

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y
MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA**



**INFORME FINAL DEL CURSO DE
ESPECIALIZACIÓN:
ESPECIALIZACIÓN EN 3-VARIEDADES Y NUDOS
TOPOLÓGICOS**

**TÍTULO DEL INFORME FINAL:
TRIANGULACIÓN EN 3-VARIEDADES
PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE:
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA**

**PRESENTADO POR:
CHRISTIAN JOSÉ GÓMEZ TORRES N° CARNÉ GT17008**

**DOCENTE ASESOR:
M.SC. JOSÉ JOAQUÍN APARICIO RAMÍREZ**

AGOSTO DE 2023

SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
AUTORIDADES**



RECTOR:

MAESTRO ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

VICERECTOR ACADÉMICO:

DR. RAÚL AZCÚNAGA

VICERECTOR ADMINISTRATIVO:

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA

SECRETARIO GENERAL:

ING. FRANCISCO ALARCÓN

DEFENSOR DE LOS DERECHOS

UNIVERSITARIOS:

LIC. LUIS ANTONIO MEJÍA LIPE

FISCAL GENERAL:

LICDO. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARIN

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
AUTORIDADES**



DECANO:

LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RIOS BENÍTEZ:

VICEDECANO:

LIC. OSCAR VILLALOBOS

SECRETARIO:

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA

**DIRECTOR GENERAL DE PROCESOS DE
GRADO:**

LIC. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA

JEFE DE DEPARTAMENTO:

LICDA. KARLA MARÍA MEJÍA ORTÍZ

**COORDINADOR GENERAL DE PROCESOS DE
GRADO:**

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

Índice general

1. Preliminares	7
1.1. Superficies.	7
1.2. 3-Variedades	8
1.3. Función de Morse	10
2. Simplejos e introducción a Descomposición de Heegaard	12
2.1. Simplejos	12
2.2. Introducción Descomposición de Heegaard	14
2.2.1. Handle Decompositions.(Descomposición de manija)	15
3. Triangulación de 3-variedades y Aplicaciones	21
3.1. Triangulación en 3-variedades	21
3.2. Gluing o Pegado	24
3.3. Aplicación	29
3.3.1. Descomposición de Heegaard	29

Resumen

definimos algunos conocimientos previos necesarios para desarrollar el tema de triangulación en 3-variedades, para ello definimos superficies, que también las podemos ver como 2-variedades. Luego definimos las 3-variedades, así como lo son las variedades cerradas, con borde y algunos ejemplos, finalizaremos este capítulo definiendo la función de Morse y algunas definiciones necesarias como lo son Homotopía e Isotopía. Definiremos lo que son los simplejos de manera general que es un k -simplejo y de manera particular los 0-simplejos, 1-simplejos, 2-simplejos y 3-simplejos daremos algunos ejemplos gráficos de como identificar estos simplejos para finalizar dando una definición de un complejo simplicial y explicaremos más detalladamente. También daremos una introducción a la descomposición de Heegaard abordando el tema Handle decompositions. Desarrollamos el tema Triangulación en 3-variedades, damos todas las bases para probar que toda 3-variedad se puede triangular. Luego abordamos el tema de Gluing o Pegado con el cual daremos algunas propiedades o teoremas relacionados con la triangulación en 3-variedades para finalizar abordando el tema Descomposición de Heegaard en el cual el teorema más interesante se prueba haciendo uso de la triangulación y haciendo uso de handlebodies.

Palabras clave:

Triangulación en 3-variedades; Descomposición de Heegaard; Simplejos; Variedades; Handlebodies; Pegado.

Abstract

we define some prior knowledge necessary to develop the subject of triangulation in 3-manifolds, for this we define surfaces, which we can also see as 2-manifolds. Then we define the 3-manifolds, as well as the closed manifolds, with borders and some examples. We will end this chapter by defining the Morse function and some necessary definitions such as Homotopy and Isotopy. We will define what the simplex are in a general way that is a k -simplex and in a particular way the 0-simplex, 1-simplex, 2-simplex and 3-simplex we will give some graphic examples of how to identify these simplejos to finish by giving a definition of a simplicial complex which we will return to in chapter 3 and explain in more detail. We will also give an introduction to the Heegaard decomposition by addressing the topic Handle decompositions. We develop the topic Triangulation in 3-manifolds, we give all the bases to prove that all 3-manifolds can be triangulated. Then we approach the issue of Gluing with which we will give some or theorems related to triangulation in 3-manifold to finish addressing the Heegaard Decomposition topic in which the most interesting theorem is proved using triangulation and using of handlebodies.

Palabras clave:

triangulation in 3-manifolds; simplex; Heegaard decomposition; Handlebody; Gluing.

Introducción

Empezamos este trabajo con la base de que sabemos lo que es una n -**variedad**, empezaremos definiendo lo que son específicamente las **superficies** (2-variedades), la cual sabemos que puede triangularse, encontrar algunas relaciones con estas variedades como lo puede ser la característica de Euler. Ahora nos preguntamos si las 3-variedades mantienen estas relaciones, así que el objetivo al finalizar este reporte es poder definir lo que es una 3-variedad, si puede triangularse y el cómo se realiza. Y daremos algunas relaciones o aplicaciones de la triangulación en 3-variedades.

Para lograr el objetivo definiremos lo que es un k -**simplejo** y en especial lo que son los (0, 1, 2, 3)-simplejos, definiremos el complejo simplicial. También daremos lo que es una **Handle Decompositions** que nos servirá para definir una de las aplicaciones.

Finalizaremos dando la triangulación en 3-variedades, algunos ejemplos, para luego abordar la relación de algo llamado **Gluing o pegados**, con la cual definiremos un teorema que genera la relación de una triangulación de una 3-variedad con la característica de Euler. para finalizar mostrando la **Descomposición de Heegaard** como una aplicación de la **Triangulación en 3-variedades**.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo abordaremos algunos temas necesarios para el desarrollo de este trabajo como lo son las **Superficies** que no son más que 2-variedades, luego daremos un breve resumen de lo que son las 3-variedades que son la base de nuestra investigación. para finalizar el capítulo con unas breves definiciones de lo que son **La función de Morse**, **homotopía** e **Isotopía**.

1.1. Superficies.

Definición 1.1.0.1. *Superficie* es un espacio S que es localmente homeomorfo al plano, es decir, tal que cada punto de S tiene una vecindad en S homeomorfa a un abierto \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.1.1. ▪ *Ejemplos*

- La esfera S^2

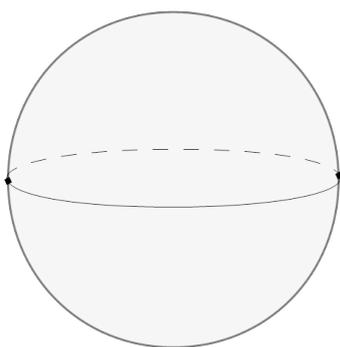


Figura 1.1: La esfera S^2

- El toro T^2

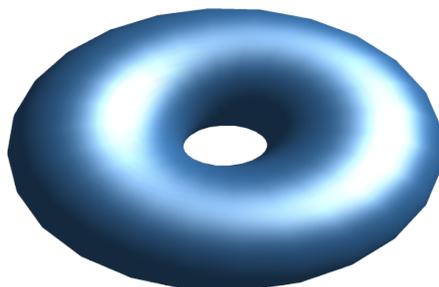


Figura 1.2: El toro T^2

- Un abierto del plano

Definición 1.1.0.2. Una **superficie con borde** Es un espacio que es localmente homeomorfo al semiplano $\mathbb{R}^{2+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}$. Los puntos de S de la forma $(x, 0)$ en \mathbb{R}^{2+} forman el **borde** de la superficie, denotado por ∂S .

Ejemplo 1.1.2. ▪ Algunos ejemplos:

- Disco con 2 hoyos
- Banda de Möbius

Definición 1.1.0.3. La **suma conexa** de dos superficies es la superficie que se obtiene quitándole un disco a cada una y pegando los bordes que quedan.

Definición 1.1.0.4. Una **superficie orientable** puede definirse simplemente como una variedad orientable de dimensión dos, donde toda curva cerrada simple contenida tiene una vecindad regular holomorfa a un cilindro abierto. Cualquier variedad de dimensión dos que no es orientable es **superficie no orientable**

Definición 1.1.0.5. **Superficie no orientable**, esto es, si existe al menos una curva cerrada simple contenida que tiene una vecindad regular homeomorfa.

Definición 1.1.0.6. Las **superficies orientables cerradas** tienen la propiedad de dividir el espacio tridimensional (donde siempre pueden ser **encajadas**) en dos regiones diferentes y disjuntas: una acotada por dicha superficie que es de volumen finito y otra no acotada exterior a dicho volumen.

1.2. 3-Variedades

Definición 1.2.0.1. una **3-variedad** es un espacio Topológico hausdorff y con base numerable localmente homeomorfo a \mathbb{R}^3 .

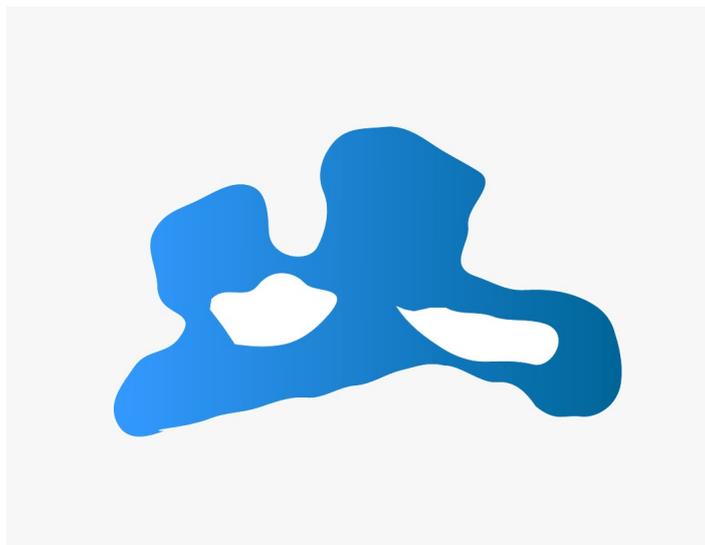


Figura 1.3: Un abierto del plano

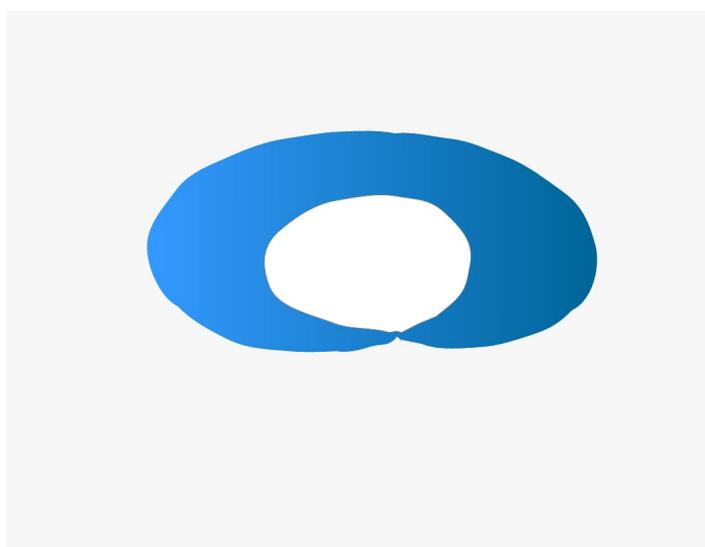


Figura 1.4: Banda de Möbius

Definición 1.2.0.2. *Una 3-variedad con borde es un espacio topológico (hausdorff y con base numerable) localmente homeomorfo a \mathbb{R}^{3+} . El borde de M , denotado por ∂M , está formado por los puntos de M que no tienen vecindades homeomorfas a \mathbb{R}^3*

Ejemplo 1.2.1. *El toro sólido: $D^2 \times S^1$*

Ejemplo 1.2.2. *La botella de Klein sólida: $D^2 \times [0, 1] / (z, 0) \sim (z, 1)$*

Ejemplo 1.2.3. *Los haces de intervalos sobre una superficie, por ejemplo:*

1. *El toro sólido es un haz de intervalos sobre la banda de Moebius*
2. *La botella de Klein sólida es un haz de intervalos sobre un anillo.*

Definición 1.2.0.3. *Las variedades compactas y sin borde las llamaremos **Cerradas***

Ejemplo 1.2.4. *La esfera tridimensional S^3*

Ejemplo 1.2.5. *El toro tridimensional T^3*



Figura 1.5: T^3

Definición 1.2.0.4. *Las variedades no compactas y sin borde las llamaremos **Abiertas***

Ejemplo 1.2.6. *Los ejemplos mas simples de variedades abiertas son los abiertos de \mathbb{R}^3*

Definición 1.2.0.5. *Si M es una 3-variedad y S una superficie encajada en M entonces*

1. *S esta propiamente encajada en M si $S \cap \partial M = \partial S$*
2. *Una vecindad regular de S es una vecindad N homeomorfa a un haz de intervalos sobre S (si S tiene borde pedimos ademas que $N \cap \partial M$ sea una vecindad regular de ∂S en ∂M)*
3. *Decimos que S tiene dos lados en M si S separa a su vecindad regular, y que S tiene un lado en M si no la separa (que S separe o no depende unicamente de que el haz de intervalos sea trivial o no).*
4. *Cortar a M por S significa quitarle a M el interior de una vecindad regular de S . Al resultado se le denota por $M|_S$. Observar que si S tiene dos lados entonces $M|_S$ es una variedad cuya frontera contiene dos copias de S . Y si las identificamos de la manera obvia obtenemos una variedad homeomorfa a M .*

1.3. Función de Morse

Las funciones de Morse proporcionan descripciones de variedades en términos de ciertos bloques de construcción básicos. Además, existen en todas las variedades suaves.

Definición 1.3.0.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Un punto crítico x de f es no-degenerado si la matriz hessiana de segundas derivadas parciales no es singular en x . Sea M una n -variedad suave. Sea $f = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Un punto $x \in M$ es un punto crítico de f si hay una carta ϕ_α de x tal que $\phi_\alpha(x) = 0$ y 0 es un punto crítico de $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ es no-degenerado si 0 es un punto crítico no-degenerado de $f \circ \phi_\alpha^{-1}$. Un valor crítico de f es un valor c tal que $f^{-1}(c)$ contiene al menos un punto crítico.

Definición 1.3.0.2. Sea M una variedad. Un mapeo propio suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse si todos sus puntos críticos son no-degenerados y los distintos puntos críticos corresponden a distintos valores.

Teorema 1.3.1. Si M es una variedad suave, entonces existe una función de morse en M

Observación 1.3.1. De hecho, para cualquier variedad suave M , Las funciones de Morse son densas en $C(\infty)$

Definición 1.3.0.3. Homotopia: Dos mapeos continuos $f, g : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos son homotópicos si pueden deformarse continuamente entre sí, es decir, si hay un mapeo $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $F|_{X \times \{0\}} = f$ y $F|_{X \times \{1\}} = g$ tal mapeo se denomina **Homotópia** entre f y g y decimos que f puede homotoparse en g a través de F . Las restricciones $F_{X \times \{t\}}$ para $t \in [0, 1]$ son las etapas de la homotópia y generalmente las denotamos por $F_t : X \rightarrow Y$

Definición 1.3.0.4. Isotopía: Una Isotopía entre dos mapeos $f, g : X \rightarrow Y$ es una homotópia $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ entre f y g tal que cada etapa $F_t : X \rightarrow Y$ para $t \in [0, 1]$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

Capítulo 2

Simplejos e introducción a Descomposición de Heegaard

*En este capítulo abordaremos lo que son los simplejos, definiremos los k -simplejos y de manera particular por conveniencia definiremos los 0-simplejos, 1-simplejos, 2-simplejos, y 3-simplejos, y daremos un adelanto de lo que es un complejo simplicial; sin embargo, más adelante daremos una definición más detallada y clara. finalizaremos el capítulo con el tema **Handle Decompositions** el cual nos dará la base para desarrollar la descomposición de Heegaard en un capítulo posterior.*

2.1. Simplejos

Definición 2.1.0.1. Denote la $(k + 1)$ -tupla en \mathbb{R}^{k+1} con la i -ésima entrada 1 y todas las demás entradas 0 por v_i , el conjunto

$$\{a_0v_0 + a_1v_1 + \dots + a_kv_k : a_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, k, \sum_{i=0}^k a_i = 1\}$$

se llama k -simplejo estándar (cerrado) y se denota por $[v_0, \dots, v_k]$ o simplemente por $[s]$. La dimensión del k -simplejo estándar es k

Definición 2.1.0.2. El conjunto

$$\{a_0v_0 + a_1v_1 + \dots + a_kv_k : a_i > 0 \text{ para } i = 1, \dots, k, \sum_{i=0}^k a_i = 1\}$$

se llama k -simplejo estándar (abierto) y se denota por (v_0, \dots, v_k) o simplemente por (s) . también llamamos (s) al interior de $[s]$

Ejemplo 2.1.1. El 0-simplejo estándar es el punto $1 \in \mathbb{R}$. Esto también es el 0-simplejo estándar abierto.

Ejemplo 2.1.2. El 1-simplejo estándar es homeomorfo a un intervalo.



Figura 2.1: 0-simplejo estándar

Ejemplo 2.1.3. *El 2-simplejo estándar es un “triángulo” con vértices en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.*

Ejemplo 2.1.4. *El 3-simplejo estándar es un tetraedro con vértices en $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$.*

Definición 2.1.0.3. *(Caras) para $j = 1, 2, \dots, k$, una cara del k -simplejo estandar $[s]$ es un subconjunto de $[s]$ de la forma:*

$$\{a_0v_0 + \dots + a_kv_k : a_{i_1} = 0, \dots, a_{i_j} = 0\}$$

La dimensión de la cara es $k - j$.

Observación 2.1.1. *Las caras del k -simplejo son los mapas de restricción $f : [s] \rightarrow X$, $f|_{[t]}$ para $[t]$ una cara del k -simplejo estandar $[s]$. Una cara 0-dimensional del simplejo es llamado **Vértice** y una cara 1-dimensional es llamada **Arista***

Ejemplo 2.1.5. *Un 0-simplejo solo se tiene a si mismo como cara.*

Ejemplo 2.1.6. *Un 1-simplejo estandar $[v_0, v_1]$ se tiene a si mismo como una cara 1-dimensional y tambien tiene dos caras 0-dimensional $[v_0]$, $[v_1]$*

Ejemplo 2.1.7. *Un 2-simplejo estandar tiene una cara 2-dimensional, tres caras 1-dimensional y tres caras 0-dimensional*

Ejemplo 2.1.8. *Un 3-simplejo tiene una cara 3-dimensional, cuatro caras 2-dimensional, seis caras 1-dimensional y cuatro caras 0-dimensional*



Figura 2.2: 1-simplejo estándar

Definición 2.1.0.4. (Complejo Simplicial) *Un complejo simplicial basado en espacio topológico X es un conjunto de simpliciales*

$$K = \{f : [s] \rightarrow X\}$$

en el espacio topológico X tal que

1. \forall Simpliciales $f \in K$, todas las caras de f están en K
2. \forall Simpliciales $f_1, f_2 \in K$, $im(f_1|_{(s_1)}) \cap im(f_2|_{(s_2)}) \neq \emptyset \Rightarrow im(f_1|_{(s_1)}) = im(f_2|_{(s_2)})$

Observación 2.1.2. *Simpliciales son mapeos que definiremos en un tema más adelante.*

Observación 2.1.3. *La dimensión de un complejo simplicial K es el supremo de las dimensiones de los simpliciales K . Denotamos la unión de las imágenes de simpliciales en K por $|K|$ y llamamos $|K|$ el espacio subyacente de K*

Ejemplo 2.1.9. *Complejo Simplicial 1-dimensional*

Ejemplo 2.1.10. *Complejo Simplicial 2-dimensional*

Ejemplo 2.1.11. *Complejo Simplicial 3-dimensional*

2.2. Introducción Descomposición de Heegaard

*Una descomposición de Heegaard es en términos generales una descomposición de una 3-variedad en dos piezas simples llamadas **Handlebodies** (Haz de cuerpos).*

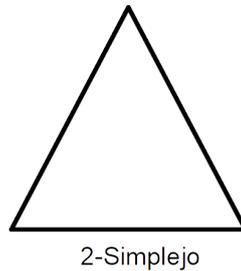


Figura 2.3: 2-simplejo estándar

2.2.1. Handle Decompositions.(Descomposición de manija)

Una handle decomposition de una 3-variedad es una forma particular de construir la 3-variedad. Existen handle decompositions para variedades de cualquier dimensión, Para variedades suaves, esto es consecuencia de que toda variedad admite una función de Morse.

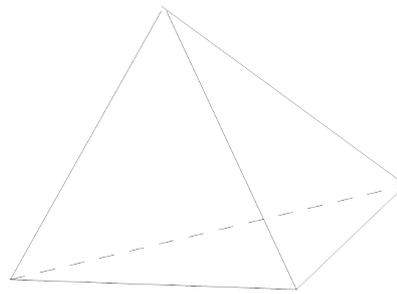
Definición 2.2.1.1. *En el entorno 3-dimensional, una k -handle es una 3-bola, considerada como $[0, 1]^3$, que está unida (a una subvariedad preexistente) a lo largo de $[0, 1]^{3-k} \times \partial[0, 1]^k$.*

Concretamente, un 0-handle es una 3-bola unida al conjunto vacío, pensamos en esto como una 3-bola que aparece de la nada. un 1-handle es una 3-bola atada a lo largo de $[0, 1]^2 \times \partial[0, 1]$, pensamos en esto como un cilindro sólido unido a lo largo de sus dos discos bordes. un 2-handle es una 3-bola unida a lo largo de $[0, 1] \times \partial[0, 1]^2$. pensamos en esto como un cilindro sólido unido a lo largo de la parte anular de su borde. Finalmente, un 3-handle es una 3-bola unida a lo largo de $\partial[0, 1]^3$, es decir, a lo largo de todo su borde. Pensamos en esto como una 3-bola que se usa para llenar un hoyo existente.

Definición 2.2.1.2. *Una Handle Decomposition de una 3-variedad M es una secuencia de 0-handles, 1-handles, 2-handles y 3-handles cuya unión es M*

En preliminares establecimos un teorema que garantiza la existencia de funciones de Morse en una variedad. esto garantiza la existencia de Handle Decomposition en la variedad. de las funciones de Morse se deduce que las variedades tienen Handle Decomposition en las que todas las 0-handles se unen antes que todas las 1-handles, todas las 1-handles se unen antes que las 2-handles y todas las 2-handles se unen antes de las 3-handles, y así sucesivamente.

Definición 2.2.1.3. *El núcleo de un k -handle 3-dimensional es $\{\frac{1}{2}\}^{3-k} \times [0, 1]^k$. El córnico es $[0, 1]^{3-k} \times \{\frac{1}{2}\}^k$*



3-simplejo

Figura 2.4: 3-simplejo estándar

Observación 2.2.1. *En el contexto de las 3-variedades, un k -handle a $(3 - k)$ -handle en el siguiente sentido. Un k -handle en una 3-variedad cerrada es una 3-bola unida a alguna subvariedad cerrada preexistente a lo largo de una parte de su borde, la porción restante de la 3-variedad se unirá al borde de la 3-variedad resultante.*

Dada una Handle Decomposition de una 3-variedad M (pensada como un procedimiento para construir M), podemos “invertir” el procedimiento para obtener la Handle Decomposition dual. Primero unimos lo que antes eran 3-handles, pero ahora están unidas a nada y, por lo tanto, son 0-handles. Luego adjuntamos lo que antes eran 2-handles, pero ahora están unidas a lo largo de dos discos y, por lo tanto, son 1-handles, etc. El núcleo de un k -handle en la Handle Decomposition es el núcleo del correspondiente $(3 - k)$ -handle cuando invertimos el procedimiento.

Definición 2.2.1.4. *Un handlebody es una 3-variedad Compacta, conexa y orientable con borde que posee una handle decomposition que consta de 0-handles y 1-handles. el género de un handlebody es su borde.*

Observación 2.2.2. *Una colección de discos meridianos para un handlebody es una colección de discos que cortan el handlebody en 3-bolas*

Ejemplo 2.2.1. *El handlebody que se muestra en la primera figura de este tema es un handlebody de género 1. También nos referimos a este handlebody como toro sólido.*

Ejemplo 2.2.2. *Cada handlebody tiene una colección de discos meridianos: comience con una handle decomposition que consista solo en 0-handles y 1-handles y tome el conjunto de núcleos de los 1-handles en esta handle decomposition. vea la siguiente figura.*

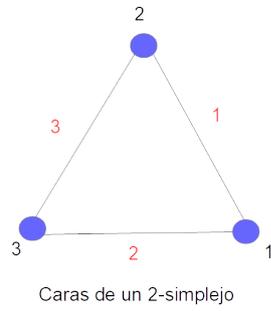


Figura 2.5: Identificación de caras de un 2-simplejo



Figura 2.6: Complejo Simplicial 1-dimensional

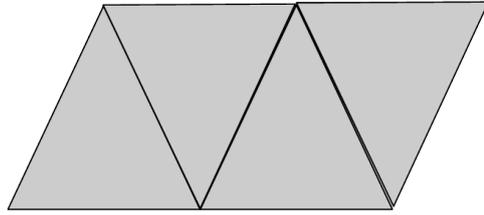


Figura 2.7: Complejo Simplicial 2-dimensional

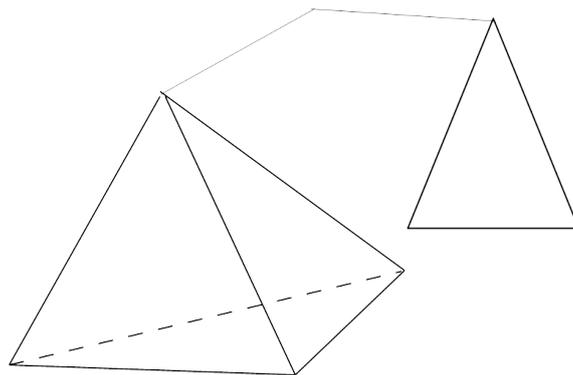


Figura 2.8: Complejo Simplicial 3-dimensional

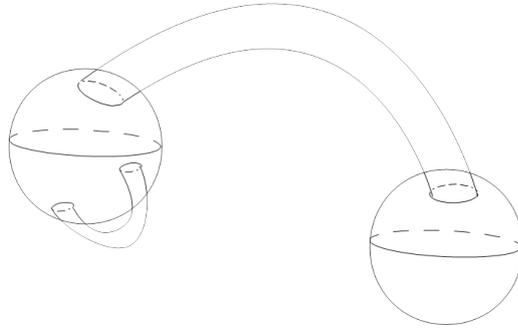
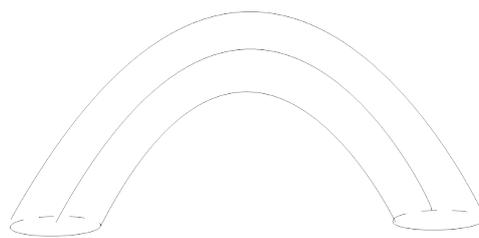
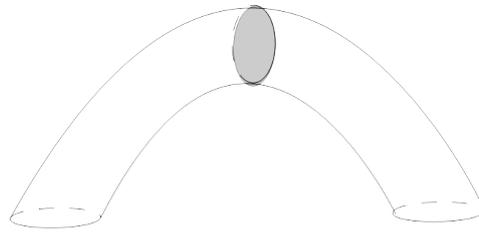


Figura 2.9: Dos 0 – *handles* y dos 1 – *handles*



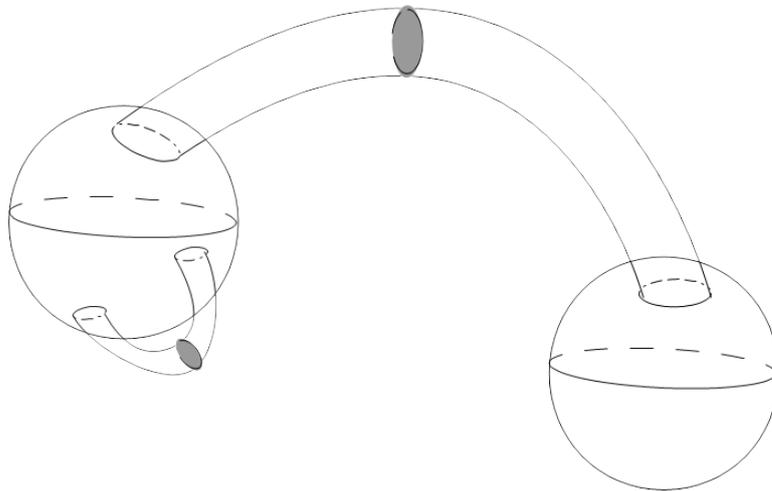
Núcleo de un 3-dimensional 1-handle

Figura 2.10: Núcleo



Conucleo de un 3-dimensional 1-handle

Figura 2.11: Conucleo



Un conjunto de discos meridianos para un handlebody

Figura 2.12: Conjunto de discos meridianos

Capítulo 3

Triangulación de 3-variedades y Aplicaciones

En este capítulo entraremos al objetivo de este trabajo como lo es la **Triangulación en 3-variedades**, vamos a dar algunas definiciones y propiedades con el fin de probar que toda 3-variedad se puede triangular. Luego abordaremos un tema llamado **Gluing o Pegado**, el cual nos dice que el pegado de simplejos pueden ser 3-variedades, así como algunas propiedades relacionadas con la triangulación. Para finalizar el capítulo veremos la **Descomposición de Heegaard** y algunas propiedades o teoremas.

3.1. Triangulación en 3-variedades

Empezaremos dando algunas ideas y definiciones de lo que es una triangulación con algunos ejemplos para luego abordar lo que son las triangulaciones en 3-variedades. Recordando algunas definiciones dadas en simplejos podemos dar la siguiente definición.

Definición 3.1.0.1. Una n -variedad triangulada es un par (M, K) , donde M es una n -variedad topológica y K es un complejo simplicial basado en M tal que

- $|K| = M$
- K es localmente finito, es decir, para todo subconjunto compacto C de M , El conjunto $\{f \in K : C \cap \text{im} f \neq \emptyset\}$ es finito.
- Para $f, g \in K$, restringida a simpliciales abiertos. El mapeo $g^{-1} \circ f$ es afín en su dominio.

En este caso a K le llamamos triangulación de M . para $f : [s] \rightarrow M$ un n -simplejo en K , el par $(\text{im} f, f^{-1})$ es llamado **Carta simplicial** de la triangulación. En este contexto, a menudo escribimos $K = \{(f_\alpha)\}$ y denotamos la colección de todas las cartas en M por $\{(\text{im} f_\alpha, f_\alpha^{-1})\}$, también nos referimos a f_α como un simplejo de M .

Ejemplo 3.1.1. La siguiente figura muestra una triangulación de S^2

Ejemplo 3.1.2. La figura a continuación presenta una triangulación de T^2

Teorema 3.1.1. Toda 1 – variedad compacta admite una triangulación

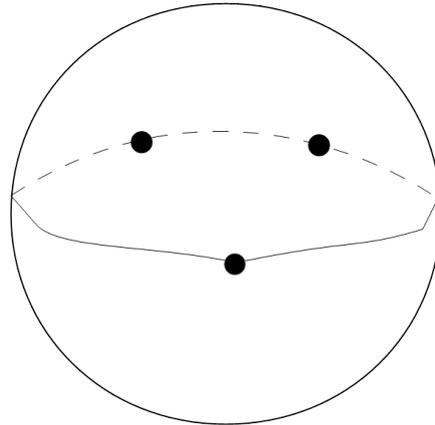


Figura 3.1: Triangulación de S^2

Teorema 3.1.2. *Toda 2 – variedad compacta admite una triangulación*
 Vea [2]

Primero iniciemos por ver que es una triangulación en una 3-variedad, la primera pregunta que deberíamos hacernos es ¿Qué significa exactamente que una 3-variedad pueda triangularse?, por una parte, significa que M es topológicamente equivalente a la geometría de 3-simplejo. Sin embargo, una noción más útil para nuestros intereses es que existe una partición de M de cierto tipo. si g es un elemento de la partición, \bar{g} es topológicamente equivalente a un tetraedro. Se usa un homeomorfismo de un tetraedro sobre \bar{g} para designar ciertas partes como aristas, vértices y caras. La partición es tal que si las clausuras de dos elementos tienen un punto en común, su intersección es una cara de cada uno, una arista de cada uno, o un vértice de cada uno. la suma de las caras forma un 2-esqueleto que corta a M en pedazos pequeños

Considere una colección localmente finita de tetraedros que llenan M tal que si dos de esos tetraedros tienen un punto en común, su intersección es un vértice, una arista, o una cara de cada uno. La colección de tales tetraedros (3-simplejos), caras (2-simplejos), caras (1-simplejo) y vértices (0-simplejo) se denomina **Triangulación T de M** . Cada uno de los tetraedros en T tiene una estructura lineal, y si dos tetraedros tienen una arista o cara en común, la estructura en esta arista o cara es la misma cuando se ve desde cualquiera de los dos tetraedros.

Definición 3.1.0.2. *Una triangulación de una 3-variedad M es una subdivisión de M en tetraedros topológicos que se tocan en vértices, aristas, o caras completas.*

Ejemplo 3.1.3. *La figura muestra un cubo triangulado. Puede interpretarse como una parte de una triangulación en T^3 . Obtenemos una triangulación de T^3 identificando ocho reflejos de este cubo elegidos apropiadamente. La triangulación resultante contiene cuarenta 3-simplejos*

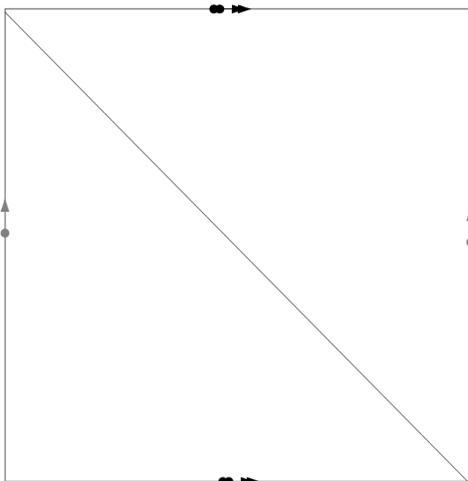


Figura 3.2: Triangulación de T^2

Definición 3.1.0.3. Una triangulación T' de M es llamada subdivisión de una triangulación T de M si cada tetraedro en T' es un tetraedro en algún elemento de T . Además si $T(U)$ es una triangulación de un subconjunto abierto U de M , tenemos que $T(U)$ es una subdivisión de T si cada tetraedro de $T(U)$ es un tetraedro en algún elemento de T . $T(U)$ puede tener infinitos elementos aunque T sea finito.

Definición 3.1.0.4. Dos triangulaciones T y T' son compatibles si tienen una subdivisión común. Ahora vamos a enunciar algunos teoremas y lemas necesarios para la demostración del teorema de triangulación en 3-variedades.

Lema 3.1.1. Supongamos que D es un disco topológico en E^3 que es localmente poliedrico mod n , puntos q_1, q_2, \dots, q_n en ∂D . y U un conjunto abierto conteniendo $\text{Int}D$ que es localmente poliedrico mod $\sum q_i$, (si $p \in \bar{U} \setminus \sum q_i$, hay una vecindad N de p tal que $N \cap U$ es la suma de una colección finita de interiores de tetraedros). Entonces hay una 2-esfera S topológica, tal que $S \cap D = \partial D$, $\text{Int}D$ se encuentra en el componente acotado de $E^3 - S$, $S \subset U + \partial D$, y S es localmente poliedrico mod $\sum q_i$.

Teorema 3.1.3. Supongamos U_1, U_2 son dos conjuntos abiertos de una 3-variedad con borde y T_1, T_2 son triangulaciones (quizas no localmente compatibles en $U_1 \cap U_2$) de U_1, U_2 respectivamente. Entonces hay una triangulación T_3 de $U_1 + U_2$ tal que cada tetraedro de T_1 en $U_1 - \bar{U}_2$ y cada tetraedro de T_2 en $U_2 - \bar{U}_1$, es un elemento de T_3 .

Observación 3.1.1. Las pruebas de estas propiedades no se mostraran ya que necesitan del desarrollo de algunas definiciones y proposiciones que no se veran en esta trabajo. Para saber más, vea [1].

Teorema 3.1.4. Toda 3-variedad con borde puede triangularse.

Demostración. Supongamos que M es una 3-variedad con borde. Dado que cada punto de M se encuentra en una vecindad O que es topológicamente equivalente a E^3 (espacio euclidiano \mathbb{R}^3) o a los puntos de E^3 sobre el plano zy o sobre el. Existe una secuencia de conjuntos abiertos O_1, O_2, \dots que cubren M tal que cada O_i puede ser triangulado.

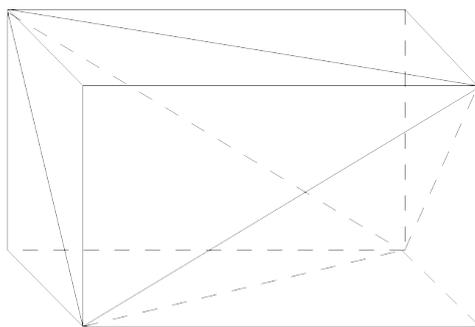


Figura 3.3: Porción de la triangulación de T^3

Sea U_1, U_2, \dots una secuencia monótona creciente de conjuntos abiertos que cubren a M , tal que \bar{U}_i es un subconjunto compacto de U_{i+1} . puede ser cubierto por un número finito de O_i 's. Se sigue del teorema 3.1.3 de que U_i se encuentran en un subconjunto abierto triangulado de M y por lo tanto, puede triangularse. por lemma 3.1.1, dado que $U_{i+2} - \bar{U}_i$ puede triangularse, también puede hacerlo cada uno de los conjuntos abiertos $U_2 + (U_4 - \bar{U}_2) + (U_6 - \bar{U}_4) + \dots$ y $(U_3 - \bar{U}_1) + (U_5 - \bar{U}_3) + \dots$, Nuevamente por teorema 3.1.3 se sigue que su suma se puede triangular. ■

3.2. Gluing o Pegado

Como hemos visto en la triangulación en 3-variedades podemos describir éstas a través de poliedros (tetraedros).

Primero consideremos pegados de simplejos, luego pegados de poliedros convexos, que son más comunes en la práctica. Recuerde que un n -simplejo σ es la cáscara convexa de $n+1$ puntos independientes v_0, \dots, v_n (en algún espacio afín, necesariamente de dimensión al menos n).

Como ya hemos visto una cara 0-dimensional es un vértice, una cara 1-dimensional se llama arista de σ . El interior de un simplejo es lo que queda cuando quitas sus caras propias; también se puede definir como el interior topológico de un simplejo considerado como un subconjunto de su cáscara afín.

Ahora daremos la definición de un complejo simplicial diferente a la dada anteriormente que nos ayudara a comprenderla un poco mejor, ya que la necesitaremos en el desarrollo de este tema.

Definición 3.2.0.1. *Un **Complejo Simplicial** es una colección localmente finita K de simplejos (en algún espacio afín) que satisface las siguientes dos condiciones.*

1. *Cualquier cara de un simplejo en K también está en K*

2. La intersección de dos simplejos en K esta vacia o es una cara de ambos.

La unión de dos simplejos en K se denomina poliedro en K y se denota por $|K|$ y él k -esqueleto es un sub complejo que consta de simplejos de dimensión k o menor

Si un complejo simplicial tiene un número finito de simplejos, cuya unión forma un

conjunto convexo, recuperamos la conocida noción de un poliedro convexo, definido, por ejemplo, como el envolvente convexo de un conjunto finito de puntos. Cuando hablamos de un poliedro convexo nos referimos a esta noción, aunque no se mencione explícitamente esa finitud.

Dado un mapeo de los vértices de un complejo simplicial a un espacio afín, hay una única forma de extenderlo al poliedro del complejo para que el mapeo sea afín dentro de cada simplejo. Tal mapeo le llamaremos **Simplicial**. Naturalmente, queremos considerar dos complejos simpliciales isomorfos si existe un homeomorfo simplicial entre los dos.

Definición 3.2.0.2. Una subdivisión de un complejo simplicial K es cualquier complejo K' que tenga el mismo poliedro de K y tal que todo simplejo en k' este contenido en algún simplejo de K .

Definición 3.2.0.3. La subdivisión Baricéntrica es el procedimiento de subdivisión mas comun. Se define por inducción sobre el k -esqueleto, para valores crecientes de k . para subdividir un k -simplejo σ tomamos como un nuevo vertice el medio de los vertices de σ , y eliminamos la subdivisión definida previamente del borde de σ .

Se dice que el poliedro de un complejo simplicial, o un espacio homeomorfo a él, está triangulado por el complejo. Más exactamente, una triangulación de un espacio topológico X es un complejo simplicial K , junto con un homeomorfismo $f : |K| \rightarrow X$, varios de los conceptos definidos para complejos simpliciales se pueden transferir a X mediante el homeomorfismo.

Entre los espacios triangulados se encuentran los que se obtienen pegando simplejos.

Definición 3.2.0.4. Un pegado n -dimensional (rectilineo) consiste en un conjunto finito de n -simplejos, una elección de pares de simplejos tal que cada cara aparece en exactamente uno de los pares.

Nos interesa el espacio cociente de la unión de los simpliciales por la relación de equivalencia generada por las funciones de identificación. Este espacio cociente en sí mismo a veces se llama pegado. Lo convertimos en un complejo simplicial incrustándolo en espacio afín, de tal manera que cada simplejo de la subdivisión baricéntrica de los componentes simpliciales este incrustado por afinidad.

Observación 3.2.1. En un pegado de 3-dimensionales simpliciales, cada arista entra exactamente en dos pegados, uno por cada una de sus caras. Al componerlos, se obtiene un ciclo de pegados que eventualmente deben volver al borde original.

Observación 3.2.2. Un pegamiento es una variedad. Esto se puede ver facilmente para dimension dos sin embargo para dimensiones mayores necesitamos de algunas definiciones que no veremos en esta investigacion como lo son nociones de enlace y estrella de un simplejo. si σ es un simplejo en un complejo simplicial K sean τ_1, \dots, τ_k los simpliciales de K que contienen a σ , para cada τ_i , sea σ_i el simplejo opuesto a σ en τ_i , en el sentido que $\sigma \cap \sigma_i = \emptyset$ y τ_i es la cascara convexa de σ en τ_i . el enlace de σ denotado por $lk\sigma$, es complejo simplicial que consta de σ_i , la estrella $st\sigma$ es la union de los interiores de τ_i .

Ejemplo 3.2.1. (Cono sobre enlace). El cono en un espacio topológico X que denotamos por CX , es el producto $X \times [0, 1]$ con $X \times \{1\}$ colapsado en un punto. si σ es un p -simplejo en un complejo simplicial K , un punto en el interior de σ tiene $st\sigma$ como un vecindario en $|K|$ y $st\sigma$ es homeomorfo a $D^p \times C|lk\sigma|$.

Teorema 3.2.1. Los enlaces esféricos implican variedades Sea X un espacio triangulado de dimensión n . si el enlace de cada simplejo de dimensión p es homeomorfo a una esfera $(n - p - 1)$ -esfera, X es una variedad topológica.

Demostración. por ejemplo anterior todo punto en X tiene una vecindad de la forma $D^p \times CS^{n-p-1}$, que es homeomorfa $D^p \times D^{d-p}$, ya que el cono de la esfera es una bola. estas vecindades cubren a X , así X es una variedad. ■

Observación 3.2.3. Sería natural suponer que lo contrario del teorema también es cierto pero este no es el caso si $n > 5$. Los primeros contraejemplos fueron encontrados por **R.D. Edwards**. El ejemplo que veremos más adelante brinda un contraejemplo algo diferente, encontrado por Cannon. (El criterio correcto es este: El poliedro de un complejo simplicial es una variedad topológica si y solo si el enlace de cada celda tiene la homología de una esfera, y el enlace de cada vertice es simplemente conexo. La prueba de esto va más allá de lo que tratamos en esta investigación.

Teorema 3.2.2. Una variedad obtenida por pegado es orientable si y solo si cuando las caras de cada simplejo están orientadas consistentemente. todas las identificaciones de caras son de orientación inversa.

En tres dimensiones, este tipo de cosas pueden suceder:

Teorema 3.2.3. (Las variedades tienen enlaces esféricos en la dimensión tres) . Un pegado 3-dimensional es una 3-variedad si y solo si el enlace de cada vertice es homeomorfo a S^2

Demostración. La parte "si". Es cierta para cualquier espacio triangulado. como se menciona después de uno de los teoremas anteriores para pegados tridimensionales, es fácil ver que el enlace de un borde debe ser un círculo, por lo que podemos utilizar el teorema 3.2.1.

Para el regreso necesitamos alguna prueba de que las no variedades fallaran. y optamos por la conexidad local simple. Un espacio topológico X es (localmente) simplemente conexo en $x \in X$ si para cada cualquier vecindad U de x hay una vecindad más pequeña $V \subset U$ tal que $V \setminus \{x\}$ es simplemente conexa. Las variedades de dimensión mayor que dos claramente están simplemente conectadas en todas partes.

Si X es un pegado 3-dimensional y v es un vertice de X , el enlace de v es un pegado 2-dimensional y por lo tanto una variedad. claramente X es simplemente conexo en v si y solo si lkv es simplemente conexo. Ya que la única superficie cerrada simplemente conexa es S^2 . Concluimos que si el enlace de v no es una esfera, X no es una variedad. ■

Observación 3.2.4. Incluso si un pegado 3-dimensional no es una variedad, puede convertirse en una eliminando los vertices cuyos enlaces no son esferas. Alternativamente, podemos eliminar una vecindad abierta de cada vertice malo, para obtener una variedad compacta con borde.

Teorema 3.2.4. (*Un pegado es una 3-variedad si y solo si $\chi = 0$*)

Un pegado tridimensional X es una 3-variedad si y solo si la característica de Euler es cero. en general, si X tiene k vértices v_1, \dots, v_k , tenemos que

$$\chi(X) = k - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \chi(lkv_i)$$

Demostración. Sea e, f y t el número de aristas, caras, tetraedros en X entonces $f = 2t$, ya que cada cara se encuentra sobre dos tetraedros y cada tetraedro tiene cuatro caras. También tenemos

$$\sum_{i=1}^k \chi(lkv_i) = 2e - 3f + 4t$$

Dado que cada arista representa dos vértices en enlaces de vértices, cada cara representa tres aristas y cada tetraedro cuatro caras, se obtiene la igualdad deseada.

dado que la característica de Euler de la 2-esfera es 2, y la característica de Euler de cualquier otra superficie cerrada es menor que 2, obtenemos $\chi(X) > 0$ con igualdad si y solo si X es una variedad. ■

Hasta ahora solo hemos considerado pegados simples, y solo por mapeos afines. ¿Qué sucede cuando permitimos pegados de poliedros convexos arbitrarios, mediante mapeos arbitrarios? ¿La topología del espacio de identificación está determinada solo por el patrón de pegado, o depende de la elección particular de un pegado?.

El conjunto de vértices de un poliedro convexo es el único conjunto mínimo de puntos cuya cascara convexa es el poliedro; una cara es una intersección del poliedro convexo con un medio-espacio, que tiene una dimensión menor que la dimensión del poliedro. una **faceta** es una cara de codimensión uno.

Dos poliedros convexos son combinatoriamente equivalentes si existe una correspondencia uno a uno de sus caras de cada dimensión que conserva la incidencia. Así, los vértices están en correspondencia uno a uno. Cada arista de un poliedro corresponde a una arista del otro poliedro con vértices correspondientes; etc.

Si α es una equivalencia combinatoria entre los poliedros, P, Q un homeomorfismo $h : P \rightarrow Q$ está en la clase combinatoria de α si h envía cada cara de cada dimensión a la cara especificada por α . Es fácil ver que cada equivalencia combinatoria puede ser realizada por un homeomorfismo en su clase combinatoria. Pero por supuesto no todos los homeomorfismos están en la clase combinatoria de una equivalencia combinatoria.

Ahora considere un conjunto finito de clases combinatorias de poliedros convexos n -dimensionales. Un patrón de pegado es una elección de pares de facetas del poliedro (Cada faceta aparece exactamente en uno de los pares), junto con una equivalencia combinatoria entre las facetas de cada par. Un pegado que realiza este patrón es una colección de poliedros convexos, reales de los tipos combinatorios dados, y una elección de homeomorfismos reales entre las caras en las clases de equivalencia combinatoria dadas.

Sin embargo, no sirve cualquier elección de homeomorfismos: existe una condición de compatibilidad. Cualquier cara de β de dimensión $n - 2$ o menos es una cara de dos o más facetas, por lo que entra en dos o más emparejamientos. Las composiciones de las diversas identificaciones darán como resultado la identificación de β con posiblemente muchas otras caras. Un poco de reflexión muestra que siempre habrá cadenas de estas identificaciones que llevan β en sí mismo. La condición de compatibilidad es esta: Para cualquier cara β y cualquier cadena de identificaciones cuya composición recupere β en la clase combinatoria de la identidad, la identificación compuesta debe ser realmente la identidad.

Definición 3.2.0.5. Una subdivisión baricéntrica de un poliedro se define como la subdivisión baricéntrica de un simplejo, tomándose arbitrariamente nuevos vértices en el interior de las caras correspondientes.

Teorema 3.2.5. Unicidad de pegados

1. Un homeomorfismo de la bola unitaria en \mathbb{R}^n que es la identidad en su borde es isotópico a la identidad.
2. Dos pegados cualesquiera que realicen un patrón de pegado dado producen espacios de identificación homeomorfos.

Observación 3.2.5. El espacio dodecaédrico de Poincaré. Cada cara pentagonal de un dodecaedro tiene una cara opuesta, Pero las esquinas de los pentagonos opuestos se intercalan entre si. Si una cara se pega a su cara opuesta en una decima de revolución en el sentido de las agujas del reloj, el espacio resultante es el espacio dodecaédrico de Poincaré. Los bordes se pegan en triples en este patron, para que el pegado funcione geoméricamente, Debemos partir de un dodecaedro esférico, con ángulos iguales a 120 grados. Este sólido ligeramente hinchado se muestra en la siguiente imagen en la parte derecha bajo una proyección estereográfica.

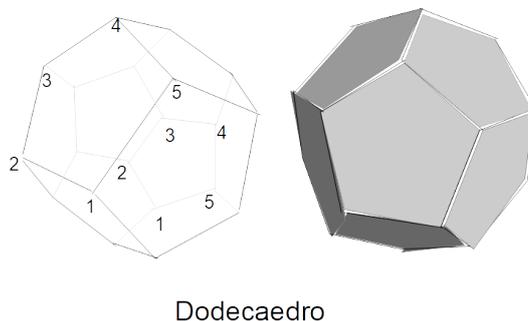


Figura 3.4: Dodecaedro y su proyección estereográfica

Ejemplo 3.2.2. (Doble suspensión de Poincaré)

La suspensión KX de un espacio topológico X es el producto $X \times [0, 1]$ y $X \times \{1\}$ colapsados en un punto, llamado punto de suspensión. Por ejemplo, La suspensión de la n – esfera es la $(n + 1)$ – esfera.

Sea P el espacio dodecaédrico de Poincaré convertido en un complejo simplicial. La suspensión KP no es una variedad, por que el enlace del punto de suspensión es el mismo P , por que no es simplemente conexo. Pero sorprendentemente la doble suspensión $K^2P = KKP$ es homeomorfo a S^5 . Esto muestra que la inversa del teorema 3.2.1 es falsa, por que a lo largo del círculo de suspensión, La suspensión de los puntos de suspensión, los enlaces de vertices, y aristas no son esferas. Los enlaces de vertices en el círculo de suspensión son homeomorfos a KP que es simplemente conexo, por lo que esto no impide que K^2P sea una variedad. Los enlaces de las aristas en el círculo de suspensión son homeomorfos a P , que no es simplemente conexo; Esto puede parecer una obstrucción pero resulta que no lo es.

El número de posibles pegados de poliedros crece muy rápido con el número de facetas.

3.3. Aplicación

3.3.1. Descomposición de Heegaard

Definición 3.3.1.1. Una descomposición de Heegaard de una 3-variedad cerrada M es una Descomposición $M = V \cup_S W$ tal que

1. V, W son handlebodies y
2. $S = \partial V = \partial W$

Aquí S se llama la superficie de división de $M = V \cup_S W$.

Definición 3.3.1.2. Dos descomposiciones de Heegaard se consideran equivalentes si sus descomposiciones de superficies son isotópicas. El género de una descomposición de Heegaard es el género de S

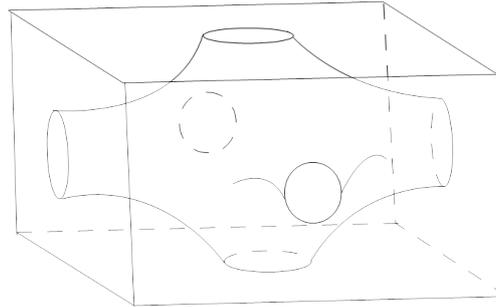
Pensamos en los handlebodies V, W pegados a lo largo de S para crear M .

Ejemplo 3.3.1. La 3-esfera tiene una descomposición de Heegaard de género 0: pensamos que S^3 consiste en aquellos puntos en \mathbb{R}^4 que tienen una distancia 1 desde el origen. El subespacio dado por $W = 0$ corta a S^3 en una 2-esfera. Esta 2-esfera separa a S^3 en dos 3-bolas, cada una de ellas con un handlebody de género 0.

Ejemplo 3.3.2. Si se pegan dos toros sólidos T_1, T_2 , se pegan de tal manera que un meridiano de T_1 se identifica con una longitudinal de T_2 , entonces el resultado es S^3 . Esto describe una división de Heegaard de género 1 de S^3 .

Ejemplo 3.3.3. Como en el ejemplo anterior considere dos toros sólidos T_1, T_2 . Si los dos toros sólidos se pegan de tal manera que un meridiano de T_1 se identifica con un nudo (p, q) – torus, entonces el resultado es un espacio lente, Mas específicamente, Una Descomposición de Heegaard de género 1 del espacio lente $L(p, q)$.

Ejemplo 3.3.4. Podemos describir una descomposición de Heegard de un 3-toro $S^1 \times S^1 \times S^1$ de la siguiente manera: Pensamos en el 3-toro como un espacio cociente obtenido de identificar los lados opuestos de un cubo. Denote una vecindad regular del 1-esqueleto del cubo por V y denote la clausura de su complemento por W . Entonces tanto V como W son handlebodies. los dos handlebodies se encuentran en la superficie S del genero 3. Vea la siguiente figura.



Descomposición De Heegaard de un 3-toro

Figura 3.5: Descomposición de un 3 – toro

Teorema 3.3.1. Toda 3-variedad cerrada y orientable admite una descomposición de Heegaard.

Observación 3.3.1. Para este teorema se tienen dos formas de demostrarlo veamos un resumen de estas dos versiones a continuación.

Demostración. 1. **(Versión 1)**

Este teorema se deriva de dos hechos

- a) Toda 3-variedad admite una handle decomposition en la que todas las 0-handles se unen antes que las 1-handles, que a su vez se unen antes que todas las 2-handles, que a su vez se unen antes que las 3-handles.
- b) Las 2-handles son duales a las 1-handles y las 3-handles son duales a 0-handles.

Los 0-handles y 1-handles en un handle decomposition proporcionan un handlebody, y los 2-handles y 3-handles de forma dual proporcionan el otro. con lo que finaliza la prueba.

2. Versión 2

Sea M una 3-variedad cerrada. Entonces M admite una triangulación (M, K) . Sea $V = N(K^1)$. Entonces V es un handlebody. A partir de esto no es difícil ver que la clausura, W , del complemento de V es un handlebody. Ver siguiente figura.

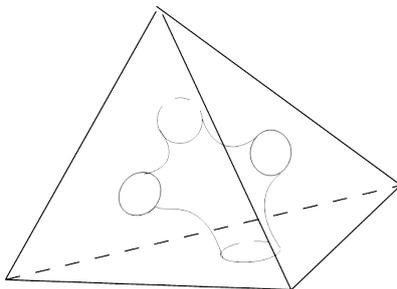


Figura 3.6: Imagen local de la Descomposición de Heegaard

Definición 3.3.1.3. Cubos con asas Se obtienen uniendo bolas sólidas por medio de cilindros sólidos (los pegados pueden preservar o invertir la orientación). Un cubo con n asas orientable es homeomorfo a un n -toro sólido

Definición 3.3.1.4. Sean M una 3-variedad cerrada, conexa y orientable y $F|M$ una superficie cerrada, conexa y orientable. Si la cerradura de cada una de las componentes de $M|F$ es un cubo con asas de género g decimos que $(M; F)$ es una descomposición de Heegaard de M de género g

Teorema 3.3.2. Toda 3-variedad cerrada, conexa y orientable M se puede descomponer como la unión de dos cubos con asas pegados a lo largo de sus fronteras.

Demostración. (idea de la prueba). La vecindad regular del 1-esqueleto de la triangulación es un cubo con asas (esta formada por bolas unidas por cilindros sólidos). El complemento de ese cubo con asas es otro cubo con asas (formado por las bolas en medio de los tetraedros, unidas por las caras de los tetraedros). Y la figura que los une es el borde del primer cubo con asas.

■

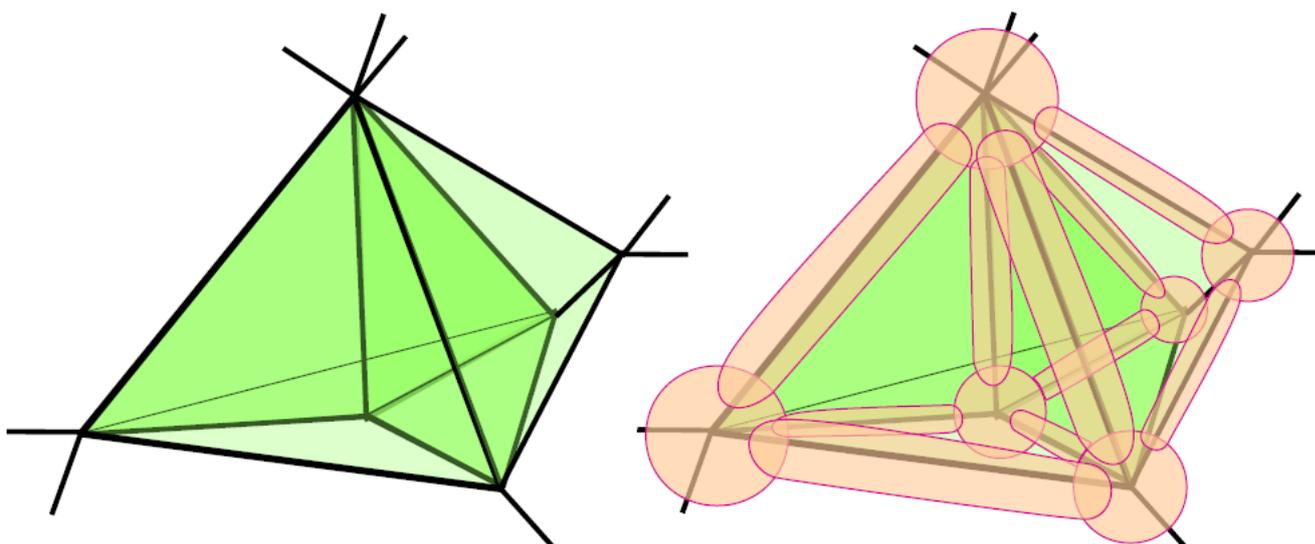


Figura 3.7: Imagen obtenida de [4]

Conclusiones

Con la finalización de este trabajo podemos enlistar un conjunto de resultados obtenidos:

- Toda 3-variedad con borde puede triangularse en tetraedros (3-simplejos) que se tocan en vértices, aristas o caras completas.
- un pegado es una 3-variedad si y solo si $\chi = 0$ y en general si X tiene k vértices tendremos que

$$\chi(X) = k - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \chi(lk v_i)$$

- Toda 3-variedad cerrada y orientable admite una descomposición de heegaard. donde separa a M en dos handlebodies que cumple que $S = \partial V = \partial W$ donde S es la superficie que corta a M , y V, W son handlebodies.
- En general, concluimos que la triangulación es muy importante y sirve de base para muchos temas aparte de los mencionados en este trabajo.

Referencias bibliográficas

- [1] Bing, R. H. (1959). An Alternative Proof that 3-Manifolds Can be Triangulated. *Annals of Mathematics*, 69(1), 37–65. <https://doi.org/10.2307/1970092>
- [2] Jennifer Shultens. Introduction to 3-Manifolds (Graduate Studies in Mathematics) (Graduate Studies in Mathematics, 151)
- [3] William P. Thurston, Silvio Levy - Three-Dimensional Geometry and Topology, Vol. 1-Princeton University Press (1997)
- [4] 3-variedades, Max Neumann Coto, Instituto de Matemáticas UNAM, Cuernavaca. <https://www.matem.unam.mx/max/Minicursos/3variedades/2-Triangulaciones.pdf>