

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y  
MATEMÁTICA  
SECCIÓN DE MATEMÁTICA**



**INFORME FINAL DEL CURSO DE  
ESPECIALIZACIÓN:  
ESPECIALIZACIÓN EN 3-VARIEDADES Y NUDOS  
TOPOLÓGICOS**

**TÍTULO DEL INFORME FINAL:  
DESCOMPOSICIÓN PRIMA Y TÓRICA**

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE:  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA**

**PRESENTADO POR:  
CECILIA BRISEIDA HERNÁNDEZ VÁSQUEZ  
N° CARNÉ HV17006**

**DOCENTE ASESOR:  
M.SC. JOSÉ JOAQUÍN APARICIO RAMÍREZ**

**AGOSTO DE 2023**

**SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
AUTORIDADES**



**RECTOR:**

MAESTRO ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

**VICERECTOR ACADÉMICO:**

DR. RAÚL AZCÚNAGA

**VICERECTOR ADMINISTRATIVO:**

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA

**SECRETARIO GENERAL:**

ING. FRANCISCO ALARCÓN

**DEFENSOR DE LOS DERECHOS**

**UNIVERSITARIOS:**

LIC. LUIS ANTONIO MEJÍA LIPE

**FISCAL GENERAL:**

LICDO. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARIN

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
AUTORIDADES**



**DECANO:**

LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RIOS BENÍTEZ:

**VICEDECANO:**

LIC. OSCAR VILLALOBOS

**SECRETARIO:**

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA

**DIRECTOR GENERAL DE PROCESOS DE  
GRADO:**

LIC. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA

**JEFE DE DEPARTAMENTO:**

LICDA. KARLA MARÍA MEJÍA ORTÍZ

**COORDINADOR GENERAL DE PROCESOS DE  
GRADO:**

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1. Superficies . . . . .	8
1.2. 3-Variedades . . . . .	10
1.2.1. 3-variedades irreducibles . . . . .	11
1.3. $j$ -simplejos . . . . .	11
1.4. Variedad atoroidal . . . . .	12
1.5. Superficie compresible e incompresible . . . . .	12
1.6. Variedad de seifert . . . . .	14
1.7. Otras definiciones . . . . .	14
<b>2. Descomposición canónica</b>	<b>16</b>
2.1. Descomposición prima . . . . .	16
2.1.1. Existencia y unicidad de descomposición prima . . . . .	20
2.2. Descomposición en Toro . . . . .	26
2.2.1. Descomposición en toros (Existencia) . . . . .	27
2.2.2. Superficies incompresibles en variedades de Seifert . . . . .	31
2.2.3. Descomposición en toros (Unicidad) . . . . .	35

# Resumen

Definimos algunos conocimientos previos necesarios para desarrollar los siguientes temas que son descomposición prima y descomposición tórica, para ello definimos superficies, luego definimos 3-variedades y entre ello las variedades cerradas, con borde, variedades irreducibles y algunos ejemplos también definimos variedad atoroidal, superficie compresible e incompresible,  $k$ -simplejos y variedad de seifert, finalizaremos con algunas definiciones necesarias como lo es cirugía,  $k$ -esqueleto, homotopía entre otros.

Iniciaremos con algunos temas y definiciones necesarios para el desarrollo del tema, descomposición prima, el cual consistirá principalmente en su teorema y demostración, por lo que el primero en aparecer es el teorema de Alexander, este resultado es bastante importante, luego se tienen proposiciones y lemas que tienen relación con el teorema de Alexander y así nos ayudará para la demostración la cual consistirá en probar tanto la unicidad como existencia de este.

Posteriormente, damos todas las bases para nuestro segundo tema que es descomposición tórica, que es una descomposición de 3-variedades orientables, compactas, irreducibles, que se dividen a lo largo de toros en lugar de esferas, abordaremos la demostración de este en dos partes que son la existencia y unicidad, para ello nos adentramos a superficies incompresibles en variedad de seifert este básicamente influye en gran parte para llegar a demostrar la unicidad y algunos ejemplos gráficos ya que es de suma importancia y con esto finalmente demostraremos completamente el teorema de la descomposición tórica.

**Palabras claves:** Descomposición prima; Descomposición tórica; Superficies compresibles e incompresibles;  $k$ -simplejos, Variedad de seifert; Variedad atoroidal.

# Abstract

We define some prior knowledge necessary to develop the following topics which are prime decomposition and toric decomposition, for this we define surfaces, then we define 3-manifolds and among them the closed varieties, with edge, irreducible varieties and some examples we also define atoroidal variety, compressible surface and incompressible,  $k$ -simplex and variety of seifert, we will end with some necessary definitions such as surgery,  $k$ -skeleton, homotopy among others.

We will start with some topics and definitions necessary for the development of the topic, prime decomposition, which will mainly consist of its theorem and proof, so the first to appear is Alexander's theorem, this result is quite important, then we have propositions and lemmas that are related to Alexander's theorem and will thus help us for the proof which will consist of proving both its uniqueness and existence.

Subsequently, we give all the bases for our second topic, which is toric decomposition, which is a decomposition of orientable, compact, irreducible 3-manifolds, which divide along tori instead of spheres, we will address the proof of this in two parts that are the existence and uniqueness, for this we enter into incompressible surfaces in variety of seifert this basically influences a large part to demonstrate the uniqueness and some graphic examples since it is of utmost importance and with this we will finally completely demonstrate the toric decomposition theorem.

**Keywords:** Prime decomposition; Toric decomposition; Compressible and incompressible surfaces;  $k$ -simplexes; Seifert variety; Atoroidal variety.

# Introducción

Empezamos este trabajo con base de la  $n$ -variedad y definiremos lo que son específicamente superficies y proseguiremos con  $j$ -simplejos, superficie comprensible e incomprensible, variedad de seifert y algunas definiciones, esto ya que nos ayudará más adelante para lograr nuestro objetivo. Nos preguntamos si las 3-variedades pueden descomponerse en primos y descomponerse en toros, así que el objetivo al finalizar este reporte es poder definir lo que es una 3-variedad, mostrar si se puede descomponerse en primos y toros y como se efectúa.

Para poder lograr el objetivo empezaremos con el primer tema que es **Descomposición Prima**, en el cual mostraremos que toda 3-variedad orientable tiene una descomposición en primos que es único hasta un reordenamiento de sus factores. (Se considera que una 3-variedad de primos tiene una descomposición en primos solo consigo misma como factor), además se hará uso del teorema de Alexander que es de suma importancia, definiremos un 3-variedad prima y algunas proposiciones esto para desarrollar este tema.

Finalizaremos este reporte dando el tema **Descomposición Tórica**, el cual el teorema principal lo separamos en dos partes, la existencia y unicidad, para esto analizamos algunas definiciones como la de disco de compresión, superficie esencial entre otros, además exploramos un poco el tema de superficies incomprensibles en variedades de seifert ya que es necesario para así finalizar mostrando la **Descomposición Tórica**.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo abordaremos temas necesarios para el desarrollo de este trabajo tales como **Superficies** que este no son más que 2-variedades, **3-variedades**, entre ello las variedades cerradas, con borde, variedades irreducibles y algunos ejemplos, también definimos **Variedad atoroidal**, **Superficie comprensible e incompresible**, **k-simplejos** y **Variedad de seifert**, lo finalizaremos con algunas definiciones necesarias como lo es cirugía, k-esqueleto, homotopía entre otros.

### 1.1. Superficies.

**Definición 1.1.1.** *Superficie* es un espacio  $S$  que es localmente homeomorfo al plano, es decir, tal que cada punto de  $S$  tiene una vecindad en  $S$  homeomorfa a un abierto  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 1.1.1.** *La esfera  $S^2$*

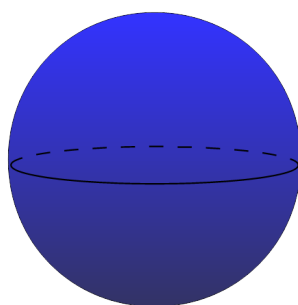


Figura 1.1: La esfera  $S^2$

**Ejemplo 1.1.2.** *El toro  $T^2$*

**Ejemplo 1.1.3.** *Un abierto del plano.*



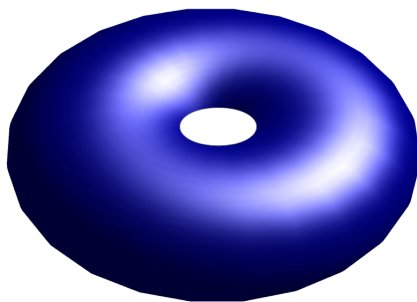


Figura 1.2: El toro  $T^2$

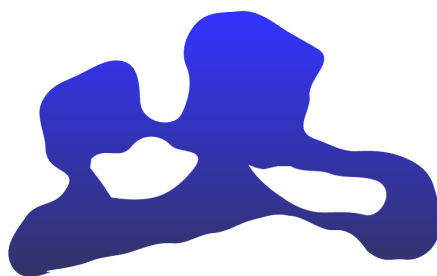


Figura 1.3: Un abierto del plano.

**Definición 1.1.2.** Una **superficie con borde** Es un espacio que es localmente homeomorfo al semiplano  $\mathbb{R}^{2^+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$ . Los puntos de  $S$  de la forma  $(x, 0)$  en  $\mathbb{R}^{2^+}$  forman el **borde** de la superficie, denotado por  $\partial S$ .

**Ejemplo 1.1.4.** Disco con 2 hoyos.

**Ejemplo 1.1.5.** Banda de Möbius.

**Definición 1.1.3.** La **suma conexa** de dos superficies es la superficie que se obtiene quitándole un disco a cada una y pegando los bordes que quedan.

**Definición 1.1.4.** Una **superficie orientable** puede definirse simplemente como una variedad orientable de dimensión dos, donde toda curva cerrada simple contenida tiene una vecindad regular homeomorfa a un cilindro abierto. Cualquier variedad de dimensión dos que no es orientable es **superficie no orientable**

**Definición 1.1.5.** **Superficie no orientable** esto es, si existe al menos una curva cerrada simple contenida que tiene una vecindad regular homeomorfa.

**Definición 1.1.6.** Las **superficies orientables cerradas** tienen la propiedad de dividir el espacio tridimensional (donde siempre pueden ser **encajadas**) en dos regiones

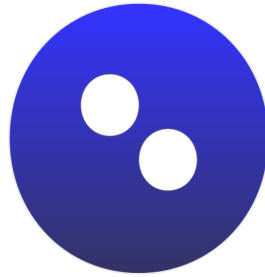


Figura 1.4: Disco con 2 hoyos.

*diferentes y disjuntas: una acotada por dicha superficie que es de volumen finito y otra no acotada exterior a dicho volumen.*

## 1.2. 3-Variedades

**Definición 1.2.1.** *Una 3-variedad es un espacio Topológico hausdorff y con base numerable localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^3$ .*

**Definición 1.2.2.** *Una 3-variedad con borde es un espacio topológico (hausdorff y con base numerable) localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^{3+}$ . El borde de  $M$ , denotado por  $\partial M$ , esta formado por los puntos de  $M$  que no tienen vecindades homeomorfas a  $\mathbb{R}^3$*

**Ejemplo 1.2.1.** *El toro sólido:  $D^2 \times S^1$*

**Ejemplo 1.2.2.** *La botella de Klein sólida:  $D^2 \times [0, 1] / (z, 0) \sim (z, 1)$*

**Ejemplo 1.2.3.** *Los haces de intervalos sobre una superficie, por ejemplo:*

1. *El toro sólido es un haz de intervalos sobre la banda de Moebius*
2. *La botella de Klein sólida es un haz de intervalos sobre un anillo.*

**Definición 1.2.3.** *Las variedades compactas y sin borde las llamaremos **Cerradas***

**Ejemplo 1.2.4.** *La esfera tridimensional  $S^3$*

**Ejemplo 1.2.5.** *El toro tridimensional  $T^3$*

**Definición 1.2.0.1.** *Las variedades no compactas y sin borde las llamaremos **Abiertas***

**Ejemplo 1.2.6.** *Los ejemplos mas simples de variedades abiertas son los abiertos de  $\mathbb{R}^3$*

**Definición 1.2.4.** *Si  $M$  es una 3-variedad y  $S$  una superficie encajada en  $M$  entonces*

1.  *$S$  esta propiamente encajada en  $M$  si  $S \cap \partial M = \partial S$*

2. Una vecindad regular de  $S$  es una vecindad  $N$  homeomorfa a un haz de intervalos sobre  $S$  (si  $S$  tiene borde pedimos además que  $N \cap \partial M$  sea una vecindad regular de  $\partial S$  en  $\partial M$ )
3. Decimos que  $S$  tiene dos lados en  $M$  si  $S$  separa a su vecindad regular, y que  $S$  tiene un lado en  $M$  si no la separa (que  $S$  separe o no depende unicamente de que el haz de intervalos sea trivial o no).
4. Cortar a  $M$  por  $S$  significa quitarle a  $M$  el interior de una vecindad regular de  $S$ . Al resultado se le denota por  $M|_S$ . Observar que si  $S$  tiene dos lados entonces  $M|_S$  es una variedad cuya frontera contiene dos copias de  $S$ . Y si las identificamos de la manera obvia obtenemos una variedad homeomorfa a  $M$ .

### 1.2.1. 3-variedades irreducibles

**Definición 1.2.5.** Una 3-variedad  $M$  es irreducible si cada esfera (suave) en  $M$  es el borde de una bola.

**Ejemplo 1.2.7.**  $\mathbb{R}^3$  y  $S^3$  son irreducibles.

**Ejemplo 1.2.8.**  $S^2 \times [0, 1]$  y  $S^2 \times S^1$  no son irreducibles.

## 1.3. j-simplejos

**Definición 1.3.1.** Denote la  $(k + 1)$ -tupla en  $\mathbb{R}^{k+1}$  con la  $i$ -ésima entrada 1 y todas las demás entradas 0 por  $v_i$ , el conjunto

$$\{a_0v_0 + a_1v_1 + \dots + a_kv_k : a_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, k, \sum_{i=0}^k a_i = 1\}$$

se llama  $k$ -simplejo estándar (cerrado) y se denota por  $[v_0, \dots, v_k]$  o simplemente por  $[s]$ . La dimensión del  $k$ -simplejo estándar es  $k$ .

**Definición 1.3.2.** El conjunto

$$\{a_0v_0 + a_1v_1 + \dots + a_kv_k : a_i > 0 \text{ para } i = 1, \dots, k, \sum_{i=0}^k a_i = 1\}$$

se llama  $k$ -simplejo estándar (abierto) y se denota por  $(v_0, \dots, v_k)$  o simplemente por  $(s)$ . también llamamos  $(s)$  al interior de  $[s]$ .

**Ejemplo 1.3.1.** El 0-simplejo estándar es el punto  $1 \in \mathbb{R}$ . Esto también es el 0-simplejo estándar abierto.

- El 1-simplejo estándar es homeomorfo a un intervalo cerrado.
- El 2-simplejo estándar es un "triángulo" con vértices en  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ .
- El 3-simplejo estándar es un tetraedro con vértices en  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 0, 1)$ .

## 1.4. Variedad atoroidal

**Definición 1.4.1.** Una superficie correctamente incrustada  $S \subset M$  es  $\partial$ -paralela si es isotópica, fijando  $\partial S$ , a una subsuperficie de  $\partial M$ . Por extensión isotópica esto es equivalente a decir que  $S$  separa un producto  $S \times [0, 1]$  de  $M$  con  $S = S \times \{0\}$

**Definición 1.4.2.** Una variedad irreducible  $M$  es un toroide si todo **atoroidal** incompresible en  $M$  es  $\partial$ -paralelo.

**Definición 1.4.3.** Una 3-variedad  $M$  es atoroidal si no contiene toros esenciales.

**Lema 1.4.1.** Si  $M$  es una 3-variedad compacta irreducible, entonces existe una colección finita de toros  $T_1, T_2, \dots, T_n$  tales que  $M|_{\cup T_i}$  es atoroidal.

**Demostración.** Si  $M$  contiene un toro esencial  $T_1$  podemos cortar por ahí para obtener una variedad  $M_1$ , si  $M_1$  tiene un toro esencial podemos cortarla por ahí para obtener una variedad  $M_2$ , etc. Este proceso debe terminar porque si no  $M$  tendría una cantidad no acotada de toros incompresibles no paralelos. □

**Definición 1.4.4.** Una superficie  $F$  propiamente encajada en una 3-variedad  $M$  es paralela a la frontera si  $F$  es isotópica, fijando  $\partial F$ , a una superficie contenida en  $\partial M$

Si  $M$  es una variedad de Seifert y  $S$  es una superficie en  $M$ , decimos que  $S$  es horizontal si cruza transversalmente a las fibras (es decir, si no es tangente a ninguna) y que  $S$  es vertical si es una unión de fibras.

## 1.5. Superficie compresible e incompresible

**Definición 1.5.1.** Una superficie  $S$  compresible en  $M$  si existe una curva en  $S$  que bordea un disco  $D$  en  $M$ , pero no es borde de un disco en  $S$ .

Algunos datos sobre las superficies incompresibles:

1. Una superficie conexa de 2-lados  $S$  que no es una esfera o un disco es incompresible si el mapeo  $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  inducido por la inclusión es inyectivo. Esto se debe a que si  $D \subset M$  es un disco de compresión, entonces  $\partial D$  es un homotópico nulo en  $M$ , por lo tanto, también en  $S$  si el mapeo  $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  es inyectivo. Entonces es un hecho estándar en la teoría de superficies que un círculo incrustado homotópicamente nulo en una superficie debe delimitar un disco en la superficie. Nota que es suficiente suponer que las dos inclusiones de  $S$  en  $M|_S$  a cada lado de  $S$  son inyectivas en  $\pi_1$ .

Para superficies de 1-lado, estas dos condiciones de incompresibilidad ya no son equivalentes, siendo la inyectividad  $\pi_1$  estrictamente más fuerte en general.

2. No hay superficies incompresibles en  $\mathbb{R}^3$  o, de manera equivalente, en  $S^3$ . Esto es inmediato a la inversa de (1), pero también se puede probar directamente, como sigue. Como en la prueba del teorema de Alexander, después de perturbar isotópicamente una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  para hacer que la función de altura sea una función de Morse con todos los puntos críticos en diferentes niveles, hay una secuencia de cirugías en  $S$  a lo largo de discos horizontales que convierten a  $S$  en una Unión

disjunta de esferas. Si  $S$  es incompresible, cada cirugía sucesiva divide a  $S$  en dos superficies, una de las cuales es una esfera. Esta esfera bordea bolas en cada lado en  $S^3$ , y podemos usar una de estas bolas para isótopo  $S$  en  $S^3$  a la otra superficie producida por la cirugía. Al final de la secuencia de cirugías hemos isotopizado  $S$  a una esfera, pero la definición de incompresibilidad no permite esferas.

3. Un toroide  $T$  de 2-lados en un  $M$  irreducible es compresible si y sólo si  $T$  limita un toroide sólido  $S^1 \times D^2 \subset M$  o se encuentra en una bola en  $M$ . Porque si  $T$  es compresible, hay una cirugía de  $T$  a lo largo de algún disco  $D$  que convierte a  $T$  en una esfera. Esta esfera bordea una bola  $B \subset M$  por la suposición de que  $M$  es irreducible. Ahora hay dos casos: sí  $B \cap D = \emptyset$ , al invertir la cirugía se pegan dos discos en  $\partial B$  para crear un toro sólido delimitado por  $T$ . La otra posibilidad es que  $D \subset B$ , y luego  $T \subset B$ . Tenga en cuenta que si  $M = S^3$  la bola  $B$  puede elegirse disjunta de  $D$ , por lo que la alternativa  $D \subset B$  no es necesaria. Así, usando la afirmación (2) anterior, obtenemos el resultado, debido a Alexander, de que un toro en  $S^3$  bordea con un toro sólido en un lado o en el otro.
4. Si  $S \subset M$  es una colección finita de superficies incompresibles disjuntas, entonces  $M$  es irreducible si y solo si  $M|_S$  es irreducible. Pues supongamos primero que  $M$  es irreducible. Entonces, una 2-esfera en  $M|_S$  bordea una bola en  $M$ , y esta bola debe estar separada de  $S$  por la declaración (2) anterior, por lo que la esfera bordea una bola en  $M|_S$  y  $M|_S$  es irreducible. Por el contrario, dada una esfera  $S^2 \subset M$  que podemos suponer que es transversal a  $S$ , considere un círculo de  $S \cap S^2$  que está más adentro en  $S^2$ , delimitando un disco  $D \subset S^2$  con  $D \cap S = \partial D$ . Por la incompresibilidad de las componentes de  $S$ ,  $\partial D$  bordea un disco  $D' \subset S$ . La esfera  $D \cap D'$  bordea una bola  $B \subset M$  si  $M|_S$  es irreducible. Debemos tener  $B \cap S = D'$ , de lo contrario, un componente de  $S$  estaría contenido en  $B$ , contrario a la declaración (2). Isotopar  $S$  empujando  $D'$  a través de  $B$  a  $D$  y un poco más allá eliminar el círculo  $\partial D$  de  $S \cap S^2$ , junto con cualquier otro círculo de  $S \cap S^2$  que se encuentre en  $D'$ . Para el nuevo  $S$  sigue siendo cierto que  $M|_S$  es irreducible ya que es difeomorfo al antiguo  $M|_S$  por extensión isotópica. Así podemos repetir este proceso de eliminar círculos de  $S \cap S^2$  hasta que finalmente obtengamos  $S \cap S^2 = \emptyset$ , o en otras palabras  $S^2 \subset M|_S$ . Dado que  $M|_S$  es irreducible, entonces  $S^2$  bordea una bola en  $M|_S$  y, por lo tanto, también en  $M$ .
5. Si  $S \subset M$  es una colección finita de superficies disjuntas correctamente incrustadas que son incompresibles o esferas o discos, entonces una superficie  $T \subset M|_S$  es incompresible en  $M$  si y solo si es incompresible en  $M|_S$ . Es obvio que la incompresibilidad en  $M$  implica la incompresibilidad en  $M|_S$ . Para la inversa menos trivial, sea  $D \subset M$  un disco de compresión para  $T$ . Si esto interseca a  $S$ , podemos suponer que la intersección es transversal, por lo que  $D \cap S$  consta de círculos en el interior de  $D$ . Si cualquiera de estos círculos une discos en  $S$ , podemos tomar el círculo que está más al interior de  $S$ , delimitando un disco  $D_0 \subset S$  con  $D_0 \cap D = \partial D_0$ . Podemos usar  $D_0$  para aumentar  $D$ , produciendo un nuevo disco  $D$  que se cruza con  $S$  en menos círculos. Después de repetir este paso un número finito de veces, podemos suponer que  $D \cap S$  no contiene círculos que unen discos en  $S$ . Si quedan círculos en  $D \cap S$ , elija uno que esté más adentro en  $D$ , limitando un disco  $D_0 \subset D$  con  $D_0 \cap S = \emptyset$ . Dado que las componentes de  $S$  son incompresibles o esferas o discos, el círculo  $\partial D_0$  debe delimitar un disco en  $S$ , al contrario de lo que hemos

dispuesto mediante la cirugía anterior. Entonces debemos tener  $D \cap S = \emptyset$ . Dado que  $T$  es incompresible en  $M|_S$ , el círculo  $\partial D$  bordea un disco en  $T$ . Esto muestra que  $T$  es incompresible en  $M$ .

**Definición 1.5.2.** Una superficie correctamente incrustada es esencial si se trata de una esfera que no bordea con una bola, un disco que no se separa de una bola, o ambos incompresibles y  $\partial$ -incompresibles.

**Ejemplo 1.5.1.** Las únicas superficies esenciales en  $S^1 \times D^2$  son los discos meridianos

## 1.6. Variedad de seifert

**Definición 1.6.1.** Un **haz** de círculos es una variedad  $M$  formada por círculos que localmente se ve como un producto  $D^2 \times S^1$ . El espacio cociente que se obtiene de  $M$  al colapsar cada círculo a un punto es una superficie  $F$ , y decimos que  $M$  es un haz sobre  $F$ . El haz es **trivial** si es homeomorfo a un producto  $F \times S^1$

**Ejemplo 1.6.1.** El haz tangente unitario de una superficie (formado por todos los vectores tangentes de norma 1) es un haz que no es trivial, a menos que la superficie sea un toro.

**Definición 1.6.2.** Una **fibración de Seifert** es una descomposición de una 3-variedad en círculos, de modo que cada círculo tiene una vecindad que es un toro sólido fibrado por círculos obtenido de  $D^2 \times [0, 1]$  identificando las tapas por una rotación de  $2\pi p/q$  radianes, donde  $p/q \in \mathbb{Q}$ . Los círculos son las imágenes de uno o varios intervalos  $z \times [0, 1]$  que se pegan al hacer la identificación.

**Definición 1.6.3.** Una **variedad de Seifert** es una variedad que admite una fibración de Seifert. Cada fibra de una fibración de Seifert tiene una multiplicidad bien definida, que es el número de veces que un disco transversal a la fibra toca a las fibras vecinas. Las fibras de multiplicidad 1 se llaman **regulares** y las otras se llaman **excepcionales**.

**Observación 1.6.1.**

- Las fibras excepcionales son aisladas y están en el interior de  $M$  (ya que cada fibra tiene una vecindad que es un toro sólido sin más fibras excepcionales).
- Si no hay fibras excepcionales, la variedad es un haz de círculos.
- La frontera de una variedad de Seifert consta de toros y/o botellas de Klein.

**Proposición 1.6.1.** Si  $M$  es una variedad de fibras de Seifert irreducible compacta conectada, entonces cualquier superficie esencial en  $M$  es vertical (una unión de fibras regulares) u horizontal (transversal a todas las fibras)

## 1.7. Otras definiciones

**Definición 1.7.1.** Si  $k$  es un nudo en  $S^3$ , podemos obtener muchas variedades cerradas quitándole a  $S^3$  una vecindad tubular de  $k$  y volviéndola a pegar de otra manera (es decir, pegándole al exterior de  $k$  un toro sólido por medio de algún homeomorfismo del toro). A esta operación se le llama **cirugía** en  $k$ , y el resultado solo depende como se pegue el meridiano del toro sólido.

**Definición 1.7.2.** Particularmente en topología algebraica, el ***n*-esqueleto** de un espacio topológico  $X$  presentado como un complejo simplicial se refiere al subespacio  $X_n$  que es la unión de los simples de  $X$  (resp. celdas de  $X$ ) de dimensiones  $m \geq n$ . En otras palabras, dada una definición inductiva de un complejo, el *n*-esqueleto se obtiene deteniéndose en el *n*-ésimo paso.

**Definición 1.7.0.1. Homotopía:** Dos mapeos continuos  $f, g : X \rightarrow Y$  entre espacios topológicos son homotópicos si pueden deformarse continuamente entre si, es decir, si hay un mapeo  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $F|X \times \{0\} = f$  y  $F|X \times \{1\} = g$  tal mapeo se denomina **Homotopía** entre  $f$  y  $g$  y decimos que  $f$  puede homotoparse en  $g$  a través de  $F$ . Las restricciones  $F_{X \times \{t\}}$  para  $t \in [0, 1]$  son las etapas de la homotopía y generalmente las denotamos por  $F_t : X \rightarrow Y$

**Definición 1.7.0.2. Isotopía:** Una Isotopía entre dos mapeos  $f, g : X \rightarrow Y$  es una homotopía  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  entre  $f$  y  $g$  tal que cada etapa  $F_t : X \rightarrow Y$  para  $t \in [0, 1]$  es un homeomorfismo sobre su imagen.

**Definición 1.7.3.** Sea  $M$  una 3-variedad. Una  $M$  perforada es una 3-variedad homeomorfo a  $M \setminus$  (unión finita de 3-bolas disjuntas por pares). Sea  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$  una unión disjunta de 2-esferas en una 3-variedad  $M$ . Decimos que  $S$  es un conjunto independiente de 2-esferas si ningún componente de  $M \setminus S$  es una 3-esfera perforada.

**Definición 1.7.4.** El **cobordismo** es una relación de equivalencia fundamental en la clase de variedades compactas de la misma dimensión, establecida utilizando el concepto de frontera de una variedad. Dos variedades de la misma dimensión son cofronteras si la unión disjunta es el límite de una variedad compacta una dimensión mayor.

**Definición 1.7.5.** Una **triangulación** de una superficie  $S$  es una subdivisión  $S$  en triángulos topológicos que se tocan en aristas o en vértices. Una superficie es triangulable si y solo si es homeomorfa a un complejo simplicial.

## Capítulo 2

# Descomposición canónica

*Este capítulo comienza con el primer resultado general sobre 3-variedades, el teorema de Kneser que toda 3-variedad  $M$  compacta orientable se descompone únicamente como una variedad de suma conexa  $M = P_1 \# \dots \# P_n$  de 3-variedades  $P_i$  que son primos en el sentido de que pueden descomponerse como sumas conexas solo de forma trivial  $P_i = P_i \# S^3$ . Después de la descomposición prima, pasamos en la segunda sección Descomposición en toro de Jaco-Shalen y Johansson. Se necesitarán algunos resultados básicos sobre variedades diferenciables. En particular, esto incluye:*

- *Vecindades tubulares: Las subvariedades tienen vecindades que son difeomorfas a sus haces normales, y estas vecindades son únicas hasta la isotopía.*
- *Extensión de isotopía: Una isotopía de una subvariedad se puede extender a una isotopía de el colector ambiental.*
- *Transversalidad: Una subvariedad de codimensión  $p$  puede ser perturbada por una pequeña isotopía para intersectar otra subvariedad de codimensión  $q$  transversalmente, y luego la intersección es una subvariedad de codimensión  $p + q$ .*
- *Triangulación: Una variedad suave es homeomorfa a un complejo simplicial cuyos simples están suavemente incrustados.*

*Se supone que las 3-variedades en este capítulo son conexas, orientables y compactas, posiblemente con borde, a menos que se indique o se construya de otra manera.*

### 2.1. Descomposición prima

*Implícito en el teorema de la descomposición prima está el hecho de que  $S^3$  es primo, de lo contrario solo se podría esperar una descomposición en elementos primos módulo invertible, como en álgebra. El hecho de que  $S^3$  es primo es una consecuencia del teorema de Alexander, nuestro primer tema. **Teorema de Alexander** este resultado bastante fundamental fue uno de los primeros teoremas en el tema:*

**Teorema 2.1.1.** *Cada 2-esferas incrustadas en  $\mathbb{R}^3$  limita una 3-bola incrustada.*

*La versión de esto que demostró Alexander, en la década de 1920, era ligeramente diferente: una esfera incrustada linealmente por partes en  $\mathbb{R}^3$  limita una bola topológica. No debería haber sido difícil para él mejorar la conclusión de decir que la pelota*



también era lineal por piezas. El famoso ejemplo de la esfera con cuernos de Alexander, que fue construida aproximadamente al mismo tiempo, muestra que una esfera topológica no tiene por qué estar unida a una bola topológica. La prueba que damos para esferas lisas sigue la misma estrategia general que la prueba de Alexander para esferas lineales por partes, a saber, cortar el dado esfera a lo largo de planos horizontales para producir esferas más simples y aplicar un argumento de inducción. Alexander cortó a lo largo de planos horizontales que pasan por los vértices de la esfera triangulada. En la categoría suave, se corta a lo largo de planos horizontales que son transversales a la esfera. Para tener un buen punto de partida para la inducción, haremos una isotopía preliminar de la esfera para arreglar que la proyección de la esfera sobre el eje  $z$  sea una función morse, así que supondremos que se sabe un poco de teoría Morse. Esto podría evitarse usando una construcción más directa como al comienzo de [Hatcher 1983], pero esto ralentizaría la exposición.

La prueba también usará el resultado análogo en una dimensión inferior, que un círculo uniforme en  $\mathbb{R}^2$  delimita un disco uniforme. Esto se puede demostrar mediante un argumento inductivo similar pero más simple. En esta dimensión es incluso cierto que un círculo incrustado topológicamente en  $\mathbb{R}^2$  limita un disco topológico, el teorema de Schoenflies, cuya demostración es más difícil ya que no es posible un argumento inductivo simple.

Hay una prueba simple debido a M. Brown en 1960 de que un  $S^{n-1}$  incrustado suavemente en  $\mathbb{R}^n$  limita una bola topológica, para  $n$  arbitrario. Se sabe que la bola es una bola suave para todo  $n$  excepto  $n = 4$  donde esta pregunta permanece abierta. Para  $n \geq 5$  esto se sigue del teorema del  $h$ -cobordismo (más la teoría de la cirugía en el caso de  $n = 5$ ).

**Demostración.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie cerrada incrustada, con  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  la función de altura dada por la  $z$ -coordenada. El primer paso es hacer que  $h$  sea una función morse, como sigue. Podemos aproximar  $h$  arbitrariamente con una función morse, y la trayectoria lineal entre  $h$  y la aproximación da una pequeña homotopía de  $h$ . Manteniendo las mismas coordenadas  $x$  e  $y$  para  $S$ , esto da una pequeña homotopía de  $S$  en  $\mathbb{R}^3$ . Dado que las incrustaciones están abiertas en el espacio de todos los mapas (con la topología  $C^\infty$ ), si esta homotopía es lo suficientemente pequeña, será una isotopía. Mediante una pequeña isotopía adicional, también podemos suponer que los puntos críticos finitos de  $h$  (máximos locales, mínimos y sillars) tienen todos valores críticos distintos.

Sean  $a_1 < \dots < a_n$  valores no críticos de  $h$  tales que cada intervalo  $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_n, \infty)$  contiene sólo un valor crítico. Para cada  $i$ ,  $h^{-1}(a_i)$  consta de un número de círculos disjuntos en el nivel  $z = a_i$ . Por la versión bidimensional del teorema de Alexander, cada círculo de  $h^{-1}(a_i)$  limita un disco en el plano  $z = a_i$ . Sea  $C$  un círculo de  $h^{-1}(a_i)$  que está más adentro en el plano  $z = a_i$ , entonces el disco  $D$  que limita en este plano es disjunto de todos los otros círculos de  $h^{-1}(a_i)$ . Podemos usar  $D$  para mover  $S$  a lo largo de  $C$ . Esto significa que para algunos  $\epsilon > 0$  pequeños, primero eliminamos de  $S$  el anillo abierto  $A$  que consta de puntos cerca de  $C$  entre los dos planos  $z = a_i \pm \epsilon$ , luego tapamos el par resultante de círculos límite de  $S - A$  sumando a  $S - A$  los discos en  $z = a_i \pm \epsilon$  que limitan estos círculos. El resultado de esta cirugía es, por tanto, una nueva superficie incrustada, con quizás un componente más que  $S$ , si  $C$  se separa de  $S$ .

Este proceso de cirugía ahora se puede iterar, tomando en cada etapa un círculo remanente más interno de  $h^{-1}(a_i)$ , y eligiendo  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño para que

los discos de tapa horizontales recién introducidos se crucen con la superficie construida previamente solo en sus límites. Consulte la figura 2.1. Después de elevar todos los círculos de  $h^{-1}(a_i)$  para todo  $i$ , la superficie original  $S$  se convierte en una unión disjunta de superficies cerradas  $S_j$ , cada una de las cuales consta de una serie de extremos horizontales junto con una subsuperficie conectada  $S'_j$  de  $S$  que contiene como máximo máximo un punto crítico de  $h$ .

□

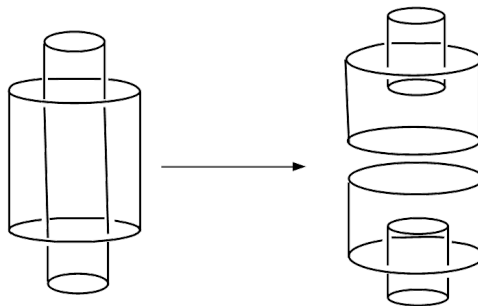


Figura 2.1:

**Lema 2.1.1.** *Cada  $S_j$  es isotópico para uno de los siete modelos: los cuatro que se muestran en la Figura 2.2, más otros tres que se obtienen al darles la vuelta que se pueden observar en la Figura 2.3. Por lo tanto, cada  $S_j$  bordea una bola.*

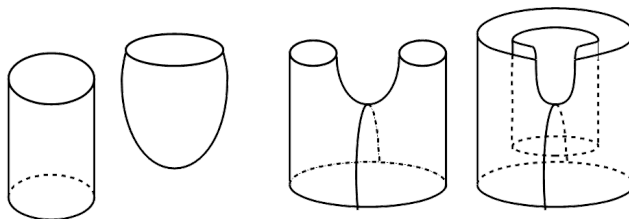


Figura 2.2:

**Demostración.** Considere el caso de que  $S_j$  tiene un punto silla, digamos en el nivel  $z = a$ . Primer isótopo  $S_j$  en una vecindad de este nivel,  $z = a$  de modo que para algún  $\delta > 0$  la subsuperficie  $S_j^\delta$  de  $S_j$  que se encuentra en  $a - \delta \leq z \leq a + \delta$  es vertical, es decir, una unión de segmentos de línea vertical, excepto en una vecindad  $N \subset \text{int}(S_j^\delta)$  de la silla, donde  $S_j$  tiene la forma estándar de las sillas en los modelos. A continuación, el isótopo  $S_j$  de modo que su subsuperficie  $S'_j$  (el complemento de los casquetes horizontales) se encuentre en  $S_j^\delta$ .

Esto se hace empujando sus tapas horizontales, primero las más internas, para que queden

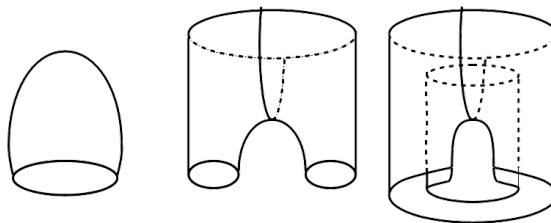


Figura 2.3:

cerca de  $z = a$ , como en la figura siguiente, manteniendo las tapas horizontales durante toda la deformación.

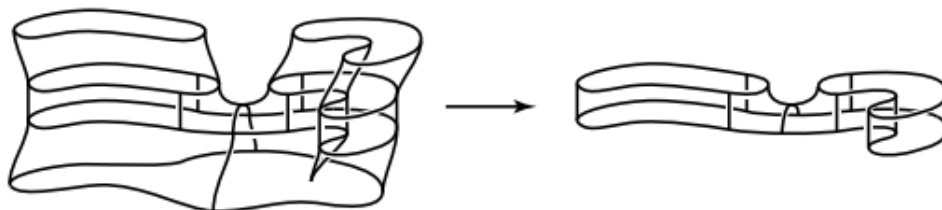


Figura 2.4:

Una vez hecho esto,  $S_j$  es completamente vertical, excepto por la silla estándar y las tapas horizontales. Visto desde arriba,  $S_j$  menos sus extremos horizontales se ve como dos círculos uniformes, posiblemente anidados, unidos por un asa 1, una vecindad de un arco que une los dos círculos, como en la figura siguiente.

Dado que estos círculos unen discos, pueden ser isotópicos a la posición estándar de uno de los modelos, produciendo una isotopía de  $S_j$  a uno de los modelos. Los casos restantes, cuando  $S'_j$  tiene máximo o mínimo local, o no tiene puntos críticos, son similares pero más sencillo.

□

Ahora asumimos que la superficie dada  $S$  es una esfera. Dado que cada círculo en una esfera separa la esfera en dos componentes, cada cirugía divide una esfera en dos esferas. Invertiendo la secuencia de cirugías, comenzamos con una colección de esferas  $S_j$  que saltan bolas. La afirmación inductiva es que en cada etapa del proceso de cirugía inversa, tenemos una colección de esferas, cada una de las cuales rodea una bola. Para el paso inductivo tenemos dos bolas  $A$  y  $B$  limitadas por las esferas  $\partial A$  y  $\partial B$  resultantes de una cirugía. Dejando que el  $\epsilon$  para la cirugía vaya a 0 isotopos  $A$  y  $B$  para que  $\partial A \cap \partial B$  sea igual al disco de cirugía horizontal  $D$ . Hay dos casos, salvo cambios de notación:

- $A \cap B = D$ , con la esfera previa a la cirugía indicada como  $\partial(A + B)$ .
- $B \subset A$ , con la esfera previa a la cirugía indicada como  $\partial(A - B)$

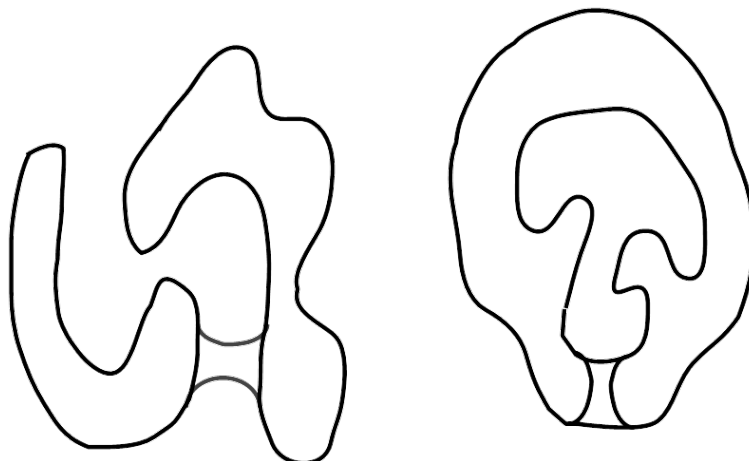


Figura 2.5:

*Dado que  $B$  es una bola, el lema siguiente implica que  $A$  y  $A \pm B$  son difeomorfos. Como  $A$  es una bola, también lo es  $A \pm B$ , y el paso inductivo se completa.*

**Lema 2.1.2.** *Dada una  $n$ -variedad  $M$  y una bola  $B^{n-1} \subset \partial M$ , obtengamos la variedad  $N$  de  $M$  uniendo una bola  $B^n$  mediante una identificación de una bola  $B^{n-1} \subset \partial B^n$  con la bola  $B^{n-1} \subset \partial M$ . Entonces  $M$  y  $N$  son difeomorfos.*

**Demostración.** Cualesquiera dos bolas de codimensión cero en una variedad conectada son isotópicas. Aplicando este hecho a la inclusión dada  $B^{n-1} \subset \partial B^n$  y usando la extensión isotópica, concluimos que el par  $(B^n, B^{n-1})$  es difeomorfo al par estándar. Entonces, hay una isotopía de  $\partial N$  a  $\partial M$  en  $N$ , fija fuera de  $B^n$ , empujando  $\partial N - \partial M$  a través de  $B^n$  hasta  $\partial M - \partial N$ . Por extensión isotópica,  $M$  y  $N$  son entonces difeomorfos.  $\square$

*Un punto técnico con el que hemos sido un poco laxos en los argumentos anteriores es el tema de las esquinas. La construcción de la cirugía tal como la hemos descrito produce superficies en  $\mathbb{R}^3$  que no son suaves a lo largo de las curvas delimitadas por los casquetes horizontales, ya que tienen dos planos tangentes distintos en cada punto de estas curvas, siendo uno tangente horizontal y el otro no horizontal. Sería fácil modificar la definición de cirugía para redondear estas esquinas y hacer que todas las cirugías produzcan superficies genuinamente lisas. Se aplican consideraciones similares para el Lema.*

**Definición 2.1.1.** *Una 3-variedad  $M$  conexa se llama prima si  $M = P \# Q$  implica  $P = S^3$  o  $Q = S^3$*

### 2.1.1. Existencia y unicidad de descomposición prima

*Sea  $M$  una 3-variedad y  $S \subset M$  una superficie que está correctamente incrustada, es decir,  $S \cap \partial M = \partial S$ , una intersección transversal. Por el momento no supondremos que  $S$  es conexo. Eliminando una pequeña vecindad tubular abierta  $N(S)$  de  $S$  de  $M$ , obtenemos una 3-variedad de  $M|_S$  que decimos que se obtiene de  $M$  **dividiendo** a lo largo de  $S$ . La vecindad  $N(S)$  es un conjunto de intervalos sobre  $S$ , por lo que si  $M$  es*

orientable,  $N(S)$  es un producto  $S \times (-\epsilon, \epsilon)$  si y solo si  $S$  es orientable.

Ahora suponga que  $M$  es conexo y  $S$  es una esfera tal que  $M|_S$  tiene dos componentes,  $M'_1$  y  $M'_2$ . Sea  $M_i$  a partir de  $M'_i$  relleno su esfera límite correspondiente a  $S$  con una bola. En esta situación decimos que  $M$  es la **suma conexa**  $M_1 \# M_2$ . Hacemos notar que  $M_i$  está determinada únicamente por  $M'_i$  ya que dos formas cualesquiera de llenar una bola  $B^3$  difieren por un difeomorfismo de  $\partial B^3$ , y cualquier difeomorfismo de  $\partial B^3$  se extiende a un difeomorfismo de  $B^3$ . Este último hecho se deriva de la afirmación más fuerte de que cualquier difeomorfismo de  $S^2$  es isotópico para la identidad o para un reflejo (inversión de orientación), y cada uno de estos dos difeomorfismos se extiende sobre una bola.

La operación de suma conexa es conmutativa por definición y tiene  $S^3$  como identidad ya que se obtiene una descomposición  $M = M \# S^3$  eligiendo la esfera  $S$  para acotar una bola en  $M$ . La operación de suma conexa también es asociativa, ya que en una secuencia de descomposiciones de suma conexa, por ejemplo,  $M_1 \# (M_2 \# M_3)$ , las esferas que se dividen más tarde pueden ser empujadas fuera de las bolas que llenan las esferas que se dividen antes, por lo que uno puede asumir todas las esferas que se dividen. las esferas están embebidas de forma disjunta en la variedad original  $M$ .

Así  $M = M_1 \# \dots \# M_n$  significa que hay una colección  $S$  que consta de  $n - 1$  esferas disjuntas tal que  $M|_S$  tiene  $n$  componentes  $M'_i$ , con  $M_i$  obtenido de  $M'_i$  relleno con bolas el borde de esferas correspondientes a esferas de  $S$ .

**Proposición 2.1.1.1.** *La única 3-variedad prima orientable que no es irreducible es  $S^1 \times S^2$ .*

**Demostración.** Si  $M$  es primo, cada 2-esferas en  $M$  que separa a  $M$  en dos componentes delimita una bola. Entonces, si  $M$  es primo, pero no irreducible, debe existir una esfera que no se separe en  $M$ . Para una esfera  $S$  que no se separa en una variedad orientable  $M$ , la unión de un producto vecindad  $S \times I$  de  $S$  con una vecindad tubular de un arco que une  $S \times \{0\}$  a  $S \times \{1\}$  en el complemento de  $S \times I$  es una variedad difeomorfo a  $S^1 \times S^2$  menos una bola. Así  $M$  tiene  $S^1 \times S^2$  como sumando conexo. Suponiendo que  $M$  es primo, entonces  $M = S^1 \times S^2$ .

Queda por demostrar que  $S^1 \times S^2$  es primo. Sea  $S \subset S^1 \times S^2$  una esfera separadora, por lo que  $S^1 \times S^2|_S$  consta de dos 3-variedades compactas  $V$  y  $W$ , cada una con un límite de 2-esferas. Tenemos  $\mathbb{Z} = \pi_1(S^1 \times S^2) \approx \pi_1 V * \pi_1 W$ , entonces  $V$  o  $W$  deben ser simplemente conexos, digamos que  $V$  es simplemente conexo. La cubierta universal de  $S^1 \times S^2$  se puede identificar con  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , y  $V$  se eleva a una copia difeomorfa  $\tilde{V}$  de sí mismo en  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . La esfera  $\partial \tilde{V}$  limita una bola en  $\mathbb{R}^3$  por el teorema de Alexander. Como  $\partial \tilde{V}$  también limita a  $\tilde{V}$  en  $\mathbb{R}^3$  concluimos que  $\tilde{V}$  es una bola, por lo tanto, también  $V$ . Por lo tanto, cada esfera que se separa en  $S^1 \times S^2$  limita con una bola, por lo que  $S^1 \times S^2$  es primo. □

**Teorema 2.1.1.1.** *Sea  $M$  compacto, conexo y orientable. Entonces hay una descomposición  $M = P_1 \# \dots \# P_n$  con cada  $P_i$  primo, y esta descomposición es única hasta la inserción o eliminación de los  $S^3$ .*

**Demostración.** La existencia de descomposiciones de números primos es más difícil, y la abordamos primero. Si  $M$  contiene un  $S^2$  que no se separa, esto da una descomposición  $M = N \# S^1 \times S^2$ , como vimos en la demostración de la Proposición 2.1.1.1. Podemos repetir este paso de dividir un sumando  $S^1 \times S^2$  siempre que tengamos esferas que no

se separen, pero el proceso no se puede repetir indefinidamente ya que cada sumando  $S^1 \times S^2$  da un sumando  $\mathbb{Z}$  de  $H_1(M)$ , que es un abeliano finitamente generado grupo ya que  $M$  es compacto. Así nos vemos reducidos a probar la existencia de descomposiciones de primos en el caso de que cada 2-esferas en  $M$  se separe. Cada componente de 2-esferas de  $\partial M$  corresponde a un sumando  $B^3$  de  $M$ , por lo que también podemos suponer que  $\partial M$  no contiene 2-esferas.

Probaremos la siguiente afirmación, que implica claramente la existencia de descomposiciones de números primos:

Existe un límite en el número de esferas en un sistema  $S$  de esferas disjuntas que satisface:

(\*) Ninguna componente de  $M|_S$  es una 3-esfera perforada, es decir, una variedad compacta obtenida de  $S^3$  eliminando un número finito de bolas abiertas con cierres disjuntos.

Antes de probar esto hacemos una observación preliminar: Si  $S$  satisface (\*) y operamos sobre una esfera  $S_i$  de  $S$  usando un disco  $D \subset M$  con  $D \cap S = \partial D \subset S_i$ , entonces al menos uno de los sistemas  $S', S''$  obtenidos al reemplazar  $S_i$  por las esferas  $S'_i$  y  $S''_i$  resultantes de la cirugía satisface (\*). Para ver esto, primero perturbe  $S'_i$  y  $S''_i$  para que sean disjuntos de  $S_i$  y entre sí, de modo que  $S_i, S'_i$  y  $S''_i$  juntos formen una 3-esfera perforada  $P$ .

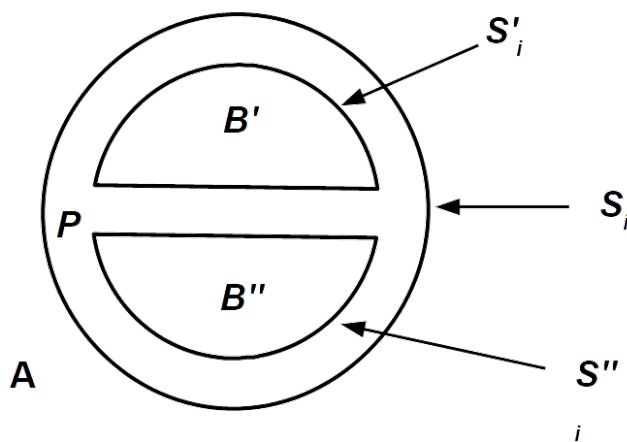


Figura 2.6:

En el otro lado de  $S_i$  de  $P$  tenemos una componente  $A$  de  $M|_S$ , mientras que las esferas  $S'_i$  y  $S''_i$  dividen la componente de  $M|_S$  que contiene  $P$  en partes  $B', B''$  y  $P$ . Si tanto  $B'$  como  $B''$  fueran esferas perforadas, entonces  $B' \cup B'' \cup P$ , una componente de  $M|_S$ , sería una esfera perforada, contrariamente a la hipótesis.

Entonces uno de  $B'$  y  $B''$ , digamos  $B'$ , no es una esfera perforada. Si  $A \cup P \cup B''$  fuera una esfera perforada, esto obligaría a  $A$  a ser una esfera perforada, por el teorema de Alexander. Esto también es contrario a la hipótesis. Entonces concluimos que ninguno de

los componentes de  $M|_{S'}$  adyacente a  $S'_i$  hay una esfera perforada, por lo que el sistema de esferas  $S'$  satisface (\*).

Ahora probamos la afirmación de que el número de esferas en un sistema  $S$  que satisface (\*) está acotado. Elija una triangulación suave  $\mathcal{T}$  de  $M$ . Esto tiene solo un número finito de simples ya que  $M$  es compacto. El sistema dado  $S$  se puede perturbar para que sea transversal a todos los simples de  $\mathcal{T}$ . Esta perturbación se puede realizar inductivamente sobre el esqueleto de  $\mathcal{T}$ : primero hacer  $S$  disjunto de los vértices, luego transversal a las aristas, juntándolos en un número finito de puntos, luego transversal a 2-simples, encontrándolos en un número finito de arcos y círculos.

Para un 3-simplejo  $\tau$  de  $\mathcal{T}$ , podemos hacer que las componentes de  $S \cap \tau$  sean todos los discos, como sigue. Tal componente debe cumplir  $\partial\tau$  por el teorema de Alexander y la condición (\*). Considere un círculo  $C$  de  $S \cap \partial\tau$  que es el más interno en  $\partial\tau$ . Si  $C$  bordea un componente de disco de  $S \cap \tau$ , podemos isotopizar este disco para que se encuentre cerca de  $\partial\tau$  y luego proceder a un círculo  $C$  más interno restante. Si un  $C$  remanente más interno no limita un componente de disco de  $S \cap \tau$  podemos mover  $S$  a lo largo de  $C$  usando un disco  $D$  que se encuentra cerca de  $\partial\tau$  con  $D \cap S = \partial D = C$ , reemplazando  $S$  por un nuevo sistema  $S'$  satisfaciendo (\*), en el que  $C$  limita una componente de disco de  $S' \cap \tau$  o  $C$  se elimina de  $S' \cap \tau$ . Después de un número finito de estos pasos, llegamos a un sistema  $S$  con  $S \cap \tau$  que consta de discos, para cada  $\tau$ . En particular, nótese que ninguna componente de la intersección de  $S$  con un 2-simplejo de  $\mathcal{T}$  puede ser un círculo, ya que esto ligaría discos en ambos 3-simples adyacentes, formando una esfera de  $S$  bordeando una bola en la unión de estos dos 3-simples, contrario a (\*).

Luego, para cada 2-simplejos  $\sigma$  eliminamos los arcos  $\alpha$  de  $S \cap \sigma$  que tienen ambos extremos en el mismo borde de  $\sigma$ . Tal que  $\alpha$  corta de  $\sigma$  un disco  $D$  que encuentra solo un borde de  $\sigma$ . Podemos elegir que  $\alpha$  esté en el borde, de modo que  $D$  no contenga otros arcos de  $S \cap \sigma$  y, por lo tanto,  $D \cap S = \alpha$ , ya que los círculos de  $S \cap \sigma$  se eliminaron en el paso anterior. Mediante una isotopía de  $S$  apoyada cerca de  $\alpha$  empujamos el arco de intersección  $\alpha$  a través de  $D$ , eliminando  $\alpha$  de  $S \cap \sigma$  y disminuyendo en dos el número de puntos de intersección de  $S$  con el 1-esqueleto de  $\mathcal{T}$ .

Después de tal isotopía, disminuyendo el número de puntos de intersección de  $S$  con el 1-esqueleto de  $\mathcal{T}$ , repetimos el primer paso de hacer que  $S$  interseque los 3-simples en discos. Esto no aumenta el número de intersecciones con el 1-esqueleto, por lo que después de un número finito de pasos, llegamos a la situación en la que  $S$  se encuentra con cada 2-simplejos solo en arcos que conectan lados adyacentes, y  $S$  se encuentra con 3-simples solo en discos.

Ahora considere la intersección de  $S$  con un 2-simplejo  $\sigma$ . Con cuatro excepciones como máximo, las regiones complementarias de  $S \cap \sigma$  en  $\sigma$  son rectángulos con dos lados opuestos en  $\partial\sigma$  y los otros dos lados opuestos son arcos de  $S \cap \sigma$ , como en la figura siguiente.

Por lo tanto, si  $\mathcal{T}$  tiene  $t$  2-simples, entonces todas las componentes de  $M|_S$  excepto a lo sumo  $4t$  cumplen todas las 2-simples de  $\mathcal{T}$  solo en tales rectángulos.

Sea  $R$  un componente de  $M|_S$  que cumple los 2-simples solo en rectángulos. Para un 3-simplejo  $\tau$ , cada componente de  $R \cap \partial\tau$  es un anillo  $A$  que es una unión de rectángulos. Los dos círculos de  $\partial A$  unen discos en  $\tau$ , y  $A$  junto con estos dos discos es una esfera

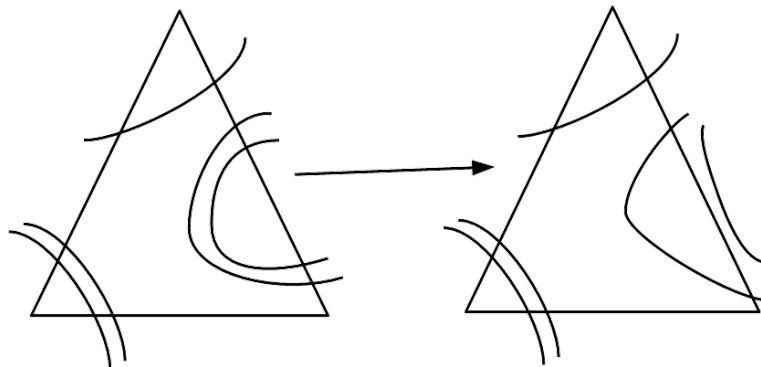


Figura 2.7:

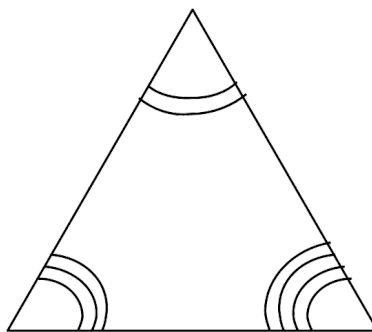


Figura 2.8:

que una bola en  $\tau$ , una componente de  $R \cap \tau$  que se puede escribir como  $D^2 \times I$  con  $\partial D^2 \times I = A$ . Se puede suponer que las I-fibras de todos estos productos  $D^2 \times I$  puede suponerse que concuerdan en sus intersecciones comunes, los rectángulos, para dar  $R$  la estructura de un I-haz. Dado que  $\partial R$  consta de componentes esféricas de  $S$ ,  $R$  es el producto  $S^2 \times I$  o el I-haz retorcido sobre  $\mathbb{R}P^2$ . ( $R$  es el cilindro de mapeo del  $\partial I$ -subhaz asociado, una unión de esferas que es un espacio de cobertura de dos-hojas de una superficie de base conexa). La posibilidad  $R = S^2 \times I$  está excluida por (\*). Cada I-haz  $R$  es, por lo tanto, el cilindro de mapeo del espacio de cobertura  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ . Esto es justo  $\mathbb{R}P^3$  menos una bola, por lo que cada I-haz  $R$  da un sumando conectado  $\mathbb{R}P^3$  de  $M$ , por lo tanto, un sumando directo  $\mathbb{Z}_2$  de  $H_1(M)$ . Por lo tanto, el número de tales componentes  $R$  de  $M|_S$  está acotado. Dado que el número de otros componentes estaba acotado por  $4t$ , el número de componentes de  $M|_S$  está acotado. Como cada 2-esfera en  $M$  se separa, el número de componentes de  $M|_S$  es uno más que el número de esferas en  $S$ . Esto termina la prueba de la existencia de descomposiciones de primos.

Para la unicidad, suponga que el  $M$  no primo tiene dos descomposiciones en primos  $M = P_1 \# \dots \# P_k \# l(S^1 \times S^2)$  y  $M = Q_1 \# \dots \# Q_m \# n(S^1 \times S^2)$  donde los valores de  $P_i$ 's y  $Q_i$  son irreducibles y no  $S^3$ . Sea  $S$  una unión disjunta de 2-esferas en  $M$  reduciendo  $M$  a



los  $P'_i$ 's, es decir, las componentes de  $M|_S$  son las variedades  $P_1, \dots, P_k$  con pinchazos, más posiblemente algunos  $S^3$  pinchados. Tal sistema  $S$  existe: Tomemos por ejemplo una colección de esferas que definen la descomposición en primos dada  $M = P_1 \# \dots \# P_k \# l(S^1 \times S^2)$  junto con un  $S^2$  que no se separa en cada  $S^1 \times S^2$ . Tenga en cuenta que si  $S$  reduce  $M$  a  $P_i$  también lo hace cualquier sistema  $S'$  que contenga  $S$ .

De manera similar, sea  $T$  un sistema de esferas que reduce  $M$  a los  $Q_i$ . Si  $S \cap T \neq \emptyset$ , podemos suponer que se trata de una intersección transversal y considerar un círculo de  $S \cap T$  que es el más interno en  $T$ , delimitando un disco  $D \subset T$  con  $D \cap S = \partial D$ .

Usando  $D$ , aumente la esfera  $S_j$  de  $S$  que contiene  $\partial D$  para producir dos esferas  $S'_j$  y  $S''_j$ , que podemos tomar como disjuntas de  $S_j$ , de modo que  $S_j$ ,  $S'_j$  y  $S''_j$  unen entre sí una  $P$  de 3-esferas con 3-perforaciones. Por un comentario anterior, el sistema ampliado  $S \cup S'_j \cup S''_j$  reduce  $M$  a los  $P_i$ . Eliminar  $S_j$  de este sistema ampliado aún da un sistema que reduce  $M$  a  $P_i$ , ya que esto afecta solo a un componente de  $M|_{S \cup S'_j \cup S''_j}$ , al unir  $P$  a una de sus esferas límite, que tiene la red efecto de simplemente añadir un pinchazo más a este componente.

El nuevo sistema  $S'$  cumple con  $T$  en un círculo menos, así que después de un número finito de pasos de este tipo producimos un sistema  $S$  disjunto de  $T$  y reduciendo  $M$  a los  $P_i$ . Entonces  $S \cup T$  es un sistema que reduce  $M$  tanto al  $P_i$  y al  $Q_i$ . Por lo tanto,  $k = m$  y los  $P_i$  son solo una permutación de los  $Q_i$ .

Finalmente, para mostrar  $l = n$ , tenemos  $M = N \# l(S^1 \times S^2) = N \# n(S^1 \times S^2)$ , entonces  $H_1(M) = H_1(N) \oplus \mathbb{Z}^l = H_1(N) \oplus \mathbb{Z}^n$ , por lo tanto,  $l = n$

□

*La demostración del teorema de la descomposición prima se aplica igualmente a las variedades que no solo son orientables, sino que están orientadas. La ventaja de trabajar con variedades orientadas es que la operación de formar  $M_1 \# M_2$  a partir de  $M_1$  y  $M_2$  está bien definida: retire una bola abierta de  $M_1$  y  $M_2$  y luego identifique el borde de las dos esferas resultantes mediante un difeomorfismo de inversión de orientación, de modo que la orientación de  $M_1$  y  $M_2$  encajan para dar una orientación coherente de  $M_1 \# M_2$ . El mapa de pegado  $S^2 \rightarrow S^2$  entonces se determina de forma única hasta la isotopía, como comentamos anteriormente.*

*Así, para clasificar las 3-variedades compactas orientadas basta con clasificar las irreducibles. En particular, se debe determinar si cada 3-variedad irreducible orientable posee un autodifeomorfismo de inversión de orientación.*

*Obtener un teorema de descomposición prima para variedades no orientables requiere muy poco trabajo adicional. En la Proposición 2.2.1 ahora hay dos variedades reducibles primarias,  $S_1 \times S_2$  y  $S_1 \tilde{\times} S^2$ , el fibrado  $S^2$  no orientable sobre  $S^1$ , que también puede surgir de una 2-esfera que no se separa. La existencia de descomposiciones de primos funciona entonces como en el caso orientable.*

*Por unicidad, se observa que  $N \# S^1 \times S^2 = N \# S^1 \tilde{\times} S^2$  si  $N$  es no orientable. Esto es similar al conocido hecho en una dimensión inferior de la suma conexa de una superficie no orientable con el toro y con la botella de Klein dan el mismo resultado. La singularidad de la descomposición en primos se puede restaurar reemplazando todos los sumandos  $S^1 \times S^2$  en variedades no orientables con  $S^1 \tilde{\times} S^2$ .*

*Un criterio útil para reconocer 3 variedades irreducibles es el siguiente*

**Proposición 2.1.1.2.** *Si  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  es un espacio cubriente y  $\tilde{M}$  es irreducible, entonces también lo es  $M$ .*

**Demostración.** Una esfera  $S \subset M$  se eleva a esferas  $\tilde{S} \subset \tilde{M}$ . Cada uno de estos

levantamientos bordea una bola en  $\tilde{M}$  ya que  $\tilde{M}$  es irreducible. Elegimos un levantamiento  $\tilde{S}$  que bordea una bola  $B$  en  $\tilde{M}$  tal que ningún otro levantamiento de  $S$  se encuentran en  $B$ , es decir,  $\tilde{S}$  es un levantamiento interior. Decimos que  $p : B \rightarrow p(B)$  es un espacio cubriente. Para verificar la propiedad del espacio de cobertura, considere primero un punto  $x \in p(B) - S$ , con  $U$  una vecindad de bola pequeña de  $x$  disjunta de  $S$ . Entonces  $p^{-1}(U)$  es una unión disjunta de bolas en  $\tilde{M} - p^{-1}(S)$ , y estos en  $B$  proporcionan un recubrimiento uniforme de  $U$ . Por otro lado, si  $x \in S$ , se elige una pequeña vecindad de bola  $U$  de  $x$  que se encuentra con  $S$  en un disco. Nuevamente,  $p^{-1}(U)$  es una unión disjunta de bolas, de las cuales solo una, digamos  $\tilde{U}$ , se encuentra con  $B$ , ya que elegimos  $\tilde{S}$  en el interior y  $p$  es uno a uno en  $\tilde{S}$ . Por lo tanto,  $p$  se restringe a un homeomorfismo de  $\tilde{U} \cap B$  en una vecindad de  $x$  en  $p(B)$ , y la verificación de que  $p : B \rightarrow p(B)$  es un espacio cubriente completa. Este espacio de cubierta tiene una sola hoja en  $\tilde{S}$ , por lo tanto, en todo  $B$ , por lo que  $p : B \rightarrow p(B)$  es un homeomorfismo con la imagen de una bola delimitada por  $S$ . □

*Por la proposición, las variedades con cubierta universal  $S^3$  son irreducibles. Esto incluye  $\mathbb{R}P^3$ , y más generalmente, cada espacio de lente tridimensional  $L_{p/q}$ , que es el espacio cociente de  $S^3$  bajo la acción  $\mathbb{Z}_q$  libre generada por la rotación  $(z_1, z_2) \rightarrow (e^{2\pi i/q} z_1, e^{2\pi i/q} z_2)$ , donde  $S^3$  se ve como la esfera unitaria en  $\mathbb{C}^2$ .*

*Para un producto  $M = S^1 \times F^2$ , o más generalmente cualquier haz de superficie  $F^2 \rightarrow M \rightarrow S^1$ , con  $F^2$  una superficie conexa compacta distinta de  $S^2$  o  $\mathbb{R}P^2$ , la cubierta universal de  $M - \partial M$  es  $\mathbb{R}^3$ , por lo que tal  $M$  es irreducible.*

*Curiosamente, la afirmación del espacio de cubierta análoga con **irreducible** reemplazado por **primo** es falsa, ya que hay una cubierta de 2-hojas  $S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ . Es decir,  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$  es el cociente de  $S^1 \times S^2$  bajo la identificación  $(x, y) \sim (\rho(x), -y)$  siendo  $\rho$  un reflejo de la circunferencia. Este cociente también se puede describir como el cociente de  $I \times S^2$  donde  $(x, y)$  se identifica con  $(x, -y)$  para  $x \in \partial I$ . En esta descripción, la 2-esfera que da la descomposición  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$  es  $1/2 \times S^2$*

**Teorema 2.1.1.2.** *Sea  $M$  compacto, conexo y orientable. Entonces hay una descomposición única de  $M$  en una suma conexa de primos.*

*No se demuestra porque dicha demostración es extensa, vea [1]*

## 2.2. Descomposición en Toro

*Más allá de la descomposición anterior, hay una descomposición canónica adicional de 3-variedades orientables, compactas e irreducibles, que se dividen a lo largo de toros en lugar de esferas. Esto fue descubierto solo a mediados de la década de 1970, por Johansson y Jaco-Shalen, aunque en la versión geométrica simplificada que se presenta aquí bien podría haberse probado en la década de 1930. (Un artículo de 1967 de Waldhausen se acerca mucho a esta versión geométrica). Quizás la explicación de este descubrimiento tardío radica en la sutileza de la singularidad declaración. Hay contraejemplos de una declaración de unicidad ingenua, que involucra una clase de variedades estudiadas extensamente por Seifert en la década de 1930. La observación crucial, que no se hizo hasta la década de 1970, fue que estas variedades de Seifert dan lugar a los únicos contraejemplos. Entonces se hace posible obtener una descomposición única tratando las subvariedades de Seifert en una variedad dada como piezas que deben dejarse intactas y no descompuestas.*

**Definición 2.2.1.** Si  $T$  es el único (hasta la isotopía) mínimo disjunto por pares, colección de toros esenciales incrustados en la 3-variedad  $M$  de modo que la clausura de cada componente de  $N|T$  es atoroidal, decimos que  $T$  es la descomposición en toro de  $N$ .

**Teorema 2.2.1.** Las 3-variedades cerradas orientables irreducibles (es decir, compactas e ilimitadas) tienen una colección mínima única (hasta la isotopía) de toros incompresibles incrustados por separado, de modo que cada componente de la 3-variedad obtenido al cortar a lo largo de los toros es atoroidal o fibrado de Seifert.

Este teorema se divide en un teorema y un corolario que se demostrará más adelante.

### 2.2.1. Descomposición en toros (Existencia)

Una superficie conexa adecuadamente incrustada  $S \subset M^3$  se llama *bilateral* o *2-lados* si su fibra normal es trivial y *unilateral* o *1-lado* si su fibra normal no es trivial. (Los **lados** de  $S$  corresponden entonces a las componentes del complemento de  $S$  en una vecindad tubular).

**Definición 2.2.1.1.** Una superficie conexa de 2-lados  $S$  es *incompresible* si  $D \subset M$  con  $D \cap S = \partial D$  implica que existe  $D' \subset S$  con  $\partial D' = \partial D$ . Consulte la figura siguiente.

Así, la cirugía de  $S$  en  $M$  no puede producir una superficie más simple, sino que sólo separa un  $S^2$  de  $S$ , dejando una copia difeomorfa de  $S$  como la otra pieza resultante de la cirugía.

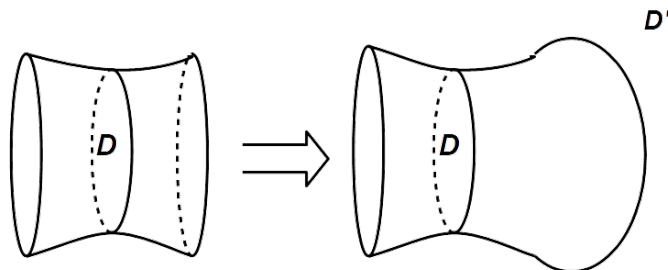


Figura 2.9:

**Definición 2.2.1.2.** Un disco  $D$  con  $D \cap S = \partial D$  a veces se llamará **disco de compresión** para  $S$ , ya sea que exista o no un disco  $D' \subset S$  con  $\partial D' = \partial D$ .

**Proposición 2.2.1.1.** Para un irreducible compacto  $M$  hay un límite en el número de componentes en un sistema  $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$  de superficies incompresibles cerradas disjuntas  $S_i \subset M$  tales que ninguna componente de  $M|_S$  es un producto  $T \times I$  con  $T$  una superficie cerrada.

**Demostración.** Esto sigue el esquema de la prueba de existencia de descomposiciones de primos. Primero, se perturba  $S$  para que sea transversal a una triangulación de  $M$  y realice los siguientes dos pasos repetidamente para simplificar las intersecciones de  $S$  con 2-simples  $\sigma^2$  y 3-simples  $\sigma^3$ :

1. Hacer todos los componentes de  $S \cap \sigma^3$  discos. En la prueba de descomposición principal, esto se hacía mediante cirugía, pero ahora las cirugías se pueden lograr mediante isotopía. Es decir, dado un disco de cirugía  $D \subset M$  con  $D \cap S = \partial D$ , la incompresibilidad da un disco  $D' \subset S$  con  $\partial D' = \partial D$ . La esfera  $D \cup D'$  bordea una bola  $B \subset M$  ya que  $M$  es irreducible. Tenemos  $B \cap S = D'$ , de lo contrario, un componente de  $S$  estaría en  $B$ . Luego, isotopizar  $S$  empujando  $D'$  a través de  $B$  a  $D$  y un poco más allá reemplaza a  $S$  por una de las dos superficies producidas por la cirugía.

Tenga en cuenta que el Paso (1) elimina los círculos de  $S \cap \sigma^2$ , ya que tal círculo uniría los discos en ambos  $\sigma^3$  adyacentes, produciendo un componente de la esfera de  $S$ .

2. Eliminar arcos de  $S \cap \sigma^2$  con ambos extremos en el mismo borde de  $\sigma^2$ . Esto se puede hacer por isotopía de  $S$  tal como en el teorema de descomposición de primos. Después de estas simplificaciones, los componentes de  $M|_S$  que se encuentran con 2-simples solo en rectángulos son I-haces (disjuntos de  $\partial M$ ), como antes. Los I-haces triviales se descartan por hipótesis. Los I-haces no triviales están delimitados por superficies  $S_i$  y son vecindarios tubulares de superficies de 1-lado  $S'_i$ . Reemplazando estos  $S_i$  por las superficies correspondientes  $S'_i$  se produce un nuevo sistema  $S'$ . La división  $M$  a lo largo de  $S'$  produce una variedad  $M'$  que es  $M|_S$  con los I-haces no triviales eliminados. Por lo tanto, el número de componentes de  $M'$  está acotado por cuatro veces el número de 2-simples en la triangulación de  $M$ . Se considere ahora la secuencia exacta

$$H_3(M, S'; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(S'; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(M; \mathbb{Z}_2)$$

Por escisión, el primer grupo puede ser reemplazado por  $H_3(M', \partial M' - \partial M; \mathbb{Z}_2)$ . Este es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Z}_2$  de dimensión acotada por el número de componentes de  $M'$  ya que, después de triangular  $M'$ , hay a lo sumo un relativo simplicial no trivial de 3-ciclos con coeficientes  $\mathbb{Z}_2$  en cada componente de  $M'$ . Por lo tanto, el primer y tercer término de la secuencia exacta tienen dimensiones limitadas por números que dependen solo de  $M$ , no de  $S$ . Por exactitud, la dimensión del término medio  $H_2(S'; \mathbb{Z}_2) \approx H_2(S; \mathbb{Z}_2)$  también está acotada, por lo que el número de componentes de  $S$  está acotado.

□

**Corolario 2.2.1.1. Existencia** *En un irreducible  $M$  compacto conexo existe una colección finita  $T$  de toros incompresibles disjuntos tales que cada componente de  $M|_T$  es atoroidal.*

**Demostración.** Si  $M$  es atoroidal tomamos  $T = \emptyset$ . De lo contrario, sea  $T_1$  un toro incompresible en  $M$  que no es  $\partial$ -paralelo. Si  $M|_{T_1}$  es atoroidal, tomamos  $T = T_1$ , y en caso contrario, dejemos que  $T_2$  sea un toroide incompresible en  $M|_{T_1}$  que no es  $\partial$ -paralelo. Este proceso se puede repetir siempre que no obtengamos una división en componentes

atoroidales, pero esto no se puede hacer infinitamente a menudo, de lo contrario tendríamos una colección  $T$  arbitrariamente grande de toros incompresibles disjuntos en  $M$  sin componente de  $M|_T$  a producto de un toro con  $I$ , contradiciendo la proposición anterior.  $\square$

Ahora describimos un ejemplo de un  $M$  irreducible en el que esta descomposición en toroide en piezas atoroidales no es única, las componentes de  $M|_T$  para las dos divisiones son, de hecho, no homeomórfas.

**Ejemplo 2.2.1.1.** Para  $i = 1, 2, 3, 4$ , sea  $M_i$  un toroide sólido cuyo toroide límite se descompone como la unión de dos anillos  $A_i$  y  $A'_i$ , cada uno de los cuales enrolla  $q_i > 1$  veces alrededor del factor  $S^1$  de  $M - i$ . La unión de estos cuatro toros sólidos, con cada  $A'_i$  pegado a  $A_{i+1}$  (subíndices mod 4), es la variedad  $M$ . Este contiene dos toros  $T_1 = A_1 \cup A_3$  y  $T_2 = A_2 \cup A_4$ . Las componentes de  $M|_{T_1}$  son  $M_1 \cup M_2$  y  $M_3 \cup M_4$ , y las componentes de  $M|_{T_2}$  son  $M_2 \cup M_3$  y  $M_4 \cup M_1$ . El grupo fundamental de  $M_i \cup M_{i+1}$  tiene presentación  $\langle x_i, x_{i+1} | x_i^{q_i} = x_{i+1}^{q_{i+1}} \rangle$ . El centro de este producto libre amalgamado es cíclico, generado por el elemento  $x_i^{q_i} = x_{i+1}^{q_{i+1}}$ . Al factorizar el centro se obtiene el cociente  $\mathbb{Z}_{q_i} * \mathbb{Z}_{q_{i+1}}$ , con abelianización  $\mathbb{Z}_{q_i} \oplus \mathbb{Z}_{q_{i+1}}$ . Por lo tanto, si los  $q_i$  son, por ejemplo, primos distintos, entonces no hay dos de las variedades  $M_i \cup M_{i+1}$  que sean homeomorfas.

Los resultados de más adelante en esta sección implicarán que  $M$  es irreducible,  $T_1$  y  $T_2$  son incompresibles y las cuatro variedades  $M_i \cup M_{i+1}$  son atoroidales. Así que las divisiones  $M|_{T_1}$  y  $M|_{T_2}$ , aunque bastante diferentes, ambas satisfacen las conclusiones del Corolario.

Las variedades como esta  $M$  que se obtienen pegando toros sólidos a lo largo de anillos no contráctiles en sus bordes pertenecen a una clase muy especial de variedades llamadas variedades de Seifert, que ahora definiremos. Un **modelo de fibra Seifert** de  $S^1 \times D^2$  es una descomposición de  $S^1 \times D^2$  en círculos disjuntos, llamados **fibras**, construidos de la siguiente manera. Comenzando con  $[0, 1] \times D^2$  descompuesto en los segmentos  $[0, 1] \times \{x\}$ , identifique los discos  $\{0\} \times D^2$  y  $\{1\} \times D^2$  a través de una rotación de  $2\pi p/q$ , para  $p/q \in \mathbb{Q}$  con  $p$  y  $q$  primos relativos. El segmento  $[0, 1] \times \{0\}$  se convierte entonces en una fibra  $S^1 \times \{0\}$ , mientras que todas las demás fibras en  $S^1 \times D^2$  están formadas por  $q$  segmentos  $[0, 1] \times \{x\}$ . Un **fibrado de Seifert** de una 3-variedad  $M$  es una descomposición de  $M$  en círculos disjuntos, las **fibras**, de modo que cada fibra tiene una vecindad difeomorfa, preservando las fibras, a un vecindario de una fibra en algún modelo de fibrado de Seifert de  $S^1 \times D^2$ . Una **variedad de Seifert** es aquella que posee una fibra de Seifert.

Cada círculo de fibra  $C$  en un fibrado de Seifert de una 3-variedad  $M$  tiene una multiplicidad bien definida, el número de veces que un pequeño disco transversal a  $C$  se encuentra con cada fibra cercana. Por ejemplo, en el modelo Seifert de fibrado de  $S^1 \times D^2$  con torsión  $2\pi p/q$ , la fibra  $S^1 \times 0$  tiene multiplicidad  $q$  mientras que todas las demás fibras tienen multiplicidad 1. Las fibras de multiplicidad 1 son fibras regulares y las otras fibras son **múltiples** (o **singulares** o **excepcionales**). Las fibras múltiples están aisladas y se encuentran en el interior de  $M$ . Los cocientes espaciales  $B$  de  $M$  obtenidos al identificar cada fibra en un punto es una superficie, compacta si  $M$  es compacta, como se desprende del modelo de fibras de Seifert. La proyección  $\pi : M \rightarrow B$  es un haz de fibras ordinarias en el complemento de múltiples fibras. En particular,  $\pi : \partial M \rightarrow \partial B$  es un haz circular, por lo que  $\partial M$  consta de toros y botellas de Klein, o solo toros si  $M$  es

orientable

El hecho un tanto sorprendente es que las variedades de Seifert dan cuenta de todas las no unicidades en las divisiones de toros, de acuerdo con el siguiente teorema, que es el principal resultado de esta sección.

**Teorema 2.2.1.1. Unicidad** Para una 3-variedades  $M$  orientable, irreducible y compacta, existe una colección  $T \subset M$  de toros incompresibles disjuntos tales que cada componente de  $M|_T$  es una variedad atoroidal o de Seifert, y una colección  $T$  mínima de este tipo es única hasta la isotopía.

Aquí “mínimo” significa mínimo con respecto a las inclusiones de tales colecciones. Tenga en cuenta la fuerza de la unicidad: hasta la isotopía, no solo hasta el homeomorfismo de  $M$ , por ejemplo. La suposición de orientabilidad puede eliminarse si también se permiten divisiones a lo largo de botellas de Klein incompresibles, y la definición de “atoroidal” se modifica en consecuencia. Por simplicidad nos apegaremos al caso orientable. Ya hemos probado el enunciado de existencia en el teorema, donde las variedades de Seifert son innecesarias. Demostraremos el enunciado de unicidad suponiendo cuatro hechos sobre las variedades de Seifert, que se demostrarán en la siguiente subsección.

Para enunciar los cuatro hechos primero necesitamos otra definición.

**Definición 2.2.1.3.** Una superficie  $S$  es  $\partial$ -incompresible si para cada disco  $D \subset M$  tal que  $\partial D \cap S$  es un arco  $\alpha$  en  $\partial D$  y el resto de  $\partial D$  está en  $\partial M$  (tal  $D$  se llama  $\partial$ -disco de compresión para  $S$ ) hay un disco  $D' \subset S$  con  $\alpha \subset \partial D'$  y  $\partial D' - \alpha \subset \partial S$ . Consulte la Figura 2.10.

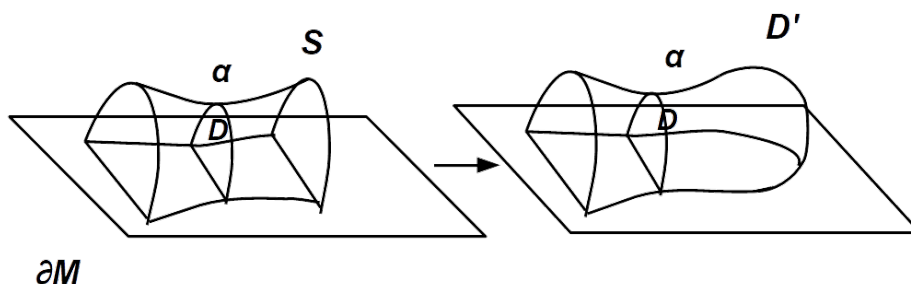


Figura 2.10:

Llamaremos **esencial** a una superficie que es tanto incompresible como  $\partial$ -incompresible. También diremos que una superficie  $S$  es esencial si y sólo si cada componente de  $S$  es esencial. Además, como en el caso absoluto,  $S$  es  $\partial$ -incompresible si  $\pi_1(S, \partial S) \rightarrow \pi_1(M, \partial M)$  es inyectiva para todas las opciones de punto base en  $\partial S$ .

## 2.2.2. Superficies incompresibles en variedades de Seifert

**Ejemplo 2.2.2.1.** *Demostremos que las únicas superficies esenciales en la variedad  $M = S^1 \times D^2$  son discos isotópicos a los discos meridianos  $\{x\} \times D^2$ . Pues sea  $S$  una superficie esencial conexa en  $M$ . Podemos isotopizar  $S$  de modo que todos los círculos de  $\partial S$  sean círculos meridianos  $\{x\} \times \partial D^2$  o sean transversales a todos los círculos meridianos. Mediante una pequeña perturbación,  $S$  también puede hacerse transversal a un disco meridiano fijo  $D_0$ . Los círculos de  $S \cap D_0$  se pueden eliminar, primero el más interno, por isotopía de  $S$  usando la incompresibilidad de  $S$  y la irreductibilidad de  $M$ . Después de hacer esto, considere un arco de borde  $\alpha$  de  $S \cap D_0$ . Los círculos de  $S \cap D_0$  pueden eliminarse, primero el más interno, por isotopía de  $S$  usando la incompresibilidad de  $S$  y la irreducibilidad de  $M$ . Después de hacer esto, considere un arco de borde  $\alpha$  de  $S \cap D_0$ . Esto corta un disco de compresión  $\partial D$  de  $D_0$ , por lo que  $\alpha$  también corta un disco  $D'$  de  $S$ , encontrándose con  $\partial M$  en un arco  $\gamma$ . La existencia de  $D'$  implica que los dos extremos de  $\gamma$  se encuentran en el mismo lado del arco meridiano  $\beta = D \cap \partial M$  en  $\partial M$ .*

**Lema 2.2.2.1.** *Sea  $S$  una superficie incompresible conexa en la 3-variedad irreducible  $M$ , con  $\partial S$  contenido en componentes del borde del toro de  $M$ . Entonces,  $S$  es esencial o es un anillo  $\partial$ -paralelo.*

**Demostración.** Suponga que  $S$  es  $\partial$ -compresible, con un disco de compresión  $\partial D$  que se encuentra con  $S$  en un arco  $\alpha$  que no separa un disco de  $S$ . Sea  $\beta$  el arco  $D \cap \partial M$ , que se encuentra en un toro componente  $T$  de  $\partial M$ . Los círculos de  $S \cap T$  no unen discos en  $T$ , de lo contrario, la incompresibilidad de  $S$  implicaría que  $S$  era un disco, pero los discos son  $\partial$ -incompresibles. Por lo tanto,  $\beta$  se encuentra en un componente anillo componente  $A$  de  $T|_{\partial S}$ . Si  $\beta$  fuera trivial en  $A$ , cortando un disco  $D'$ , la incompresibilidad aplicada al disco  $D \cup D'$  implicaría que  $\alpha$  corta un disco de  $S$ , contrariamente a lo que se supone; consulte la Figura 2.11 (a).

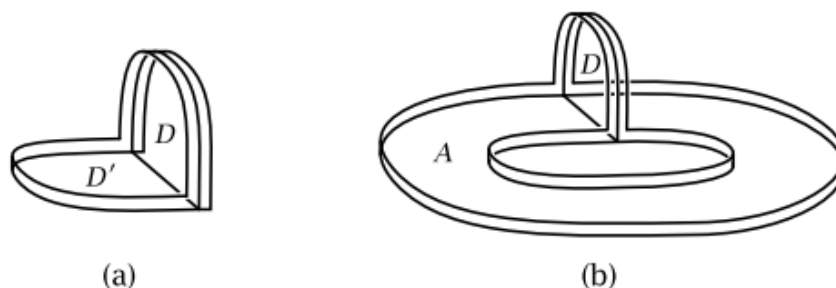


Figura 2.11: Tomada de [1].

Entonces  $\beta$  une las dos componentes de  $\partial A$ . Si ambos componentes son el mismo círculo de  $\partial S$ , es decir, si  $S \cap T$  consta de un solo círculo, entonces  $S$  sería de 1-lado. Considere las normales a  $S$  que apuntan a  $D$  a lo largo de  $\alpha$ . En los dos puntos de  $\partial \alpha$ , estas normales apuntan a  $\beta$ , por lo tanto, apuntan a lados opuestos del círculo  $S \cap T$ . Por lo tanto, los extremos de  $\beta$  deben estar en diferentes círculos de  $\partial S$ , y tenemos la configuración en la figura anterior.

Sea  $N$  una vecindad de  $\partial A \cap \alpha$  en  $S$ , una 3-esfera perforada. El círculo  $\partial N - \partial S$  delimita un disco obvio en el complemento de  $S$ , que se encuentra cerca de  $D \cap A$ , por lo que dado que  $S$  es incompresible, este círculo límite también limita un disco en  $S$ . Por

lo tanto,  $S$  es un anillo. Al aumentar el toro  $S \cup A$  a través de  $D$  se obtiene una esfera, que bordea una bola en  $M$ , ya que  $M$  es irreducible. Por lo tanto,  $S \cup A$  bordea un toro sólido y  $S$  es  $\partial$ -paralelo, siendo isotópico a  $A$  real  $\partial S$ .  $\square$

**Proposición 2.2.2.1.** *Si  $M$  es una variedad de fibras de Seifert irreducible, compacta y conexa, entonces cualquier superficie esencial en  $M$  es isotópica a una superficie que es vertical, es decir, una unión de fibras regulares, u horizontal, es decir, transversal a todas las fibras.*

**Demostración.** Sean  $C_1, \dots, C_n$  fibras del fibrado de Seifert que incluyen todas las fibras múltiples junto con al menos una fibra regular si no hay fibras múltiples. Sea  $M_0$  en  $M$  con pequeñas vecindades tubulares abiertas de fibra de todos los  $C_i$  eliminados. Por lo tanto,  $M_0$  es un paquete circular  $M_0 \rightarrow B_0$  sobre una superficie  $B_0$  compacta, conexa con borde no vacío. Seleccionar arcos disjuntos en  $B_0$  cuya unión divide a  $B_0$  en un disco, y sea  $A$  la preimagen en  $M_0$  de esta colección de arcos, una unión de anillos verticales disjuntos  $A_1, \dots, A_m$  en  $M_0$  tal que la variedad  $M_1 = M_0|_A$  es un toro sólido.

Para una superficie esencial  $S$  en  $M$ , los círculos de  $\partial S$  no son triviales en  $\partial M$  ya que  $S$  es incompresible y  $M$  es irreducible. Por lo tanto,  $S$  se puede isotopizar de modo que los círculos de  $\partial S$  sean verticales u horizontales en cada toro componente o botella de Klein de  $\partial M$ . Los círculos verticales de  $S$  pueden perturbarse para que sean disjuntos de  $A$ . Podemos suponer que  $S$  se encuentra con las fibras  $C_i$  transversalmente y, por lo tanto, se encuentra con las vecindades de estas fibras en los discos transversales a las fibras. Entonces la superficie  $S_0 = S \cap M_0$  también tiene cada uno de sus círculos bordes horizontales o verticales.

Los círculos de  $S \cap A$  que delimitan los discos en  $A$  pueden eliminarse mediante la isotopía de  $S$  de la forma habitual, utilizando la incompresibilidad de  $S$  y la irreducibilidad de  $M$ . Los arcos de  $S \cap A$  con ambos extremos en la misma componente de  $\partial A$  se pueden eliminar de la siguiente manera. Un arco de este tipo  $\alpha$  corta un disco  $D$  de  $A$ . Si los dos extremos de  $\alpha$  se encuentran en una componente de  $\partial M_0 - \partial M$ , entonces  $S$  se puede isotopizar a través de  $D$  para eliminar dos puntos de intersección con una fibra  $C_i$ . La otra posibilidad, que los dos extremos de  $\alpha$  estén en  $\partial M$ , en realidad no puede ocurrir, porque si lo hiciera, el disco  $D$  sería un disco  $\partial$ -compresible para  $S$  en  $M$ , una configuración descartada por el argumento de monotonicidad en el Ejemplo que precede al Lema 2.2.2.1, con el papel de los meridianos en ese argumento ahora desempeñado por círculos verticales.

Entonces podemos asumir que los componentes de  $S \cap A$  son círculos verticales o arcos horizontales. Si hacemos  $S_1 = S_0|_A$  en  $M_0|_A = M_1$ , se sigue que  $\partial S_1$  consiste enteramente en círculos horizontales o verticales en el toro  $\partial M_1$ . Podemos suponer que  $S_1$  es incompresible en  $M_1$ . Sea  $D \subset M_1$  un disco compresor para  $S_1$ . Como  $S$  es incompresible,  $\partial D$  bordea un disco  $D' \subset S$ . Si esto no está en  $S_1$ , podemos isotopizar  $S$  empujando  $D'$  a través de la bola delimitada por  $D \cup D'$ , eliminando así algunos componentes de  $S \cap A$ . Como en el paso anterior, cuando eliminamos los arcos de  $S \cap A$  con extremos en la misma componente de  $\partial A$ , esto conduce a una isotopía de  $S$  eliminando los puntos de intersección con una fibra  $C_i$ . Entonces podemos asumir que todos los componentes de  $S_1$  son anillos  $\partial$ -paralelo con borde vertical o discos con borde horizontal.



Dado que los círculos verticales en  $\partial M_1$  no pueden separarse de los círculos horizontales,  $S_1$  es una unión de anillos  $\partial$ -paralelos con borde vertical o una unión de discos con borde horizontal. En el primer caso,  $S_1$  se puede isotopizar para que sea vertical, permaneciendo fijo en  $\partial S_1$  donde ya es vertical. Esta isotopía da una isotopía de  $S$  a una superficie vertical. En el caso opuesto de que  $S_1$  consista en discos con borde horizontal, isotópicos a los discos meridianos en  $M_1$ , podemos isotopar  $S_1$  para que sea horizontal fijando  $\partial S_1$ , y esto da una isotopía de  $S$  a una superficie horizontal. □

*Las superficies verticales son fáciles de entender: son haces circulares, ya que están separadas de múltiples fibras por definición, por lo tanto, son anillos, toro o botella de Klein.*

*Las superficies horizontales son algo más sutiles. Para una superficie horizontal  $S$ , la proyección  $\pi : S \rightarrow B$  sobre la superficie base de la fibra de Seifert es una cubierta ramificada, con un punto de ramificación de multiplicidad  $q$  para cada intersección de  $S$  con una fibra singular de multiplicidad  $q$ . (Para ver esto, mire en la vecindad de una fibra, donde el mapa  $S \rightarrow B$  es equivalente a la proyección de varios discos meridianos sobre,  $B$  claramente, una cubierta ramificada). Para esta cubierta ramificada  $\pi : S \rightarrow B$  hay una fórmula útil que relaciona las características de Euler de  $S$  y  $B$*

$$\chi(B) - \chi(S)/n = \sum_i (1 - 1/q_i)$$

*donde  $n$  es el número de hojas en la cubierta ramificada y las fibras múltiples de  $M$  tienen multiplicidades  $q_1, \dots, q_m$ . Para verificar esta fórmula, triangula  $B$  de modo que las imágenes de las fibras múltiples sean vértices, luego eleva esto a una triangulación de  $S$ . El conteo de simples produciría entonces la fórmula habitual  $\chi(S) = n\chi(B)$  para una cubierta no ramificada de  $n$ -hojas. En el presente caso, sin embargo, un vértice en  $B$  que es la imagen de una fibra de multiplicidad  $q_i$  tiene  $n/q_i$  preimágenes en  $S$ , en lugar de  $n$ . Esto produce una fórmula modificada  $\chi(S) = n\chi(B) + \sum_i (-n + n/q_i)$ , que es equivalente a la anterior*

*Existe una estructura adicional asociada a una superficie horizontal  $S$  en una variedad de fibras de Seifert  $M$ . Supongamos que  $S$  es conexo y tiene 2-lados. (Si  $S$  es de 1-lado, tiene una vecindad de  $I$ -haz cuyo límite es una superficie horizontal de 2-lados). Dado que  $S \rightarrow B$  es sobre,  $S$  se encuentra con todas las fibras de  $M$ , y  $M|_S$  es un  $I$ -haz. La trivialidad local de este  $I$ -haz es clara si uno mira en una vecindad de modelo-fibra de una fibra. El  $\partial I$ -subhaz asociado consta de dos copias de  $S$ , por lo que el  $I$ -haz es el cilindro de mapeo de una proyección de recubrimiento de 2-hojas  $S \sqcup S \rightarrow T$  para alguna superficie  $T$ . Hay dos casos, según que  $S$  separe o no de  $M$ :*

1. *Si  $M|_S$  es conexo, también lo es  $T$ , y  $S \sqcup S \rightarrow T$  es el trivial que cubre  $S \sqcup S \rightarrow S$ , entonces  $M|_S = S \times I$  y, por lo tanto,  $M$  es un haz sobre  $S^1$  con fibra  $S$ . Las fibras superficiales de este haz son todas superficies horizontales en el fibrado de Seifert.*
2. *Si  $M|_S$  tiene dos componentes, cada uno es un  $I$ -haz torcido sobre un componente  $T_i$  de  $T$ , el cilindro de mapeo de una cubierta no trivial de 2-hojas  $S \rightarrow T_i, i = 1, 2$ . Las copias paralelas de  $S$  en estos cilindros de mapeo, junto con  $T_1$  y  $T_2$ , son las hojas de una foliación de  $M$ . Estas hojas son las "fibras" de una proyección natural  $p : M \rightarrow I$ , con  $T_1$  y  $T_2$  las pre-imágenes de los extremos de  $I$ . Esta estructura de "fibra" en  $M$  no es exactamente un haz de fibras, así que démosle un nuevo nombre:*

un **semi-haz**. Así un semi-haz  $p : M \rightarrow I$  es la unión de dos I-haces retorcidos  $p^{-1}[0, 1/2]$  y  $p^{-1}[1/2, 1]$  pegados entre sí por un homeomorfismo de la fibra  $p^{-1}(1/2)$ . Por ejemplo, en una dimensión inferior, la botella de Klein es un semi-haz de fibras  $S^1$ , ya que se desdobra como la unión de dos bandas de Möbius. De manera más general, uno podría definir semi-haces con base cualquier variedad con borde.

Las técnicas que hemos estado usando también se pueden aplicar para determinar qué variedades de Seifert son irreducibles.

**Proposición 2.2.2.2.** Una variedad de fibra de Seifert conexa y compacta  $M$  es irreducible a menos que sea  $S^1 \times S^2$ ,  $S^1 \tilde{\times} S^2$  o  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ .

**Demostración.** Comenzamos observando que si  $M$  es reducible, entonces hay una esfera horizontal en  $M$  que no bordea con una pelota. Esto se prueba imitando el argumento de la proposición anterior, siendo  $S$  ahora una esfera que no bordea con una bola en  $M$ . La única diferencia es que cuando antes se usaba la incompresibilidad, por ejemplo, para eliminar círculos triviales de  $S \cap A$ , ahora debemos usar cirugía en lugar de isotopía. Tal cirugía reemplaza  $S$  con un par de esferas  $S'$  y  $S''$ . Si tanto  $S'$  como  $S''$  fueran bolas acotadas, también lo sería  $S$ , como vimos en la demostración del teorema de Alexander, por lo que podemos reemplazar  $S$  por uno de  $S', S''$  sin bordear una bola. Con estas modificaciones en la demostración, eventualmente obtenemos una esfera que es horizontal o vertical, pero esto último no puede ocurrir ya que  $S^2$  no es un haz circular.

Si  $S$  es una esfera horizontal en  $M$ , entonces, como hemos visto,  $M$  es un haz de esferas o un semi-haz de esferas. Los dos únicos haces de esferas son  $S^1 \times S^2$  y  $S^1 \tilde{\times} S^2$ . Un semi-haz esférico son dos copias del haz torcido sobre  $\mathbb{R}P^2$  pegadas mediante un difeomorfismo de  $S^2$ . Tal difeomorfismo es isotópico para la identidad o el mapeo antípodal. El mapeo antípodal se extiende a un difeomorfismo del I-haz  $\mathbb{R}P^2 \tilde{\times} I$ , por lo que ambos pegados producen la misma variedad,  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ .

□

Tenga en cuenta que las tres variedades  $S^1 \times S^2$ ,  $S^1 \tilde{\times} S^2$  y  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$  tienen fibras de Seifert. Es decir,  $S^1 \tilde{\times} S^2$  es  $S^2 \times I$  con los dos extremos identificados a través del mapeo antípodal, por lo que la estructura de I-haz en  $S^2 \times I$  da  $S^1 \tilde{\times} S^2$  una estructura de haz circular; y las estructuras de I-haz en las dos mitades  $\mathbb{R}P^2 \tilde{\times} I$  de  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ , que están pegadas por la identidad, le dan una estructura de haz circular.

Ahora podemos dar un recíproco a la Proposición 2.2.2.1:

**Proposición 2.2.2.3.** Sea  $M$  una 3-variedad compacta e irreducible con fibras de Seifert. Entonces cada superficie horizontal de 2-lados  $S \subset M$  es esencial. Lo mismo se aplica a todas las superficies verticales de 2-lados conectadas, excepto:

- (a) Un toroide que bordea un toroide sólido con un modelo de fibras de Seifert, que contiene como máximo una fibra múltiple, o
- (b) Un anillo que separa de  $M$  un toro sólido con el producto fibroso.

**Demostración.** Para una superficie horizontal  $S$  de 2-lados, hemos notado que las fibras de Seifert inducen una estructura de I-haz en  $M|_S$ , por lo que  $M|_S$  es el cilindro de mapeo de una cubierta de 2-hojas  $S \sqcup S \rightarrow T$  para alguna superficie  $T$ . Al ser una

proyección de espacio de cobertura, este mapeo es inyectivo en  $\pi_1$ , por lo que la inclusión del  $\partial I$ -subhaz en el I-haz también es inyectiva en  $\pi_1$ . Por lo tanto  $S$  es incompresible. (En caso de que  $S$  sea un disco,  $M|_S$  es  $D^2 \times I$ , por lo que  $S$  claramente no es  $\partial$ -paralelo.) De manera similar, la  $\partial$ -incompresibilidad se deriva de la inyectividad de los  $\pi$  relativos. Supongamos ahora que  $S$  es una superficie vertical comprimible de 2-lados, con un disco de compresión  $D$  que no corta un disco de  $S$ . Entonces  $D$  es incompresible en  $M|_S$  y, por lo tanto, se puede isotopizar para que sea horizontal. La fórmula característica de Euler en el componente de  $M|_S$  que contiene  $D$  toma la forma  $\chi(B) - 1/n = \sum_i (1 - 1/q_i)$ . El lado derecho es no negativo y  $\partial B \neq \emptyset$ , entonces  $\chi(B) = 1$  y  $B$  es un disco. Cada término  $1 - 1/q_i$  es al menos  $1/2$ , por lo que puede haber como máximo uno de esos términos y, así, como máximo una fibra múltiple. Por lo tanto, este componente de  $M|_S$  es un toro sólido con un modelo de fibra de Seifert y  $S$  es el borde del toro. (Si  $S$  fuera un anillo vertical en su borde,  $S$  sería incompresible en este toro sólido).

De manera similar, si  $S$  es un anillo vertical  $\partial$ -compresible, hay un disco  $D$  de  $\partial$ -compresible con un borde horizontal, y  $D$  puede ser isotópico para que sea horizontal también en su interior. Nuevamente,  $D$  debe ser un disco meridiano en un componente de toro sólido de  $M|_S$  con un modelo de fibra de Seifert. En este caso no puede haber fibra múltiple en este toro sólido ya que  $\partial D$  se encuentra con  $S$  en un solo arco.

Tenga en cuenta que el argumento que se acaba de dar muestra que las únicas fibras Seifert de  $S^1 \times D^2$  son las fibras modelo Seifert.

□

### 2.2.3. Descomposición en toros (Unicidad)

para el siguiente tema que abordaremos necesitaremos tres lemas que se verán a continuación.

**Lema 2.2.3.1.** *Un anillo  $\partial$ -incompresible en una  $M$  con fibras de Seifert compactas y conexas se puede isotopizar para que sea vertical, después de posiblemente cambiar la fibra de Seifert si  $M = S^1 \times S^1 \times I$ ,  $S^1 \times S^1 \tilde{\times} I$  (el I-haz torcido sobre el toro),  $S^1 \tilde{\times} S^1 \times I$  (la cruz de la botella de Klein I), o  $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} I$  (el I-haz de retorcido sobre la botella de Klein).*

**Demostración.** Supongamos que  $S$  es un anillo horizontal en  $M$ . Si  $S$  no separa a  $M$ , entonces  $M|_S$  es el producto  $S \times I$ , por lo que  $M$  es un haz sobre  $S^1$  con fibra  $S$ , el toroide de mapeo  $S \times I / \{(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)\}$  de un difeomorfismo  $\varphi : S \rightarrow S$ . Solo hay cuatro clases de isotopía de difeomorfismos de  $S^1 \times I$ , obtenidos como la composición de la identidad o un reflejo en cada factor, por lo que se puede tomar  $\varphi$  para preservar las fibras  $S^1$  de  $S = S^1 \times I$ . Este  $S^1$ -fibrado de  $S$  luego induce una estructura de haz circular en  $M$  en la que  $S$  es vertical. Las cuatro opciones de  $\varphi$  dan las cuatro variedades excepcionales enumeradas.

Si  $S$  se está separando,  $M|_S$  son dos I-haz torcidos sobre una banda de Möbius, cada uno obtenido de un cubo al identificar un par de caras opuestas por un giro de 180 grados. Cada hilo trenzado es, por lo tanto, un modelo de fibra Seifert con una fibra singular de multiplicidad 2. Los cuatro pegados posibles de estos dos I-haz torcidos producen la misma variedad  $M$ , con un fibrado de Seifert sobre  $D^2$  que tiene dos fibras singulares de multiplicidad 2, con  $S$  vertical. Se ve fácilmente que esta variedad es  $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} I$ .

□

**Lema 2.2.3.2.** *Sea  $M$  una variedad de Seifert compacta y conexa con  $\partial M$  orientable. Entonces las restricciones a  $\partial M$  de cualquiera de las dos fibras de Seifert de  $M$  son isotópicas, a menos que  $M$  sea  $S^1 \times D^2$  o una de las cuatro variedades excepcionales del Lema 2.2.3.1.*

**Demostración.** Sea  $M$  con fibras de Seifert, con  $\partial M \neq \emptyset$ . Primero observamos que  $M$  contiene un anillo vertical incompresible,  $\partial$ -incompresible  $A$  salvo que  $M = S^1 \times D^2$ . Es decir, tome  $A = \pi^{-1}(\alpha)$  donde  $\alpha$  es un arco en la superficie base  $B$  que no se separa (si  $B \neq D^2$ ) o separa las imágenes de fibras múltiples (si  $B = D^2$  y hay al menos dos fibras múltiples). Esto garantiza la incompresibilidad y la  $\partial$ -incompresibilidad de  $A$ . Por la Proposición 2.2.3.1. Excluyendo los casos excepcionales del Lema 2.2.3.1,  $A$  es entonces isotópica a un anillo vertical en cualquier otra fibra de Seifert de  $M$ , por lo que las dos fibras de Seifert pueden ser isotópicas para coincidir en  $\partial A$ , por lo tanto, en las componentes de  $\partial M$  que contienen  $\partial A$ . Dado que  $\alpha$  podría elegirse para cumplir con cualquier componente de  $\partial B$ , el resultado es el siguiente. □

**Lema 2.2.3.3.** *Si  $M$  es compacto, conexo, orientable, irreducible y atoroidal, y  $M$  contiene un anillo incompresible,  $\partial$ -incompresible que se encuentra solo con componentes toroidales de  $\partial M$ , entonces  $M$  es una variedad de Seifert.*

**Demostración.** Sea  $A$  un anillo como en la hipótesis. Hay tres posibilidades, indicadas en la figura siguiente a continuación:

- (a)  $A$  se encuentra con dos toros diferentes  $T_1$  y  $T_2$  en  $\partial M$ , y  $A \cup T_1 \cup T_2$  tiene una vecindad  $N$  que es un producto de un disco 2-perforado con  $S^1$ .
- (b)  $A$  encuentra solo un toro  $T_1$  en  $\partial M$ , la unión de  $A$  con cualquiera de los anillos de  $T_1|_{\partial A}$  es un toro, y  $A \cup T_1$  tiene una vecindad  $N$  que es un producto de un disco 2-perforado con  $S^1$ .
- (c)  $A$  encuentra solo un toro  $T_1$  en  $\partial M$ , la unión de  $A$  con cualquiera de los anillos de  $T_1|_{\partial A}$  es una botella de Klein, y  $A \cup T_1$  tiene una vecindad  $N$  que es un fibrado  $S^1$  sobre una banda de Möbius perforada.

En los tres casos  $N$  tiene la estructura de un haz circular  $N \rightarrow B$  con  $A$  vertical.

Por hipótesis, los toros de  $\partial N - \partial M$  deben ser compresibles o  $\partial$ -paralelos en  $M$ . Supongamos que  $D$  es un disco de compresión no trivial para  $\partial N - \partial M$  en  $M$ , con  $\partial D$  un bucle no trivial en un toro componente  $T$  de  $\partial N - \partial M$ . Si  $D \subset N$ , entonces  $N$  sería un toro sólido  $S^1 \times D^2$  por la Proposición 2.2.2.3, lo cual es imposible ya que  $N$  tiene más de un toro límite. Entonces  $D \cap N = \partial D$ . Al mover  $T$  a lo largo de  $D$  se obtiene una 2-esfera que bordea con una bola  $B^3 \subset M$ . Este  $B^3$  se encuentra en el lado opuesto de  $T$  de  $N$ , de lo contrario tendríamos  $N \subset B^3$  con  $T$  el único componente de límite de  $N$ . Invirtiendo la cirugía,  $B^3$  se convierte en un toro sólido fuera de  $N$ , delimitado por  $T$ . La otra posibilidad para un componente  $T$  de  $\partial N - \partial M$  es que sea  $\partial$ -paralelo en  $M$ , cortando un producto  $T \times I$  de  $M$ . Este  $T \times I$  no puede ser  $N$  ya que  $\pi_1 N$  no es abeliano, el mapa  $\pi_1 N \rightarrow \pi_1 B$  inducido por el haz circular  $N \rightarrow B$  es una sobreyección a un grupo libre en dos generadores. Entonces,  $T \times I$  es un collar externo en  $N$  y, por lo tanto, puede ser absorbido en  $N$ .

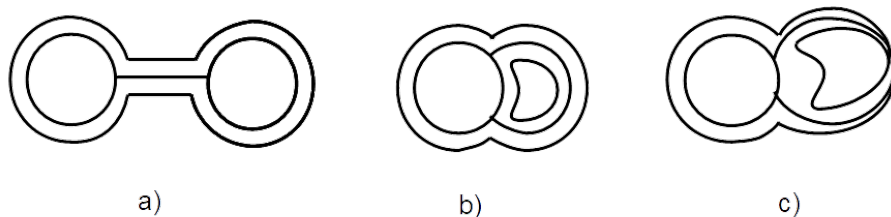


Figura 2.12:

Por lo tanto,  $M$  es  $N$  con toros sólidos, quizás unidos a uno o dos toros de  $\partial N - \partial M$ . Los círculos meridianos  $\{x\} \times \partial D^2$  en tales  $S^1 \times D^2$  adjuntos no son isotópicos en  $\partial N$  para rodear fibras de  $N$ , de lo contrario,  $A$  sería compresible en  $M$  (recuerde que  $A$  es vertical en  $N$ ). Por lo tanto, las fibras circulares se enrollan alrededor de los  $S^1 \times D^2$  adjuntos un número de veces distinto de cero en la dirección  $S^1$ . Por lo tanto, la estructura de haz circular en  $N$  se extiende para modelar las fibras de Seifert de estos  $S^1 \times D^2$ , por lo que  $M$  tiene fibras de Seifert. □

*Ahora se puede demostrar el teorema de la unicidad.*

**Demostración.** Teorema 2.2.1.1. Sólo queda por demostrar la afirmación de unicidad. Entonces sea  $T = T_1 \cup \dots \cup T_m$  y  $T' = T'_1 \cup \dots \cup T'_n$  dos colecciones mínimas de toros incompresibles disjuntos que dividen  $M$  en variedades  $M_j$  y  $M'_j$ , respectivamente, que son atoroidales o con fibras de Seifert. Podemos suponer que  $T$  y  $T'$  no están vacíos, de lo contrario, el teorema es trivial, ya que si  $T$  está vacío, por ejemplo,  $M$  mismo tendría fibras de Seifert o sería atoroidal y la minimalidad de  $T'$  obligaría a que también esté vacío. También podemos asumir que ningún toro de  $T$  es isotópico a un toro de  $T'$ , de lo contrario, podríamos extender esta isotopía a una isotopía ambiental de  $M$  y en particular de  $T$ , para hacer que los dos toros concuerden, luego dividir  $M$  a lo largo de este toro y recurrir a la inducción sobre el número de toros en  $T$  y  $T'$ . Simétricamente, podemos asumir que ningún toro de  $T'$  es isotópico a un toro de  $T$ .

Después de perturbar  $T$  para encontrar  $T'$  transversalmente, podemos isótopos  $T$  o  $T'$  para eliminar los círculos de  $T \cap T'$  que limitan los discos en  $T$  o  $T'$ , por el argumento usual usando incompresibilidad e irreductibilidad.

Para cada  $M_j$  las componentes de  $T' \cap M_j$  son entonces toros o anillos. Los componentes del anillo son incompresibles en  $M_j$  ya que son no contraíbles en  $T'$  y  $T'$  es incompresible. Los anillos de  $T' \cap M_j$  que son  $\partial$ -compresibles son entonces  $\partial$ -paralelos, por el Lema 2.2.2.1, por lo que pueden eliminarse por isotopía de  $T'$ .

Un círculo  $C$  de  $T \cap T'$  se encuentra en el borde de las componentes del anillo  $A_j$  de  $T' \cap M_j$  y  $A_k$  de  $T' \cap M_k$  (posiblemente  $A_j = A_k$  o  $M_j = M_k$ ). Por Lema 2.2.3.3  $M_j$  y

$M_k$  son fibras de Seifert. Si  $M_j \neq M_k$  Lema 2.2.3.1 implica que podemos elegir fibras de Seifert de  $M_j$  y  $M_k$  en la que  $A_j$  y  $A_k$  son verticales. En particular, las dos fibras del componente toro  $T_i$  de  $T$  que contiene  $C$  inducidas a partir de las fibras de Seifert de  $M_j$  y  $M_k$  tienen una fibra común  $C$ . Por lo tanto, estas dos fibras de  $T_i$  se pueden isotopizar para coincidir. Después de extender las isotopías a  $M_j$  y  $M_k$ , sus fibras de Seifert concuerdan en  $T_i$ , por lo que la colección  $T$  no es mínima, ya que  $T_i$  puede eliminarse de ella.

Esencialmente, el mismo argumento funciona si  $M_j = M_k$ : si no estamos en los casos excepcionales del Lema 2.2.3.1, entonces el círculo  $C$  es isotópico en  $T_i$  a fibras de cada una de las dos fibras de  $T_i$  inducidas a partir de  $M_j$ , por lo que estas dos fibras son isotópicas, y después de extenderlas a una isotopía de las fibras de Seifert de  $M_j$ , podemos eliminar  $T_i$  de  $T$ . En el caso excepcional  $M_j = S^1 \times S^1 \times I$ , si tenemos que volver a elegir el fibrado de Seifert para hacer que  $A_j$  sea vertical, entonces, como vimos en la demostración del Lema 2.2.3.1, el nuevo fibrado es simplemente el haz circular trivial sobre  $S^1 \times I$ . El anillo  $A_j$ , siendo vertical, incompresible y  $\partial$ -incompresible, debe unirse a los dos toros de frontera de  $M_j$ , ya que su proyección a la superficie base  $S^1 \times I$  debe ser un arco que une los dos componentes de contorno de  $S^1 \times I$ . Los dos círculos frontera de  $A_j$  en  $T_i$  coinciden o son disjuntos, por lo tanto, isotópicos, por lo que, una vez más, las dos fibras inducidas de  $T_i$  son isotópicas y  $T_i$  puede eliminarse de  $T$ . Los otros casos excepcionales del Lema 2.2.3.1 no pueden darse ya que  $M$  es orientable y  $M_j$  tiene al menos dos toros de frontera.

Así  $T \cap T' = \emptyset$ . Si cualquier componente  $T_i$  de  $T$  se encuentra en un atoroidal  $M'_j$ , debe ser isotópico a un componente  $T'_i$  de  $T'$ , una situación que ya hemos excluido. Por lo tanto, podemos suponer que cada  $T_i$  se encuentra en un  $M'_j$  con fibras de Seifert y, de manera similar, cada  $T'_i$  se encuentra en un  $M_j$  con fibras de Seifert. Todas estas variedades de fibras de Seifert tienen un borde no vacío, por lo que no contienen toros horizontales. Por lo tanto, podemos suponer que todos los toros  $T_i \subset M'_j$  y  $T'_i \subset M_j$  son verticales.

También podemos suponer que todos los  $M_j$  y  $M'_j$  tienen fibras de Seifert con el siguiente argumento. Un  $M_j$  atoroidal, por ejemplo, tendría que estar completamente dentro de un  $M'_j$ , ya que  $M_j$  no contiene  $'_i$ . Este  $M'_j$  tendría que ser de fibra Seifert ya que contiene los  $T_i$  en  $\partial M_j$ . Entonces, dado que los  $T_i$  en  $\partial M_j$  son verticales en  $M'_j$ , la fibra de Seifert de  $M'_j$  se restringe a una fibra de Seifert de  $M_j$ .

Los  $T_i$  y  $T'_i$  juntos cortan  $M$  en pedazos  $N_p$ . Cada  $N_p$  tiene dos fibras de Seifert posiblemente diferentes, una de  $M_j$  que lo contiene, la otra de  $M'_j$  que lo contiene. Considere un toro  $T_i$ . Esto tiene cuatro fibras de las dos fibras de Seifert en  $N_p$  y  $N_q$  a cada lado (posiblemente  $N_p = N_q$ ). Dos de estas fibras de  $T_i$  deben ser iguales ya que provienen del mismo  $M'_j$  que contiene  $T_i$ . Mostraremos que las fibras de Seifert de la  $M_j$  que contiene  $N_p$  y la  $M_k$  que contiene  $N_q$  (posiblemente  $M_j = M_k$ ) se pueden hacer coincidir en  $T_i$ . Pero esto contradiría la minimalidad de la colección  $T$  ya que  $T_i$  podría eliminarse de él.

En la mayoría de los casos, las dos fibras de Seifert de  $N_p$  pueden coincidir en  $T_i$  mediante una isotopía de la fibra de Seifert de  $M_j$  apoyada cerca de  $T_i$ , por el Lema 2.2.3.2. Dado que asumimos que  $M$  es orientable, los casos excepcionales son:

- $N_p = S^1 \times D^2$ . Esto tendría a  $T_i$  como su borde compresible, por lo que este caso no puede ocurrir.

- $N_p = S^1 \times S^1 \times I$ . Un componente frontera de esto es  $T_i$ . Si el otro es un  $T'_i$ , entonces  $T_i$  y  $T'_i$  serían isotópicos, contradiciendo una suposición anterior. Así, ambos toros de  $\partial N_p$  provienen de toros en  $T$ . Si estos toros en  $T$  son distintos, entonces  $N_p$  da una isotopía entre ellos, por lo que uno de ellos podría omitirse de  $T$ , en contradicción con la minimalidad de  $T$ . Queda la posibilidad de que ambos toros de  $\partial N_p$  deban provenir del mismo  $T_i$ , pero esto significaría que  $T'$  está vacío, caso excluido al principio. Por lo tanto, el caso  $N_p = S^1 \times S^1 \times I$  no puede ocurrir.
- $M_j \cap M'_k = S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} I$ . Esto tiene solo un componente de frontera, por lo que  $N_p = M_j \subset M'_j$  y podemos cambiar la fibra de Seifert de  $M_j$  para que sea la restricción de la fibra de seifer de  $M'_j$ .

El mismo razonamiento se aplica a  $N_q$  y  $M_k$  en lugar de  $N_p$  y  $M_j$ . La conclusión es que tenemos fibras de Seifert de  $M_j$  y  $M_k$  que concuerdan en  $T_i$  ya que concuerdan con las fibras de  $M'_j$ . Como se señaló antes, esto significa que  $T_i$  puede omitirse de  $T$ , contrariamente a la minimalidad, y la prueba está completa.

□

## Conclusiones

*Con la finalización de este reporte podemos enlistar algunos de los resultados obtenidos.*

- *Esencialmente, superficies y 3-variedades, la descomposición prima es única cuando la variedad es orientable y se pueden cortar a lo largo de esferas incrustadas y además sus piezas se combinan en sumas conexas.*
- *Las 3-variedades cerradas, orientables e irreducibles, se pueden descomponer cortando a lo largo de toros incrustados y sus piezas son atoroidales o fibras de seifert.*
- *En general, concluimos que la Descomposición tórica y prima son bastante importantes ya que sirven de base para muchos temas relacionados a la topología.*



# Referencias bibliográficas

- [1] Hatcher, Allen. Notes on Basic 3-Manifold Topology, (2007),1-29.
- [2] Jaco, W.H. An Algorithm to Construct the JSJ Decomposition of a 3-manifold.
- [3] Jaco, W. H; Shalen, P.B , Seifert fibered spaces in 3-manifolds.(1979).
- [4] Jennifer Shultens. Introduction to 3-Manifolds (Graduate Studies in Mathematics)(Graduate Studies in Mathematics,151)