

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y
MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA**



**INFORME FINAL DEL CURSO DE ESPECIALIZACIÓN
EN 3-VARIEDADES Y NUDOS TOPOLÓGICOS**

**TÍTULO DEL INFORME FINAL:
CONJETURA DE GEOMETRIZACIÓN DE THURSTON**

**PARA OPTAR POR EL GRADO ACADÉMICO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

**PRESENTADO POR:
VICTORIA SARAHI VILLATORO AVILÉS N° CARNÉ VA16008**

**DOCENTE ASESOR:
M.SC. JOSÉ JOAQUÍN APARICIO RAMÍREZ**

SEPTIEMBRE DE 2023

SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
AUTORIDADES**



RECTOR:

MAESTRO ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

VICERECTOR ACADÉMICO:

DR. RAÚL AZCÚNAGA

VICERECTOR ADMINISTRATIVO:

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA

SECRETARIO GENERAL:

ING. FRANCISCO ALARCÓN

DEFENSOR DE LOS DERECHOS

UNIVERSITARIOS:

LIC. LUIS ANTONIO MEJÍA LIPE

FISCAL GENERAL:

LICDO. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
AUTORIDADES**



DECANO:

LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RIOS BENÍTEZ:

VICEDECANO:

LIC. OSCAR VILLALOBOS

SECRETARIO:

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA

**DIRECTOR GENERAL DE PROCESOS DE
GRADO:**

LIC. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA

JEFE DE DEPARTAMENTO:

LICDA. KARLA MARÍA MEJÍA ORTÍZ

**COORDINADOR GENERAL DE PROCESOS DE
GRADO:**

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

Índice general

1. Preliminares	8
1.1. Historia	8
1.2. Variedades Diferenciales	8
1.2.1. Variedad con borde	9
1.2.2. Espacio Tangente	9
1.2.3. Variedades Orientadas	9
1.2.4. Clasificación topológica	10
1.2.5. Clasificación geométrica	10
1.3. Variedades de Riemanniana	11
1.3.1. Métrica Riemanniana	11
1.3.2. Variedad Riemanniana	11
1.3.3. Curvatura Seccional y de Ricci	12
1.3.4. Isometría	13
2. Geometría Riemanniana y Topológica	14
3. La Conjetura de Geometrización	15
3.1. Suma Conexa de dos 3-variedades	15
3.2. Descomposición en primos (o por esferas)	16
3.3. Descomposición Tórica	17
3.4. La Conjetura de Geometrización de Thurston	19
3.5. Las ocho Geometrías de Thurston	19
3.6. El Flujo de Ricci	20
3.6.1. La Ecuación	20
3.6.2. Primera Aproximación a la existencia de Soluciones	22
3.6.3. Soluciones que desaparecen en tiempo finito	22
3.6.4. ¿Hasta cuándo se puede prolongar la solución?	23
3.6.5. Formación de singularidades locales	24
3.7. Programa de Hamilton para resolver la Conjetura de Geometrización	25
3.7.1. Fase I: Inicio del flujo hasta la aparición de la primera singularidad.	25
3.7.2. Fase II: Flujo con Cirugía.	26
3.7.3. Fase III: Probar la existencia de un último tiempo singular finito.	26
Conclusiones	27
Referencias Bibliográficas	27

Resumen

Fue entre los años 1970 y 1980 que W. Thurston tomó conciencia de que muchos espacios de dimensión tres pueden ser geometrizados, al igual que las superficies. Estos incluyen la geometría esférica y la geometría hiperbólica al igual que la geometría euclidiana en dimensión tres; la geometría esférica y la geometría hiperbólica, que son análogas a las geometrías esférica e hiperbólica en dimensión 2. Sin embargo, hay también otras cinco geometrías mucho menos conocidas, llamadas las geometrías de Thurston. Su enfoque fue muy concreto, casi ‘experimental’. Así fue como logró, en 1976, formular su conjetura de geometrización. El objetivo de esta investigación fue ver como dicha conjetura se fue demostrando en numerosos casos significativos. Esto fue, justamente, lo que hizo Thurston y lo que lo llevo a tener la medalla “Fields” en 1983. No fue hasta 2002, con la aparición de un programa de Hamilton, que nos anunció que el flujo de Ricci podía convertirse en una potente herramienta para el estudio de las tres variedades. Esta fue una estrategia que él mismo diseñó para perseguir el ambicioso objetivo de probar la Conjetura de Geometrización usando el flujo de Ricci. Él mencionó que ésta se dividía en tres fases, posiblemente un poco difíciles, aunque también mencionó que se debía a que el flujo podía desarrollar singularidades locales antes de que seamos capaces de extraer conclusiones topológicas sobre la variedad original.

Palabras Claves: Conjetura; Variedad; Espacio Topológico; Suma Conexa; Métrica.

Abstrac

It was between the 1970s and 1980s that W. Thurston became aware that many spaces of dimension three can be geometrized, as can surfaces. These include spherical geometry and hyperbolic geometry as well as Euclidean geometry in dimension three; spherical geometry and hyperbolic geometry, which are analogous to spherical and hyperbolic geometries in dimension two. His approach was quite concrete, nearly 'experimental'. This is how he managed, in 1976, to formulate his geometrization conjecture. The aim of this research was to see how this conjecture was proved in several significant cases. This was precisely what Thurston did and what led him to be awarded at the Fields Medal in 1983. It was not until 2002, with the appearance of a program by Hamilton, that he announced to us that the Ricci flow could become a powerful tool for the study of the three manifold . This was a strategy that he himself designed to pursue the ambitious goal of proving the Geometrization Conjecture using the Ricci flow. He mentioned that it was divided into three phases, possibly a bit difficult, although he also mentioned that this was because the flow could develop local singularities before we are able to draw topological conclusions about the original variety.

Keywords: Conjecture; Manifold; Topological Space; Connected Sum ; Metric.

Introducción

En esta investigación se estudia la Conjetura de Geometrización de Thurston, que se obtiene como un caso especial de otra conjetura muy famosa entre los matemáticos, llamada la conjetura de geometrización, formulada por W. Thurston a finales de los setentas. Dicho de una manera muy superficial, esta conjetura de Thurston afirma que en las variedades tridimensionales se puede hacer geometría. Más precisamente, esto significa que las 3-variedades cerradas pueden descomponerse en porciones, en cada una de las cuales puede definirse una forma de medir distancias, por lo que es posible verlas como objetos geométricos. Esto ocurre, en particular, en la 3-variedad cerrada simplemente conexa de la que habla la hipótesis de la conjetura de Poincaré.

En el capítulo I tenemos los preliminares donde presentamos las herramientas necesarias que se han estudiado anteriormente y otras que no, pero son necesarias antes de introducirnos al tema de la Conjetura de Geometrización de Thurston tales como Variedades diferenciales, con borde, espacio tangente, variedades orientadas, clasificación topológica y geométrica. Así como también variedades riemanniana, métrica riemanniana, variedad riemanniana, curvatura seccional de Ricci e isometría.

Como capítulo II, llamado Geometría Riemanniana y Topológica tenemos una pequeña pincelada de los pilares básicos de un espacio topológico.

En el capítulo III, se estudian lo que es la suma conexa de dos variedades, su descomposición en primos y tórica. Para así pasar a lo que es el enunciado de lo que es la conjetura de geometrización de Thurston, donde veremos las ocho geometrías de Thurston, el flujo de Ricci, su ecuación, la primera aproximación a la existencia de soluciones y las que desaparecen en tiempo finito. También veremos hasta cuándo se pueden prolongar estas soluciones y la formulación de singularidades locales.

Para finalmente llegar a un programa de Hamilton para poder resolver la conjetura de Geometrización que se divide en 3 fases. Donde, el mismo autor nos menciona que CLARAMENTE la situación se nos va complicar debido a que el flujo pueda desarrollar singularidades locales antes de que seamos capaces de extraer conclusiones topológicas sobre la variedad original.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Historia

El 11 de noviembre de 2002 pasó algo extraordinario que hizo saltar de la silla y exclamar a uno de los amigos de los autores: “¡¡Lo consiguió!!”.

El motivo de tanto alboroto era el artículo “**The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications**” firmado por un conocido suyo: Grisha Perelman. Sólo gracias a las conversaciones mantenidas con su autor nueve años atrás pudo darse cuenta que este título escondía la demostración de la **Conjetura de Geometrización**, que es uno de los grandes problemas de la Topología del siglo XX.

¿Qué dice dicha conjetura? ¿Qué pasos, ideas y técnicas emplea Perelman? ¿Por qué un artículo que indica cómo resolver un problema topológico aparece en el apartado de Geometría Diferencial de **arxiv:math** y no en alguno de los tres que llevan la palabra topología?

Para responder a esta pregunta necesitaremos de dos minicursos previos que son sobre variedades y sobre Geometría Riemanniana, que nos ayudarán, a fijar la terminología y notación utilizadas en las siguientes secciones.

1.2. Variedades Diferenciales

El espacio modelo para las variedades es \mathbb{R}^n , y para las variedades con borde es $\mathbb{H}^n := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0$. Una variedad topológica (con borde) es un espacio topológico localmente igual que \mathbb{R}^n (que \mathbb{H}^n).

Con más precisión, una **variedad topológica** de dimensión n es un espacio topológico M tal que para todo punto $p \in M$ existe un abierto U de M conteniendo a p y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. El par (U, φ) se llama sistema de coordenadas de M en p porque asigna a cada punto $q \in U$ sus coordenadas $(x_1(q), \dots, x_n(q)) = \varphi(q)$. Los dominios U y V de dos sistemas de coordenadas (U, φ) y (V, ψ) pueden tener intersección no vacía y, entonces, el cambio de coordenadas $\mathbb{R}^n \supset \psi(U \cap V) \xrightarrow{\varphi \circ \psi^{-1}} \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. Cuando todos esos homeomorfismos son difeomorfismos (aplicaciones diferenciables con inversa diferenciable) se dice que M es una **variedad diferenciable**.

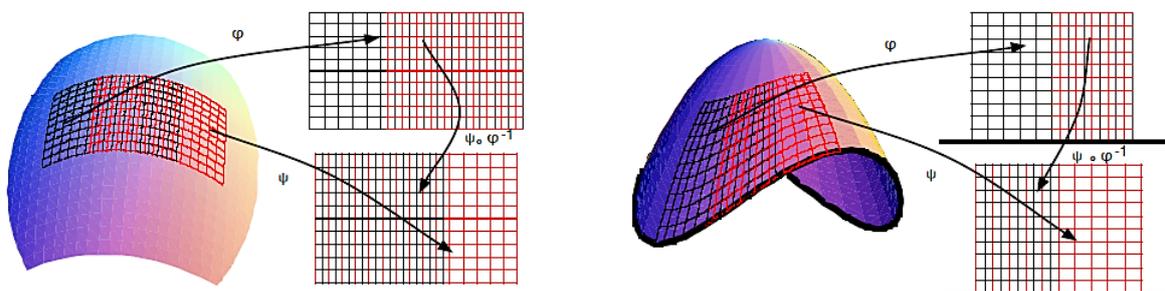


Figura 1.1: La Gaceta de la RSME, Vol. 9.1 pag 16

1.2.1. Variedad con borde

Tanto topológica como diferenciable, se define exactamente igual que el de variedad, pero cambiando \mathbb{R}^n por \mathbb{H}^n . En estas variedades se distinguen los puntos del borde ∂M de M , que son aquéllos que, en un sistema de coordenadas, su última coordenada x_n se anula, y los del interior $int(M)$, que son todos los demás. $int(M)$ es una variedad en el sentido de la primera definición que hemos dado. Si $\partial M = \emptyset$, entonces $M = int(M)$.

1.2.2. Espacio Tangente

Intuitivamente, el espacio tangente $T_p M$ a una variedad M en un punto p es el conjunto de vectores tangentes a todas las curvas C^∞ de M que pasan por p . Cada $T_p M$ tiene estructura de espacio vectorial n -dimensional y, por tanto, es isomorfo a \mathbb{R}^n . Además, un sistema de coordenadas (U, φ) de M define una base canónica $\{\partial_i(q)\}_{i=1}^n$ de $T_q M$ para cada $q \in M$.

Ejemplo 1. $T_p \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$. En efecto, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, tenemos que:

$$v = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 c(t)$$

con $c(t) = p + tv$

Ejemplo 2. Sea $p \in S^3$ y $c(t)$ una curva en S^3 tal que $c(0) = p$. Observar que $\langle c(t), c(t) \rangle = 1$.

Luego

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \langle c(t), c(t) \rangle = 2 \langle c(0), c'(0) \rangle = 2 \langle p, c'(0) \rangle.$$

Por lo tanto

$$T_p S^3 = \{v \in \mathbb{R}^4 : v \perp p\}$$

1.2.3. Variedades Orientadas

Por simplicidad y salvo cuando se especifica lo contrario, todos los resultados están enunciados para variedades orientadas (aquéllas que se pueden recubrir por dominios de sistemas de coordenadas tales que las matrices jacobianas de los cambios de coordenadas siempre tienen determinante positivo) y cerradas (i.e., compactas -como espacios topológicos- y sin borde).

1.2.4. Clasificación topológica

Las superficies cerradas orientables se clasifican, salvo homeomorfismos, de acuerdo a su género.

- **Cerrada:** Compacta sin borde
- **Orientable:** Tiene dos lados
- **Género:** Cantidad de agujeros.

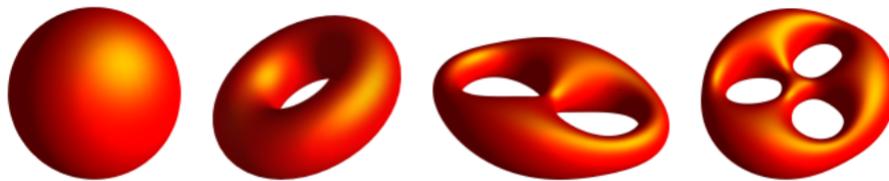


Figura 1.2: Clasificación topologica: cerrada, orientable, género.

1.2.5. Clasificación geométrica

Una superficie cerrada y orientable admite (esencialmente) una única geometría de curvatura constante. Luego, las superficies cerradas y orientables están clasificadas de acuerdo a su característica de Euler.

- **Característica de Euler:**

$$\chi = V - E + F$$

donde F es el número de caras, E el número de aristas y V el número de vértices.

- **Gauss-Bonnet:**

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_M K dA$$

- **Superficie cerrada orientable:**

$$\chi = 2 - 2g$$

donde g es la cantidad de asas que tiene la superficie.

1.3. Variedades de Riemanniana

1.3.1. Métrica Riemanniana

Una métrica riemanniana g sobre una variedad diferenciable M es la asignación, a cada espacio tangente T_pM , de un producto escalar g_p (es decir, de una forma bilineal simétrica y definida positiva $g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$).

1.3.2. Variedad Riemanniana

Se llama variedad riemanniana (M, g) a una variedad diferenciable M asigna a cada $p \in M$ un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en T_pM .

En tal caso decimos que M es una **variedad riemanniana**.

De manera general, no hay ninguna relación entre el producto interno en T_pM dado por una métrica riemanniana y el producto interno en T_pM inducido por la inclusión $T_pM \subset \mathbb{R}^n$

Ejemplo 3. En \mathbb{R}^3 tenemos el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Como $T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ para todo p podemos considerar la métrica riemanniana que asigna el mismo producto interno a cada espacio tangente. La geometría euclídea en \mathbb{R}^3 es la geometría de la métrica usual.

Una métrica Riemanniana g permite definir sobre una variedad la norma de cada vector tangente y, con la ayuda de ésta, la **longitud de una curva** diferenciable L_g se define como la integral a lo largo de la curva de la norma del vector tangente a la curva en cada punto. Además, dados dos puntos de la variedad, la **distancia** entre ellos $d_g(\cdot, \cdot)$ viene dada por el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen esos dos puntos.

Teorema. La topología de M coincide con la topología métrica inducida por la distancia riemanniana.

Demostración. (Idea de la demostración)

Debemos probar que (M, d_g) es un espacio métrico y que la topología original de M como variedad coincide con la inducida por d_g . Esto nos dará sentido a hablar de variedades Riemannianas completas (como espacios métricos). En éstas se verificará que existe una curva uniendo dos puntos cualesquiera cuya longitud es igual a la distancia entre esos puntos. \square

Definición 1. Las curvas que localmente minimizan la distancia se llaman **Geodésicas**.

Su notación es: $\gamma_v(t)$ es la geodésica con condiciones iniciales.

$$\gamma_v(0) = p, \gamma'_v(0) = v \in T_pM$$

En la base $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ definida por un sistema de coordenadas $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ de M , una métrica riemanniana g sobre M tiene unas coordenadas $g_{ij}(q) = g_q(\partial_i, \partial_j)$, que son funciones diferenciables sobre el abierto U . Por la simetría de g , $g_{ij} = g_{ji}$.

Cada punto p de una variedad riemanniana posee un entorno en el que están definidas unas coordenadas llamadas normales en p , en las cuales las geodésicas que pasan por p tienen las mismas coordenadas que una recta en \mathbb{R}^n pasando por el origen y, además, $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.

1.3.3. Curvatura Seccional y de Ricci

En un sistema de coordenadas normales en p , la métrica g admite el siguiente desarrollo de Taylor alrededor de p

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{iajb}(p)x^a x^b + O(\|x\|^3) \quad (1.1)$$

donde $O(\|x\|^3)$ es un error, $R(p)$ es una aplicación 4-lineal para todo $p \in M$ que verifica las propiedades de simetría $R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{klij}$ y se conoce como **curvatura Riemanniana** de la variedad. Por el anterior desarrollo, en una variedad Riemanniana la diferencia de primer orden con el espacio euclídeo es 0 y la de segundo orden viene dado por R .

Cuando la dimensión de M es 2, a causa de sus simetrías, R solo tiene una componente relevante no nula, R_{1212} , que se llama **curvatura K de la superficie** M . A partir de la curvatura Riemanniana se definen:

Definición 2. *La Curvatura Seccional, mide la curvatura gaussiana de una superficie parametrizada en M . Mas aún, la curvatura seccional se puede calcular en cada punto de M en la dirección de un plano $\pi \subset T_p M$: si $v, w \in \pi$ son dos vectores ortonormales entonces:*

$$K(\pi) = K(v, w) = \langle R_{u,v}v, u \rangle.$$

Teorema. *(Curvatura Seccional)*

$$\begin{aligned} K(i, j) &= \frac{(\lambda - \mu + v)^2 + 4v(\mu - v)}{4\lambda\mu v} \\ K(i, k) &= \frac{(\lambda - \mu - v)^2 + 4\mu(\lambda - \mu)}{4\lambda\mu v} \\ K(j, k) &= \frac{(\lambda + \mu - v)^2 + 4\lambda(\lambda - v)}{4\lambda\mu v} \end{aligned}$$

La curvatura seccional y la curvatura riemanniana están íntimamente relacionadas: Sec. está determinada por R y Sec. determina R .

Definición 3. La curvatura de Ricci Ric de una variedad riemanniana (M, g) es la asignación, a cada espacio tangente $T_p M$ de la forma bilineal simétrica Ric_p , definida, en cualquier sistema de coordenadas, por:

$$Ric_{ij} = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} R_{ikjl}$$

donde $(g^{kl})_{1 \leq k, l \leq n}$ representa la matriz inversa de $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

La presencia de una métrica sobre una variedad permite definir una densidad de volumen sobre cada espacio tangente (exigiendo que el volumen del cubo de lado uno sea 1) y, por integración, el volumen de un dominio de la variedad. También aquí, cuando se toman coordenadas normales, la diferencia de primer orden de esta densidad con respecto a la euclídea es 0 y la de segundo orden viene determinada por la curvatura de Ricci, lo que da la mejor interpretación geométrica de Ric .

1.3.4. Isometría

Definición 4. Dos variedades riemanniana (M, g) y (N, h) se dice que son isométricas si existe una aplicación $f : M \rightarrow N$, llamada isometría, que conserva las distancias.

En otras palabras, son transformaciones de M que preservan la métrica riemanniana. Esto es equivalente a que:

(11). Para todo $p \in M$ existan sistemas de coordenadas (U, φ) en p y (V, ψ) en $f(p)$ tales que f restringido a U es un difeomorfismo sobre V y $h_{ij}(f(p)) = g_{ij}(p)$

Dos variedades riemanniana isométricas se consideran como iguales a efectos de Geometría Riemanniana. Por lo tanto, es natural decir que dos variedades riemanniana isométricas se encuentran a distancia 0. De aquí y de la propiedad (I1) resulta también natural decir que dos variedades riemanniana están ϵ -**próximas** si se pueden recubrir por sistemas de coordenadas que satisfacen la propiedad (II) salvo que, en lugar de verificar la igualdad $g_{ij} = h_{ij}$, verifican que las diferencias $g_{ij} - h_{ij}$ y las de sus derivadas son menores que ϵ . De entre ellas, solo son simplemente conexas el espacio euclídeo, la esfera y el espacio hiperbólico.

Los demás espacios de curvatura seccional constante son cocientes \tilde{M}/Γ , donde \tilde{M} es S^n, \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n y Γ es un grupo discreto de isometrías de \tilde{M} que es isomorfo a $\pi_1(\tilde{M}/\Gamma)$.

Una isometría de una variedad riemanniana (M, g) es una isometría de ella en sí misma. Las variedades con mayor número de isometrías son las de curvatura seccional constante.

Ejemplo 4. El espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ de curvatura seccional constante es $S^n / \{\pm Id\}$.

Las variedades riemanniana de curvatura seccional constante son un caso especial de una familia más amplia: los llamados espacios localmente homogéneos. Éstos se corresponden con lo que intuitivamente expresa su nombre: espacios que tienen el mismo aspecto vistos desde cualquiera de sus puntos. Con más precisión, *una variedad riemanniana (M, g) se dice que es un espacio localmente homogéneo si dados dos puntos cualesquiera $p, q \in M$, existen un abierto $U \ni p$ y una isometría de U en su imagen que lleva p en q .*

Capítulo 2

Geometría Riemanniana y Topológica

La famosa frase “un topólogo es una persona que no distingue entre una dona y una taza de café” recuerda que dos variedades son homeomorfas (topológicamente equivalentes) si se puede deformar una en otra sin hacer ningún corte. En consecuencia, un espacio topológico se nos puede presentar tan deformado que resulte difícil reconocerlo; por ejemplo, los dos dibujos siguientes son cilindros de dimensión 2 pero, evidentemente,

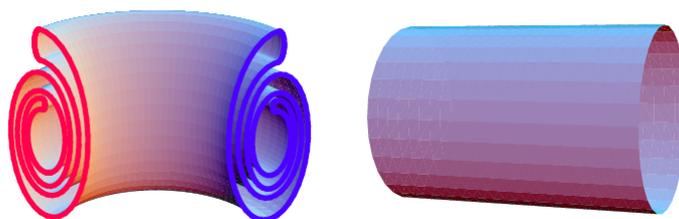


Figura 2.1: La Gaceta de la RSME, Vol. 9.1 pág. 19

es más fácil identificar ese espacio topológico en el dibujo de la derecha.

La Geometría Riemanniana puede ayudar a reconocer en qué espacio topológico nos encontramos gracias a dos pilares básicos:

1. Toda variedad diferenciable admite una métrica riemanniana.
2. Se conoce la topología de muchas variedades riemanniana, especialmente de espacios homogéneos.

Para averiguar la topología de una variedad, podemos proceder como sigue: aplicando (1), empezamos con una métrica arbitraria sobre M y, con el paso del tiempo, deformamos la métrica hasta que aparezca una conocida (usualmente la de algún espacio homogéneo). La ventaja de deformar la métrica riemanniana en lugar de la variedad radica en que, al ser la métrica localmente una familia de funciones g_{ij} , se puede dar una especie de “regla” o “algoritmo” para hacer la deformación. El flujo de Ricci (del que hablaremos en el siguiente capítulo y que aparecía en el título del citado preprint de Perelman) es uno de esos “algoritmos”.

Capítulo 3

La Conjetura de Geometrización

3.1. Suma Conexa de dos 3-variedades

Empezamos introduciendo la **suma conexa** de dos 3-variedades M_1 y M_2 que tienen una 3-bola cerrada embebida (i.e., sin auto intersecciones) $B_i \subset M_i$ para $i = 1, 2$. Se trata de una operación binaria que se denota por $M_1 \# M_2$ y se realiza en dos pasos:

1. Eliminar de cada M_i el interior de la 3-bola B_i . Nótese que $M_i \setminus \text{int}(B_i)$ es una 3-variedad con borde la 2-esfera ∂B_i ($i = 1, 2$).
2. Identificar las 2 -esferas borde mediante un homeomorfismo $f : \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$.

Si exigimos que f cambie las orientaciones inducidas en el borde, entonces $\#$ es una operación bien definida, conmutativa y asociativa, cuyo elemento neutro es la esfera S^3 (o sea, $M \# S^3$ es siempre homeomorfa a M). Además, $M_1 \# M$ será una 3-variedad orientada.

Recíprocamente, si una 3-variedad $M = M_1 \# M_2$, entonces M contiene una esfera S^2 embebida de tal forma que M_1 y M_2 se obtienen cortando M a lo largo de S^2 (esto es, eliminando de M el conjunto $S^2 \times (-\epsilon, \epsilon)$ -con $\epsilon > 0$ pequeño- tras lo cual resultan dos variedades con borde S^2) y rellenando las 2-esferas borde con 3-bolas. Se dice que M_1 y M_2 surgen tras realizar un **proceso de cirugía** a la variedad M .

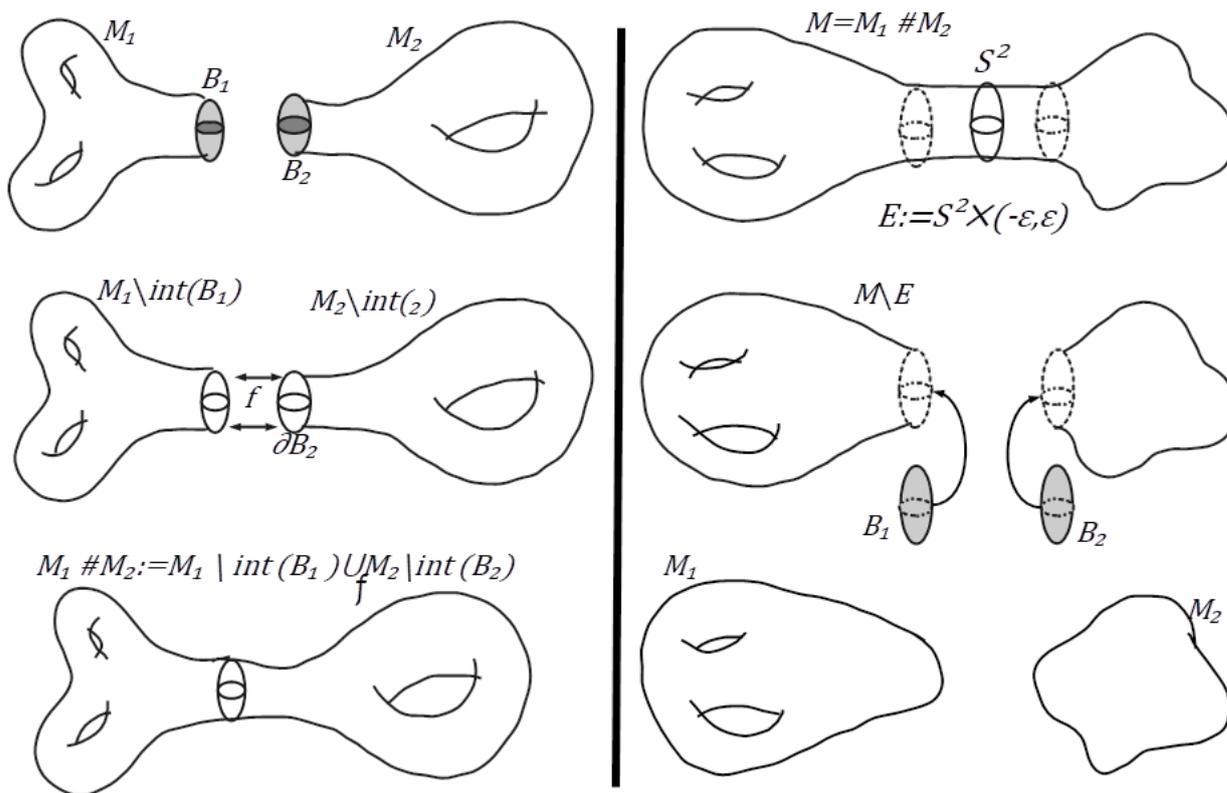


Figura 3.1: Proceso de Cirugía

Haciendo una analogía con la multiplicación de números enteros

Definición 5. Una 3-variedad M se denomina **prima** si sólo se puede descomponer como suma conexa de manera trivial, i.e., cualquier descomposición de M como $M_1 \# M_2$ implica que M_1 o M_2 son homeomorfas a S^3 .

Definición 6. Una 3-variedad M es irreducible si toda 2-esfera embebida $S^2 \subset M$ acota una 3-bola $B^3 \subset M$.

Claramente, una 3-variedad **irreducible** es prima. El recíproco es casi cierto, pues $S^1 \times S^2$ es la única 3-variedad que es prima pero no irreducible.

3.2. Descomposición en primos (o por esferas)

Teorema. Toda 3-variedad M se puede expresar como suma conexa finita de 3-variedades primas de la forma:

$$M \cong (P_1 \# \cdots \# P_s) \# (S^1 \times S^2) \# \cdots \# (S^1 \times S^2)$$

donde los factores P_i son irreducibles. Además, la colección $\{P_i\}_{i=1}^s$ es única salvo difeomorfismo, orden de los factores o inserción de S^3

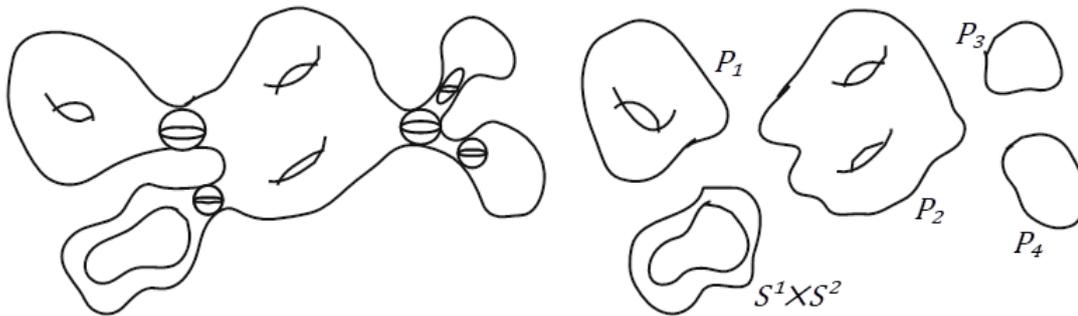


Figura 3.2: Descomposición en primos

En definitiva, esta descomposición reduce el problema a la clasificación de las 3-variedades irreducibles

3.3. Descomposición Tórica

Comenzaremos dando algunas definiciones básicas para entender la descomposición tórica. Con este fin, consideramos N una 3-variedad compacta (posiblemente con borde).

■ Superficie Incompresible:

Se dice que una **superficie** $S \subset N$ compacta, orientada y tal que $S \cap \partial N = \partial S$ es **incompresible** si para todo disco D embebido en N con $D \cap S = \partial D$, la curva ∂D también acota un disco contenido en S (o sea, dicha curva es contráctil en S).

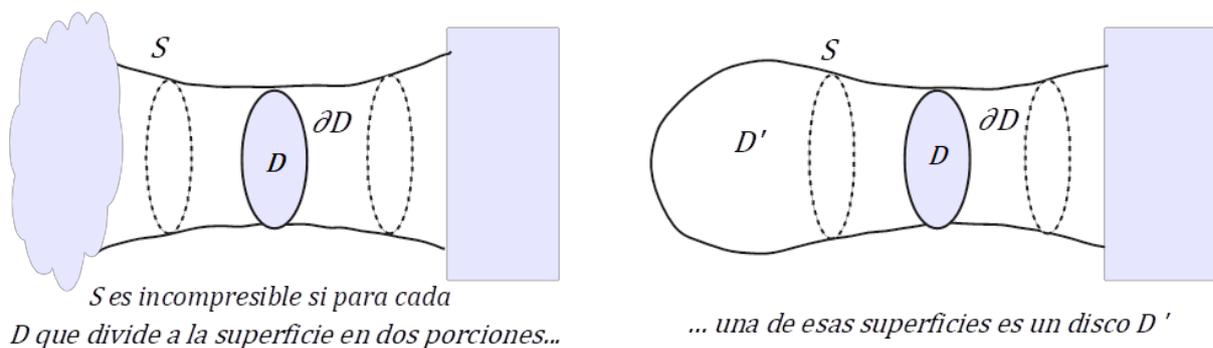


Figura 3.3: Superficie incompresible

■ Toro-Irreducible:

N es **toro-irreducible** si todo toro incompresible embebido en N se puede deformar a un toro en ∂N . Si N es cerrada, toro irreducible significa que no contiene

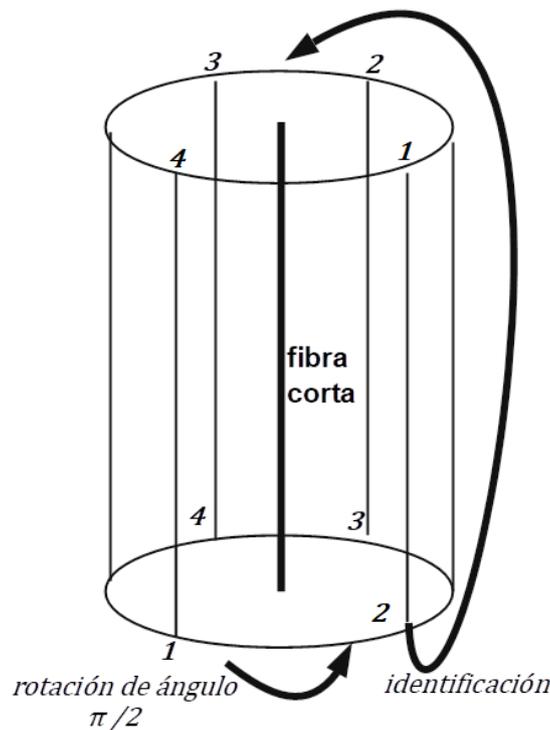
toros incompresibles.

■ **Fibración de Seifert:**

Se dice que N es una **fibración Seifert** si se expresa como una unión disjunta de esferas S^1 (las fibras) cada una de las cuales tiene un entorno, formado por una unión de fibras, que es homeomorfo (a través de un homeomorfismo que preserva las fibras) a un (p, q) -toro solido fibrado estándar

$$T_{(p,q)} := \bigcup_{x \in D^2} [0, 1] \times \{x\} / (x, 0) \sim (\rho(x), 1).$$

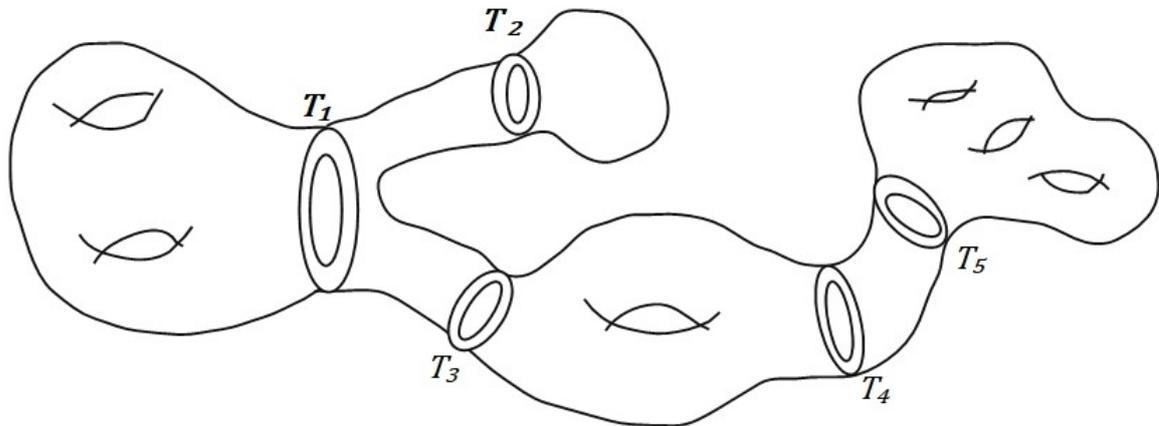
donde D^2 es el disco unidad y ρ una rotación de D^2 de ángulo $\frac{2\pi p}{q}$, para algún par de enteros p y q primos entre si ($q \leq 1$). Notemos que la identificación convierte al segmento $\{0\} \times I$ en una esfera S^1 (fibra corta); pero, si $x \neq 0$, hay que recorrer q intervalos de la forma $\{x\} \times I$ hasta obtener en el cociente una S^1 . Además, hay un número finito de fibras cortas y todas ellas están en el interior de N .



Definición 7. Sea M una 3-variedad irreducible. La **descomposición tórica** dice que existe una colección finita T de toros incompresibles disjuntos tales que:

- Cada una de las componentes de $M \setminus T$ (que serán 3-variedades compactas con borde tórico) es toro irreducible o fibración de Seifert;
- T es minimal (en cardinalidad) respecto a la propiedad anterior.

Obsérvese que la colección T es vacía cuando la propia variedad M es toro-irreducible o fibración Seifert.



3.4. La Conjetura de Geometrización de Thurston

Una **variedad** (posiblemente con borde) M se denomina **geométrica** si $\text{int}(M)$ admite una métrica Riemanniana g tal que $(\text{int}(M), g)$ es un espacio localmente homogéneo.

La **Conjetura de Geometrización**, fue enunciada por William P. Thurston

Conjetura de Geometrización de Thurston: . .

Sea P una 3-variedad cerrada, orientable y prima. Entonces P se puede descomponer (por cirugía a lo largo de esferas y toros incomprensibles) o cortar a lo largo de toros de tal forma que los interiores de las partes resultantes admiten una geometría que puede ser modelada por una de las ocho geometrías de Thurston.

La Conjetura afirma que las 3-variedades obtenidas en la descomposición tórica son geométricas y, por el apartado anterior, sabemos que dichas 3-variedades son toro-irreducibles o fibraciones Seifert. Como es un hecho conocido que estas últimas son geométricas, sólo queda analizar si las 3-variedades toro-irreducibles son geométricas.

Gracias a los avances topológicos realizados en la prueba de la Conjetura (que veremos en la sección 3.5), desde 1994 únicamente se consideraban abiertos los siguientes dos casos particulares:

3.5. Las ocho Geometrías de Thurston

1. E^3 , geometría euclídea.
2. S^3 , geometría esférica.
3. H^3 , geometría hiperbólica.

4. $S^2 \times \mathbb{R}$, producto de una 2-esfera por una recta.
5. $H^2 \times \mathbb{R}$, producto del plano hiperbólico y una recta.
6. \widetilde{SL}_2 , cubrimiento universal del grupo lineal especial.
7. Nil , geometría del grupo de Heisenberg.
8. Sol , movimientos rígidos del plano de Minkowsky.

Los tres primeros modelos corresponden a los modelos de **curvatura constante**.

La mayoría de estas geometrías aparecen como la geometría de grupos de **Lie** con **métricas invariantes a izquierda**.

Existen sólo 8 espacios localmente homogéneos simplemente conexos (y que admiten cociente compacto) de dimensión 3. Entre ellos la esfera, el hiperbólico y el espacio euclídeo. Todos los espacios localmente homogéneos compactos son cociente de alguno de estos 8 espacios por un subgrupo discreto de isometrías. Todos estos espacios tienen una topología bien conocida (excepto algunos cocientes del hiperbólico que todavía son objeto de investigación). Por lo tanto, si se prueba la Conjetura de Geometrización, la clasificación de las 3-variedades esta esencialmente acabada.

- **Conjetura de Hiperbolización:** Si M es una 3-variedad irreducible tal que $\pi_1(M)$ es infinito y no contiene ningún subgrupo isomorfo a $Z \oplus Z$, entonces M es del tipo H^3/Γ .
- **Conjetura de Eliptización (incluye la de Poincaré):** Toda 3- variedad irreducible de grupo fundamental finito es un cociente S^3/Γ .

3.6. El Flujo de Ricci

3.6.1. La Ecuación

En 1982, Richard Hamilton introdujo el concepto de flujo de Ricci para variedades de dimensión arbitraria. Como ya mencionamos, se trata de un método para hacer evolucionar una métrica Riemanniana. Hamilton buscaba averiguar si variedades que admitían métricas de cierta complicación podían admitir también métricas más “bonitas” (de curvatura constante, homogéneas, ...). El resultado obtenido fue un Teorema 3, el cual, como veremos, motivo que Hamilton diseñara su programa para demostrar la Conjetura de Geometrización usando el flujo de Ricci.

El **flujo de Ricci** es una familia uniparamétrica de métricas Riemanniana solución de

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2Ric_{g_t} \quad (3.1)$$

con la condición inicial $g_0 = g$. De (3.1), que se conoce como ecuación del flujo de Ricci (o, simplemente, flujo de Ricci), destacaremos que es invariante por cambios de escala (o sea, si g_t es solución de (3.1), también lo es $\tilde{g}_t = c^2 g_{c^2 t}$).

Para entender que usar la ecuación (3.1) es natural para el objetivo que inicialmente perseguía Hamilton, conviene retrotraerse a una de las ecuaciones de evolución más antigua, la ecuación del calor en \mathbb{R}^3

$$\Delta T = -\frac{\partial T}{\partial t}; T(0) = T_0; \quad \text{siendo } \Delta T := -\frac{\partial T}{\partial x^1} - \frac{\partial T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial x^3}, \quad (3.2)$$

cuya solución $T(x, y, z, t)$ da la temperatura de un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en un tiempo t cuando la temperatura inicial es $T_0(x, y, z)$. Esta solución es tal que la temperatura tiende a una distribución lo más homogénea posible a medida que el tiempo avanza. Cuando $t \rightarrow \infty$, se verifica $\Delta T = 0$ (i.e., T es una función armónica) y la distribución de temperatura resultante es uniforme.

Esta propiedad de la ecuación del calor inspiró a Eells y Sampson (1964), quienes usaron un tipo de ecuación semejante, pero no lineal, para demostrar que toda aplicación entre variedades riemanniana (cumpliendo ciertas acotaciones en su curvatura) evoluciona a una aplicación de un tipo muy especial*. Hamilton trabajó en este mismo tema. No es de extrañar, pues, que pensara en hacer con las métricas algo similar, esto es, buscar una ecuación de evolución de la métrica que tuviera alguna semejanza con la del calor y esperar que la solución tienda hacia métricas más bonitas. Podemos incluso esperar que, igual que la solución de la ecuación del calor tiende a distribuirse uniformemente sobre el espacio, la métrica tienda a distribuirse también de modo semejante sobre todos los puntos de la variedad, como ocurre en los espacios localmente homogéneos.

Antes de pensar en que la ecuación que buscamos sea del tipo (3.2) hay que plantearse una cuestión más elemental: ¿qué ecuaciones son posibles?

Cuando buscamos una ecuación para la derivada parcial temporal de una métrica Riemanniana g_t sobre una variedad M , esto es, una ecuación “tipo flujo” con la forma general

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \square \quad (3.3)$$

hay que exigir condiciones geométricas con el fin de que (3.2) tenga sentido:

- I. Para que la resolución sea posible, \square deberá estar definido únicamente en función de g_t y sus derivadas respecto de las coordenadas de M (como máximo hasta orden 2).
- II. $\square \equiv \square(g_t)$ será una forma bilineal simétrica (por serlo la métrica y porque derivar respecto del tiempo no afecta a las coordenadas de la variedad).
- III. Por último, es deseable que (3.3) sea invariante por cambios de coordenadas.

Con las tres propiedades anteriores**, la única posibilidad es que $\square(g_t)$ sea una combinación lineal de la propia métrica g_t y de la curvatura de Ricci asociada a g_t . Así

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \alpha(t) Ric_{g_t} + \lambda(t) g_t$$

*llamada armónica también por ser una generalización de la función armónica hacia la que evoluciona la ecuación del calor.

**Las condiciones I) y III) anteriores se suelen expresar en Geometría Riemanniana diciendo que \square ha de ser un tensor natural de segundo orden.

Tratando de hacer los cálculos más sencillos, tomaremos $\lambda \equiv 0$ y α constante:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \alpha(t) Ric_{gt}. \quad (3.4)$$

Para averiguar el signo de α que conviene tomar en (3.4), vamos usar que buscamos una ecuación del tipo (3.2). Recordando el desarrollo de Taylor de las componentes de la métrica en coordenadas normales (1.1) y la definición de la curvatura de Ricci,

$$(\Delta g_{ij})(p) = - \sum_{a=1}^n \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^{a^2}} = - \sum_{a,b=1}^n \left(g^{ab} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^a \partial x^b} \right) (p) \stackrel{(1.1)}{=} \frac{1}{3} Ric_{ij}(p) + O(\|x\|^3)$$

Luego (3.4) se puede aproximar por

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} \approx 3\alpha \Delta g_t \quad (3.5)$$

Por lo tanto, solo si $\alpha < 0$ el flujo de Ricci se puede aproximar linealmente por una ecuación como la del calor (3.2). Finalmente, el valor específico de α es una cuestión arbitraria; en concreto, por motivos de cálculo, Hamilton tomó $\alpha = -2$.

3.6.2. Primera Aproximación a la existencia de Soluciones

Para que el estudio práctico del flujo de Ricci sea posible, lo primero que se ha de plantear es si la ecuación (3.1) tiene solución, al menos para pequeños intervalos de tiempo. Esto lo asegura el resultado que enunciamos a continuación, cuya prueba da Hamilton en 1982 y simplifica DeTurck un año más tarde usando un “truco” que tendrá una notable influencia en el posterior trabajo de Perelman.

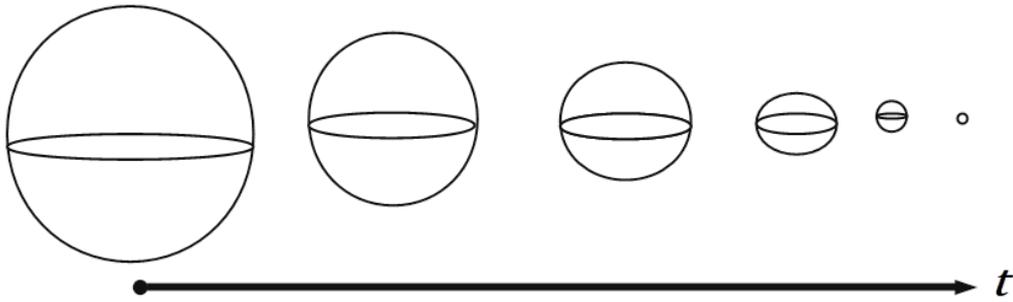
Teorema 1. *Dada cualquier variedad Riemanniana (M, g) de dimensión arbitraria, existe ϵ y una única solución diferenciable g_t del flujo de Ricci, con $t \in [0, \epsilon)$, tal que $g_0 = g$.*

Observaciones. *La prueba de este teorema no se realizara ya que el autor de donde sacamos la información, lo utiliza solamente como un resultado para hacer uso de ello posteriormente.*

3.6.3. Soluciones que desaparecen en tiempo finito

La analogía del flujo de Ricci con la ecuación del calor no es tan perfecta como decíamos en el apartado 3.6.1, sino que ya surgen dificultades al observar los ejemplos más sencillos de soluciones del flujo de Ricci.

Ejemplo 5 († Flujo de Ricci en la esfera). *Si hacemos evolucionar la métrica estándar de una esfera siguiendo el flujo de Ricci, la variedad se contrae conforme el tiempo avanza hasta que, en un tiempo finito, colapsa a un punto (esto es, la métrica tiende a cero y la curvatura se vuelve no acotada en todo punto).*



En el ejemplo, la esfera acaba convirtiéndose en un punto (el cual tiene volumen cero); luego una posible estrategia para evitar este comportamiento sería exigir que el volumen de la solución se mantenga constante con el tiempo. La modificación de (3.1) para que se cumpla esta condición lleva a la ecuación del **flujo de Ricci normalizado**:

$$\frac{\partial \bar{g}_t}{\partial t} = -2Ric_{g_t} + \frac{2}{n} r \bar{g}_t \quad (3.6)$$

donde $r \equiv r(t)$ es una función que depende de una integral de la curvatura.

El siguiente resultado muestra que el procedimiento recién descrito funciona.

Teorema 3. *Si (M, g) es una 3-variedad Riemanniana con $Ricg > 0$, entonces la solución de (3.1) se contrae a un punto en un tiempo finito; pero existe una única solución g_t de (3.6) definida para todo $t \leq 0$ y tal que $g_0 = g$. Además, g_t converge, cuando $t \rightarrow \infty$, a una métrica de curvatura seccional constante y positiva.*

Observaciones. *La prueba de este teorema no se realizara ya que el autor de donde sacamos la información, lo utiliza solamente como un resultado para hacer uso de ello posteriormente.*

Las soluciones de (3.1) y (3.6) son equivalentes en el sentido de que una se obtiene a partir de la otra multiplicando por un factor de reescalamiento adecuado y haciendo una reparametrización temporal. A causa de esta propiedad, el flujo de Ricci normalizado es una herramienta que ha caído en desuso; pues se consigue el mismo efecto simplemente expandiendo las distancias y el tiempo en una solución ordinaria de (3.2). ***

3.6.4. ¿Hasta cuándo se puede prolongar la solución?

Resulta natural formularse esta pregunta, pues el ejemplo † muestra que el flujo de Ricci no existe en general para todo el intervalo de tiempo $[0, \infty)$. A grandes rasgos, diremos que el flujo se vuelve singular en el instante T si no se puede extender más allá de T . Hamilton probó que si la solución de (3.1) existe solo en un intervalo de tiempo finito, entonces la curvatura no está acotada. Con más precisión:

si un flujo de Ricci g_t existe para $t \in [0, T)$, pero no se puede extender más allá de T , entonces:

$$T = \infty \quad \text{o bien} \quad \sup_{M \times [0, T)} |Sec_{g_t}| = \infty$$

*** En el ejemplo †, esto haría que en el instante final se observara una pequeña esfera en lugar de un punto.

Este resultado propicio la siguiente clasificación para las soluciones del flujo de Ricci:

- **no singulares:** $T = \infty$ y $\sup_{M \times [0, T]} |Sec_{g_t}| < \infty$
- **singulares:** $\sup_{M \times [0, T]} |Sec_{g_t}| = \infty$

Describimos su comportamiento diciendo que el flujo encuentra una singularidad **** en T (**tiempo singular**). Según esto, para que el flujo produzca una singularidad hay dos posibilidades:

- (a) que en el instante singular la curvatura se haga infinito en todos los puntos de la variedad (como el caso de la esfera) y
- (b) que la curvatura sea no acotada sólo en una región concreta de la variedad.

Vimos que la posibilidad (a) es evitable usando el flujo de Ricci normalizado, pero veremos en el apartado siguiente que (b) también se da, y está es la que produce los mayores problemas en el estudio del flujo de Ricci.

3.6.5. Formación de singularidades locales

Comenzamos dando más detalles sobre las singularidades de tipo (a) y (b) recién mencionadas anteriormente. Se dice que un flujo de Ricci g_t forma una **singularidad local** en el instante T si existe un subconjunto compacto $\mathcal{K} \subset M$ tal que

$$\sup_{\mathcal{K} \times [0, T]} |Sec_{g_t}| = \infty, \quad \text{pero} \quad \sup_{M \setminus \mathcal{K} \times [0, T]} |Sec_{g_t}| < \infty$$

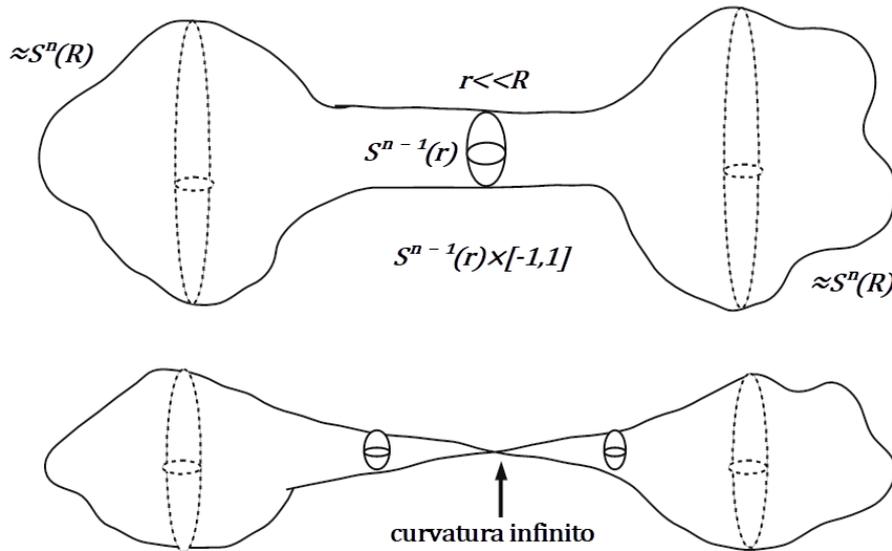
Si $M = \mathcal{K}$ (lo cual significa que la variedad entera se contrae a un punto en el tiempo singular), hablaremos de **singularidad global**.

El ejemplo más típico de singularidad local es el siguiente:

Ejemplo 6 (Cuello estrangulado). Sean dos esferas $S^n(R)$, con $n \leq 3$, unidas por un cuello o tubo delgado (esto es, por una región cuya topología se parece a la del cilindro $S^{n-1}(r) \times [-1, 1]$). Si R es mucho mayor que r , al evolucionar según el flujo de Ricci, el tubo se contrae más rápidamente de manera que se pinza en alguna parte antes de que las esferas S^n desaparezcan.

En general, hablaremos de cuello estrangulado siempre que exista una región cilíndrica uniendo dos regiones (no necesariamente esferas) que, si colapsan, lo hacen más lentamente que el cilindro.

**** De ahora en adelante, salvo cuando se especifique lo contrario, siempre nos referiremos a las singularidades que se desarrollan en tiempo finito.



3.7. Programa de Hamilton para resolver la Conjetura de Geometrización

Los primeros resultados de Hamilton ya anuncian que el flujo de Ricci puede convertirse en una potente herramienta para el estudio de las 3-variedades. En efecto, del teorema 3 se deduce que toda 3-variedad Riemanniana con curvatura de Ricci positiva es homeomorfa a S^3/Γ . Así, con ayuda del flujo de Ricci, se prueba que la Conjetura de Geometrización es cierta para este tipo particular de 3-variedades; por tanto, parece lógico tratar de aplicar la misma técnica (con los cambios adecuados) para una demostración general.

Se conoce como programa de Hamilton a la estrategia que el mismo diseña para perseguir el ambicioso objetivo de probar la Conjetura de Geometrización usando el flujo de Ricci. En principio, se espera que la métrica evolucione hacia otra localmente homogénea en trozos de la variedad unidos a través de esferas o toros. Pero es posible que la situación se complique debido a que el flujo pueda desarrollar singularidades locales antes de que seamos capaces de extraer conclusiones topológicas sobre la variedad original. El programa divide la demostración de la conjetura en las siguientes fases:

- I. Fase: Inicio del flujo hasta la aparición de la primera singularidad.
- II. Fase: Flujo con Cirugía.
- III. Fase: Probar la existencia de un último tiempo singular finito.

3.7.1. Fase I: Inicio del flujo hasta la aparición de la primera singularidad.

- Paso I.1: Partir de una 3-variedad M y dotarla de una métrica Riemanniana arbitraria g_0 .
- Paso I.2: Hacer evolucionar la métrica g_0 siguiendo el flujo de Ricci hasta llegar al primer tiempo singular (si existe alguno).

- Caso #1: No hay tiempo singular. Entonces el problema quedará resuelto si se logra la **clasificación de las soluciones no singulares** y éstas tienen, a partir de un cierto t , la topología prevista por la Conjetura de Geometrización.
- Caso #2: La solución entera desaparece (singularidad global). El problema estará resuelto si se logra **clasificar las soluciones singulares** globales y éstas tienen, para t próximo al tiempo de singularidad, la topología prevista por la Conjetura de Geometrización.
- Caso #3: Se producen singularidades locales. En este caso, lo primero que deberemos hacer es clasificar los tipos de singularidades que aparecen (problema llamado de **análisis de las singularidades**). Después de esto, la conjetura todavía estará por demostrar y habrá que continuar con la siguiente fase.

3.7.2. Fase II: Flujo con Cirugía.

- Paso II.1: Si se da el caso 3, paramos el flujo en el primer tiempo singular T (o un poco antes) para hacer cirugía.
- Paso II.2: Proceso de cirugía. Para poder hacerlo, es necesaria la clasificación previa de las singularidades locales. Sólo si el resultado de esta clasificación ha sido el adecuado podremos realizar técnicamente la cirugía y, como veremos, ésta se corresponderá con la cirugía del teorema de descomposición prima.
- Paso II.3: Despreciar las componentes conexas de la variedad resultante de la cirugía que tengan curvatura de Ricci positiva (pues el teorema 3 asegura que son geométricas).
- Paso II.4: Continuar el flujo partiendo de las restantes componentes (cada una de las cuales será la condición inicial para un flujo de Ricci empezando en $t = T$) y repetir el proceso (o sea, volver al paso I.2).

3.7.3. Fase III: Probar la existencia de un último tiempo singular finito.

Hamilton espera que después de un número finito de repeticiones desde el paso I.2 hasta el final desaparezcan las singularidades y, entonces, el problema se acaba aplicando la clasificación de las soluciones no singulares.

Conclusiones

En conclusión, se puede afirmar que La conjetura de geometrización de Thurston es una afirmación matemática que establece que cada variedad tridimensional cerrada y orientable se puede descomponer en piezas que tienen una de ocho geometrías posibles. Esta conjetura fue propuesta por el matemático estadounidense William Thurston en 1982. La conjetura de geometrización establece que cada variedad tridimensional cerrada se puede descomponer en piezas que tienen una de ocho geometrías posibles. Este fue un problema abierto durante más de 20 años, hasta que el matemático ruso Grigori presentó una solución en 2002. La demostración se basó en el trabajo previo del matemático estadounidense Richard Hamilton, quien desarrolló la técnica del flujo de Ricci para estudiar así la geometría de las variedades. El demostró que el flujo de Ricci puede ser utilizado para suavizar la geometría de una variedad, lo que permitió a Perelman demostrar la conjetura de geometrización de Thurston. Dicha demostración es considerada una de las mayores contribuciones a la topología en el siglo XXI. No está demás mencionar que esta conjetura implica varias otras conjeturas, como la conjetura de Poincaré y la conjetura de Eliptización de Thurston.

Referencias Bibliográficas

- [1] Carlos Prieto de Castro. “La conjetura de Poincaré”. En: 2006.
- [2] Joaquín Pérez. “Extinción en tiempo finito del flujo de Ricci”. En: Tobias Colding, William P. Minicozzi, 2013.
- [3] Silvio Reggiani. “Las ocho geometrías de Thurston”. En: Universidad Nacional de Rosario-CONICET, 2016.
- [4] Esther Cabezas R y Vicente Miquel M. “Demostración de Hamilton-Perelman de las Conjeturas de Poincare y Thurston”. En: Universidad de Valencia, 2006.
- [5] Jimena Villegas Julio E. Royo-Letelier. “«Geometrizar el espacio: de Gauss a Perelman»”. En: Images des Mathématiques, CNRS: 17 de noviembre 2007, 2007.