

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA
CARRERA LICENCIATURA EN MATEMÁTICA**



**INFORME FINAL DEL CURSO DE ESPECIALIZACION:
EN 3-VARIEDADES Y NUDOS TOPOLÓGICOS**

TÍTULO:

TEORÍA DE MORSE Y SUS APLICACIONES EN 3-VARIEDADES

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

PRESENTADO POR:

JULIA NATHALY RODRÍGUEZ NAVARRETE N DE CARNET RN12010

DOCENTE ASESOR:

M.SC. JOSÉ JOAQUÍN APARICIO RAMÍREZ

AGOSTO DE 2023

SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
AUTORIDADES**



RECTOR:

MAESTRO ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

VICERECTOR ACADÉMICO:

DR. RAÚL AZCÚNAGA

VICERECTOR ADMINISTRATIVO:

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA

SECRETARIO GENERAL:

ING. FRANCISCO ALARCÓN

DEFENSOR DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS:

LIC. LUIS ANTONIO MEJÍA LIPE

FISCAL GENERAL:

LICDO. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
AUTORIDADES**



DECANO:

LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RIOS BENÍTEZ:

VICEDECANO:

LIC. OSCAR VILLALOBOS

SECRETARIO:

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA

DIRECTOR GENERAL DE PROCESOS DE GRADO:

LIC. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA

JEFE DE DEPARTAMENTO:

LICDA. KARLA MARÍA MEJÍA ORTÍZ

COORDINADOR GENERAL DE PROCESOS DE GRADO:

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL DEPARTAMENTO DE
CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA SECCIÓN DE
MATEMÁTICAS**

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA



**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN
TEORIA DE MORSE Y SUS APLICACIONES EN 3-VARIEDADES**

DOCENTE: M.Sc. José Joaquín Aparicio Ramírez

Curso de Especialización en 3-variedades y nudos topológicos

AUTOR: Julia Nathaly Rodríguez Navarrete

**CICLO II 2023
Miércoles 16 de agosto del 2023**

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación se habla de la teoría de morse y sus aplicaciones en 3-manifolds.

se presentan los hechos básicos sobre la teoría de morse y sus principales definiciones y ejemplos.

para introducirnos en las 3-variedades y ver cómo se utiliza la teoría de morse para las transformaciones de las superficies.

ABSTRACT

The objective of differential topology consists in the study of the global properties of differentiable differentiable Manifold.

Therefore, it is not surprising that during the first thirty years of the last century, topologists focused on the development of algebraic and combinatorial methods to determine topological invariants that would shorten the process of their calculation.

In this research we look at Morse's theory in a basic way by mentioning the basic definitions, Morse's inequalities and Morse's inequalities.

Morse's inequalities and Morse's theorem.

this work is divided into 4 chapters of which the first 3 are the body of our research in which is the development of Morse theory and in the fourth chapter we conclude with the applications in 3-manifold which is the main objective of our research.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de la topología diferencial consiste en el estudio de las propiedades globales de las variedades diferenciables.

Por ello, no es de extrañar que durante los primeros treinta años del siglo pasado, los topólogos se centraran en el desarrollo de métodos algebraicos y combinatorios para determinar invariantes topológicos que acortaran el proceso de su cálculo. En esta investigación veremos la teoría de Morse de forma básica mencionando las definiciones básicas, las desigualdades de Morse y el teorema de Morse. Este trabajo está dividido en 4 capítulos de los cuales los 3 primeros son el cuerpo de nuestra investigación en el cual está el desarrollo de la teoría de Morse y en el 4to capítulo concluimos con las aplicaciones en 3-variedades que es el objetivo principal de nuestra investigación.

Índice general

1. PRELIMINARES	9
1.1. Definiciones	9
1.2. Puntos Críticos	9
1.3. Complejos-CW	10
2. TEORIA DE MORSE	11
2.1. Definiciones sobre la Teoria de Morse	11
2.2. Estructura de Morse	15
2.3. Funciones de Morse	15
2.4. Tipo de Homotopía en términos de Puntos Críticos	16
2.5. Desigualdades de Morse	20
2.5.1. Desigualdades de Morse débiles	20
2.5.2. Desigualdades de Morse fuertes	21
2.5.3. Ejemplos de Desigualdades de Morse	21
3. 3-VARIEDADES	22
3.1. Definiciones	22
3.2. Variedades Suaves	22
4. Aplicaciones	23
4.1. Teorema de Alexander	23
4.2. CONCLUSIONES	27
4.3. BIBLIOGRAFÍA	28

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo recordaremos algunas definiciones básicas que utilizaremos a lo largo del trabajo de investigación y mencionaremos también algunos lemas y teoremas que serán útiles más adelante.

1.1. Definiciones

Definición 1. Una m -celda es un espacio Homeomorfo a

$$B^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : (x_1)^2 + \dots + (x_m)^2 \leq 1\}$$

denotamos por B^m como la frontera de B^m y por $IntB^m$ al interior de B^m .

Definición 2. Una m -celda abierta será un espacio homeomorfo a

$$IntB^m.$$

1.2. Puntos Críticos

Un punto $p \in M$ (M superficie) se dice punto crítico de f si la aplicación diferencial de f en p es nula. En este caso, el valor real $f(p)$ se denomina valor crítico de f .

Notemos que, fijado un sistema de coordenadas locales (x_1, \dots, x_n) en un entorno de p , siendo p el origen, decir que p es punto crítico equivale a decir que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0, \forall i \in (1, \dots, n)$$

Definición 3. Sea $p \in M$ un punto crítico de f .

Fijado (x_1, \dots, x_n) un sistema de coordenadas locales en un entorno de p lo suficientemente pequeño, se dice que el punto crítico p es no degenerado si la matriz Hessiana

$$H_{f,p} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) (p)$$

es no singular.

Se comprueba fácilmente que tal condición es independiente del sistema de coordenadas seleccionado. sistema seleccionado, teniendo en cuenta que la propiedad de no singularidad de una matriz es equivalente a que su determinante sea distinto de cero. que su determinante sea distinto de cero.

1.3. Complejos-CW

Definición 4. Un CW-complejo es un espacio topológico X que se construye inductivamente de la siguiente manera:

1. El 0-esqueleto $X^{(0)}$ es un conjunto de 0-celdas.

2. Supuesto el $(n - 1)$ -esqueleto $X^{(n-1)}$ definido, construimos el n -esqueleto $X^{(n)}$ pegando las n -celdas a $X^{(n-1)}$ a lo largo de sus fronteras.

Obtenemos, así, el espacio cociente $X^{(n)}$ con la topología cociente asociada.

3. Si realizamos este proceso un número finito de veces, tenemos $X = X^{(n)}$ para algún $n < \infty$.

En caso de tener $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^{(n)}$, dotamos a este espacio con la topología débil: $A \subseteq X$ es abierto $\iff A \cap X^{(n)}$ es abierto en $X^{(n)}$ para cada n .

Definición 5. Dado X un CW-complejo se dice que $Y \subset X$ es un subcomplejo de X si es una unión de celdas de X tal que $\sigma \subset Y$ para cada celda σ de Y .

Capítulo 2

TEORIA DE MORSE

En este capítulo se presentan los resultados fundamentales de la teoría de Morse para funciones suaves con puntos críticos no degenerados. Es decir, el teorema de descomposición de harness y las famosas desigualdades de Morse.

2.1. Definiciones sobre la Teoría de Morse

Una poderosa herramienta para el estudio de la topología de una variedad diferenciable es, actualmente llamada, la teoría de Morse. es la, actualmente llamada, teoría de Morse. El objetivo de esta teoría, descrita de forma concisa descrito de forma concisa, puede decirse que es el estudio de la relación entre los puntos críticos de funciones reales definidas sobre un funciones reales definidas sobre una variedad diferenciable y las propiedades globales de esta última. De esta última. Así, salvo que se indique lo contrario, M se considerará una colector diferenciable y compacta de dimensión n y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Comenzamos introduciendo los conceptos iniciales para adentrarnos en la teoría:

La función de Morse y el punto crítico que, a partir de ellos, y junto con el concepto de conjunto de nivel, se obtiene información sobre el tipo de homotopía de una variedad diferenciable M .

Definición 6. Una función diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow M$ se dice una función de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados.

La función altura h sobre la esfera unitaria $S^2 \in \mathbb{R}^3$ es un ejemplo sencillo de función de Morse.

Está claro que h tiene dos puntos críticos, el polo norte y el polo sur.

Considerando la parametrización del hemisferio norte $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ obtenemos que la función altura viene dada por $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ donde el polo norte se corresponde con el origen de estas coordenadas.

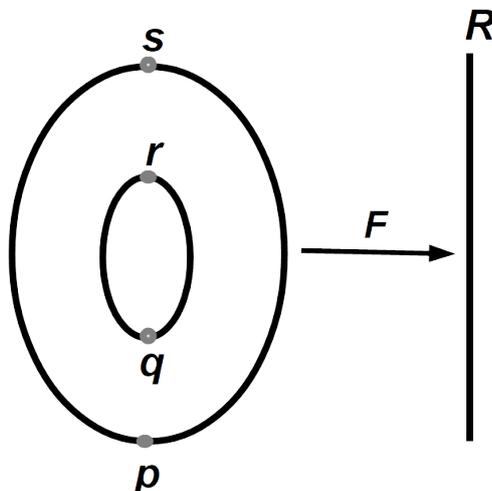
Realizando cálculos elementales, se obtiene la matriz Hessiana:

$$H_h(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - 1}{(1x^2 - y^2)^{(3/2)}} & \frac{-xy}{(1x^2 - y^2)^{(3/2)}} \\ \frac{-xy}{(1x^2 - y^2)^{(3/2)}} & \frac{x_2 - 1}{(1x^2 - y^2)^{(3/2)}} \end{bmatrix}$$

Así, el determinante de $H_h, (0, 0)$ es no nulo y, por tanto, el polo norte es un punto crítico no degenerado.

Análogamente, obtenemos que el polo sur también es no degenerado.

2. De manera similar, se tiene que la función altura $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ sobre el 2-toro T situado de forma vertical es una función de Morse con cuatro puntos críticos.: p, q, r y s .



3. Sea M una subvariedad de \mathbb{R}^n .

La función $f_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(q) = \frac{|q - p|}{2}, \forall q \in M,$$

es una función de Morse para casi todo punto $p \in \mathbb{R}^n$.

Su demostración puede verse en Milnor y, con ella, podemos concluir que aunque no toda función diferenciable sobre M es Morse, abundan.

El sentido en el que un punto crítico p de f es degenerado es el de poseer múltiples direcciones en p tanto de crecimiento como de decrecimiento sobre f . Esto nos lleva al siguiente concepto que nos proporcionará, tal y como demuestra el Lemma de Morse el número de direcciones linealmente independientes y decrecientes en un punto crítico no degenerado sobre una función f .

Sea p un punto crítico de f no degenerado. Se define el índice de p , que denotaremos por $\lambda_{(f,p)}$, como el índice de la matriz Hessiana $H_{(f,p)}$, esto es, el número de autovalores negativos de $H_{(f,p)}$ por comodidad, y salvo confusión, denotaremos el índice de un punto crítico $\lambda_{(f,p)}$ simplemente por λ .

Para una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se pueden agrupar los datos de los índices definiendo el siguiente polinomio que, en palabras de Bott, es la "medida cuantitativa de Morse" del comportamiento crítico de f .

Sea una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ con n_λ puntos críticos de f de índice λ . Se define el polinomio de Morse asociado a f como

$$\mu_f(t) = \sum n_\lambda t^\lambda.$$

Los coeficientes de este polinomio se denominan números de Morse de f .

A continuación introducimos algunos objetos esenciales en la Teoría de Morse, los llamados conjuntos de nivel, que nos permitirán dotar a una variedad diferenciable, compacta, n -dimensional de una estructura CW-compleja. Estructura CW-compleja.

Con el fin de hacer esta investigación lo más autónoma posible.

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre una variedad M . Para cada $a \in \mathbb{R}$ se define el conjunto de nivel M_a como el subconjunto cerrado de M dado por

$$M_a = f^{-1}(\infty, a] = \{p \in M \mid f(p) \geq a\}.$$

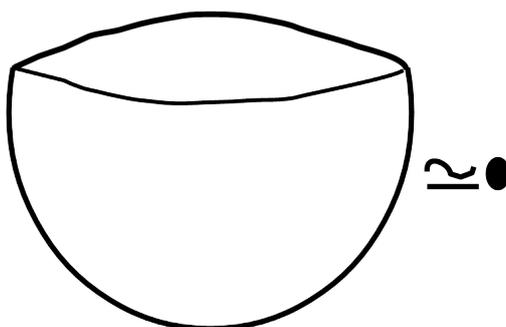
Si a no es un valor crítico de f , es decir, si es un valor regular de f , entonces, por el teorema del valor regular, el conjunto $f^{-1}(a)$ es una subvariedad de M y el conjunto nivelado M_a es una variedad con arista $f^{-1}(a)$. Para ver la relevancia de tales conjuntos recurrimos al ejemplo, obligatoriamente, con el que Milnor comienza la introducción de su libro clásico.

Sea $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ la función altura sobre el toro 2-dimensional T situado en forma vertical. Está claro que f tiene cuatro puntos críticos: el punto p , con índice 0 por ser un mínimo, q y r , ambos con índice 1 por ser puntos de silla, y, finalmente, el punto s , que al ser un máximo tiene índice 2.

Analícemos y comparemos los conjuntos de nivel para cada $a \in \mathbb{R}$ cuyo resultado se muestra en la siguiente imagen.

Si $a < f(p)$ el conjunto de nivel M_a es el vacío.

Al pasar el nivel de p , para $f(p) < a < f(q)$, se tiene que M_a es homeomorfo a un disco, por lo que es homotópicamente equivalente a un punto, esto es, a una 0-celda.

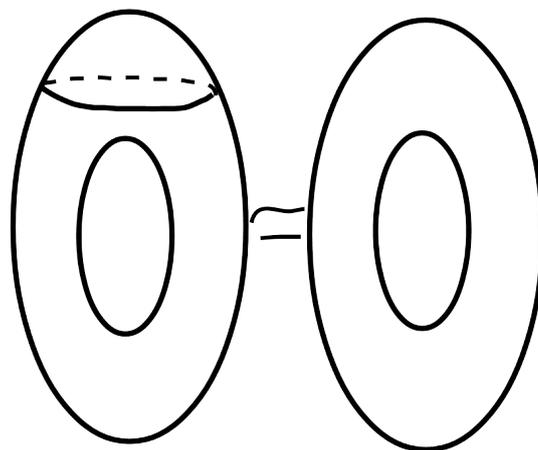
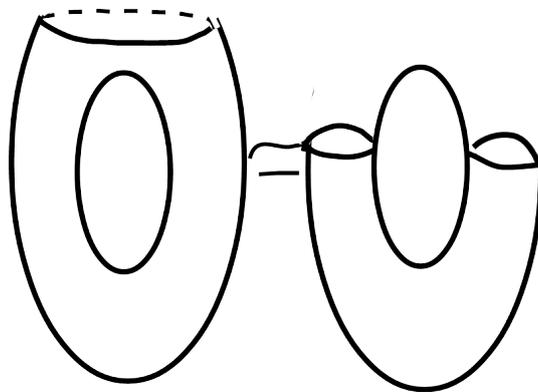
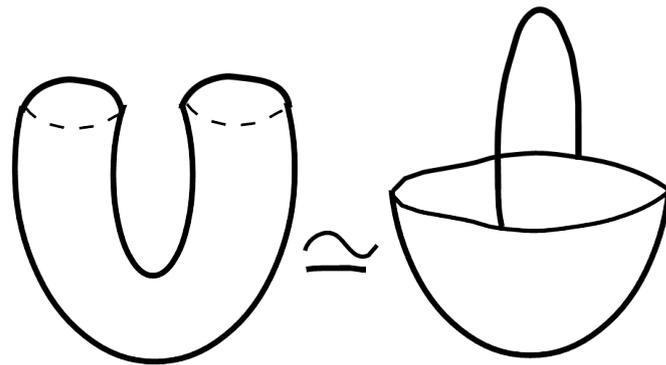


Si se alcanza el nivel q , para $f(q) < a < f(r)$, resulta que el conjunto M_a es homeomorfo a un cilindro, que es homotópicamente equivalente a un disco con una 1-celda pegada.

Al superar el nivel de r , para $f(r) < a < f(s)$, M_a es el resultado de extraerle un disco al toro, lo que es homotópico a un cilindro con una 1-celda pegada.

Finalmente, al pasar el nivel s , para $a > f(s)$, se tiene que M_a es el toro completo, lo que es homotópicamente equivalente al resultado de pegar el conjunto de nivel s . que es homotópicamente equivalente al resultado de pegar el conjunto de nivel anterior con una 2-célula por encima de una 2-célula.

En consecuencia, se observa que el 2-toro T se puede construir con una celda 0, dos celdas 1 y una celda 2, que corresponden a los puntos críticos de la función f y sus índices



asociados. índices asociados.

Por lo tanto, excepto para el tipo de homotopía, T se puede obtener adjuntando a los conjuntos de niveles determinados por los puntos críticos.

En resumen, cabe esperar que los puntos críticos de una función de Morse caractericen el tipo de homotopía. caracterizar el tipo de homotopía de una variedad.

2.2. Estructura de Morse

El ejemplo anterior muestra una observación clave del papel de los conjuntos de niveles a efectos de obtener información de la topología de una variedad. El ejemplo anterior muestra una observación clave del papel de los conjuntos de niveles a efectos de obtener información de la topología de una variedad: el tipo de homeomorfismo de M_a cambia sólo con los valores críticos de la función de Morse y, además, esta alteración depende de su índice. La razón por la que las funciones de Morse son adecuadas para este fin, aparte de su existencia en abundancia, es su sencillo comportamiento en sus puntos críticos. El siguiente resultado, comúnmente conocido como Lemma de Morse, muestra la propiedad analítica fundamental de las funciones de Morse:

La capacidad de ser expresadas, localmente, como una forma cuadrática en sus puntos críticos.

Lema 1. (*Lema de Morse*).

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse sobre M una variedad diferenciable n -dimensional y $p \in M$ un punto crítico de f con índice λ . Entonces, existe una carta $U(x_1, \dots, x_n)$ centrada en p tal que la expresión de f en esas coordenadas viene dada por:

$$f = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$$

La existencia de tal entorno del punto crítico, donde la función f toma la forma de una función cuadrática, nos permite concluir que los puntos críticos de una función de Morse están aislados. Las funciones de Morse están aisladas. En particular, una función de Morse en una variedad compacta tiene un número finito de puntos críticos. variedad tiene un número finito de puntos críticos.

El resultado anterior demuestra, como ya se ha indicado, que el índice de un punto crítico mide el número de direcciones decrecientes de una función de Morse. punto crítico mide el número de direcciones decrecientes alrededor del punto con respecto a la función f . función f . Así, un punto crítico de f con índice 0 corresponderá a un mínimo local de f , mientras que uno de índice n con un máximo local de f .

2.3. Funciones de Morse

Las funciones de Morse permiten describir las variedades en términos de ciertos componentes básicos. Además, existen en todas las variedades lisas. En esta investigación describiremos los escenarios de 1, 2 y 3 dimensiones.

Definición 7. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave. Un punto crítico x de f es no degenerado si la matriz hessiana de segundas derivadas parciales es no singular en x .

Definición 8. Sea M un n -variedad lisa y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función lisa. Un punto $x \in M$ es un punto crítico de f si existe una gráfica ϕ_α cerca de x tal que $\phi_\alpha(x) = 0$ y 0 es un punto crítico de $f \circ \phi^{-1}_\alpha$.

Es no degenerada si 0 es un punto crítico no degenerado de $f \circ \phi^{-1}_\alpha$.

Un valor crítico de f es un valor c tal que $f^{-1}(c)$ contiene al menos un punto crítico.

De hecho, la definición anterior es independiente de los gráficos.

Si un punto de M es un punto crítico para un gráfico, entonces es un punto crítico para todos

los gráficos.

Del mismo modo, si un punto de M es un punto crítico no degenerado para un gráfico, entonces es un punto crítico no degenerado para todos los gráficos.

Resulta que los puntos críticos no degenerados pueden describirse de forma bastante informativa en términos de coordenadas locales; es decir, si x es un punto crítico no degenerado de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces hay coordenadas locales.

Definición 9. . Sea M una variedad. Un mapa propio suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados y distintos puntos críticos corresponden a valores críticos distintos.

Definición 10. Sean $f, g : K \in \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables sobre K compacto contenido en un entorno coordenado de M .

Para $\epsilon \geq 0$, se dice que f es una (C_2, ϵ) aproximación de g en K si para cada $p \in K$ se verifican las siguientes desigualdades:

$|f(p) - g(p)| \geq \epsilon$, $(p) - (p) < \epsilon$, para $i = 1, \dots, n$, $\partial^2 f(p) - \partial^2 g(p) \geq \epsilon$, para $i, j = 1, \dots, n$. Para una variedad compacta M , se puede tomar una cantidad finita m de entornos coordenados U_i de M tal que $\bigcup_{i=1}^m U_i = M$ es un recubrimiento finito de M . Si para cada i se considera un compacto $K_i \subset U_i$ de modo que $M = \bigcup_{i=1}^m K_i$, entonces se puede dar una definición de aproximación entre dos funciones de manera global sobre la variedad.

Este concepto, nos permitirá afirmar que cualquier función diferenciable sobre M puede ser aproximada por una función de Morse.

Definición 11. Dadas $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que la función f es una (C_2, ϵ) -aproximación de g si $f|_{K_i}$ también lo es de $g|_{K_i}$ para cada $i \in 1, \dots, m$

2.4. Tipo de Homotopía en términos de Puntos Críticos

En esta sección enunciamos dos teoremas básicos de la teoría de Morse en los que mostramos cómo para una variedad diferenciable compacta arbitraria, los índices de los puntos de para una múltiple diferenciable compacta arbitraria, los índices de los puntos críticos de una función de Morse definida sobre ella están estrechamente de una función de Morse, definidos sobre ella, están estrechamente relacionados con el tipo de homotopía de la variedad. el tipo de homotopía de la variedad. Fijemos M una variedad compacta n -dimensional diferenciable y veamos que se producen cambios importantes en los conjuntos de niveles al alcanzar los puntos críticos de una función de Morse dada sobre la variedad. función de Morse dada sobre la variedad.

Definición 12. Sean $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables sobre K compacto contenido en un entorno coordenado de M .

Para $\epsilon \geq 0$, se dice que f es una (C_2, ϵ) - aproximación de g en K si para cada $p \in K$ se verifican las siguientes desigualdades:

$$|f(p) - g(p)| \geq \epsilon$$

$$(\partial f / \partial x_i)(p) - (\partial g / \partial x_i)(p) \geq \epsilon,$$

para $i = 1, \dots, n$,

$$(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(p) - \partial^2 g / \partial x_i \partial x_j(p) \geq \epsilon, \text{ para } i, j = 1, \dots, n$$

Para una variedad compacta M , se puede tomar una cantidad finita m de entornos coordinados U_i de M tal que $(U_i)_{i=1}^m$ es un recubrimiento finito de M . Si para cada i se considera un compacto $K_i \subset U_i$ de modo que $M = \cup_{i=1}^m K_i$, entonces se puede dar una definición de aproximación entre dos funciones de manera global sobre la variedad. Este concepto, nos permitirá afirmar que cualquier función diferenciable sobre M puede ser aproximada por una función de Morse.

Definición 13. *Sea una función diferenciable $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una variedad diferenciable compacta n -dimensional.*

Entonces existe una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para un $\epsilon \geq 0$ lo suficientemente pequeño f es una (C_2, ϵ) -aproximación de g .

Como consecuencia tenemos que las funciones de Morse sobre M abundan en el conjunto de funciones diferenciables sobre M .

Dado que una variedad compacta arbitraria M admite siempre una función diferenciable definida sobre ella, la existencia de funciones de Morse sobre M está garantizada. No sólo eso, sino también, que cualquier función de Morse M puede ser aproximada por otra en la que puede ser aproximada por otra en la que exista una correspondencia biunívoca entre sus puntos críticos y sus valores críticos. puntos críticos y valores críticos.

Este tipo de funciones se denominan no resonantes y, en consecuencia, podemos afirmar la existencia de funciones de Morse no resonantes sobre funciones de Morse no resonantes sobre una variedad compacta arbitraria.

Teorema 1. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse sobre una variedad diferenciable n -dimensional compacta con exactamente dos puntos críticos. Entonces la variedad M es homeomorfa a una n -esfera.*

Idea para la demostración

A efectos del tipo de homotopía, los conjuntos de nivel M_a y M_b son el mismo si el conjunto M_b/M_a no contiene puntos críticos. No obstante, el alcance de un punto crítico de una función de Morse supone un punto de inflexión en el cambio del tipo de homotopía de los conjuntos de nivel superior e inferior respecto al correspondiente valor crítico.

Estos cambios sobre la variedad M se pueden agrupar en la denominada descomposición de asas, un resultado fundamental de la Teoría de Morse que descompone una variedad en una sucesión de discos, denominadas asas, pegados entre sí.

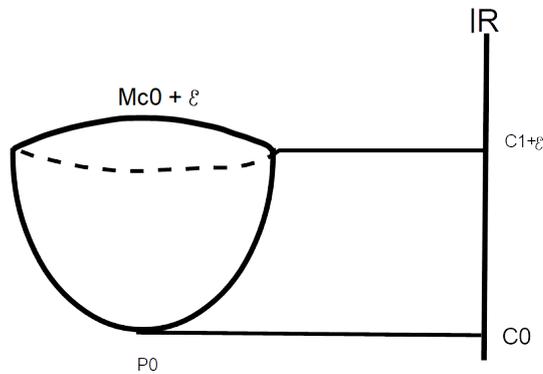
Para entender el procedimiento de tal descomposición, pongámonos en la siguiente situación.

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse con p_0, p_1, \dots, p_k puntos críticos ordenados por sus correspondientes valores críticos $c_0 \geq c_1 \geq \dots \geq c_k$. Dado que f se puede aproximar por una no resonante, se puede suponer que $c_i \neq c_j$ para $i, j \in (0, 1, \dots, k)$ distintos.

Tenemos, por tanto, los conjuntos de nivel $M_a = \emptyset$ para $a \neq c_0$ y $M_a = M$ para $a \geq c_k$. Veamos cómo son el resto de conjuntos de nivel según se alcanza un punto crítico.

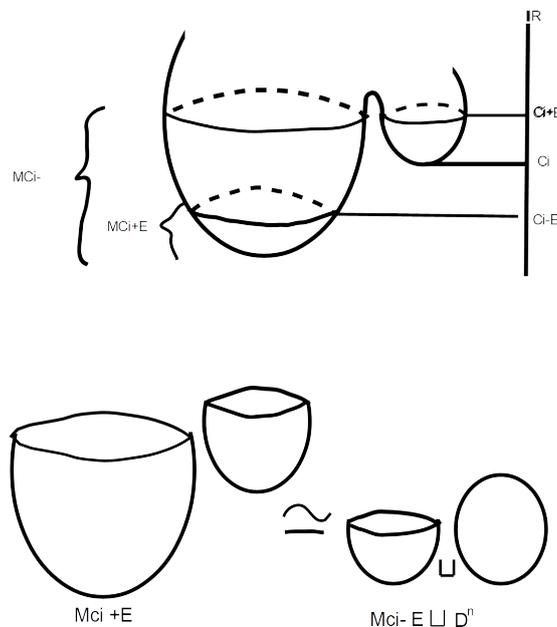
Punto crítico mínimo p_0 :

Por el Lema de Morse , se tiene un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) de modo que en un entorno de p_0 f toma la expresión $f = c_0 + \sum_{i=0}^n x_i^2$.
 Para $\epsilon > 0$, lo suficientemente pequeño, con $\epsilon < c_1 - c_0$, resulta que los conjuntos de nivel inferior y superior respecto al punto crítico son $M_{c_0-\epsilon} = \emptyset$ y $M_{c_0+\epsilon} = \{x \in M \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 < \epsilon\}$, el cual es difeomorfo al disco D^n .



Punto crítico p_i mínimo local, esto es, de índice 0:

De manera análoga, una vez se alcanza el punto crítico p_i , resulta que, para $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, el conjunto de nivel superior $M_{c_i+\epsilon}$ es difeomorfo a la unión disjunta del disco D^n y el conjunto de nivel inferior $M_{c_i-\epsilon}$



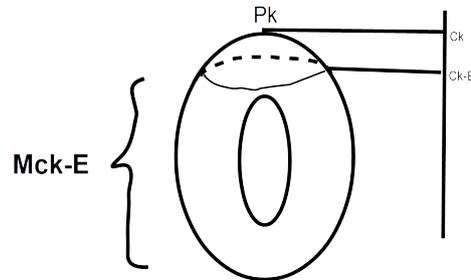
Donde tenemos la relación de ser difeomorfos

Punto crítico máximo p_k :

De nuevo, por el Lema de Morse en un entorno de p_k f es de la forma $f = c_k - \sum_{i=0}^n x_i^2$ para

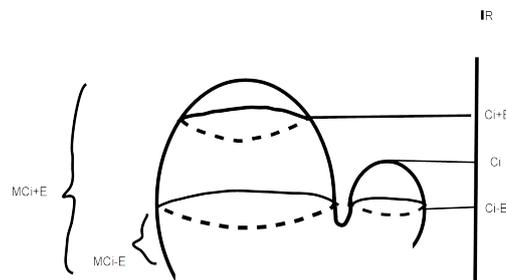
algún sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) centrado en p_k .

Tomando $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, se tiene que el conjunto de nivel inferior M_{c_k} es una variedad con frontera $f^{-1}(c_k \pm \epsilon)$ y $M/M_{c_k \pm \epsilon} = \{x \in M \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \epsilon\}$ es difeomorfo a un n-disco. Por tanto, el conjunto de nivel superior $M_{c_k+} = M$ se obtiene del anterior $M_{c_k \pm \epsilon}$ pegándole a su frontera un n-disco.



Punto crítico p_i máximo local, esto es, de índice n:

Análogamente, una vez sobrepasado el máximo local p_i , se tiene que $M_{c_i+\epsilon}$ es difeomorfo al conjunto de nivel anterior $M_{c_i-\epsilon}$ junto con un disco D^n pegado a su frontera.



Puntos críticos p_λ de índice $0 \leq \lambda \leq n$:

Sabemos de la existencia de una carta $(U, (x_1, \dots, x_n))$ centrada en p_λ donde f toma la expresión $f = c_\lambda \sum_{i=1}^\lambda x_i^2 + \sum_{i=1-\lambda}^n x_i^2$. Consideremos $\epsilon \leq 0$ de modo que $f^{-1}[c_\lambda - \epsilon, c_\lambda + \epsilon]$ no contenga más puntos críticos que p_λ .

El conjunto de nivel $M_{c_\lambda - \epsilon}$ es una variedad cuya frontera, en U , es el conjunto $x \in M \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1-\lambda}^n x_i^2 = \epsilon$.

Tomemos ahora el conjunto de puntos en U que verifica las siguientes dos condiciones:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1-\lambda}^n x_i^2 \leq \epsilon,$$

$$\sum_{i=1-\lambda}^n x_i^2 \leq \delta.$$

En la imagen anterior, los puntos situados por encima de la curva roja son los que verifican la condición 1, mientras que los situados entre las dos curvas verdes son los que verifican la condición 2. verifican la condición 1, mientras que los situados entre las dos curvas verdes son los que verifican la condición 2. son los que verifican la condición 2.

La intersección de estos dos conjuntos es una *lambda*-asa.

Teorema 2. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse y sean $a < b$ números reales para los que f^{-1} el teorema muestra como, a efectos del tipo de homotopía, los conjuntos de nivel M_a y M_b son el mismo si el conjunto M_b/M_a no contiene puntos críticos.

Sin embargo, el alcance de un punto crítico de una función de Morse es un punto de inflexión en el cambio del tipo de homotopía de los conjuntos de nivel superior e inferior con respecto a la teoría de Morse clásica. El cambio del tipo de homotopía de los conjuntos de nivel superior e inferior con respecto a la teoría clásica de Morse. valor crítico correspondiente. Estos cambios en la variedad M pueden agruparse en la llamada descomposición de asas, la Estos cambios sobre la variedad M pueden agruparse en la llamada descomposición de asas, resultado fundamental de la Teoría de Morse que descompone una variedad en una sucesión de discos, llamados asas, pegados entre sí.

2.5. Desigualdades de Morse

La teoría de Morse proporciona una relación entre los números de Betti de una variedad diferenciable M y los puntos críticos de una función de Morse f definida en M . diferenciable M y los puntos críticos de una función de Morse f definida en M . Este se describe mediante un conjunto de desigualdades denominadas desigualdades de Morse. Además, en virtud del teorema , una función de Morse permite calcular la característica de Euler de M . Característica de Euler de M contando sus puntos críticos. Para ello, es necesario introducir números de Betti.

2.5.1. Desigualdades de Morse débiles

Sea M una variedad diferenciable, compacta y n -dimensional. Para cualquier función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se verifican:

$$\beta_\lambda(M) \leq n_\lambda,$$

para cada

$$\lambda \in 0, 1, \dots, n.$$

2.5.2. Desigualdades de Morse fuertes

Sea M una variedad diferenciable, compacta y n -dimensional. Para cualquier función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se verifican:

$$\sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k \beta_{\lambda-k} M \leq \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k_{(\lambda-k)}$$

para cada $\lambda \in (0, \dots, n)$

Las desigualdades de Morse nos permiten conocer una cota inferior del número de puntos críticos de cada índice que, como mínimo, debe tener una función de Morse. puntos críticos de cada índice que, como mínimo, debe tener una función de Morse, es decir, aquellas funciones de Morse cuyo número de puntos críticos es mínimo. $n_{\lambda} = \beta_{\lambda}$, se dicen perfectas.

2.5.3. Ejemplos de Desigualdades de Morse

Ejemplo 1. Los números de Betti para la esfera S^2 son: $\beta_0 = \beta_2 = 1$ y $\beta_1 = 0$.

Así, tenemos que para cualquier función de Morse sobre la esfera, habrá al menos un punto crítico de índice 0 y otro de índice 2, al menos un punto crítico de índice 0 y otro de índice 2, por lo que la función altura sobre S^2 es una función de Morse perfecta. sobre S^2 es una función de Morse perfecta.

Ejemplo 2. En el caso del toro 2-dimensional T se tiene $\beta_0 = \beta_2 = 1$ y $\beta_1 = 2$, por lo que cualquier función de Morse sobre T tendrá, al menos, un punto crítico de índice 0, otro de índice 2 y dos más de índice 1.

Así, la función altura definida sobre el toro es una función de Morse perfecta.

No siempre se puede definir una función de Morse perfecta sobre una variedad diferenciable compacta.

Un ejemplo de ello es la esfera de Poincaré cuyos números de Betti son $\beta_0 = \beta_3 = 1$ y $\beta_1 = \beta_2 = 0$, sin embargo, toda función de Morse sobre esta variedad tiene, al menos, 6 puntos críticos.

También es cierto, que bajo ciertas circunstancias se puede reducir la cantidad de puntos críticos de una función de Morse, sobre una variedad diferenciable y compacta, que no es perfecta

Capítulo 3

3-VARIEDADES

En este capítulo haremos una breve introducción a las 3-variedades mediante definiciones, ejemplos y teoremas básicos.

3.1. Definiciones

Definición 14. Las 3-variedades son espacios que localmente se parecen al espacio euclídeo. Dos variedades son "iguales" si es posible deformar continuamente una para obtener la otra.

Definición 15. Una 3-variedad es un espacio topológico hausdorff y con base numerable localmente homeomorfo a R^3 .

Definición 16. Un 3-manifold con borde es un espacio topológico (hausdorff y con base numerable) localmente homeomorfo a R^3 .

El borde de M , denotado por ∂_M , está formado por los puntos de M que no tienen vecindades homeomorfas a R^3 .

Los ejemplos más simples de variedades abiertas son los abiertos de R^3 .

Ejemplos de variedades con borde:

Ejemplo 3. El toro sólido: $D^2 \times S^1$, $D^2 \times [0, 1]/(z, 0) \sim (z, 1)$.

Ejemplo 4. La botella de Klein sólida: $D^2 \times [0, 1]/(z, 0) \sim (\bar{z}, 1)$.

Ejemplo 5. Los cubos con asas: se obtienen uniendo bolas sólidas por medio de cilindros sólidos (los pegados pueden preservar o invertir la orientación).

Un cubo con n asas orientable es homeomorfo a un n -toro sólido:

3.2. Variedades Suaves

Definición 17. Cada variedad topológica M está cubierta por abiertos A_1, A_2, A_3, \dots de R^n tales que para cada A_i existe un abierto B_i de R^n y un homeomorfismo $h_i : A_i \rightarrow B_i$.

Los h_i dan coordenadas locales para los puntos de M . Si A_i y A_j se intersectan, el cambio de coordenadas $h_j \circ h_i^{-1}$ da un homeomorfismo entre los abiertos $h_i^{-1}(A_i \cap A_j)$ y $h_j^{-1}(A_i \cap A_j)$ de R^n .

Así que podemos pensar en cada variedad como una unión de abiertos B_i de R^n que están identificados parcialmente por homeomorfismos.

Hay muchos homeomorfismos posibles entre dos abiertos de R^n , así los homeomorfismos de pegado pueden ser sumamente complicados.

Capítulo 4

Aplicaciones

En este que es nuestro último capítulo haremos uso de toda la teoría que tenemos de los capítulos anteriores para poder ver algunos ejemplos de aplicaciones de la teoría de morse en 3-variedades que son superficies que al moverlas y ponerlas en posición de morse podemos ver el cambio en ellas y ver que son homeomorfas.

Como primera aplicación de la Teoría de Morse tenemos el siguiente teorema.

4.1. Teorema de Alexander

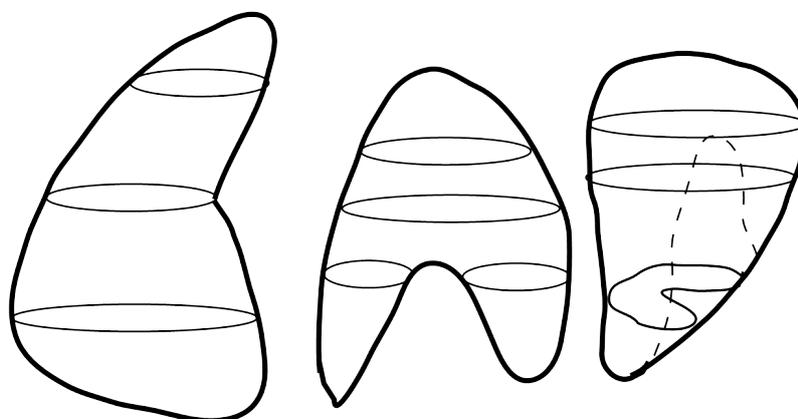
Teorema 3. (Alexander). *Todas las esferas suaves S en R^3 pueden deformarse a esferas redondas.*

En particular, todas bordean bolas.

Demostración.

Si S es una esfera lisa en R^3 entonces podemos deformar S ligeramente para que sea posición de Morse, es decir, que la función de altura $h : S \rightarrow R$ tenga un número finito de puntos críticos no degenerados puntos críticos no degenerados y que éstos se encuentren a diferentes alturas.

Para cada valor regular (no crítico) de h , $h^{-1}(t)$ es una colección de curvas simples e impares, y en cada valor crítico, $h^{-1}(t)$ tiene un punto singular, que es un máximo, un mínimo o un punto de silla de montar.



Variando t sin pasar por un valor crítico, las curvas $h^{-1}(t)$ se deforman continuamente. que los trozos de esfera entre dos planos que no contienen puntos críticos son productos: Al pasar

por un valor crítico sólo pueden ocurrir 4 cosas:

- Una curva se convierte en un punto y desaparece.
- Un punto aparece y se convierte en curva.
- Una curva se divide en dos curvas.
- Dos curvas se funden en una.

Entonces cada trozo de esfera entre dos planos tiene una de las siguientes formas (pero puede estar al revés) de las siguientes formas (pero puede estar al revés): Si una esfera tiene sólo 2 puntos críticos deben ser un mínimo y un máximo, y las curvas de nivel entre ellos se deforman de aparecer en uno a desaparecer en el otro, por lo que la esfera limita con una bola. La esfera limita con una bola.

Si hay más de 2 puntos críticos, algunos de ellos deben ser puntos de silla de montar (si no los hubiera, cada mínimo sólo podría conectar con un máximo y ese sólo podría conectar con un máximo y eso sería toda la esfera).

Tomemos un plano horizontal P después del primer punto de silla de montar. y cada una de estas curvas corta la esfera en dos discos. no tiene otras curvas en su interior, c bordea un disco en P que sólo toca S en el borde. D a los dos discos en los que c divide S para obtener dos esferas S suaves a trozos S^0 y S^{00} , y éstas pueden suavizarse añadiendo sólo un máximo o un mínimo a cada una, y los puntos de silla de S^0 y S^0 . S^0 y S^{00} son los puntos de silla de S .

Si S^0 (o S^{00}) no tiene puntos de silla, entonces sólo tiene un máximo y un mínimo y limita con una bola. y un mínimo y bordea una bola, y S^{00} tiene los mismos puntos críticos que S , pero tiene una curva menos de intersección con P . curva menos de intersección con P .

Si repetimos el procedimiento llegará un momento en que no haya más intersecciones con P ni con S . más intersecciones con P o que ambas esferas tengan puntos de silla de montar.

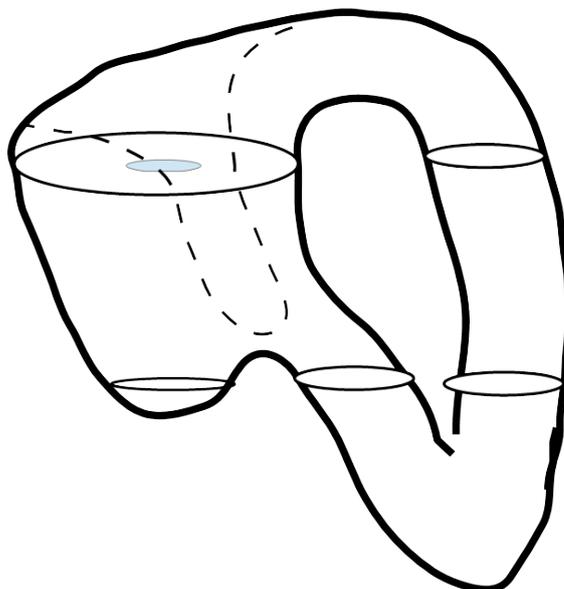
Si las dos esferas S^0 y S^{00} tienen silletas, cada una tiene menos de S y por hipótesis de inducción cada una bordea una bola.

Teorema 4. Teorema (Alexander). Cada toro suave en S^3 bordea un toro sólido al menos de un lado.

La demostración es similar a la del teorema para esferas: hay que poner al toro T en posición de Morse, y observar que si T tiene solo un máximo, un mínimo y 2 sillars (lo mínimo posible para un toro) entonces es un toro estandar, que bordea un toro sólido.

Si tiene más sillars, hay que encontrar un plano P que deje una silla abajo y una arriba, P cruza a T en curvas simples y ajenas que separan al plano.

Si c es una curva en $P \cap T$ entonces, c puede separar a T en un toro agujerado y un disco, o c no separa T .



Si c no encierra ninguna otra curva en T , entonces es el borde de un disco D en T que sólo toca T en c , y podemos cortar T usando D para obtener o bien una esfera S^0 y un toro T^0 (si c separa

T

) o una esfera S (si c no separa T).

Por el teorema de Alexander las esferas bordean bolas, y (por inducción en el número de sillars y el número de curvas de intersección con P), podemos suponer que T^0 bordea un toro sólido por algún lado.

En el primer caso las 2 regiones bordeadas por T^0 bordean un toro sólido por algún lado. En el primer caso las 2 regiones limitadas por T en S^3 se obtienen a partir de las dos regiones limitadas por T en S^3 . se obtienen a partir de las dos regiones limitadas por T^0 uniéndoles o quitándoles las bolas limitadas por S^0 .

En el segundo caso, S rodea a 2 bolas B y B_0 y una de ellas, digamos B , no contiene al disco D .

Una de las regiones delimitada por T en S^3 se obtiene uniendo a B una vecindad $D * [-1, 1]$

de D (es decir un toro sólido) y la otra se obtiene eliminando B_0 la vecindad $D * [-1, 1]$ de D (es el exterior de un nudo). el exterior de un nudo).

4.2. CONCLUSIONES

Podemos concluir que se ha alcanzado el objetivo principal de esta investigación. La teoría diferencial de Morse es completamente una muy buena herramienta para poder descomponer una variedad. no solo existe la teoría diferencial de morse sino también la teoría discreta de morse que también es muy interesante pero es más utilizada en el área computacional. El trabajo fue un gran reto en el sentido de que todo esta tipificado en latex y sobre todo esta lleno de aprencisaje ya que se aplica directamente al curso de 3-variedades.

4.3. BIBLIOGRAFÍA

El libro de Milnor

1156-Manuscrito maquetado-4464-1-10-20180723 (1).pdf

topologia del espacio y triangulaciones(1).pdf

3-variedades topologicas(1).pdf

teoria de morse discreta y whiter(1).pdf