

TUES
1504
7175i
1997
Ej. 2

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



TRABAJO DE GRADUACIÓN:

“Investigación de una Metodología para la Optimización de una Red de Polarización a Tierra”

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:

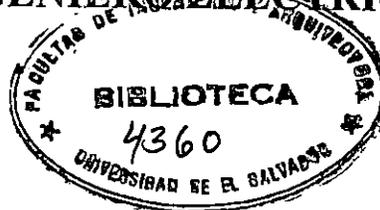
ROBERTO FAJARDO PINEDA
HENRY STANLEY GÓMEZ RIVAS
VÍCTOR HUGO MÉNDEZ QUEZADA

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

INGENIERO ELÉCTRICISTA

15101231

15101231



DICIEMBRE DE 1997.

SAN SALVADOR,

EL SALVADOR,

CENTRO AMERICA.

Recibido el 19 de diciembre de 1997



UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

DR. BENJAMIN LÓPEZ GUILLEN

SECRETARIO GENERAL:

LIC. ENNIO LUNA

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

DECANO:

ING. JOAQUIN ALBERTO VANEGAS AGUILAR

SECRETARIO:

ING. JOSÉ RIGOBERTO MURILLO CAMPOS

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTOR:

ING. SALVADOR DE JESÚS GERMAN

SECRETARIO:

ING. GERARDO MARVIN JORGE HERNÁNDEZ



UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Trabajo de Graduación previo a la opción al grado de:

INGENIERO ELECTRICISTA

Título: **“Investigación de una Metodología para la
Optimización de una Red de Polarización a Tierra”**

Presentado por:

Roberto Fajardo Pineda
Henry Stanley Gómez Rivas
Víctor Hugo Méndez Quezada

Trabajo de Graduación aprobado por:

Coordinador y Asesor: Ing. Ricardo Colorado



A handwritten signature in black ink, appearing to read "Ricardo Colorado", written over the bottom portion of the stamp.

San Salvador, Diciembre de 1997

ACTA DE CONSTANCIA DE NOTA Y DEFENSA FINAL

En esta fecha, 9 de diciembre de 1997, en el local de la Sala de Lectura de la Escuela de Ingeniería Eléctrica, a las dieciséis horas, en presencia de las siguientes - autoridades de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de El Salvador:

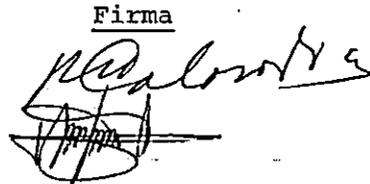
- 1- Ing. Salvador de J. German
Director
- 2- Ing. Gerardo Marvin Jorge Hernández
Secretario

Firma




Y con el Honorable Jurado de evaluación integrado por las personas siguientes:

- 1- Ing. Ricardo Colorado
- 2- Ing. Luis Ernesto Montesinos

Firma


Se efectuó la defensa final reglamentaria del Trabajo de Graduación:

"Investigación de una Metodología para la Optimización de una Red de Polarización a Tierra"

A cargo de los Bachilleres:

- FAJARDO PINEDA, ROBERTO
GOMEZ RIVAS, HENRY STANLEY
MENDEZ QUEZADA, VICTOR HUGO

Habiendo obtenido el presente trabajo una final global de 9.5
(NUEVE PUNTO CINCO)

AGRADECIMIENTOS

A Dios por todo.

A mi madre y a mi padre por su paciencia y apoyo constante.

A mis hermanos, tías, abuelos y demás familiares por su apoyo.

A Mary por su apoyo y comprensión.

A mis catedráticos por los conocimientos que de ellos he adquirido.

Y a todas las personas que de una u otra forma contribuyeron al presente trabajo.

Roberto.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirme terminar este trabajo.

A mi madre y mi padre por ayudarme en todo el desarrollo de mi carrera.

A mis hermanos y hermanas por apoyarme en todo.

A mis amigos que siempre mostraron apoyo hacia mi persona.

A mis catedráticos y compañeros de estudio.

Y a todas las personas que contribuyeron y apoyaron a culminar el presente trabajo.

Henry Stanley.

AGRADECIMIENTOS

A Dios Todopoderoso por prestarme la vida y permitirme alcanzar una de mis metas.

A mi madre Ana Zhulma Quezada por su amor, sacrificio, esfuerzo y apoyo incondicional sin el cual no habría sido posible llegar a obtener este triunfo.

A mi padre Víctor Manuel Méndez (Q.E.P.D) que aunque no este físicamente presente yo sé que siempre estuvo a la par del Altísimo ayudándome en todo lo posible.

A mi Hermano, Abuelos, demás familiares y amigos por apoyarme a seguir adelante.

A mis compañeros del Trabajo de Graduación que me ayudaron en todo momento a salir adelante con este reto.

A mis maestros por compartir sus conocimientos y motivarme a ser un hombre de bien a la sociedad.

A todas las demás personas que de una u otra manera me apoyaron.

A todos los anteriores MUCHISIMAS GRACIAS.

Víctor Hugo.

PREFACIO

La conexión eléctrica a tierra requiere de un análisis de tal forma de lograr determinar un diseño de red de tierra óptimo, para lo cual es importante conocer como interactúan algunos elementos y parámetros en el cálculo su resistencia con el objetivo de poseer una mayor información para determinar la forma y como diseñar una red de tierra, existen métodos de cálculo de resistencia basados en ecuaciones predeterminadas a partir de estudios previos realizados por los autores de dichas ecuaciones en donde hacen poco uso de las computadoras limitándose a realizar cálculos directos con un buen margen de error, actualmente se presenta un método de cálculo innovador ya que para realizar los cálculos se presenta un método numérico donde se utiliza el concepto de conductancias en paralelo generadas por cada electrodo referenciándola a las influencias que ejercen los demás electrodos que componen la red de tierra, además se realiza el cálculo de voltaje para una referencia finita ubicada dentro del área de la configuración geométrica de la red de tierra.

El método propuesto para realizar la optimización de una determinada red de tierra se considera el tipo de suelo homogéneo y el heterogéneo lo cual es posible realizarlo a partir del uso de software como es MATLAB debido a los cálculos iterativos involucrados en la metodología propuesta. Además este método es aplicable a diferentes configuraciones geométricas; con lo cual no limita su uso a cualquier tipo de configuraciones de redes de tierra. Para agrupar los diferentes parámetros que inciden en el cálculo de resistencia se presenta un programa de cálculo de resistencias y voltajes, donde se realizan simulaciones de diseño de redes de tierra, para una determinada corriente de falla.

RESUMEN

La investigación realizada trata del comportamiento de diferentes tipos de configuraciones de redes de tierra al existir una falla, analizando para ello los diferentes parámetros involucrados (Estructura del suelo, longitud y radio de la varilla, separación y enterramiento de los electrodos, etc.). Es de esta manera que se pretende encontrar una configuración que proporcione resultados óptimos en cuanto se obtengan bajos valores de resistencia y gradiente de voltaje, de tal forma que proporcione protección y seguridad a los equipos y personas que se encuentren en el área de la red de tierra.

Para este análisis se hace uso de un nuevo método de cálculo en el que se involucran los parámetros antes mencionados, se parte de los conceptos fundamentales del electromagnetismo tales como el voltaje, campo eléctrico, corriente, resistencia y conductancia aplicados a una distribución lineal de carga.

Se determina entonces el voltaje y campo eléctrico ya sea en suelo homogéneo (una sola capa de tierra) o en suelo heterogéneo (dos o más capas de tierra) aplicando para ello la teoría de las imágenes la cual es una herramienta muy útil que nos permite determinar el valor de estos en cualquier posición del suelo y luego se determina la resistencia de cualquier configuración de red de tierra aplicando un método numérico el cual consiste en calcular las conductancias de cada electrodo debido a la influencia de todos los demás para luego obtener la resistencia con la relación inversa.

Se hacen también comparaciones del voltaje en la superficie para las diferentes configuraciones de red de tierra y se determinan valores de resistencia, gradiente de voltaje al modificar uno o varios parámetros que inciden en una red de tierra.

Se realizan comparaciones de los resultados obtenidos con el método propuesto y otros métodos para los cuales se realizan una breve descripción de dichos métodos y se muestran resultados con los datos obtenidos.

TABLA DE CONTENIDOS

Capítulo

Página.

LISTA DE TABLAS viii

LISTA DE FIGURAS.....ix

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES PARA EL ESTUDIO DE REDES DE TIERRA.

Introducción.	1
1.1 Definición de redes de tierra.....	2
1.1.1 Resistividad.....	2
1.1.2 Conductividad.....	3
1.2 Estudio del campo eléctrico.	3
1.3 Estudio del potencial eléctrico.	5
1.4 Análisis de la corriente eléctrica.	6
1.4.1 Condiciones de frontera para dos regiones.	
1.5 Teoría de las imágenes.	9
1.5.1 Principio De Imágenes Para Dos Medios	
1.6 Definición de resistencia eléctrica.	12
1.6.1 Resistencia.....	12
1.6.2 Conductancia.....	12
Conclusiones del capítulo I	14
Referencias bibliográficas.	15

II. ANÁLISIS DEL CAMPO ELÉCTRICO, VOLTAJE Y CORRIENTE EN UNA RED DE PUESTA A TIERRA.

Introducción.	16
2.1 Consideraciones generales.	17
2.2 Determinación de voltaje y campo eléctrico en una red de tierra.	17
2.2.1 Voltaje y campo eléctrico en un medio homogéneo.	19

2.2.1.1 Determinación de ecuaciones de voltaje y campo eléctrico en un suelo homogéneo.	19
2.2.2 Voltaje y campo eléctrico en un medio heterogéneo	22
2.2.2.1 Análisis del voltaje y campo eléctrico debido al segmento de la varilla ubicado en la primera capa de la estructura del suelo.	23
2.2.2.2 Análisis del voltaje y campo eléctrico debido al segmento de la varilla ubicado en la segunda capa de la estructura del suelo.	31
2.3 Determinación de la corriente en una red de tierra.	39
2.4 Metodología para el cálculo de resistencia a tierra.	40
2.4.1 Análisis para obtener r_i en función del sistema de referencia en coordenadas cilíndricas de la varilla considerada como origen.	40
2.4.2 Proceso de cálculo de la resistencia en una red de tierra.	43
 Conclusiones del capítulo II.	 48
Referencias bibliográficas.	49

III. DETERMINACIÓN DE LAS CONDICIONES DE OPTIMIZACIÓN DE LA RESISTENCIA DE PUESTA A TIERRA.

Introducción.	50
3.1 Generalidades	50
3.2 Criterios de análisis para la optimización de una red puesta a tierra.	51
3.3 Procedimiento utilizado para la optimización de redes de tierra.	54
3.4 Determinación de la configuración óptima de una red de tierra.	60
3.4.1 Análisis para una configuración rectangular.	61
3.4.2 Análisis para una configuración perimetral.	62
3.4.3 Análisis para una configuración lineal.	63
3.4.4 Análisis para una configuración circular.	64
3.4.5 Análisis de datos y criterios de optimización de una red de tierra.	68
 Conclusiones del capítulo III	 74
Referencias bibliográficas.	75

IV. PROPUESTA DE NUEVA METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DE RESISTENCIA A TIERRA.

Introducción.	76
4.1 Generalidades.	76
4.2 Descripción y análisis de datos para metodologías tradicionales de cálculo de resistencia a tierra y comparación de resultados obtenidos a partir de la metodología propuesta.	77
4.2.1 Descripción del método descrito por H.B DWIGHT.	77
4.2.1.1 Análisis de datos para el método empleado por H.B DWIGHT.	78
4.2.2 Descripción del método empleado por M. M. Elsherbiny, Y.L Chow, M. M.A. Salama of the Electric and Computer Engineering department of University of Warterloo, Waterloo, Ontario Canadá.	79
4.2.2.1 Análisis para un medio homogéneo.	80
4.2.2.2 Análisis para un medio Heterogéneo.	81
4.2.2.3 Análisis de datos para el método empleado por M. M. Elsherbiny, Y.L Chow , M. M.A. Salama del Electric and Computer Engineering department of University Warterloo, Waterloo, Ontario Canadá.	82
4.2.3 Metodología descrita en paper Resistance Formulas of Grounding Systems in Two-Layer Earth IEEE Transactions on Power Delivery, July 1996.	83
4.2.3.1 Análisis para un medio homogéneo.	84
4.2.3.2 Análisis para un medio heterogéneo.	84
4.2.3.3 Análisis de datos para el método descrito en paper Resistance Formulas of Grounding Systems in Two-Layer Earth IEEE Transactions on Power Delivery, July 1996.	86
4.3 Cálculo de resistencia de una red de tierra aplicando una referencia de voltaje finita.	87
4.3.1 Análisis para obtener r_i en función del sistema de referencia en coordenadas cilíndricas de la varilla considerada como origen.	87
4.3.2 Proceso de calculo de la resistencia en una red de tierra.	88
4.3.3 Análisis de datos considerando un voltaje de referencia ubicado en el área de la red de tierra.	91

	Página.
Conclusiones del capítulo IV	95
Referencias bibliográficas.	96
CONCLUSIONES GENERALES Y RECOMENDACIONES.....	97
CONCLUSIONES.....	97
RECOMENDACIONES	98
ANEXOS.....	99
ANEXO A.....	100
Formulas utilizadas el método utilizado por H. B. DWIGHT.....	100
ANEXO B.....	101
Resultados obtenidos por el método empleado por m. ELSHERBINY, Y.L CHOW Y M. M.A. SALAMA.....	101

LISTA DE TABLAS

Tabla	Página.
3.1 DATOS OBTENIDOS PARA N=4 ELECTRODOS, $r=0.01587m$, Hvarilla=0.40m.	66
3.2 DATOS OBTENIDOS PARA N=16 ELECTRODOS, $r=0.01587 m$, Hvarilla=0.40m.....	66
3.3 DATOS OBTENIDOS PARA N=24 ELECTRODOS, $r=0.01587 m$, Hvarilla=0.40m.....	67
3.4 DATOS OBTENIDOS PARA N=4 ELECTRODOS, $r=0.01587 m$, Hvarilla=1.0m.....	67
3.5 DATOS OBTENIDOS PARA N=16 ELECTRODOS, $r=0.01587 m$, Hvarilla=1.0m.....	68
4.1 COMPARACIÓN DE DATOS CON EL MÉTODO DE H.B DWIGHT Y LA METODOLOGÍA PROPUESTA.....	79
4.2 COMPARACIÓN DE DATOS CON EL MÉTODO DE ELSHERBINY, CHOW, SALAMA Y LA METODOLOGÍA PROPUESTA.....	83
4.3 COMPARACIÓN DE DATOS CON EL MÉTODO DE REFERENCIA[7] Y LA METODOLOGÍA PROPUESTA.....	86
4.4 DATOS OBTENIDOS PARA N=8 ELECTRODOS, $r=0.01587 m$, Hvarilla=0.40m CONSIDERANDO UNA REFERENCIA DE VOLTAJE FINITA.....	92
4.5 COMPARACIÓN DE DATOS PARA N= 16.0 ELECTRODOS DE $R=0.01587m$, HV=0.4M,CONSIDERANDO UNA REFERENCIA DE VOLTAJE FINITA CON UNA DE REFERENCIA DE VOLTAJE CERO.....	92

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página.
1.1 REPRESENTACIÓN DE LA ESTRUCTURA DEL SUELO	3
1.2 DESCRIPCIÓN DE LA LEY DE COULOMB.....	4
1.3 DESCRIPCIÓN DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA.....	8
1.4 REPRESENTACIÓN DE LA TEORÍA DE LAS IMAGÉNES.....	10
1.5 REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA DE CONDUCTANCIA.....	13
2.1 REPRESENTACIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS.....	17
2.2 REPRESENTACIÓN DE UNA CARGA Y SU IMAGEN.....	19
2.3 INFLUENCIA DE LA CARGA Y SU IMAGEN EN LOS DIFERENTES MEDIOS.....	19
2.4 ANÁLISIS DE UNA VARILLA Y SU IMAGEN EN UN MEDIO HOMOGÉNEO.....	20
2.5 UBICACIÓN DE UN PUNTO P EN LA PRIMERA Y SEGUNDA CAPA.....	23
2.6 SEGMENTO L1 DE LA VARILLA Y SUS RESPECTIVAS IMAGÉNES.....	24
2.7 IMAGÉNES Y SU INFLUENCIA EN LAS DIFERENTES CAPAS DEL SUELO.....	25
2.8 SEGMENTO L1 Y SUS IMAGÉNES CUANDO EL PUNTO DE ANÁLISIS SE ENCUENTRA EN LA PRIMERA CAPA.....	25
2.9 SEGMENTO L1 Y SUS IMAGÉNES CUANDO EL PUNTO DE ANÁLISIS SE ENCUENTRA EN LA SEGUNDA CAPA.....	29
2.10 SEGMENTO L2 DE LA VARILLA Y SUS RESPECTIVAS IMAGÉNES.....	31

2.11 IMAGÉNES Y SU INFLUENCIA EN LAS DIFERENTES CAPAS DEL SUELO.....	33
2.12 SEGMENTO L2 Y SUS IMAGÉNES CUANDO EL PÚNTO DE ANÁLISIS SE ENCUENTRA EN LA PRIMERA CAPA.....	34
2.13 SEGMENTO L2 Y SUS IMAGÉNES CUANDO EL PÚNTO DE ANÁLISIS SE ENCUENTRA EN LA SEGUNDA CAPA.....	36
2.14 CONFIGURACIÓN DE RED DE TIERRA PERIMETRAL DE “N” VARILLAS.....	38
2.15 DISTRIBUCIÓN DE LA CORRIENTE EN UNA SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL.....	40
2.16 SISTEMA DE REFERENCIA GENERAL.....	41
2.17 APLICACIÓN DE LA LEY DE COSENOS	41
2.18 UBICACIÓN DE S_j EN LOS CUATRO CUADRANTES.....	42
2.19 CONDUCTANCIAS DE ELEMENTOS DE ÁREA EN UNA SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL PARA UNA VARILLA DE LA RED DE TIERRA.....	45
3.1 DESCRIPCIÓN DE UN CASO TÍPICO DE RED DE TIERRA.....	51
3.2 COMPORTAMIENTO DEL VOLTAJE EN LA SUPERFICIE.....	52
3.3 DIAGRAMA DE BLOQUES PARA EL CÁLCULO DE VOLTAJE Y RESISTENCIA DE TIERRA.....	56
3.4 DESCRIPCIÓN DEL MODULO DE CÁLCULO DE RESISTENCIA.....	57
3.5 GRÁFICAS DE CONFIGURACIONES GEOMÉTRICAS DE REDES DE TIERRA.....	59
3.6 CONFIGURACIÓN DE RED DE TIERRA CUADRADA.....	61
3.7 VOLTAJE EN LA SUPERFICIE EN UNA RED CUADRADA.....	61
3.8 CONFIGURACIÓN DE RED DE TIERRA PERIMETRAL.....	62
3.9 VOLTAJE EN LA SUPERFICIE EN UNA RED PERIMETRAL.....	62
3.10 CONFIGURACIÓN DE RED DE TIERRA LINEAL.....	63

3.11 VOLTAJE EN LA SUPERFICIE EN UNA RED LINEAL.....	63
3.12 CONFIGURACIÓN DE RED DE TIERRA CIRCULAR.....	64
3.13 VOLTAJE EN LA SUPERFICIE PARA LAS CONFIGURACIONES, CIRCULAR SIMPLE, CON ELECTRODO CENTRAL, CIRCULAR DOBLE Y CIRCULAR DOBLE CON ELECTRODO CENTRAL.....	65
3.14 COMPARACIÓN DE LAS DIFERENTES CONFIGURACIONES Y SUS RESPECTIVOS PARÁMETROS.....	71
4.1 ESQUEMATIZACIÓN DE CÁLCULO DE RESISTENCIA MUTUA.....	80
4.2 SISTEMA DE COORDENADAS PARA LA RESISTENCIA PROPIA.....	81
4.3 ESQUEMATIZACIÓN DE RED DE TIERRA PARA UN SUELO HETEROGÉNEO.....	82
4.4 CONJUNTO DE ELECTRODOS PARA UN TIPO DE SUELO HETEROGÉNEO.....	85
4.5 SISTEMA DE REFERENCIA GENERAL CON VOLTAJE MÍNIMO	87
4.6 CONDUCTANCIAS DE ELEMENTOS DE ÁREA EN UNA SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL PARA UNA VARILLA DE LA RED CONSIDERANDO EL VOLTAJE MÍNIMO.....	89
4.7 COMPARACIÓN DE LAS DIFERENTES CONFIGURACIONES Y SUS RESPECTIVOS PARÁMETROS , UTILIZANDO REFERENCIA FINITA.....	93
4.8 COMPARACIÓN DE DATOS PARA RESISTENCIA CON $V_{referencia} = 0$ Y $V_{mínimo}$	94

CAPÍTULO I

CONCEPTOS FUNDAMENTALES PARA EL ESTUDIO DE REDES DE TIERRA

Introducción

Se hace necesario plantear los componentes básicos así como la finalidad de una red de puesta a tierra para relacionar los parámetros que interaccionan o actúan al existir una falla en el sistema.

En esta parte del estudio se analizan y describen algunos conceptos como lo es el campo eléctrico, potencial eléctrico, corriente eléctrica, resistencia, conductancia, desde el punto de vista de aplicación a lo que es el cálculo de resistencia de puesta a tierra.

Además se enfatiza la teoría de las Imágenes debido a su importancia y utilización para regiones o medios homogéneos o heterogéneos y la influencia que esta posee en el cálculo de potencial eléctrico y de la resistencia misma.

1.1 DEFINICIÓN DE REDES DE TIERRA.

Las redes de tierra se definen como un conjunto de elementos (electrodos, cable de interconexión, cepos, etc.) eléctricos y mecánicos que se interrelacionan para proporcionar conexión a tierra a un sistema.

Una red de tierra debe cumplir con las siguientes funciones:

- a) Disminuir el gradiente de voltaje que se puede presentar durante una falla en las proximidades de una subestación.
- b) Proveer una trayectoria de baja resistencia para la corriente de falla permitiendo así que los dispositivos de protección actúen rápidamente.
- c) Proteger al equipo de sobrevoltajes ocasionados por fallas surgidas inesperadamente en el sistema.

Electrodos de Puesta a Tierra

Estos pueden ser de diferentes tipos es decir placas de cualquier configuración geométrica, mallas inmersas en bases de concreto, estructuras metálicas de edificios, tuberías metálicas del sistema de agua, y varillas o barras de un radio pequeño y una considerable longitud.

Debido a la versatilidad de las varillas en la construcción de diferentes configuraciones de redes de tierra, ya que se adaptan a las diferentes dimensiones y formas del terreno así como su bajo costo y fácil manejo, han hecho que este tipo de electrodos sea el utilizado con mayor frecuencia en la construcción de sistemas de puesta a tierra. Es por esta razón que la investigación se concentra en el estudio de una metodología para la optimización de este tipo de redes de tierra.

1.1.1 RESISTIVIDAD

La resistividad de un medio o una región normalmente se expresa por ρ en $\Omega.m$ o $\Omega.cm$, esto equivale a la resistencia que ofrece al paso de la corriente un cubo de terreno de 1 m o 1 cm de arista.

La resistividad del suelo puede variar debido a la influencia de la humedad, temperatura y del tipo del terreno.

1.1.2 CONDUCTIVIDAD.

La resistividad posee su función inversa siendo esta la conductividad del medio o región, su representación es la siguiente.

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad \left(\frac{m}{\Omega} \right) \quad (1.1)$$

La estructura del suelo se puede clasificar en Homogéneo y Heterogéneo. El suelo homogéneo es aquel que está formado por una sola capa de resistividad constante en cualquier punto, además esta región de material posee parámetros que las identifican como tal siendo estos $(\mu, \epsilon, \text{ y } \sigma)$ independientes de su posición en dicho material. (fig.1.1.a), mientras que el suelo heterogéneo está constituido por dos o más capas de diferentes resistividades este también posee ciertos parámetros los cuales varían de acuerdo al espacio de la región es decir $\sigma = \sigma(x,y,z)$, $\mu = \mu(x,y,z)$ y $\epsilon = \epsilon(x,y,z)$ respectivamente (fig.1.1.b).

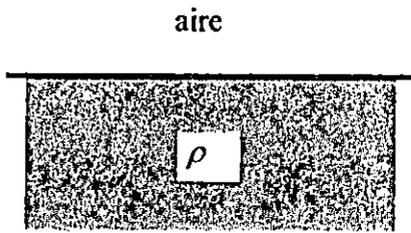


Fig.1.1.a

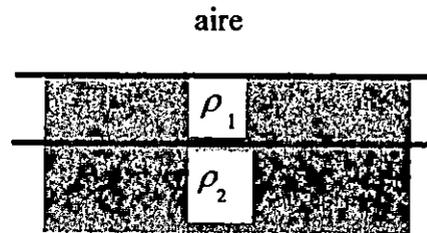


Fig.1.1.b

Fig.1.1 Representación de la estructura del suelo homogéneo y heterogéneo.

1.2 TEORÍA PARA EL ESTUDIO DE CAMPO ELÉCTRICO.

La ley de Coulomb establece que al analizar dos cargas separadas por una distancia r , cada una de estas cargas ejerce sobre la otra una fuerza que actúa a lo largo de la línea que une a las dos cargas, el sentido de esta fuerza dependerá de los signos que poseen las cargas en análisis; tal como se observa en la fig.1.2.

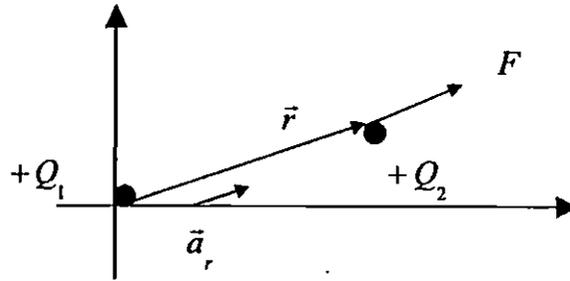


Fig.1.2 Descripción de la ley de Coulomb.

$$\vec{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \vec{a}_r \quad (1.2)$$

Donde:

Q_1 y Q_2 : Son las cantidades de carga (C).

\vec{r} : Separación entre las cargas (m).

\vec{a}_r : Vector unitario en la dirección de \vec{r} .

ϵ_0 : Permitividad del espacio libre (F/m).

F : Fuerza ejercida por $+Q_1$ sobre $+Q_2$ (N).

Al dividir esta fuerza por la carga Q_2 se obtiene la fuerza por unidad de carga en dicho punto, a este resultado se le define como intensidad de campo eléctrico.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_2} = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \vec{a}_r \quad V/m \quad (1.3)$$

El campo definido en la ecuación anterior es únicamente para una sola carga, para extenderlo a un conjunto de cargas puntuales se aplica el principio de superposición, lo cual establece que el campo en un punto debido a un conjunto de cargas es la suma de los campos individuales de todas las cargas.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_i^2} \vec{a}_i \quad (1.4)$$

En el caso de existir una gran cantidad de cargas fijas ya no es muy práctico utilizar la sumatoria descrita con anterioridad por lo que se hace necesario definir una

función que represente la densidad promedio de carga en un volumen, superficie o línea, los símbolos que se utilizan para representar dichas funciones son ρ_v , ρ_s y ρ_L respectivamente.

Para una distribución de carga lineal el diferencial de carga viene dado por $dQ = \rho_L dL$; entonces el diferencial de campo eléctrico se expresa como:

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \vec{a}_r \quad (1.5)$$

El campo eléctrico total será:

$$\vec{E} = \int_L \frac{\rho_L \cdot dL}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{a}_r \quad V/m \quad (1.6)$$

Donde ρ_L : Densidad lineal de carga (C/m).

r : Distancia desde el diferencial de carga hacia el punto donde se determinara el campo (m).

dL : Longitud del diferencial de carga (m).

1.3 ESTUDIO DEL POTENCIAL ELÉCTRICO.

El potencial o diferencia de potencial eléctrico se define como el trabajo realizado al mover una unidad de carga positiva entre dos puntos previamente definidos en un campo eléctrico, la ecuación de cálculo es:

$$V_{ab} = - \int_{P_a}^{P_b} \vec{E} \cdot d\vec{L} \quad V \quad (1.7)$$

El potencial es independiente de la trayectoria que se elija para unir los puntos P_a y P_b . Para el cálculo del potencial se hace necesario definir un punto de referencia para lo cual se toman criterios de acuerdo a la situación presentada, normalmente los puntos de referencia utilizados son: la tierra y el infinito. Dependerá de cada situación cual punto se tomará como referencia según convenga para la solución del problema en estudio ver Ref[3].

El potencial es producido por una distribución de carga la cual puede ser una carga puntual, un sistema de cargas puntuales o una densidad de carga ya sea ésta lineal, superficial o volumétrica.

El potencial producido por una carga puntual muestra que la diferencia de potencial entre dos puntos determinados, localizados dentro del campo producido por dicha carga, esta en función de la distancia que separa cada punto de la carga, tal como se observa en la siguiente ecuación:

$$V = \frac{Q}{4.\pi.\epsilon_o .r} \quad (V) \quad (1.8)$$

Para determinar el potencial en un punto debido a un conjunto de cargas puntuales se utiliza el principio de superposición , obteniéndose:

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4.\pi.\epsilon_o .r_i} \quad (V) \quad (1.9)$$

Ahora para un sistema de cargas con una distribución lineal el potencial se define de la siguiente manera:

$$V = \int \frac{\rho_L .dL}{4.\pi.\epsilon_o .r} \quad (1.10)$$

Donde:

dL : Longitud del diferencial de carga

ρ_L : densidad lineal de carga

r : Distancia del diferencial de carga hacia el punto donde se calcula el potencial.

Además se hace importante conocer la definición de superficie equipotencial: Una superficie Equipotencial se define como una determinada área, la cual tiene la característica de poseer el mismo potencial.

1.4 ANÁLISIS DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA.

Las cargas eléctricas en movimiento que se encuentren en cualquier posición o lugar constituyen lo que se denomina corriente eléctrica, esta se expresa en Amperios y viene dada por:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (A) \quad (1.11)$$

Además existe otro concepto relacionado a la corriente denominado Densidad de Corriente definido por el flujo de corriente que atraviesa una superficie transversal expresada por la siguiente relación:

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (1.12)$$

Donde:

J : Densidad de Corriente $\left(\frac{A}{m^2}\right)$

ΔI : Es el flujo de corriente (A) .

ΔS : Es el área transversal (m^2) .

la ecuación anterior se representa en forma vectorial de tal forma que:

$$\Delta I = \vec{J} \cdot \Delta \vec{S} \quad (1.13)$$

por lo tanto la corriente total que pasa por una superficie es:

$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (A) \quad (1.14)$$

J se relaciona con el campo eléctrico de la siguiente manera:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (1.15)$$

Donde:

σ : Es la conductividad de la región o conductor donde actúa el campo eléctrico siendo sus unidades son $\left(\frac{1}{\Omega \cdot m}\right)$.

Sustituyendo (1.15) en (1.14) se tiene:

$$I = \int_s \sigma \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.16)$$

1.4.1 Condiciones de frontera para dos regiones.

Estas condiciones se toman en consideración debido a que es importante analizar el comportamiento de los campos conforme atraviesan las superficies límites o la separación existente entre los diferentes materiales que forman el sistema.

Las condiciones necesarias de frontera para los campos se determinan partiendo de las leyes de Maxwell es decir las formas materiales de estas para las regiones en análisis, tomando en cuenta la densidad de flujo eléctrico D de cada región.

Utilizando la relación de Maxwell en una superficie cerrada:

$$\oint_S D \cdot dS = \int_V \rho_v dv \quad (1.17)$$

Ahora al analizar esta región para dos materiales de distintas permitividades ϵ_1 y ϵ_2 tal como se muestra en la fig.1.3. ver Ref[2].

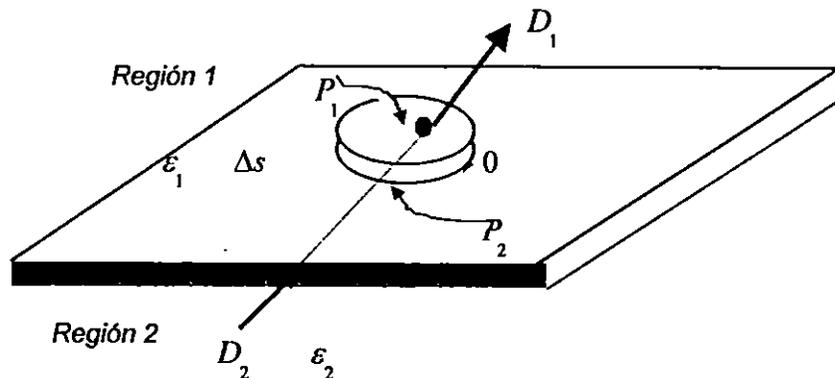


Fig.1.3 Descripción de las condiciones de frontera.

Siendo P_1 y P_2 los puntos de las regiones donde actúa la densidad de flujo eléctrico D respectivamente.

Se tiene una superficie cerrada de forma circular con una altura $\delta.h$ y con áreas en las partes laterales de dicha superficie Δs logrando así que se penetren ambas regiones a cada lado de la iteración. Denominando a D_1 y D_2 como las densidades de flujo eléctrico de localizados en puntos dentro de las regiones 1 y 2 respectivamente.

Utilizando la ley de Maxwell en la superficie cerrada, pero considerando la parte izquierda de dicha ley $\oint_S D \cdot ds$ se obtiene el flujo neto hacia afuera desde la superficie superior hasta la inferior ds quedando de la siguiente manera:

$$\oint_S D \cdot ds = D_{n1} \Delta s - D_{n2} \Delta s \quad (1.18)$$

Analizando simultáneamente la parte derecha de dicha ley es decir $\int_S \rho_v dv$ se obtiene la carga encerrada por la superficie siendo esta:

$$\int_S \rho_v dv = \rho_v \Delta s \delta.h \quad (1.19)$$

Sustituyendo ambos resultados en la ecuación (1.17) se tiene el siguiente resultado:

$$D_{n1} \Delta s - D_{n2} \Delta s = \rho_v \Delta s \delta.h$$

La parte derecha se desvanece conforme $\delta.h \rightarrow 0$, suponiendo que ρ_v denote una densidad volumétrica de carga libre en la región en análisis. Pero si en la interacción existe una densidad de carga superficial denominada ρ_s y definiéndose por el límite:

$$\rho_s = \lim_{\delta.h \rightarrow 0} \rho_v \delta.h$$

Lográndose deducir la condición general de frontera a lo siguiente:

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \left(\frac{C}{m} \right) \quad (1.20)$$

Lo cual demuestra que la componente normal de D es discontinua en la medida de la densidad de carga superficial libre presente en la interacción. donde n denota un vector unitario normal dirigido desde la región 2 a la región 1 tal como se observa en la fig.1.3 .

1.5 TEORÍA DE LAS IMÁGENES.

La teoría de imágenes consiste en sustituir un determinado sistema que comprende uno o más conductores cargados estáticamente a otro sistema equivalente de cargas puntuales o lineales (denominadas cargas imágenes), que cumplen la función de proporcionar el mismo campo electrostático que poseía el sistema original.

El estudio de esta teoría la inicio J. Maxwell la cual tiene como objetivo cumplir con que el potencial y la corriente eléctrica deben de ser continuos, en la superficie de separación entre dos medios.

Para lograrlo se requiere:

- 1- Que el potencial entre dos puntos en lados opuestos de la superficie; pero infinitamente cercanos deben de ser iguales.
- 2- La corriente a través de cualquier elemento de la superficie es la misma ya sea cuando se mide en uno u otro medio.

Además se cumple que cuando se tiene dos medios el potencial en la superficie de separación se tiene que: $V_1 = V_2$.

1.5.1 Principio De Imágenes Para Dos Medios

Para el caso de dos medios separados por una superficie plana y con una fuente de carga Q a una profundidad h del plano de separación en el primer medio, las condiciones antes planteadas se satisfacen tomando un punto P , siendo este la imagen de Q en el segundo medio, tal que la distancia entre ambos es normal al plano de separación y distanciados equitativamente de éste; en la superficie de separación donde la distancia de la imagen a cualquier punto de la superficie (r_2) y a distancia de la fuente hacia la misma (r_1) se tiene que $r_1 = r_2$.

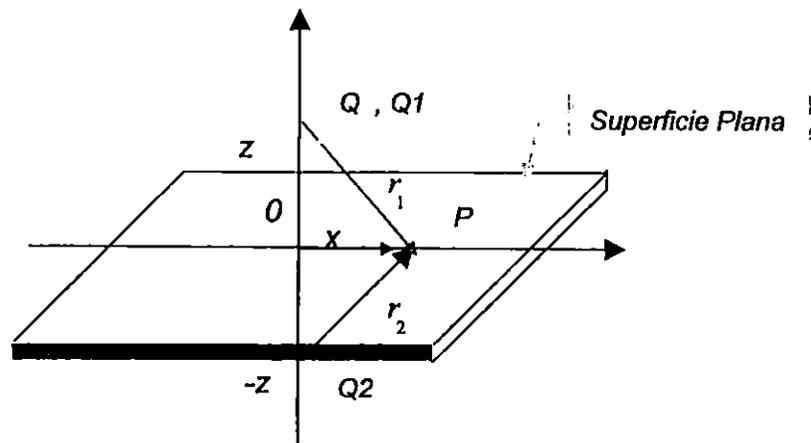


Fig.1.4. Representación de la teoría de las imágenes.

r_1 y r_2 son las distancias desde la fuente de carga y la imagen respectivamente:

$$r_1 = \sqrt{z^2 + x^2} \quad (1.21)$$

$$r_2 = \sqrt{(-z)^2 + x^2} \quad (1.22)$$

además considerando la ecuación de continuidad de medios la cual es:

$$\frac{1.dV_1}{\rho_1.dz} = \frac{1.dV_2}{\rho_2.dz} \quad (1.26)$$

Donde:

- z: Dirección normal a la superficie.
 ρ_1 y ρ_2 : Resistividad del primero y segundo medio respectivamente.
 $\frac{dV}{dz}$: Campo eléctrico normal a la superficie.

El potencial V_1 en cualquier punto en el primer medio es la contribución de potencial debido a la carga Q y el potencial debido a una carga imaginaria Q_2 en la imagen; el potencial V_2 en cualquier punto del segundo medio es igual al potencial de una carga imaginaria Q_1 en la fuente de carga.

Es decir:

$$V_1 = \frac{Q}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \quad (1.27); \quad V_2 = \frac{Q_1}{r_1} \quad (1.28)$$

Sustituyendo (1.27) y (1.28) en (1.26) se tiene

$$\frac{1.dV_1}{\rho_1.dz} = -\frac{dr_1}{dz} \cdot \frac{Q}{r_1^2} - \frac{dr_2}{dz} \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \quad (1.29) \quad ; \quad \frac{1.dV_2}{\rho_2.dz} = -\frac{dr_1}{dz} \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \quad (1.30)$$

Derivando las ecuaciones (1.21) y (1.22) respecto a la componente normal (z) a la superficie se obtiene:

$$\frac{dr_1}{dz} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + x^2}} \quad (1.23) \quad ; \quad \frac{dr_2}{dz} = \frac{-z}{\sqrt{z^2 + x^2}} \quad (1.24)$$

Igualando las ecuaciones (1.23) y (1.23) dichas derivadas se obtiene:

$$\frac{dr_1}{dz} = -\frac{dr_2}{dz} \quad (1.25)$$

Sustituyendo (1.25) y la condición $r_1 = r_2$ tanto en (1.29) como en (1.30) se tiene:

$$\frac{1}{\rho_1}(Q - Q_2) = \frac{Q_1}{\rho_2} \quad (1.31)$$

Tomando en cuenta la condición de superficie, $V_1 = V_2$ en las ecuaciones (1.27) y (1.28) se obtiene:

$$Q + Q_2 = Q_1 \quad (1.32)$$

resolviendo las ecuaciones (1.31) y (1.32)

$$Q_1 = \frac{2 \cdot \rho_2}{\rho_2 + \rho_1} Q \quad (1.33) \quad ; \quad Q_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} Q \quad (1.34)$$

El potencial en el primer medio es entonces el mismo que aparecerá producido en este tanto por una carga Q en la fuente y una carga Q_2 en la imagen, el potencial en el segundo medio es mismo producido en el segundo medio, que por una carga Q_1 en la fuente.

1.6 DEFINICIÓN DE RESISTENCIA ELÉCTRICA.

1.6.1 RESISTENCIA.

Se define como la razón entre la diferencia de voltaje de las superficies equipotenciales de un material conductor, y la corriente total a través de una u otra superficie equipotencial. También es importante recalcar que esta solo es función de la geometría del conductor y de la conductividad.

$$R = \frac{-\int \vec{E} \cdot d\vec{L}}{\sigma \cdot \int_S E \cdot dS} \quad \Omega \quad (1.35)$$

1.6.2 CONDUCTANCIA

Esta se define como la relación de la corriente total y que pasa por un dieléctico a la diferencia de voltaje entre los conductores.

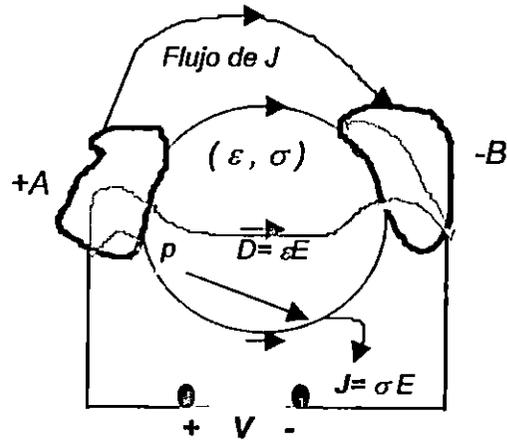


Fig.1.5 Representación de un Sistema de Conductancia.

$$G = \frac{\sigma \cdot \int E \cdot dS}{-\int \vec{E} \cdot d\vec{L}} \quad \left(\frac{1}{\Omega} \right) \quad (1.36)$$

CONCLUSIONES DEL CAPITULO I

1. El campo eléctrico es una variable fundamental para el estudio y cálculo de resistencia de puesta a tierra.
2. La estructura del suelo depende de la resistividad de éste por lo que se clasifica como homogéneo es decir una sola capa de suelo o heterogéneo cuando se trata de dos capas.
3. La teoría de imágenes nos proporciona las herramientas necesarias para la solución de los problemas de puesta a tierra, ya que es necesario cumplir con las condiciones de continuidad que deben existir en las fronteras de los medios o regiones en análisis.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Maxwell, J.C. "A treatise on electricity and magnetism" Vol.1
New York: Dover Publications, 1954.

[2] Johnk, Carl T.A. "Teoría Electromagnética".
México: Editorial Limusa, 1992.

[3] Hayt, William Jr. "Teoría Electromagnética"
México: McGRAW-HILL, 1992.

CAPÍTULO II

ANÁLISIS DEL CAMPO ELÉCTRICO, VOLTAJE Y CORRIENTE EN UNA RED DE PUESTA A TIERRA.

Introducción

La utilización de la teoría de Imágenes planteada por J.C Maxwell es una herramienta de gran apoyo en el cálculo de resistencia de puesta a tierra, debido a que son una base fundamental en el cálculo y análisis del voltaje y campo eléctrico tanto en una estructura de suelo homogéneo como heterogéneo tal como se muestra en el desarrollo de este capítulo.

Además se presenta una descripción de lo que es la metodología propuesta en el cálculo de resistencia de puesta a tierra en un suelo homogéneo y heterogéneo, dentro de esta metodología se muestra la utilización de conceptos tales como resistencia, campo eléctrico, corriente eléctrica, conductancia y potencial, los cuales interactúan de una manera directa en el análisis de la red de puesta a tierra.

2.1 Consideraciones Generales

El potencial absoluto del electrodo con respecto a un punto lejano y con respecto a cualquier electrodo de la red de tierra esta en función de la distancia que lo separen y de la configuración de la red de tierra, así como también de la influencia que se hace presente debido a la interacción de los electrodos de los elementos que los unen.

La estructura de la tierra se describe como homogénea y heterogénea, la primera presenta características especiales de trabajo como lo es mayor grado de penetración de la corriente, y una facilidad en los cálculos, y en la segunda se hacen presentes varias capas de tierra lo cual implica un estudio mas complejo. Para ambos casos se aplica el método de las imágenes.

Los flujos de corriente se distribuyen radialmente en todas las direcciones, dependiendo su penetración en las diferentes capas de acuerdo a la conductividad de estas.

2.2 DETERMINACIÓN DE VOLTAJE Y CAMPO ELÉCTRICO EN UNA RED DE TIERRA.

Para determinar el potencial y campo eléctrico en una carga lineal de longitud finita se hará uso de un sistema de referencia en coordenadas cilíndricas.

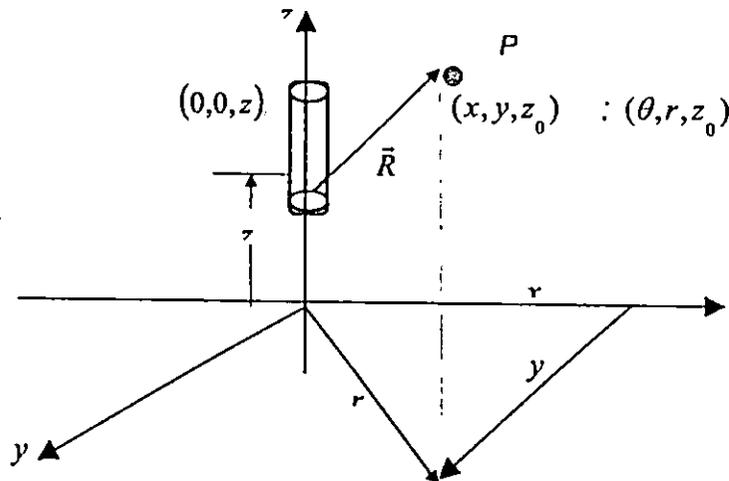


Fig. 2.1 Representación del sistema de coordenadas cilíndricas.

De la fig.2.1 se puede observar que la distancia del diferencial de carga al punto de análisis viene dada por:

Para coordenadas cartesianas se tiene:

$$\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + (z_0 - z)\hat{k}$$

Y en coordenadas cilíndricas R se representa por:

$$\vec{R} = r\hat{a}_r + (z_0 - z)\hat{k} \quad R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$$

Sustituyendo en la definición de voltaje descrita en el capítulo anterior, se tiene:

$$V = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon} \int \frac{dq}{R} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot L} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \frac{dz}{\sqrt{(z - z_0)^2 + r^2}}$$

desarrollando la integral

$$V = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot L} \ln \left(z - z_0 + \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2} \right) \Big|_{z_{min}}^{z_{max}} \quad (2.1)$$

Sustituyendo \vec{R} en la ecuación de campo eléctrico y desarrollando se tiene:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon} \int \frac{dq}{R^2} \vec{R} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon} \int \frac{dq}{R^3} \vec{R} \quad dq = Rdz = \frac{Q}{L} dz$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot L} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \frac{[r\hat{a}_r + (z_0 - z)\hat{k}] dz}{[r^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot L} \left\{ r\hat{a}_r \int_{z_{min}}^{z_{max}} \frac{dz}{[r^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} - \hat{k} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \frac{(z - z_0) dz}{[r^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \right\} \quad 2.2$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot L} \left\{ \hat{a}_r \frac{1}{r} \frac{(z - z_0)}{\sqrt{(z - z_0)^2 + r^2}} \Big|_{z_{min}}^{z_{max}} + \hat{k} \frac{1}{\sqrt{(z - z_0)^2 + r^2}} \Big|_{z_{min}}^{z_{max}} \right\}$$

Las anteriores ecuaciones de campo eléctrico y de voltaje se dejan expresadas en función de límites con el objeto de utilizarse en las siguientes secciones.

2.2.1 VOLTAJE Y CAMPO ELÉCTRICO EN UN MEDIO HOMOGÉNEO.

2.2.1.1) DETERMINACIÓN DE ECUACIONES DE VOLTAJE Y CAMPO ELÉCTRICO EN UN SUELO HOMOGÉNEO.

Debido a la discontinuidad que existe en la superficie de separación entre el aire y el suelo se aplica la teoría de Imágenes con el objetivo de obtener un modelo equivalente que permita solucionar dicha discontinuidad Ref.[1].

En la figura 2.2 se muestra una carga Q y su respectiva imagen

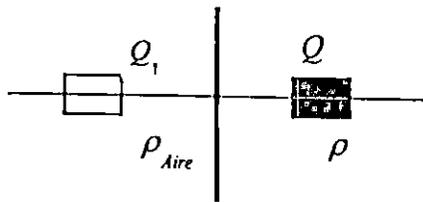
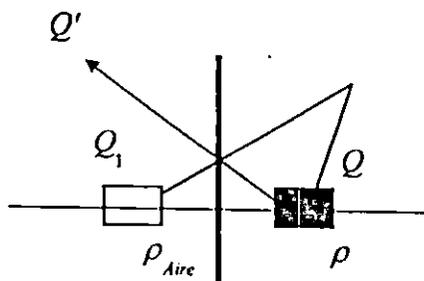


Fig.2.2 Representación de la carga y su imagen.

Aplicando la teoría de Maxwell en lo que respecta a las imágenes de una carga se muestra:



$$Q_1 = \frac{\rho_{Aire} - \rho}{\rho_{Aire} + \rho} Q$$

$$Q' = 2 \frac{\rho_{Aire}}{\rho_{Aire} + \rho} Q$$

$$Q_1 = Q$$

$$Q' = 2Q$$

Fig.2.3 Influencia de la carga y su imagen en los diferentes medios.

Para deducir las ecuaciones de voltaje y campo eléctrico se considera la siguiente figura.

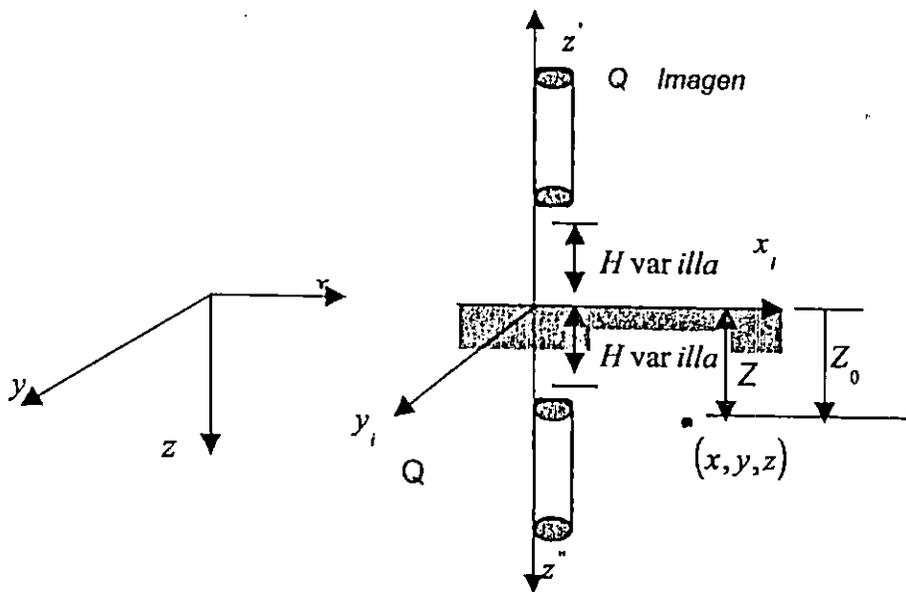


Fig.2.4 Análisis de una varilla y su imagen en un medio homogéneo.

Aplicando la definición de voltaje y considerando el sistema de referencia de la fig. 2.4 se obtiene el potencial para un electrodo, tomando en cuenta la influencia de su imagen:

$$V_i = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} \int_{H \text{ var illa}}^{H \text{ var illa} + L} \frac{dz'}{\sqrt{[z' - z_0]^2 + r_i^2}} + \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} \int_{H \text{ var illa}}^{H \text{ var illa} + L} \frac{dz''}{\sqrt{[z'' - z_0]^2 + r_i^2}}$$

De acuerdo a la fig.2.4 si el eje de referencia es z' entonces $Z_0 = -Z$ y si el eje de referencia es z'' se tiene $Z_0 = Z$, sustituyendo se tiene:

$$V_i = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} \int_{H \text{ var illa}}^{H \text{ var illa} + L} \frac{dz'}{\sqrt{[z' + Z]^2 + r_i^2}} + \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} \int_{H \text{ var illa}}^{H \text{ var illa} + L} \frac{dz''}{\sqrt{[z'' - Z]^2 + r_i^2}}$$

Desarrollando la integral:

$$V_i = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} \ln \left(z' + Z + \sqrt{(z' + Z)^2 + r_i^2} \right) \Big|_{H \text{ var illa}}^{H \text{ var illa} + L} + \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} \ln \left(z'' - Z + \sqrt{(z'' - Z)^2 + r_i^2} \right) \Big|_{H \text{ var illa}}^{H \text{ var illa} + L}$$

Evaluando se obtiene:

$$V_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left[\ln \left(\frac{H_{\text{varilla}} + L + z + \sqrt{(L+z)^2 + r_i^2}}{H_{\text{varilla}} + z + \sqrt{(H_V + z)^2 + r_i^2}} \right) + \ln \left(\frac{L - z + \sqrt{(L-z)^2 + r_i^2}}{H_{\text{varilla}} - z + \sqrt{(H_V - z)^2 + r_i^2}} \right) \right]$$

Aplicando el principio de superposición el voltaje total debido a N varillas de una configuración determinada es:

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left[\ln \left(\frac{H_{\text{varilla}} + L + z + \sqrt{(L+z)^2 + r_i^2}}{H_{\text{varilla}} + z + \sqrt{(H_V + z)^2 + r_i^2}} \right) + \ln \left(\frac{L - z + \sqrt{(L-z)^2 + r_i^2}}{H_{\text{varilla}} - z + \sqrt{(H_V - z)^2 + r_i^2}} \right) \right] \quad (2.3)$$

Aplicando la ecuación (2.2) para encontrar el campo eléctrico de una varilla y su imagen:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left\{ \begin{array}{l} r_i \hat{a}_r \int_{H_{\text{varilla}}}^{H_{\text{varilla}}+L} \frac{dz'}{\left[r_i^2 + (z' - z_0)^2 \right]^{3/2}} - \hat{k} \int_{H_{\text{varilla}}}^{H_{\text{varilla}}+L} \frac{(z'' - z_0) dz''}{\left[r_i^2 + (z'' - z_0)^2 \right]^{3/2}} + \\ r_i \hat{a}_r \int_{H_{\text{varilla}}}^{H_{\text{varilla}}+L} \frac{dz'}{\left[r_i^2 + (z' - z_0)^2 \right]^{3/2}} - \hat{k} \int_{H_{\text{varilla}}}^{H_{\text{varilla}}+L} \frac{(z'' - z_0) dz''}{\left[r_i^2 + (z'' - z_0)^2 \right]^{3/2}} \end{array} \right\}$$

$$\vec{E}_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{r_i} \frac{z' - z_0}{\sqrt{(z' - z_0)^2 + r_i^2}} + \frac{1}{r_i} \frac{z'' - z_0}{\sqrt{(z'' - z_0)^2 + r_i^2}} \Big|_{H_{\text{varilla}}}^{H_{\text{varilla}}+L} \hat{a}_r \\ + \frac{1}{\sqrt{(z' - z_0)^2 + r_i^2}} + \frac{1}{\sqrt{(z'' - z_0)^2 + r_i^2}} \Big|_{H_{\text{varilla}}}^{H_{\text{varilla}}+L} \hat{a}_z \end{array} \right]$$

Para el eje de z' , $z_0 = -z$ y para el eje z'' se tiene $z_0 = z$

entonces el campo \vec{E}_i debido a una varilla y su imagen es:

$$\vec{E}_i = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot L} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{r_i} \frac{z' + z}{\sqrt{(z' + z)^2 + r_i^2}} + \frac{1}{r_i} \frac{z'' - z}{\sqrt{(z'' - z)^2 + r_i^2}} \left[\begin{array}{l} H \text{ varilla} + L \\ H \text{ varilla} \end{array} \right] \hat{a}_r \\ + \frac{1}{\sqrt{(z' + z)^2 + r_i^2}} + \frac{1}{\sqrt{(z'' - z)^2 + r_i^2}} \left[\begin{array}{l} H \text{ varilla} + L \\ H \text{ varilla} \end{array} \right] \hat{a}_z \end{array} \right]$$

$$\vec{E}_i = \frac{Q}{4\pi \epsilon L} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{r_i} \frac{H \text{ varilla} + L + z}{\sqrt{(H \text{ varilla} + L + z)^2 + r_i^2}} + \frac{1}{r_i} \frac{H \text{ varilla} + L - z}{\sqrt{(H \text{ varilla} + L - z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{r_i} \frac{H \text{ varilla} + z}{\sqrt{(H \text{ varilla} + z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{r_i} \frac{H \text{ varilla} - z}{\sqrt{(H \text{ varilla} - z)^2 + r_i^2}} \right) \hat{a}_r \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{(H \text{ varilla} + L + z)^2 + r_i^2}} + \frac{1}{\sqrt{(H \text{ varilla} + L - z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(H \text{ varilla} + z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(H \text{ varilla} - z)^2 + r_i^2}} \right) \hat{a}_z \end{array} \right]$$

Aplicando el principio de superposición el campo eléctrico total debido a N varillas de una configuración determinada es:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{Q}{4\pi \epsilon L} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{r_i} \frac{H \text{ varilla} + L + z}{\sqrt{(H \text{ varilla} + L + z)^2 + r_i^2}} + \frac{1}{r_i} \frac{H \text{ varilla} + L - z}{\sqrt{(H \text{ varilla} + L - z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{r_i} \frac{H \text{ varilla} + z}{\sqrt{(H \text{ varilla} + z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{r_i} \frac{H \text{ varilla} - z}{\sqrt{(H \text{ varilla} - z)^2 + r_i^2}} \right) \hat{a}_r \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{(H \text{ varilla} + L + z)^2 + r_i^2}} + \frac{1}{\sqrt{(H \text{ varilla} + L - z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(H \text{ varilla} + z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(H \text{ varilla} - z)^2 + r_i^2}} \right) \hat{a}_z \end{array} \right] \quad (2.4)$$

2.2.2 VOLTAJE Y CAMPO ELÉCTRICO EN UN MEDIO HETEROGÉNEO.

En la obtención de éstas ecuaciones se hace uso de la teoría de las Imágenes, debido a las características que presenta el medio heterogéneo donde el voltaje y campo eléctrico presentan un comportamiento según la ubicación de la varilla y del punto en análisis ya sea que se encuentren en la primera o segunda capa del suelo. Es a partir de esto que el cálculo de estas variables se realiza en dos etapas, en primer lugar se analiza

la parte de la varilla (L1) que se encuentra enterrada en la primera capa de resistividad ρ_1 , posteriormente el resto de la varilla (L2) enterrada en la segunda capa de resistividad ρ_2 .

En la figura 2.5 se muestra un punto "P" que puede estar ubicado ya sea en la primera o en la segunda capa.

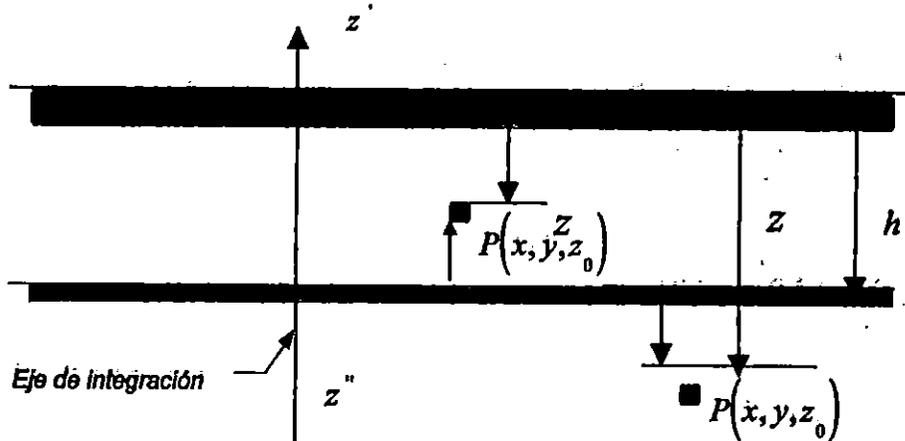


Fig.2.5 Ubicación de un punto P en la primera y segunda capa.

De la figura 2.5 se deduce para los ejes z' y z'' las relaciones siguientes:

Punto en la primera capa

$$z'_0 = (h - z)$$

$$z''_0 = -(h - z)$$

Punto en la Segunda Capa

$$z'_0 = -(z - h) = h - z$$

$$z''_0 = (z - h) = -(h - z)$$

2.2.2.1) ANÁLISIS DEL VOLTAJE Y CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO AL SEGMENTO DE LA VARILLA UBICADO EN LA PRIMERA CAPA DE LA ESTRUCTURA DEL SUELO.

Es necesario utilizar la teoría de las Imágenes para determinar las constantes que tomen en cuenta la influencia de los medios o capas dependiendo de la ubicación del segmento de la varilla y de sus respectivas imágenes, tal como se muestra en la figura 2.6.

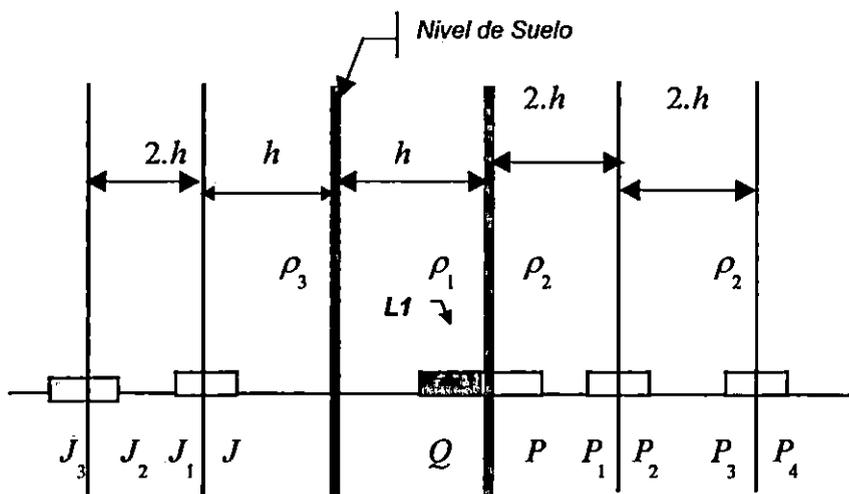


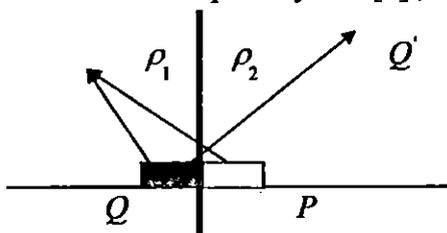
Fig. 2.6 Segmento L1 de la varilla y sus respectivas imágenes.

La fig. 2.6 muestra una varilla la cual se encuentra en un medio que contiene tres capas, siendo la capa de resistividad ρ_3 el aire, la profundidad de la primera capa (ρ_1) es h y la profundidad de la segunda capa se considera infinita.

$J, J_1, J_2 \dots J_n, J', J'_1, J'_2, \dots J'_n, J'', J''_1, J''_2, \dots J''_n$ son las imágenes de la varilla ubicadas en el tercer medio y su punto de aplicación se encuentra ubicado en el primer, segundo o tercer medio respectivamente; $P, P_1, P_2 \dots P_n, P'_1, P'_2, \dots P'_n, P''_1, P''_2, \dots P''_n$ son las imágenes de la varilla ubicadas en el segundo medio y su punto de aplicación se encuentra en el primer, segundo o tercer medio respectivamente.

Ahora se analiza las imágenes según la ubicación de éstas en las diferentes capas con el objetivo de lograr cumplir la condición de continuidad de voltaje y corriente entre la superficie de separación de las capas.

Para determinar las cantidades $J, J_1, J_2 \dots J_n, J', J'_1, J'_2, \dots J'_n, J'', J''_1, J''_2, \dots J''_n, P, P_1, P_2 \dots P_n, P'_1, P'_2, \dots P'_n, P''_1, P''_2, \dots P''_n$ se hace uso de la teoría de las imágenes descrita en el capítulo y Ref.[1], lo cual se muestra en la fig.2.7



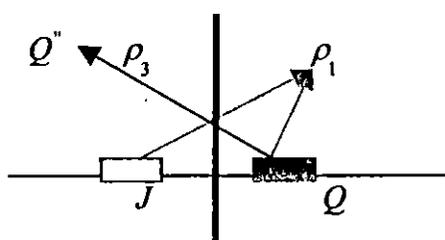
$$P = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} Q$$

$$P = KQ$$

$$Q' = \frac{2\rho_2}{\rho_2 + \rho_1} Q$$

$$Q' = (1 + K)Q$$

Fig.2.7.a



$$J = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_3 + \rho_1} Q \quad Q'' = \frac{2\rho_3}{\rho_3 + \rho_1} Q$$

$$J = Q \quad Q'' = 2Q$$

Fig.2.7.b

Fig. 2.7. Imágenes y su influencia en las diferentes capas del suelo.

Para la obtención de las ecuaciones de voltaje y campo eléctrico en esta capa se deben considerar dos casos:

A) Cuando el punto de análisis se encuentra en la primera capa del suelo.

De acuerdo a la fig. 2.7 este caso se representa en la siguiente figura:

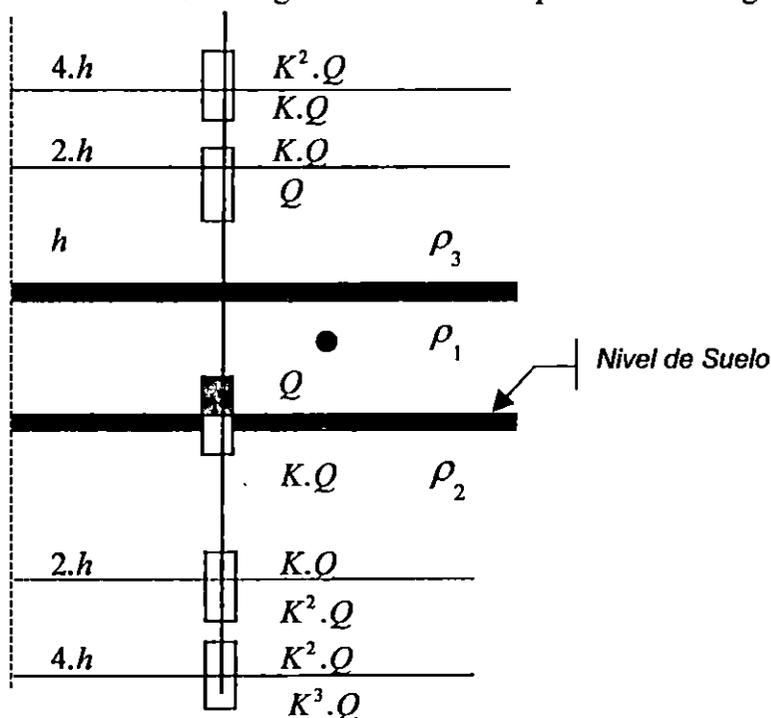


Fig.2.8 Segmento L1 y sus imágenes cuando el punto de análisis se encuentra en la primera capa.

El cálculo de voltaje en la posición donde $n=0$

Para $n=0$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} \int_0^{L1} \frac{dz'}{\sqrt{[z' - (h-z)]^2 + r_i^2}}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} \ln \left[\frac{L1 + z - h + \sqrt{(L1 + z - h)^2 + r_i^2}}{z - h + \sqrt{(z - h)^2 + r_i^2}} \right]$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K \ln \left[\frac{L1 + h - z + \sqrt{(L1 + h - z)^2 + r_i^2}}{h - z + \sqrt{(h - z)^2 + r_i^2}} \right]$$

Y Para las posiciones que toman valores de $n=1,2,3\dots$ el voltaje es:

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^{n-1} \int_{2nh-L1}^{2nh} \frac{dz'}{\sqrt{[z' - (h-z)]^2 + r_i^2}}$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^{n-1} \ln \left[\frac{2nh + z - h + \sqrt{(2nh + z - h)^2 + r_i^2}}{2nh - L1 + z - h + \sqrt{(2nh - L1 + z - h)^2 + r_i^2}} \right]$$

$$V_4 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^n \ln \left[\frac{2nh + h - z + \sqrt{(2nh + h - z)^2 + r_i^2}}{2nh - L1 + h - z + \sqrt{(2nh - L1 + h - z)^2 + r_i^2}} \right]$$

$$V_5 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^n \ln \left[\frac{2nh + L1 + z - h + \sqrt{(2nh + L1 + z - h)^2 + r_i^2}}{2nh + z - h + \sqrt{(2nh + z - h)^2 + r_i^2}} \right]$$

$$V_6 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^{n+1} \ln \left[\frac{2nh + L1 + h - z + \sqrt{(2nh + L1 + h - z)^2 + r_i^2}}{2nh + h - z + \sqrt{(2nh + h - z)^2 + r_i^2}} \right]$$

Para calcular el potencial de dicho segmento se aplica el principio de Superposición de donde se tiene:

$$VL11 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 \quad (2.5)$$

De igual forma se realiza el cálculo de campo eléctrico:

Para n=0

$$\bar{E}_1 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} \left[r_i \hat{a}_r \int_0^{L1} \frac{dz'}{\left\{ [z' - (h-z)]^2 + r_i^2 \right\}^{3/2}} - \hat{k} \int_0^{L1} \frac{[z' - (h-z)] dz'}{\left\{ [z' - (h-z)]^2 + r_i^2 \right\}^{3/2}} \right]$$

$$\bar{E}_1 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} \left\{ \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{L1 + z - h}{\sqrt{(L1 + z - h)^2 + r_i^2}} - \frac{z - h}{\sqrt{(z - h)^2 + r_i^2}} \right] + \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(L1 + z - h)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z - h)^2 + r_i^2}} \right] \right\}$$

$$\bar{E}_2 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K \left\{ \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{L1 + h - z}{\sqrt{(L1 + h - z)^2 + r_i^2}} - \frac{h - z}{\sqrt{(h - z)^2 + r_i^2}} \right] + \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(L1 + h - z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h - z)^2 + r_i^2}} \right] \right\}$$

El campo eléctrico para los valores de $n=1,2,3\dots$

$$\bar{E}_3 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{2nh+z-h}{\sqrt{(2nh+z-h)^2+r_i^2}} - \frac{2nh-L1+z-h}{\sqrt{(2nh-L1+z-h)^2+r_i^2}} \right] + \\ \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(2nh+z-h)^2+r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{2nh-L1+(z-h)^2+r_i^2}} \right] \end{array} \right\}$$

$$\bar{E}_4 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^n \left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{2nh+h-z}{\sqrt{(2nh+h-z)^2+r_i^2}} - \frac{2nh-L1+h-z}{\sqrt{(2nh-L1+h-z)^2+r_i^2}} \right] + \\ \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(2nh+h-z)^2+r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2nh-L1+h-z)^2+r_i^2}} \right] \end{array} \right\}$$

$$\bar{E}_5 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^n \left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{2nh+L1+z-h}{\sqrt{(2nh+L1+z-h)^2+r_i^2}} - \frac{2nh+z-h}{\sqrt{(2nh+z-h)^2+r_i^2}} \right] + \\ \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(2nh+L1+z-h)^2+r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{2nh+(z-h)^2+r_i^2}} \right] \end{array} \right\}$$

$$\bar{E}_6 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^{n+1} \left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{2nh+L1+h-z}{\sqrt{(2nh+L1+h-z)^2+r_i^2}} - \frac{2nh+h-z}{\sqrt{(2nh+h-z)^2+r_i^2}} \right] + \\ \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(2nh+L1+h-z)^2+r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2nh+h-z)^2+r_i^2}} \right] \end{array} \right\}$$

Por superposición el campo eléctrico en el segmento L1 es:

$$EL11 = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 \quad (2.6)$$

B) Cuando el punto de análisis se encuentra en la segunda capa del suelo.

De acuerdo a la fig. 2.7 este caso se representa en la siguiente figura:

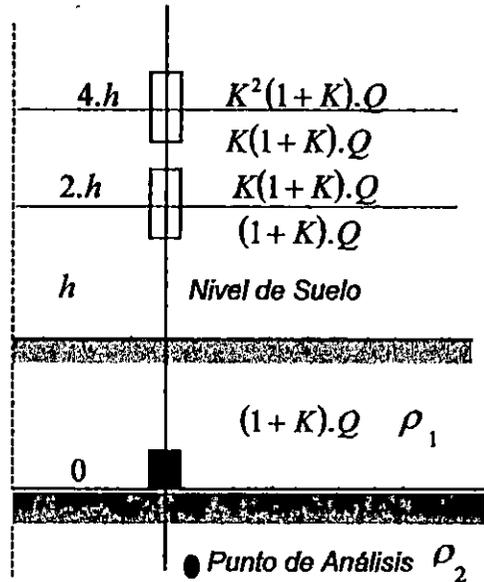


Fig.2.9 Segmento L1 y sus imágenes cuando el punto de análisis se encuentra en la segunda capa.

Cálculo de potencial eléctrico para la posición de $n=0$ es:

$$V_7 = \frac{Q}{4\pi.\epsilon_1.L} (1+K) \int_0^{L1} \frac{dz'}{\sqrt{[z' - (h-z)]^2 + r_i^2}}$$

$$V_7 = \frac{Q}{4\pi.\epsilon_1.L} (1+K) \ln \left[\frac{L1+z-h + \sqrt{(L1+z-h)^2 + r_i^2}}{z-h + \sqrt{(z-h)^2 + r_i^2}} \right]$$

Ahora ubicándose en la posición para $n=1,2,3...$ el voltaje es:

$$V_8 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^{n-1} (1+K) \ln \left[\frac{2nh+z-h\sqrt{(2nh+z-h)^2+r_i^2}}{2nh-L1+z-h+\sqrt{(2nh-L1+z-h)^2+r_i^2}} \right]$$

$$V_9 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^n (1+K) \ln \left[\frac{2nh+L1+z-h\sqrt{(2nh+L1+z-h)^2+r_i^2}}{2nh+z-h+\sqrt{(2nh+z-h)^2+r_i^2}} \right]$$

Por superposición el voltaje es:

$$VL12 = V_7 + V_8 + V_9 \quad (2.7)$$

De igual manera el campo eléctrico para n=0 es:

$$\bar{E}_7 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} (1+K) \left[r_i \hat{a}_r \int_0^{L1} \frac{dz'}{\left\{ [z' - (h-z)]^2 + r_i^2 \right\}^{3/2}} - \hat{k} \int_0^{L1} \frac{[z' - (h-z)] dz'}{\left\{ [z' - (h-z)]^2 + r_i^2 \right\}^{3/2}} \right]$$

$$\bar{E}_7 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} (1+K) \left\{ \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{L1+z-h}{\sqrt{(L1+z-h)^2+r_i^2}} - \frac{z-h}{\sqrt{(z-h)^2+r_i^2}} \right] + \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(L1+z-h)^2+r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z-h)^2+r_i^2}} \right] \right\}$$

Y para las posiciones de n= 1,2,3... el campo eléctrico será:

$$\bar{E}_8 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^{n-1} (1+K) \left\{ \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{2nh+z-h}{\sqrt{(2nh+z-h)^2+r_i^2}} - \frac{2nh-L1+z-h}{\sqrt{(2nh-L1+z-h)^2+r_i^2}} \right] + \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(2nh+z-h)^2+r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{2nh-L1+(z-h)^2+r_i^2}} \right] \right\}$$

$$\bar{E}_9 = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_1 \cdot L} K^n (1+K) \left\{ \begin{array}{l} \hat{a} \frac{1}{r_i} \left[\frac{2nh + L1 + z - h}{\sqrt{(2nh + L1 + z - h)^2 + r_i^2}} - \frac{2nh + z - h}{\sqrt{(2nh + z - h)^2 + r_i^2}} \right] + \\ \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(2nh + L1 + z - h)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{2nh + (z - h)^2 + r_i^2}} \right] \end{array} \right\} \quad \text{a}$$

Aplicando el principio de superposición el campo eléctrico es:

$$EL12 = E_7 + E_8 + E_9 \quad (2.8)$$

2.2.2.2) ANÁLISIS DEL VOLTAJE Y CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO AL SEGMENTO DE LA VARILLA UBICADO EN LA SEGUNDA CAPA DE LA ESTRUCTURA DEL SUELO.

Es necesario utilizar la teoría de las Imágenes para determinar las constantes que tomen en cuenta la influencia de los medios o capas dependiendo de la ubicación del segmento de la varilla y de sus respectivas imágenes, tal como se muestra en la figura 2.10

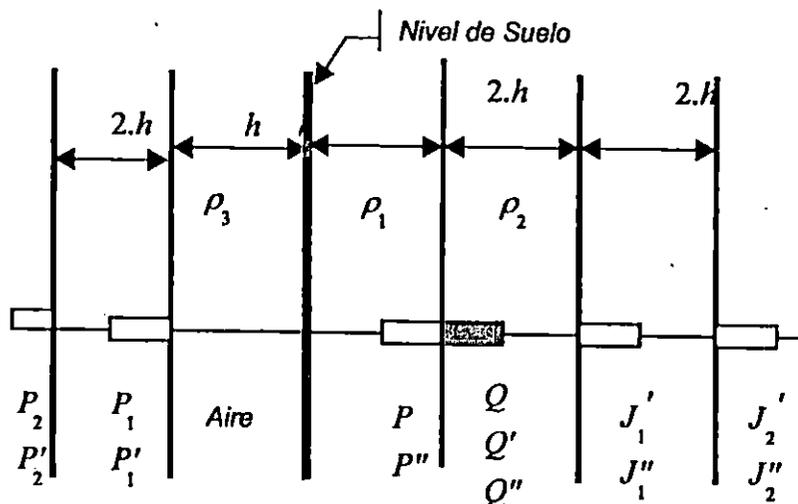


Fig.2.10 Segmento L2 de la varilla y sus respectivas imágenes.

Donde la fig.2.10 muestra una varilla la cual se encuentra en un medio que contiene tres capas, siendo la capa de resistividad ρ_3 el aire y la profundidad de la primera capa (ρ_1) es h y la profundidad de la segunda capa se considera infinita.

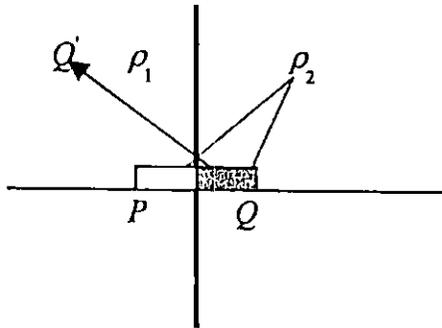
Donde, $J''_1, J''_2, \dots, J''_n$ son las imágenes ubicadas en el segundo medio y su punto de aplicación se encuentra ubicado en el primer y tercer medio respectivamente.

P, P'' , P'_1, P'_2, \dots, P'_n y P_1, P_2, \dots, P_n , son las imágenes de la varilla ubicadas en el primer y tercer medio respectivamente. Para P, P_1, P_2, \dots, P_n y P'' su punto de aplicación es el segundo y tercer medio respectivamente, además P'_1, P'_2, \dots, P'_n tiene su punto de aplicación en el primer medio.

Q', Q'' se definen como las cargas imaginarias ubicadas en el segundo medio con un punto de aplicación en el primer y tercer medio.

Ahora se analiza las imágenes según la ubicación de éstas en las diferentes capas con el objetivo de lograr cumplir la condición de continuidad de voltaje y corriente entre la superficie de separación de las capas.

Para determinar las cantidades $J'_1, J'_2, \dots, J'_n, J''_1, J''_2, \dots, J''_n, P, P'', P_1, P_2, \dots, P_n, P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ y Q', Q'' se hace uso de la teoría de las imágenes Ref.[1], lo cual se muestra en la fig.2.11.

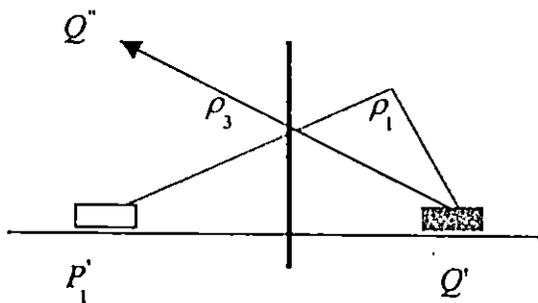


$$P = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} Q \quad Q' = \frac{2 \cdot \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} Q$$

$$P = -K \cdot Q \quad Q' = (1 - K)Q$$

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

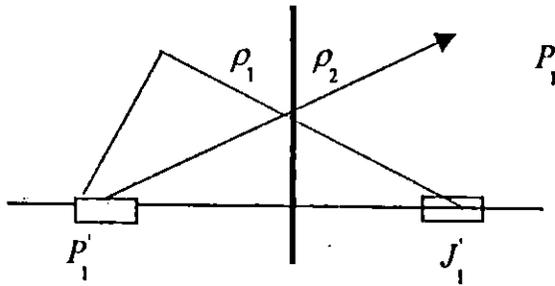
Fig.2.11.a



$$P'_1 = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_3 + \rho_1} E' \quad Q'' = \frac{2 \cdot \rho_3}{\rho_3 + \rho_1} Q'$$

$$P'_1 = (1 - K)Q \quad Q'' = 2(1 - K)Q$$

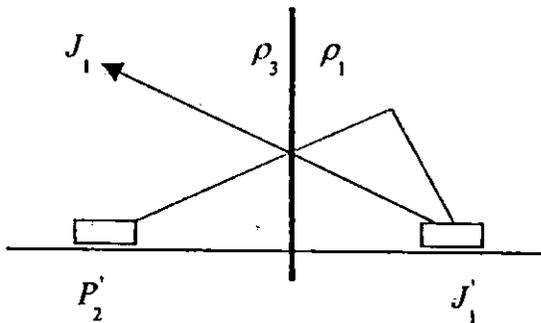
Fig.2.11.b



$$J'_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} P'_1 \quad P_1 = \frac{2\rho_2}{\rho_2 + \rho_1} P'_1$$

$$J'_1 = K(1-K)Q \quad P_1 = (1-K^2)Q$$

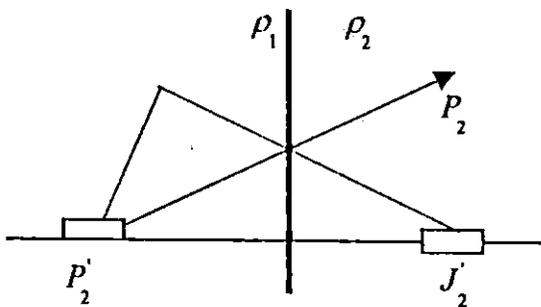
Fig.2.11.c



$$P'_2 = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_3 + \rho_1} J'_1 \quad J_1 = \frac{2\rho_3}{\rho_3 + \rho_1} J'_1$$

$$P'_2 = K(1-K)Q \quad J_1 = 2K(1-K)Q$$

Fig.2.11.d



$$J'_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} P'_2 \quad P_2 = \frac{2\rho_2}{\rho_2 + \rho_1} P'_2$$

$$J'_2 = K^2(1-K)Q \quad P_2 = K(1-K^2)Q$$

Fig.2.11.e

Fig. 2.11. Imágenes y su influencia en las diferentes capas del suelo.

Para obtener las ecuaciones de voltaje y campo eléctrico en esta capa se deben considerar dos casos:

A) Cuando el punto de análisis se encuentra en la primera capa del suelo.

De acuerdo a la fig. 2.11 este caso se representa en la siguiente figura:

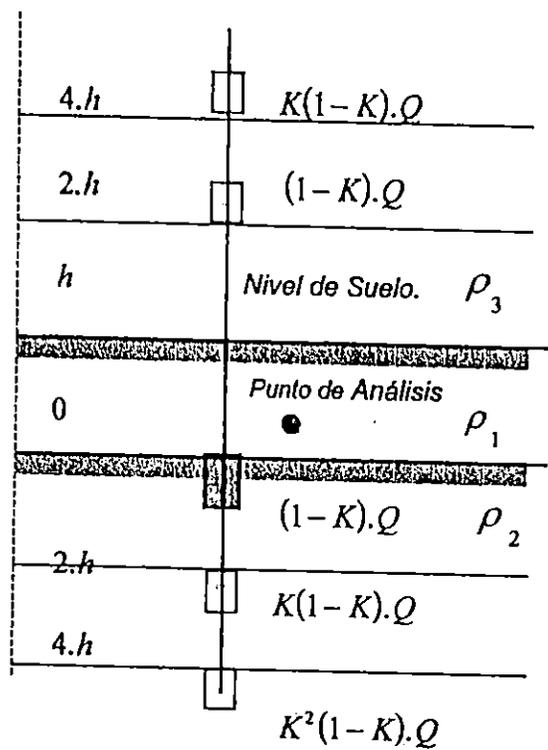


Fig.2.12 Segmento L2 y sus imágenes cuando el punto de análisis se encuentra en la primera capa.

Calculando el voltaje para la ubicación de $n=0$ se tiene:

$$V_{10} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_2 \cdot L} (1-K) \int_0^{L2} \frac{dz''}{\sqrt{\{z'' - [-(h-z)]\}^2 + r_i^2}}$$

$$V_{10} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_2 \cdot L} (1-K) \ln \left[\frac{L2 + h - z + \sqrt{(L2 + h - z)^2 + r_i^2}}{h - z + \sqrt{(h - z)^2 + r_i^2}} \right]$$

Ahora el cálculo de voltaje en la posición donde $n=1,2,\dots$

$$V_{11} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 L} K^{n-1} (1-K) \ln \left[\frac{2nh + L2 + z - h + \sqrt{(2nh + L2 + z - h)^2 + r_i^2}}{2nh + z - h + \sqrt{(2nh + z - h)^2 + r_i^2}} \right]$$

Para calcular el potencial de dicho segmento se aplica el principio de Superposición de donde se tiene:

$$VL21 = E_{10} + E_{11} + E_{12} \quad (2.9)$$

Para el cálculo de campo eléctrico se tiene:

G

Para la posición $n=0$

$$\bar{E}_{10} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 L} (1-K) \left[r_i \hat{a}_r \int_0^{L2} \frac{dz''}{\left\{ [z'' - \{-(h-z)\}]^2 + r_i^2 \right\}^{3/2}} - \bar{k} \int_0^{L2} \frac{\{z'' - [-(h-z)]\} dz''}{\left\{ [z'' - \{-(h-z)\}]^2 + r_i^2 \right\}^{3/2}} \right]$$

$$\bar{E}_{10} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 L} (1-K) \left\{ \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{L2+h-z}{\sqrt{(L2+h-z)^2 + r_i^2}} - \frac{h-z}{\sqrt{(h-z)^2 + r_i^2}} \right] + \bar{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(L2+h-z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h-z)^2 + r_i^2}} \right] \right\}$$

para las posiciones $n=1,2,3\dots$

$$\bar{E}_{11} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 L} K^{n-1} (1-K) \left\{ \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{2nh + L2 + z - h}{\sqrt{(2nh + L2 + z - h)^2 + r_i^2}} - \frac{2nh + z - h}{\sqrt{(2nh + z - h)^2 + r_i^2}} \right] + \bar{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(2nh + L2 + z - h)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{2nh + (z - h)^2 + r_i^2}} \right] \right\}$$

$$\bar{E}_{12} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 L} K^n (1-K) \left\{ \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{2nh + L2 + h - z}{\sqrt{(2nh + L2 + h - z)^2 + r_i^2}} - \frac{2nh + h - z}{\sqrt{(2nh + h - z)^2 + r_i^2}} \right] + \bar{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(2nh + L2 + h - z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2nh + h - z)^2 + r_i^2}} \right] \right\}$$

Para calcular del campo eléctrico de dicho segmento se aplica el principio de Superposición de donde se obtiene:

$$EL21 = E_{10} + E_{11} + E_{12} \quad (2.10)$$

B) Cuando el punto de análisis se encuentra en la segunda capa del suelo.

De acuerdo a la fig. 2.11 este caso se representa en la siguiente figura:

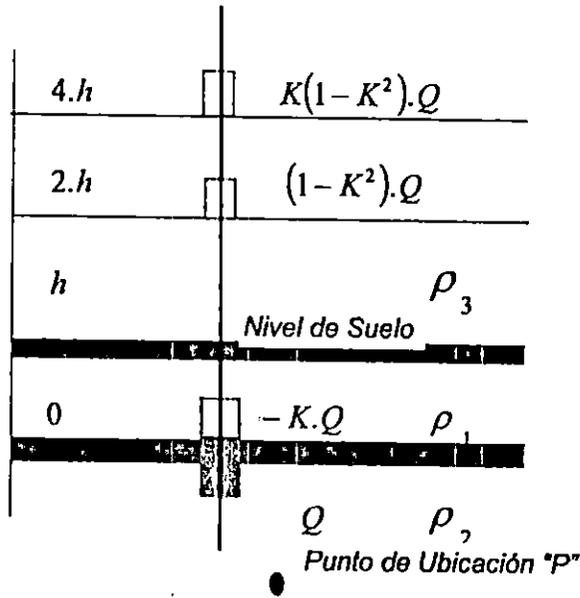


Fig.2.13 Segmento L2 y sus imágenes cuando el punto de análisis se encuentra en la segunda capa.

El cálculo de voltaje en la posición donde $n=0$

$$V_{13} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_2 \cdot L} (-K) \ln \left[\frac{L2 + z - h + \sqrt{(L2 + z - h)^2 + r_i^2}}{z - h + \sqrt{(z - h)^2 + r_i^2}} \right]$$

$$V_{14} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_2 \cdot L} \ln \left[\frac{L2 + h - z + \sqrt{(L2 + h - z)^2 + r_i^2}}{h - z + \sqrt{(h - z)^2 + r_i^2}} \right]$$

El cálculo de voltaje en la posición donde $n=1,2,\dots$

$$V_{15} = K^{n-1}(1-K^2) \log \left(\frac{2nh + L2 - h + z + \sqrt{(2nh + L2 - h + z)^2 + r_i^2}}{2nh - h + z + \sqrt{(2nh - h + z)^2 + r_i^2}} \right)$$

Para calcular del potencial de dicho segmento se aplica el principio de Superposición de donde se obtiene:

$$VL22 = V_{13} + V_{14} + V_{15} \quad (2.11)$$

Para el cálculo de campo eléctrico se tiene:

Para la posición $n=0$, el campo eléctrico es el siguiente:

$$\vec{E}_{13} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 \cdot L} (-K) \left\{ \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{L2+z-h}{\sqrt{(L2+z-h)^2 + r_i^2}} - \frac{z-h}{\sqrt{(z-h)^2 + r_i^2}} \right] + \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(L2+z-h)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z-h)^2 + r_i^2}} \right] \right\}$$

$$\vec{E}_{14} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 \cdot L} \left\{ \hat{a}_r \frac{1}{r_i} \left[\frac{L2+h-z}{\sqrt{(L2+h-z)^2 + r_i^2}} - \frac{h-z}{\sqrt{(h-z)^2 + r_i^2}} \right] + \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{(L2+h-z)^2 + r_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h-z)^2 + r_i^2}} \right] \right\}$$

El cálculo de potencial en la posición donde $n=1,2,\dots$

$$\vec{E}_{15} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 \cdot L} K^{n-1}(1-K^2) \left[\hat{a}_r \int_{2nh}^{2nh+L2} \frac{dz'}{\left\{ [z' - (h-z)]^2 + r_i^2 \right\}^{3/2}} - \hat{k} \int_{2nh}^{2nh+L2} \frac{[z' - (h-z)] dz'}{\left\{ [z' - (h-z)]^2 + r_i^2 \right\}^{3/2}} \right]$$

Para calcular del campo eléctrico de dicho segmento se aplica el principio de Superposición de donde se obtiene:

$$EL22 = E_{13} + E_{14} + E_{15} \quad (2.12)$$

Teniendo las ecuaciones tanto del campo eléctrico como del voltaje de una varilla ubicada en un medio heterogéneo estas se agrupan de acuerdo a los siguientes casos:

Para determinar el voltaje cuando el punto de análisis se encuentre en la primera capa se utiliza el principio de superposición, entonces este voltaje es la suma del voltaje debido

al segmento de la varilla en la primera capa (L1 y sus imágenes) y del voltaje del segmento de la varilla en la segunda capa (L2 y sus imágenes), a este voltaje se le denomina voltaje de capa1.

$$V_{capa1} = VL11 + VL21$$

Cuando el punto de análisis se encuentre en la segunda capa el voltaje la suma del voltaje debido al segmento de la varilla y sus imágenes en la primera capa (L1 y sus imágenes) y del voltaje del segmento de la varilla en la segunda capa (L2 y sus imágenes), a este voltaje se le denomina voltaje de capa2.

$$V_{capa2} = VL12 + VL22$$

De la misma forma el campo eléctrico cuando el punto de análisis se encuentre en la primera capa es por superposición la suma de del campo eléctrico debido al segmento de la varilla en la primera capa (L1 y sus imágenes) y del campo eléctrico del segmento de la varilla en la segunda capa (L2 y sus imágenes), a este campo eléctrico se le denomina campo eléctrico en la capa 1.

$$E_{capa1} = EL11 + EL21$$

y cuando el punto de análisis se encuentre en la segunda capa el campo eléctrico es la suma de del campo eléctrico debido al segmento de la varilla en la primera capa (L1 y sus imágenes) y del campo eléctrico del segmento de la varilla en la segunda capa (L2 y sus imágenes), a este campo eléctrico se le denomina campo eléctrico en la capa 2.

$$E_{capa2} = EL12 + EL22$$

En la fig2.14 se muestra una configuración de una red de tierra en un medio heterogéneo la cual se utiliza para determinar el voltaje y campo eléctrico en las diferentes capas.

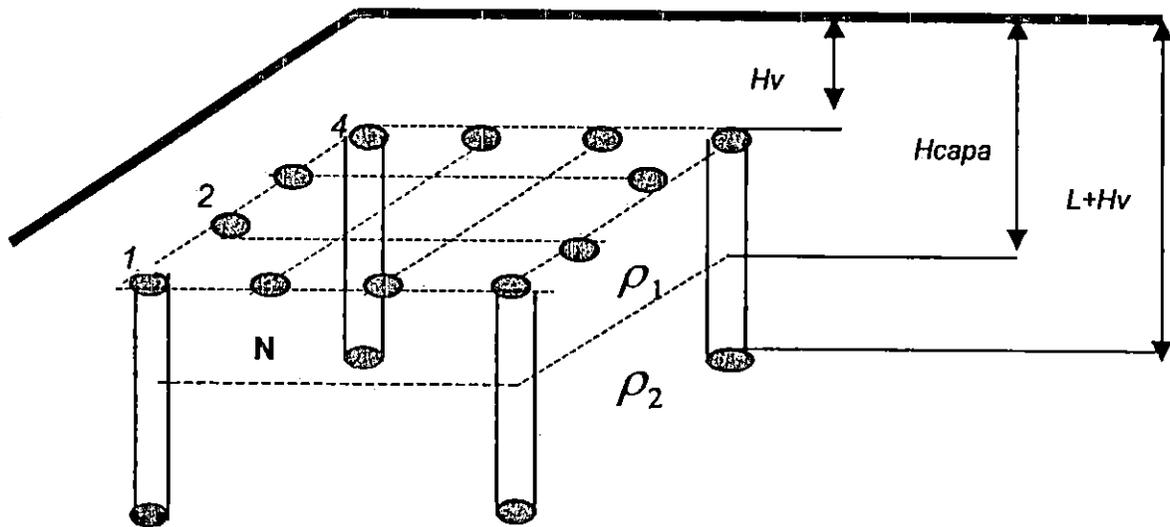


Fig. 2.14 configuración de red de tierra perimetral de "N" varillas.

Para una determinada configuración de red de tierra tal como se muestra en la fig.2.15 el voltaje en un punto ubicado en la primera capa se calcula aplicando el principio de superposición, es decir,

$$V_{t\text{capa}1} = \sum_{i=1}^N V_{\text{capa}1} \quad (2.13)$$

Así como también para calcular el voltaje en un punto ubicado en la segunda capa de la fig.2.15 se aplicando el principio de superposición, es decir,

$$V_{t\text{capa}2} = \sum_{i=1}^N V_{\text{capa}2} \quad (2.14)$$

Para el calcular el campo eléctrico se utiliza el mismo procedimiento del voltaje, es decir, para un punto en la primera capa de la fig.2.15 se tiene:

$$E_{t\text{capa}1} = \sum_{i=1}^N E_{\text{capa}1} \quad (2.15)$$

Y para un punto en la segunda capa de la fig.2.15 el campo eléctrico es

$$E_{t\text{capa}2} = \sum_{i=1}^N E_{\text{capa}2} \quad (2.16)$$

2.3 DETERMINACION DE LA CORRIENTE EN UNA RED DE TIERRA.

La distribución de corriente depende de dos factores: en primer lugar por una amplia difusión de los flujos de corriente en la tierra, y del punto donde penetra la corriente de falla en la red de tierra.

Las corrientes tienen una tendencia a penetrar mas profundamente en el suelo en la medida que la conductividad sea mayor, es decir, una menor resistividad. Los flujos de corriente se distribuyen radialmente en todas las direcciones, configurando así las superficies equipotenciales. La corriente se calcula por la siguiente ecuación:

$$I = \sigma \cdot \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (2.17)$$

Siendo dA el diferencial de área de la superficie equipotencial que es atravesada por el flujo de corriente tal como se muestra en la siguiente figura:

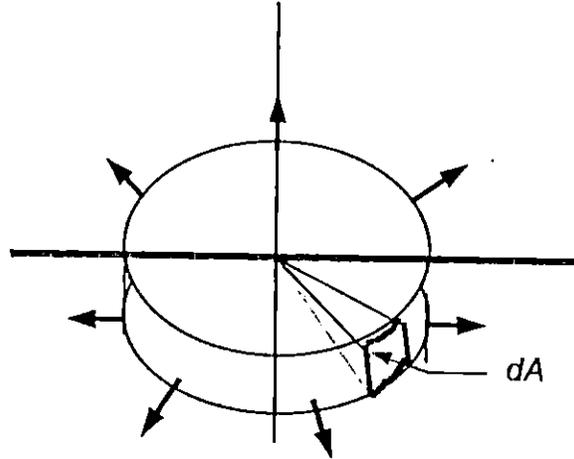


Fig.2.15 Distribución de la corriente en una superficie equipotencial.

La distribución de corriente en los electrodos presenta una característica similar, variando en cada electrodo según la resistencia del mismo.

2.4 METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DE RESISTENCIA A TIERRA.

Normalmente se emplean ecuaciones previamente establecidas para el cálculo de resistencia a tierra, lo que no permiten variar factores muy importantes, imposibilitando un análisis más profundo que permita mejorar el diseño de las redes de tierra haciéndose necesario desarrollar una metodología que permita el manejo versátil de los parámetros y magnitudes involucrados en las redes de tierra. Dicha metodología se fundamenta en la interacción de las leyes básicas del electromagnetismo descritas anteriormente.

El primer paso de esta metodología consiste en la definición de un sistema de referencia común que simplifique el manejo de variables, ya que las ecuaciones de voltaje y campo eléctrico están definidas en un sistema de referencia ubicado en cada una de las varillas, haciéndose necesario referenciar las variables del voltaje y campo eléctrico (r_i, θ_i, z_i) a un solo sistema de referencia de coordenadas (r, θ, z) .

2.4.1 Análisis para obtener r_i en función del sistema de referencia en coordenadas cilíndricas de la varilla considerada como origen.

En la fig.2.16 se muestra el sistema de referencia utilizado para obtener el potencial y campo eléctrico en cualquier punto.

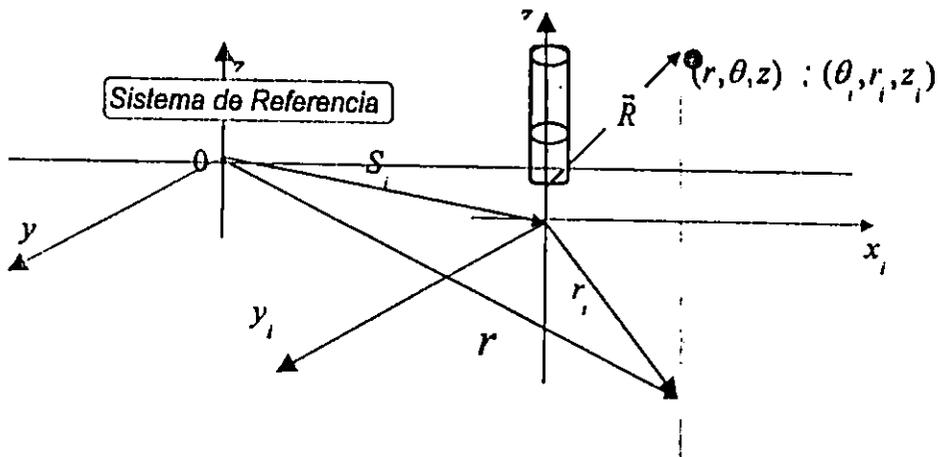


Fig.2.16 Sistema de referencia general.

La fig.2.17 muestra con mayor claridad la relación entre las coordenadas del sistema de referencia general y el sistema de la varilla.

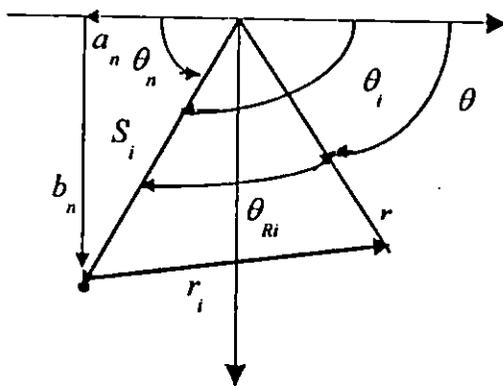


fig.2.17.a θ_{Ri} menor de 180°

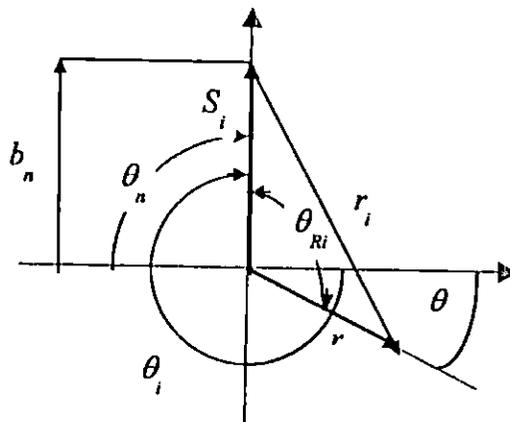


fig.2.17.b θ_{Ri} mayor de 180°

Fig.2.17 Aplicación de la ley de cosenos para θ_{Ri} .

Determinación de θ_i en términos de θ_n . De la fig.2.17

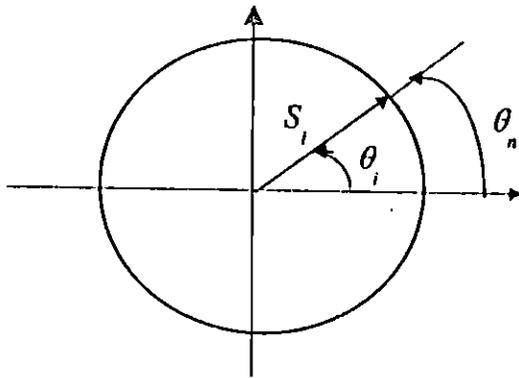
$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

éste es un ángulo menor o igual a 90° con su respectivo signo.

θ_i : Es el ángulo formado por S_i respecto al eje x del sistema de referencia.

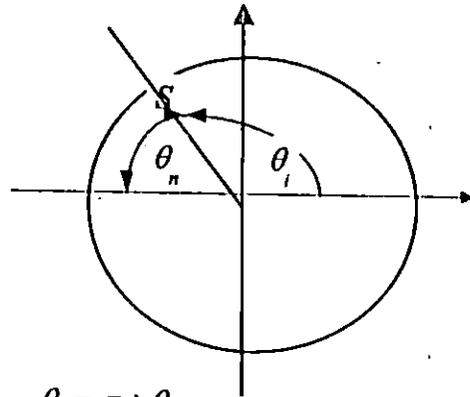
S_i : Separación entre la varilla origen y la varilla y .

El análisis del ángulo se realiza para cada cuadrante con el objetivo de determinar su comportamiento en cada uno de ellos tal como se observa en la figura 2.18.



$$\theta_i = \theta_n$$

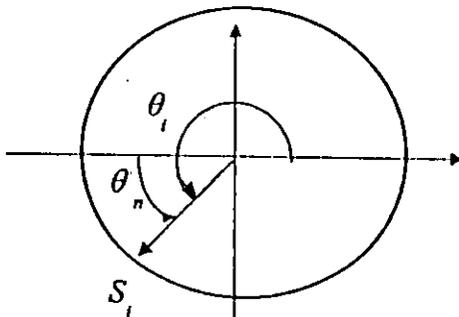
Fig.2.18.a Punto en el primer cuadrante.



$$\theta_i = \pi + \theta_n$$

siendo θ_n con signo negativo.

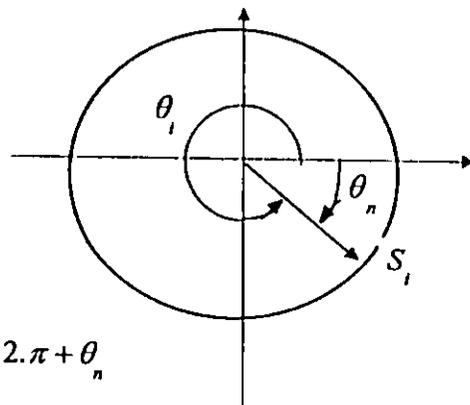
Fig.2.18.a Punto en el segundo cuadrante.



$$\theta_i = \pi + \theta_n$$

Siendo θ_n con signo positivo.

fig.2.18.c Punto en el tercer cuadrante



$$\theta_i = 2.\pi + \theta_n$$

θ_n con signo negativo.

fig.2.18.d Punto en el cuarto cuadrante.

Fig. 2.18 Ubicación de S_i en los cuatro cuadrantes.

Para encontrar la posición del punto donde se determinara el voltaje y campo eléctrico en términos del sistema de referencia común descrito anteriormente, se aplica la ley de cosenos al triángulo que se tiene en la fig.2.18.a se tiene:

$$r_i = \sqrt{r^2 + S_i^2 - 2.r.S_i.\cos(\theta_{Ri})} \quad (2.18)$$

donde:

θ_{Ri} = Es el ángulo interno que forman r y S_i ; S_i cual es menor o igual a 180° .

Para garantizar la ley de los cosenos se toman las siguientes consideraciones:

a) Si $\left|(\theta_i - \theta)\right| \leq 180^\circ$ de acuerdo a la fig.2.18.a entonces $\theta_{Ri} = \left|(\theta_i - \theta)\right|$

b) Si $\left|(\theta_i - \theta)\right| > 180^\circ$ tal como se muestra en la fig.2.18.b entonces

$$\theta_{Ri} = 2.\pi - \left|(\theta_i - \theta)\right|$$

2.4.2 Proceso de Cálculo de la Resistencia en una Red de Tierra.

Una de las variables de mayor importancia en el proceso de cálculo de resistencia de tierra es el análisis del voltaje y corriente en las cercanías de la varilla de análisis y en el área de la red de puesta a tierra.

De acuerdo a la definición de resistencia:

$$R = \frac{-\int \vec{E}.d\vec{L}}{\sigma.\int \vec{E}.d\vec{A}} \quad \Omega \quad (2.19)$$

Para el cálculo de resistencia se considera un voltaje el cual es el promedio del voltaje de la varilla y las contribuciones del voltaje de las otras, dicho voltaje se calcula en el radio de la varilla.

Para obtener el voltaje máximo se encuentra el voltaje en el radio de la varilla debido a ella misma y a los otros electrodos que componen la red de tierra recorriendo la longitud de la varilla con lo cual se obtiene una matriz de voltaje. Una vez obtenida la matriz, selecciona el voltaje promedio obteniendo de esta manera un voltaje constante en la varilla.

Para el cálculo de resistencia se debe considerar la corriente que atraviesa la superficie equipotencial arriba descrita se debe tomar en cuenta que no se conoce la forma de la superficie por lo que es necesario efectuar un análisis numérico para solventar dicha dificultad. Además se auxilia del concepto de conductancia ya que simplifica los cálculos debido a que la conductancia total será la suma de las conductancias de elementos de áreas ubicados en paralelo en la superficie equipotencial y luego se obtiene la resistencia utilizando su relación inversa. La conductancia viene dada por:

$$G = \frac{\sigma \cdot \int \vec{E} \cdot d\vec{A}}{- \int \vec{E} \cdot d\vec{L}} \quad (2.20)$$

Donde el numerador de la ecuación (2.20) anterior representa la corriente que fluye hacia la tierra, atravesando el elemento de área y se evalúa como una sumatoria de corrientes que atraviesan diferenciales de áreas de tal forma de cubrir todo el elemento de área tal como se muestra en la fig.219.

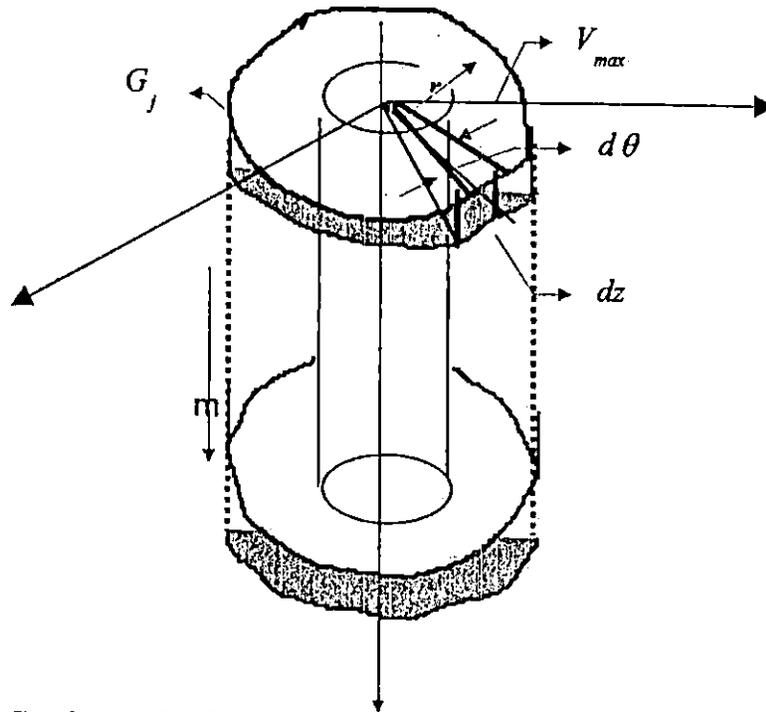


Fig.2.19 Conductancias de elementos de área en una superficie equipotencial para una varilla de la red de tierra.

El denominador de la ecuación (2.20) es la diferencia entre el voltaje de la varilla y el voltaje de referencia, siendo necesario determinar la posición (r) del primer voltaje para evaluar el campo eléctrico (\vec{E}) en el diferencial de área y poder conocer la corriente que lo atraviesa, luego se hace un recorrido de 2π para encontrar la corriente total que circula por el elemento de área y entonces ya se puede calcular la conductancia de dicho elemento por medio de la expresión:

$$G_j = \frac{\sigma}{V} \sum \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

de acuerdo a la fig. el diferencial de área es:

$$d\vec{A} = r \cdot d\theta \cdot dz \cdot \hat{a}_r$$

El campo eléctrico tiene dos componentes:

$$\vec{E} = E_r \cdot \hat{a}_r + E_z \cdot \hat{a}_z$$

Realizando el producto de las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz$$

Sustituyendo esta ecuación en G_j

$$G_j = \frac{\sigma}{V} \sum_{\theta=0}^{2\pi} E_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz$$

Donde la conductancia total es:

$$G_{TOTAL} = \sum_{j=1}^m G_j$$

Sustituyendo G_j en G_{TOTAL} :

$$G_{TOTAL} = \sum_{j=1}^m \frac{\sigma}{V} \sum_{\theta=0}^{2\pi} E_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz$$

Obteniendo

$$G_{TOTAL} = \frac{\sigma}{V} \sum_{j=1}^m \sum_{\theta=0}^{2\pi} E_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz$$

de acuerdo a lo mencionado con anterioridad la resistencia es:

$$R = \frac{1}{G_{TOTAL}} \quad \Omega$$

Este valor es para una varilla, haciéndose necesario repetir el procedimiento anterior según el número de varillas en la red.

Entonces la resistencia de la red es el paralelo de las resistencias de cada varilla:

$$RESISTENCIA = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_i} \right)} \quad \Omega \quad (2.22)$$

Obteniendo de esta manera la resistencia para una determinada de red de tierra independientemente de la configuración geométrica de la red de tierra, mas adelante se planteará dentro de esta misma metodología la incorporación del voltaje de referencia finita.

CONCLUSIONES DEL CAPITULO II

1. La determinación de las ecuaciones de campo y de voltaje eléctrico son la base fundamental en el cálculo de resistencia de tierra tanto para un suelo homogéneo y heterogéneo independientemente de la configuración geométrica de la red en análisis.
2. La aplicación de la teoría de las imágenes es un método para lograr solventar las discontinuidades que se presentan en las superficies de separación de los medios que componen la estructura del suelo.
3. La metodología utilizada esta basada en un análisis numérico que con la ayuda de las PC's permite manejar de una manera más amplia las ecuaciones del campo y voltaje eléctrico.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

[1] Maxwell, J.C. "A treatise on electricity and magnetism" Vol.1
New York: Dover Publications,
1954.

[2] Johnk, Carl T.A. "Teoría Electromagnética".
México: Editorial Limusa,
1992.

CAPITULO III

DETERMINACIÓN DE LAS CONDICIONES DE OPTIMIZACIÓN DE LA RESISTENCIA DE PUESTA A TIERRA.

Introducción

En la optimización el principio fundamental es lograr determinar la red de tierra que tenga el mejor comportamiento, es decir, que cumpla con las condiciones de voltaje de paso, valor de resistencia que proporcionen mayor seguridad tanto a personas como al equipo mecánico y/o eléctrico existente; por lo tanto es importante estudiar los diferentes parámetros que influyen en el comportamiento de una red de tierra.

Para analizar el comportamiento de los parámetros antes mencionados se hace uso de un programa elaborado específicamente para dicho objetivo, lo cual permite analizar de una manera rápida y confiable la variación de dichos parámetros.

3.1 Generalidades

Existen diversos factores que influyen en el comportamiento de una red de tierra. Entre dichos factores podemos mencionar: área del terreno de ubicación de la red de tierra, tipo de suelo, longitud, radio, separación y número de varillas. La interacción del comportamiento de estos factores es de gran importancia para definir la red de tierra óptima.

El método descrito en el capítulo anterior es aplicable a cualquier configuración de red de tierra ya sea que se encuentre en suelo homogéneo o heterogéneo, pero el análisis se limitará únicamente a las siguientes configuraciones: cuadrada, perimetral, lineal, circular simple, circular simple con electrodo central, circular doble, circular doble con electrodo central.

3.2 CRITERIOS DE ANÁLISIS PARA LA OPTIMIZACIÓN DE UNA RED PUESTA A TIERRA.

Para el cálculo de resistencia en una red de puesta a tierra se deben considerar los criterios que influyen en gran medida en ésta y las condiciones de funcionamiento de la red al hacerse presente una determinada falla.

Existen una variedad de criterios, los de carácter eléctrico y los de carácter económicos; los cuales están relacionados entre sí. En la fig3.1 se presenta un caso típico de red de tierra.

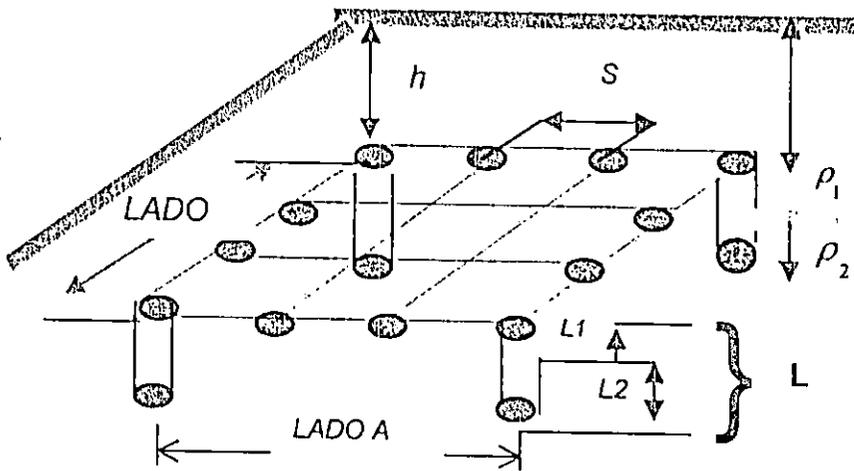


Fig.3.1 Descripción de un caso típico de red de tierra.

Los criterios principales a tomar en cuenta son:

Voltaje en la superficie de una red de puesta a tierra.

En el voltaje en la superficie se debe considerar el voltaje de paso, el cual es el gradiente de voltaje al que puede estar expuesto una persona que se encuentre dentro del área de la red de tierra, ya que existen limitantes físicas del cuerpo humano para permitir cierta cantidad de corriente sin causar daño.

Según la definición de IEEE- STANDARD_81 la tensión de paso es la diferencia de potencial entre dos puntos de la superficie del terreno, separados por una distancia de un paso, que se asimila a un metro en la dirección del gradiente de potencial máximo.

El voltaje de paso depende de varios factores: el tiempo en que se limpia la falla, la resistividad del suelo, la longitud, separación y profundidad de los conductores de la red de tierra; lo cual implícitamente incluye el valor de resistencia a tierra.

En la figura siguiente se muestra un esquema del comportamiento del voltaje en la superficie en una red de tierra al presentarse una falla.

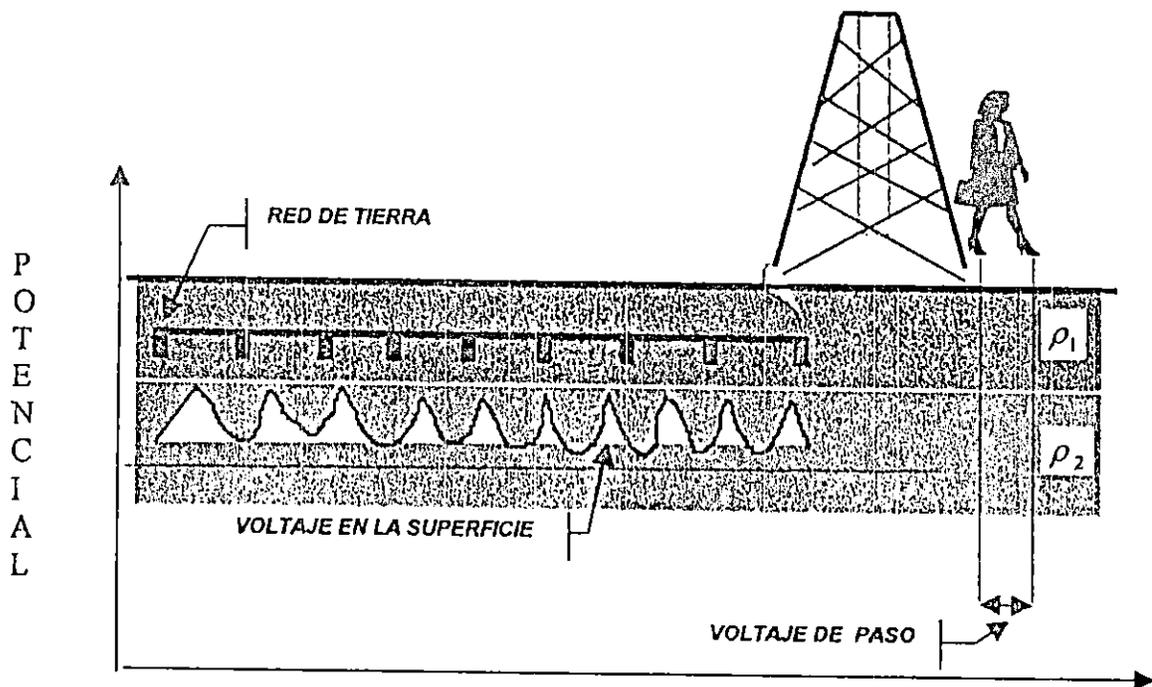


Fig.3.2 Comportamiento del voltaje en la superficie.

Tiempo de limpieza de la falla de corriente.

Este tiempo consiste en el retardo de los dispositivos de protección para limpiar la falla, lo cual influye por medio de la máxima corriente que puede soportar el ser humano ya que la percepción de éste es de aproximadamente 1 mA para frecuencias de 50 ó 60 Hz. Corrientes de 50 mA pueden provocar fibrilación ventricular y corrientes mayores pueden causar inhibición en la respiración, parálisis del corazón y quemadas. La máxima corriente tolerable por el cuerpo humano viene dada por la siguiente expresión:

$$I = \frac{0.1160}{\sqrt{t}} \text{ A.}$$

Longitud y radio de la varilla.

La variación de la longitud y el radio de las varillas modificará el comportamiento del voltaje en la superficie y del valor de la resistencia debido a que en la medida que la

longitud de la varilla aumenta ésta se introduce en las capas de tierra de mayor humedad facilitando de esa manera la distribución de corriente. Debe tenerse en cuenta que la selección de la longitud y radio de la varilla dependerá en gran medida de la disponibilidad en el mercado.

Resistencia.

Los valores de resistencia de tierra necesarios para un determinado caso dependen de la aplicación de la red de tierra, siendo éstas en subestaciones de potencia, sistemas de líneas de transmisión o sistemas industriales. Para pequeñas magnitudes de corriente de falla no se requiere un bajo valor de resistencia de tierra, no así los sistemas de alto nivel de corriente de falla los cuales requieren valores de resistencia sean menores de 1 Ohms, los que son aplicables para subestaciones de potencia, líneas de transmisión o estaciones generadoras, además para rangos de 1 a 5 Ohms se encuentran generalmente en plantas industriales, instalaciones comerciales largas. Cuando se poseen valores mayores de 25 ohms estos puede ser obtenido por una sola varilla de lo contrario se logra por medio de un número de electrodos individuales interconectados en paralelo de tal forma de obtener el valor de resistencia más preciso ver Ref.[2].

Estructura del suelo.

Se considerara la estructura del suelo, es decir, homogéneo o heterogéneo ya que los valores de resistividad de las diferentes capas influirán en gran medida en los valores de resistencia que se obtengan, los métodos más comunes utilizados en la medición de la resistividad son:

- Método de cuatro electrodo
- Método de Wenner

La profundidad de cada capa determinará que cantidad de la varilla quedará en una u otra capa y por lo tanto influirá en el comportamiento de la red. De acuerdo a la composición del suelo se hace necesario analizar el tipo de configuración con la cual se obtienen mejores resultados.

Enterramiento de las varillas.

La profundidad a la que se coloquen las varillas influirá en el comportamiento del voltaje en la superficie ya que entre mayor enterramiento las cargas se encuentran mas alejadas de la superficie.

Se debe encontrar un enterramiento que produzca un menor voltaje en la superficie y por ende mayor seguridad para las personas que tengan acceso al área de la red de tierra. Además influye en lo que es la resistencia de tierra.

El área de instalación de la red de tierra.

Se tiene el área como uno de los criterios de carácter físico, ya que de su tamaño dependerá el máximo espaciamiento entre varillas y el número de varillas que se pueden colocar en dicha área; también determinará la forma de la red que se instale.

Separación entre varillas.

De acuerdo al área disponible, así será el rango de separación que se puede variar de tal forma de lograr establecer la red más óptima. Entre más cerca se encuentren las varillas entre sí mayor será la influencia que ejerza cada una de las varillas sobre las demás y por lo tanto variará el comportamiento de la red de tierra.

Número de varillas que conforman la red de tierra.

El número de varillas es influenciado por varios parámetros, es decir el valor de resistencia que se requiere obtener, la separación de las varillas, así como también del área disponible para la red de tierra. El valor de resistencia es el parámetro que con mayor énfasis se debe de considerar para determinar el número de varillas.

Configuración geométrica de la red de tierra.

En algunos casos la forma del terreno disponible para realizar la red de tierra es la que determina que tipo de configuración es la que se adapta con mayor facilidad a las necesidades del usuario.

3.3 PROCEDIMIENTO UTILIZADO PARA LA OPTIMIZACIÓN DE REDES DE TIERRA.

Para la optimización de las redes de tierra es necesario tomar en cuenta los factores mencionados en la sección 3.1 los cuales se deben hacer variar y observar cual es el comportamiento de una determinada red de tierra. Para lograr dicho objetivo se hace necesario hacer un programa en MATLAB 4.0, el cual se basa en la metodología

explicada en el capítulo anterior, y que facilita el cálculo para varias configuraciones y poder así compararlas para determinar cual de ellas tiene el mejor comportamiento. Cabe mencionar que si bien es cierto el programa se hizo para un número limitado de configuraciones, la metodología es aplicable a cualquier configuración de red de tierra.

El programa elaborado en MATLAB 4.0 realiza el cálculo del voltaje y resistencia de tierra lográndose manejar en dicho programa la mayor cantidad de los parámetros mencionados en la sección anterior.

El funcionamiento de este programa se puede observar en el siguiente diagrama de bloques en el cual se muestra las diferentes secciones que forman el programa.

C

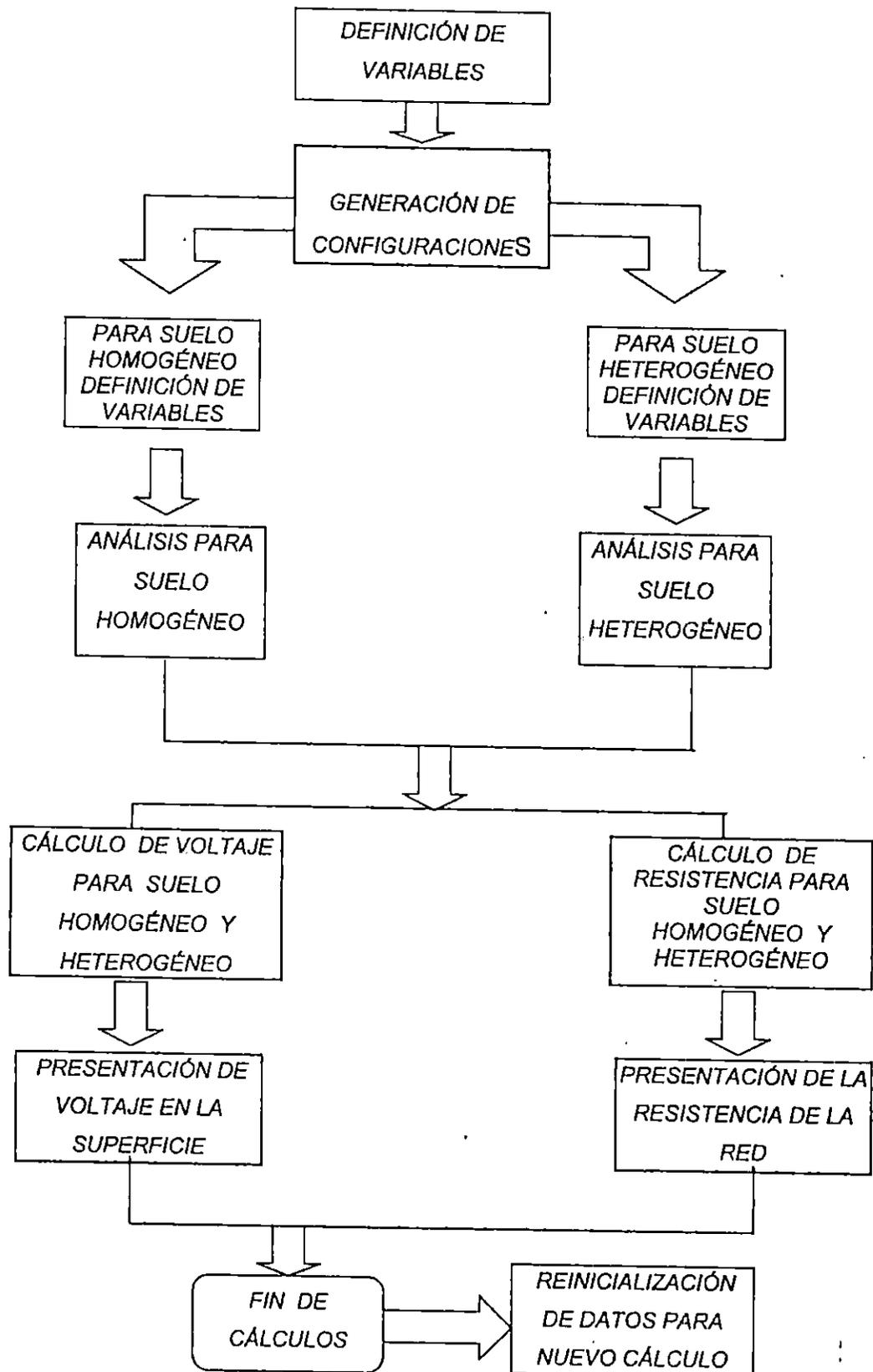


Fig.3.3 Diagrama de bloques para el cálculo de voltaje y resistencia de tierra.

En el bloque de cálculo de resistencia se realizan los procesos del siguiente diagrama de bloques.

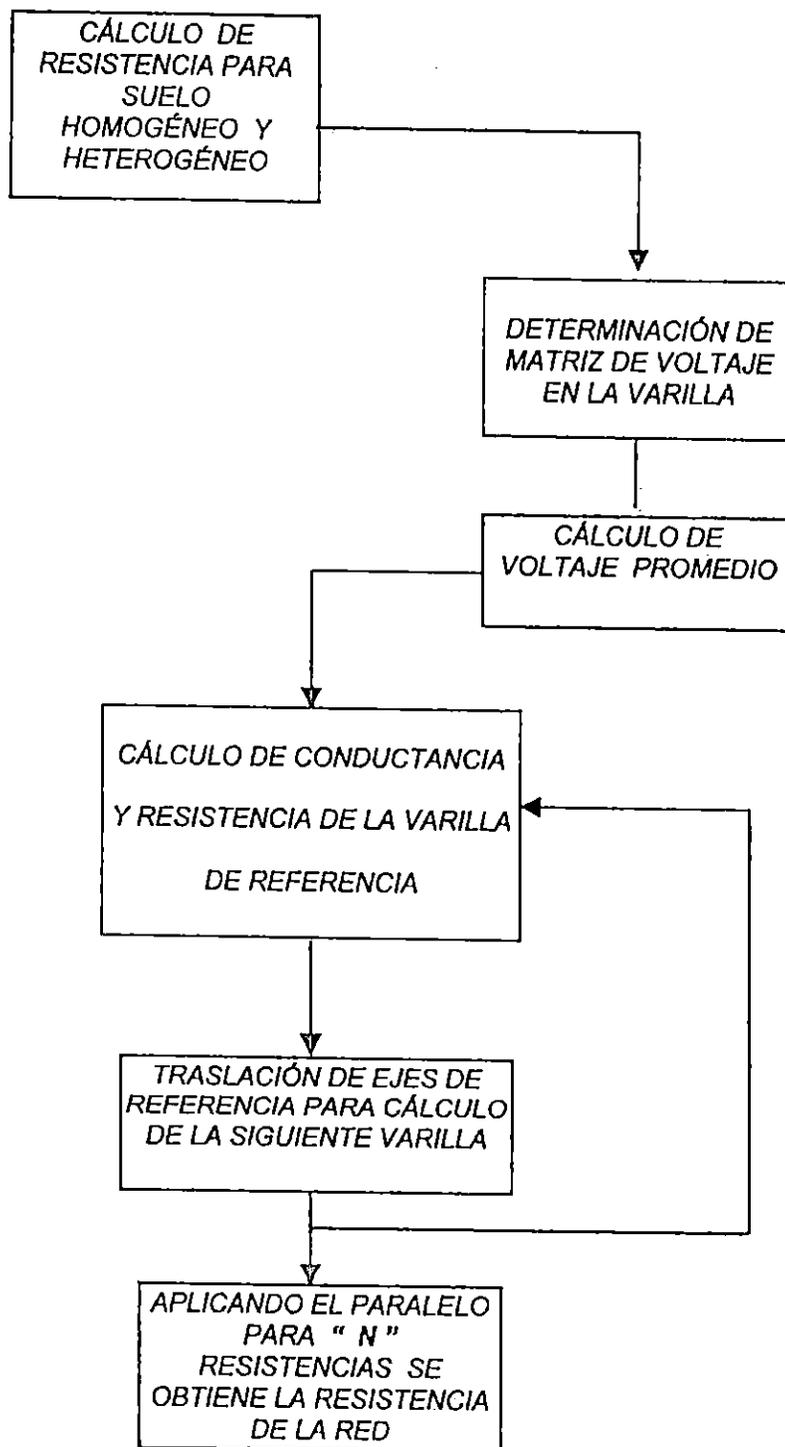


Fig.3.4 Descripción del modulo de cálculo de resistencia.

Luego de estos procesos se continúa con la presentación de datos.

El programa realizado es muy versátil ya que permite de una manera amigable manipular las variables fundamentales para el cálculo de redes de tierra tales como: configuración de la red, estructura del suelo, longitud y radio de la varilla, resistividades y profundidades de las capas del suelo, enterramiento de las varillas, separación de los electrodos, número de varillas.

Las configuraciones que se pueden desarrollar con el programa considerando el tipo de suelo homogéneo o heterogéneo son:

- Cuadrada
- Perimetral
- Lineal
- Circular simple
- Circular simple con electrodo central
- Circular anillada
- Circular anillada con electrodo central

Estas configuraciones se pueden observar en la fig. 3.5 las características de cada una de ellas se explican en la siguiente sección, analizando la ubicación de cada parámetro según la forma de su respectiva configuración.

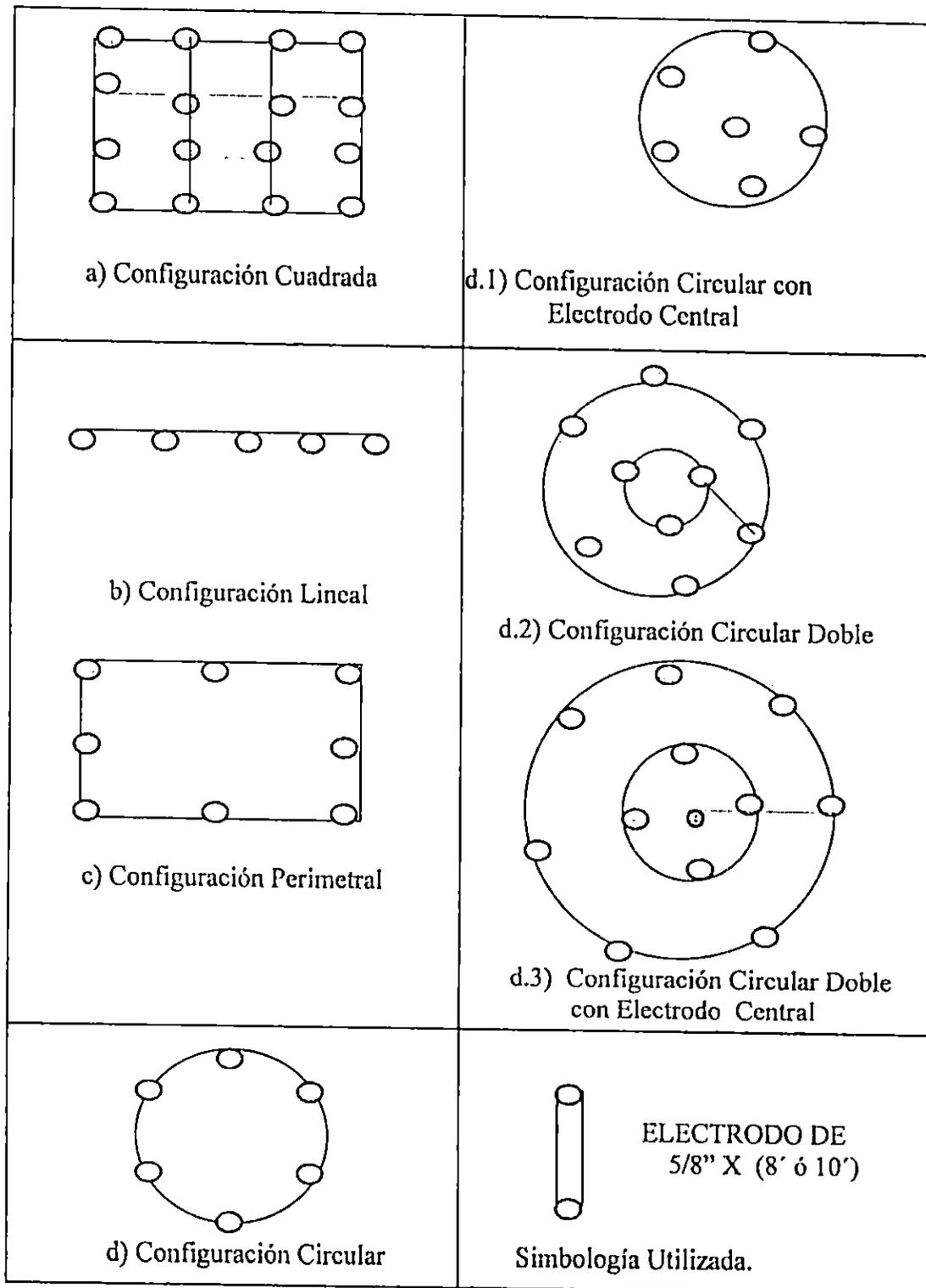


Fig.3.5 Gráficas de configuraciones geométricas de redes de tierra.

El análisis de estas configuraciones se realizó para efectos de comparación con otros estudios realizados por otros autores; es de recalcar que la metodología expuesta

presenta la característica de que no solamente se aplica a las configuraciones antes mencionadas sino que a cualquier configuración siempre y cuando se le realicen las modificaciones necesarias al programa.

Los resultados que muestra el programa son voltaje en la superficie y además se muestra el valor de resistencia de la red de tierra de acuerdo a su respectiva configuración.

Es importante mencionar la diferencia existente entre el análisis de un suelo homogéneo y de un heterogéneo ya que en este último se hace uso del factor o coeficiente de reflexión K debido a la discontinuidad de medios que existe, lo que también hace que se considere la configuración de red que se requiere diseñar.

Se debe tomar en cuenta la simetría que presentan las diferentes configuraciones ya que esto simplifica el cálculo de la resistencia total de la red debido a que algunas varillas tienen el mismo valor de resistencia y basta calcular el valor de una de ellas y observar cuantas veces se repite dicho resultado en la red con lo cual se obtiene una disminución del tiempo de cálculo.

Teniéndose el análisis de todos los parámetros que de una u otra manera influye en lo que es el cálculo del voltaje en la superficie y de la resistencia de puesta a tierra, se considera que es factible lograr determinar cual es la configuración óptima, para la cual se utilizará el programa descrito anteriormente.

3.4 DETERMINACION DE LA CONFIGURACION OPTIMA DE UNA RED DE TIERRA.

Para lograr obtener la configuración que presente mejores características se hace necesario analizar comparativamente cada configuración y variar los parámetros involucrados en el cálculo de resistencia y del voltaje en la superficie de tierra para lo cual se utiliza el programa.

Para obtener los datos de resistencia de red de tierra se plantea la variación de todos los parámetros descritos con anterioridad, con el objetivo de lograr visualizar y estudiar el comportamiento de cada uno de ellos para cada configuración y poder de esta manera plantear la configuración de red óptima.

3.4.1. Análisis para una configuración rectangular.

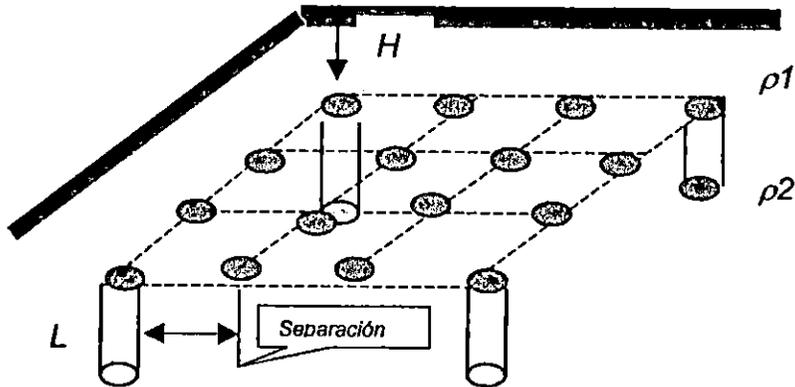


Fig.3.6 Configuración de red de tierra Cuadrada

Para la configuración cuadrada el valor de N toma valores 2^n , siendo n un valor de 2,3,4,5 ...n y N el número de varillas, manteniendo así la forma geométrica de la red, se utiliza varillas de 1.80 y 3.0 mts de longitud (L) con radio de $5/8''$, la separación utilizada oscila desde $S = L$ hasta $S = 2.0L$, la profundidad de la red de tierra se representa como H_v , las resistividades del medio se representan por ρ_1 y ρ_2 para cada medio. Para el caso de 16 varillas de $L=3$ m. y radio 0.01587 m. separadas $1.5L$ m, enterradas 1 m. en un suelo heterogéneo cuya primera capa tiene una profundidad de 1 m. con resistividad de $100 \Omega.m$ y una segunda capa de resistividad $33.3 \Omega.m$ se obtiene una resistencia de 0.9994Ω y el voltaje en la superficie para una corriente de falla de 1000 A se observa en la fig. 3.7.

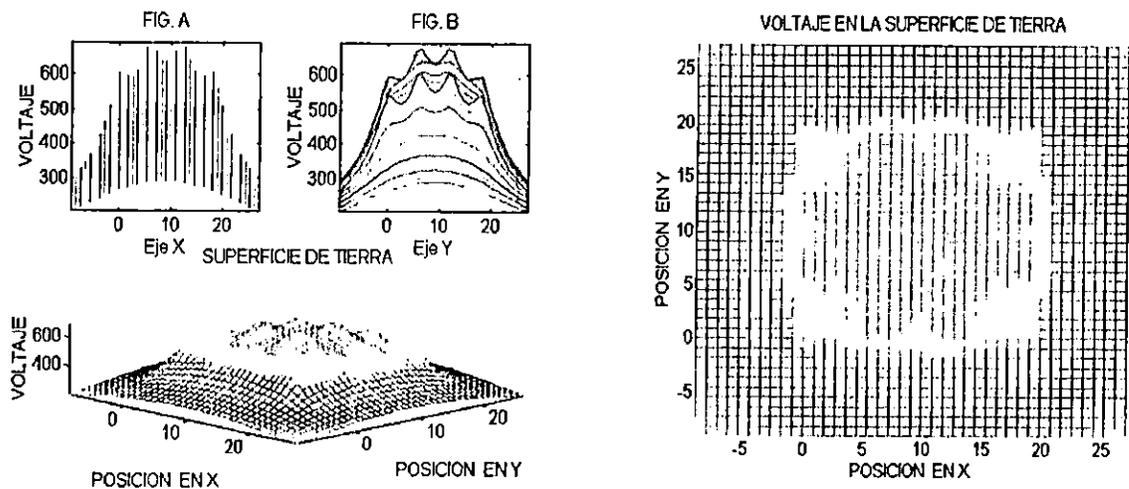


Fig.3.7 Voltaje en la superficie en una red cuadrada.

3.4.2. Análisis para una configuración perimetral.

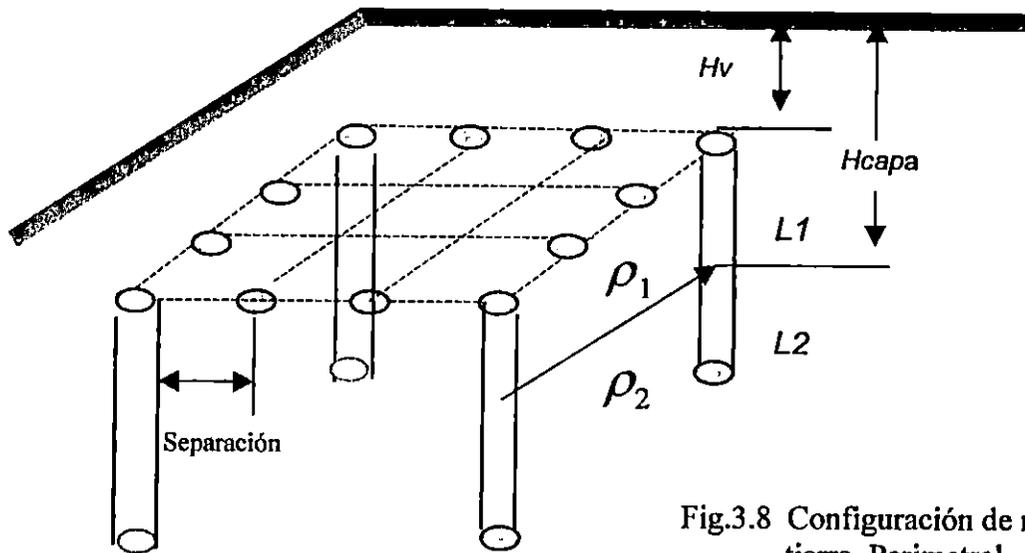


Fig.3.8 Configuración de red de tierra Perimetral

En una configuración Perimetral valor de N toma valor de 4,8,12,16,...N todas ubicadas en el perímetro del área manteniendo así la forma geométrica de la red, se utiliza varillas de 1.80 y 3.0 mts de longitud con radio de 5/8", la separación utilizada oscila desde $S = L$ hasta $S=2.0L$, la profundidad de la red de tierra se representa como Hv , la profundidad de la capa superior del suelo se representa por $Hcapa$, las resistividad de la primera capa es ρ_1 y ρ_2 para la segunda capa de suelo. Por ejemplo para 16 varillas de $L=3$ m. y radio 0.01587 m. separadas $1.5L$ m, enterradas 1 m. en un suelo heterogéneo cuya primera capa tiene una profundidad de 1 m. con resistividad de $100 \Omega.m$ y una segunda capa de resistividad $33.3 \Omega.m$ se obtiene una resistencia de 0.8941Ω y el voltaje en la superficie una corriente de falla de 1 K A se observa en fig. 3.9.

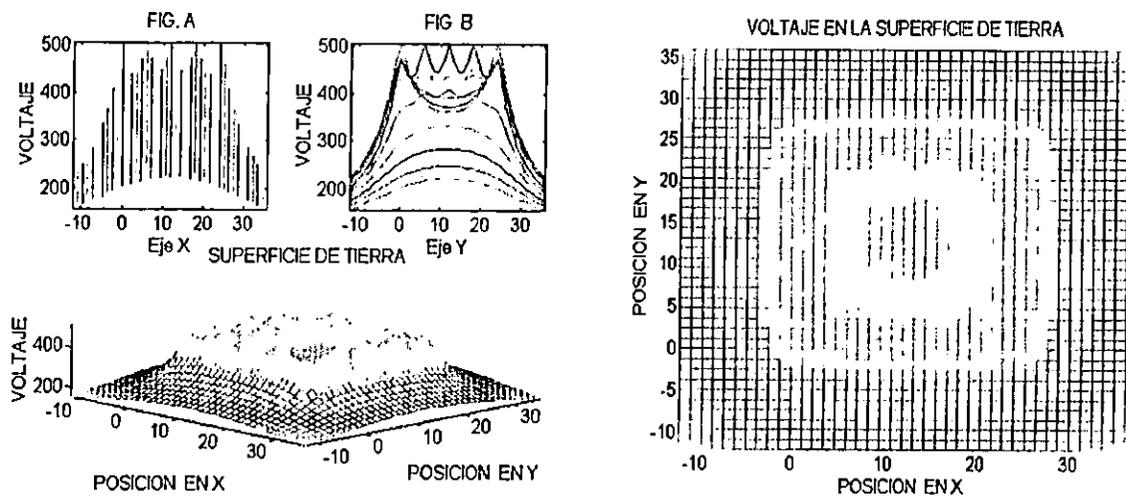


Fig. 3.9 Voltaje en la superficie de una red perimetral.

3.4.3 Análisis para una configuración lineal.

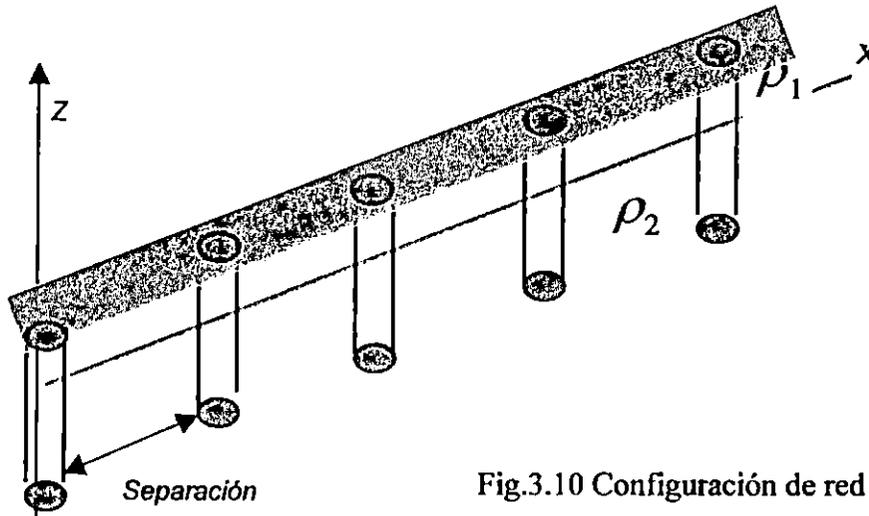


Fig.3.10 Configuración de red de tierra Lineal.

Para una configuración Lineal el número de varillas representado por N toma valores de 4,8,12,16... N ubicadas todas las varillas a lo largo de el área requerida, la separación utilizada varía desde $S = L$ hasta $S = 2.0L$, manteniendo así la forma geométrica de la red, se utiliza varillas de 1.80 y 3.0 mts de longitud con radio de $5/8$, la profundidad de la red de tierra se representa como H_v considerando valores de 0.40 y 1.00 mts de profundidad, la profundidad de la capa superior del suelo se representa por H_{capa} , las resistividad de la primera capa es ρ_1 y ρ_2 para la segunda capa de suelo, para el tipo de suelo homogéneo la resistividad se mantiene constante y la H_{capa} se considera infinita. Para el caso de 16 varillas de $L=3$ m. y radio 0.01587 m. separadas $1.5L$ m, enterradas 1 m. en un suelo heterogéneo cuya primera capa tiene una profundidad de 1 m. con resistividad de $100 \Omega.m$ y una segunda capa de resistividad $33.3 \Omega.m$ se obtiene una resistencia de 0.8242Ω y el voltaje en la superficie para una corriente de falla de 1000 A se observa en la fig. 3.11.

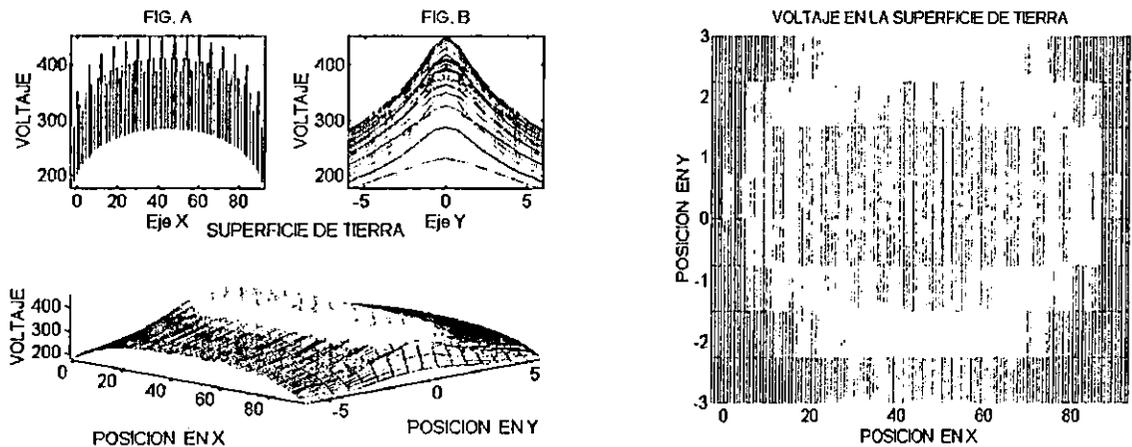


Fig. 3.11 Voltaje en la superficie de una red lineal.

3.4.4 Análisis para una configuración circular.

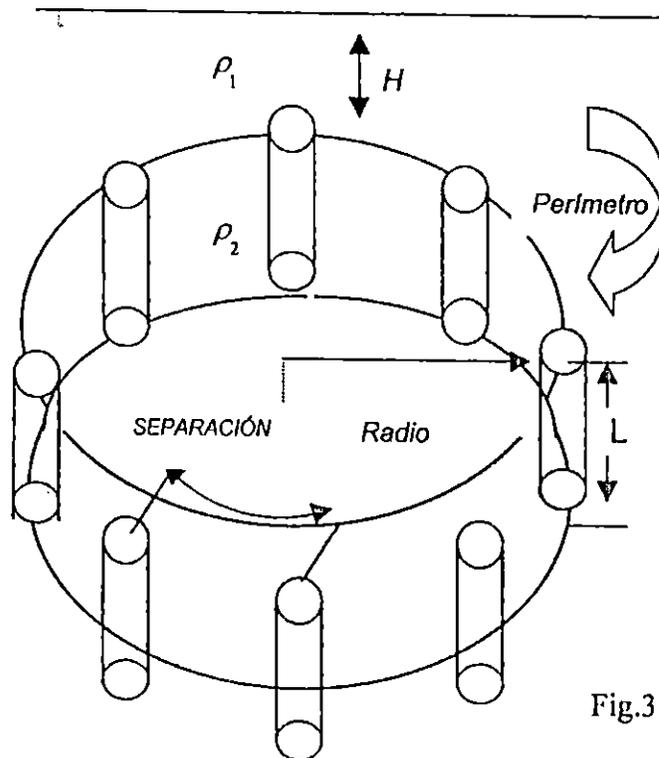


Fig.3.12 Configuración de red de tierra circular.

Para la configuración circular se agregan algunas modalidades ver fig.3.12 tales como:

- Configuración Circular con electrodo central.
- Configuración Circular doble.
- Configuración Circular doble con electrodo central.

Para la configuración circular sencilla y con electrodo central el valor de N toma valor de 4,8,12,16...N y 5,9,13,17... N respectivamente todas ubicadas en el perímetro del área manteniendo para la circular sencilla y para el caso de electrodo central se coloca 1 en el centro del área y las restantes en el perímetro de la misma, Ahora para la circular doble anillada simple las varillas se distribuyen en dos anillos conteniendo el anillo 1 NN1 varillas (4,8,12...NN1) y el anillo 2 NN2 varillas (4,8,12...NN2) de tal forma de sumar N varillas de la red de tierra, y para la configuración doble anillada con electrodo central el anillo 1 toma valores de (5,9,13,17... NN1) varillas y el anillo 2 (4,8,12...NN2) manteniendo así la forma geométrica de la red, se utiliza varillas de 1.80 y 3.0 mts de longitud con radio de 5/8", la separación utilizada oscila desde $S = L$ hasta $S = 2.0L$, la profundidad de la red de tierra se representa como H_v , la profundidad de la capa superior del suelo se representa por H_{capa} , las resistividad de la primera capa es ρ_1 y ρ_2 para la segunda capa de suelo.

Para el caso de 16 varillas de $L=3$ m. y radio 0.01587 m. separadas $1.5L$ m, enterradas 1 m. en un suelo heterogéneo cuya primera capa tiene una profundidad de 1 m. con resistividad de $100 \Omega.m$ y una segunda capa de resistividad $33.3 \Omega.m$ se obtiene una

resistencia para la configuración CIR1 de 0.8769Ω , para la CIR2 (17 varillas) la resistencia es de 0.8445Ω , para la CIR3 0.9189Ω y la CIR4 (17 varillas) con una resistencia de 0.8963Ω . El voltaje en la superficie para una corriente de falla de 1000 A se observa en la fig. 3.13.

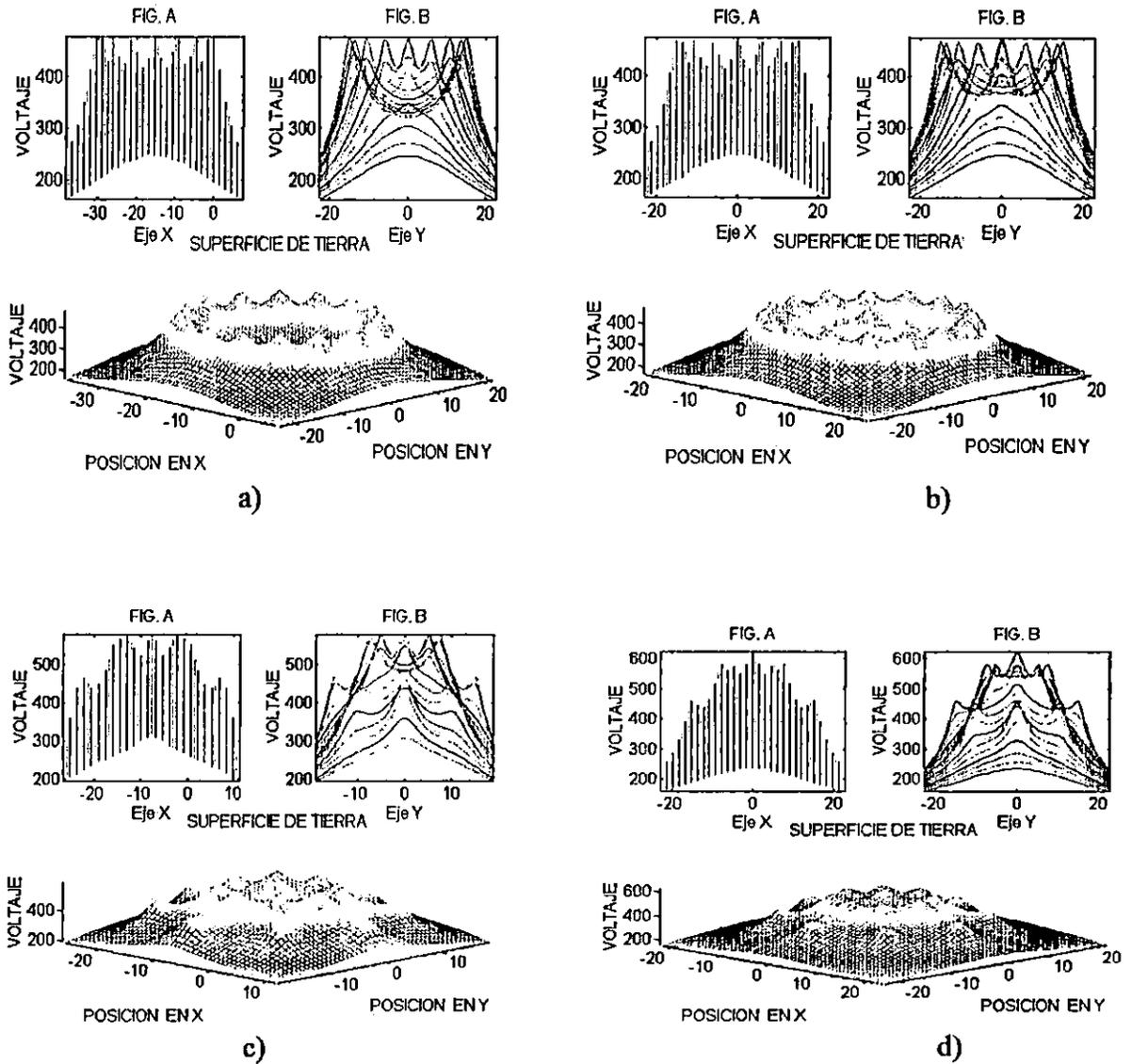


Fig. 3.13 Voltaje en la superficie para las configuraciones a) Circular simple, b) Circular simple con electrodo central, c) Circular doble y d) Circular doble con electrodo central.

A continuación se presenta una comparación global de los datos obtenidos al variar los parámetros de cada configuración para proponer la red de tierra óptima.

Tabla 3.1 Datos para N= 4 electrodos de $r=0.01587$ m, Hvarilla= 0.40 m.

SUELO	H capa (m)	ρ ($\Omega.m$)	L (m)	Separación (m)	RESISTENCIA DE LA CONFIGURACIÓN						
					CUAD	PER.	LINEAL	CIR1	CIR2	CIR3	CIR4
HOMO-GÉNEO	∞	100	1.8	L	14.87	14.87	14.11	15.19	14.02	-	-
				1.5 L	13.06	13.06	12.55	13.30	11.90	-	-
				2 L	12.27	12.27	11.91	12.46	10.91	-	-
			3.0	L	9.859	9.859	9.365	10.07	9.266	-	-
				1.5 L	8.685	8.685	8.372	8.837	73862	-	-
				2 L	8.192	8.192	7.969	8.306	7.231	-	-
HETERO-GÉNEO	1.00	-0.5	1.8	L	6.605	6.605	6.303	6.742	6.124	-	-
				1.5 L	5.879	5.879	5.704	5.968	5.231	-	-
				2 L	5.597	5.597	5.477	5.66	4.854	-	-
			3.0	L	3.915	3.915	3.735	3.996	3.638	-	-
				1.5 L	3.482	3.482	3.378	3.536	3.102	-	-
				2 L	3.314	3.314	3.243	3.353	2.877	-	-
		0.5	1.8	L	11.0	11.0	10.50	11.20	10.24	-	-
				1.5 L	9.822	9.822	9.453	9.979	8.889	-	-
				2 L	9.269	9.269	8.986	9.399	8.226	-	-
			3.0	L	7.979	7.979	7.623	8.127	7.399	-	-
				1.5 L	7.138	7.138	6.897	7.248	6.40	-	-
				2 L	6.767	6.767	6.589	6.853	5.938	-	-

Tabla 3.2 Datos para N= 16 electrodos de $r=0.01587$ m, Hvarilla= 0.40 m.

SUELO	H capa (m)	ρ ($\Omega.m$)	L (m)	Separación (m)	RESISTENCIA DE LA CONFIGURACIÓN						
					CUAD	PER.	LINEAL	CIR1	CIR2	CIR3	CIR4
HOMO-GÉNEO	∞	100	1.8	L	6.318	5.463	4.806	5.312	5.191	5.696	5.635
				1.5 L	4.728	4.189	3.823	4.10	3.961	4.320	4.228
				2 L	4.078	3.693	3.442	3.631	3.486	3.783	3.674
			3.0	L	4.087	3.535	3.126	3.440	3.356	3.681	3.639
				1.5 L	3.064	2.731	2.508	2.676	2.580	2.810	2.744
				2 L	2.66	2.425	2.273	2.387	2.288	2.479	2.402
HETERO-GÉNEO	1.00	-0.5	1.8	L	2.524	2.21	1.989	2.157	2.090	2.286	2.248
				1.5 L	1.935	1.756	1.641	1.728	1.656	1.796	1.743
				2 L	1.714	1.591	1.514	1.57	1.499	1.619	1.717
			3.0	L	1.509	1.318	1.184	1.286	1.247	1.364	1.343
				1.5 L	1.152	1.045	0.9747	1.027	0.9851	1.069	1.038
				2 L	1.019	0.9454	0.8984	0.9336	0.8908	0.9622	0.927
		0.5	1.8	L	4.722	4.132	3.638	4.024	3.936	4.304	4.255
				1.5 L	3.623	3.214	2.921	3.144	3.043	3.321	3.253
				2 L	3.138	2.835	2.63	2.785	2.678	2.910	2.83
			3.0	L	3.268	2.856	2.536	2.783	2.714	2.97	2.93
				1.5 L	2.502	2.243	2.036	2.199	2.12	2.308	2.253
				2 L	2.190	2.002	1.878	1.971	1.889	2.047	1.983

Tabla 3.3 Datos para N= 24 electrodos de r=0.01587 m. Hvarilla= 0.40 m.

SUELO	H capa (m)	ρ (Ω .m)	L (m)	Separación (m)	RESISTENCIA DE LA CONFIGURACIÓN							
					CUAD	PER.	LINEAL	CIR1	CIR2	CIR3	CIR4	
HOMO-GÉNEO	∞	100	1.8	L	4.918	3.970	3.477	3.839	3.771	4.075	4.046	
				1.5 L	3.509	2.957	2.691	2.883	2.811	3.00	2.956	
				2 L	2.941	2.572	2.391	2.521	2.448	2.599	2.546	
			3.0	L	3.161	2.555	2.25	2.473	2.426	2.617	2.595	
				1.5 L	2.255	1.919	1.757	1.874	1.825	1.945	1.913	
				2 L	1.902	1.682	1.573	1.651	1.602	1.698	1.661	
HETERO-GÉNEO	1.00	-0.5	1.8	L	1.90	1.572	1.411	1.527	1.492	1.599	1.567	
				1.5 L	1.389	1.22	1.137	1.197	1.162	1.232	1.197	
				2 L	1.199	1.094	1.039	1.078	1.044	1.102	1.066	
			3.0	L	1.14	0.939	0.8408	0.9122	0.8914	0.958	0.9363	
				1.5 L	0.8293	0.7266	0.6763	0.7124	0.6917	0.7337	0.7127	
				2 L	0.7143	0.6504	0.6167	0.6408	0.6204	0.6551	0.6334	
			0.5	1.8	L	3.706	3.030	2.647	2.932	2.884	3.124	3.101
					1.5 L	2.711	2.281	2.065	2.222	2.169	2.325	2.292
					2 L	2.281	1.982	1.833	1.94	1.887	2.00	1.97
		3.0		L	2.527	2.069	1.826	2.005	1.967	2.124	2.105	
				1.5 L	1.843	1.577	1.446	1.542	1.50	1.60	1.574	
				2 L	1.566	1.389	1.299	1.364	1.323	1.403	1.373	

Tabla 3.4 Datos para N= 4 electrodos de r=0.01587 m, Hvarilla= 1 m.

SUELO	H capa (m)	ρ (Ω .m)	L (m)	Separación (m)	RESISTENCIA DE LA CONFIGURACIÓN						
					CUAD	PER.	LINEAL	CIR1	CIR2	CIR3	CIR4
HOMO-GÉNEO	∞	100	1.8	L	14.17	14.17	13.51	14.45	13.25	-	-
				1.5 L	12.6	12.6	12.14	12.81	11.39	-	-
				2 L	11.90	11.90	11.56	12.07	10.53	-	-
			3.0	L	9.51	9.51	9.064	9.698	8.876	-	-
				1.5 L	8.453	8.453	8.157	8.581	7.616	-	-
				2 L	7.993	7.993	7.777	8.101	7.04	-	-
HETERO-GÉNEO	1.00	-0.5	1.8	L	4.951	4.955	4.70	5.064	4.669	-	-
				1.5 L	4.346	4.35	4.186	4.428	3.952	-	-
				2 L	4.089	4.093	3.976	4.153	3.626	-	-
			3.0	L	3.265	3.268	3.105	3.338	3.067	-	-
				1.5 L	2.877	2.88	2.779	2.929	2.599	-	-
				2 L	2.717	2.720	2.649	2.756	2.392	-	-
		0.5	1.8	L	12.47	12.47	11.99	12.69	11.46	-	-
				1.5 L	11.32	11.32	10.99	11.47	10.04	-	-
				2 L	10.82	10.82	10.55	10.94	9.412	-	-
			3.0	L	8.495	8.495	8.158	8.643	7.798	-	-
				1.5 L	7.692	7.692	7.465	7.797	6.813	-	-
				2 L	7.343	7.343	7.173	7.436	3.377	-	-

Tabla 3.5 Datos para N= 16 electrodos de r=0.01587 m, Hvarilla= 1 m.

SUELO	H capa (m)	ρ (Ω .m)	L (m)	Separación (m)	RESISTENCIA DE LA CONFIGURACIÓN						
					CUAD	PER.	LINEAL	CIR1	CIR2	CIR3	CIR4
HOMO-GÉNEO	∞	100	1.8	L	5.994	5.229	4.615	5.092	4.976	5.445	5.38
				1.5 L	4.572	4.065	3.709	3.980	3.847	4.195	4.104
				2 L	3.968	3.597	3.351	3.537	3.397	3.687	3.582
			3.0	L	3.941	3.428	3.035	3.338	3.257	3.569	3.524
				1.5 L	2.991	2.669	2.45	2.616	2.524	2.749	2.685
				2 L	2.604	2.374	2.224	2.337	2.241	2.428	2.354
HETERO-GÉNEO	1.00	-0.5	1.8	L	2.068	1.789	1.578	1.74	1.699	1.864	1.843
				1.5 L	1.547	1.375	1.260	1.347	1.30	1.416	1.384
				2 L	1.337	1.217	1.139	1.197	1.148	1.245	1.207
			3.0	L	1.332	1.154	1.023	1.123	1.094	1.20	1.185
				1.5 L	0.999	0.8941	0.8242	0.8769	0.8445	0.9189	0.8963
				2 L	0.8701	0.7969	0.7496	0.7851	0.7518	0.8137	0.7876
		0.5	1.8	L	5.017	4.451	3.982	4.349	4.235	4.610	4.535
				1.5 L	3.960	3.573	3.291	3.506	3.382	3.677	3.584
				2 L	3.504	3.213	3.014	3.164	3.035	3.287	3.183
			3.0	L	3.362	2.967	2.658	2.897	2.818	3.076	3.025
				1.5 L	2.630	2.376	2.20	2.333	2.246	2.441	2.375
				2 L	2.327	2.143	2.021	2.113	2.022	2.188	2.115

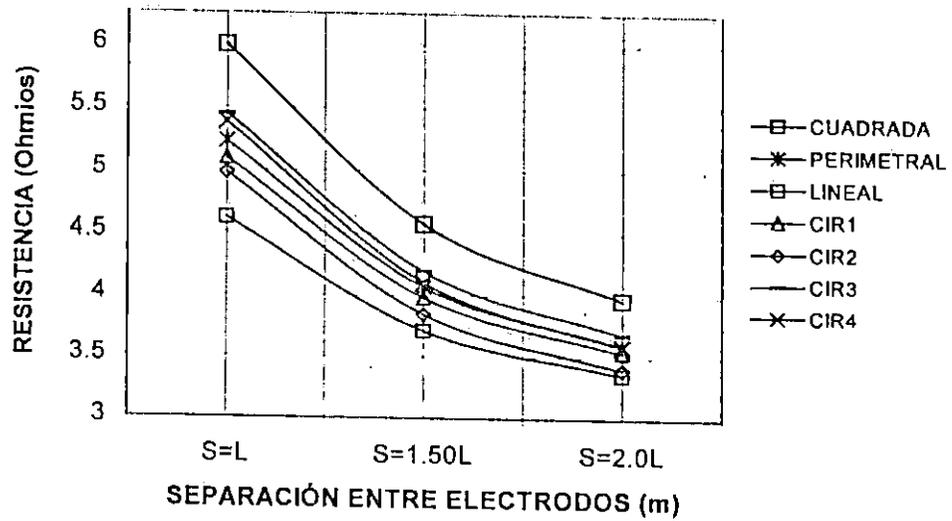
Las tablas antes mostradas se obtienen con base al programa elaborado para tal fin; además se observa que presentan una amplia visibilidad acerca de los parámetros descritos en la sección anterior lo que permite ir analizando la configuración de red de tierra considerando los factores más importantes en el diseño de las mismas.

3.4.5 Análisis de datos y criterios de optimización de una red de tierra.

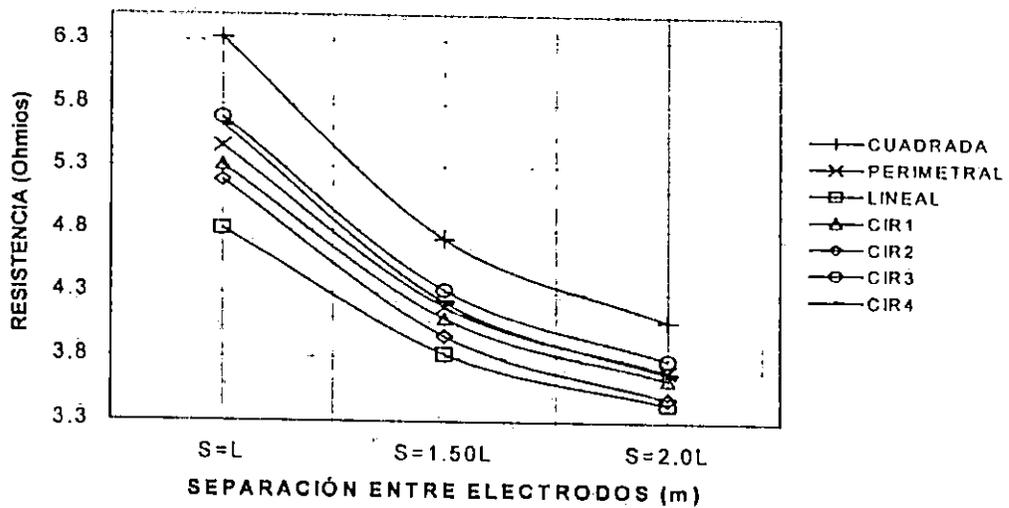
Para analizar con mayor precisión se agrupan los datos de tal forma de realizar comparaciones más directas entre configuraciones e ir delimitando de esta manera las configuraciones que presentan mayores ventajas en una forma integral.

En las siguientes gráficas se presentan el comportamiento de algunos datos obtenidos:

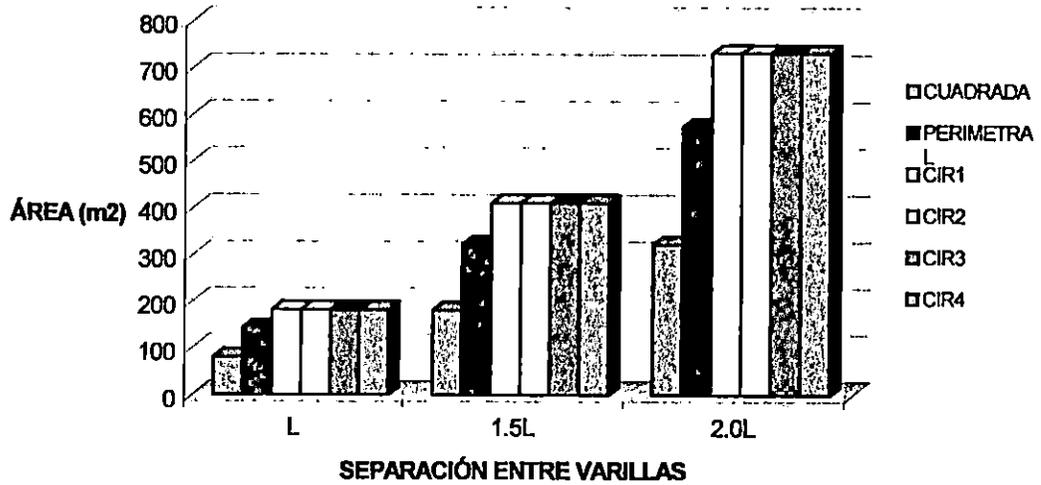
CÁLCULO PARA SUELO HOMOGÉNEO CON $N=16$, $L=1.8$ m Y
Hvarilla=1.0 m.



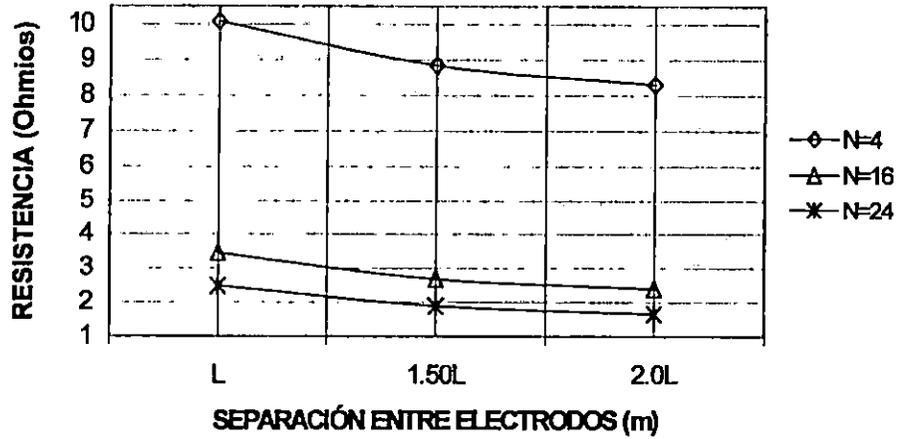
CÁLCULO PARA SUELO HOMOGÉNEO CON $N=16$ Y $L=1.8$ m.
Hvarilla=0.4 m.



ÁREA UTILIZADA POR CADA CONFIGURACIÓN PARA N=16 Y L=3.0 m



**VARIACIÓN DE LA RESISTENCIA PARA LA CONFIGURACIÓN CIR1
CON L=3 m Y Hvarilla=0.4 m**



VARIACIÓN DE LA RESISTENCIA DE UNA CONFIGURACIÓN LINEAL CON $L=3$ m Y $Hvarilla=0.4$ m.

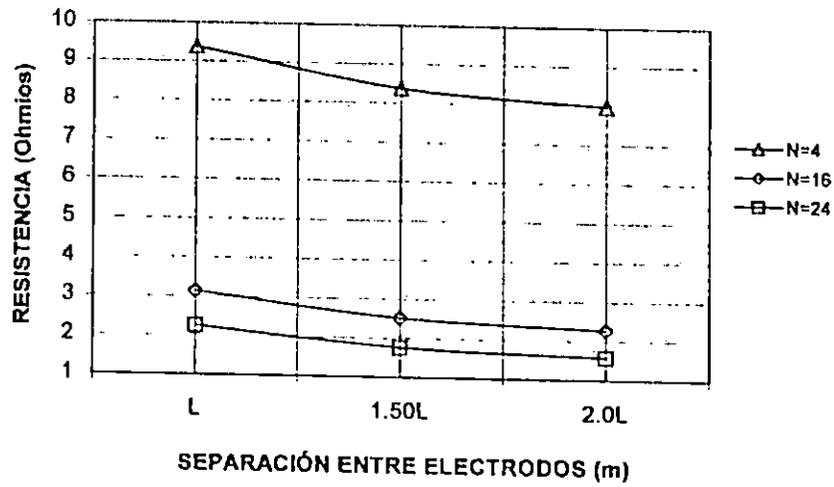


Fig.3.14 Comparación de las diferentes configuraciones y sus respectivos parámetros.

De acuerdo a los resultados mostrados se observa que para obtener la configuración que presente mayores ventajas y que se logra definir como la optima red de tierra se debe de tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- Estructura del suelo.

La resistencia y el voltaje en la superficie de una red de tierra dependen directamente de la resistividad del terreno en que se encuentre, para el caso del suelo homogéneo se cumple que a menor resistividad del suelo se obtiene una menor resistencia y un menor voltaje en la superficie, por lo que es recomendable ubicar la red de tierra en un suelo de baja resistividad. Cuando se tiene un suelo heterogéneo el comportamiento de la red dependerá del tamaño del segmento de la varilla que se encuentre en una u otra capa, es decir, que entre mayor porción de la varilla esté en la capa de menor resistividad menor será la resistencia de la red y el voltaje en la superficie; por lo tanto se obtendrán mejores resultados en la medida que se coloque mayor porción en la capa de menor resistividad.

- Separación entre varillas.

La separación influye tanto en la resistencia como el voltaje, para la primera la separación afecta en ambos sentidos, es decir, en la medida que los electrodos se encuentren bastante cerca (separación menor que L) la resistencia aumenta pero también para separaciones mayores de $2L$ la resistencia presenta una tendencia a disminuir pero dicha disminución no es significativa por lo tanto se sacrifica el área y material, por lo que es conveniente usar una separación mayor que la longitud de la varilla pero menor que dos veces la longitud de ésta. Para el voltaje al aumentar la separación la disminución del pico de voltaje no es muy significativa, pero el gradiente de potencial aumenta significativamente por lo que el voltaje de paso al que pueda estar expuesta una persona sería peligroso. Por lo que la separación no debe de exceder $2.L$ para que el comportamiento de la red sea aceptable.

- Longitud y radio de la varilla.

Se puede observar que un incremento en la longitud de los electrodos produce una disminución considerable en la resistencia mientras que el voltaje en la superficie tiene un comportamiento inverso, es decir, al aumentar la longitud de las varillas el voltaje disminuye pero se produce mayor gradiente y cuando la longitud de la varilla es pequeña el voltaje en la superficie es bastante uniforme.

El radio de la varilla produce un comportamiento similar a la longitud; pero su influencia es menor que la producida por la longitud de la varilla.

- Enterramiento de las varillas.

Para una mayor profundidad se obtiene una menor resistencia y una menor magnitud y gradiente de voltaje de superficie por lo tanto es recomendable no colocar la red de tierra muy próxima a la superficie dentro del rango de 0.40 a 1.00 m.

- Número de varillas que conforman la red de tierra.

Un incremento en la cantidad de varillas de la red de tierra genera una menor resistencia y un menor voltaje en la superficie; pero la disminución en el valor de resistencia no mantiene la misma proporción entre número de varillas y valor de resistencia, es decir, que después de una cierta cantidad de varillas la disminución que se logra ya no es muy significativa.

- El área de instalación de la red de tierra.

El área necesaria para el diseño de la configuración de red de tierra está en función de la separación de los electrodos y de la configuración geométrica seleccionada. Para una mayor separación se requiere una mayor área, la configuración lineal tiene la desventaja que ocupa una mayor longitud lo que se traduce en una mayor disposición del terreno.

El diseño de la configuración óptima dependerá de las condiciones particulares de cada caso (tipo de suelo, área de instalación de la red de tierra, valor de resistencia que se desea, voltaje permisible en la superficie, etc.) y se deben tomar en cuenta la descripción del comportamiento de los parámetros (radio, longitud, enterramiento, separación y número de las varillas) antes analizados; pero en términos generales la CONFIGURACIÓN CIRCULAR presenta el mejor comportamiento.

CONCLUSIONES DEL CAPITULO III

C.

1. La configuración óptima dependerá del análisis integral de todos los parámetros involucrados en la red de tierra de tal manera que no se debe generalizar una red como la óptima, sino que dependerá de las condiciones específicas de cada caso cual configuración proporcionará los mejores resultados.
2. Los parámetros más importantes que deben ser considerados para el diseño de una red de tierra son el voltaje en la superficie y la resistencia, de manera que proporcionen la mayor confiabilidad y seguridad del sistema.
3. Según los datos obtenidos la configuración lineal presenta la menor resistencia pero produce un voltaje en la superficie que puede provocar gradientes de potencial peligrosos en cambio la configuración circular simple, que es la que produce menor resistencia después de la lineal, proporciona una mayor uniformidad del voltaje en la superficie por lo que se considera la óptima.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Maxwell, J.C.

"A treatise on electricity and magnetism" Vol.1
New York: Dover Publications, 1954.

[2] IEEE

Recommended Practice for Grounding of Industrial and Commercial Power Systems.

IEEE, Std. 142-1991 (Revisión of IEEE 142-1982)

[3] Rogelio García Márquez

La Puesta a Tierra de Instalaciones Eléctricas y el R.Á.T.
Marcombo, Barcelona, España, 1,991.

CAPÍTULO IV

PROPUESTA DE NUEVA METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DE RESISTENCIA A TIERRA.

Introducción

En el cálculo de resistencia de una determinada red de tierra es importante conocer la mayor cantidad de parámetros a ser considerados en dicho cálculo, logrando con esto una mayor acertada decisión para el momento de diseñar una determinada red de tierra independientemente de su tamaño. Además se hace necesario contar con una herramienta de cálculo que cubra la mayor posibilidad de parámetros de análisis pero que cumpla con las normas de seguridad, haciéndose necesario comparar los resultados obtenidos por la metodología planteada con otros métodos existentes en la actualidad con el objetivo de mostrar la confiabilidad de los resultados obtenidos por el programa elaborado para dichos fines.

Es importante además observar el margen de error que presentan los resultados a partir de la los diferentes metodología y de criterios utilizados en el desarrollo de estas.

4.1 Generalidades

Para realizar una verificación y muestreo de datos de resistencia de tierra se realiza el cálculo partiendo de describir los métodos comparativos así como también los parámetros que poseen en común dicho métodos para luego mostrar los valores de resistencia.

Es de mencionar que algunos métodos no presentan una amplia aplicación en lo que respecta a los diferentes tipos de configuraciones geométricas de redes de tierra, así como también no cubren en su totalidad los parámetros considerados por la metodología planteada en el capítulo II lo cual dificulta en alguna medida ciertas comparaciones de datos.

Es importante mencionar que la metodología empleada presenta la novedad de considerar el concepto de voltaje mínimo en lo que es el área de una red de tierra, el cálculo de este voltaje resulta un poco complejo y no es considerado en las metodológicas ya establecidas y descritas en las próximas secciones de este capítulo.

4.2 DESCRIPCIÓN DE METODOLOGÍA TRADICIONALES DE CÁLCULO DE RESISTENCIA A TIERRA.

Para poder comparar de una manera más precisa los datos obtenidos con respecto a otros es necesario definir con claridad los métodos comparativos logrando así visualizar con mayor profundidad las ventajas y desventajas de la metodología planteada

Dentro de los métodos seleccionados para efecto de comparación se tienen:

- 1.0. Descripción del método utilizado por H. B. DWIGHT.
- 2.0. Descripción del método empleado por M. Elsherbiny, Y.L Chow y M. M.A. Salama.
- 3.0. Resistance Formulas of Grounding Systems in Two-Layer Earth IEEE Transactions on Power Delivery, July 1996.

4.2.1 Descripción del método descrito por H.B DWIGHT.

Para la aplicación de este método los autores asumen que la red de tierra se encuentra localizada en una resistividad uniforme es decir un suelo homogéneo. El tipo de electrodos utilizados son varillas verticales de forma cilíndrica con radio a y de longitud L .

La metodología a emplear en el cálculo de resistencia de tierra se parte del análisis de electrodos en paralelo, simulando de esta manera el efecto capacitancia y auxiliándose de la teoría de Imágenes. Además en este cálculo se aplica el método de voltaje promedio del Dr. G.W O. Howe, el cual consiste en asumir una densidad de carga uniforme sobre la superficie del conductor y considerando su potencial promedio. Utilizando entonces la definición de capacitancia aproximada como la carga total dividida entre el voltaje promedio, incluyendo la capacitancia del conductor y de su imagen. Reescribiéndola como su inversa la capacitancia se expresa como:

$$\frac{1}{C} = \frac{V_{average}}{2 \cdot q \cdot L}$$

Donde: "q" es la densidad de carga lineal

$V_{average}$ es el voltaje promedio en la superficie de la varilla.

Para el calcular voltaje promedio se tiene la siguiente ecuación:

$$V_{average} = \int_{z_0}^{z_1} q \frac{dz}{r}$$

De acuerdo a la referencia Ref.[5] la definición de resistencia se expresa como:

$$R = \frac{\rho}{4.\pi.C} \quad \Omega$$

al sustituir la capacitancia en la definición de resistencia se tiene:

$$R = \frac{\rho}{2.\pi.L} V_{average} \quad \Omega$$

De acuerdo a la definición de resistencia anterior esta se utiliza para calcular valores de resistencia de acuerdo lo planteado por el voltaje promedio.

Considerando la ecuación anterior y aplicando la definición de voltaje promedio calculado en Ref.[5].

para 1 electrodo la resistencia se calcula por:

$$R = \frac{\rho}{2.\pi.L} \left(\ln \frac{4.L}{a} - 1 \right) \quad \Omega$$

formula para 2 electrodos separados con una separación de $S > L$

$$R = \frac{\rho}{2.\pi.L} \left(\ln \frac{4.L}{a} - 1 \right) + \frac{\rho}{4.\pi.S} \left(1 - \frac{L^2}{3.S^2} + \frac{2.L^4}{5.S^4} \right) \quad \Omega$$

De igual forma la resistencia para 2 varillas con una separación de $S < L$ se obtiene por:

$$R = \frac{\rho}{4.\pi.L} \left(\ln \frac{4.L}{a} + \ln \frac{4.L}{S} - 2 + \frac{S}{2.L} - \frac{S^2}{16.L^2} + \frac{S^4}{512.L^4} \right) \quad \Omega$$

4.2.1.1 Análisis de datos para el método empleado por H.B DWIGHT.

Este método es aplicable solamente para el tipo de suelo homogéneo es decir para resistividades constantes en el área de cálculo de la resistencia además presenta la desventaja de no poder aplicarse a varias configuraciones geométricas de redes de tierra.

Los parámetros de análisis para el cálculo son:

- La longitud de la varilla o electrodo.

- La resistividad de suelo.
- El radio de la varilla.
- Separación de electrodos.

Los datos utilizados en el cálculo de resistencia de tierra son: varillas de un radio de $a=0.01587$ m, con una longitud de $L=3.0$ en un suelo de características homogéneas con resistividades variables de $\rho_1=100$ y $\rho_2=300$ $\Omega.m$, con un espaciamiento de varillas de $1.0L$ hasta $2.0L$, mostrándose los resultados en la tabla 4.1.

N de varillas	Resistividad ($\Omega.m$)	Separación (m)	R(formula) (Ω)	R(método) (Ω)	% Error
1	ρ_1	-	29.859	29.18	-2.32
	ρ_2	-	87.576	87.54	-2.32
2	ρ_1	1.L	16.334	16.69	+2.13
		1.5.L	15.839	15.79	-0.31
		2.L	15.603	15.42	-1.18
	ρ_2	1.L	49.032	50.06	+2.05
		1.5.L	47.519	47.38	-0.29
		2.L	46.810	46.27	-1.16
2	ρ_1	0.75L	17.62	17.15	-2.74
		0.5.L	18.414	17.86	-3.1
		0.25.L	19.95	19.16	-4.12
	ρ_2	0.75.L	52.86	51.45	-2.74
		0.5.L	55.244	53.59	-3.084
		0.25L	59.857	57.54	-4.026

Tabla 4.1 Comparación de datos para el método de H.B DWIGHT y la metodología propuesta.

4.2.2 Descripción del método empleado por M. M. Elsherbiny, Y.L Chow, M. M.A. Salama of the Electric and Computer Engineering department of University of Warterloo, Waterloo, Ontario Canadá.

Este método realiza el análisis de red de tierra para un tipo de suelo homogéneo y heterogéneo. Además tiene la posibilidad de diseñar configuraciones de redes de tierra de diferentes estilos geométricos, circulares, lineales y cuadradas perimetrales, lo cual permite manejar un parámetro bien importante como lo es el área de instalación de la red.

4.2.2.1 Análisis para un medio homogéneo.

Para el tipo de suelo homogéneo este método calcula la resistencia de tierra de un electrodo y de un conjunto de electrodos.

Para el tipo de suelo homogéneo en el cálculo de resistencia de tierra se toma en cuenta la resistencia propia de los elementos y la resistencia mutua entre los electrodos que conforman la red, aplicando el concepto de paraleleo para "N" varillas.

El cálculo de resistencia se realiza considerando la resistencia mutua entre los electrodos y la resistencia propia de cada uno de los electrodos tal como se muestra en la fig.4.1 obteniendo de esta manera la resistencia de la red de tierra.

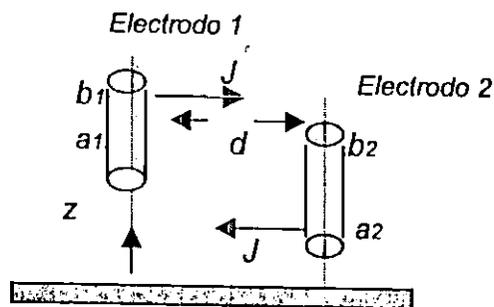


Fig.4.1 Esquematación de cálculo de resistencia mutua.

Para calcular la resistencia mutua de los electrodos Ref.[6] se utilizó la siguiente ecuación:

$$R_{21} = \frac{\rho/4.\pi}{(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)} \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + d^2}} dz_1 \right] dz_2$$

donde:

b_i : Coordenadas en la parte superior del electrodo. (m)

a_i : Coordenadas en la parte inferior del electrodo. (m)

z_i : Coordenadas en la varilla. (m)

ρ : Resistividad del medio. ($\Omega.m$)

Ahora para calcular la resistencia propia de cada electrodo mostrado en la fig. 4.2 se tiene:

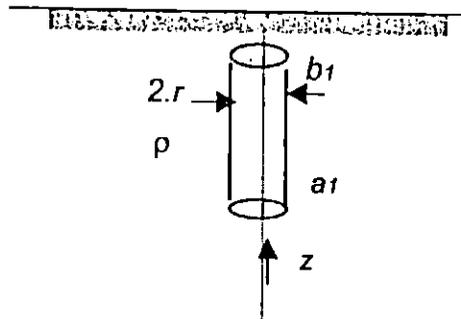


Fig.4.2 Sistema de coordenadas para la resistencia propia

$$R_{11} = \frac{\rho}{2\pi} \frac{r}{(b_1 - a_1)} \left[f\left(\frac{b_1 - a_1}{r}\right) - 1 \right] \quad \Omega$$

Donde: r es el radio del electrodo.

$$f(x) = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1 + x^2}$$

Obteniéndose la resistencia total como la suma de R_{11} y R_{21} .

$$R_T = R_{11} + R_{21} \quad \Omega$$

4.2.2.2 Análisis para un medio Heterogéneo.

En el cálculo de resistencia de tierra para este medio se utilizan electrodos de longitud L y de radio a .

El electrodo o el conjunto de electrodos posee un enterramiento de h_b estos se encuentran localizados en las dos capas siendo la primera con una resistividad ρ_u y ρ_l . La longitud del electrodo en la primera capa es L_u y la longitud de la segunda capa es L_l y la altura de la primera capa del suelo es H , manteniendo una separación entre electrodos de "d", tal como se muestra en la fig.4.3.

La resistencia de los electrodos de acuerdo a Ref.[6] es obtenida por

$$R = \frac{V}{\sum_{i=1}^N I_i}$$

donde:

V : es el voltaje aplicado

I_i : es la corriente del segmento m i(A). Para dos segmentos el electrodo para dos capas, cada segmento tiene una densidad de corriente uniforme.

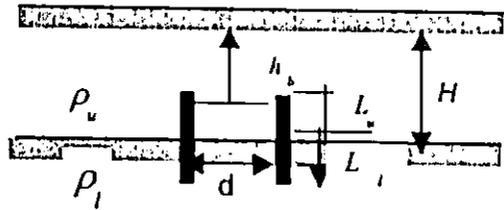


Fig.4.3 Esquematzación de red de tierra para un suelo heterogéneo.

Debido a las múltiples reflexiones existentes entre los medios de resistividad ρ_u y ρ_l así como también el aire se hace necesario considerar las imágenes existentes entre las fronteras de cada capa del suelo, Ref.[6].

4.2.2.3 Análisis de datos para el método empleado por M. M. Elsherbiny, Y.L Chow , M. M.A. Salama del Electric and Computer Engineering department of University of Warterloo, Waterloo, Ontario Canadá.

Para el este método se calcula la resistencia de tierra para diferentes Configuraciones constituidas de un conjunto de electrodos.

Los parámetros de análisis para el cálculo de resistencia de tierra empleados por este método son:

- El coeficiente de reflexión K.
- Enterramiento de las varillas.
- Área.
- Radio de los electrodos.

A continuación se presenta una tabla de datos de resistencia de tierra para diferentes configuraciones geométricas como lo son circulares, cuadradas perimetrales y lineales. Ref.[6]

Los datos de empleados en el cálculo de resistencia de tierra para las diferentes configuraciones geométricas de estas son de varillas de radio $a=0.0063$ mts con una longitud de $L= 3.0$ en un suelo de características homogéneas y heterogéneas con $\rho_1=100$ y una resistividad en la segunda capa ρ_2 variable de 300 y 33.33 $\Omega.m$, una profundidad de las varillas de $H_v = 0.50$ mts y un área de $20 \times 20 \text{ m}^2$ para la configuración perimetral y un perímetro de 80.0 m para las configuraciones circulares y lineales mostrándose los resultados en la tabla 4.2.

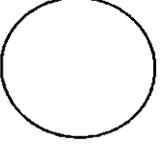
varillas	Coeficiente de Reflexión	TIPOS DE CONFIGURACIONES								
		Perimetral			Circular			Lineal		
N	K									
		Rf	R Método	% Error	Rf	R Método	% Error	Rf	R Método	% Error
4	-0.50	3.79	3.504	+7.54	3.81	3.522	+7.55	3.71	3.438	+7.33
	0.0	9.21	8.728	+5.23	9.27	8.785	+5.23	9.00	8.517	+5.36
	+0.50	17.91	22.38	-24.9	18.03	22.52	-24.90	17.4	21.86	-25.5
8	-0.50	2.11	1.943	+7.91	2.12	1.936	+8.67	2.01	1.852	+7.86
	0.0	5.22	4.972	+4.75	5.25	4.649	+11.44	4.93	4.681	+5.05
	+0.50	10.6	12.67	-19.5	10.67	12.60	-18.08	9.83	11.96	-21.6
12	-0.50	1.57	1.442	+8.15	1.55	1.426	+8.0	1.46	1.334	+8.63
	0.0	3.95	3.775	+4.43	3.90	3.723	+4.53	3.65	3.465	+5.06
	+0.50	8.28	9.54	-15.2	8.15	9.40	-15.33	7.46	8.802	-17.9
16	-0.50	1.31	1.20	+8.39	1.29	1.179	+8.60	1.20	1.099	+8.41
	0.0	3.34	3.194	+4.37	3.28	3.13	+4.57	3.02	2.88	+4.63
	+0.50	7.16	8.02	-12.0	7.00	7.87	-12.42	6.33	7.271	-14.8
20	-0.50	1.16	1.058	+8.79	1.13	1.035	+8.40	1.05	0.956	+8.89
	0.0	2.99	2.86	+4.34	2.91	2.784	+4.32	2.66	2.539	+4.54
	+0.50	6.51	7.131	-9.53	6.33	6.961	-9.96	5.67	6.374	-12.41

Tabla 4.2 Comparación de datos para el método por Elsherbiny, Chow, Salama y metodología propuesta.

4.2.3 Metodología descrita en Resistance Formulas of Grounding Systems in Two-Layer Earth IEEE Transactions on Power Delivery, July 1996.

En el presente método se realiza el análisis para suelo homogéneo y heterogéneo aplicadas a un conjunto de electrodos independientemente de la configuración geométrica, es decir calcula el valor de resistencia considerando los parámetros básicos como lo son radio y longitud de la varilla y las resistividades del tipo de suelo.

4.2.3.1 Análisis para un medio homogéneo.

Para calcular la resistencia de tierra de un conjunto de electrodos enterrados en un suelo homogéneo se utiliza el factor " F " el cual es definido en IEEE standard Ref.[7] como:

$$F = \frac{R_t}{\left(\frac{R_t}{N}\right)}$$

Donde N: Número de electrodos

R_t : Resistencia del conjunto de electrodos.

Para calcular la resistencia de una simple varilla se utiliza:

$$R_t = \frac{\rho}{2.\pi.L} \left[\ln\left(\frac{4.L}{a}\right) - 1 \right] \Omega$$

Donde L: Longitud de la varilla

a: radio de la varilla

ρ : Resistividad de la tierra homogénea

Y para realizar el cálculo de resistencia para un conjunto de varillas Ref.[7] de $N > 1$, y $h_s = 0$ se hace uso de:

$$R_t = \frac{\rho}{2.\pi.L} \left[\ln\left(\frac{4.L}{a}\right) - 1 \right] \frac{F}{N} \Omega$$

4.2.3.2 Análisis para un medio heterogéneo.

Para un medio heterogéneo se analiza la red de tierra cuando la primera capa de tierra es un poco profunda tal como se muestra en la fig. Haciendo el análisis para cada capa de suelo para luego obtener la resistencia equivalente de ambas capas.

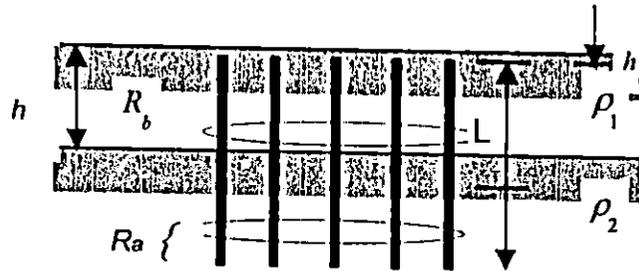


Fig.4.4 Conjunto de electrodos para un tipo de suelo heterogéneo.

La resistencia de la red se calcula a partir del concepto de paralelo aplicado a la capa 1 y la capa 2 Ref.[7] obteniendo la siguiente ecuación:

$$R_t = \frac{1}{\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}}$$

Donde R_a y R_b son las resistencias del segmento de las varillas en cada capa obteniéndose cada una de ellas por medio de:

$$R_a = \frac{\rho_2}{(L + h_b - h)} g_o \frac{F_o}{N} \quad \text{y} \quad R_b = \frac{\rho_1}{(h - h_b)} g_o \frac{F_o}{N} + \frac{\rho_1}{h} \phi_o$$

De acuerdo a Ref.[7], g_o , F_o y ϕ_o se expresan como:

$$g_o = \frac{1}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{2L}{a}\right) - 1 + \frac{\ln 2}{1 + \frac{(4 \ln 2)h_b}{L}} \right] \quad \text{y} \quad \phi_o = \frac{\frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{1-K} \right)}{\sqrt{\left(\frac{N}{F_o} - 1 \right)^2 + 1}}$$

Debido a las múltiples reflexiones que existen en un tipo de suelo heterogéneo la longitud del electrodo es afectada por lo que el factor "F" toma el valor de:

$$F_o = F \Big|_{L \rightarrow \frac{L}{1-0.90K}}$$

4.2.3.3 Análisis de datos para el método descrito en Resistance Formulas of Grounding Systems in Two-Layer Earth IEEE Transactions on Power Delivery, July 1996.

Este método calcula la resistencia de tierra para suelo homogéneo y heterogéneo pero posee la desventaja de no poder aplicarse para varias configuraciones geométricas de redes de tierra.

Los parámetros de análisis utilizados son:

- El coeficiente de reflexión K.
- Enterramiento de las varillas.
- Radio de los electrodos.
- Enterramiento de las varillas de red de tierra.

Teniendo los parámetros anteriores a continuación se presenta una tabla de datos de resistencia de tierra para diferentes configuraciones geométricas como lo son cuadradas y perimetrales desarrolladas en Ref.[7].

Los datos de empleados en el cálculo de resistencia de tierra para las diferentes configuraciones geométricas de estas son de varillas de radio $a=0.01$ mts con una longitud de $L= 10.0$ mts en un suelo de características homogéneas y heterogéneas con $\rho_1=100$ y una resistividad en la segunda capa ρ_2 variable de 300 a 33.33 $\Omega.m$, una profundidad de las varillas de $H_v = 0.50$ mts, además con una profundidad de la primera capa de 5.0 mts y un área de $20 \times 20 m^2$ para ambas configuraciones mostrándose los resultados en la tabla 4.3

Definición de Variables			TIPOS DE CONFIGURACIONES					
N varillas	Hcapa	K	Perimetral	Rc (Método)	% Error	Cuadrada	Rc (Método)	% Error
4	5	-0.50	1.65	1.75	-6.0	N/A	-	-
		0.0	3.45	3.183	+7.73	N/A	-	-
		+0.50	6.01	6.561	-9.1	N/A	-	-
9	5	-0.50	N/A	-	-	0.955	1.026	-7.1
		0.0	N/A	-	-	2.20	2.096	+4.72
		+0.50	N/A	-	-	4.20	4.359	-3.78
12	5	-0.50	0.90	0.8725	+3.0	N/A	-	-
		0.0	2.01	1.841	+8.40	N/A	-	-
		+0.50	3.90	3.832	+1.74	N/A	-	-
16	5	-0.50	N/A	-	-	0.65	0.665	-2.30
		0.0	N/A	-	-	1.60	1.44	+10
		+0.50	N/A	-	-	3.40	3.043	+10.4

Tabla 4.3 Comparación de datos para el método de Ref.[7] y la metodología propuesta.

4.3 CÁLCULO DE RESISTENCIA DE RED DE TIERRA APLICANDO UNA REFERENCIA DE VOLTAJE FINITA.

Normalmente se emplean ecuaciones previamente establecidas para el cálculo de resistencia a tierra, lo que no permiten variar factores muy importantes, imposibilitando un análisis más profundo que permita mejorar el diseño de las redes de tierra haciéndose necesario desarrollar una metodología que permita el manejo versátil de los parámetros y magnitudes involucrados en las redes de tierra. Dicha metodología se fundamenta en la interacción de las leyes básicas del electromagnetismo descritas en los anteriores capítulos.

El primer paso de esta metodología consiste en la definición de un sistema de referencia común que simplifique el manejo de variables, ya que las ecuaciones de voltaje y campo eléctrico están definidas en un sistema de referencia ubicado en cada una de las varillas, haciéndose necesario referenciar las variables del voltaje y campo eléctrico (r_i, θ_i, z_i) a un solo sistema de referencia de coordenadas (r, θ, z) .

4.3.1 Análisis para del sistema de referencia en coordenadas cilíndricas de la varilla considerada como origen.

En la fig.4.5 se muestra el sistema de referencia utilizado para obtener el potencial y campo eléctrico en cualquier punto.

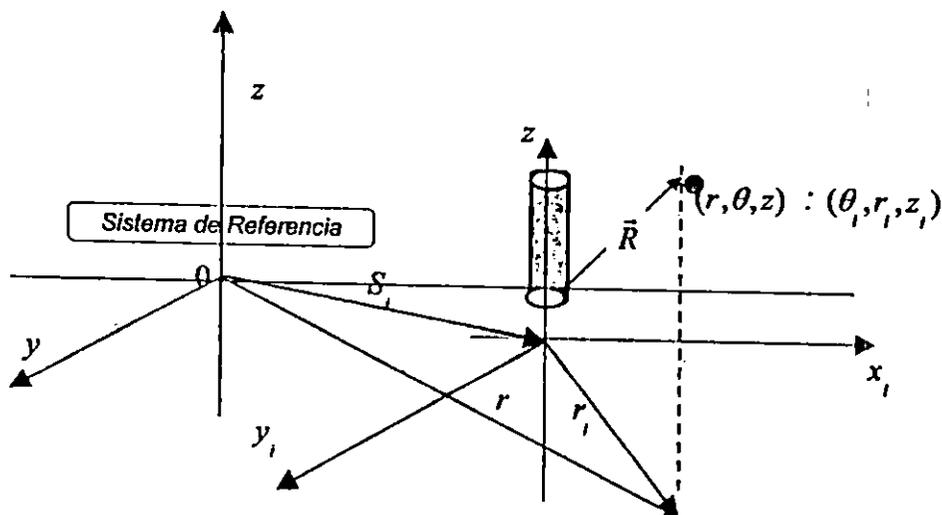


Fig.4.5 Sistema de referencia general considerando el voltaje mínimo.

En las fig.2.1, 2.18 y 2.19 se muestra con mayor claridad la relación entre las coordenadas del sistema de referencia general y el sistema de la varilla el cual se aplica al utilizar una referencia finita de voltaje dentro del área de la configuración geométrica de la red de tierra.

4.3.2 Proceso de Cálculo de la Resistencia en una Red de Tierra.

Una de las variables de mayor importancia en el proceso de cálculo de resistencia de tierra es el análisis del voltaje y corriente en las cercanías de la varilla de análisis y en el área de la red de puesta a tierra.

De acuerdo a la definición de resistencia:

$$R = \frac{- \int \vec{E} \cdot d\vec{L}}{\sigma \cdot \int \vec{E} \cdot d\vec{A}} \quad \Omega$$

Para el cálculo de resistencia se consideran dos superficies equipotenciales, las cuales son identificadas como voltaje generado por el conjunto de varillas respecto a una de ellas como referencia y un voltaje con referencia finita denominado voltaje mínimo el cual se encuentra ubicado dentro del área de la red de tierra.

Para obtener el primero de ellos voltaje se encuentra el voltaje en el radio de la varilla debido a ella misma y a los demás electrodos que componen la red de tierra, recorriendo la longitud de la varilla o segmentos de la varilla en la primera o segunda capa aplicando los conceptos desarrollados anteriormente empleando la teoría de las imágenes con lo cual se obtiene una matriz de voltaje. Una vez obtenida la matriz de voltaje, se obtiene el voltaje promedio de dicha matriz, por lo que se prefiere trabajar con este voltaje ya que proporciona un margen de seguridad mayor debido a que incrementa su valor de resistencia.

Para el cálculo del voltaje mínimo se toma únicamente una varilla como referencia debido a que dicho voltaje es constante dentro del área y únicamente es necesario encontrarlo una vez, de tal forma de encontrar el voltaje mínimo dentro del área definida por la red de puesta a tierra, para encontrar dicho voltaje se repite un proceso de recorrido tanto a lo largo como el contorno de la varilla, encontrándose una matriz de voltajes mínimos, la cual posee la característica de que la posición, ángulo y distancia no se modificada al trasladar la referencia de la varilla, es decir, mantiene su valor en la posición encontrada por la matriz. Para el cálculo de resistencia se trabaja con el menor valor de voltaje obtenido ya que da un mayor margen de seguridad.

Para calcular la resistencia de la red de tierra de cualquier configuración se debe considerar la corriente que atraviesa a ambos voltajes esto no se puede realizar

directamente debido a que no se conoce la forma geométrica exacta de la superficie equipotencial y por lo tanto no se puede determinar el área de integración, lo que hace necesario la utilización de un método numérico para solventar dicha dificultad. Además se auxilia del concepto de conductancia ya que simplifica los cálculos debido a que la conductancia total será la suma de las conductancias de elementos de áreas ubicados en paralelo en la superficie equipotencial y luego se obtiene la resistencia utilizando su relación inversa.

La conductancia viene dada por:

$$G = \frac{\sigma \cdot \int \vec{E} \cdot d\vec{A}}{-\int \vec{E} \cdot d\vec{L}}$$

Donde el numerador representa la corriente que fluye hacia la tierra, atravesando el elemento de área y se evalúa como una sumatoria de corrientes que atraviesan diferenciales de áreas de tal forma de cubrir todo el elemento de área tal como se muestra en la fig.4.6.

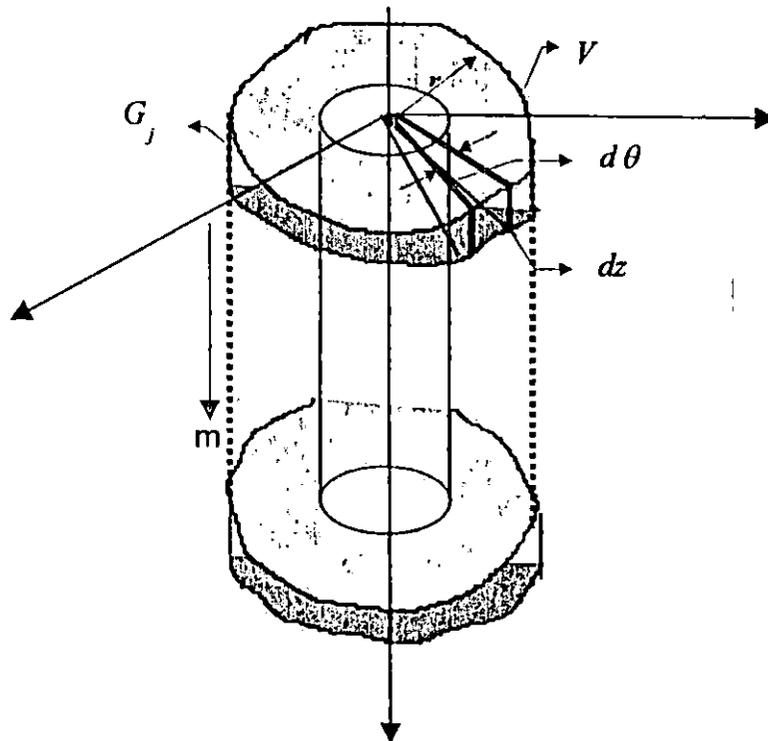


Fig.4.6 Conductancia de elementos de área en una superficie equipotencial para una varilla de la red de tierra considerando voltaje mínimo.

El denominador es la diferencia de voltaje entre superficies equipotenciales por las cuales circula la corriente, siendo necesario determinar la posición (r) del Voltaje generado por el conjunto de varillas tomando a una de ellas como referencia con el objetivo de evaluar el campo eléctrico (\vec{E}) en el diferencial de área y poder conocer la corriente que lo atraviesa, luego se hace un recorrido de 2π para encontrar la corriente total que circula por el elemento de área y entonces ya se puede calcular la conductancia de dicho elemento por medio de la expresión:

$$G_j = \frac{\sigma}{V - V_{min}} \sum \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

De acuerdo a la fig.4.8 el diferencial de área es:

$$d\vec{A} = r \cdot d\theta \cdot dz \cdot \hat{a}_r$$

El campo eléctrico tiene dos componentes:

$$\vec{E} = E_r \cdot \hat{a}_r + E_z \cdot \hat{a}_z$$

Realizando el producto de las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz$$

Sustituyendo esta ecuación en G_j

$$G_j = \frac{\sigma}{V - V_{min}} \sum_{\theta=0}^{2\pi} E_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz$$

Donde la conductancia total es:

$$G_{TOTAL} = \sum_{j=1}^m G_j$$

Sustituyendo G_j en G_{TOTAL} :

$$G_{TOTAL} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\sigma}{V - V_{min}} \right) \sum_{\theta=0}^{2\pi} E_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz$$

Obteniendo

$$G_{TOTAL} = \left(\frac{\sigma}{V - V_{min}} \right) \sum_{j=1}^m \sum_{\theta=0}^{2\pi} E_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz$$

de acuerdo a lo mencionado con anterioridad la resistencia total de una varillas es:

$$R = \frac{1}{G_{TOTAL}} \Omega$$

Este valor es para una varilla, haciéndose necesario repetir el procedimiento anterior según el número de varillas en la red en la red.

Por lo que para obtener la resistencia de la red se hace necesario aplicar el paralelo al conjunto de resistencias que conforman la red de tierra:

$$RESISTENCIA = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_i} \right)} \Omega$$

4.3.3 Análisis de datos considerando un voltaje de referencia ubicado en el área de la red de tierra.

En las siguientes tablas se presentan los resultados de resistencia para las diferentes configuraciones geométricas de redes de tierra, tomando en cuenta un voltaje de referencia finita localizado dentro de la configuración diseñada.

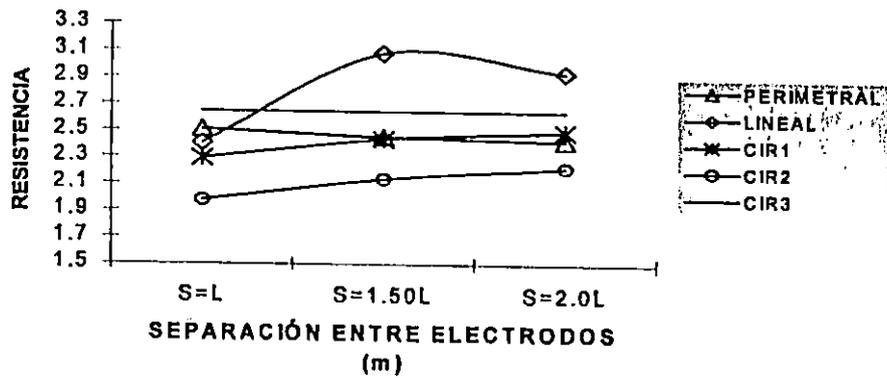
Tabla 4.4 Datos para N= 8.0 electrodos de $r=0.01587$ m, Hvarilla = 0.40 m, Considerando una referencia de voltaje finita.

SUELO	H capa (m)	ρ ($\Omega.m$)	L (m)	Separación (m)	RESISTENCIA DE LA CONFIGURACIÓN						
					CUAD	PER.	LINEAL	CIR1	CIR2	CIR3	CIR4
HOMO-GÉNEO	∞	100	1.8	L	4.004	4.252	4.069	4.122	3.780	5.232	4.937
				1.5 L	3.983	4.320	4.268	4.368	3.880	5.144	4.778
				2 L	4.137	4.569	4.421	4.577	3.999	5.138	4.727
			3.0	L	2.790	3.001	2.852	2.885	2.642	3.592	3.387
				1.5 L	2.787	3.061	2.955	3.021	2.680	3.504	3.247
				2 L	2.733	3.070	3.571	3.151	2.772	3.494	3.207
HETERO-GÉNEO	1.0	-0.5	1.8	L	2.014	2.166	2.089	2.101	1.911	2.539	2.379
				1.5 L	1.975	2.160	2.015	2.200	1.937	2.479	2.83
				2 L	2.041	2.269	2.211	2.290	1.992	2.477	2.260
		0.5	1.8	L	2.796	2.984	2.922	3.027	2.709	3.784	3.543
				1.5 L	2.938	3.226	3.190	3.260	2.909	3.829	3.540
				2 L	3.107	3.431	3.321	3.400	3.000	3.838	3.526

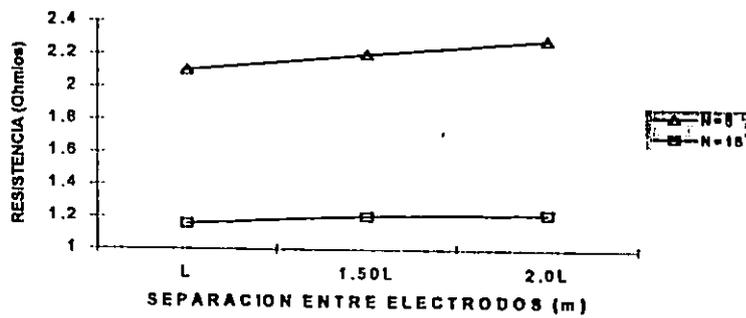
Tabla 4.5 Comparación de datos para N= 16.0 electrodos de $r=0.01587$ m, $H_v=0.4$ m, considerando una referencia de voltaje finita con una de referencia de voltaje cero.

SUELO	H capa (m)	ρ ($\Omega.m$)	L (m)	Separación (m)	RESISTENCIA DE LA CONFIGURACIÓN					
					CUAD	CUAD SIN VMIN	LINEAL	LINEAL SIN VMIN	CIR1	CIR1 SIN VMIN
HOMO-GÉNEO	∞	100	1.8	L	2.552	6.318	3.407	4.806	2.293	5.312
				1.5 L	2.474	4.728	3.076	3.823	2.436	4.10
				2 L	2.474	4.078	2.935	3.442	2.496	3.631
			3.0	L	1.621	4.087	1.497	3.126	1.589	3.440
				1.5 L	1.576	3.067	1.529	2.508	1.670	2.676
				2 L	1.72	2.66	1.567	2.273	1.704	2.387
HETERO-GÉNEO	1.0	-0.5	1.8	L	1.233	2.524	1.540	1.989	1.156	2.157
				1.5 L	1.193	1.935	1.408	1.641	1.205	1.728
				2 L	1.198	1.714	1.358	1.514	1.221	2.157
		0.5	1.8	L	1.838	4.722	2.522	3.638	1.681	4.024
				1.5 L	1.855	3.623	2.311	2.921	1.795	3.144
				2 L	1.860	3.138	2.212	2.63	1.850	2.785

CÁLCULO PARA $N=16$, $Hv=0.40$, $L=1.8m$ Y $a=0.01687$



COMPARACION DE RESISTENCIA PARA CIR1 CON $N=8$
Y $N=16$ CON $Hv=0.40$



VARIACION DE RESISTENCIAS RESPECTO A K

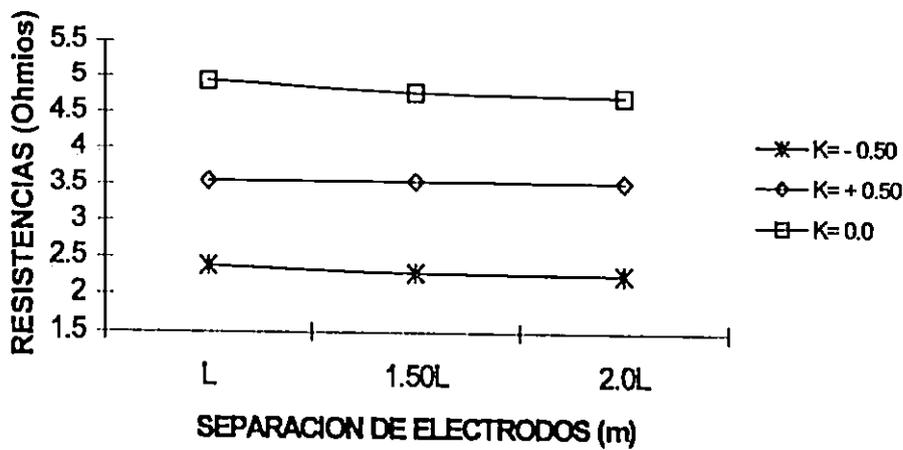


Fig. 4.7 Comparación de las diferentes configuraciones y sus respectivos parámetros, utilizando referencia finita.

Comparación de resultados tomando en cuenta una referencia dentro del área de la red de tierra.

Comparación de resistencias con voltaje referencia cero y V_{minimo} , para $N=16$, $L=3.0\text{m}$, $r=0.01587\text{m}$, $K=0$, $H_{\text{varilla}}=0.40\text{m}$.

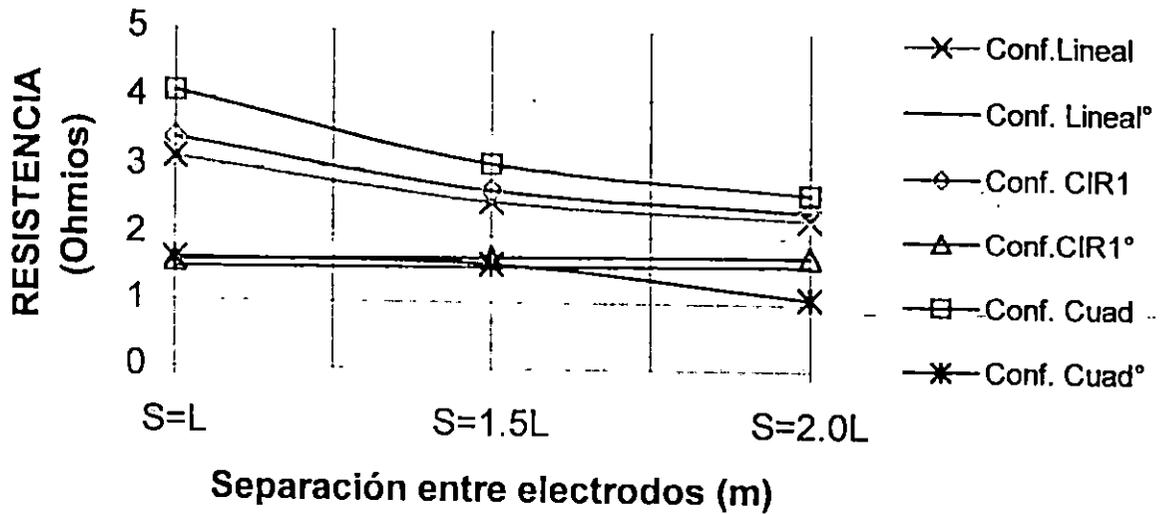


Fig.4.8 Comparación de datos para resistencia con $V_{\text{referencia}}=0$ y $V_{\text{mínimo}}$.

CONCLUSIONES DEL CAPITULO IV.

1. La metodología planteada presenta la ventaja de conocer con amplitud el comportamiento de los parámetros principales que se involucran en el diseño de las redes de tierra.
2. La utilización del voltaje de referencia finita ubicado dentro de la red de tierra en el cálculo de la resistencia afecta en un buen porcentaje el valor de resistencia de la red, pero el análisis de este concepto se presenta por considerarlo importante y a la vez innovador por lo que aunque existe una diferencia en los resultados es importante que se involucre dicho concepto en el diseño de redes de tierra.
3. Las metodologías comparativas no consideran el voltaje de referencia finito las cuales al compararlas con la propuesta elaborada la cual cubre el análisis considerando tanto una referencia de voltaje infinita y finita permitiendo de esta manera realizar comparaciones de cálculo con aquellos métodos que consideran la referencia infinita en la que el margen de error entre dichos resultados y los obtenidos por el método es tolerable, sin embargo debido a que no existen métodos que consideren una referencia de voltaje finita solamente se presentan resultados obtenidos por el programa elaborado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[5] H.B. DWIGHT.

Calculation of Resistances to Ground.
AIEEE, 1936.

[6] M.M. Elsherbiny, Y.L. Chow, M.M.A. Salama.

IEEE Transactions on Power Delivery.
Vol, 11, N° 2 April 1996

[7] M.M. Elsherbiny, Y.L. Chow, M.M.A. Salama

IEEE Transactions on Power Delivery.
Vol.11 N° 3 July 1996.

CONCLUSIONES GENERALES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

1. La configuración óptima dependerá del análisis integral de todos los parámetros involucrados en la red de tierra de tal manera que no se debe generalizar una red como la óptima, sino que dependerá de las condiciones específicas de cada caso cual configuración proporcionará los mejores resultados.
2. En datos obtenidos la configuración lineal presenta la menor resistencia pero produce un voltaje en la superficie que puede provocar gradientes de potencial peligrosos en cambio la configuración circular simple, que es la que produce menor resistencia después de la lineal, proporciona una mayor uniformidad del voltaje en la superficie por lo que se considera la óptima.
3. La metodología planteada presenta la ventaja de conocer con amplitud el comportamiento de los parámetros principales que se involucran en el diseño de las redes de tierra, de tal forma que permita determinar en cada caso que combinación de de parámetros presenta mejores resultados.
4. La utilización del voltaje de referencia finita ubicado dentro de la red de tierra en el cálculo de la resistencia afecta en un buen porcentaje el valor de resistencia de la red, pero el análisis de este concepto se presenta por considerarlo importante y a la vez innovador por lo que aunque existe una diferencia en los resultados es necesario que se involucre dicho concepto en el diseño de redes de tierra.

RECOMENDACIONES

1. Es conveniente que la longitud de las varillas sea lo mas largo posible para lograr llegar a las capas más húmedas del terreno las cuales poseen valores de resistividad baja disminuyendo de esta manera la resistencia.
2. Las varillas deben enterrarse lo mas profundo posible de la superficie(0.50 a 1.00 m) para disminuir el gradiente de potencial.
3. La configuración circular proporciona una resistencia baja y un gradiente de voltaje aceptable por lo que su utilización en las redes de tierra debe ser considerada.
4. La metodología planteada se ajusta a cualquier configuración siempre y cuando se hagan los arreglos necesarios al programa elaborado en MATLAB.

ANEXOS

ANEXO A

FORMULAS UTILIZADAS EL MÉTODO UTILIZADO POR H. B. DWIGHT.

•	One Ground Rod Length L , radius a	$R = \frac{\rho}{2\pi L} \left(\log_e \frac{4L}{a} - 1 \right)$	(13)
• •	Two Ground Rods $s > L$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\log_e \frac{4L}{a} - 1 \right) + \frac{\rho}{4\pi s} \left(1 - \frac{L^2}{3s^2} + \frac{2}{5} \frac{L^4}{s^4} \dots \right)$	(20)
• •	Two Ground Rods $s < L$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\log_e \frac{4L}{a} + \log_e \frac{4L}{s} - 2 + \frac{s}{2L} - \frac{s^3}{10L^3} + \frac{s^5}{612L^5} \dots \right)$	(21)
—	Buried Horizontal Wire Length $2L$, depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\log_e \frac{4L}{a} + \log_e \frac{4L}{s} - 2 + \frac{s}{2L} - \frac{s^3}{10L^3} + \frac{s^5}{612L^5} \dots \right)$	(21)
└	Right-Angle Turn of Wire Length of arm L , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} - 0.2373 + 0.2140 \frac{s}{L} + 0.1035 \frac{s^2}{L^2} - 0.0424 \frac{s^3}{L^3} \dots \right)$	(22)
┌	Three-Point Star Length of arm L , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{8\pi L} \left(\log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 1.071 - 0.200 \frac{s}{L} + 0.238 \frac{s^2}{L^2} - 0.054 \frac{s^3}{L^3} \dots \right)$	(23)
+	Four-Point Star Length of arm L , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{8\pi L} \left(\log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 2.012 - 1.071 \frac{s}{L} + 0.045 \frac{s^2}{L^2} - 0.145 \frac{s^3}{L^3} \dots \right)$	(24)
*	Six-Point Star Length of arm L , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{12\pi L} \left(\log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 0.851 - 3.128 \frac{s}{L} + 1.758 \frac{s^2}{L^2} - 0.400 \frac{s^3}{L^3} \dots \right)$	(25)
* *	Eight-Point Star Length of arm L , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{16\pi L} \left(\log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 10.08 - 5.51 \frac{s}{L} + 3.20 \frac{s^2}{L^2} - 1.17 \frac{s^3}{L^3} \dots \right)$	(26)
○	Ring of Wire Diameter of ring D , diameter of wire d , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{2\pi^2 D} \left(\log_e \frac{8D}{d} + \log_e \frac{4D}{s} \right)$	(29)
—	Buried Horizontal Strip Length $2L$, section a by b , depth $s/2$, $b < a/8$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\log_e \frac{4L}{a} + \frac{a^2 - aob}{2(a+b)^2} + \log_e \frac{4L}{s} - 1 + \frac{s}{2L} - \frac{s^3}{10L^3} + \frac{s^5}{612L^5} \dots \right)$	(31)
⊙	Buried Horizontal Round Plate Radius a , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{8\pi} + \frac{\rho}{4\pi s} \left(1 - \frac{7}{12} \frac{a^2}{s^2} + \frac{33}{40} \frac{a^4}{s^4} \dots \right)$	(32), (36)
	Buried Vertical Round Plate Radius a , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{8\pi} + \frac{\rho}{4\pi s} \left(1 + \frac{7}{24} \frac{a^2}{s^2} + \frac{19}{320} \frac{a^4}{s^4} \dots \right)$	(32), (36)'

ANEXO B

RESULTADOS OBTENIDOS POR ELL MÉTODO EMPLEADO POR M. ELSHERBINY, Y. L. CHOW Y M. M. A. SALAMA.

Los datos de empleados en el cálculo de resistencia de tierra para las diferentes configuraciones geométricas de estas son de varillas de radio $a=0.0063$ mts con una longitud de $L=3.0$ en un suelo de características homogéneas y heterogéneas con $\rho_1=100$, una profundidad de las varillas de $H_v=0.50$ mts y un área de $20 \times 20 \text{ m}^2$.

Table III .
Rodbed grounding resistance for different configurations, rodlength, and reflection factor.

Number of rods N	Reflection factor K	Rodbed Configuration													
		#1 square		#2 square		#3 square		#4 rectangle		#5 circle		#6 line		#7 L shape	
															
		rod length l (m)		rod length l (m)		rod length l (m)		rod length l (m)		rod length l (m)		rod length l (m)		rod length l (m)	
3	5	3	5	3	5	3	5	3	5	3	5	3	5		
4	-0.5	3.79	2.31	N/A	N/A	N/A	N/A	3.79	2.31	3.81	2.33	3.71	2.24	3.73	2.25
	0.0	9.21	6.15					9.24	6.17	9.27	6.20	9.00	5.94	9.06	5.99
	+0.5	17.91	13.81					18.03	13.86	18.13	13.96	17.41	13.25	17.55	13.39
8	-0.5	2.11	1.36	2.15	1.40	N/A	N/A	2.12	1.37	2.10	1.35	2.01	1.26	2.02	1.28
	0.0	5.22	3.67	5.34	3.77			5.25	3.69	5.20	3.65	4.93	3.39	4.98	3.44
	+0.5	10.60	8.47	10.89	8.72			10.67	8.52	10.54	8.41	9.83	7.73	9.98	7.86
12	-0.5	1.57	1.06	1.59	1.08	1.65	1.12	1.58	1.07	1.55	1.04	1.46	0.96	1.48	0.98
	0.0	3.95	2.89	4.02	2.95	4.16	3.07	3.98	2.92	3.90	2.84	4.64	2.59	3.69	2.65
	+0.5	8.28	6.80	8.44	6.94	8.76	7.22	8.34	6.85	8.15	6.67	7.46	6.01	7.61	6.16
16	-0.5	1.31	0.92	1.32	0.93	1.35	0.95	1.32	0.93	1.29	0.90	1.20	0.81	1.22	0.83
	0.0	3.34	2.52	3.37	2.55	3.44	2.61	3.37	2.54	3.28	2.46	3.02	2.21	3.08	2.27
	+0.5	7.16	6.00	7.25	6.08	7.42	6.23	7.23	6.05	7.00	5.84	6.33	5.20	6.48	5.35
20	-0.5	1.16	0.83	1.16	0.84	1.18	0.85	1.17	0.84	1.13	0.81	1.05	0.73	1.07	0.75
	0.0	2.99	2.31	3.00	2.32	3.04	2.36	3.02	2.33	2.91	2.24	2.66	1.99	2.72	2.05
	+0.5	6.51	5.53	6.55	5.58	6.66	5.68	6.58	5.59	6.33	5.36	5.67	4.73	5.83	4.88
24	-0.5	1.06	0.78	1.06	0.78	1.07	0.79	1.07	0.79	1.03	0.76	0.95	0.67	0.97	0.69
	0.0	2.76	2.17	2.75	2.17	2.78	2.20	2.78	2.19	2.68	2.09	2.43	1.85	2.49	1.91
	+0.5	6.09	5.23	6.10	5.25	6.17	5.32	6.16	5.29	5.90	5.05	5.25	4.43	5.41	4.58
28	-0.5	0.99	0.74	0.99	0.74	0.99	0.75	1.01	0.75	0.96	0.72	0.88	0.64	0.90	0.66
	0.0	2.60	2.07	2.58	2.07	2.60	2.08	2.63	2.09	2.51	1.99	2.27	1.76	2.33	1.81
	+0.5	5.80	5.03	5.79	5.03	5.84	5.07	5.86	5.08	5.60	4.84	4.96	4.22	5.12	4.37