

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y  
MATEMÁTICA  
SECCIÓN DE MATEMÁTICA**



**INFORME FINAL DEL CURSO DE ESPECIALIZACIÓN:  
ESPECIALIZACIÓN EN 3-VARIEDADES Y NUDOS TOPOLÓGICOS**

**TÍTULO DEL INFORME FINAL:  
LA CONJETURA DE POINCARÉ**

**PARA OPTAR POR EL GRADO ACADÉMICO DE:  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

**PRESENTADO POR:  
CARLOS ADALBERTO MELÉNDEZ GARCÍA N° CARNÉ MG16025**

**DOCENTE ASESOR:  
M.SC. JOSÉ JOAQUÍN APARICIO RAMÍREZ**

**OCTUBRE DE 2023**

**SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR AUTORIDADES**

**RECTOR:**

MAESTRO ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

**VICERECTOR ACADÉMICO:**

DR. RAÚL AZCÚNAGA

**VICERECTOR ADMINISTRATIVO:**

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA

**SECRETARIO GENERAL:**

ING. FRANCISCO ALARCÓN

**DEFENSOR DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS:**

LIC. LUIS ANTONIO MEJÍA LIPE

**FISCAL GENERAL:**

LICDO. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR AUTORIDADES**

**DECANO:**

LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RIOS BENÍTEZ

**VICEDECANO:**

LIC. OSCAR VILLALOBOS

**SECRETARIO:**

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA

**DIRECTOR GENERAL DE PROCESOS DE GRADO:**

LIC. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA

**JEFA DE DEPARTAMENTO:**

LICDA. KARLA MARÍA MEJÍA ORTÍZ

**COORDINADORA GENERAL DE PROCESOS DE GRADO:**

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

## Resumen

La conjetura de Poincaré es un problema topológico establecido en 1904 por el matemático francés Henri Poincaré. Caracteriza esferas tridimensionales de una forma muy sencilla. Utiliza solo el primer invariante de la topología algebraica, el grupo fundamental, que también fue definido y estudiado por Poincaré. La conjetura implica que si un espacio no tiene agujeros esenciales, entonces es una esfera. Este problema fue resuelto directamente entre 2002 y 2003 por Grigori Perelman, y como consecuencia de su demostración de la conjetura de la geometrización de Thurston, que culminó en el camino propuesto por Richard Hamilton.

En esta investigación, daremos una demostración de la Conjetura de Poincaré a través de la conjetura de la geometrización. Este trabajo depende de los trabajos acumulativos de muchos analistas geométricos y de topólogos en los últimos treinta años.

**Palabras Clave:** Topología; conjetura; simplemente conexo; homeomorfismo.

# Abstrac

The Poincaré conjecture is a topological problem established in 1904 by the French mathematician Henri Poincaré. It characterizes three-dimensional spheres in a very simple way. Use only the first invariant of algebraic topology, the fundamental group, which was also defined and studied by Poincaré. The conjecture implies that if a space has no essential holes, then it is a sphere. This problem was solved directly between 2002 and 2003 by Grigori Perelman, and as a consequence of his proof of the Thurston geometrization conjecture, which culminated in the path proposed by Richard Hamilton.

In this investigation, we will give a proof of the Poincaré Conjecture through the geometrization conjecture. This work depends on the cumulative works of many geometric analysts and topologists in the last thirty years.

**Keywords:** Topology; conjecture; simply connected; homeomorphism.

# Introducción

El presente trabajo de investigación ha sido realizado con la intención de obtener de in- formarles mas a detalle sobre Jules Henri Poincaré quien fue un matemático francés del siglo XIX y destacó no solo por su trabajos matemáticos sino también por su labor como físico, científico teórico y también filósofo. Entre sus trabajos más importantes es Física destacan aquellos relacionados con la teoría de luz y las ondas electromagnéticas.

En cuento a las Matemáticas se refiere, destacó por sus trabajos matemáticos en el campo de la Topología (rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen constantes cuando se aplican transformaciones continuas, el ejemplo más común es el de una taza y un donut, ambos cosas son lo mismo topológicamente ya que tienen un único agujero). En 1894 estableció el grupo fundamen- tal de un espacio topológico. Pero por lo que mayormente se le conoce, es por uno de los problemas más famosos (considerado uno de los “Siete Problemas del Milenio) y re- sueltos actualmente (en el año 2002), conocido como la conjetura o la hipótesis de Poincaré.

Henry Jules Poincaré fue, y sigue siendo, uno de los matemáticos más importantes de la historia. Nacido en Francia en el año 1854, de gran inteligencia y memoria, poseía unas exquisitas cualidades para la Matemática. Por un lado, era capaz de trabajar sobre sus problemas ahondando en ellos en su cabeza, previamente al desarrollo de los mismos so- bre papel. Además, se centraba en el manejo de principios básicos, de los que hac ía uso inspirándose en sus puras intuiciones, y con el objetivo de obtener y proporcionar resul- tados. Esto no quiere decir que Poincaré no fuese un hombre preocupado por el rigor y la buena fundamentación de las matemáticas, sino todo lo contrario. Tanto fue así, que llegó a desarrollar un punto de vista filosófico con respecto a este tema.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1. Conceptos .....	8
1.1.1. Lazos y equivalencia de lazos .....	9
1.1.2. Homotopía .....	11
1.2. Enunciado de la Conjetura de Poincaré .....	12
1.3. Variedad dodecaedral de Poincaré .....	13
1.4. Clasificación de 3-Variedades .....	15
1.5. Un resultado previo al de Poincaré .....	16
1.6. Problema inicial de Poincaré .....	18
1.7. Un cambio en el enfoque de la Conjetura .....	23
1.8. Extensión de la Conjetura a dimensiones superiores .....	28
1.9. La Conjetura de Poincaré diferenciable .....	29
<b>2. De la Conjetura al Teorema: Demostración de la Conjetura de Poincaré</b>	<b>32</b>
2.1. Problema de Clasificación de 3-variedades .....	32
2.1.1. Descomposición en primos o por esferas .....	32
2.1.2. Descomposición tórica .....	34
2.1.3. La Conjetura de Geometrización de Thurston .....	39
<b>Conclusiones</b>	<b>42</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>

# Capítulo 1 Preliminares

En esta sección se estudiará se tratará de explicar como los intentos de demostrar la conjetura de Poincaré produjeron avances significativos en la teoría de 3-variedades

## 1.1. Conceptos

**Variedad** : Es una generalización de curva y superficie a espacios de mayor dimensión. Una curva en el plano  $\mathbb{R}^2$  (recta, parábola. . . ) es una 1- variedad, una superficie en  $\mathbb{R}^3$  (esfera, cilindro. . . ) es una 2-variedad, y así sucesivamente. Por tanto, una 3-variedad es un objeto matemático de  $\mathbb{R}^4$  (sí, un espacio de 4 dimensiones). Un apunte: en todos los casos se toman los bordes de la figura. Por ejemplo, cuando hablemos de la esfera estaremos considerando la superficie exterior, es decir, la parte interior no cuenta. No es una esfera maciza, es simplemente la parte externa.

**Compacto**: Cerrado y acotado. Las definiciones matemáticas de estos dos conceptos no nos hacen falta, nos podemos quedar con las definiciones intuitivas que todo el mundo tiene. .

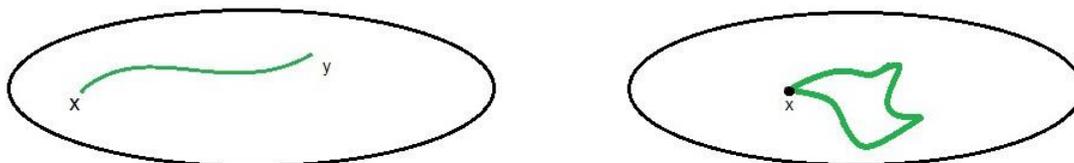
**Simplemente conexo**: Para el caso que nos ocupa nos podemos quedar con que esto significa que la variedad en cuestión no tiene agujeros. Un ejemplo para entender mejor esto: la 2-variedad  $S^2$  (la esfera tal y como todos la conocemos) es simplemente conexa, pero la 2-variedad  $T^2$  (un toro) no lo es, ya que tiene un agujero en medio.

### 1.1.1. Lazos y equivalencia de lazos

**Definición 1.1** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0$  e  $y_0$  dos puntos en  $X$ . Decimos que  $\alpha$  es un camino en  $X$  entre  $x_0$  e  $y_0$  si  $\alpha$  es una aplicación continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x_0$  y  $\alpha(1) = y_0$ . Si  $x_0 = y_0$  diremos que  $\alpha$  es un lazo con base en  $x_0$ .

**Definición 1.2** Llamamos soporte del camino  $\alpha$  (o del lazo  $\alpha$ ) al conjunto en  $X$  formado por la imagen de  $\alpha$ , es decir,  $\alpha([0, 1])$ .

A partir de ahora hablaremos de soporte del camino y de camino como aplicación continua indistintamente (análogamente para lazos).



En la primera figura se muestra un camino entre  $x$  e  $y$ , y en la segunda un lazo con base en  $x$ .

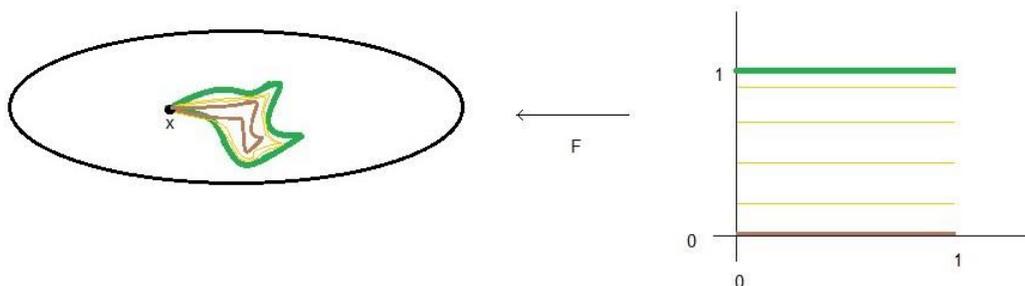
**Observación 1.3** Denotaremos por  $c_*$  al lazo constante con base en  $x$ .

$$c_* : [0, 1] \rightarrow X \quad c_*(t) = x \quad \forall t \in [0, 1]$$

**Definición 1.4** Dados dos lazos  $\alpha$  y  $\beta$  en  $X$  con base en  $x \in X$ , se define su composición de la siguiente forma:

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Definición 1.5** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos lazos con misma base en  $y$ , incluidos en un espacio topológico  $X$ . Se dice que  $\alpha$  y  $\beta$  son homótopos si existe una homotopía entre ellos, es decir, si existe una aplicación  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  que cumple las siguientes propiedades  $F(t, 0) = \alpha(t)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $F(1, t) = \beta$ ,  $\forall t \in [0, 1]$  y  $F(0, s) = F(1, s) = y$ , para todo  $s \in [0, 1]$



En la figura se presenta cómo sería intuitivamente una posible homotopía entre los lazos verde y marrón con base en  $x$ .

**Lema 1.6** Una homotopía entre lazos es una relación de equivalencia.

**Definición 1.7** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x \in X$ . Llamaremos Grupo de Poincaré o Grupo fundamental de  $X$  en  $x$ ,  $\pi_1(X; x)$  al conjunto de las clases de equivalencia de lazos en  $x$  generadas por la relación de equivalencia descrita anteriormente, dotado de la operación siguiente

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$$

**Teorema 1.8** Sea  $X$  un espacio topológico y sean  $x, y \in X$ . Si existe un camino en  $X$  de  $x$  a  $y$ , entonces  $\pi_1(X; x)$  es isoformo a  $\pi_1(X; y)$ . Además, si  $X$  es conexo por caminos, entonces  $\pi_1(X; x)$  es isomorfo a  $\pi_1(X; y)$  para todo  $x, y \in X$ .

**Definición 1.9** Se llama Grupo Fundamental de un espacio topológico  $X$  conexo por caminos, y se denota por  $\pi_1(X)$ , al Grupo fundamental de  $X$  en un punto cualquiera de dicho espacio topológico.

**Definición 1.10** Se dice que un espacio topológico es simplemente conexo si es conexo por caminos y  $\pi_1(X) = [c^*]$ , es decir, si todo lazo sobre dicho espacio topológico es borde de un disco.

### 1.1.2. Homotopía

**Definición 1.11** Dos aplicaciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas ( $f \simeq g$ ) si existe otra aplicación continua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que:

$$H(x, 0) = f(x)$$

$$H(x, 1) = g(x)$$

**Definición 1.12** Dos espacios  $X$  e  $Y$  tienen el mismo tipo de homotopía si existen dos aplicaciones  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f \simeq Id_X$  y  $f \circ g \simeq Id_Y$

## 1.2. Enunciado de la Conjetura de Poincaré

### Conjetura de Poincare:

Una  $n$ -variedad es un espacio en el que cada punto tiene un entorno que es una bola  $n$ -dimensional. Por tanto en una 3-variedad cada punto tiene un entorno que es una bola de dimensión tres, igual que el espacio que nos rodea. Por eso todas las 3 variedades tienen localmente el mismo aspecto, sin embargo su forma global puede ser variada. Si queremos conocer esta forma global nos encontramos con el inconveniente de que nuestra visión tridimensional es incapaz de abarcar una 3-variedad cerrada de un vistazo. Para entender esta limitación, usamos el truco habitual de bajar una dimensión menos.

Debemos pensar en 2-variedades, es decir superficies, espacios en los que cada punto tiene un entorno que es un disco. Las superficies compactas están clasificadas desde el siglo XIX, por su orientabilidad y género.

Por lo que estamos aplicando los siguientes conceptos topológicos:

- El grupo fundamental, formado por las clases de equivalencia de caminos cerrados que empiezan y terminan en el mismo punto de una superficie, la distingue de cualquier otra.
- La esfera  $S^2$  es la única superficie cerrada (compacta y sin borde) en la que todo lazo (camino cerrado) se contrae a un punto.
- La esfera  $S^2$  es la, única superficie cerrada en la que toda curva simple cerrada bordea a un disco.
- La esfera  $S^2$  es la única superficie cerrada en la que toda curva cerrada bordea.

En 1900 Poincaré planteó un resultado igual al anterior, pero en dimensión 3. Igual que la esfera  $S^2$ , el borde de la bola  $B^3$ , está formada por los vectores unitarios del espacio euclídeo  $E^3$ .

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

la esfera  $S^3$  está formada por los vectores del espacio euclídeo  $E^4$

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

La cuestión de Poincaré fue la siguiente:

- Una variedad de dimensión 3 cerrada (compacta y sin borde), en la que todo lazo es el borde de una superficie inmersa, es la esfera  $S^3$ .

En un lenguaje más natural diríamos así:

- Si una variedad de dimensión 3 cerrada (compacta y sin borde), tiene el tipo de homología de la esfera  $S^3$ , es la esfera  $S^3$ .

### 1.3. Variedad dodecaedral de Poincaré

Tras su publicación, él mismo encontró un interesante contraejemplo que publicó en 1904. Se trata de una variedad en la que cada punto es un dodecaedro inscrito en la esfera unidad  $S^2$ . Observamos que un dodecaedro inscrito está determinado por la posición de un vértice (un punto  $P$  de  $S^2$ ) y una arista incidente en ese vértice (un vector unitario en  $P$ ). Es decir, un punto de  $ST(S^2) = SO(3)$  fibrado esférico tangente de la esfera  $S^2$ , que es un vector tangente unitario en la esfera  $S^2$ , determina un único dodecaedro inscrito. Pero varios puntos del esférico tangente de la esfera  $S^2$  determinan el mismo dodecaedro, exactamente 60 (3 aristas por cada uno de los 20 vértices).

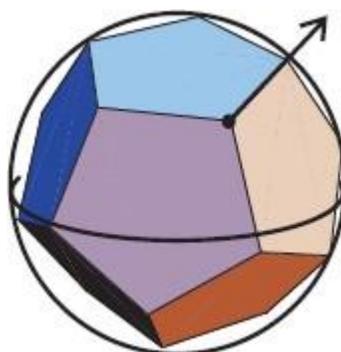


Figura 1.1: Punto en el dodecaedro

Esta variedad de dodecaedros inscritos,  $M_d$  llamada variedad dodecaedral de Poincaré, es de dimensión 3, cociente del esférico tangente de la esfera por un grupo finito  $SO(3)/I_{60} \simeq M_d$ , donde  $I_{60}$  es el grupo de simetrías del icosaedro (=grupo de isometrías del dodecaedro).

La teoría elemental de espacios recubridores proporciona una manera de calcular el grupo fundamental de un espacio  $M$ . Se trata de considerar su espacio recubridor universal  $p_u: U \rightarrow M$  recordar que el grupo fundamental es isomorfo al grupo de superposiciones que actúa libremente en  $U$  dando como cociente  $M$ . En el caso de la variedad dodecaedral  $M_d$ , es fácil observar que su espacio recubridor universal es la esfera  $S^3$ , que es el espacio recubridor universal (de dos hojas) del fibrado esférico tangente de la esfera  $S^2$ . Entonces el grupo fundamental, que coincide con el grupo de superposiciones del espacio recubridor universal.

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 & \longrightarrow & M_d \simeq SO(3)/I_{60} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & SO(3) &
 \end{array}$$

es el grupo binario icosaedral  $B/120$ , grupo perfecto (su abelianizado es trivial) de 120 elementos. El primer grupo de homología de un espacio coincide con el abelianizado del grupo fundamental. Por tanto el primer grupo de homología de  $M_d$  es el abelianizado del grupo binario icosaedral que es trivial. Esto significa que cualquier curva cerrada en  $M_d$  es homóloga a cero, es decir, cualquier curva cerrada es el borde de alguna superficie compacta. Sin embargo la variedad  $M_d$  no es homeomorfa a la esfera  $S^3$  puesto que ambas variedades tienen grupos fundamentales no isomorfos.

Por la dualidad del dodecaedro y del icosaedro, la variedad dodecaedral de Poincaré es también el espacio formado por los icosaedros inscritos en una esfera, por lo que también se denomina variedad icosaedral de Poincaré

La variedad  $M_d$  es el resultado de pegar cada par de caras opuestas de un dodecaedro por giro a derecha de  $2\pi/10$ . También se obtiene como espacio recubridor cíclico de cinco hojas de  $S^3$  ramificado sobre el trébol, y como resultado de hacer cirugía 1 en el trébol

En 1904 Poincaré concretó un poco más su pregunta original exigiendo que cada curva cerrada no solo bordee sino que bordee precisamente un disco, es decir, un análogo a los anteriores. Desde entonces esta cuestión se denomina la conjetura de Poincaré y su enunciado es el siguiente:

- Una variedad de dimensión 3 cerrada en la que todo lazo bordea un disco es la esfera  $S^3$ .

Utilizando el lenguaje de grupos fundamentales, y recordando que un espacio es simplemente conexo si es conexo y su grupo fundamental es trivial, el anterior enunciado es equivalente al siguiente.

*Una variedad de dimensión 3 cerrada simplemente conexa es la esfera  $S^3$ .*

Esta conjetura ha sido abordada de una manera u otra por todos los topólogos que han estudiado variedades tridimensionales en los últimos cien años.

## El enunciado en otras dimensiones

La  $n$ -esfera  $S^n$  es el conjunto de vectores unitarios del espacio euclídeo  $E^{n+1}$ , luego cabe mencionar este problema para cualquier dimensión

Las dimensiones superiores a 3 se debe adecuar este resultado, igual que sucedió en el paso de dimensión 2 a dimensión 3, por que la condición de variedad simplemente conexa es una condición insuficiente para garantizar y caracterizar la esfera en dimensiones altas.

Existen variedades cerradas simplemente conexas con  $n > 3$  que no son homeomorfas a la esfera de dimensión  $n$ , por ejemplo la variedad producto  $S^2 \times S^{n-2}$ . La topología algebraica proporciona invariantes algebraicos que generalizan al grupo fundamental. Se trata de grupos de homotopías  $\pi_i$  cuyos elementos son clases de equivalencias de aplicaciones basadas de esferas.

Dos espacios  $X$  e  $Y$  son del mismo tipo de homotopía si tienen los respectivos grupos de

homotopías isomorfas:  $\pi_i(X, x_0) \simeq \pi_i(Y, y_0)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . El enunciado de la conjetura en dimensión  $n$  es:

*Toda  $n$ -variedad cerrada del tipo de homotopía de la esfera  $S^n$  es homeomorfa a la esfera  $S^n$ .*

La conjetura se resolvió primero para dimensión  $n > 4$ . A partir de 1960 varios matemáticos probaron por diferentes métodos distintas versiones de la Conjetura de Poincaré.

En dimensión menor o igual que 3 es indiferente trabajar con variedades topológicas, combinatorias o diferenciables, pero esto no sucede en dimensión superior.

## 1.4. Clasificación de 3-Variedades

La Conjetura de Poincaré es parte de un problema fundamental en Topología: la clasificación de 3-variedades. A semejanza de la clasificación de las superficies conocida desde el siglo XIX, deseáramos clasificar las 3-variedades dando una lista completa sin repeticiones. Los métodos de trabajo en este campo han sido diversos.

Desde el nacimiento de la topología, se han venido utilizando métodos topológicos y combinatorios que han sido capaces de demostrar importantes resultados y también de clasificar muchas familias de 3-variedades.

Cada 3-variedad  $M^3$  admite una descomposición única salvo por el orden de los factores en suma conexa de variedades primas

$$M^3 = M_1 \# M_2 \# \dots \# M_r$$

En donde la suma conexa de dos variedades  $N_1$  y  $N_2$  conexas se obtiene de la siguiente forma: En cada una de las variedades  $N_i$  se quita una bola abierta  $B^n$ . El resultado en cada caso es una variedad  $N_i - B^n$ , con el borde de una esfera  $S_i$  de dimensión  $n - 1$ . Se

identifica  $N_1 - B^n$  con  $N_2 - B^n$  a lo largo del borde mediante un homeomorfismo y se obtiene la variedad  $n$ -dimensional suma conexa de  $N_1$  y  $N_2$ .

Mostramos de forma gráfica el proceso anterior:

Una  $n$ -variedad es prima si no es suma conexa de dos variedades distintas de la esfera  $S^n$ . Es claro que para clasificar 3-variedades es suficiente clasificar las 3-variedades primas.

Un proceso estándar para demostrar la Conjetura de Poincaré siguiendo métodos topológicos y combinatorios consiste en

- Describir un procedimiento que construya todas las 3-variedades.
- Determinar transformaciones de los datos que no cambian la 3-variedad.
- Suponer que se trata de una 3-variedad con grupo fundamental trivial y aplicando las transformaciones anteriores demostrar que es la esfera.

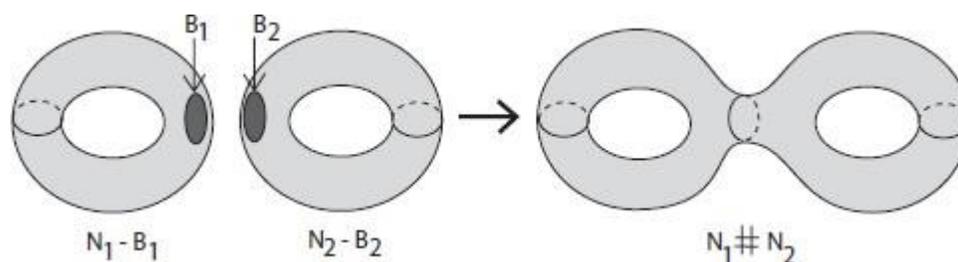


Figura 1.2: Suma conexas de variedades. Obtenida de: Guerrero. La Conjetura de Poincaré.

Existen muchos procedimientos de construcción de las 3-variedades cerradas orientables, casi siempre definidos por analogía con los existentes en superficies.

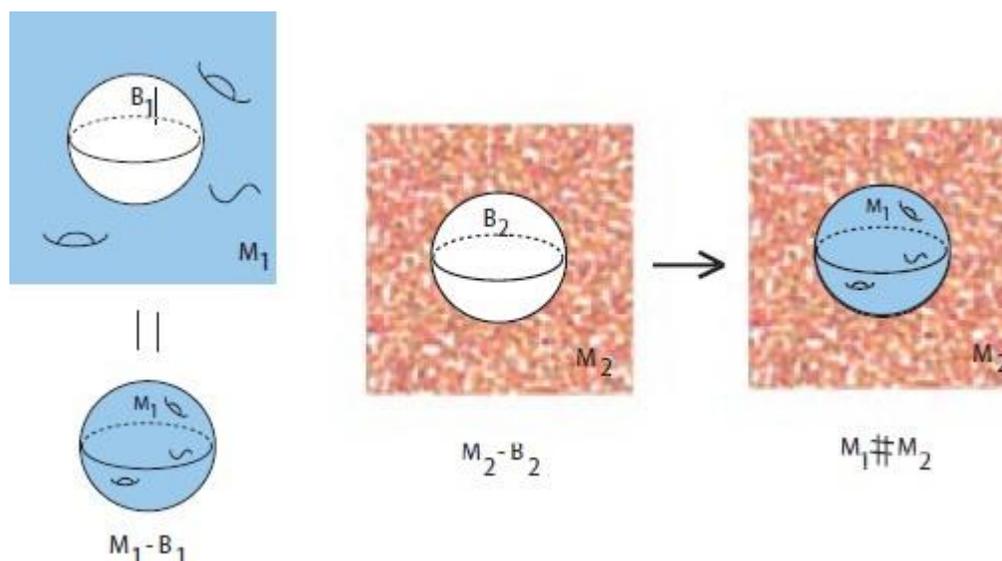


Figura 1.3: Suma conexas de 3-variedades. Obtenida de: Lozano. Cien Años de la Conjetura de Poincaré

## 1.5. Un resultado previo al de Poincaré

Las variedades que estudió en primera instancia fueron las de dimensión 2, las superficies, al igual que muchos de los matemáticos del siglo XIX. Precisamente, muchos de éstos trabajaron en el desarrollo del Teorema de clasificación de superficies durante estos años, entre los que encontramos a Möbius y Jordan.

**Teorema 1.13** Si  $X$  es una superficie compacta y simplemente conexa, entonces  $X$  es homeomorfa a la esfera  $S^2$ .

*Demostración:* Supongamos que  $X$  es una superficie simplemente conexa. Si suponemos que  $X$  no es orientable llegamos a una contradicción:

Si  $X$  no es orientable, existe un lazo sobre ella que cambia su orientación. Este lazo no puede ser borde de un disco, ya que el disco sí es orientable. Hemos encontrado, entonces, un lazo en  $X$  que no es borde de un disco, lo cual quiere decir que  $X$  no es simplemente conexa (Contradicción con nuestra hipótesis de partida). Tenemos, por tanto, que  $X$  es orientable. Si aplicamos el Teorema de Clasificación de Superficies (caso de superficies orientables), obtenemos que  $X$  sólo puede ser homeomorfa a una, y sólo una, de estas dos superficies:

- Esfera  $S^2$ .
- Suma conexa de  $g$  toros  $X_g$ .

Observamos que el segundo caso no se puede dar, ya que la suma conexa de  $g$  toros no es simplemente conexa:

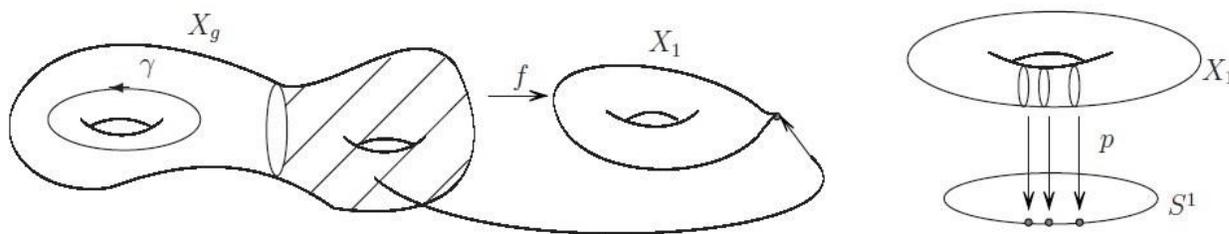


Figura 1.4: Suma conexa de toros. Obtenida de: Guerrero. La Conjetura de Poincaré.

Ahora bien, como hemos dicho, Poincaré estaba al tanto de este resultado, pero también era conocedor de las variedades de dimensión  $n > 2$ . En cuanto a estas variedades, podemos dar un ejemplo de una de las más sencillas que se conocen: la esfera  $n$ -dimensional o  $n$ -esfera. Esta se define como la  $n$ -variedad formada por los puntos que equidistan de un punto del espacio real de  $n + 1$  dimensiones. Su expresión analítica es la siguiente:

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

En su definición se observa como la  $n$ -esfera se encuentra contenida dentro de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y, por tanto, difícil de visualizar a partir de  $n \geq 3$ .

## 1.6. Problema inicial de Poincaré

Además de la homotopía y el Grupo Fundamental, Poincaré también introdujo los grupos de homología. Nosotros, en este apartado, nos centraremos en el primer grupo de homología de un espacio topológico  $X$ ,  $H_1(X)$ , y lo entenderemos como el grupo abelianizado del Grupo Fundamental. Este sentido que se le da al primer grupo de homología viene dado de manera formal en el Teorema de Hurewicz, que nos dice que

$$H_1(X) \simeq \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}$$

siendo  $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$  el subgrupo generado por los conmutadores de  $\pi_1(X)$ .

Este resultado aportado por Hurewicz daba rigor a la creencia de Poincaré de que la equivalencia fundamental de caminos en el sentido de la homotopía correspondía a la equivalencia homológica de 1-cadenas, excepto para la conmutatividad. Si tomamos  $X$  como un espacio topológico, una 1-cadena se puede tomar como la suma formal finita de caminos y un 1-ciclo se puede tomar como la suma formal finita

$$A = \sum_{i=1}^n \gamma_i$$

A diferencia de lo que ocurría en homotopía, la suma formal de lazos la estamos tomando precisamente sin tener en cuenta si todos los lazos tienen mismo punto base o no, hecho que no se puede obviar en homotopía. Cabe destacar que si  $\gamma$  es un lazo,  $\gamma$  es el mismo lazo pero recorrido en sentido contrario.

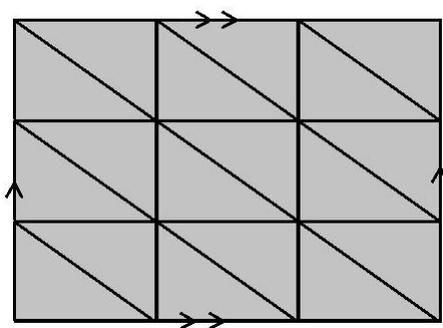
Un 1-ciclo  $A = \sum_{i=1}^n \gamma_i$  además puede ser borde, y lo será si existe una superficie  $D$  orientada y con borde cuyo borde es homeomorfo al ciclo  $A$ . Esto es,  $A$  será borde si existe un homeomorfismo  $f: D \rightarrow X$ .

**Definición 1.14** Dos 1-ciclos  $A$  y  $B$  se dicen cobordantes u homólogos si  $A - B$  es un borde.

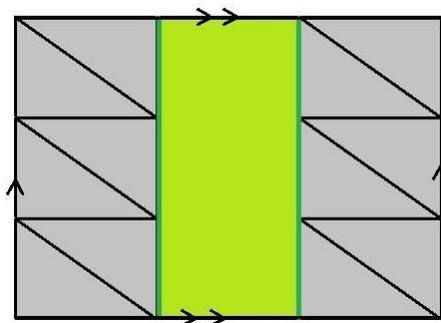
**Definición 1.15** El primer grupo de homología  $H_1(X)$  se define como el conjunto de las clases de equivalencia de ciclos  $[A]$ , donde se considera  $[A] = [B]$  si y sólo si  $A - B$  es un borde.

Para ilustrar el concepto que acabamos de presentar, veremos un ejemplo.

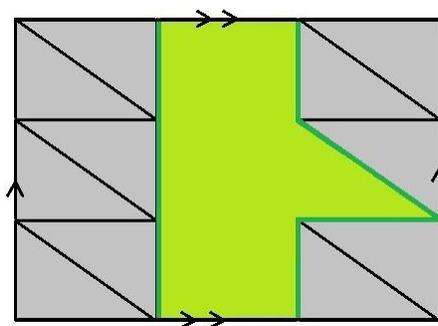
**Ejemplo 1.16** Primer grupo de homología del toro. Vamos a tomar en primer lugar una de las triangulaciones más conocidas del toro.



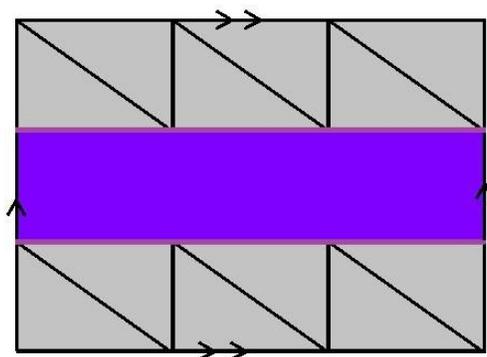
y vamos a ver las clases de 1-ciclos que tenemos. En la siguiente imagen tomaremos dos 1-ciclos que señalaremos en color verde oscuro.



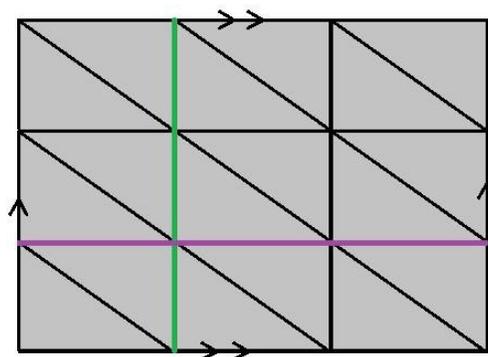
Puesto que estos dos 1-ciclos constituyen el borde de la región coloreada en verde claro, estos serán homólogos. Pero además también encontramos otro posible 1-ciclo (que pintaremos también en verde oscuro) homólogo al ciclo de la izquierda:



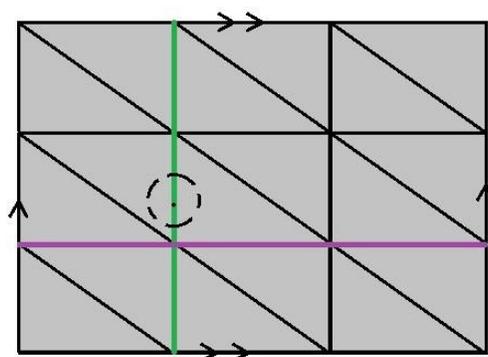
Son homólogos por ser borde de la región coloreada en verde claro. Entonces encontramos que cualquier 1-ciclo que podamos formar empezando en el lado superior del rectángulo que conforma el diagrama y terminando en el punto de la base que se identifica con el punto en el que hemos comenzado, proporciona un 1-ciclo homólogo. A continuación, tomaremos otros dos 1-ciclos diferentes que señalaremos en color lila.



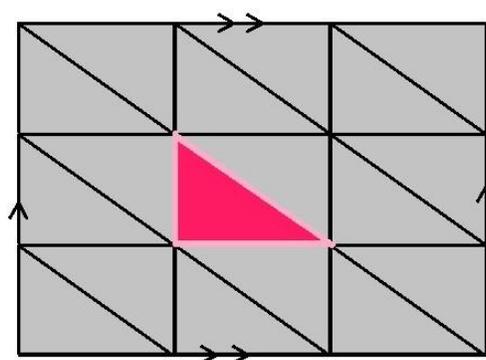
Estos dos ciclos también son homólogos por ser borde de la región en color púrpura. Y ocurre lo mismo que ocurría en el caso anterior, que cualquier 1-ciclo que podamos formar empezando en el lado izquierdo del rectángulo que conforma el diagrama y terminando en el punto del lado derecho que se identifica con el punto en el que hemos comenzado, proporciona un 1-ciclo homólogo. Seguidamente, tomaremos la siguiente pareja de 1-ciclos (uno verde oscuro y otro lila):



Estos dos ciclos no son homólogos puesto que no son borde de ninguna región. Se podría pensar que son borde de todo el toro, pero sabemos que esto no es así, puesto que cualquier disco con centro sobre uno de los ciclos siempre está contenido en el toro. Esto lo podemos observar en la imagen que se expone a continuación:



Por último, es preciso tomar los 1-ciclos que siempre son borde de un disco, que son todos homólogos al trivial.



De modo que el primer grupo de homología del toro es  $H_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Pues bien, utilizando este primer grupo de homología, Poincaré planteó en 1900 una conjetura ligeramente distinta a la que se conoce como Conjetura de Poincaré

**Teorema 1.17 (Cuestión inicial de Poincaré)** Si  $X$  es una 3-variedad compacta con  $H_1(X) = 0$  entonces  $X$  es homeomorfa a la esfera  $S^3$ .

Esta conjetura previa no era cierta. El mismo Poincaré proporcionó un contraejemplo, construyendo una 3-variedad compacta con  $H_1(X) = 0$ , pero que no era homeomorfa a  $S^3$ . Esta variedad recibe el nombre de Espacio de Poincaré y la clave para demostrar que no se puede encontrar ningún homeomorfismo entre ella y la esfera  $S^3$  es ver que su Grupo Fundamental no es el trivial (invariante topológico).

Para construir este ejemplo, se considera el grupo de isometrías del icosaedro (poliedro con 12 vértices, 20 caras y 30 aristas). Cada isometría del icosaedro coincide con una permutación par de los 5 cubos cuyos vértices coinciden con los puntos medios de las caras del icosaedro. Con lo cual, el grupo de isometrías del icosaedro es isomorfo al grupo  $A_5$ .

Se tiene, por tanto, que  $A_5 \cong SO(3)$  siendo  $SO(3)$  el grupo de Lie de isometrías directas de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 1.18** Grupo de Lie. Variedad diferenciable real o compleja tal que las operaciones de grupo son funciones diferenciables o analíticas.

Los grupos de Lie fueron presentados por Sophus Lie en 1870, y constituyen una herramienta fundamental en análisis matemático y geometría, para describir la simetría de estructuras analíticas. El espacio euclídeo  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  es un grupo de Lie real (con la adición de vectores como operación de grupo). También entre los grupos de matrices invertibles (con la multiplicación de matrices como operación) se pueden encontrar grupos de Lie, por ejemplo el grupo  $SO(3)$ .

Ahora bien, tomamos  $SU(2)$  el grupo especial unitario de grado 2, formado por las matrices  $2 \times 2$  con determinante igual a 1 con entradas en el cuerpo  $\mathbb{C}$  con operación de grupo la multiplicación. Se tiene que este es un grupo de Lie real de dimensión  $2^2 - 1 = 3$ .

Además, podemos encontrar un homomorfismo de  $SU(2)$  en  $SO(3)$ . Esto es debido a lo siguiente: los cuaterniones unidad se pueden utilizar para representar las rotaciones en el espacio de 3 dimensiones salvo signo esto es, los cuaterniones  $q$  y  $-q$  representan la misma rotación y además existe un isomorfismo que permite representar los cuaterniones unitarios como matrices de  $SU(2)$  con lo que  $SU(2)$  nos permite representar las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  salvo signo. Tenemos así un homomorfismo sobreyectivo de los grupos de Lie  $SU(2)$  en  $SO(3, \mathbb{R})$  cuyo núcleo es  $\{I, -I\}$ . Sea ahora  $\Gamma$  la preimagen de  $A_5$ , con  $\Gamma$  no normal de orden 120

$$\begin{aligned} \{I_d, -I_d\} &\rightarrow SU(2) \rightarrow SO(3) \\ \{I_d, -I_d\} &\rightarrow \Gamma \rightarrow A_5 \end{aligned}$$

Como  $A_5$  es grupo simple (no tiene subgrupos normales propios), se tiene que  $[\Gamma, \Gamma] = A_5$ . Se sabe que  $[\Gamma, \Gamma] = \Gamma$  (en caso contrario sería contradictorio con el hecho de  $A_5$  grupo simple). Ahora bien,  $SU(2)$ , como 3-variedad, es homeomorfa a  $S^3$ : las matrices de  $SU(2)$  están formadas por dos vectores de  $\mathbb{C}^2$  unitarios y ortogonales-hermíticos.

**Definición 1.19** Sean  $(a + bi, c + di), (r + si, t + ui) \in \mathbb{C}^2$  y  $M = I_d$  matriz asociada al producto hermítico habitual de  $\mathbb{C}^2$ . Dichos vectores de  $\mathbb{C}^2$  serán ortogonales hermíticos si se cumple que:

$$(a + bi, c + di)M \begin{pmatrix} r - si \\ t - ui \end{pmatrix} = 0$$

Al encontrar dicho contraejemplo, Poincaré reformuló este problema inicial. Así propone en 1904 la Conjetura que lleva su nombre, la cual ha sido enunciada en el apartado de Introducción del trabajo. Lo cierto es que dicha conjetura llevó a diversos quebraderos de cabeza a los matemáticos que intentaban dar una prueba de la misma. Aunque esto no fue del todo malo, pues con estos quebraderos, se desarrollaron muchas de las teorías que hoy se conocen para resolver el problema de clasificación de 3-variedades compactas. Y es que este no es un tema baladí, puesto que en un problema de clasificación de variedades subyacen dos problemas: el primero sería el de determinar si dos espacios son homeomorfos o no, y el segundo consistiría en dar una lista completa de todos los posibles espacios de un determinado tipo. La resolución del primer problema ayuda a completar la lista deseada en el segundo, por lo que estos dos problemas no son excluyentes y se engloban en uno solo. Dicho esto, la Conjetura de Poincaré hace referencia al primer problema de clasificación de 3-variedades, en el caso de ver si una 3-variedad es homeomorfa a la esfera  $S^3$ .

## 1.7. Un cambio en el enfoque de la Conjetura

Unos elementos primordiales a la hora de enfrentarse a este problema de clasificación de variedades que estamos tratando, son los invariantes (topológicos, algebraicos). Si dos variedades tienen un tipo de invariante distinto, podemos afirmar que no son homeomorfas. Pero, si dos variedades tienen los mismos invariantes que hemos dado hasta ahora (grupo fundamental y homología), se puede afirmar que son la misma variedad? (con la misma nos queremos referir a que son homeomorfas). Un resultado como respuesta a esta pregunta en el caso de 3-variedades fue dado por Alexander en el año 1919, y en él afirmaba que la homología y el grupo fundamental no son suficientes para clasificar 3-variedades.

Esto significaría, por tanto, que existen 3-variedades con mismo grupo fundamental y misma homología que no son homeomorfas. Y lo que hizo precisamente Alexander fue dar una pareja de 3-variedades que cumplían esto.

Alexander encontró estos ejemplos trabajando sobre unos espacios denominados en inglés Lens Spaces (espacios de lente). Los espacios de lente tridimensionales, designados por  $L(p, q)$  donde  $p$  y  $q$  son enteros coprimos, fueron definidos por Tietze en 1908. Éstos se pueden ver como una bipirámide sólida (un cuerpo formado por dos pirámides sólidas que comparten base) cuya base piramidal es un polígono plano con  $p$  lados, y que tiene las siguientes identificaciones: si llamamos  $a_0, \dots, a_{p-1}$  los vértices del polígono base,  $n$  y  $s$  a los vértices que conforman el polo norte y polo sur de la bipirámide, se identifican los triángulos esféricos identificando  $n$  con  $s$  y los puntos  $a_i$  con los puntos.

Introduciremos a continuación un ejemplo para visualizar esta forma de construcción de los espacios que estamos tratando

**Ejemplo 1.20:** Construcción de  $L(3, 1)$ .

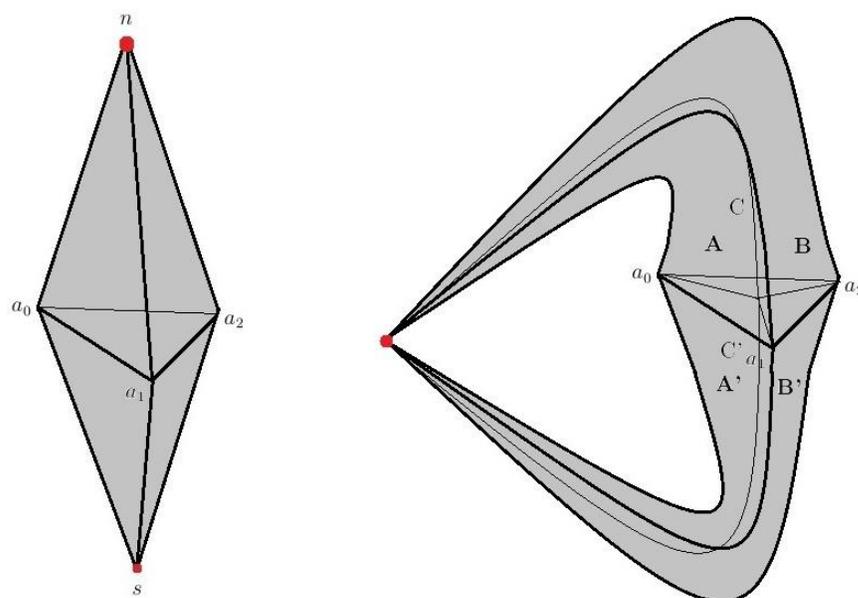


Figura 1.5: Obtenida de: Lozano. Cien Años de la Conjetura de Poincaré

Puesto que nos enfrentamos al problema de construcción de  $L(3, 1)$ , se tiene que  $p = 3$  y  $q = 1$ . Así, a la hora de dibujar la biperámide sólida, debemos tomar como base un polígono de tres lados, un triángulo. Esto se puede observar en la primera figura que se presenta. En la segunda, en cambio, se comienza a establecer la primera identificación: el polo norte y el polo sur.

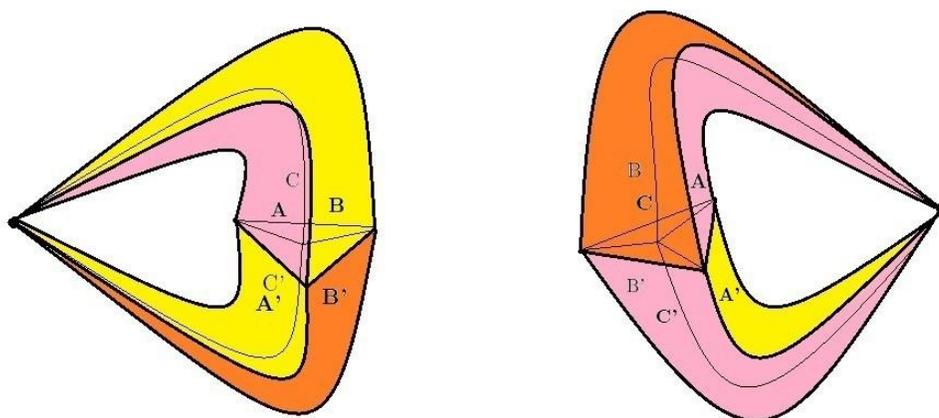


Figura 1.6: Obtenida de: Lozano. Cien Años de la Conjetura de Poincaré

En estas dos últimas figuras, por su parte, se muestran desde dos ángulos distintos las identificaciones que se hacen de los triángulos esféricos. Estas identificaciones se dan de este modo por el hecho de que el vértice  $a_i$  siempre debe estar identificado con el vértice  $a_{i+(1+1)}$ . Debido a la complejidad de proporcionar un dibujo de las identificaciones que estamos tratando (de triángulos esféricos sólidos), dichas identificaciones las hemos establecido coloreando cada pareja de triángulos esféricos relacionados de un mismo color.

Ahora bien, los espacios de lente también pueden ser construidos utilizando cirugía junto con la teoría de nudos. Estudiaremos esta construcción, a continuación, por el hecho de que las dos herramientas empleadas han sido fundamentales en el desarrollo de la teoría que culmina con la demostración de la Conjetura de Poincaré.

Un nudo  $K \subset \mathbb{R}^3$  es la imagen sin auto-intersecciones de una circunferencia por una aplicación  $f : S^1 \rightarrow S^3$  continua. Está claro que aunque un nudo en  $S^3$  no tiene autointersecciones, si queremos visualizarlo en  $\mathbb{R}^3$  sí tendremos que ver auto-intersecciones, puesto que carecemos de una de las dimensiones. Así presentamos por ejemplo el nudo trivial y el nudo trébol:

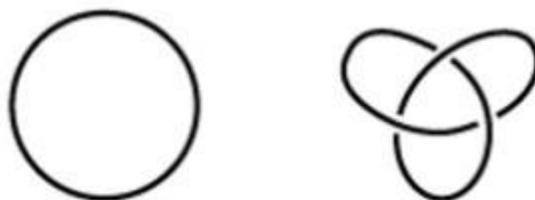


Figura 1.7: Obtenida de: Lozano. Cien Años de la Conjetura de Poincaré

Hacer cirugía a lo largo de un nudo  $K$  consiste en tomar un pequeño entorno  $E(K)$  alrededor de  $K$ , que es homomorfo a un toro sólido, y lo quitamos. Tenemos entonces la siguiente 3-variedad con borde:  $S^3 - E(K)$ . Ahora vamos a coser al borde de esta 3-variedad otro toro sólido. Esto se hace cosiendo dicho toro a lo largo del borde de la 3-variedad, y con coser nos referimos a tomar un homeomorfismo

$$f : \partial(S^3 - E(K)) = S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$$

El homeomorfismo se puede elegir de la forma que explicaremos seguidamente. Fijamos en  $\partial(S^3 - E(K))$  un lazo  $\mu$  que se corresponde con un meridiano (bordea a un disco perpendicular a  $K$ ) y un lazo  $\lambda$  que va paralelo a  $K$  y se fijan en  $\partial T$  de forma análoga  $\mu$  y  $\lambda'$ . Ahora se debe elegir la imagen de la curva  $\mu'$  por  $f^{-1}$ . En homotopía se escoge:

$$f^{-1}[\mu'] = [p\mu + q\lambda] \in \pi_1(\partial(S^3 - E(K)))$$

con  $p$  y  $q$  primos entre sí y  $q > 0$ . Una vez elegida esta imagen, hay una única forma de pegar el toro

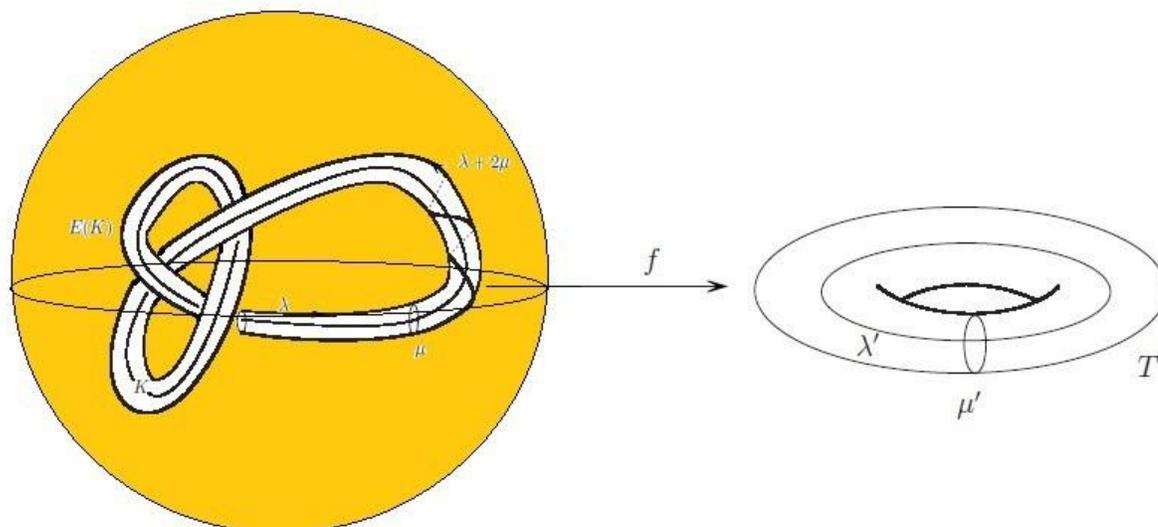


Figura 1.8: Obtenida de: Lozano. Cien Años de la Conjetura de Poincaré

Hecha esta construcción, se dice que la variedad

$$X = (S^3 - E(K)) \cup_f T$$

se ha obtenido por cirugía en  $S^3$  a lo largo del nudo  $K$  con coeficiente  $p/q \in \mathbb{Q}$ . Dicha variedad se denota por  $X = S^3(K)_{p/q}$ .

Un dato importante a tener en cuenta es que, durante años, muchos matemáticos intentaron dar contraejemplos a la Conjetura sirviéndose de la Teoría de Nudos y de la cirugía. Manejaron elementos como la propiedad  $P$ .

**Definición 1.21** Se dice que un nudo  $K$  tiene la propiedad  $P$  si cualquier cirugía no trivial a lo largo de  $K$  nos da una 3-variedad que no es simplemente conexa.

Y no es extraño que esta propiedad fuese un concepto significativo a tener en cuenta, puesto que si un nudo no tuviese la propiedad  $P$ , constituiría un contraejemplo a la Conjetura de Poincaré. Aún así, existe el siguiente teorema:

**Teorema 1.22** Teorema de Kronheimer y Mrowka. Los nudos no triviales tienen la propiedad  $P$ .

En su demostración, se utilizan técnicas muy recientes y bastante sofisticadas, como los invariantes de Donaldson. Pero éste no resuelve de manera afirmativa la Conjetura de Poincaré, ya que no tiene en cuenta la cirugía a lo largo de un link con más de dos componentes, la cual podría dar lugar a una 3-variedad simplemente conexa que no fuese homeomorfa a la 3-esfera.

Dicho esto, y volviendo al concepto de cirugía, si hacemos cirugía a lo largo del nudo trivial con coeficiente  $p/q$  obtenemos el espacio de lente  $L(p, q)$ .

Alexander, por su parte, mostró que los espacios de lente  $L(5, 1)$  y  $L(5, 2)$  no eran homeomorfos (pues no tenían el mismo tipo de homotopía) a pesar de que ambos tenían grupos fundamentales isomorfos (el grupo fundamental de ambas es  $Z_5$ ) y la misma homología. Fue este resultado el que cambió por completo el enfoque que se le había dado a la Conjetura hasta entonces, por el hecho de que trabajar con estos invariantes se volvía inútil a la hora de abordar el problema.

## 1.8. Extensión de la Conjetura a dimensiones superiores

Es claro que la reformulación de un problema requiere de empeño y arduo trabajo. En el caso de la Conjetura de Poincaré, antes se tuvo que realizar una generalización de la misma a dimensión arbitraria.

En un primer momento se puede pensar en dar la Conjetura tal cual está formulada para 3-variedades, pero en este caso, para  $n$ -variedades; si se hiciera así, se podría encontrar un contraejemplo a la misma: la variedad de dimensión cuatro  $S^2 \times S^2$ , que es simplemente conexa por ser producto de dos variedades simplemente conexas  $S^2$ , pero no es homeomorfa  $S^4$  ya que

$$H_2(S^2 \times S^2) \simeq Z \times Z \not\simeq H_2(S^4) = 0$$

Por eso la Conjetura de Poincaré ha de ser extendida a dimensión  $n$  de la siguiente manera:

**Teorema 1.23** Conjetura de Poincaré en dimensión  $n$ . Una  $n$ -variedad compacta del mismo tipo de homotopía que la  $n$ -esfera es homeomorfa a la  $n$ -esfera.

Fijémonos en lo relevante que trae consigo esta generalización: tener el mismo tipo de homotopía es condición necesaria para que dos  $n$ -variedades compactas sean homeomorfas, pero en la conjetura que acabamos de proponer se convierte en condición suficiente. Además, cabe destacar que la generalización también engloba al caso  $n = 3$ , ya que ser simplemente conexa y tener el mismo tipo de homotopía que  $S^3$  son conceptos equivalentes para 3-variedades compactas.

Dada esta generalización, se abordó la demostración de esa conjetura para las diferentes dimensiones:

- Para  $n = 2$  hemos visto en el apartado Un resultado previo al de Poincaré, que es cierta.
- Para  $n = 4$  fue probado por Freedman en 1982.
- Para  $n \geq 5$  fue demostrada en los años 60: Stallings la probó para  $n = 7$  y Zeeman la consiguió generalizar para los casos  $n = 5$  y  $n = 6$ . Por otro lado, Smale consiguió dar una demostración para los casos  $n \geq 5$  completa, de forma alternativa a la de Stallings y Zeeman.

Obsérvese que la conjetura se demostró antes para  $n \geq 5$  que para  $n = 4$ . Por qué en dimensiones superiores fue más fácil dar una prueba de la Conjetura? No podían adaptarse las pruebas para dimensión 3 o 4 y así dar la demostración de la Conjetura de Poincaré? El caso es que hay homotopías que requieren de un número mínimo de dimensiones, lo cual quiere decir que cuantas más dimensiones tengamos, más espacio para mover variedades por homotopías tenemos.

## 1.9. La Conjetura de Poincaré diferenciable

Como hemos visto en el apartado anterior, para demostrar la Conjetura no fue suficiente con la generalización a dimensión arbitraria. ¿Qué disciplina podría ayudarnos en este punto del problema? Pues la Geometría. En ella encontramos una estructura más rica que la estructura de variedad topológica, la estructura de variedad diferenciable.

**Definición 1.24** Se llama variedad diferenciable  $X$  a una variedad topológica en la que tienen sentido los conceptos de diferenciación. Para que estos tengan sentido, se debe tomar una colección preferida de cartas  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciables. Esta definición trae consigo lo siguiente: si  $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos cartas y  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , entonces  $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$  es diferenciable entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Esto se conoce como estructura diferenciable en  $X$ .

Así, ya podemos hablar de funciones diferenciables de variedades diferenciables en  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , y de aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables,  $f: X \rightarrow Y$ . Aunque nos sigue haciendo falta otro concepto para alcanzar nuestro propósito: enunciar la nueva Conjetura.

**Definición 1.25** Decimos que dos variedades diferenciables  $X$  e  $Y$  son difeomorfas o diferenciablemente equivalentes, si existen aplicaciones diferenciables  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow X$  que satisfacen lo siguiente

$$\begin{aligned} f \circ g &= Id_Y \\ g \circ f &= Id_X \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la diferencia entre homeomorfismo y difeomorfismo estriba simplemente en la diferenciableidad. Con lo cual, dos variedades difeomorfas serán homeomorfas, pero a la implicación contraria no es siempre cierta. Así, y haciendo uso de los conceptos que acabamos de dar, podemos pasar ya a enunciar la versión de la Conjetura que en este apartado nos atañe.

**Teorema 1.26** Conjetura de Poincaré Diferenciable. Sea  $X$  una  $n$ -variedad compacta y diferenciable. Si  $X$  es del mismo tipo de homotopía que la  $n$ -esfera, entonces  $X$  es difeomorfa a la  $n$ -esfera.

Se abre con ella un nuevo campo a explorar. Un campo que da, otra vez, un giro a todo lo que hasta ahora se tenía acerca de la Conjetura de Poincaré. De hecho, atendiendo a un resultado (Moise's Theorem) que dice que cada 3-variedad topológica admite una triangulación, también llamada estructura piecewise-linear (PL), y además que dicha estructura admite una única estructura diferenciable. De esta forma, la hipótesis de que  $X$  sea una 3-variedad compacta y diferenciable se convierte simplemente en la de que  $X$  sea una 3-variedad compacta. De modo que demostrar la Conjetura de Poincaré diferenciable implica la demostración de la Conjetura de Poincaré.

Esta última versión de la Conjetura para dimensiones  $n \geq 5$  se sabe que, en general, es falsa. Existen unos espacios denominados Esferas exóticas, que se corresponden con la esfera (en la dimensión correspondiente), pero con estructuras diferenciables diferentes a la estándar. Estas variedades son contraejemplos para la Conjetura de Poincaré Diferenciable, ya que son homeomorfas a la  $n$ -esfera (y por tanto tienen el mismo tipo de homotopía que ésta) y no son difeomorfas a la misma. Los matemáticos de mediados del siglo 20 quedaron sorprendidos cuando en 1956 John Milnor mostró que dos estructuras diferenciables de la esfera  $S_7$  podían establecerse de forma diferente, siendo estas dos formas equivalentes en el sentido de la continuidad pero no de la diferenciableidad. Tras el trabajo de Milnor, se encontraron generalizaciones a otras dimensiones; así para las esferas de dimensión  $n = 5, 6, 7, 8, 9$ , hay, respectivamente, estas estructuras diferenciables 1, 1, 28, 2, 8, 6, 992, 1, 3, 2, 16256, 2.

Cuando reducimos la dimensión, las cosas se vuelven más complejas. Para dimensión  $n = 4$  se sabe que hay variedades topológicas compactas que no admiten estructura diferenciable. Este resultado fue proporcionado y demostrado por Simon Kirwan Donaldson en el año 1982. Para su estudio, Donaldson utilizó instantones, soluciones particulares de un tipo de ecuaciones de Yang-Mills que tienen su origen en la Teoría Cuántica de Campos. Este trabajo le hizo merecedor de la Medalla Fields en 1986. Además, este matemático también dedujo ciertos invariantes polinómicos, los invariantes de Donaldson, que eran sensibles a la estructura diferenciable de la variedad, y que hicieron posible dar la existencia de estructuras diferenciables exóticas en esta dimensión. Llegó así a proporcionar variedades topológicas que admitían una familia infinita de estructuras diferenciables. Por ejemplo,  $\mathbb{R}^4$  tiene infinitas estructuras diferenciables que no son difeomorfas entre sí y además éste es el único espacio real  $n$ -dimensional que posee esta propiedad.

Pero, ¿qué ocurre si bajamos otra dimensión? Parece que tras tantos intentos fallidos, la respuesta va a ser negativa, esto es, que no se va a poder demostrar para el caso tridimensional. El caso es que, de nuevo, esta versión no es la que permitió dar una prueba a la Conjetura de Poincaré, pero sí es cierto que con ella nos encontramos poco de encontrar el enfoque deseado, puesto que en ella, al igual que en la demostración final, la Geometría ya es tomada como primordial.

## Capítulo 2

# De la Conjetura al Teorema: Demostración de la Conjetura de Poincaré

### 2.1. Problema de Clasificación de 3-variedades

Como ya se mencionó anteriormente, un problema que surge de manera colateral al propio problema de resolver la Conjetura, es la clasificación de variedades de tres dimensiones. Si bien demostrar la Conjetura ya era un proyecto del todo ambicioso, dar una clasificación completa de 3-variedades se planteaba como un trabajo mucho más costoso. Y es que como ya se explicó anteriormente, la Conjetura es un problema intrínseco al de clasificación.

La clasificación de variedades de dimensión 3 ha sido tratada durante todo el siglo XX y consta de diferentes etapas que pasaremos a estudiar.

#### 2.1.1. Descomposición en primos o por esferas

Esta primera sección se comienza por definir la suma conexa de variedades de dimensión 3.

**Definición 2.1** La suma conexa de dos 3-variedades  $M_1$  y  $M_2$  tales que poseen una 3-bola cerrada embebida,  $B_1 \subset M_1$  y  $B_2 \subset M_2$ , se denota por  $M_1 \# M_2$  y se define como la operación binaria realizada en los dos pasos siguientes:

- Para cada  $M_i$  se elimina el interior de la 3-bola  $B_i$ , obteniendo  $M_i - \text{int}(B_i)$  una 3-variedad con borde igual a la frontera de  $B_i$ ; esto es igual a la 2-esfera.
- Se identifican las 2-esferas del borde mediante un homeomorfismo  $f : \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$ .

Ilustramos los pasos anteriores:



Figura 2.1: Paso 1

Luego se realiza el siguiente paso:

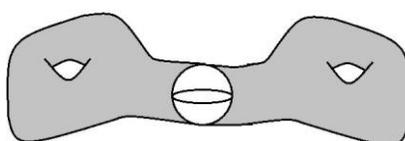


Figura 2.2: Paso 2

Dada esta definición, ahora podemos dar un mecanismo para realizar la operación inversa. Si tenemos una 3-variedad  $M = M_1 \# M_2$ , entonces  $M$  contendrá una 2-esfera  $S^2$  tal que si eliminamos de  $M$  el conjunto  $S^2 \times (-\epsilon, \epsilon)$  resultan dos variedades con borde igual a la 2-esfera, y que cumplen que al rellenar dichas 2-esferas obtenemos  $M_1$  y  $M_2$ . Así, para obtener  $M_1$  y  $M_2$ , lo único que hemos hecho es realizar un proceso de modificación (al igual que se hace con nudos para obtener los espacios de lente).

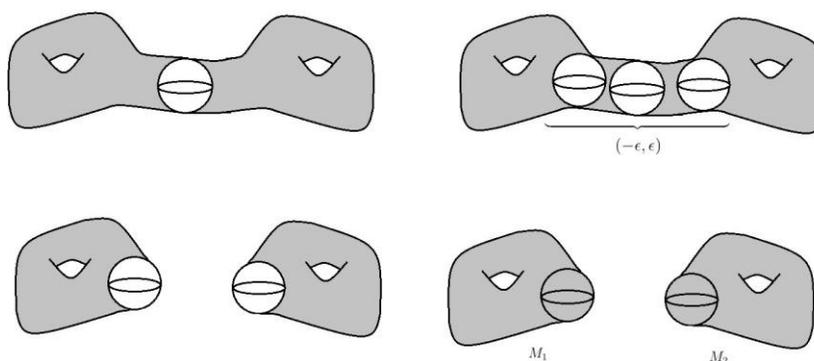


Figura 2.3: Descomposición de  $M_1$  y  $M_2$

**Definición 2.2** Una 3-variedad  $M$  es prima si sólo se puede descomponer como suma conexa de manera trivial, esto es, cualquier descomposición de  $M$  como suma conexa de dos 3-variedades  $M_1$  y  $M_2$  implica  $M_1$  o  $M_2$  homeomorfas a  $S^3$ .

Cabe destacar que a la descomposición de  $M$  como suma conexa de dos 3-variedades  $M_1$  y  $M_2$  con  $M_1$  o  $M_2$  homeomorfas a  $S^3$  se le denomina trivial puesto que el elemento neutro para la operación binaria que estamos tratando  $\#$  (suma conexa) es  $S^3$ . Así, observamos como una 3-variedad prima se define de forma análoga a los enteros primos para la multiplicación.

**Definición 2.3** Se dice que una 3-variedad  $M$  es irreducible si toda 2-esfera  $S^2 \subseteq M$  embebida en  $M$  acota una 3-bola  $B^3 \subseteq M$ .

**Observación 2.4** Esta definición fue proporcionada por Kneser.

**Observación 2.5** Una 3-variedad irreducible es prima.

**Observación 2.6** Una 3-variedad prima no tiene por qué ser irreducible. De hecho, la 3-variedad  $S^1 \times S^2$  es prima pero no es irreducible.

**Definición 2.7** Una descomposición en primos o por esferas es una descomposición de la forma

$$M \simeq (P_1 \# \dots \# P_s) \# (S^1 \times S^2) \# \dots \# (S^1 \times S^2)$$

donde  $P_i$  son irreducibles.

**Observación 2.8** Toda 3-variedad  $M$  admite una descomposición en primos y además la colección  $\{P_i\}_{i=1}^s$  es única para cada  $M$  salvo difeomorfismo, orden de los factores o inserción de  $S^3$  en la colección.

### 2.1.2. Descomposición tórica

En esta etapa de la clasificación de 3-variedades, es preciso definir unos conceptos previos para comprender qué es precisamente la descomposición tórica. Comenzaremos tomando una 3-variedad  $N$  con o sin borde.

**Definición 2.9** Se dice que una superficie  $S$  en  $N$  compacta, orientada con  $\partial S = \emptyset$  es incompresible si para todo disco  $D$  embebido en  $N$  con  $\partial D = \emptyset$ , la curva  $\partial D$  acota un disco contenido en  $S$ .

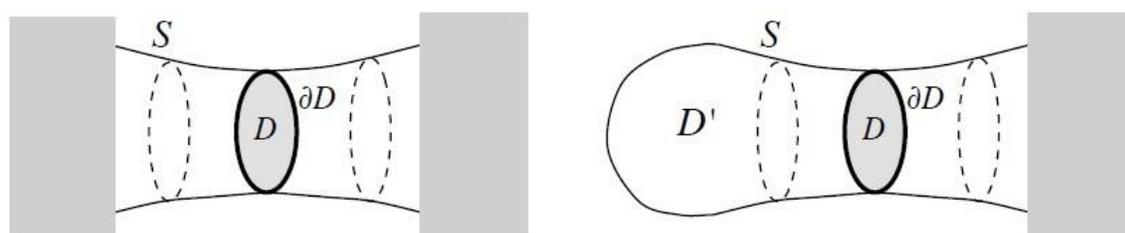


Figura 2.4: Descomposición tórica

**Definición 2.10** Un toro es incompresible si ninguna curva simple cerrada esencial en dicho toro es homótopa a un punto en la variedad (esto es, si no se puede comprimir).

**Ejemplo 2.11** Toro compresible

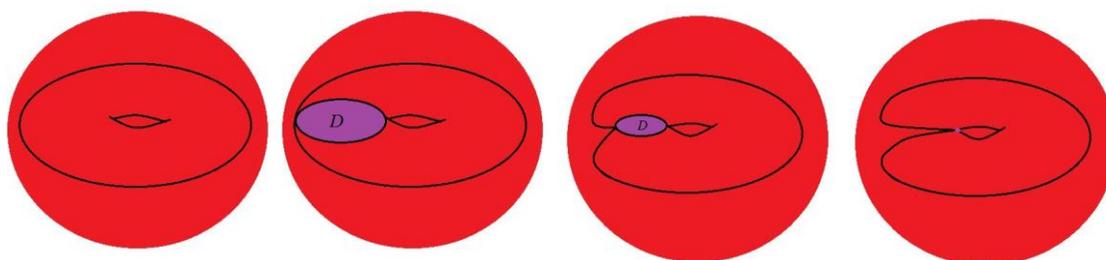


Figura 2.5: Toro compresible. Obtenida de: Guerrero. La Conjetura de Poincaré.

En el ejemplo tomamos una superficie tórica embebida en una 3-variedad. Esta superficie tórica es borde de un toro sólido en la 3-variedad. Podemos tomar así un disco  $D$  en la 3-variedad cuyo borde es una curva en la superficie que no acota un disco contenido en la superficie, con lo cual podemos decir que no es una superficie incompresible. En efecto, vemos como en nuestro ejemplo hemos encontrado una curva esencial que es homótopa a un punto en la 3-variedad, por lo que si atendemos a la definición de toro incompresible podemos afirmar que este toro es compresible.

**Ejemplo 2.12** Toro incompresible.

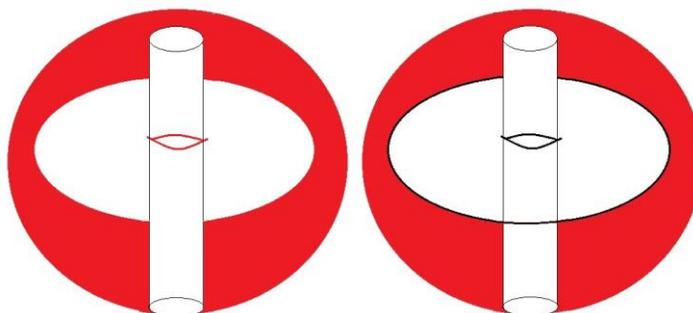


Figura 2.6: Toro incompresible. Obtenida de: Guerrero. La Conjetura de Poincaré.

Tomamos ahora una 3-variedad y, en ella, una superficie tórica que no sea borde de un toro sólido, como se muestra en la figura anterior.

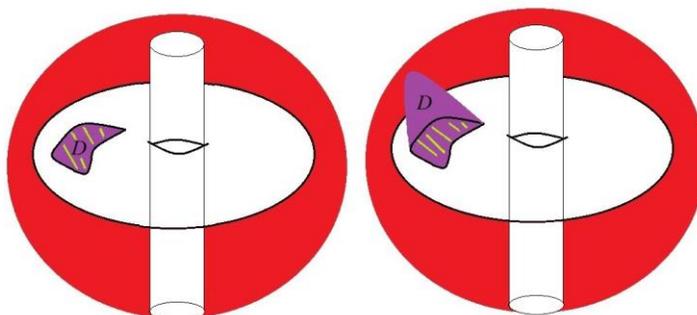


Figura 2.7: Toro incompresible. Obtenida de: Guerrero. La Conjetura de Poincaré.

Se observa como cualquier disco  $D$  que tomemos en la 3-variedad (en nuestro caso hemos tomado dos ejemplos distintos de disco) con borde en la superficie tórica, cumple que la curva que forma su borde también acota un disco en la superficie. Por tanto, la superficie es incompresible.

De hecho, no podemos encontrar ninguna curva esencial del toro que sea homótopa a un punto en la 3-variedad, como se observa en el dibujo anterior.

Después de la descomposición en primos, ya nos podemos centrar en la clasificación de superficies irreducibles. Éstas no pueden ser simplificadas haciendo cirugía a lo largo de esferas, pero nos podemos preguntar si las 3-variedades pueden ser simplificadas en este caso cortando a lo largo de la siguiente superficie más sencilla que conocemos después de la esfera, el toro. Haciendo cirugía a lo largo de un toro en el interior de una 3-bola o a lo largo de un toro que acota un toro sólido, esto es un toro compresible, no se puede obtener una variedad más simple. En cambio, parece más prometedor intentar hacer cirugía a lo largo de toros incompresibles.

**Definición 2.13**  $N$  es toro-irreducible si todo toro incompresible embebido en  $N$  se puede deformar a un toro en  $\partial N$ . Si  $N$  es cerrada, toro-irreducible significa que no tiene toros incompresibles.

**Definición 2.14**  $N$  es una fibración de Seifert si se puede expresar como unión disjunta de esferas  $S^1$  (fibras), cada una de las cuales posee un entorno formado por unión de fibras, homeomorfo (a través de un homeomorfismo que preserva las fibras) a un  $(p, q)$ -toro sólido fibrado estándar.

$$T(p, q) = \bigsqcup_{x \in D} [0, 1] \times x / (x, 0) \sim (\rho(x), 1)$$

con  $D^2$  el disco unidad y  $\rho(x)$  una rotación de  $D^2$  de ángulo  $2\pi p/q$  para  $p$  y  $q$  primos entre sí.

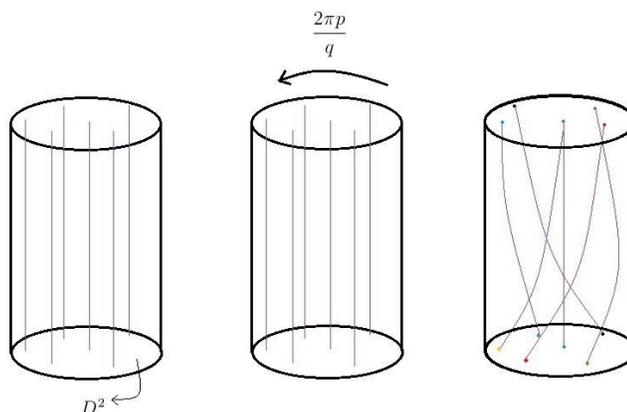


Figura 2.8: Fibración

De esta última definición cabe destacar un aspecto. Se observa que la fibra formada tras la identificación del segmento  $[0, 1] \times 0_2$  en donde  $0_2$  el centro de  $D^2$  proporciona una esfera  $S^1$ . A este tipo de fibras se les llama fibras cortas.

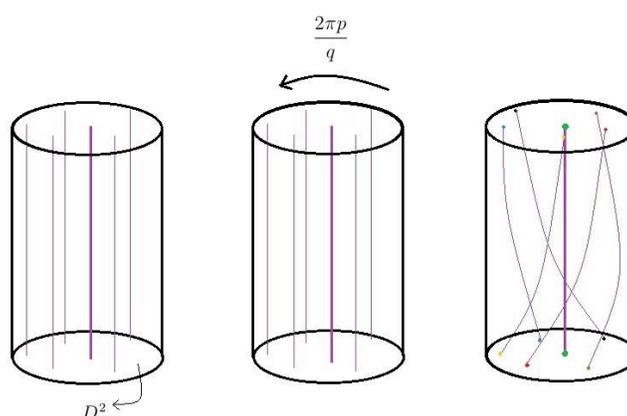


Figura 2.9: Fibras cortas. Obtenida de: Guerrero. La Conjetura de Poincaré.

Con estas definiciones ya podemos centrarnos en el objetivo principal de este apartado, la Descomposición tórica. Ésta también se denomina Descomposición JS-J porque fue desarrollada por William Jaco, Peter Shalen y Klaus Johannson (los dos primeros trabajaron juntos y el tercero de manera independiente). Esta descomposición comienza tomando una 3-variedad irreducible  $M$ . La descomposición tórica está basada en un teorema que afirma que existe una colección finita y minimal de  $\tau$  toros incomprensibles, tales que cada una de las componentes de  $M$   $\tau$  (que serán 3-variedades compactas con borde tórico) es toro-irreducible o fibración de Seifert. Esto quiere decir que una variedad  $M$  que es toro-irreducible o fibración de Seifert tendrá una colección  $\tau$  vacía.

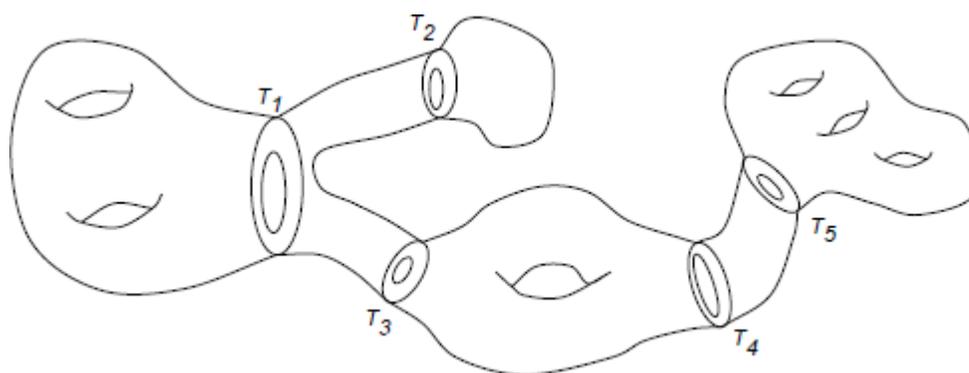


Figura 2.10: Obtenida de: Guerrero. La Conjetura de Poincaré.

### 2.1.3. La Conjetura de Geometrización de Thurston

Al igual que en la sección anterior, definiremos una serie de términos antes de centrarnos en el tema primordial.

**Definición 2.15** Se denomina métrica riemanniana  $g$  sobre una variedad diferenciable  $M$ , a la asignación a cada espacio tangente  $T_pM$  de un producto escalar  $g_p$  (esto es, de una forma bilineal simétrica y definida positiva  $g: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ )

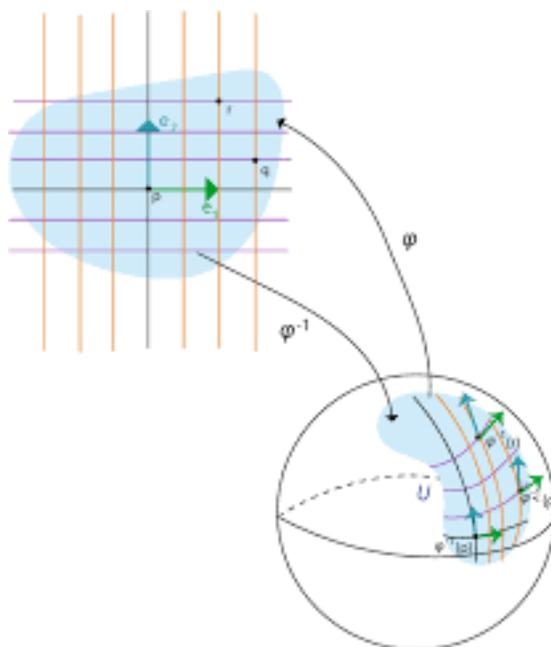


Figura 2.11: Métrica riemanniana. Obtenida de: Guerrero. La Conjetura de Poincaré.

**Definición 2.16** Se denomina variedad riemanniana  $(M, g)$  a una variedad diferenciable  $M$  sobre la que se ha definido una métrica riemanniana  $g$ .

**Definición 2.17** Una variedad riemanniana  $(M, g)$  es un espacio localmente homogéneo si dados dos puntos cualesquiera  $p, q \in M$  existe un abierto  $U_\epsilon$  con  $p \in U$  una isometría de  $U$  en su imagen que lleva  $p$  en  $q$ . Intuitivamente: espacios que tienen el mismo aspecto vistos desde cualquiera de sus puntos.

**Definición 2.18** Una variedad  $M$  (con o sin borde) es geométrica si  $int(M)$  admite una métrica riemanniana  $g$  tal que  $(int(M), g)$  es un espacio localmente homogéneo.

A continuación, con estas definiciones, ya podemos enunciar la Conjetura que nos ha traído a esta etapa de la clasificación de 3-variedades: La Conjetura de Geometrización. Este resultado fue enunciado por William P. Thurston y da una metodología completa para clasificar 3-variedades, de forma similar a como ocurría en la clasificación de superficies, centrándose en las 3-variedades geométricas.

**Teorema: 2.19** Conjetura de Geometrización de Thurston. Cualquier 3-variedad es geométrica o se puede descomponer (por cirugía a lo largo de esferas o de toros incompresibles) en variedades geométricas.

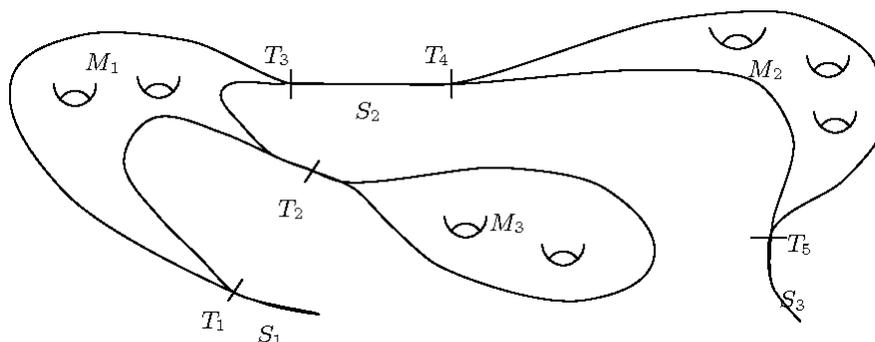


Figura 2.12: Conjetura de geometrización. Obtenida de: Guerrero. La Conjetura de Poincaré.

Esta conjetura guarda una estrecha relación con la Conjetura de Poincaré: demostrar la Conjetura de Geometrización implica demostrar la Conjetura de Poincaré. Para razonar esta relación comenzamos tomando una 3-variedad compacta y simplemente conexa  $X$ . En su descomposición en 3-variedades irreducibles se obtendrá que cada una de sus componentes será simplemente conexa, con lo cual, con grupo fundamental trivial. Al tener grupo fundamental trivial, no se puede efectuar una descomposición tórica. Ahora, por la Conjetura de Geometrización tendríamos que cada componente de la descomposición.

Existen sólo 8 espacios localmente homogéneos simplemente conexos (y que admiten cociente compacto) de dimensión 3. Entre ellos la esfera, el hiperbólico y el espacio euclídeo. Todos los espacios localmente homogéneos compactos son cociente de alguno de estos 8 espacios por un subgrupo discreto de isometrías. Todos estos espacios tienen una topología bien conocida (excepto algunos cocientes del hiperbólico que todavía son objeto de investigación). Por lo tanto, si se prueba la Conjetura de Geometrización, la clasificación de las 3-variedades está esencialmente acabada.

Recapitulando, la Conjetura afirma que las 3-variedades obtenidas en la descomposición tórica son geométricas y, por el apartado anterior, sabemos que dichas 3-variedades son toro-irreducibles o fibraciones Seifert. Como es un hecho conocido que estas últimas son geométricas, sólo queda analizar si las 3-variedades toro-irreducibles son geométricas.

Gracias a los avances topológicos realizados en la prueba de la Conjetura, desde 1994 únicamente se consideraban abiertos los dos casos particulares que enunciamos a continuación

- **Conjetura de Hiperbolización.** Si  $M$  es una 3-variedad irreducible tal que  $\pi_1(M)$  es infinito y no contiene ningún subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  entonces  $M$  es del tipo  $H^3/\Gamma$ .
- **Conjetura de Eliptización (incluye la de Poincaré).** Toda 3-variedad irreducible de grupo fundamental finito es un cociente  $S^3/\Gamma$ .

### La Conjetura de geometrización implica La Conjetura de Poincaré

*Demostración* Supongamos que la Conjetura de Geometrización es cierta y sea  $M$  una 3-variedad cerrada simple conexa. Entonces  $M$  es una suma conexa de un número finito de tres variedades primas

$$M = M_1 \# M_2 \# M_3 \# \dots \# M_n$$

donde cada sumandi  $M_i$  es una 3-variedad cerrada y simplemente conexa, como el grupo fundamental de  $M_i$  es trivial, la 3-variedad prima  $M_i$  no contiene toros incompresibles. Entonces la Conjetura de geometrización implica que  $M_i$  es geométrica, además de compacta, cerrada y simplemente conexa, luego es la esfera  $S^3$ , por tanto cada sumando de  $M$  es  $S^3$ , es decir:

$$M = S^3 \# S^3 \# S^3 \# \dots \# S^3 = S^3$$

## Conclusiones

La Conjetura de Poincaré, en topología, es una conjetura ahora demostrada como un teorema verdadero de que toda variedad tridimensional cerrada, simplemente conexa, es topológicamente equivalente a  $S^3$ , que es una generalización de la esfera ordinaria a una dimensión superior (en particular, la conjunto de puntos en el espacio de cuatro dimensiones que son equidistantes del origen). La conjetura fue hecha en 1904 por el matemático francés Henri Poincaré, quien estaba trabajando en la clasificación de variedades cuando notó que las variedades tridimensionales planteaban algunos problemas especiales. Este problema se convirtió en uno de los problemas sin resolver más importantes de la topología algebraica.

Más tarde, Poincaré extendió su conjetura a cualquier dimensión o, más específicamente, a la afirmación de que cada variedad  $n$ -dimensional compacta es homotópicamente equivalente a la  $n$ -esfera (cada una puede deformarse continuamente en la otra) si y solo si es homeomorfa. a la  $n$ -esfera. En otras palabras, la  $n$ -esfera es el único espacio  $n$ -dimensional acotado que no contiene huecos. Para  $n = 3$ , esto se reduce a su conjetura original.

## Bibliografía

- [1] M. Freedman. "The topology of four-dimensional manifolds. J. Differential Geom". En: (1982).
- [2] N. Martínez. "La Conjetura de Poincaré". En: (2000).
- [3] V. Muñoz. "Cien años de la Conjetura de Poincaré". En: (2004).
- [4] S. Smale. "Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four". En: (1961).
- [5] Esther Cabezas R y Vicente Miquel M. "Demostración de Hamilton-Perelman de las Conjeturas de Poincare y Thurston". En: (2006).