman las potencias a unidades de la función de costo), después de derivar se igualan a cero y estas formaran el sistema de ecuaciones a solucionar para encontrar las pérdidas mínimas. El total de estas derivadas formaran tres grupos de ecuaciones las n condiciones de primer orden y el conjunto de m ecuaciones limitantes, mas las ecuaciones de las desigualdades del sistema, que son mas que todo algunas restricciones que se deben respetar.

El resultado de la derivada de la ecuación matricial, en una forma general se muestra en el anexo A, y una respuesta a está derivada de una forma mas especifica al problema que se ha trabajado durante todo el documento se encuentra en el anexo B.

CONCLUSIONES DE CAPITULO IV.

- Después de haber finalizado el estudio del problema para encontrar las pérdidas mínimas en las líneas de transmisión utilizando las partes imaginarias de los voltajes, las corrientes y las potencias tanto en las cargas como en los generadores podemos darnos cuenta, que se obtienen valores mayores que los resultados obtenidos cuando se analizo el problema solo con la parte real, vistos en las soluciones de las etapas I y II. Esto nos hace concluir, que es necesario utilizar en el análisis, la parte imaginaria para encontrar la solución a las perdidas mínimas de un sistema, ya que este representara con mayor realidad un sistema y de igual forma las pérdidas son mas realistas.

- Para encontrar las pérdidas mínimas de un sistema es necesario conocer las impedancias de los generadores y de las líneas; ya que el planteamiento de las ecuaciones lo requieren a parte de que es un parámetro muy importante dentro del análisis el cual lo hace más real.

- Con el análisis del sistema utilizando la parte imaginaria, se logran como resultado final importantes valores tanto como para variables, como para las pérdidas con sus partes real e imaginaria.

- Los métodos tradicionales para encontrar la solución al flujo de carga y luego realizar el despacho económico, para encontrar las pérdidas mínimas de un sistema no necesitan conocer las impedancias de los generadores. Para el método del multiplicador de Lagrange si es necesario conocerlas ya que es un dato primordial para el planteamiento de las ecuaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Grainger John J. & Stevenson, William D. Jr.

Análisis de Sistemas de Potencia

México
McGRAW-HILL/Interamericana de México S.A de C.V.
1994 por McGRAW-HILL-Inc., U.S.A.

[2] Brown Homer E.
Solution of Large Networks by Matrix Methods
U.S.A.
Editorial John Wiley & Sons, Inc.
1975

[3] Hayt, William H. Jr. & Kemmerly Jack E.
Análisis de Circuitos en Ingeniería
(Tercera Edición en Español)
Editorial Mc Graw-Hill
1993 Quinta Edición.

CONCLUSIONES GENERALES.

- Todos los métodos de despacho económico han sido prácticamente la continuación o mejoría de los estudios anteriormente realizados, por lo cual en todos ellos se observa una similitud o parecido en sus ecuaciones generales o planteamientos de las variables a utilizar. Aunque los estudios realizados en el flujo de carga y despacho económico son muy buenos y han dado excelente servicio tecnológico; no necesariamente se deben seguir aplicando de la manera que originalmente fueron realizados, se debe recordar que la mayoría de estos estudios datan de varias décadas atrás, por tal razón estos métodos urgen reformas y adaptaciones a las nuevas técnicas computacionales y nuevos métodos de optimización que faciliten los análisis y cálculos, además de reducir los tiempos de trabajo.

- El resultado obtenido con el despacho económico tradicional, da como resultado las pérdidas en por unidad de 0.09322074, pero hay que recordar que el flujo de carga y el despacho económico, si proponen una configuración económica pero no optimizan el resultado; si comparamos con el resultado de los ejercicios hechos con el multiplicador de Lagrange, se obtienen en por unidad 0.05338635, pero hay que recordar que este resultado no tiene la contribución de las variables complejas del sistema, en cambio el resultado completo es de 0.085035; entonces la diferencia entre estos valores es de 0.00818574 lo que traducido a valores reales es de 818,574 W

- Notablemente se puede comprobar que el método de optimización por el multiplicador de Lagrange, es un método efectivo para encontrar el máximo o el mínimo de un sistema de ecuaciones y más importante aun es la facilidad que presenta en los análisis de aplicaciones especificas en las cuales los sistemas dependen de mas de 3 variables, como es el caso de los problemas de análisis de perdidas en sistemas de potencia.

- Después de haber finalizado el estudio del problema para encontrar las pérdidas mínimas en las líneas de transmisión por el método del multiplicador de lagrange, utilizando las partes imaginarias de los voltajes, las corrientes y las potencias, podemos darnos cuenta que se obtienen valores mayores que los resultados obtenidos cuando se analizo el problema solo con la parte real, vistos en las soluciones de las etapas I y II. Esto nos hace concluir, que es necesario utilizar en el análisis, la parte imaginaria para encontrar la solución a las perdidas mínimas de un sistema, ya que este representara con mayor realidad un sistema y de igual forma las pérdidas son mas realistas.

- El método de optimización del multiplicador de Lagrange, aunque es fácil su aplicación, este necesita de una cantidad considerable de ecuaciones, principalmente las que describen la configuración del sistema por lo cual está cantidad dependerá del tamaño del sistema.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS GENERALES.

[1] Kirchmayer, Leon K.
Economic Operation of Power Systems
U.S.A
General Electric Company
1958

[2] Grainger John J. & Stevenson, William D. Jr.
Análisis de Sistemas de Potencia
México
McGRAW-HILL/Interamericana de México S.A de C.V.
1994 por McGRAW-HILL-Inc., U.S.A.

[3] Dr. Bowen, D.W & Dr. Kruempel, K.C
Power System Interconnections Short Course
U.S.A.
Iowa State University
1974.

[4]. Apostol, Tom M.
Calculus Volumen II
Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a la probabilidad.
Editorial Reverté, S.A.
2ª Edición

[5] Brown Homer E.
Solution of Large Networks by Matrix Methods
U.S.A.
Editorial John Wiley & Sons, Inc.
1975

[6] González René Andreu
Cubas Escobar Jorge Alberto
"Estudio de despacho Económico en Sistemas de Potencia "
Tesis para optar al grado de Ingeniero Electricista. Biblioteca de la F.I.A
Universidad de El Salvador
1978

[7] Hayt, William H. Jr. & Kemmerly Jack E.
Análisis de Circuitos en Ingeniería
(Tercera Edición en Español)
Editorial Mc Graw-Hill
1993 Quinta Edición.

ANEXOS

ANEXO A

La derivada general del sistema en análisis en forma matricial es la siguiente:

$$
\begin{bmatrix}
\partial\left(C1 \cdot Ig1^2 \cdot Zg1\right)/\partial Ig1 \\
\vdots \\
\partial\left(Cn \cdot Ign^2 \cdot Zgn\right)/\partial Ign \\
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
\vdots \\
\partial\left(C1 \cdot I1^2 \cdot Z1\right)/\partial I1 \\
\vdots \\
\partial\left(Cm \cdot Im^2 \cdot Zm\right)/\partial Im \\
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
\partial fcg1/\partial Ig1 \\
\vdots \\
\partial fcgn/\partial Ign \\
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\
\partial fcg1/\partial Vg1 \\
\vdots \\
\partial fcgn/\partial Vgn \\
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
\partial\left(\lambda\left(\sum Inodo\right)\right)/\partial Ig1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Inodo\right)\right)/\partial Ign \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Inodo\right)\right)/\partial I1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Inodo\right)\right)/\partial Im \\
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Inodo\right)\right)/\partial VC1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Inodo\right)\right)/\partial VCp \\
0 \\ 0 \\ 0 \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Inodo\right)\right)/\partial \lambda 1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Inodo\right)\right)/\partial \lambda r \\
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial Ig1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial Ign \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial I1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial Im \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial VBg1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial VBgn \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial Vg1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial Vgn \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial VC1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial VCp \\
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial \lambda 1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda\left(\sum Vrama\right)\right)/\partial \lambda s \\
0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\
\partial\left(\lambda d1\left(Vg1 - k1 + ZA^2\right)\right)/\partial Vg1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda ds\left(Vgn1 - kn + ZA^2\right)\right)/\partial Vgn \\
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\
\partial\left(\lambda d1\left(Vg1 - k1 + ZA^2\right)\right)/\partial ZA \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda ds\left(Vg1 - kn + ZB^2\right)\right)/\partial ZB \\
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\
\partial\left(\lambda d1\left(Vg1 - k1 + ZA^2\right)\right)/\partial \lambda d1 \\
\vdots \\
\partial\left(\lambda ds\left(Vgn - kn + ZB^2\right)\right)/\partial \lambda ds
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

ANEXO B

La derivada de una forma más particular del problema de análisis es:

$$
\begin{bmatrix} 2C_1 I_{g1} Z_{g1} \\ 2C_2 I_{g2} Z_{g2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2C_1 I_1 Z_1 \\ 2C_2 I_2 Z_2 \\ 2C_3 I_3 Z_3 \\ 2C_4 I_4 Z_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \partial f_{cg1}/\partial I_{g1} \\ \partial f_{cg2}/\partial I_{g2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \partial f_{cg1}/\partial V_{g1} \\ \partial f_{cg2}/\partial V_{g2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} \partial(\lambda(\sum I_{nodo}))/\partial I_{g1} \\ \partial(\lambda(\sum I_{nodo}))/\partial I_{g2} \\ \partial(\lambda(\sum I_{nodo}))/\partial I_1 \\ \partial(\lambda(\sum I_{nodo}))/\partial I_2 \\ \partial(\lambda(\sum I_{nodo}))/\partial I_3 \\ \partial(\lambda(\sum I_{nodo}))/\partial I_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{g1} + I_1 + I_2 \\ -I_{g2} + I_3 + I_4 \\ SC_1/\sqrt{3}V_{C1} + I_1 + I_4 \\ SC_2/\sqrt{3}V_{C2} + I_2 + I_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial I_{g1} \\ \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial I_{g2} \\ \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial I_1 \\ \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial I_2 \\ \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial I_3 \\ \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial I_4 \\ \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial V_{Bg1} \\ \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial V_{Bg2} \\ \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial V_{g1} \\ \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial V_{g2} \\ \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial V_{C1} \\ \partial(\lambda(\sum V_{rama}))/\partial V_{C2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_{Bg1} - V_{C1} - I_1 Z_1 \\ V_{Bg1} - V_{C2} - I_2 Z_2 \\ V_{Bg2} - V_{C2} - I_3 Z_3 \\ V_{Bg2} - V_{C1} - I_4 Z_4 \\ V_{g1} - V_{Bg1} - I_{g1} Z_{g1} \\ V_{g2} - V_{Bg2} - I_{g2} Z_{g2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda d_1 \\ \lambda d_2 \\ 0 \\ 0 \\ 2\lambda d_1 Z_A \\ 2\lambda d_2 Z_B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_1 - k_1 + Z_A^2 \\ v_2 - k_2 + Z_B^2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$