Universidad de El Salvador

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

MEDIACIÓN PEDAGÓGICA EN LA ELABORACIÓN DE MATERIALES DIDÁCTICOS ESCRITOS EN GEOMETRÍA EUCLÍDEA I, EN LA MODALIDAD DE EDUCACIÓN A DISTANCIA DE LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Maestría en Didáctica de la Matemática

PRESENTA:

Lic. Javier Antonio Ramos Martínez, RM10042

Asesor Externo del Trabajo de Graduación:

Miguel Cruz Ramírez, PhD

Asesor Interno del Trabajo de Graduación:

Carlos Ernesto Gámez, MS.c.

Ciudad Universitaria

23 de marzo de 2021

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

MS.c. Roger Armando Arias

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO:

Ing. Juan Rosa Quintanilla

SECRETARIO GENERAL:

MS.c. Francisco Antonio Alarcón Sandoval

FISCAL GENERAL:

Lic. Rafael Humberto Peña Marín

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdova

VICE-DECANO:

MS.c. Zoila Virginia Guerrero Mendoza

SECRETARIA:

Lcda. Damaris Melany Herrera Turcios

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR DE ESCUELA:

Dr. Dimas Noe Tejada Tejada

ASESOR EXTERNO:

Miguel Cruz Ramírez, PhD

ASESOR INTERNO:

MS.c. Carlos Ernesto Gámez

Agradecimientos

En mis principios y valores como persona se me inculcó la fe, y por ello agradezco Dios por todo lo que he alcanzado, principalmente por el culmen de este trabajo.
También doy gracias a mis padres, por el apoyo incondicional y las palabras de aliento para retomar el ánimo de avanzar ante las adversidades.
De igual forma agradezco a mi novia Fátima por el apoyo incondicional y las palabras de aliento para retomar el ánimo de avanzar ante las adversidades.
Agradeciendo también a mis asesores de este trabajo, el Doctor Miguel Cruz y al Master en Matemática Carlos Gámez por su disposición y además de guiarme en el desarrollo de esta investigación.
También agradezco a mis amigos los licenciados: Pedro, Oscar, Jonathan, Cidia, Navas, Mirna, Mauricio y Marvin por la ayuda y el apoyo brindado a lo largo del tiempo de mi formación en la Maestría.
Así también al cuerpo docente por la formación recibida en cada uno de los cursos de la Maestría
Y por últimos agradecer a la Coordinadora de Carrera de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática Lcda. Noemy Alvarenga por la oportunidad de desarrollar mi investigación en la asignatura de Geometría Euclídea I de modalidad a distancia.

Índice general

Resumen

Cuando se desea comunicar siempre buscamos las formas o medios adecuados para el que recibe la información construya su propio conocimiento, a este proceso en el contexto de enseñanza y aprendizaje se define como mediación pedagógica, que es desempeñado principalmente por el docente. Con el surgimiento de nuevas modalidades de educación generadas por la incorporación de las tecnologías a la educación. Siendo la modalidad a distancia una de ellas, donde el papel de mediador es desempeñado por los recursos digitales, entre los cuales están los materiales escritos. Entonces se propuso un material escrito de la asignatura de Geometría Euclídea I (el tomar una asignatura en particular nos permite que un grupo de estudiantes lo utilicen y posteriormente realizar la evaluación del recurso). para obtener los lineamientos que debe tener este recurso para la modalidad de educación a distancia de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador, justificándolos a partir de la opinión de colegas que están trabajando dicha asignatura y los estudiantes que la cursan.

Introducción

Los cambios que ha experimentado la educación salvadoreña en los últimos 10 años se ha producido en una manera increíble provocada por el impacto al acceso a la tecnología, encontrándonos en la era de información y del conocimiento. Uno de los ejemplos más evidentes es el caso de la modalidad de Educación a Distancia, en particular, la que usa las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs), que ha tenido un desarrollo creciente y ha sido implementada en diferentes programas de Educación Superior compartiendo y no compitiendo con la tradicional propuesta presencial.

La incorporación de la modalidad de Educación a Distancia ha producido una modificación de los roles de los actores involucrados en proceso de aprendizaje, los que enseñan y los que aprenden. Es decir, el rol docente caracterizado por la transmisión del conocimiento como orientador, facilitador y motivador del trabajo autónomo, y el estudiante de receptor del conocimiento como constructor activo de su propio conocimiento. Pero los cambios del rol del docente inician por un cambio de pensamiento, esto porque se piensa que no hay un control de la calidad del aprendizaje de los estudiantes, dicha idea es cuestionable porque depende de la motivación y de la necesidad que tenga el estudiante de esta modalidad en potenciar un aprendizaje autónomo.

El proceso que está inmerso en la modalidad presencial y educación a distancia o en línea es la mediación pedagógica que consiste en la tarea de acompañar y promover el aprendizaje (Prieto, D. 1995). En la investigación profundizaremos sobre cómo se desarrolla la mediación pedagógica, tanto en la educación presencial donde es ejecutada por el docente de manera sincrónica, como en la modalidad a distancia que se ejecuta de manera asincrónica siempre por el docente, pero por medios de los recursos proporcionados a través de la plataforma Moodle.

Por ello, el siguiente trabajo investigación está compuesto por dos capítulos en el primero exponiendo sobre el término de mediación pedagógica, su clasificación y los diferentes roles que desempeñan los protagonista del proceso enseñanza y aprendizaje. Posteriormente, sobre los entornos virtuales en particular la educación a distancia, enfocándonos terminología, las características, el rol de los diferentes protagonistas y como funciona los procesos de mediación pedagógica bajo esta modalidad. Finalizando con la definición de materiales didácticos y algunas investigaciones sobre la elaboración de materiales escritos en la modalidad de educación a distancia.

En el capítulo dos se inicia con la descripción de la estructura y los elementos que posee el material escrito propuesto, como por ejemplo, introducción, datos históricos, ejemplos, etc., que aparece en apéndice A. Posteriormente, los resultados y análisis de una encuesta contestada por los Profesores Universitarios Modalidad a Distancia que trabajan en la asignatura de Geometría Euclídea I del ciclo I-2020 y los estudiantes que cursan dicha asignatura de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador. Dicha encuesta fue diseña con el objetivo de evaluación del material escrito propuesto. Finalizando con un sistema de tareas que consiste en la descripción de los apéndices y la propuesta como utilizar el material escrito, el cuestionario para la evaluación de estos y los resultados de la encuesta.

Metodología

Para cumplir los objetivos propuestos en la investigación se realizaron las siguientes etapas:

1. **Revisión bibliográfica:** se consultaron diferentes fuentes bibliográficas que aborden el tema de investigación con la finalidad de conocer los conceptos y los elementos que rodean el concepto de mediación pedagógica. A partir de esto, se seleccionarán los aspectos más importantes de las fuentes para que sirvan como marco teórico.

2. **Diseño del material mediado pedagógicamente:** se pretende el diseño del material escrito de la asignatura de geometría euclídea I de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para el modelo de educación a distancia de la Universidad de El Salvador, incorporando los aspectos de mediación de los contenidos abordados.

3. **Comprobar los resultados de las estrategias de mediación pedagógica:** el material escrito elaborado lo utilizarán los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Matemática que inscriban Geometría Euclídea I en el ciclo I-2020.

4. **Obtención de los resultados:** realizará una encuesta en línea a través de la herramienta Formularios de Google que se describen a continuación:

   - Encuesta dirigida a los estudiantes en el enlace: `https://docs.google.com/forms/d/1HzY-ZgmKrXdauUdpiCceyVzhX-VWhlK73736p_sJlZM/edit`, además aparece en el apéndice B.

   - encuesta dirigida a los Profesores Universitarios Modalidad a Distancia que laboran en las diferentes sedes Universitaria en el enlace: `https://docs.`

google.com/forms/d/1Vy-U9yCU7DtOU4w6Cvzqblys0kdw9dPEzdUmmiiupZg/ edit?usp=forms_home&ths=true, además aparece en el apéndice B.

con el propósito de conocer su experiencia de aprendizaje con el nuevo material escrito, posteriormente un análisis de los resultados; rescatando los aspectos positivos y negativos, finalizando con las conclusiones sobre los lineamientos que deben contener los materiales escrito bajo el modelo de educación a distancia de la Universidad de El Salvador.

Capítulo 1

Mediación Pedagógica

Los procesos de mediación y aprendizaje han sido objeto de múltiples estudios. Entre ellos se pueden referir las investigaciones de González (2010), Poveda (2007), Basso de Torres, Montañez y Torres (2005), Arumi (2006), Monereo (2007) y Tébar (2003) que muestran aspectos relevantes para el estudio de la mediación del aprendizaje en el aula.

Etimológicamente 'mediar' se deriva del latín mediaré, que significa articulación entre dos entidades o dos términos en el seno de un proceso dialéctico o en un razonamiento. En la educación este término se incorporó a partir de los estudios del psicólogo Lev Semiónovich Vygotsky que plantea la famosa teoría de zona de desarrollo próximo (ZDP) que se define como *la distancia entre el nivel de desarrollo, determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz* (Vygotsky, 1979).

Varios autores, como Frawley (1999), Moll (1993), Dixon-Krauss (1996), y Wertsch (1993), consideran en esta perspectiva que la mente no aprehende de manera directa un saber o conocimiento del mundo exterior. Es decir, para que haya esa aprehensión se requieren mediaciones simbólicas internas y sociales que permitan esa adquisición de conocimientos, habilidades y destrezas, por lo tanto, la mediación puede ser entendida como el conjunto de instrumentos de carácter cognitivo, físico, instrumental que hacen posible que la actividad cognitiva se desarrolle y logre las metas propuestas.

El postulado en esta perspectiva, según Frawley (1999), implica que las mediaciones contribuyen a que las representaciones externas se configuren como representaciones internas y se conviertan en herramientas para la metaconciencia. Las representaciones externas facilitan la ejecución porque muestran simultáneamente su sistema de información.

Reuven Feuerstein (1980), entiende la mediación como un proceso de interacción entre el organismo humano en desarrollo y el adulto con experiencia e intención, que selecciona, enfoca, retroalimenta las experiencias ambientales y los hábitos de aprendizaje, pero, además, la mediación es el resultado de la exposición directa al mundo y la experiencia mediada por la que se transmite las culturas.

Según Ashton (1996), la mediación está constituida por aquellos mecanismos que se emplean en el salón de clase, y permiten que la comunicación sea posible, y así mismo, que los alumnos entiendan las tareas que un docente les exige o demanda. También la mediación se entiende aquí como el saber que se le ofrece al estudiante para desarrollar un contenido en particular, el cual permita avanzar al estudiante de un nivel no experto al nivel del saber experto que se pretende en los objetivos.

En términos pedagógicos, la mediación se define como el conjunto de instrumentos de carácter cognitivo, físico, instrumental que hacen posible que la actividad cognitiva se desarrolle y logre las metas propuestas. Ahora, si vemos la mediación desde el enfoque de la representaciones, es decir, en términos semióticos, se entiende como un sistema de signos, palabras, escritura, números, imágenes que se proveen para que se produzca la actividad cognitiva y haya un desplazamiento de niveles inferiores a los superiores, es decir, de los conocimientos previos a la adquisición de los contenidos que se desean trasmitir.

Dixon-Krauss considera la mediación en el proceso de instrucción está conformada por los planes y las acciones que el docente desarrolla durante este proceso de enseñanza y aprendizaje (Dixon-Krauss, 1996). Pilonieta (2000), señala seis condiciones fundamentales en el proceso mediacional:

a) Creer que la mediación es una acción altamente poderosa en los procesos de desarrollo de las estructuras que permiten aprender.

b) Tener la claridad de que siempre es posible mejorar la actitud y la habilidad pedagógica personal.

c) Hay que reconocer que la simple enseñanza de los "temas de las asignaturas" no es el camino o desarrollo de las personas.

d) Comprender que la educación del presente es muy diferente a la del pasado y que es necesario ajustar los enfoques educativos al desarrollo de la personalidad.

e) Identificar las variables que hacen del proceso educativo un verdadero ámbito de formación personal.

f) Identificar y comprender los criterios de mediación para aplicarlos permanentemente.

Clasificación de mediaciones

De acuerdo con Pilonieta (2000), encontramos dos tipos fundamentales de mediación del saber: la mediación de tipo cognitivo y la mediación de tipo metacognitivo.

Mediación cognitiva: se refiere a la adquisición de procesos cognitivos necesarios para resolver problemas en el campo de las disciplinas académicas, por ejemplo, en matemática el razonamiento lógico, comparación y identificación. El proceso de mediación cognitiva sistemática se inicia con la escuela y en donde se incorpora términos, como expresión de conceptos científicos junto con los conceptos espontáneos que integran el período escolar. En períodos de escolarización los preconceptos de los estudiantes son el resultado de procesos de generalización e interiorización de las experiencias personales en las cuales está ausente en la escuela, generalmente los preconceptos no tienen consistencia interpretativa seria, por lo cual el mantenerlos pueden generar juicio equivocado, por ejemplo, interpretar que toda función es continua.

La mediación metacognitiva: está referida a la adquisición de herramientas de tipo semiótico de autorregulación por parte de los niños y las personas en formación, es decir, esté tipo de mediación es la que permite el desarrollo de procesos metacognitivos; tiene su fundamento en la comunicabilidad interpersonal ya que el lenguaje es la vía más expedita y natural, por ejemplo, resolver una guía de ejercicios sobre derivadas con diferentes niveles de complejidad.

La mediación pedagógica-didáctica: sistema de regulación en el sentido amplio del término, en cuanto que ella interviene a la vez como modalidad de regulación en la determinación de una estructura exterior, diferente y como acción que procura sentido al objeto, haciéndolo deseable para el sujeto, es decir, son las tareas de acompañar las actividades y promover el aprendizaje (Dixon-Krauss, 1996).

1.1. Docente como mediador

Díaz y Hernández (1999), sostienen que el docente se constituye en un organizador y mediador en el encuentro del alumno con el conocimiento y su función primordial es la de orientar y guiar la actividad mental constructiva de sus alumnos, a quienes proporcionará una ayuda pedagógica ajustada a sus competencias.

Román y Diez (2003), indican que el docente es concebido como quien construye, elabora sus percepciones de sucesos y acciones que tienen lugar en el aula, lo cual le permite definir una situación de enseñanza centrada en los procesos del sujeto que aprende de modo que se logren desarrollar habilidades intelectuales, estrategias, entre otros, que le permitan enfrentarse eficazmente a cualquier situación de aprendizaje.

Dixon propone que el papel principal lo posee el docente quien organiza las actividades, valora los conocimientos iniciales, los materiales a utilizar, las metas a lograr, orientan a enriquecer el vocabulario del alumno con nuevos conceptos que le permiten reconfigurar los propios, dando origen a nuevas ideas, accediendo a una nueva información y los términos de interacciones que permitan que si el estudiante no entiende un proceso el docente está para explicar, o no entiende un concepto se lo define, o un objeto no logra visualizar, él resalta las características que permitan tener una mejor interpretación. Pero además de mediar conocimientos, el docente también tiene que ser ejemplo de cómo actuar, es decir, generar formas de ser y de comportarse de parte de los estudiantes.

Ferreiro (2006), señala que el docente favorece el aprendizaje, estimula el desarrollo de potencialidades y corrige funciones cognitivas deficientes; es decir, mueve al sujeto a aprender en su zona potencial. Romo (1997) argumenta que el profesor en su discurso pedagógico ejerce una función de mediación que lo coloca entre el conocimiento científico, los métodos de enseñanza, realidad cognoscitiva y cultural del alumno; además de ser un socializador en el establecimiento de las relaciones de persona y de grupo. Dado que el docente es el experto en los contenidos, es necesario que él desarrolle una mediación de estos, Feuerstein (1986), en su teoría sobre la experiencia de aprendizaje mediado establece qué criterios seguir para el desarrollo de esta actividad:

1. *Intencionalidad*: función del mediador no sólo es lograr que el estudiante perciba y registre los estímulos de manera significativa, sino que tome conciencia de los objetivos específicos y de las diferentes tareas por realizar, además, este término a su vez implica tener una finalidad específica al interactuar con el estudiante, que debe estar consciente de lo que se pretende y saber cuál es el propósito de nuestra mediación.

2. *Trascendencia*: establece que se debe enseñar una conducta de estructuración que le permita utilizar los conocimientos almacenados previamente para la adquisición de los nuevos contenidos, descartando la información que no le sirva en esta situación y utilizar sólo la esencial, es decir, significa que, aunque se esté tratando con la resolución de un problema específico, el mediador tiene la disposición de ir mucho más lejos de esta situación particular.

3. *Significado*: consiste en presentar los contenidos de forma que generen en los estudiantes un interés por las actividades, agregando la importancia que tiene para él y haciéndosela más atractivas y motivándolo a terminarlas.

4. *Competencia*: el objetivo de este criterio es potenciar al máximo el aprendizaje en los estudiantes, provocando en él un sentimiento de "ser capaz de". El maestro o mediador debe adaptar los aprendizajes de acuerdo con el interés y la edad del estudiante, así como los materiales adecuados para la actividad.

5. *Regulación y control de la conducta*: consiste en que los estudiantes obtengan la

información de los conocimientos previamente adquiridos (*input*), dándoles forma, coherencia (elaboración) y la expresión de dicha información a través de un proceso de razonamiento (*output*).

6. *Participación y conducta compartida*: consiste en la interacción profesor alumno. En la cual el docente ha de dirigir, orientar la discusión sin dar la solución a las actividades en donde los estudiantes deben compartir, ayudándose mutuamente, respondiendo a una conducta que le servirá en su trabajo.

7. *Individualización y diferenciación psicológica*: consiste en aplicar modelos de aprendizaje en función de las diferencias individuales o estados cognitivos, es decir tomar en cuenta que el estudiante como individuo único y diferente, considerándolo participante activo del aprendizaje en grupo, capaz de pensar de forma independiente y diferente respecto a los demás estudiantes.

8. *Mediación de la búsqueda, planificación y logro de objetivos*: la mediación va dirigida a conseguir que los estudiantes orienten su atención al logro de metas futuras, más allá de las necesidades del momento.

9. *Mediación de búsqueda de novedad y complejidad:* consiste que el docente genere la curiosidad intelectual, la originalidad y el pensamiento divergente. Se pretende hacer al estudiante de mente abierta a las posibilidades en la aceptación como en la creación de respuestas.

En conclusión, el docente tiene un papel importante en el proceso de mediación, pero no como lo establece la escuela tradicional, sino entendiéndose como un profesional que ordena, estructura los estímulos y aprendizajes todo con el objetivo de ayudar a los educandos a construir sus propios conocimientos y no limitarse a repetir lo que el docente realiza.

1.2. Medición Pedagógica en los procesos de enseñanza de la Matemática

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas suelen ser más complejo, difíciles y menos exitosa que en comparación con otras áreas de la educación, a partir de lo anterior surge la pregunta entonces, ¿por qué enseñar matemática a todos nuestros estudiantes si es tan difícil? Según Sordo (2005), la Matemática contribuye al desarrollo de capacidades cognitivas abstractas y formales, de razonamiento, abstracción, deducción, reflexión y análisis. Su comprensión incluye dos aspectos relevantes como lo son el funcional y el formativo, los cuales son complementarios y no se pueden separar. Agrega que la Matemática debe contribuir a la obtención de objetivos generales vinculados al desarrollo de las capacidades cognitivas, por medio de la resolución de problemas de los diferentes campos que la integran y a la vez debe poner de relieve aspectos y relaciones de la realidad.

La formación matemática no sólo pretende fortalecer el pensamiento abstracto y riguroso, sino también otorgar independencia de criterio en el ser humano; por lo que se hace necesario brindar al estudiante estrategias para que pueda aprender a aprender, es decir, esto no se refiere al aprendizaje directo de contenidos sino a la adquisición de habilidades que le permitan aprender contenidos individualmente, que le permita ser capaz de desarrollar habilidades que le permitan ser eficaz en el manejo de la información y pueda realizarse plenamente como individuo.

Nótese que la formación matemática conduce principalmente a la comprensión y resolución de problemas, los cuales enriquecen el proceso de mediación entre la cultura sistematizada por medio de la educación, y la vida cotidiana.

La adquisición de conceptos y procedimientos que los estudiantes procesan tiene una relación fundamental con la forma de como estos son enseñados, es decir, la práctica educativa según Godino, Batanero y Font (2003, p. 78): *Lo que los estudiantes aprenden sobre conceptos y procedimientos particulares, así como su capacidad de razonamiento depende de cómo se implican en la actividad en clase de matemáticas. Su actitud hacia las Matemáticas también queda marcada por tales experiencias. Por consiguiente, hemos de cuidar no sólo el currículo, sino también la metodología de la enseñanza si queremos* *desarrollar la capacidad matemática de los estudiantes".*

Burger y Shaughnessy (1986), establecen que se requiere que el docente acompañe y guíe a los estudiantes, y que no debe ser solo un informador o transmisor de conocimientos, pues el saber no es estático, perfecto y cristalizado; todo lo contrario: es dinámico, imperfecto y nebuloso; como un saber en acción.

Se hace necesario que el docente conceptualice de forma diferente como enseñar los contenidos, y capaz de hacer que el estudiante pueda enfrentar con libertad las preguntas que se le formulen y cuyas respuestas puedan ser argumentadas y discutidas en el grupo, sin temor a equivocase y realizar retroalimentación que permita concretizar sus conocimientos pero esto se integra a partir de una mediación pedagógica como se ha mencionado antes por otros autores, se define como acciones que realice el mediador experto en un área de la enseñanza de la Matemática para ayudar u orientar al estudiante en el alcance de sus metas y que así sea capaz de desarrollar operaciones mentales que le permitan manipular, organizar, transformar, representar y reproducir en el pensamiento la nueva información de modo que pueda procesarla y relacionarla con los conocimientos que ya posee; para ello, se debe desarrollar una serie de estrategias enfocadas en la creación del enriquecimiento teórico y metodológico del quehacer educativo, las cuales deberán ser facilitadas por el mediador (Cristina Calderón, 2014).

Dentro del proceso de mediación establece que es importante el nivel de desarrollo determinado por la capacidad personal del estudiante, pero la pregunta que surge es: ¿Cuáles son las estrategias para tomar en cuenta dicho nivel de desarrollo de los estudiantes para resolver independientemente un problema en la planificación de la clase? Los aspectos a considerar son los conocimientos previos, los errores comunes que suelen cometer, las creencias y actitudes hacia la matemática. Además de la parte académica, el docente debe proponer actividades que fomenten la motivación, en la cual en el área de la matemática se vuelve indispensable, el contexto en que los estudiantes se encuentran inmersos para generar un entorno en donde el estudiante se sienta cómodo para poder afrontar los nuevos conocimientos, la recolección de esta información puede obtenerse mediante una investigación en el aula bajo los métodos de la observación y del diálogo con los estudiantes.

1.3. Mediación en el área de la geometría euclídea

En cuanto a las metodologías, es imprescindible que el docente utilice aquellas que desarrollen procesos de mayor interacción del estudiante con el resto en las que se compartan experiencias y conocimientos con sus compañeros. En el área de la matemática, en particular en la geometría será necesario el desarrollo de aquellas que posibiliten los tres procesos cognitivos para un efectivo aprendizaje, a saber: la visualización, la construcción y el razonamiento; pero todo esto deber realizarse desde una mediación pedagógica que permite una motivación para que los estudiantes construyan su conocimiento (citado en Contreras y Roque, 1998). Asimismo, Díaz–Barriga y Hernández (2006), plantean que la motivación significa proporcionar o fomentar motivos para que el estudiante desee aprender, pues solo de esta forma los alumnos invierten su atención y esfuerzo en determinados asuntos y de esto depende que logren involucrarse en las actividades académicas.

Por estas razones se es necesario preparar a los docentes en matemáticas con estrategias y metodologías que le permitan establecer una efectiva mediación pedagógica, brindándoles la capacidad para evaluar, dichas capacidades según Gutiérrez y Prieto (2002), son: sintetizar, analizar, comparar, relacionar temas y conceptos, evaluar, proyectar, imaginar, expresar y observar. Así como el desarrollo de habilidades que le permitan transferir los conocimientos adquiridos a nuevas situaciones o problemas que se le planteen en la vida cotidiana.

Dado que la evaluación no solo cumple una función sumativa sino también una función formativa que debe estar presente en todo el proceso de aprendizaje, y el estudiante debe ser consciente de su proceso, debido a que debe poder aprender y corregir sus errores que presentan; se debe capacitar al docente en el diseño de estrategias evaluativas que permitan observar cuáles pueden ser las razones del poco avance del estudiante en el conocimiento con el objetivo de optimizar su confianza y potencial.

En conclusión, la mediación pedagógica consiste básicamente en guiar al estudiante por medio de un proceso activo y creativo, de construcción y reconstrucción de cada una de sus experiencias a fin de estimular el desarrollo del conocimiento matemático por diversos medios y procedimientos (Mejía y Camacho, 2014).

Papel del estudiante en el proceso de mediación

Después de la educación tradicional, en donde el profesor era el centro de la educación, quién dirigía dicho proceso, surgió la educación moderna unos de sus principales cambios fue que el papel protagonista del proceso de aprendizaje es el estudiante. Se considera, entonces, al alumno como un constructor de su propio conocimiento; es el partícipe de la acción pedagógica, sujeto activo, quien según Hernández (1997), posee una serie de esquemas, planes y estrategias para aprender a solucionar problemas, los cuales a su vez deben ser desarrollados. Varios de estos aspectos mencionados deben ser generados a partir de un proceso de mediación.

1.4. Principios de la enseñanza

El proceso de mediación es complejo y requiere un mayor cuidado en el planteamiento de objetivos y estrategias metodológicas por parte del educador, de forma que no solamente se enfatice en el contenido por desarrollar, sino que también se considere las habilidades generales y específicas que le permitan al educando convertirse en un aprendiz activo, capaz de acceder y manejar eficazmente los diferentes contenidos curriculares.

Según Álvarez (2001), dentro de los principios que deben tenerse en cuenta para planificar la enseñanza están los siguientes:

1. Introducir una actividad apropiada que despierte y mantenga el interés del estudiante, se requiere fomentar la curiosidad para la construcción del conocimiento y del aprendizaje, como procesos activos.

2. Suscitar la formulación de preguntas y problemas, así como sus soluciones; para ello interesa que el docente considere como eje fundamental las preguntas, pues estas han de lograr que el estudiante analice, para ello deben ser abiertas e inteligentes, de forma que el educando requiera de nuevas estrategias que le lleven al desarrollo

de habilidades tales como: la creatividad, la criticidad, la investigación, el trabajo en equipo, entre otros.

3. Fomentar la interacción entre los estudiantes para reforzar las relaciones sociales entre ellos; para esto se requiere del estímulo del intercambio de ideas en los otros, particularmente con sus pares con el propósito de que puedan reconstruir su conocimiento.

4. Evitar el uso de términos técnicos y enfatizar en la estimulación de estrategias didácticas que posibiliten la construcción del conocimiento de sus estudiantes.

5. Animar al estudiante a que piense y valore la forma propia de aprender. Se debe animar al educando para que desarrolle habilidades y actitudes que le posibiliten valorar su aprendizaje, por lo que se requiere integrar la autoevaluación como parte del proceso de aprendizaje.

6. Volver a introducir el mismo material y la misma actividad durante varios años. Se debe considerar que conforme pasa el tiempo así cambia el punto de vista de cualquier persona, por lo que se puede asimilar el conocimiento de forma más estructurada.

7. Integrar todos los aspectos del conocimiento, es decir, tratar de no fragmentar el conocimiento, por lo que se requiere de un trabajo más interdisciplinar que permita organizar el conocimiento de modo se busque la comprensión global sin renunciar a la complejidad.

También, se debe tomar en cuenta en la planificación el objetivo educativo importante para los estudiantes principalmente para los de la modalidad de educación a distancia. En donde ellos deben desarrollar el proceso de autorregulación del aprendizaje que consiste básicamente en que utilicen "bucles autogenerados de información" que le permiten ir ajustando progresivamente sus pensamientos, afectos y acciones, para que así estén dirigidos siempre de forma adecuada a la consecución de los objetivos de la tarea de aprendizaje (Monereo y Badia, 2013).

Cuando el estudiante logra la autorregulación según Zimmerman y Schunk (2011), saben establecer metas razonables de aprendizaje, aplicar los conocimientos disponibles, desplegar estrategias de aprendizaje efectivas, monitorizar y evaluar el progreso hacia el objetivo de aprendizaje, y modificar las condiciones del contexto educativo a las metas de aprendizaje. Ahora no todos los estudiantes tendrán esta capacidad de autorregulación, por lo que es necesario una corregulación. Según Hadwin, Järvelä y Miller (2011), la corregulación del aprendizaje se produce cuando un alumno necesita coordinarse temporalmente con otra persona para conseguir los objetivos formulados, y se desarrolla mediante interacciones que influyen en el proceso de autorregulación.

Los procesos de autorregulación se basan de los materiales autosuficientes que contienen la información, secuencia y proceso necesario para comprender un contenido. La variedad de materiales autosuficientes es extensa, especialmente si atendemos a todos los diferentes periodos históricos en los que se ha hecho uso de ellos, a la estética y representación externa de los que finalmente se concretan. Ante materiales de esta naturaleza y apariencia tan diversa, conviene prestar atención a las dimensiones que orientan su diseño y desarrollo e influyen en el uso educativo que se hace de ellos (Barberá y Mauri, 2002), dentro de los que se pueden mencionar:

- Materiales reproductivos-informativo: es un repositorio digital de información organizado y secuenciado en cuyo abordaje el alumno va avanzando de acuerdo con un criterio determinado establecido para lo que sigue una dinámica lectora e interactiva en la búsqueda de un resultado de referencia predeterminado.
- Material reproductivo-participativo: materiales con espacios abiertos de ejercitación que incorporan la retroalimentación. Se desarrolla en espacios acotados de intervención libre por parte de los estudiantes, que pueden escribir o dibujar libremente, pero contando con que su aportación debe coincidir exactamente con una respuesta correcta predeterminada.
- Material productivo-informativo: se trata de un tipo de material que combina momentos o fases de aportaciones de información sobre temas específicos, que debe ser leída y trabajada por el estudiante, con momentos y fases de aplicación abierta.
- Material productivo-participativo: son materiales que ofrecen a los estudiantes espacios abiertos de práctica autónoma y que están estructurados de manera que

permiten acceder a un contenido que llevará a ejecutar una aplicación abierta en la búsqueda de un resultado de referencia que a priori desconoce.

Una comprensión de los procesos de aprendizaje que los alumnos realizan entornos de autoaprendizaje con materiales digitales exige considerar tanto las propiedades intrínsecas, tecnológicas y pedagógicas de los mismos, como las singularidades de los contextos de enseñanza y aprendizaje en las que estos materiales se insertan (De Conte, 1996). En este sentido, es posible distinguir tres formas básicas de uso de estos materiales en función de que se centren más o menos en la situación de enseñanza y aprendizaje y de la previsión de otras fuentes de ayuda educativa complementarias a las incorporadas en el propio material:

- Como un material para autoaprendizaje sin apoyo del tutor.
- Como un material que los estudiantes utilizan de forma autónoma con el apoyo del tutor.
- Como un material auxiliar o complementarios de otros materiales.

Los procesos de autoaprendizaje que desarrollen los estudiantes dependerán de los objetivos de la actividad y de los tipos de aprendizaje que promueva el material. Por una parte, el material que puede ofrecer opciones diversas en cuanto a los objetivos y la complejidad cognitiva que comportan; por otra parte, en la medida en que los objetivos de los estudiantes coincidan con los propuestos en el material o logren apropiárselos, se estarán facilitando su implicación activa en el proceso de autoaprendizaje.

En cuanto a las formas de interacción, en el caso prototipo de entornos con material para el autoaprendizaje sin apoyo de un tutor, influyen la interacción con herramientas, información y entornos manipulativos. Las características de interactividad, dinamismo, multimedia e hipermedia de los materiales pueden contribuir a la implicación y motivación del alumno por aprender y a facilitar la comprensión y generalización de los conceptos (Coll y Martí, 2001). Si se trata de entornos que incluyen ayudas por parte de un tutor virtual o presencial, habría que considerar además la articulación de las formas de interacción humana y de interacción con artefactos.

La dimensión control del aprendizaje, puede estar más o menos distribuido entre el alumno y el material. Remite tanto el grado de control cómo el foco del mismo, de manera que el material autosuficiente puede ser más o menos flexible y puede permitir una mayor o menor adaptación de los elementos instruccionales a las características de los alumnos en relación con los objetivos de aprendizaje, selección de los contenidos y el nivel de profundización, actividades de aprendizaje y su secuenciación, uso de recursos y las actividades de autoevaluación.

Algunos autores Moreno y Mayer (2000), señalan que los alumnos aprenden mejor con este tipo de materiales cuando son conductores de su propio aprendizaje que cuando son controlados o inducidos exclusiva y externamente por el material.

Finalmente, los apoyos para el aprendizaje consisten en ayudas y guías que se proporcionan al alumno para facilitar el aprendizaje y que pueden provenir de diversas fuentes del propio material y eventualmente del tutor virtual o presencial. El material puede proporcionar apoyos cognitivos para facilitar la comprensión y el establecimiento de las relaciones significativas con el contenido. El tutor puede influir en apoyos de carácter afectivo a la materia y motivación, dirigidos a sostener el interés por el contenido y promover en los estudiantes un sentimiento de autoconfianza en el logro de los objetivos de aprendizaje.

1.5. Enfoque pedagógico de los entornos virtuales de aprendizaje

La evolución de la tecnología trajo cambios importantes en la sociedad y la educación no fue la excepción, surgiendo un nuevo concepto nos referimos a la tecnología educativa que se entiende como:

"un conjunto de técnicas sistemáticas acompañadas de un conocimiento práctico, puesto al servicio de la planificación, control y operación de escuelas, vistas como sistemas educacionales" (Gagné 1967, p. 308).

La informatización amplió el espectro del conocimiento científico y la obtención, procesamiento y difusión de esto. En la actualidad la tecnología educativa ha reformulado su accionar asumiendo que los medios y las TICs son objetos o herramientas que las personas y grupos sociales reinterpretan y utilizan dentro de sus propios esquemas y parámetros culturales con marcada influencia del proceso de globalización (Capote, 2017).

Resaltan entonces en este nuevo contexto social y educativo dos modelos tecnológicos representados por el E-learning (Educación a Distancia) y el B-Learning o modalidad de aprendizaje combinada, cuyo paradigma ha sido instituido y organizado a través de los Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA).

La parte pedagógica de los EVA poseen una estructura de acción que son planificadas, a través de la interactividad que permite tener un ámbito de convergencia social donde la heterogeneidad de los estudiantes estimula la posibilidad de aprendizajes diversos y donde el aprender a cooperar y socializar resultados se convierte en competencia de formación.

Al romper las barreras del tiempo y espacio como la incorporación de los EVA, los partícipes de dicho proceso tienen modificaciones en sus roles, porque la creación y publicación de cursos virtuales implica la relación entre el docente y un equipo multidisciplinario integrado por diseñadores, programadores, especialistas en virtualización, expertos en metodología, tecnología educativa y contenidos didácticos.

No tiene sentido utilizar las mismas técnicas y procedimientos en términos de la clase convencional, sino de aprovechar la experiencia del docente y orientarla hacia su nuevo rol, no solo como mediador sino como facilitador y acompañante permanente del proceso de enseñanza aprendizaje donde las TICs empoderan y ofrecen nuevas formas de interacción, comunicación, recursos y métodos de control (Bravo, 2012).

Unos de los retos principales de los docentes de esta época es que debe estar preparado para asumir su responsabilidad tanto en el ámbito presencial, semipresencial o virtual. A partir de lo anterior debe ser preparado en la creación y aplicación de un currículo flexible, poseer un alto grado de desarrollo de la habilidad cognitiva para la resolución de problemas, ser capaz de adaptarse a los nuevos cambios tecnológicos.

Debido a que el profesor experimenta cambios en su rol, el estudiante evidentemente cambia su rol, entonces en su nuevo rol debe tener una actitud proactiva del aprendizaje, que signifique implicación y compromiso para el establecimiento de metas propias más que asignaturas o cursos, que reconozca actitudes, destrezas y estrategias para poder trabajar en un entorno colaborativo de forma continua y autónoma para lo cual requerirá de habilidades en la gestión de la información y el conocimiento.

El escenario

El lugar de encuentro de este sistema de medios es el aula virtual que a diferencia del espacio físico convenido en la escuela adquiere una nueva dimensión tecnológica que no queda exenta de ser organizada pedagógicamente, es decir, que requiere una planificación de los procesos de aprendizaje. Los aspectos que se deben tomar en consideración cuando planificamos, organizamos, ejecutamos y controlamos el proceso de enseñanza aprendizaje en el aula virtual son:

- El contenido responde a la pregunta: ¿qué es lo que se va a enseñar? e infiere directamente hacia el currículo correspondiente a la disciplina que es tratada, desde lo curricular donde se debe reconocer y potenciar los conceptos, procedimientos y valores según sea el propósito de formación que se pretende lograr. Una vez conocido lo que se quiere enseñar, entonces cabe preguntar: ¿cómo organizar lo que se enseña? cuestión esta que estará dada por el sistema de relaciones:

    a) entre conceptos,

    b) entre conceptos y procedimientos,

    c) entre procedimientos y valores,

    d) proceso de toma de decisiones que diferencia lo general de lo particular, lo cardinal de lo secundario, lo significativo de lo corriente (Capote, 2017).

- Los métodos y procedimientos: es muy común que los diferentes tipos de métodos y procedimientos de enseñanza y aprendizaje se trasfieran al nuevo escenario virtual, estas acciones corrompen la verdadera esencia del aula virtual, porque desconocen que la misma es un medio en sí misma, debido a que permite una interacción entre el docente y los estudiantes a través de las actividades planificadas, a través de herramientas y recursos que tiene como base un estilo de aprendizaje colaborativo, significativo y desarrollador, generando un nuevo rol de docente. Las actividades anteriormente mencionadas deberán ser graduadas y explicitadas suficientemente de manera que el estudiante las cumpla y diseñe de modo que puedan ser realizadas las intervenciones que sean necesarias para el logro de los objetivos propuestos, debido a que no está presente el docente para que oriente la actividad.

- Los recursos educativos: el aula virtual permite explotar de forma eficiente y sistemática todos los recursos tecnológicos que las TICs han puesto en manos de la educación. Los recursos educativos deberán ser diseñados a la medida de los contenidos seleccionados, ruta trazada por el equipo multidisciplinario encargado de su diseño, la experiencia y creatividad del docente responsable de la actividad, así como la pertinencia, accesibilidad, la utilización y capacidad tecnológica de las instituciones universitarias.

- La evaluación es el proceso de enseñanza-aprendizaje como un proceso dinámico, continuo y sistemático enfocado a medir de forma cualitativa o cuantitativa, el conocimiento adquirido en función de los logros obtenidos por los objetivos propuestos. Según Capote en los entornos virtuales de aprendizaje se concibe como un proceso que distingue:

    - El estado inicial del estudiante cuando comienza su actividad en el aula virtual, que refleja no solo el nivel de conocimientos previos en la temática en particular sino el grado de familiaridad que tenga del ambiente tecnológico donde desarrollará su actividad.

    - Las actividades sistemáticas para constatar la evolución y el progreso que alcanzan los estudiantes durante la solución de las actividades de aprendizaje con el doble propósito educativo-formativo, y como medio de retroalimentación

    - El establecimiento de indicadores que permitan evaluar el rendimiento académico, las competencias adquiridas en su accionar individual y grupal y el grado de aceptación del entorno virtual reconocido como su calidad técnica, organizativa y creativa, comunicacional y didáctica.

- Un resultado final que pondere y resuma de manera integral a partir de la recopilación de toda la trayectoria del estudiante en el entorno virtual, los logros alcanzados y las debilidades que aún persisten y que forme parte de esa historia informacional que se necesita para establecer los juicios y las estrategias correspondientes al perfeccionamiento continuo de su desempeño.

1.6. Educación a distancia

La educación a distancia ha surgido a partir del vertiginoso avance de las tecnologías informativas y comunicativas, en los últimos años ha surgido diferentes autores que han investigado sobre la definición el concepto de educación a distancia como Miguel Armegol (1982), Gustavo Cirigliano (1983), Borge Holmberg (1977) quién reconoce las características de la educación a distancia, Desmond Keegan (1980), Norman Mckenzie (1979), Marín Ibáñez (1984), Hilary Perraton (1982), Rowntree (1986).

Siguiendo a García Areitio, entendemos por educación distancia *"un sistema tecnológico de comunicación bidireccional, que puede ser masivo y que sustituye la interacción personal en el aula de profesor y alumno como medio de preferencia de enseñanza, por la acción sistemática y conjunta de diversos recursos didácticos y el apoyo de una organización y tutoría, que proporciona el aprendizaje independiente y flexible de los estudiantes"* (García Areitio 1994, p. 1006).

La anterior definición establece la naturaleza sistemática que posee dicha modalidad, es decir organizada precisamente para la consecución de sus objetivos de aprendizaje, pero la parte característica más importante de la educación a distancia es que es remplazado la interacción en el aula de profesor y alumno, y al desaparecer dicha interacción permite separar los espacios y diferir los tiempos en los que ambos intervienen. Pero para ello, es necesario que aparezcan otros factores que son los recursos didácticos específicos, organizados sistemáticamente, la cual permite que el estudiante adquiera habilidades cognitivas para un aprendizaje independiente. La flexibilidad es el gran activo, en la que implica partir de la idea de que cada alumno ajustará su ritmo de progreso en el aprendizaje a sus propias características.

Características del alumnado de educación a distancia

Uno de los aspectos importantes bajo la modalidad de educación a distancia son el tipo de estudiantes. La primera característica de los estudiantes de la UES, que utilizan la modalidad a distancia es su condición de adultos, al menos desde un punto de vista legal. Los adultos que en un determinado momento deciden seguir un curso de enseñanza a distancia añaden a esta condición otras que los caracterizan diferencialmente. Las características más relevantes son las siguientes:

- No comparten el espacio con los sistemas presenciales correspondientes.
- No comparten el tiempo con los sistemas presenciales correspondientes.
- Disponen de las destrezas imprescindibles para enfrentarse de forma autónoma a procesos de aprendizaje formal.
- Casi siempre tienen una motivación de logro muy determinada.
- Probablemente enfocan sus estudios con gran realismo y sentido práctico.
- Seguramente experimentan una sensación de aislamiento en relación con su actividad estudiantil.
- Los costos para estudiar en esta modalidad son menores que en la modalidad presencial.
- El aspecto de seguridad, debido al problema de delincuencia que padece el país.

Evidentemente estas características mencionadas no todos los estudiantes la cumplen, pero probablemente existan estudiante que las cumplan, lo que les habrá impulsado a tomar la decisión de utilizar esta modalidad para estudiar. De las características mencionada anteriormente, las más probables que aparezcan en los estudiantes que estudian en esta modalidad, son aquellas que no cuentan con un salón de clase como en la presencial. La posibilidad de compartir el espacio con un centro presencial de enseñanza está relacionada con la proximidad o alejamiento del alumno respecto de esto.

La segunda característica que se menciona establece la ausencia de disponibilidad de tiempo para compartir con los sistemas de enseñanza presencial puede deberse a diferentes causas. La más habitual tiene que ver con la condición subsidiaria del estudio, respecto de otras ocupaciones profesionales o familiares.

Existe una ventaja de trabajar con estos estudiantes, debido a que están con una mejor motivación de aprender ya que para ellos es una oportunidad única para poder continuar su proceso de aprendizaje, llevando todas sus obligaciones cotidianas. A diferencia de los estudiantes adolescentes, suelen tener un claro sentido del valor del tiempo, que para ellos es un bien escaso. Pero también experimentan cierta desventaja debido a que presentan dificultades para interaccionar con compañeros y cuando estas interacciones se producen suelen estar muy centradas en aspectos académicos. Por eso, es difícil que se sientan miembros de un grupo de aprendizaje.

El rol docente en entornos de educación a distancia

Dado que la modalidad de aprendizaje han modificado la forma de concebir la educación, la intervención docente se reformula para adaptarse al cambio. En el ámbito de la educación a distancia, el rol del docente como tutor, guía y orientador se concreta en una diversidad de funciones, tal como contenidista, facilitador, asesor curricular, mediador, entre otros con las principales funciones que se describen en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1: Roles del docente

Función	**Descripción**
Académica pedagógica	Definir los objetivos de aprendizaje.
	Diseñar actividades y situaciones de aprendizaje de acuerdo con un diagnóstico previo.

	Determinar los criterios de evaluación, cualitativa y cuantitativa.
Técnica	Planificar, facilitar y guiar el uso de recursos didácticos.
	Gestionar los grupos de aprendizaje.
	Seleccionar y utilizar los recursos tecnológicos de acuerdo con los objetivos establecidos (correo electrónico, foros, chat, videoconferencia, wikis).
Organizativa	Planificar y gestionar el desarrollo del curso.
	Organizar el trabajo en grupo y facilitar la coordinación entre los miembros.
	Establecer estructuras en la comunicación grupal e intergrupal.
Orientadora	Facilitar técnicas de trabajo intelectual conceptual para el estudio en red colaborativa.
	Motivar y asegurar que los alumnos trabajan a un ritmo adecuado.
	Incentivar el juicio de valor del alumno, fomentando un proceso de análisis y síntesis.
	Informar a los estudiantes sobre su progreso en el estudio.
Social y de coordinación	Organizar la interacción definiendo claramente los roles del estudiante y tutor (participante, orientador, coordinador del grupo de trabajo, etc.).
	Fomentar el trabajo en el grupo, entre participantes y tutor, favoreciendo el desarrollo de argumentos.
	Animar y estimular, integrar y conducir las participaciones.
	Dinamizar la acción formativa y el trabajo en grupo.

Para un adecuado desempeño de roles docentes en ambientes de educación a distancia el docente cuenta con competencias, entre las que se mencionan:

- Conducta proactiva, en vista de "adelantarse a los problemas" de interacción con sus estudiantes, en estadios tempranos del proceso de aprendizaje.
- Empatía para conocer a sus estudiantes, de modo que pueda ponerse en lugar de él, capturar sus sentimientos, y tratar de comprender sus reacciones; de este modo, se pueden comenzar a solucionar las fallas de comunicación que pueden presentarse en este tipo de ambiente.
- Visión integradora de conocimiento, tecnología y enseñanza, de modo de imponer la mediación académica y tecnológica al servicio de la pedagogía, para favorecer el proceso de adquisición de conocimiento y orientación-aprendizaje.
- Actitud flexible para poder orientar y motivar el proceso de aprendizaje, basados en las características de los participantes y de la organización del material de trabajo.
- Disposición favorable al trabajo en equipo para coordinar las tareas con otros integrantes del sistema (dirección, administración), si es que los hubiere.
- Contar con un plan de evaluación y supervisión de la tutoría, que contemple puntos de control para el seguimiento del curso, y la toma de decisiones para una retroalimentación de la tutoría.
- Estratega para propiciar un "encuentro de ambientes", que integran los estudiantes, y que el tutor está en condiciones de socializar, para que los estudiantes se sientan como miembros de un grupo de trabajo orientado por el tutor, como docente y experto.

Sistemas de educación presencial vs sistemas de educación a distancia

La comparación entre las características de los sistemas de educación presencial y a distancia puede iluminar el panorama sobre cuál de ellos resulta más ventajoso en cada circunstancia. Esta comparación se realizará desde dos puntos de vista que son la institución educativa y el profesor.

El punto de vista de las instituciones educativas

Hasta hace relativamente poco tiempo, la convivencia de las modalidades de educación presencial y a distancia en los sistemas educativos solía tener un carácter complementario. En el fondo, la educación a distancia nace como un sistema compensatorio, dirigido a las personas que por diferentes causas no podían incorporarse al sistema presencial, identificado tradicionalmente como el genuinamente más educativo.

Las decisiones que toman las instituciones educativas, sean públicas o privadas, en torno al tipo de modalidad educativa a desarrollar dirigida a un determinado segmento de población o tipo de enseñanza, suelen obedecer a diferentes criterios:

Tabla 1.2: Comparación entre la E. presencial y EaD.

Educación Presencial	**Educación a Distancia**
Características Económicas	
Basada en la utilización intensiva y continuada de mano de obra cualificada (profesorado)	Basada en la utilización intensiva del capital en las fases iniciales.
Vinculada al número de estudiantes.	Vinculada a los costes iniciales de puesta en marcha.
El coste anual por estudiante varia menos (estabilidad en las ratios alumno-profesor)	El coste anual por estudiante desciende significativamente al incrementarse el número de matriculados en un curso.
Tendencia al mantenimiento o incremento de costes.	Tendencia a la reducción de costes.
Menor inversión inicial.	Mayor inversión inicial.
Costes de infraestructura con tendencia a la inestabilidad	Costes de infraestructura estables.
Características Organizativas	

Organización basada en criterios artesanales: profesionales agrupados en los centros por especialidades docentes.	Organización basada en criterios industriales: diseño, producción, distribución, control de calidad.
El sistema suele asumir todas las funciones.	Contratación externa de funciones especializadas.
Los materiales didácticos pueden ser utilizados o no a criterio del profesor o en función de las circunstancias.	Los materiales didácticos especializados resultan imprescindibles.
La comunicación cara a cara se organiza naturalmente en el seno de cada grupo de clase.	Es básico el despliegue de un sistema de comunicación soportado tecnológicamente.
El profesorado puede desempeñar su función con el bagaje proporcionado por su formación inicial.	El profesorado precisa de una formación especializada, no adquirida en su formación inicial.
Características en Relación con la Eficiencia	
Dirigida a personas:	Dirigida a personas:
Agrupadas probablemente por características homogéneas: edad, lugar de residencia, etc.	Hay una mayor variedad.
Tiempo disponible para el estudio puede sistematizar de acuerdo con un estándar, que suelen adoptar, parcial y sistemáticamente, el rol de estudiantes.	Tiempo disponible para el estudio sólo puede sistematizar teniendo en cuenta circunstancias personales, que suelen adoptar, muy esporádicamente, el rol de estudiantes.
Debería preferirse para:	Debería preferirse para:
El aprendizaje de personas con más bajos niveles relativos de instrucción.	
Atender a personas con necesidades complementarias a la motivación hacia el estudio.	Atender a personas con alta motivación de logro.

Atender a personas poco familiarizadas con el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	Atender a personas familiarizadas con el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
Atender a personas con difícil acceso a este tipo de tecnologías	Atender a personas con fácil acceso a este tipo de tecnologías.
Atender a personas habitantes en contextos dotados con suficientes infraestructuras educativas y culturales.	Atender a personas habitantes en contextos con escasas infraestructuras educativas y culturales.
Enseñanzas que requieran destrezas manuales o habilidades sociales	Enseñanzas de lápiz y papel o soportadas por tecnologías informativas.

El punto de vista del profesorado

Educación Presencial	**Educación a Distancia**
Facilita el aprendizaje cooperativo.	Facilita el aprendizaje personalizado.
Estimula la socialización.	Estimula la iniciativa individual.
Se organiza en torno al grupo de clase.	Se organiza en torno al estudiante.
Permite el refuerzo inmediato.	Permite una atención ajustada a las necesidades de cada alumno.
El profesor es la fuente básica de información, complementada con otros medios didácticos señalados por él.	El profesor orienta sobre las fuentes de información pertinentes.
Los materiales didácticos están supeditados a las directrices del profesor.	Los materiales didácticos son el soporte básico de transmisión de la información.
El método didáctico es básicamente verbal y gestual.	El método didáctico es básicamente escrito o gráfico.
El profesor suele marcar el ritmo de progreso en los aprendizajes.	Cada alumno marca su propio ritmo de progreso en los aprendizajes.

Permite un conocimiento progresivo de cada alumno, al que se van incorporando datos procedentes de la convivencia cotidiana.	Requiere de un conocimiento sistemático del alumnado desde las primeras fases del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Mediación pedagógica en la educación a distancia

La enseñanza bajo esta modalidad supone una nueva conceptualización de la jerarquía y la directividad, al tiempo que estimula el trabajo autónomo del estudiante y exige que el docente sea animador y tutor del proceso de aprendizaje. La mediación pedagógica puede entenderse como un conjunto de acciones o intervenciones, recursos y materiales didácticos, como sistema articulado de componentes que intervienen en el hecho educativo, facilitando el proceso de enseñanza y aprendizaje. Su principal objetivo es, facilitar la intercomunicación entre el estudiante y los docentes para favorecer a través del razonamiento, un acercamiento comprensivo de ideas y conocimientos.

En la educación a distancia, la mediación pedagógica se apoya cada vez más en los avances tecnológicos, que implica externalización e internalización de la realidad. Las tecnologías, en este caso, son un puente conector que facilitan la comunicación, la interacción y la transposición del conocimiento del docente a un conocimiento didáctico que pueda ser comprendido por el estudiante, y en este proceso el docente desempeña una función de guía, sin pretensiones de sustituir la actividad creadora del estudiante.

La Figura 1.1 representa un modelo mediacional en un entorno de educación a distancia, donde se observan elementos centrales, los contenidos, objeto de estudio; la pedagogía, de donde se centran las teorías de aprendizaje, y las TICs, que proporcionan los recursos tecnológicos. Estos elementos constituyen la base para la mediación pedagógica y la creación de ambiente de aprendizaje como ZDP donde juegan roles, estrategias y diferentes prácticas en un proceso dinámico y continuo.

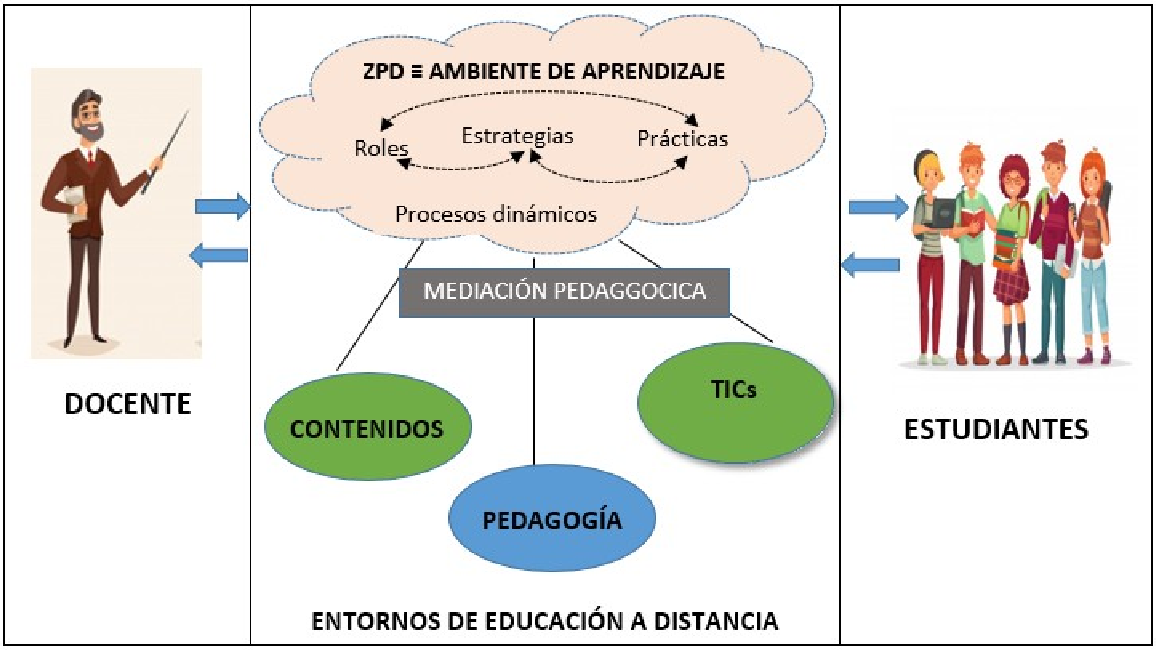


Figura 1.1: Representación esquemática de los elementos de mediación en un entorno de educación a distancia (Fuente: Digión, Sosa, y Velásquez, 2006: p. 5)

El avance tecnológico no ha restado el liderazgo al medio impreso, como soporte de la enseñanza en el mundo; por el contrario, ha favorecido los procesos de producción de este medio de comunicación social.

Al ser la educación a distancia, es válido destacar el hecho de la utilización del texto como base de la formación. Lo anterior no excluye las bondades de los otros recursos, como los son las videoconferencias, los multimedios o las innumerables opciones que ofrecen las plataformas virtuales (Milachay, 2007; Berrocal, 2009; Brenes, 2009), pero es un hecho que el impreso sigue manteniendo su lugar de privilegio. Sobre la respuesta a la pregunta ¿cuáles son las razones por las que el impreso ocupa un lugar tan importante en la formación a distancia? Para dar respuesta a esta interrogante se cita a estos autores Trilla et al. (2003): un medio muy accesible, sin importar que se trate de un libro, cuaderno u otra presentación, ya que el impreso es de fácil manipulación. Además, se puede consultar en cualquier espacio y condición al ritmo individual del lector, en que es medio productivo de fácil reproducción, permitiendo que los costos sean muchos más bajo que otros.

Los escenarios virtuales, han permitido ampliar la posibilidad de encuentros entre los estudiantes y tutores, y, por tanto, potencializar las alternativas para aprender. Sin embargo, existen algunas limitaciones que dificultan la virtualización del aprendizaje a través de las herramientas tecnológicas. Algunas de ellas, pueden superarse rápidamente dependiendo de la motivación de los participantes y de un adecuado uso de las herramientas tecnológicas. Otras, requieren de un trabajo constante, autorregulado y mediado por las estrategias metacognoscitivas, para que se logren los objetivos de aprendizaje. Las tecnologías educativas son el medios y recursos para generar mediación del proceso de aprendizaje, en cual es necesario que el tutor pueda buscar aquellas herramientas y recursos que le permitan que los estudiantes logren alcanzar con mayor facilidad los conocimientos.

1.7. Materiales didácticos

Son recursos producidos específicamente para el aprendizaje, es decir, tiene como principal objetivo el de enseñar algo a alguien. Otros autores como Márques (2000), definen el medio didáctico como cualquier material elaborado con la intención de facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje, por ejemplo: un libro de texto o el programa GeoGebra. Este mismo autor afirma que los recursos educativos son cualquier material que, en un contexto educativo determinado, es utilizado con una finalidad didáctica o para facilitar el desarrollo de actividades formativas.

Echevarría (2018), establece que existen tipos de usos que orientan los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático los cuáles son objetivados mediante el lenguaje y corresponden a situaciones contextuales particulares. De lo anterior se considera que los materiales didácticos son símbolos culturales que emergen de los sistemas de uso en contextos formativos, además, su significado depende de la práctica humana, y se modifican en el tiempo, según las necesidades. En el contexto de los materiales, los ambientes y el aprendizaje partimos de los siguientes supuestos:

- El uso de los materiales se enmarca y cobra sentido en un contexto determinado.

- La interacción con los medios o recursos tiene efectos relevantes en la actuación, el desarrollo y las capacidades de los sujetos (Perkins, 2001).

- Las tecnologías generan modos de aprender y dejan huellas en las mentes de los estudiantes. Según Buckingam (2008), los efectos de la tecnología dependen de los contextos de uso, las motivaciones de sus usuarios y el propósito de su utilización.

- Los materiales pueden proveer información, pero son los sujetos los que, con su actividad cognitiva, la convierten en conocimiento.

1.7.1. Elaboración de materiales escritos en la modalidad de educación a distancia

Los materiales escritos en educación a distancia se caracterizan porque su elaboración se centra en el estudiante, por esta razón, se requiere conocer el perfil de los destinatarios. Quién escribe un material escrito de autoaprendizaje debe pensar que el estudiante no cuenta con un docente en el aula de clase explicando cada uno de los pormenores relacionados con el aprendizaje. Por esto material debe responder a las expectativas que tienen los estudiantes frente al docente:

- Tener una idea clara de hacia donde se va.
- Asegurarse de que no se van a perder en el camino.
- Que el docente sea amigable y accesible.
- Que se utilicen ejemplos útiles incluyendo dibujos.
- Que se expliquen las cosas de manera clara y en más de una forma.
- Que se dé la oportunidad de aprender de su propia experiencia.
- Que se les ayude a aplicar lo que aprenden a su propia situación.
- Que se dé una gran cantidad de prácticas guiadas.
- Que se les apoye en la prueba de sus propias ideas.

- Que se les ayude a revisar su propio progreso.
- Que se resuman los puntos importantes (Rowntree, 1999, p. 190).

Además, debe responder a las funciones expuestas por Gagné que deben estar en la enseñanza los cuales son:

- Estimular la atención y motivar
- Objetivos esperados.
- Presentar el material a aprender.
- Guiar y estructurar el trabajo de los estudiantes.
- Provocar la respuesta.
- Estimular el recuerdo de los conocimientos de habilidades previas, esenciales y relevantes.
- Promover la generalización del aprendizaje.
- Facilitar el recuerdo.
- Evaluar la realización.

Baath en 1983, realizo sugerencia para los materiales didácticos basados en las funciones anteriormente mencionados que se describen a continuación

- *Estimular la atención y motivar:* los materiales deben poseer formatos atractivos y llamativos, tipos y tamaños de letra adecuado que no canse la vista, cuadros, ilustrativos y gráficas bien diseñadas.
- *Objetivos esperados:* es importante detallar con la mayor claridad posible al estudiante cuáles son resultados que esperan y cuáles son las capacidades que se deberían desarrollar a través de aprendizaje propuesto y estos deben ser redactados de forma sencilla.

- *Estimular el recuerdo de los conocimientos-habilidades previas, esenciales y relevantes:* es importante, siempre que se pueda, incluir un conjunto de conocimientos que son requisitos para adquirir nuevos conocimientos.

- *Presentar el material a aprender:* los contenidos con claridad intelectual, lógica, orden, continuidad, consistencia, sencillez y un estilo de redacción personal. Dentro de estos los conceptos deben presentarse con sencillez, evitando dar ideas de que es complicado el acceso al mismo.

- *Provocar la respuesta:* la estructura del material debe promover al estudiante a la acción, es decir trabajo con el material, con ejercicios, problemas, tareas para ser entregadas, fijación de tiempos y cronogramas de las mismas.

- *Promover la generalización del aprendizaje:* se trata aquí de fijar las condiciones en las que los mismos, conceptos o ideas pueden ser transferidos en la resolución de problemas. Se debe acudir a distintos ejemplos para la misma idea o señalar casos similares de otras asignaturas.

- *Facilitar recuerdos:* consiste en lograr que lo aprendido se conecte definitivamente con los conocimientos anteriores, produciendo un nuevo conocimiento adquirido y permanente. Es importante para ello que el estudiante utilice, varias veces, este nuevo conocimiento adquirido y sus relaciones analógicas en la resolución de problemas, no solo dentro de una unidad didáctica, sino que en las posteriores.

- *Evaluar la realización:* es importante que el material incluya una instancia de auto evaluación del aprendizaje y una de evaluación sumativa.

Según Gualdrón y Gómez (2002), los que elaboran materiales escritos, debe visualizar el horizonte de su trabajo, enmarcándolo ante los retos del contexto internacional, nacional y regional, ante las tendencias pedagógicas y disciplinares y, en especial, ante los deseos institucionales de la organización educativa a la cual pertenezca, además en función de las características que tenga el estudiante.

Los elementos pedagógicos claves que deben estar presentes en un material escritos son:

- La introducción: exponer el horizonte que orienta los planteamientos teórico-prácticos del conocimiento, poner de manifiesto la globalidad del contenido disciplinar, expresar razones de carácter teórico, conceptual, ideológicos, institucionales, etc.

- Los objetivos: que sean redactados de tal forma que sean de carácter integral, es decir, que combinen los componentes cognoscitivos, procedimentales y actitudinales. Si se conocen los objetivos, el alumno puede diferenciar los contenidos principales de la información complementaria, consiguiendo una mayor efectividad en el estudio. Para el profesor, son una herramienta útil como guía para desarrollar los contenidos y como referencia para la evaluación del aprendizaje.

- El tratamiento pedagógico: está compuesto por el conflicto cognitivo, el manejo de la nueva información, profundización.

  - Conflicto cognitivo: el estudiante manifieste ciertos presaberes con relación a los temas tratados, es decir partir de los conocimientos previos.

  - Manejo de la nueva información: la información debe ser presentada de tal forma que busque incentivar al estudiante para que piense, utilice y tome decisiones contextuales. Es necesario, que mediante la información y actividades propuestas, se propicie y se guíe la participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento. Los contenidos deben responder a un eje conductor que muestre una secuencia lógica que visualice claramente la interrelación entre los mismos.

  - Profundización: vincular los contenidos a la realidad sociocultural del estudiante; reconocer y utilizar las experiencias de vida, como un producto de la práctica social de los educandos.

- Conversación didáctica: la información presentada en forma de diálogo, en un lenguaje sencillo y fácil de entender para el estudiante.

- La redacción se debe caracterizar por la presencia de oraciones sencillas y cortas con estructura determinante, el vocabulario usa palabras al nivel del estudiante. Los vocablos nuevos y técnicos se introducen gradualmente y con las aclaraciones debidas.

La redacción de los materiales escritos siempre ha exigido una serie de competencias especializadas. Una de sus características es su flexible estructuración pedagógica en tanto que su finalidad consiste en reforzar los aprendizajes y formar estudiantes con destrezas que les permitan asumir los requerimientos del aprendizaje individual y en colaboración. La flexibilidad que menciona debe contemplar la situación "solitaria" en la que el estudiante se enfrenta al texto, en muchas ocasiones se une el cansancio como obstáculo para el estudio, ya que este estudiante suele integrarse por personas que trabajan (Córica, 2004).

- Ejemplos: su objetivo es clarificar los conceptos que se tratan de explicar, facilitando la transferencia de los aprendizajes. Pueden usarse tanto ejemplos como contraejemplos. Su selección ha de ser cuidadosa, pues tienen que resultar interesantes, estimuladores, a la par de aclaratorios y fácilmente entendibles por parte del estudiante.

- Actividades: pueden aparecer al final de la unidad, o también pueden ir intercaladas dentro del texto. En este último caso, deben ser actividades breves para no interrumpir el desarrollo de los contenidos; suponen una autoevaluación constante para el alumno, comprobando si ha comprendido las ideas expuestas en el texto.

- Ejercicios: mediante estos, el estudiante puede comprobar por sí mismo su dominio de la unidad estudiada. Con su realización, el estudiante es capaz de detectar su progreso, errores que debe corregir o lagunas para cubrir. La realimentación que estos ejercicios suponen debe ser mayor cuanta menos disponibilidad cuente el alumno del docente. Así mismo, el alumno debe tener la certeza de que, si contesta adecuadamente, ha estudiado la unidad con la profundidad requerida.

- Anexos: complementan o actualizan algunos de los aspectos que se tratan en los contenidos. No se debe abusar de ellos, sólo hay que incluir aquellos que sean imprescindibles y consistentes con los objetivos, contenidos y actividades: listas de comprobación, tablas, cuadros, documentos de referencia o lecturas complementarias.

Capítulo 2

Propuesta, análisis y resultados

2.1. Estructura de la propuesta del material escrito

El material escrito de la asignatura de Geometría Euclídea I, está dividido en cinco apartados, cada uno de ellos aborda una unidad. Todos los materiales poseen una estructura homogénea, incluyendo los elementos que recomiendan, Gualdrón y Gómez (2002), que se describe a continuación.

a) *Portada:* se especifica la unidad que se va a estudiar, el coordinador de cátedra y carrera y otros aspectos generales.

b) *Objetivos:* en esta sección de los materiales escritos que aparece en la segunda hoja en la que se describen los objetivos a lograr al finalizar el estudio de los contenidos de la unidad, siendo estos los primeros orientadores de los estudiantes.

c) *Introducción:* en esta parte de los materiales tiene el objetivo de proporcionar un panorama de los contenidos a estudiar en la unidad, además, de una orientación sobre la línea de trabajo a desarrollar con la lectura del material.

d) *Datos históricos:* en este apartado de trata de describir parte historia de la Matemática permite conocer las cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban, los métodos y técnicas que desarrollaban, cómo fraguaban definiciones, teoremas y demostraciones (Urbaneja, 2004), además ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas (Bell, 1985: 54). Lo anterior con la intención de expectativa, curiosidad y motivación de los estudiantes sobre el contenido a abordar.

e) *Teoría:* en esta sección se expone las definiciones, los teoremas, corolario y lemas con sus respectivas demostraciones, de forma lógica y natural, es decir, partiendo de las definiciones y lemas básicos que se aplican en las demostraciones de los teoremas de mayor complejidad.

f) *Ejemplos:* son una serie de problemas con diferentes niveles dificultad desde lo sencillo a lo complejo. Los sencillos son aquellos en los cuales se aplica el contenido nuevo con propósito de afianzarlo y los de mayor complejidad aplican también contenidos vistos en las unidades anteriores, mediados pedagógicamente.

g) *Problemas propuestos:* es una serie de problemas de diferentes niveles de dificultad, para que puede construir su propio conocimiento sobre la resolución de problemas aplicando el tema abordado en la unidad.

h) *Respuesta a los problemas:* en esta sección se presenta las respuestas de los problemas donde se solicita determinar caso particular la medida de un ángulo o la longitud de un segmento.

i) *Sugerencia:* el último apartado contiene enlaces de vídeos, documentos, estos como material complementario, generar curiosidad por conocer más sobre los temas abordados en la unidad.

Además de la estructura descrita anteriormente, tiene un diseño para enunciar las definiciones, teoremas, corolarios, lemas y ejemplo, de manera de diferenciar cada uno de ellos, siendo atractivos como se muestra en las figuras 2.1 y 2.2, con contraste de colores y tipo de letra que no canse la vista todo ello principalmente para activar la motivación según Alves (1963), afirma: *"Motivar es despertar el interés y la atención de los alumnos por los valores contenidos en la materia, excitando en ellos el interés de aprenderla, el* *gusto de estudiarla y la satisfacción de cumplir las tareas que exige" (1963, p. 159).*

Especialmente los estudiantes de la modalidad de educación a distancia que en mayoría estudian y elaboran sus tareas de las materias que cursan, en tardes y noches después de desarrollar sus actividades diarias de trabajo, quehacer del hogar, etc., por ello son personas que puede estar cansados al momento de estudiar.

Definición 2.1. Circunferencia

Es el lugar geométrico de puntos que equidistan de un punto dado, llamado el ***centro*** de la circunferencia; la distancia de cada punto de la circunferencia al centro es el ***radio***.

Figura 2.1: Ejemplo definición en material escrito

Teorema 2.1.

El ángulo central es el doble del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco. Es decir que $\angle A'AB = \frac{\angle A'OB}{2}$.

Figura 2.2: Ejemplo de teorema en material escrito

✓**Ejemplo 6.5**

En un triángulo ABC, $\angle A = 2\angle C$; se traza la bisectriz interior AD, la circunferencia circunscrita al triángulo ABD intercepta a $\overline{AC}$ en E, calcularEC; si $AB = 7$.

Figura 2.3: Ejemplo del enunciado de un ejemplo en el material escrito

Cabe mencionar que el material posee un párrafo antes de cada sección con el fin de orientar a los estudiantes dado que ellos no cuentan con un docente que desarrolle esta función, la cual permite que el estudiante lleva una secuencia en la lectura del material con facilidad.

Otro elemento importante en la elaboración de un material escrito es explicación y desarrollo de los contenidos, esto permite diferenciar entre un material complejo e incomprensible a uno sencillo y compresible, este último siendo nuestro objetivo, principalmente la mediación de la resolución de los problemas expuestos como ejemplos y el desarrollo de las demostraciones de los teoremas, corolario y lemas, especificando y justificando con detalle cada paso, basándose en los conocimientos previos del inicio del ciclo y los que se adquieren en el trascurso de la asignatura, además de agregar recordatorios de algunas propiedades como se muestra en la Figura 2.4, con el propósito de que el estudio sea en menor tiempo, dado que los estudiantes de esta modalidad no disponen de mucho tiempo para estudiar.

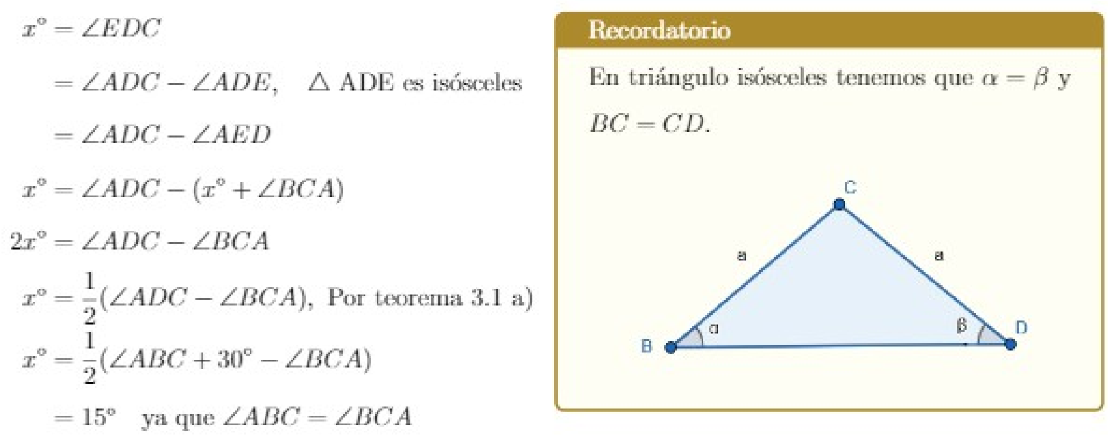


Figura 2.4: Ejemplo de un recordatorio de la resolución de un problema

2.2. Resultados y Análisis

Para la recopilación de la evaluación del material escrito se consideró una encuesta en línea a través de una aplicación de Google, tomando como población los 10 Profesores Universitarios Modalidad a Distancia (PUMD) que trabaja en diferentes sedes Universitarias asignadas por la coordinación de la carrera.

De los 74 estudiantes que inscribieron la asignatura en el ciclo I-2020, de estos 13 la retiraron y dos personas abandonaron el curso, obteniendo 59 estudiante, quienes se le envío la invitación a llenar la encuesta. Sin embargo, solo 38 estudiantes contestaron la encuesta, aplicando el método de muestreo no probabilísticos en la que se seleccionan a los sujetos siguiendo determinados criterios personales procurando que la muestra sea representativa, lo cual se cumple, porque el número de encuestados es superior al tamaño de muestra con distribución normal basado en los 59 como se determina a continuación:

$$\begin{aligned} n &= \frac{Z_\alpha^2 * N * \text{error} * (\text{1-error})}{(N-1) * \text{precisión}^2 + Z_\alpha^2 * \text{error} * (\text{1-error})} \\ &= \frac{(1.96)^2 * 59 * 0.05 * (0.95)}{58 * 0.05^2 + (1.96)^2 * (0.05)(0.95)} \\ &= 33 \end{aligned}$$

Por lo que las respuestas de los 38 estudiantes son representativas de la opinión de toda la población.

2.2.1. Perspectiva de los docentes PUMD

Los docentes en generales evaluaron con una buena calificación el material escrito, presentado promedios mayores del 8.5 de cada elemento consultado en la encuesta que aparecen en la siguiente tabla (todos los datos recolectados se encuentran en el apéndice C, resumidos en gráficos de barra).

Tabla 2.1: Promedios de las calificaciones de los elementos del material escrito de parte de los Docentes PUMD

Elementos	**Promedio**
Construcción de las figuras.	9.8
Los recordatorios en la demostraciones o resolución de ejercicios.	9.5
Estructura.	9.4
La redacción.	9.1
Compresión de los pasos de la resolución de los ejercicios.	9.0
Motivación que genera.	8.9
Cantidad de ejercicios resueltos.	8.8
La compresión de las demostraciones.	8.7

Observando la Tabla 2.1, muestra que el elemento con mayor promedio es la construcción de las figuras de las demostraciones y los ejercicios resueltos que facilitan la compresión de estos, evidenciando la importancia que tiene la construcción de la figura para resolver los problemas planteados en la asignatura. Otro elemento, que ha tenido una notable aceptación de parte de los docentes son los cuadros con recordatorios de contenidos que aparecen en el desarrollo de las demostraciones y resolución de los ejercicios evidenciando que aportan a la compresión de estos. Pero no son lo suficiente, ya que la compresión de los pasos de los ejercicios y las demostración muestra promedios de 9.0 y 8.7 respectivamente, siendo este último el más bajo de los promedios, el porqué de estas calificaciones se puede deducir a partir de tres opiniones expuestas, por ejemplo: *"solo detallar un poco más las demostraciones, ya que a veces se omiten algunos pasos que los estudiantes no asimilan de la manera correcta, eso para una mejor comprensión de ellos a la hora de estudiar"*. De esto se tiene total certeza dado que ellos trabajan con los estudiantes detectando las dificultades a la hora de estudiar el material.

El promedio sobre la motivación que genera se acerca nueve, por qué no es más alto, se debe a que depende muchos factores que notan en sus estudiantes como: resultados en las evaluaciones, estado anímico, estilos de aprendizaje, etc. Cabe mencionar que la estructura y la redacción que son bases para la construcción de un material escrito, presentan promedios altos, lo que significa que con la incorporación de algunos detalles se puede obtener un documento de calidad, Por último, el promedio de la calificación a la cantidad de ejercicios resueltos (aclarar que los ejercicios resueltos no son repetitivos) es buena, reflejando las diferentes formas en que se puede aplicar la teoría en la resolución de problemas.

2.2.2. Perspectiva de los estudiantes

De parte de los estudiantes se obtuvieron resultados muy variados desde unos que calificaban bien a otros que calificaban de deficiente los elementos del material. De forma resumida aparecen presentamos los promedios obtenidos de cada uno de los elementos que fueron encuestados (todos los datos recolectados se encuentran en el apéndice C, resumidos en gráficos de barra).

Tabla 2.2: Promedios de las calificaciones de los elementos del material escrito de parte de los estudiantes

Elementos	**Promedio**
Construcción de las figuras.	8.82
Los recordatorios en la construcción de las demostraciones de los teoremas.	8.63
Los recordatorios en la construcción de la resolución de los de ejercicios.	8.71
Estructura (Solo contestaron 31).	8.65
La redacción.	8.55
Compresión de los pasos de la resolución de los ejercicios.	7.74
Motivación que genera	8.18
Cantidad de ejercicios resueltos	7.45
La compresión de las demostraciones	7.37

Como se puede observar en Tabla 2.2 al igual que en la Tabla 2.1 el elemento de *la construcción de las figuras ayuda a la compresión de la solución de los ejercicios* presenta el mayor promedio, como se mencionó anteriormente evidencia que para los estudiantes es de su importancia la construcción de una buena figura que represente el problema para comprender mejor la solución. Otros elementos del material que tuvieron promedios superiores a 8.5 son *la estructura, la redacción, los recordatorios en las demostraciones y la solución de ejercicios*, los que le dan un sentido de unicidad de otros materiales escritos, evidenciando un nivel aceptable por parte de los estudiantes. *La motivación que genera el material* es un elemento de carácter psicológico que tiene como promedio 8.18 calificación, el porqué de estos resultados se debe a que un 50 %

(calificaciones entre 9-10) de los encuestados si les motiva, 36.8 % posiblemente y solo 13.2 % que no, en conclusión el material posee características que generan motivación pero como se expresó anteriormente esto varia de acuerdos a la influencia que tengan los factores externos e interno en el estudiante (rendimiento académico, disponibilidad de tiempo, interés al área de estudio, estado anímico, etc.).

El promedio de 7.45 de calificación sobre la percepción de la cantidad de ejercicios resueltos en el material escrito del 56 % estudiantes encuestados no es suficiente para tener panorama aplicación de la teoría en la resolución de problemas y solo el 44 % (calificaciones entre 9-10) expresa lo contrario. Resta mencionar que los elementos que están relacionados con la compresión de los contenidos, en particular la construcción de las soluciones de ejercicios (ejemplos) y las demostraciones, esto último con el promedio más bajo al igual que el expuesto por los docentes (8.7), presentando un 29 % (calificaciones entre 9-10) de los estudiantes que consideran que son fáciles de comprender las demostraciones y un 44.8 % (calificaciones entre 9-10) consideran que los pasos de la solución de los ejercicios son fáciles de comprender.

Cabe mencionar los promedios de la perspectiva que tienen los estudiantes del material escrito respecto a los docentes son más bajos en todos los elementos, una de las causas es que hay varios estudiantes que han contestado bajo el sentimiento de frustración debido a que se les dificulta hacer sus tareas como lo expresa uno de ellos en la respuesta de la pregunta ¿Qué aspectos Ud. considera que deben mejorarse del material escrito? ¿Por qué? respondiendo: *"Ejercicios similares a los de las tareas, ya que siempre son más complicados que los del material"*. Otra causa es la experiencia en los manejos conceptuales y procedimentales de los docentes, ya que para ellos algunos procesos pueden ser evidentes, pero no a los estudiantes" como lo expresa varios estudiantes *"En las soluciones de los ejercicios, se pudieran visualizar todos los pasos incluso los más pequeños. Ya que muchas veces nos confunden cuando dé un paso pasan a otro sin explicación"*.

Se consultó a los estudiante, por medio de la siguiente pregunta: ¿En promedio cuántas horas semanales utiliza para el estudio del material escrito de Geometría Euclídea I? resultando en promedio es 7.65 horas, el cual tiene un notable aumento porque dos datos atípicos de 24 y 48 horas los cuales son pocos recurrentes, descartándose se tiene un promedio de 5.9 horas que se aproxima a las seis horas por semanas lo que asemeja a las horas clases que recibe un estudiante en modalidad presencial.

Una de los elementos que marca notablemente la diferencia entre un material escrito comprensible o no, son los paso de las construcciones de la demostraciones y la solución de los ejercicios, implicando la comprensión de la teoría. A partir de lo anterior y los datos sobre las horas semanales de estudio del material escrito, surge la inquietud ¿Existe un relación lineal con la comprensión de los pasos de las construcciones de las demostraciones y solución de ejercicios con respeto a las horas estudio semanales? Es decir, planteando la siguiente hipótesis: a mayor compresión de las demostraciones y solución de ejercicios menor número de horas de estudio del material. Realizando un análisis de regresión se obtuvieron los resultados reflejados en la Tabla 2.3[1]:

Tabla 2.3: Análisis estadístico de regresión entre v_1 y v_2

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.1795
Coeficiente de determinación R^2	0.03224
R^2 ajustado	0.004589
Error típico	2.0668
Observaciones	37

Observando la Tabla 2.3 se resultó que el coeficiente de de correlación es inferior a 0.3 por

[1] v_1 : promedio de horas semanales, v_2 : promedio de las calificaciones de las percepciones de la comprensión de las demostraciones y solución de ejercicios.

lo que no existe relación lineal entre ambas variables y las variables son independientes, esto tiene las siguientes interpretaciones:

- un estudiante puede estudiar el material en poco tiempo, pero presentando dificultades para entender las demostraciones y soluciones de los ejercicios (ejemplos).
- Un estudiante puede comprender con facilidad las demostraciones y ejercicios, pero estudiar el material superior al promedio.
- Un estudiante puede comprender con facilidad las demostraciones y ejercicios, estudiando el material en poco tiempo y viceversa.

La otra pregunta que surgió al tener el dato ¿Existe una correlación entre la comprensión de las soluciones de los ejercicios, comprensión de las demostraciones, motivación y el tiempo? Para esto, se construye la Tabla 2.4 que contiene el coeficiente de correlación entre estas variables.

Tabla 2.4: Matriz de los coeficientes de correlación

	Motivación	Demostraciones	Ejercicios	Tiempo
Motivación	1.00	0.74	0.70	0.18
Demostraciones	0.74	1.00	0.85	0.15
Ejercicios	0.70	0.85	1.00	0.19
Tiempo	0.18	0.15	0.19	1.00

Analizando los coeficientes de correlación de la Tabla 2.4 presentan las siguientes interpretaciones:

- no existe correlación significativa entre el número de horas por semana, con respecto a la motivación, es decir, la motivación que genera el material escrito no induce a que los estudiantes dediquen más tiempo de estudio al material.

- Dentro las variables la que tiene mayor correlación con respecto al tiempo es la comprensión de las soluciones de los ejercicios, no es significativa pero indica que los estudiantes dedican más tiempo a estudiar la soluciones de ejercicios. Realizando el análisis de regresión lineal, resulta una recta de pendiente positiva como se observa el la Figura 6.

- Las variables que si tiene una significativa correlación igual o superior a 0.7 son:

  - la comprensión de las soluciones de los ejercicios con respecto a la comprensión de las demostraciones, esto significa que si los estudiantes comprenden las demostraciones también entenderán las soluciones de los ejercicios.

  - la motivación que genera el material con respecto a la comprensión de las demostraciones y las soluciones de los ejercicios, esto significa que si los estudiantes comprenden las demostraciones y las soluciones de los ejercicios entonces los estudiantes estarán motivados al estudio del material escrito.

Notando que algunas variables muestran correlaciones, a partir de esto, se calcula el coeficiente de correlación de las variables encuestada que se muestra en la Tabla 2.5.

Tabla 2.5: Matriz de los coeficientes de correlación

	Est	Rdac	Mot	Cmp_d	Cat_ej	Cmp_ej	Cst_fig	Recd_d	Recd_ej
Est	1.00	0.90	0.64	0.64	0.52	0.71	0.34	0.41	0.37
Rdac	0.90	1.00	0.67	0.62	0.52	0.73	0.50	0.60	0.56
Mot	0.64	0.67	1.00	0.74	0.55	0.70	0.41	0.48	0.42
Cmp_d	0.64	0.62	0.74	1.00	0.59	0.85	0.45	0.59	0.58
Cant_ej	0.52	0.52	0.55	0.59	1.00	0.66	0.29	0.31	0.28
Cmp_ej	0.70	0.73	0.70	0.85	0.66	1.00	0.40	0.62	0.61
Cst_fig	0.34	0.50	0.41	0.45	0.29	0.40	1.00	0.70	0.63
Recd_d	0.41	0.60	0.48	0.57	0.31	0.62	0.70	1.00	0.94
Recd_ej	0.37	0.56	0.42	0.58	0.28	0.61	0.63	0.94	1.00

Dentro de las variables que tiene una correlación como se muestra en la Tabla 2.5 están:

- la estructura respecto a la redacción, con un coeficiente correlación del 0.9, esto significa que los estudiantes que asignaron buena calificación al elemento de la estructura también asignaron una buena calificación a la redacción.

- La redacción respecto a la comprensión de las resoluciones de los ejercicios, con un coeficiente de correlación del 0.73, esto es lógico ya que en cuanto mejor redactado esta las soluciones de los problemas, es más fácil la comprensión de estos.

- La estructura respecto a la comprensión de las resoluciones de los ejercicios, con un coeficiente de correlación del 0.70, esto significa que la estructura con la está diseñado el material ayuda a la comprensión de las soluciones de los problemas.

- los recordatorios de las demostraciones respecto de los recordatorios de los ejemplos, esto significa que los estudiantes mostraron una notable aceptación de los recordatorios tanto en la construcción de las demostraciones como en las soluciones de los ejercicios.

Por último, mencionar los comentarios de algunos estudiantes realizados en las preguntas 10, 12 y 13:

- “Muy bueno. Algunos ejercicios si se queda con dudas de dónde salen las respuestas pero de todo bien”.

- “Me parece excelente que suba ese tipo de material”.

- “Le falta explicar bien la soluciones de cada problema”.

- “Es un material bien redactado y con ejemplos que ayudan a comprender los contenidos”.

- “Solo que los recordatorios colocados en desarrollo de la solución de los ejemplos y en la construcción de las demostraciones deben ser más concurrentes, así hay más probabilidad de que nunca se nos olvide de donde salió tal cosa”.

- "En general es una buena presentación, pero sería muy bueno extenderla más con ejemplos y explicaciones más claras y menos confusas".
- "Involucrar más al estudiante en el tema ¿Para qué me servirá la geometría o como la puedo aplicar en mi entorno? Dando ejemplos de su uso".

2.3. Sistema de tareas

En los apéndices se ha colocado una serie documentos, de tal manera que proponen un proceso de ejecución de material didáctico escrito (material elaborado o retomado de otro autor, según sea el caso) para la modalidad de educación a distancia para el mejoramiento. En primera instancia tenemos el apéndice A, constituido por el material elaborado con las características descritas en la sección 2.1, si retoma dicho material debe realizar un análisis de contenido para comparar con el programa de la asignatura a trabajar, detectando que contenidos le falta para adaptarlos con un material complementario.

Posterior a la utilización del material de parte de los estudiantes, es necesario desarrollar un proceso de evaluación, esto mediante diferentes instrumentos de recolección de información como, por ejemplo, a través encuesta como la propuesta en el apéndice B, dirigida a los estudiantes para extraer las fortaleza y debilidades a reforzar, con el objetivo de la mejora constante. Luego aparece una forma de organizar y presentar los resultados de la encuesta, obteniendo una mejor visualización y análisis de los mismos, en nuestro caso aparece en la sección 2.2.

Conclusiones

Como se estableció, los materiales escritos desempeñan el papel de mediador pedagógico entre los contenidos y el estudiante en la modalidad de educación a distancia, rol que desempeña el docente en modalidad presencial, por ello la importancia de un material escrito base que oriente a los estudiantes al estudio de la asignatura, ya que esto le permitirá generar un aprendizaje autónomo como lo exige la modalidad a distancia, y no depender tanto de las orientaciones del personal (PUMD) que trabaja con ellos, esto se evidencia porque la mayoría de los estudiantes llegan a las tutorías programadas cada 15 días con expectativa de recibir una clase presencial y otra razón es que la mayoría de los estudiantes exigen que se les asigne un tutor de forma presencial para las tutorías.

El objetivo principal de este trabajo de investigación ha sido la construcción de un material escrito para la modalidad a distancia, el cual fue elaborado y tuvo un buen nivel de aceptación de parte de los docentes y estudiantes. Pero hay aspecto que se descubrieron en la encuesta que se pueden mejorar, en primer lugar, se encuentran los pasos de las demostraciones. En segundo lugar, tenemos soluciones de los ejercicios planteados como ejemplos, para hacerlos más comprensibles partiendo de los conocimientos previos reales de los estudiantes y no los que supone el docente. Además, aumentar la cantidad de ejercicios resueltos. Por lo tanto, al mejorar estos aspectos implicaría mejorar otros elementos con mayor calificación como es la motivación, estructura y redacción.

De los elementos nuevos incorporados, son los cuadros recordatorios los cuales tuvieron una excelente aprobación, pero es necesario utilizarlos con mayor frecuencia para mejorar la comprensión del material. Otra estrategia para reforzar la comprensión, consiste en grabar vídeos explicando aquellos problemas de mayor dificultad, hospedarlos en su canal de YouTube y escribir el enlace posterior a la solución o demostración con su respectiva instrucción. Entonces, los lineamientos generales de un material escrito para modalidad a distancia de la Facultad de Ciencias Naturales deben tener, como mínimo la siguiente estructura (el orden es opcional) e incluyendo todo lo expuesto anteriormente:

Estructura

- Portada.
- Objetivos.
- Introducción.
- Datos históricos.
- Definiciones, conceptos, lemas, corolarios y teoremas con sus respectivas demostraciones.
- Ejemplos.
- Problemas propuestos.
- Respuesta a los problemas.
- Material complementario (sugerencia).

Características

- Elaborar un documento por cada unidad, con la estructura anterior.
- Redactar con un lenguaje sencillo, fácil de entender y un vocabulario al nivel del estudiante.
- Llamativo y que motive.
- Utilizar figuras o esquemas para facilitar la comprensión de los contenidos.
- Incorporar cuadros recordatorios.
- Problemas en diferentes niveles de dificultad.

Cabe mencionar que la parte de los datos históricos cuenta con la aceptación de los estudiantes, por ejemplo, la siguiente opinión de uno de ellos: *"Las reseñas históricas, son muy interesantes y bonitas, sobre todo nos ayuda a darnos cuenta de donde nació o provino cada ley, teorema o propiedad".*

Los procesos de evaluación de los materiales escritos deben desarrollarse con mayor frecuencia dado que los estudiantes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador no están acostumbrados, porque algunos estudiantes en la encuesta contestaron careciendo de objetividad, desviándose del objetivo de esta, algunos no contestaron todas preguntas y otros ni siquiera tuvieron el interés de contestar la encuesta ya que de los 59 activos solo 38 contestaron, a pesar de que se utilizaron diferentes vías para enviar la encuesta, como mensajería de plataforma, correo institucional y WhatsApp y a disponibilidad más de 4 semanas.

Por último, como el material escrito se realizó en el área de la geometría, por ello se abren nuevas oportunidades de investigación, como la implementación de teorías para generar una mejor compresión de los contenidos como el modelo de Van Hiele o la teoría de resolución de problemas.

Recomendaciones

Los docentes que se dedican a la modalidad EaD, estamos en la obligación de elaborar sus propios materiales escritos, dado que estos permitirán actualizar los contenidos, incorporar nuevos temas y mejorar las deficiencias expuestas u observadas. Esta información se puede recolectar a través de encuesta con el propósito de evaluar el material, pero es de tener cuidado con la información que se recibe, porque los estudiantes pueden carecer de objetividad y desviarse del objetivo de la encuesta.

En matemática la ventaja de elaborar sus propios materiales escritos es que permite corregir errores de cálculo, detallar los pasos de las demostraciones de los teoremas y soluciones de los ejercicios, en donde los estudiantes tuvieron mayor dificultad para comprender. Esto se puede lograr a partir de la incorporación de: cuadros con recordatorios, respuestas de las consultas de los estudiantes (respecto al material) expuestas en foros de dudas, mensajería, tutorías, etc. Además, es necesario al principio del curso realizar un prueba diagnóstica para conocer cuáles son los conocimientos previos de los estudiantes, posteriormente realizar las modificaciones al material escrito para hacerlo más comprensible al estudiante.

Si tiene el interés de elaborar un material escrito, un punto de partida son los apuntes de las clases presenciales sean estos preparo por su persona (se refiere si usted es profesor en la presencial de esa materia o también puede elaborarlo imaginándose dicho escenario) que recibió en su proceso de formación, esto último tiene una vital importancia ya que puede en ese momento lo pensó bajo el rol de estudiante y proporcionar estrategias, recordatorios, estructura de una solución.

El procesador de documentos que recomiendo para elaborar un texto escrito matemático es LaTeX o LyX el cual permite editar las fórmulas de una forma legible y de mejor estética. En geometría en particular para diseño de las figuras el programa por excelencia es GeoGebra, por la facilidad de manejo y permite un aspecto de vistosidad a las figuras, además retomo otra ventaja que expuso uno de los estudiantes que fue encuestado y que está relacionado con LaTeX *"Pasar las figuras hechos en GeoGebra a LaTeX para mayor calidad de la siguiente forma. Luego de terminado el dibujo, en descargar como aparece la opción PGF/TikZ por esto generará un documento con un par de líneas de texto para LaTeX (agregar el paquete TikZ) con esto el dibujo en general obtendrá una calidad óptima".*

Por último, se recomienda estar siempre abierto a las críticas constructivas que vengan de los estudiantes o colegas, los cuales pueden tener ideas que permitirá el mejoramiento del material escrito.

Bibliografía

[1] Alvarez, J. (2001). *Entender la didáctica, entender el currículum.* Madrid, España: Miño y Dávila.

[2] Aquino, B. & Lorenzatti G. (2010). Calidad de los materiales didácticos para la educación a distancia. Tercer congreso virtual Iberoamericano de calidad en Educación a Distancia.

[3] Ashton, P. (1996). *"The concept of activity", in Dixon-Krauss, L. (ed.), Vigotsky in the classroom.* Mediated Literacy. Instruction and assessment. New York: Longman: 111-124.

[4] Barberá, E., & Rochera, M. J. (2008). *Los entornos virtuales de aprendizaje basados en el diseño de materiales autosuficientes y el aprendizaje autodirigido.* Psicología de la educación virtual, 179-193.

[5] Bravo, C. (2012). *La organización pedagógica del aula digital bajo Moodle.* Santa Cruz de la sierra, Bolivia: Universidad Autónoma "Gabriel René Moreno".

[6] Bell, E.T. (1985): *Historia de las Matemáticas.* Fondo de Cultura Económica, México.

[7] Brenes Espinoza, F. (2009). Principios y Fundamentos para una teoría de la Educación a Distancia. *Citado en: El concepto de educación a distancia.* `http://www.uned.ac.cr/SEP/aulavirtual/facilitadores/elaboracurso/mod1/concepto.pdf`

[8] Betancourt, A. (1993). La educación a distancia y la función tutorial. `http://www.unesco.org/education/pdf/53_21.pdf`.

[9] Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17 $n°$ 1, pp. 3148.

[10] Buckingham, D. (2008). *Más allá de la tecnología: aprendizaje infantil en la era de la cultura digital*. Buenos Aires: Manantial.

[11] Calderone, M. & Gonzales, H. (2016). Materiales didácticos. Una metodología para su producción en la era de las TIC. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, 13 (7), pp. 24-35.

[12] Capote, J. R. (2017). *Hacia un enfoque pedagógico de los entornos virtuales de aprendizaje.*

[13] Córica J. (2010). *Fundamentos de Diseño para la Educación a Distancia.* (1a ed) Editorial Virtual de Argentina.

[14] Cristina Calderón, M. M. (2014). Mediación pedagógica en área de geometría séptimo año: estudio en Costa Rica. *Revista de las Sedes Regionales*, 177-193.

[15] Díaz–Barriga, F y Hernández G. (2006). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista.* Edit. Mc Graw-Hill, México.

[16] Echevarría R. (2018). Lenguaje y Mediación para la Aprendizaje de la Matemática. *ALME* VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018.

[17] Digión, L., Sosa, M., & Velásquez, I. (2006). *Estrategias para la medición pedagógica en ambientes de educación a distancia.* Departamento de informática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Universidad Nacional de Santiago del Este. Argentina.

[18] Dixon-Krauss. (1996). *Vigotsky in the classrom. Mediatet Literacy.* New York, Longman: Publishers USA.

[19] Fernanda E. (2017). *Materiales educativos digitales para educación a distancia en la UNLP.* Universidad Nacional de la Plata. Argentina.

[20] Ferreiro, R. (2006). *Nuevas Alternativas de Aprender y Enseñar Aprendizaje Cooperativo*. México: Trillas.

[21] Frawley W. (1999). *Vygostky y la ciencia cognitiva.* Barcelona, Paídos.

[22] García Aretio, L. (2002). *La educación a distancia. De la teoría a la práctica.* Ed. Ariel Educación. Barcelona.

[23] Gagné, R. (1977). *The conditions of learning.* R& W Holt, Nueva York.

[24] Godino, J., Batanero C. y V. Font (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Impresión: ReproDigital. Recuperado `http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/`

[25] Gómez R., Barbosa J. & Mantilla G. (2002). Evaluación de Materiales Escritos de Autoaprendizaje para la Educación a Distancia. *Revista Ibeoroamericana de Educación a Distancia* Vol *N*°6.

[26] Gualdrón de Aceros, L. y Rey Gómez, R. (2002). *Construcción de materiales de autoaprendizaje.* Bucaramanga, Universidad Industrial de Santander.

[27] Marqués, P. (2000). Los medios didácticos. Recuperado el 20 de agosto de 2015 de `http://peremarques.pangea.org/medios2.htm`.

[28] Mejía, C., & Camacho, M. (2014). Mediación pedagógica en el área de la geometría en séptimo año: estudio en Costa Rica. *InterSedes: Revista de las Sedes Regionales*, $177 - 193$.

[29] Monereo Font, Carles, & Badia Garganté, Antoni (2013). Aprendizaje Estratégico y tecnología de la información y la comunicación. *Revista Critica.* Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, 14(2). Disponible en: `https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=2010/201028055002`

[30] Navarro, R. & Guerra, C. (2010). Recursos didácticos para la educación a distancia: hacia la contribución de la realidad aumentada. `http://www.redem.org/boletin/boletin151210c.html`.

[31] Gutiérrez, F. y Prieto, D. (2002). *Mediación Pedagógica. Apuntes para una educación a distancia alternativa.* Universidad de San Carlos de Guatemala, Colección Programa EDUSAC.

[32] Pedruelo, M. R. (2007). *Metodología docente y materiales didácticos para la enseñanza a distancia.* Valencia, España: DidRed.

[33] Pilonieta, G. (2000). Dos tipos de mediación. http://www.cisne.org/www.cisne.org/docs/Mediacion/DOS_TIPOS_DE_MEDIAC\ION.doc.

[34] Perkins, J. (2001). Educación a distancia: cuando lo tradicional se torna revolucionario. *Revista Bitácora.* http://tic.sepdf.gob.mx/micrositio/micrositio1/docs/materiales_estudio/u3_l3/Los_medios_didacticos.pdf

[35] Prieto, D. (1995). *Mediación Pedagógica y Nuevas Tecnologías.* Bogotá, D.C ICFES.

[36] Ricaldi, M. (2018). Lenguajes y mediaciones para el aprendizaje de la matemática. http://funes.uniandes.edu.co/13571/1/Ricaldi2018Lenguajes.pdf.

[37] Román Pérez, M. y Diez López, E. (2003) *Aprendizaje Y Curriculum. Diseños curriculares aplicados.* (6 edición, 1 reimpresión) Novedades Educativas. Buenos Aires.

[38] Romo, R. (1997). *Interacción y Estructura en el salón de clases, negociación y estrategias.* México: Universidad de Guadalajara.

[39] Rowntree, D. (1999) *Conociendo la Educación abierta y a distancia.* Bogotá: CEJA.

[40] Sordo, J. (2005). *Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la Enseñanza de la Geometría.* Memoria para optar al grado de Doctor, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

[41] Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 45, 17-28.

[42] Vygotsky, L. S. (1979) *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Critica / Grijalbo.

[43] Zimmerman, B. J. y Schunk, D. H. (Eds.) (2011). *Handbook of self-regulation of learning and performance.* New York: Taylor y Francis.

Apéndice

Apéndice A

Universidad de El Salvador
Modalidad a Distancia
Facultad de Ciencias Naturales Y Matemática
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Elementos básicos de la Geometría plana

Asignatura:

Geometría Euclídea I

Coordinador de carrera:

Coordinadora de cátedra:

Elaborado por:

Lic. Javier Antonio Ramos Martínez

Ciudad Universitaria, San Salvador 20 de febrero de 2020

Índice

Elementos básicos de la geometría plana

SUMARIO

- Referencia histórica sobre la geometría euclídea.
- Segmento.
- Ángulos.
- Ejercicios de autoevaluación.

Al finalizar el estudio de este capítulo será capaz de

- *Resolver problemas en donde se aplica las propiedades y proporciones entre longitudes de segmentos.*
- *Resolver problemas que involucren la relación entre ángulos que se forman por un par de rectas paralelas cortadas por una secante.*

1. Introducción

En la primera unidad se estudiará las definiciones y conceptos de los elementos que será utilizados en el transcurso de la asignatura, pero antes de eso se describen acontecimientos históricos solo el desarrollo de la geometría euclídea en sus inicios.

Posteriormente, de las referencias históricas, se trabajará los conceptos de puntos rectas, segmentos de rectas y las operaciones con segmentos colineales, ejemplificados en una serie de problemas resueltos, además, de abordaje de la definición de ángulos entre segmentos y los diferentes tipos de estos, que siempre con una serie de ejemplo donde se aplican. Finalizando, con una serie de problemas para practicar los contenidos y acostumbrarse a la nomenclatura que se utilizará en las siguiente unidades.

2. Referencia histórica sobre la geometría euclídea

Parece ser que Euclides nació alrededor del año 325 a.C. y falleció en Alejandría hasta el año 265 a.C. Es posterior a Platón y anterior a Pitágoras, aunque contemporáneo de Arquímedes y Eratóstenes. Euclides formuló mediante un proceso axiomático lo que hoy en día conocemos como geometría euclideana, en su obra cumbre **Los Elementos**, la cual consta de trece libros en los cuales aparecen un total de 465 proposiciones, 372 teoremas y 93 problemas.

a) Los primeros cuatro libros se denominan pitagóricos, pues son un compendio del saber matemático de la escuela filosófica-matemática. En ellos se estudia geometría plana: propiedades de los triángulos y paralelogramos, teorema de Pitágoras, circunferencia y polígono.

b) Los dos siguientes están dedicados al estudio de la proporcionalidad y semejanza de polígonos.

c) Los tres siguientes son llamados aritméticos ya que están centrados en la teoría de números.

d) El décimo libro trata de la clasificación de los irracionales y no de su cálculo, ya que eso tendría utilidad práctica.

e) Los tres últimos libros tratan de la geometría del espacio.

Los postulados de Euclídea son los siguientes

I. Por dos puntos distintos pasa una recta.

II. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.

III. Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dado.

IV. Todos los ángulos rectos son iguales.

V. Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor de dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en este mismo lado.

El quinto postulado hoy en día se conoce como: desde un punto exterior a una recta se puede trazar una, y sólo una, paralela a la misma, esta formulación se debe a Jhon Playfair (1748-1819) que la expuso en 1975.

Janos Bolyai (1802-1860) partió de la hipótesis de que el V postulado era independiente de los otros cuatro y, por tanto, si se sutituía por otro no equivalente podría construirse una nueva geometría, tan coherente como la euclídea. El suyo fue: desde un punto exterior a una recta pueden trazarse infinitas rectas paralela a alguna recta dada.

Sin embargo, su nuevo mundo quedó en agua de borrajas y su descubrimiento no fue publicado hasta 1832 como un apéndice del libro Tentamen de su padre. Por otro lado Gauss (1777-1855) calló su descubrimiento, aunque parezca mentira, por miedo. Según cuenta en una carta enviada a Bessel el 27 de enero de 1829, silenció sus investigaciones porque temía ”el griterío de los beocios”, refiriéndose a los filósofos kantianos que consideraban la geometría euclídea consustancial con la naturaleza. Bernhard Riemann (1826-1866) también concluyó que una geometría donde no existen rectas paralelas también era posible dando vida así a la geometría esférica. ¿Y tú? ¿Qué opinas al respecto? ¿Será posible que haya espacios donde no se cumpla el quinto postulado?

3. Definiciones básicas

En este apartado estudiaremos los conceptos fundamentales de la geometría euclídea, como es punto, línea, recta, etc.

Definición 3.1. Puntos

es una figura geométrica a dimensional: no tiene longitud, área, volumen, ni otro ángulo dimensional. No es un objeto físico. Describe una posición en el espacio, determinada respecto de un sistema de coordenadas preestablecido.

A los puntos se les suele nombrar con una letra mayúscula: A, B, C, etc.

El concepto de punto, como ente geométrico, surge en la antigua concepción griega de la geometría, compilada en Alejandría por Euclídea en su tratado Los Elementos, dando una definición de punto excluyente: «lo que no tiene ninguna parte». El punto, en la geometría clásica se basa en la idea de que era un concepto intuitivo, el ente geométrico «sin dimensiones», y sólo era necesario asumir la noción de punto.

Esa cuestión fue analizada por A. N. Whitehead en: una investigación sobre los principios naturales de conocimiento (An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge), y El concepto de la Naturaleza (The concept of Nature). En estos libros se expone la «relación de inclusión». En Proceso y Realidad (Process and Reality) Whitehead propone un nuevo enfoque basado en la «relación de conexión» topológica.

Definición 3.2. Líneas

Una línea es una figura geométrica que tiene longitud, pero no tiene anchura ni grosor.

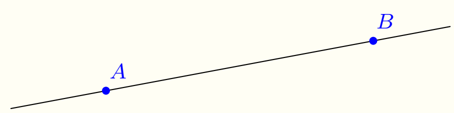


Figura 1. Una linea recta

Se puede considerar que una línea se genera con el movimiento de un punto. Con este enfoque, una línea recta se genera con el movimiento de un punto que se mueve siempre en la misma dirección (ver Figura 1), mientras que una línea curva se genera con el movimiento de un punto que cambia continuamente de dirección (ver Figura 2).

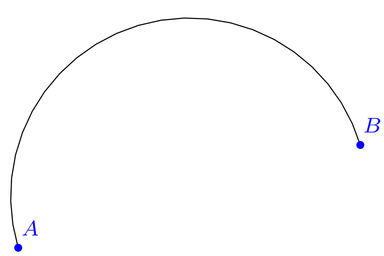


Figura 2. Una línea curva

Otro punto de vista consiste en considerar una línea como formada por infinitos puntos. En particular, una línea recta (llamada por brevedad recta) queda completamente determinada por dos cualesquiera de sus puntos y se considera ilimitada en extensión.

Notación: si A y B son dos puntos que pertenecen a una recta, dicha recta se denota como $\overleftrightarrow{AB}$

Definición 3.3. Rayos

Dada una línea recta, a una porción de dicha recta que se origina en un punto O y que se extiende ilimitadamente por el extremo que contiene a un punto A, se le llama rayo OA (ver Figura 3) y se denota por $\overrightarrow{OA}$.

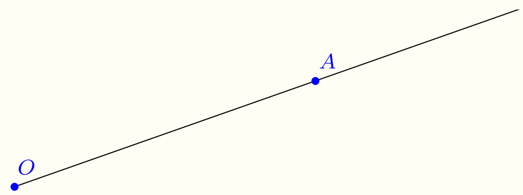


Figura 3. Rayo OA

La siguiente definición es la que más se utilizará en el trascurso asignatura, tomar en cuenta la notación para la argumentación de los ejercicios y problemas que vamos a trabajar.

Definición 3.4. Segmento de recta

Dados dos puntos distintos A y B en una recta, se le llama segmento a la figura formada por A, B y todos los puntos que se encuentran entre ellos dos (ver Figura 4).

Figura 4. Segmento $\overline{AB}$.

Se denota por $\overline{AB}$ y se lee ***segmento AB***. Los puntos A y B se llaman extremos y los otros puntos forman el interior del segmento.

Nota:

- $\overline{BA} = -\overline{AB}$.
- La medida de un segmento $\overline{AB}$ se denota $m(AB)$ o simplemente AB y es un número positivo que se compara con la longitud de un segmento unitario (una unidad).

Definición 3.5. Punto medio

Un punto C se llama punto medio de un segmento $\overline{AB}$ si C está entre A y B, y se verifica que $AC = CB$ (ver Figura 5).

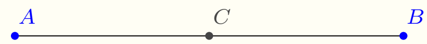


Figura 5. C punto medio del segmento AB.

Además, resulta que $AC = CB = \dfrac{AB}{2}$

En particular, todo segmento posee un punto medio el cual lo biseca, es decir, lo divide en dos segmentos de igual longitud.

3.1. Operaciones con segmentos colineales

Medir es comparar una magnitud con otra de su misma clase que sirve como patrón llamado unidad de medida. Para medir los segmentos se utilizan diversos instrumentos, siendo el más sencillo una regla graduada. En la Figura 6 se cumplen las siguientes relaciones:

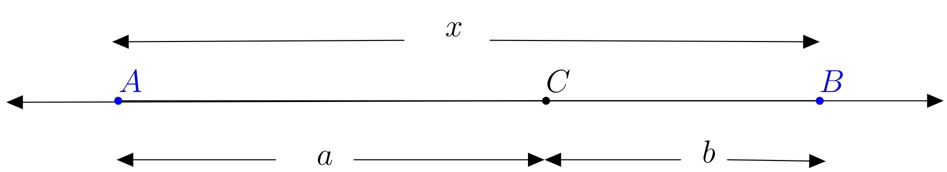


Figura 6. Operaciones de segmentos

$$
\begin{aligned}
AB = AC + CB &\Rightarrow x = a + b \qquad (1)\\
AC = AB - CB &\Rightarrow a = x - b\\
CB = AB - AC &\Rightarrow b = x - a
\end{aligned}
$$

Observación:

La relación de adición (1) se puede generalizar así: tomemos "n" puntos consecutivos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ en una misma recta, entonces se verificará la siguiente relación:

$$A_1A_n = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \cdots + A_{n-1}A_n$$

Este resultado se conoce como el Teorema de **Chasles**. Debemos notar que los segmentos considerados son consecutivos.

3.2. Ejemplos

✓Ejemplo 3.1
Sobre una recta están ubicados los puntos consecutivos A, B, C y D.

1. Si $AD = 24\,cm$, $AC = 15\,cm$ y $BD = 17\,cm$. ¿Cuánto mide $\overline{BC}$ en cm?
2. Si $AC + BD = 16\,m$, y $BC = 4\,m$, ¿cuál es el valor de $\overline{AD}$ en m?

Solución. Según los datos del problema (ver Figura 7):

Figura 7. Ejemplo

1. Se tiene:

$$\begin{aligned} BC &= BD - CD \\ &= BD - (AD - AC) \\ &= 17 - (24 - 15)\,cm \\ &= (17 - 9)\,cm \\ &= 8\,cm \end{aligned}$$

La longitud del segmento BC es 8 centímetros.

2. Sabemos:

$$\begin{aligned} AD &= AC + CD \\ &= AC + (BD - BC) \\ &= AC + BD - BC \\ &= \overbrace{AC + BD} - 4\,m \\ &= 16 - 4\,m \\ &= 12\,m \end{aligned}$$

La longitud del segmento AD es 8 metros. ■

✓Ejemplo 3.2

M, A, O y B son puntos consecutivos sobre una recta, siendo O el punto medio de $\overline{AB}$. Si $MA = 2$ y $AB = 6$, calcular $(MO)^2$.

Solución. A partir de los datos del problemas tenemos la siguiente figura:

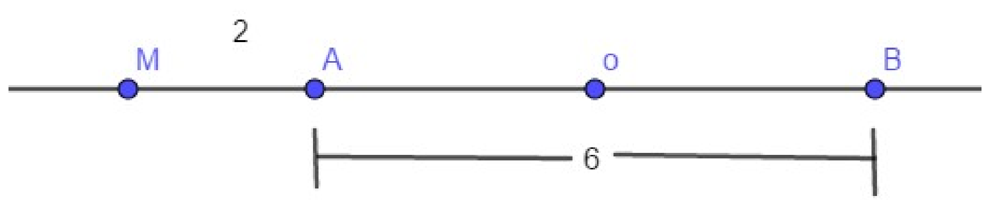


Figura 8. Ejemplo

Ya que O es el punto medio de $\overline{AB}$, se tiene $AO = \dfrac{AB}{2}$, por lo que:

$$\begin{aligned} (MO)^2 &= (MA + AO)^2 \\ &= \left(2 + \frac{AB}{2}\right)^2 \\ &= \left(2 + \frac{6}{2}\right)^2 \\ &= (2+3)^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 3.3

En una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D de modo que $AB = 2BC$ y $CD = 3BC$, si $BC = 1$, calcular AD.

Solución

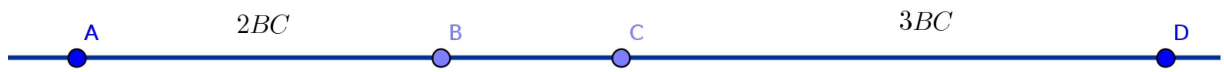


Figura 9. Ejemplo 2.3.

$$\begin{aligned} AD &= AB + BC + CD \\ &= 2BC + BC + 3BC \\ &= 6BC \\ &= 6(1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 3.4

En una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D y E si $AB + CE = 16$, $BE - CD = 14$ y $AE - DE = 12$. Calcular AE.

Solución

Según las propiedades de segmentos se tiene que BE se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} BE &= BC + CD + DE \\ \overbrace{BE - CD} &= BC + DE \\ 14 &= BC + DE && \text{despejando BE} \\ 14 - DE &= BC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AE - DE &= 12 && \text{despejando DE} \\ DE &= AE - 12 \end{aligned}$$

Luego reescribiendo AE

$$\begin{aligned} AE &= AB + BC + CE \\ &= (\overbrace{AB + CE}) + BC \\ &= 16 + 14 - DE \\ &= 16 + 14 - (AE - 12) \\ AE &= 30 - AE + 12 \\ 2AE &= 42 \\ AE &= 21 \end{aligned}$$

■

Definición 3.6.

- **Razón:** se llama razón, al cociente de dos cantidades, expresadas en la misma magnitud, por ejemplo $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$.
- **Proporción:** se llama proporción a la igualdad de dos razones. Por ejemplo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a los términos a y d se les llama extremos y los términos b y c se les llama medios, al término d se le llama cuarta proporcional entre a, b y c en este orden.

3.3. Propiedades sobre proporciones.

Cuando $a, b, c, \cdots$, denotan longitudes de segmentos, es conveniente tener presente las siguientes propiedades

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $ad = bc$.
2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.
4. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, si $a - b \neq 0$ o $c - d \neq 0$.
5. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots \frac{a_n}{b_n}$ $(b_1 \cdot b_2 \cdots b_n \neq 0)$ entonces
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots \frac{a_n}{b_n}$$

Siempre que $b_1 + b_2 + \cdots b_n \neq 0$.

Definición 3.7. División de segmento

Un punto $P \in \overline{AB}$ divide al segmento $\overline{AB}$ en una razón r si $\dfrac{PA}{PB} = r$.

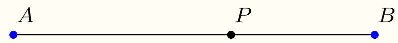


Figura 10. División de segmentos.

Observemos que en la definición **3.7**:

- Si $r = 1$ entonces P es el punto medio de $\overline{AB}$.
- el punto P está entre los puntos A y B decimos que P divide interiormente al segmento $\overline{AB}$ en la razón r. Si P no está entre los puntos A y B, decimos que P divide exteriormente a segmento $\overline{AB}$.

Definición 3.8. Razón de un segmento

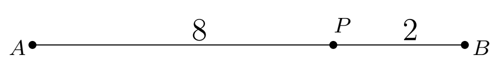
Sean A y B dos puntos fijos y sea P cualquier otro punto sobre $\overline{AB}$, la razón en la que P divide a $\overline{AB}$ es

$$r = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$$

.

✓Ejemplo 3.5

Considere el segmento $\overline{AB}$ como se muestra a continuación:



Entonces P divide $\overline{AB}$ en la razón $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Notemos que si $P \in \overline{AB}$ la razón es negativa, y es positiva si P está fuera del segmento $\overline{AB}$.

Teorema 3.1.

Si A y B son dos puntos cualesquiera y $k \neq 1$, entonces existe uno y solamente un punto sobre la recta para el cual $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ es igual a k.

Demostración

Para probar unicidad debemos suponer que existen dos puntos que cumplen. Sea P y Q, tal que $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$ y $\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = k$. Entonces se tiene que:

$$\overline{PA} = k\overline{PB} \Rightarrow \overline{PA} = k\overline{PB}$$

$$\overline{QA} = k\overline{QB} \Rightarrow \overline{AQ} = -k\overline{QB}$$

$$\begin{aligned}
\overline{PA} + \overline{AQ} &= k\overline{PB} + \left(-k\overline{QB}\right) \\
\overline{PA} + \overline{AQ} &= k\overline{PB} - k\overline{QB} \\
\overline{PQ} &= k\left(\overline{PB} - \overline{QB}\right) \\
\overline{PQ} &= k\left(\overline{PB} + \overline{BQ}\right) \\
\overline{PQ} &= k\overline{PQ}
\end{aligned}$$

Recordatorio

Si se tiene tres puntos A, B y C consecutivos entonces:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

Implica que $k = 1$ por lo que es una contradicción dado que k tiene que ser diferente de 1. ■

Definición 3.9.

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y sean $X \in \overline{AB}$ y $Y \in \overline{CD}$, decimos que X e Y dividen a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en segmentos proporcionales si

$$\frac{XA}{XB} = \frac{YC}{YD}$$

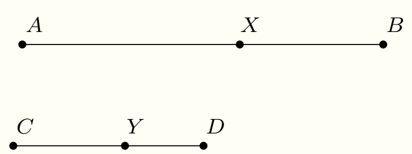
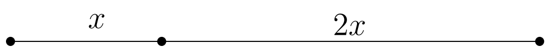


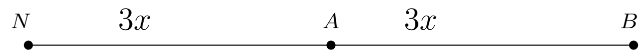
Figura 11. Dos segmentos proporcionales.

Dado un segmento $\overline{AB}$ y una razón $k \neq 1$, conseguimos encontrar dos puntos que dividen $\overline{AB}$ en esta razón: una interior y otra exterior. Cuando $\overline{AB}$ está dividido por dos puntos P y N, en la misma razón, decimos que el segmento $\overline{AB}$ está dividido armónicamente y los puntos P y N se llaman *conjugados armónicos con respecto a A y B.*

✓Ejemplo 3.6

Consideremos las divisiones siguientes:





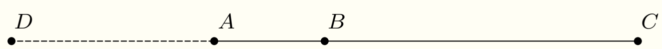
$$\frac{PA}{PB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{NA}{NB} = \frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}$$

Tenemos que los puntos P y N son los conjugados armónicos del segmento AB.

Definición 3.10. División armónica

Se dice que dos puntos B y D dividen armónicamente a un segmento dado $\overline{AC}$ cuando se verifica la relación:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

Donde B es un punto interior de $\overline{AC}$ y D es un punto exterior a $\overline{AC}$.

Además se cumple las siguientes relaciones

- $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AD} = \dfrac{2}{AC}$
- Si O es punto medio de $\overline{AC}$

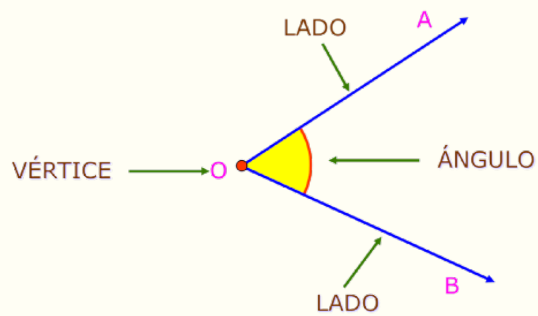
$$(OC)^2 = OD \cdot OB$$

Esta definición de división armónica es equivalente a lo siguiente: *se dice que dos puntos dividen un segmento de línea armónicamente si lo dividen interna y externamente en la misma razón.*

4. Ángulos

Definición 4.1. Ángulos

Definimos como ángulo a la figura geométrica formada por dos rayos (o semirrectas) distintas que tienen el mismo origen. Ese origen se llama *vértice del ángulo*. Al ángulo de vértice O y rayos OA y OB se le denota $\angle CAB = \alpha$.



Dos ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son *adyacentes* si y sólo si tienen un lado común $\overline{OB}$ y los lados no comunes OA y OC están en semiplanos[1] distintos, determinados por el lado común.

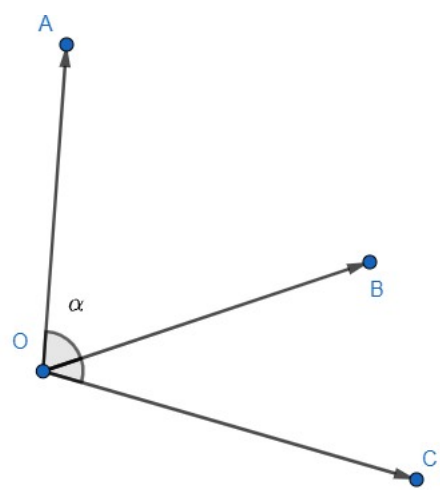


Figura 12. Ángulos adyacentes.

Dos ángulos son

- *Congruentes o iguales*: si tienen igual medida.
- *Suplementarios*: si su suma es 180°.

[1]Si tenemos un plano y una recta en ese plano, la recta divide al plano en dos partes llamadas semiplanos.

- *Complementarios*: si su suma es 90°.

Definición 4.2. Bisectriz

La *bisectriz* de un ángulo es la semirrecta que lo "divide" en dos ángulos adyacentes iguales.

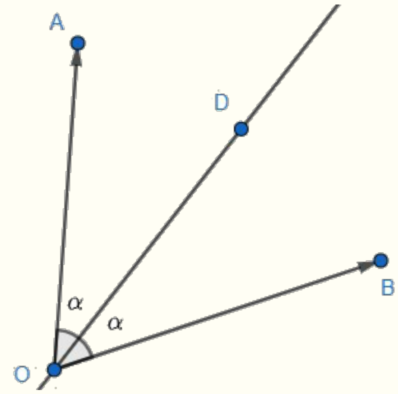


Figura 13.

Por otra parte, dos rectas en el plano pueden ser *secantes* o *paralelas*

Definición 4.3.

- Si la recta AB es paralela a la recta CD, si no se corta, se denota $AB \parallel CD$.
- Si la recta AB es perpendicular a la recta CD, si se forman un ángulo de $90°$, se denota $AB \perp CD$.

Además, si las rectas son secantes, el punto de corte es único, y definen cuatro ángulos, que se agrupan por parejas en ángulos *opuestos por el vértice* (las parejas de ángulos tales que uno está formado por la prolongación de los lados del otro).

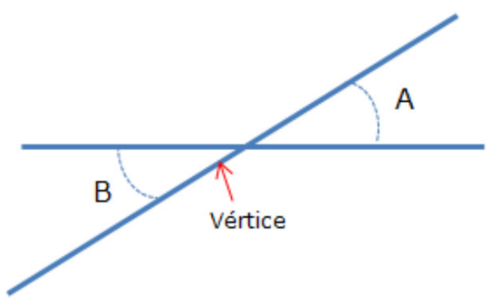
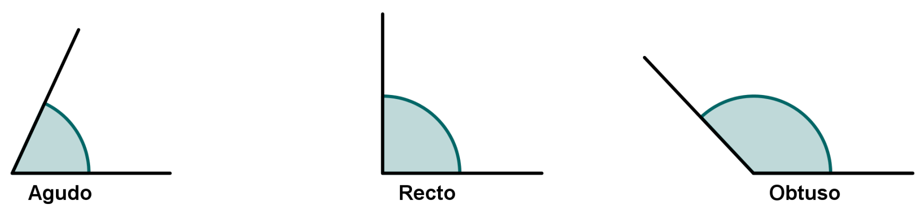


Figura 14. Opuestos por el vértice.

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales (justifique), por lo que dos rectas secantes forman cuatro ángulos que definen dos parejas de ángulos iguales, y si tomamos un miembro de cada pareja, se tienen dos ángulos suplementarios y los ángulos así generados son llamados:

- *ángulos rectos* Es aquel cuya medida es de 90°.
- *ángulo agudo* es aquel cuya medida es **menor** a la de un ángulo recto.
- *ángulo obtuso* es aquel cuya medida es **mayor** que un ángulo recto; en particular, un ángulo obtuso será llamado *ángulo llano* si su medida es el **doble** que la de un ángulo recto.

Tipos de ángulos según su medida respecto a la del ángulo recto



4.1. Ángulos entre rectas paralelas

Al intersectar un par de rectas paralelas por una recta llamada *transversal* o *secante*, se forman los siguientes tipos de ángulo:

- *Ángulos correspondientes*: son dos ángulos no adyacentes situados en el mismo lado de la secante, uno en el interior y otro en el exterior de las paralelas.
- *Ángulos alternos internos*: son dos ángulos no adyacentes situados en el interior de las paralelas, y en distintos lado de la secante.
- *Ángulos alternos externos*: son dos ángulos no adyacentes situados en el exterior de las paralelas, y en distintos lado de la secante.
- *Ángulos conjugados*: Son dos ángulos internos o externos, no adyacentes y situados del mismo lado de la secante.

Las propiedades fundamentales de los ángulos entre paralelas (ver Figura 15) son:

1. Los ángulos correspondientes son iguales entre sí.
2. Los ángulos alternos internos son iguales entre sí.
3. Los ángulos alternos externos son iguales entre sí.
4. Los ángulos conjugados son suplementarios.

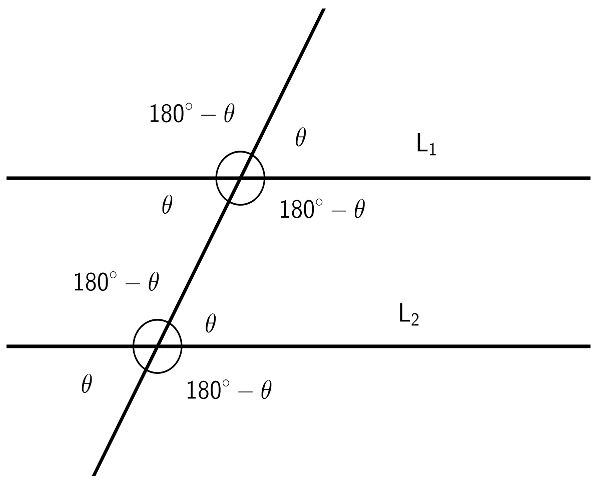
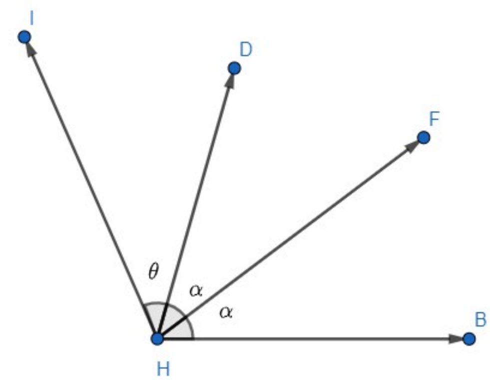


Figura 15. Esquema de ángulo entre paralela.

4.2. Ejemplos

✓Ejemplo 4.1

En el gráfico, hallar la $m\angle IHF$, si: $m\angle IHD + m\angle IHB = 56°$



Solución. Se tine que

$$\begin{aligned} m\angle IHD + m\angle IHB &= 56° \\ \theta + (\theta + \alpha + \alpha) &= 56° \\ 2\theta + 2\alpha &= 56° \\ 2(\theta + \alpha) &= 56° \\ \theta + \alpha &= 28° \\ m\angle IHF &= 28° \end{aligned}$$

✓Ejemplo 4.2

Hallar el complemento de la diferencia de las medidas de dos ángulos tales que la medida del primero excede en 60 grados al complemento de la medida del segundo y la medida del segundo ángulo sea igual a la mitad del suplemento de la media del primer ángulo.

Solución. Sea α, β dos ángulos, a partir de la lectura de enunciado del problema se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha = 60° + (90° - \beta) \tag{2}$$

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2} \tag{3}$$

Sustituyendo la ecuación (3) sobre la ecuación (2) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 60^\circ + \left(90^\circ - \frac{(180^\circ - \alpha)}{2}\right)\\
\alpha &= 60^\circ + \left(\frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2}\right)\\
\alpha &= 60^\circ + \left(\frac{\alpha}{2}\right)\\
\alpha - \left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 60^\circ\\
\frac{\alpha}{2} &= 60^\circ\\
\alpha &= 120^\circ
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de α obtenemos $\beta = 30^\circ$, pero lo que andamos buscando es el complemento de la diferencia de los ángulos que es igual: $90^\circ - (120^\circ - 30^\circ) = 0^\circ$

■

✓Ejemplo 4.3

Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ calcular la medida del ángulo x°.

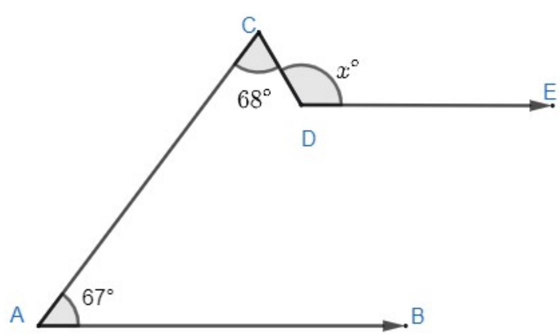


Figura 16.

- La estrategia para resolución de estos problemas, es prolongar y trazar rectas paralelas en puntos donde podamos obtener información a partir de los datos proporcionados en el problema.
- Posteriormente se debe utilizar las relaciones que existe de ángulos entre rectas paralelas, finalizando con la propiedad de los ángulos complementarios y suplementarios.

Solución:

1. Prolongamos los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ y trazamos el segmento $\overline{CG}$ paralelo al segmento $\overline{AB}$. (ver Figura 17).

2. Obtenemos que $\angle FCH = 68°$ por ángulos opuestos por el vértice y que $\angle HCG = 67°$ por ser ángulos correspondientes. Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} x° &= \angle FCH + \angle HCG, \text{ por ángulos correspondiente} \\ &= 135° \end{aligned}$$

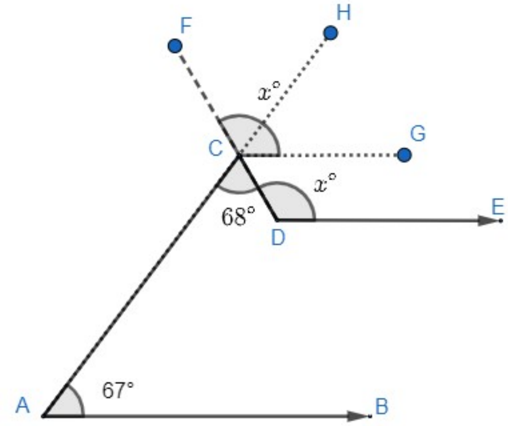


Figura 17.

✓Ejemplo 4.4
En la Figura 18, $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \parallel L_4$, calcular α.

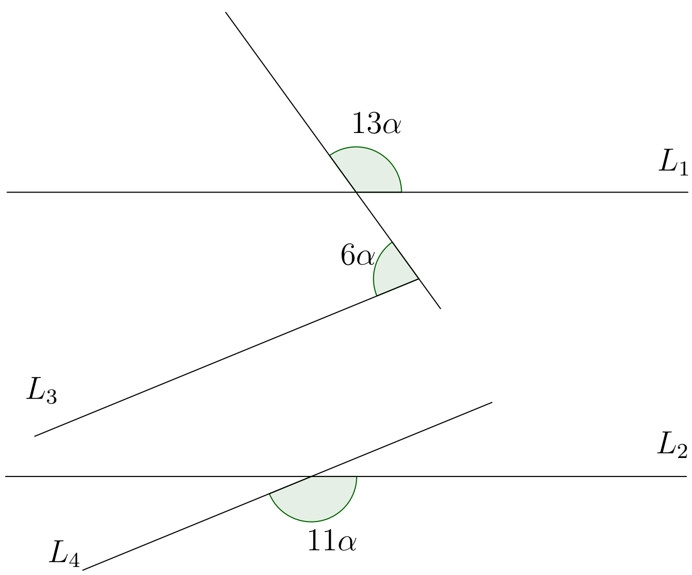


Figura 18.

Solución:

- Prologaremos primero las rectas L_4 y L_5 y trazar la recta L_6 paralela a L_2 en el punto donde cortan las rectas L_4 y L_5 como se muestra en la Figura 19.

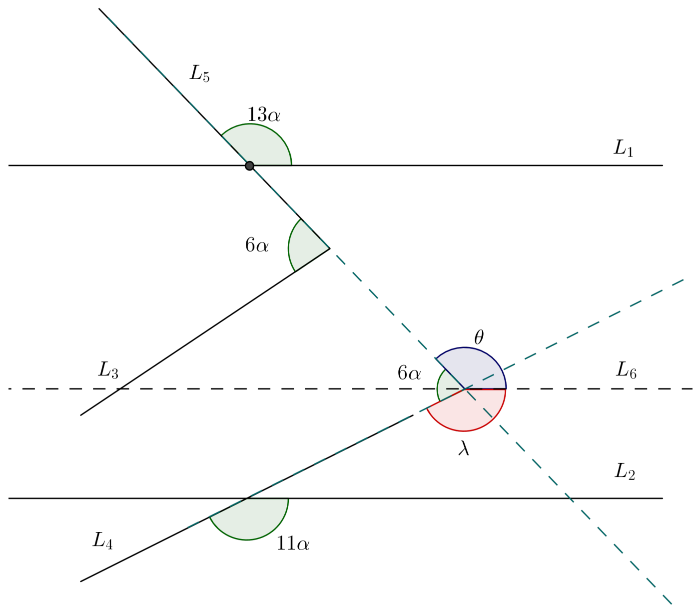


Figura 19. Modificaciones de la figura del ejemplo

- Por ángulos entre rectas paralelas tenemos que el ángulo que forman las rectas L_4 y L_5 es igual a 6α (Observar la Figura 19).
- $\theta = 13\alpha$, porque $L_1 \,||\, L_6$ y son ángulos correspondientes.
- $\lambda = 11\alpha$, porque $L_2 \,||\, L_6$ y y son ángulos correspondientes.

$$\begin{aligned} \theta + \beta + 6\alpha &= 180° \\ 11\alpha + 13\alpha + 6\alpha &= 360° \\ 30\alpha &= 360° \\ \alpha &= 12° \end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 4.5

Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD; tal que:

$$\angle POQ + \angle ROS = 140°$$

siendo los rayos $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{OS}$ las bisectrices de los ángulos AOB, COD, AOC y BOD respectivamente. Hallar la : $\angle AOD$.

Solución

Sea $\theta = \angle AOP$, $\beta = \angle AOR$, $\alpha = \angle COQ$, $\gamma = \angle SOD$. Se reescribe el ángulo POQ:

$$\begin{aligned}\angle POQ &= \angle AOR - \angle AOP + \angle ROC + \angle COQ \\ &= \beta - \theta + \beta + \alpha\end{aligned}$$

Luego que el ángulo ROS se puede reescribir de dos formas

$$\begin{aligned}\angle ROS &= \angle AOS - \angle AOR \\ &= \gamma + 2\theta - \beta \qquad (4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle ROS &= \angle ROD - \angle SOD \\ &= \beta + 2\alpha - \gamma \qquad (5)\end{aligned}$$

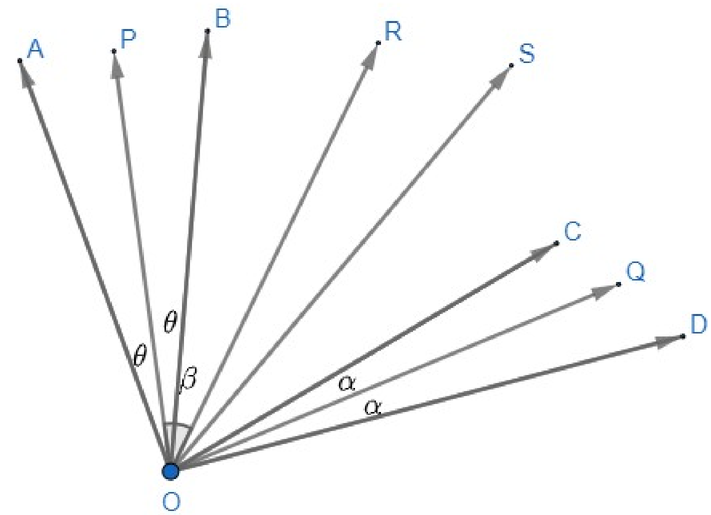


Figura 20.

Sumando (4) y (5) tenemos que $2\angle ROS = 2\theta + 2\alpha$ implica que $\angle ROS = \theta + \alpha$

$$\begin{aligned}\angle POQ + \angle ROS &= 140^\circ \\ \beta - \theta + \beta + \alpha + \theta + \alpha &= 140^\circ \\ 2\beta + 2\alpha &= 140^\circ \\ \angle AOC + \angle COD &= 140^\circ\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 4.6

Calcular el $\angle OPQ$, si OP es bisectriz del ángulo O, $L_1 \parallel L_2$ y $PQ \perp L_1$. Ver Figura 21.

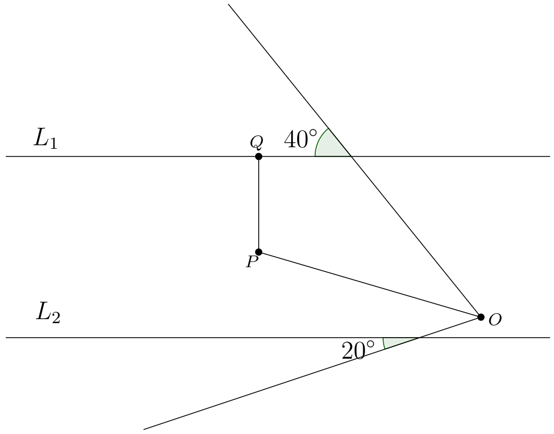
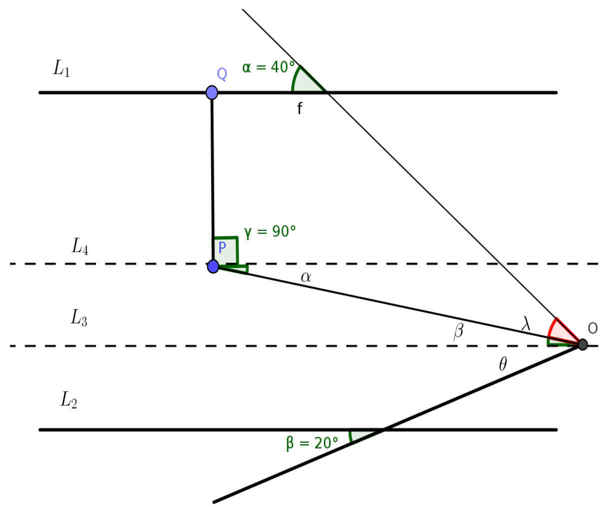


Figura 21.

Solución.



Dado que $L_2 \,||\, L3$ entonces $\theta = 20°$ por ser ángulos alternos internos, además $L_1 \,||\, L3$ entonces $\lambda = 40°$ porque son ángulos correspondientes. Luego el ángulo con vértice en O es igual a $\theta + \lambda = 60°$. Posteriormente Trazamos la recta L_4 paralela L_1 en el punto P donde α es iguales a β por ser ángulos alternos internos, pero como $\overline{OP}$ es bisectriz del ángulo O, se obtiene que $\theta + \beta = \dfrac{60°}{2} = 30°$, lo que implica que $\beta = 10°$

Por lo tanto, $\angle OPQ = 90° + \alpha = 90° + 10° = 100°$.

✓Ejemplo 4.7

Determine el valor x si $l_1 \parallel l_2$ en la Figura 22.

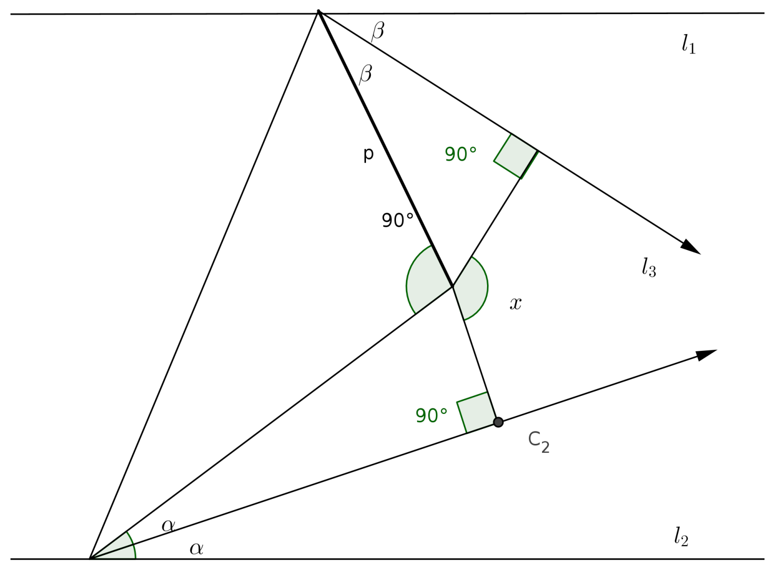


Figura 22.

Solución

1. trazar la recta l_3 paralela a l_2 como se muestra en la siguiente Figura 23

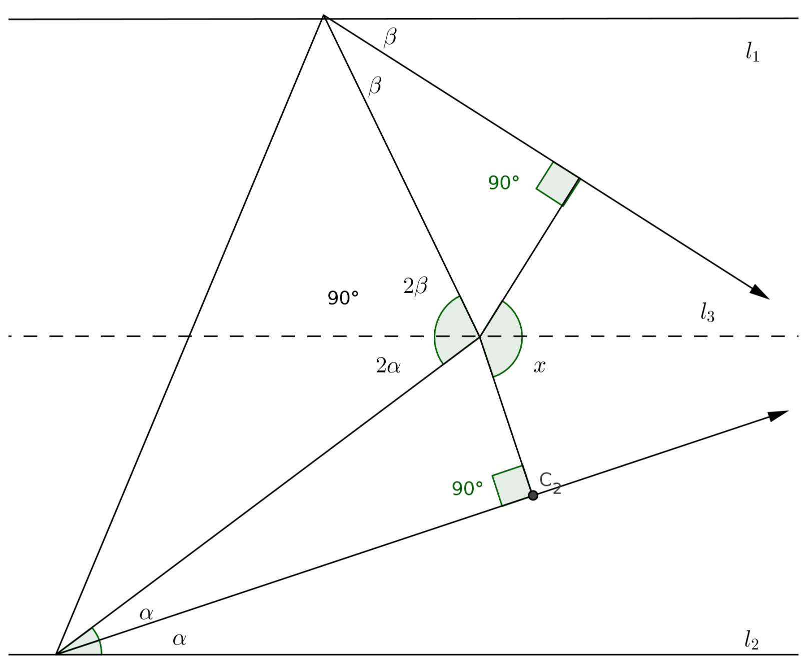


Figura 23.

2. Debido a que $l_3 \,||\, l_1 \,||\, l_2$ y por ángulos alternos internos se tiene que $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$ entonces

$\alpha + \beta = 45°$

3. Prologar las bisectrices C_2 y S_2 y el ángulo que forma estas al cortarse se encuentra de la siguiente manera.

   a) Trazar una recta a l_2 en el punto de intersección de las dos bisectrices y por ángulos entre paralelas se tiene que es igual a $\alpha + \beta$

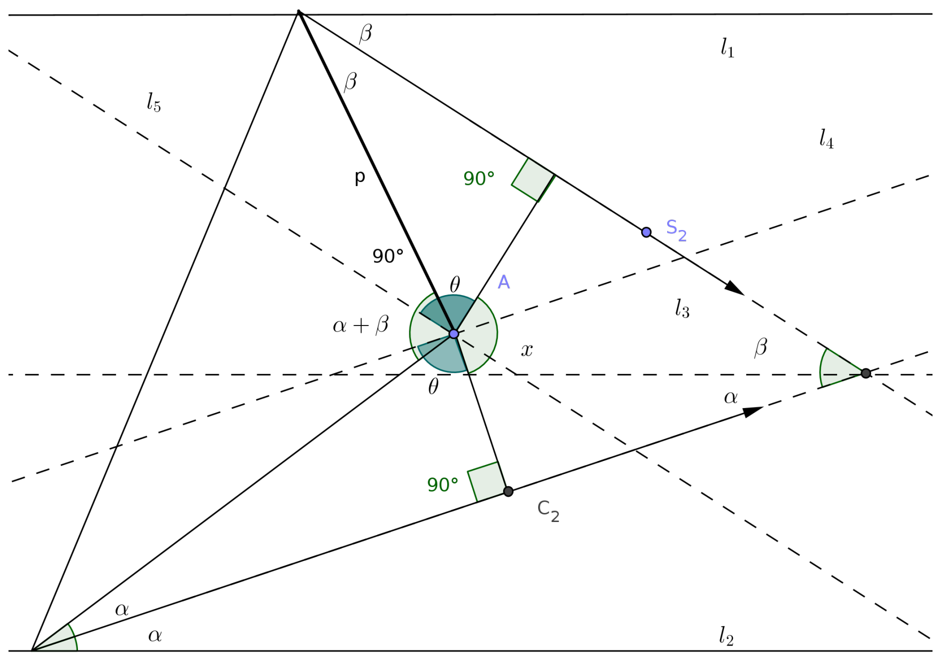


Figura 24.

4. Trazar la recta l_4 paralela a C_2 en el punto A

5. Trazar la recta l_5 paralela a S_2 en el punto A

6. Por ángulos entre paralelas tenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + x + \theta + \theta &= 360° \\
45° + x &= 360° - 180° \\
x &= 135°
\end{aligned}$$

■

5. Problemas

Resolver los siguientes problemas justificando cada paso de la solución.

5.1. Segmentos

1. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales consecutivos. Determine la magnitud de $\overline{AD}$, si $AC = 8cm$, $BD = 12cm$ y $BC = 5cm$.

2. Sobre una recta se consideran los puntos consecutivos A, B y C. Si $AB = 8\,cm$ y $BC = 12\,cm$, hallar AC.

3. Dados los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D, tales que $AB = 7$, $BC = 8$ y $AD = 24$, calcular CD.

4. En una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B y C tales que $AC = 25$ y $BC = 15$. Calcular AB.

5. A, B, C y D son puntos ubicados en una línea recta de modo que $AB = BC$, $CD = 20$ y $AB = 5$. Hallar AD.

6. Dado el segmento $\overline{AB}$ y su punto medio O, si P es un punto interior al segmento $\overline{OB}$, $OP = 1$ y $PB = 5$, calcular AB.

7. En una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D de modo que $AB = 2BC$ y $CD = 3BC$. Si $BC = 1$, calcular AD.

8. Sobre una líena recta se consideran los puntos colineales y consecutivos $A, B, C,$ y D; siendo C punto medio de $\overline{BD}$, $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{2}{3}$ y $AD = 12$. Hallar CD.

9. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D, E tal que F sea punto medio de AB y H punto medio de DE. Si: $AB = BC$, $CD = DE$ y $AB + DE = 40$. Hallar FH.

10. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, $C\,y\,D$; siendo "M" punto medio de BD ;$AB \cdot CD = AD \cdot BC$ y $9(AD - BM) = 2AD \cdot AB$. Hallar AC.

11. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos $A, B, C\, y\, D$ tal que se cumple $AB \cdot BD = AC \cdot CD$ y $AB = 8$ Hallar CD.

12. Dados los puntos colineales y consecutivos $A, B, C\, y\, D$; se sabe que $AB + CD = 20$; hallar la medida del segmento cuyos extremos son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

13. Sobre una recta XX' se ubican en forma consecutiva los puntos: $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n$ de modo que: $A_1An = 1800$ y $A_1A_3 + A_2A_4 + A_3A_5 + \cdots + A_{n-2}A_n = 3000$. Calcular la medida del segmento que tiene por extremos los puntos medios de los segmentos A_1A_{n-1} , y A_2A_n.

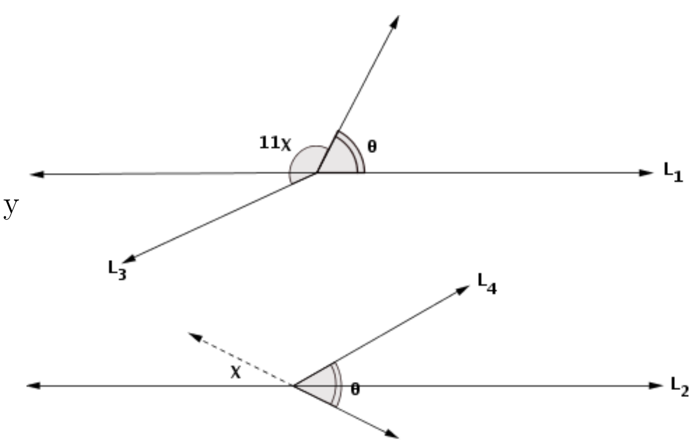
14. En una recta se consideran los puntos consecutivos $A, B, P\, y\, C$; de modo que P es el punto medio $\overline{BC}$. Si $(AB)^2 + (CD)^2 = 40$; hallar $(AP)^2 + (PB)^2$.

5.2. Ángulos

15. Tres ángulos adyacentes forman un semiplano y tienen sus medidas proporcionales a los números 5, 7 y 8. Hallar la medida del menor ángulo.

16. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos suplementarios son perpendiculares.

17. En la figura adjunta, $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \parallel L_4$. Calcular x.



18. Con ayuda de la Figura 25, demuestre que: Si $L_1 \parallel L_2$ entonces $\gamma = \alpha + \beta$.

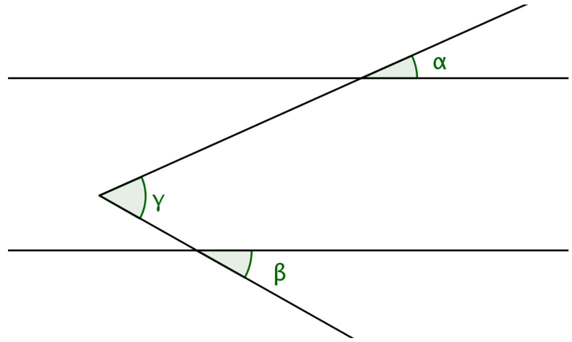


Figura 25.

19. En la Figura 26, $AB \parallel FG$. Hallar el ángulo x si el $\angle AMF = 90°$ y el $\angle MAB = 110°$.

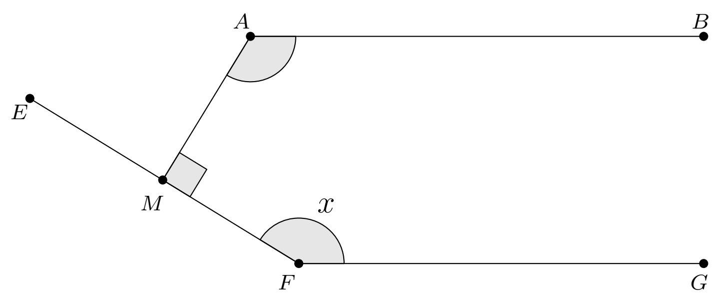
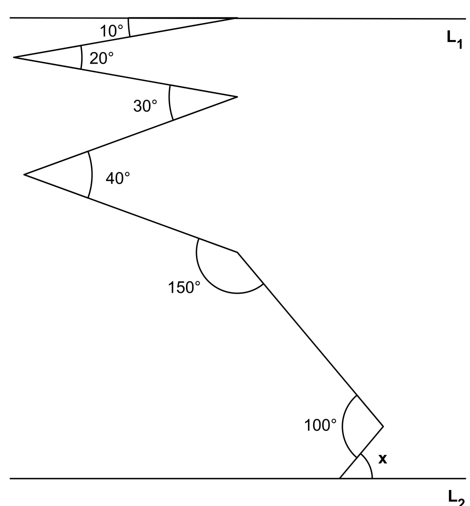


Figura 26.

20. Calcular la medida x del gráfico anexo, si las rectas L_1 y L_2 son paralelas.



21. Sea $\angle AOB = 24°$, en la región exterior a dicho ángulo se traza el rayo OC. Hallar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOC y BOC.

22. Del gráfico 27, calcular y, cuando x tome su máximo valor entero.

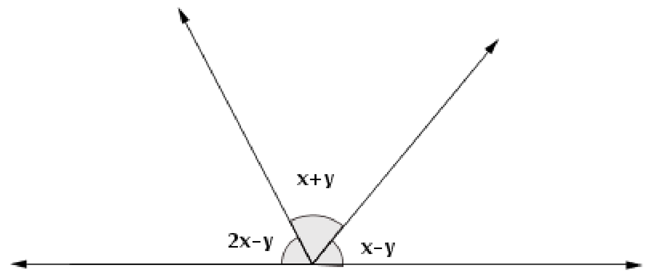


Figura 27.

6. Respuesta de los problemas

El siguiente apartado son las respuesta de los problemas.

Problema 1. $AD = 15$.

Problema 2. $AC = 20$.

Problema 3. $CD = 9$.

Problema 4. $AB = 10$.

Problema 5. $AD = 30$.

Problema 6. $AB = 12$.

Problema 7. $AD = 6$.

Problema 8. $CD = \dfrac{24}{5}$.

Problema 9. $FH = 60$.

Problema 10. $AC = 4.5$.

Problema 11. $CD = 8$.

Problema 12. 10.

Problema 13. 300.

Problema 14. 20.

Problema 15. 36°.

Problema 17. $x = 15°$.

Problema 19. $x = 160°$.

Problema 20. $\angle OPQ = 110°$.

Problema 21. $x = 50°$.

Problema 22. $\dfrac{\angle AOC}{2}$

Problema 23. $x = 60$.

7. Sugerencia

Si desea obtener mayor información sobre los segmentos y ángulos revisar los siguientes enlaces:

- http://profe-alexz.blogspot.com/2011/04/segementos-de-recta-ejercicios.html
- http://geogebra.es/cvg_primaria/06/html/paralelas.html
- https://www.geogebra.org/m/m4bwmhnp
- https://www.geogebra.org/m/qEWfq6s7.

Universidad de El Salvador
Modalidad a Distancia
Facultad de Ciencias Naturales Y Matemática
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Triángulos

Asignatura:
Geometría Euclídea I

Coordinador de carrera:

Coordinadora de cátedra:

Elaborado por:
Lic. Javier Antonio Ramos Martínez

Ciudad Universitaria, San Salvador 20 de marzo de 2020

Índice

Triángulos

SUMARIO

- Triángulos.
- Congruencia de triángulos.
- Ejercicios resueltos.
- Problemas.

Al finalizar el estudio de este capítulo será capaz de

- *Resolver problemas donde se aplica las propiedades de los triángulos.*
- *Resolver problemas donde se aplica los criterios de congruencia entre triángulos.*

1. Introducción

En este unidad 2, se inicia una referencia histórica sobre el Teorema de Pitágoras, que es uno de los teoremas más famosos e importante de la geometría plana. A continuación la definición, las propiedades de los triángulos, además, la clasificación de los triángulos profundizando en las propiedades que cada tipo de triángulo tiene, aplicando dicha propiedades en la resolución de problemas.

Otro aspecto que vamos a estudiar son los criterios que nos permiten demostrar si dos triángulos son congruentes. Luego se enuncia el teorema de la base media, desarrollando su demostración aplicando los criterios de congruencia de triángulos.

Posteriormente, esta la sección de la resolución de problemas expuestos como ejemplos, aplicando los contenidos en la unidad 1 y los descritos en el presente unidad, finalizando con una serie de problemas propuestos estos con el fin de afianzar la teoría vista en esta unidad y adquirir la habilidad de aplicarla en la resolución de problemas.

2. Referencia histórica

El Teorema de Pitágoras es la relación matemática que ocupa el primer lugar en el recuerdo de los tiempos escolares. Es, sin duda alguna, la más importante, conocida, útil y popular en casi todas las civilizaciones; la que más nombres, atención, curiosidad y pruebas ha recibido a lo largo de los siglos. Es un teorema que ha causado una gran admiración a todo tipo de personas matemáticos y no matemáticos, pero también una gran extrañeza y perplejidad a otras Leonardo, Hobbes, Schopenhauer, Einstein, etc. Porque, a diferencia de otros teoremas, aparentemente no existe ninguna razón intuitiva para que los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo la hipotenusa y los catetos deban tener un vínculo tan estrecho entre sí.

La verosimilitud del Teorema de Pitágoras no depende de un dibujo bien ilustrado sino que obedece por completo a un ejercicio intelectual puro alejado de lo sensorial, la deducción lógica. Por eso, para muchos historiadores de la ciencia, el Teorema de Pitágoras tiene un valor simbólico iniciático como elemento cultural responsable de la aparición de la Geometría racional en la Escuela Pitagórica y por tanto forma parte ineludible de la semilla básica de la propia naturaleza de la Matemática desde su origen como ciencia especulativa y deductiva en los albores de la civilización helénica.

La emergencia de este teorema en el horizonte histórico cultural, pero también en el horizonte escolar, señala el primer salto intelectual entre los confines de la especulación empírica e inductiva y los dominios del razonamiento deductivo. En efecto, el Teorema de Pitágoras pudo estar en el origen de la demostración que caracteriza a la Matemática con respecto a las demás ciencias– ya que la prueba pitagórica del Teorema de Pitágoras tal vez haya sido la primera demostración verdaderamente matemática de la Historia. Y también el Teorema de Pitágoras está situado en el umbral que inicia la práctica deductiva en el desarrollo de la Matemática escolar elemental.

El Teorema de Pitágoras aparece por doquier en la Matemática. Es la base de multitud de teoremas geométricos, de los estudios sobre polígonos y poliedros, de la Geometría Analítica y de la Trigonometría, por ejemplo, la fórmula $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1$, el teorema del coseno es una generalización del mismo. La relación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ es la ecuación de la circunferencia y la raíz histórica del Análisis indeterminado de Diofanto y Fermat.

El Teorema de Pitágoras también pudo ser el germen de la dramática aparición pitagórica de la inconmensurabilidad de gran trascendencia en la estructuración y sistematización platónico-euclídea de la Geometría griega. Continuar la lectura de esta historia en el siguiente enlace https://www.upct.es/seeu/_as/docs_umay/2014/Pitagoras.pdf

3. Triángulos

Definición 3.1. Triángulos

Si A, B y C son tres puntos cualesquiera no colineales (ver Figura 1), entonces la unión de los segmentos AB, BC y AC se llama triángulo ABC y se denota por $\triangle ABC$.

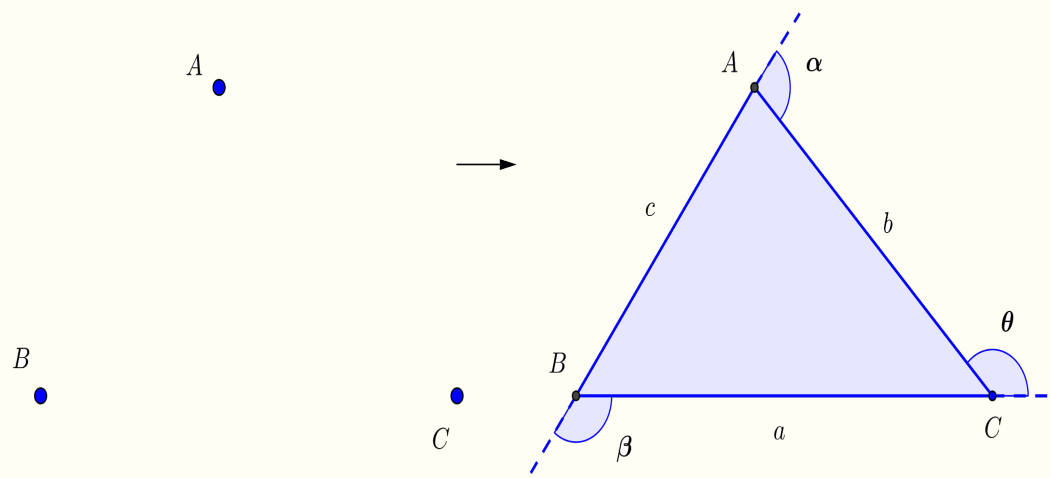


Figura 1. Definición de triángulo.

- Los puntos A, B y C se llaman *vértices* y los segmentos AB, BC y AC se llaman *lados*. Simbólicamente: $\triangle ABC = AB \cup BC \cup AC$.

- Todo triángulo ABC determina tres *ángulos internos o interiores*: $\angle ABC$, $\angle ACB$ y $\angle BAC$, y se llama *ángulo externo* o *exterior*, al ángulo determinado por un lado y la prolongación del lado adyacente, en la Figura 1, α, β y θ son ángulos exteriores.

- Para el $\triangle ABC$, se llama perímetro denotado por p a la suma de: $AB + BC + CA = p$.

Nota:

Para abreviar, suele asociarse a cada vértice un lado opuesto, y viceversa, por ejemplo, el lado opuesto de A es BC, es frecuente que se denote por a; análogamente $b = CA$, $c = AB$.

3.1. Teoremas fundamentales en todo triángulo

A continuación de enuncia el siguiente teorema el cual establece dos propiedades de los triángulos:

Teorema 3.1.

a) En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de dos ángulos interiores del triángulo no adyacentes a él.

b) En todo triángulo, la suma de las medidas de sus tres ángulos internos es igual a 180°.

Demostración. La idea para demostrar el teorema 3.1 a), se basa en trazar una recta paralela al segmento AC en el punto B (ver Figura 2) y utilizar las propiedades de ángulos entre paralelas. Motivo escribir con detalles la demostración del ítem a) del teorema.

Para el items b) debemos utilizar el item a), invito a finalizar la demostración.

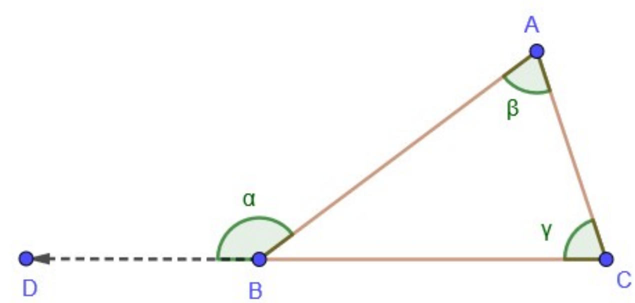


Figura 2. Representación gráfica del teorema

□

Teorema 3.2. Desigualdad Triangular

En todo triángulo, la longitud de uno de sus lados está comprendido entre la suma y la diferencia de los otros dos.

Demostración. Se sabe que la menor distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une. Entonces

$$b < a + c \tag{1}$$

$$\text{también:} \quad a < b + c, \quad \text{de donde}$$

$$a - c < b \tag{2}$$

de las relaciones 1 y 2 se tiene

$$a - c < b < a + c.$$

□

Teorema 3.3.

En todo triángulo, se cumple que a lados iguales se oponen ángulos iguales, y viceversa.

Demostración

Supongamos que $a = b \neq 0$ entonces por la ley de seno tenemos que:

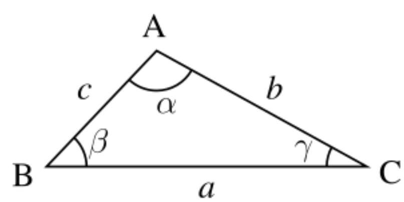


Figura 3.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{b}{a\sin\beta}$$

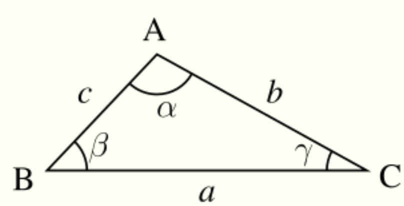
$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\beta}$$

$$\sin\alpha = \sin\beta, \quad \text{aplicando función inversa de seno}$$

$$\alpha = \beta$$

Recordatorio

Ley de seno: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$



Supongamos que $\alpha = \beta$ entonces $\sin\alpha = \sin\beta$, además por la ley de seno tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin\alpha} &= \frac{b}{\sin\beta} \\ a &= \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} \\ a &= b \end{aligned}$$

■

3.2. Clasificación de Triángulos

1. Con relación a sus lados:

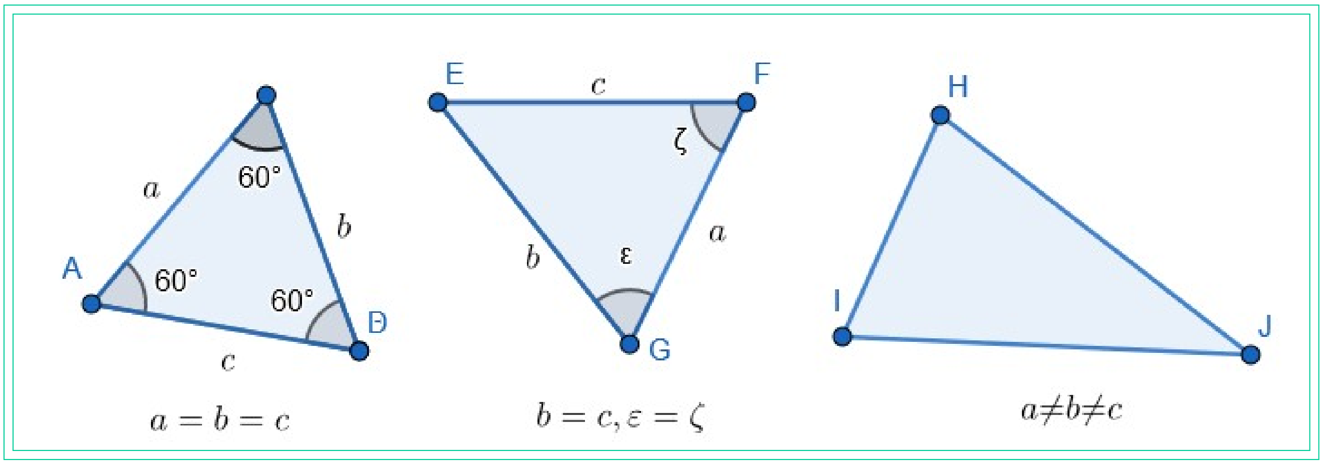


Figura 4. Clasificación según su lados.

   a) ***Escaleno***: si sus tres lados no son congruentes.

   b) ***Isósceles***: si por lo menos dos de sus lados son congruentes.

   c) ***Equilátero***: si sus tres lados son congruentes (note un triángulo equilátero es también isósceles, y que los tres ángulos internos son iguales entre sí e iguales a 60°).

2. Con relación a los ángulos:

   a) ***Acutángulo***: si su ángulo mayor es agudo (observar Figura 5, los tres ángulos son agudos).

   b) ***Rectángulo***: si su ángulo mayor es ángulo recto (note que el ángulo en cuestión es único y que los otros dos ángulos son agudos; así, en un triángulo rectángulo, la hipotenusa es mayor a los catetos).

c) **Obtusángulo**, si el ángulo mayor es ángulo obtuso (note que el ángulo en cuestión es único y que los otros son agudos; así, en un triángulo obtusángulo, el lado que se opone al ángulo obtuso es el lado mayor.)

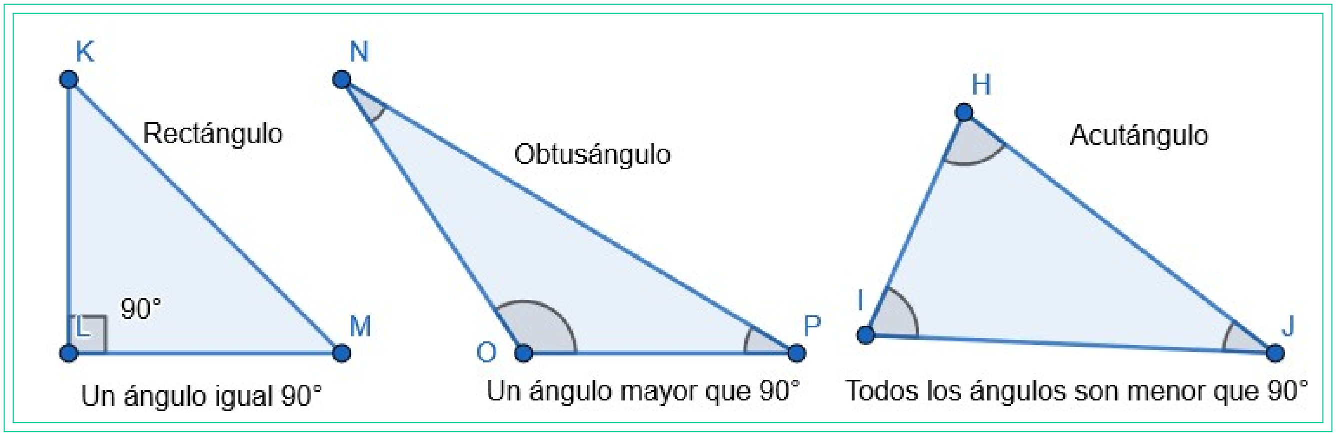


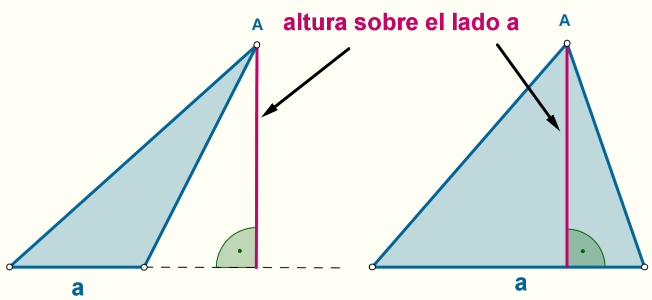
Figura 5. Clasificación según sus ángulos.

3.3. Rectas Notables de un triángulo

Las rectas notables de cualquier triángulo son las que se definen a continuación:

Definición 3.2. Altura

En un triángulo es el segmento que parte de unos de sus vértices y llega en forma perpendicular al lado opuesto o a su prolongación.



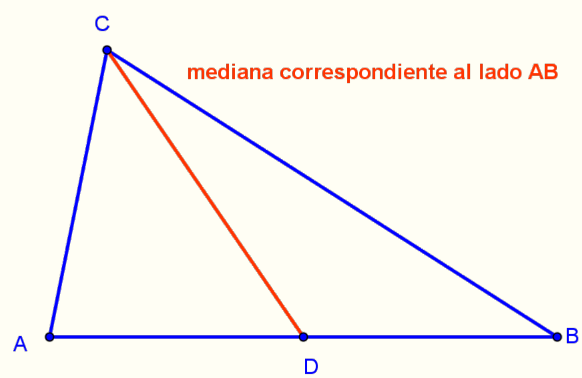
- Una altura puede ser interior al triángulo, exterior al mismo, o incluso, coincidir con alguno de sus lados (según el tipo de triángulo):
  - en un **rectángulo** la altura respecto a la hipotenusa es interior, y las otras dos alturas coinciden con los catetos del triángulo.

- en un **acutángulo**, las tres alturas son interiores al triángulo.
- en un **obtusángulo**, la altura respecto al mayor de sus lados es interior, siendo las otras dos alturas exteriores al triángulo.
- En un triángulo isósceles, la altura correspondiente al lado desigual divide el triángulo en dos triángulos iguales.

- Las tres alturas de un triángulo concurren en un punto llama *Ortocentro*.

Definición 3.3. Mediana

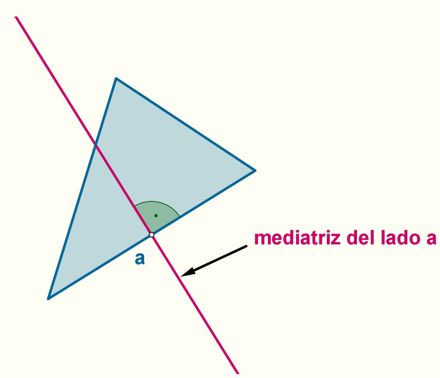
En un triángulo es el segmento que parte de unos de sus vértices al punto medio del lado opuesto.



- Las tres medianas de un triángulo son interiores al mismo, independientemente del tipo de triángulo que sea.
- Cada mediana de un triángulo divide a éste en dos triángulos de igual área.
- Las tres medianas concurren en un punto llamado *baricentro*.

Definición 3.4. Mediatriz

Se denomina mediatriz de un lado de un triángulo a la recta perpendicular a dicho lado en su punto medio.



- Los puntos de la mediatriz de un lado de un triángulo equidistan de los vértices que definen dicho lado.

- Las tres mediatrices concurren en un punto llamado *Circuncentro*.

Definición 3.5. Bisectriz

Es la recta que "divide" en dos ángulos iguales a un ángulo dado; en particular, es *bisectriz interna* si es la bisectriz de un ángulo interno de un triángulo, y *bisectriz externa* si es la bisectriz de un ángulo externo de un triángulo.

- En un triángulo, el ángulo formado por las bisectrices interiores de dos ángulos, se puede calcular con la siguiente relación $x° = 90° + \dfrac{\angle BAC}{2}$.

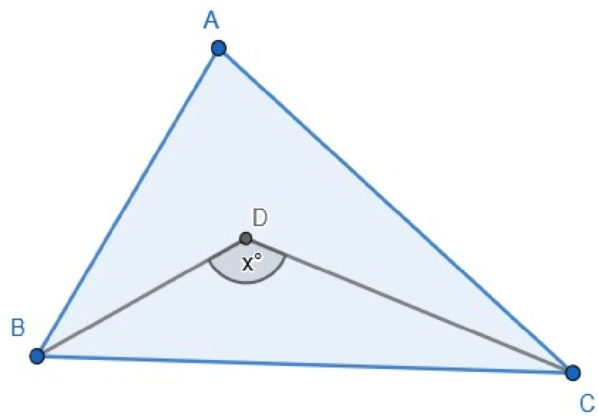


Figura 6. Propiedad de bisectrices

En el siguiente enlace muestra posición de las rectas y puntos notables de un triángulo:
https://www.geogebra.org/m/tvRp5K5q
En el siguiente enlace muestra como se construye las rectas notables de un triángulo: https://www.youtube.com/watch?v=rKpSeftVe6w

3.4. Distancia de un punto a una recta

En la Figura 7, sea P un punto exterior a una recta L, la longitud del segmento perpendicular $\overline{PM}$ a la recta L es la *distancia del punto P a dicha recta*. Esta perpendicular tiene la propiedad de ser única y su longitud es la distancia mínima del punto a la recta (explica porqué). Los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ no son perpendiculares a L y se llaman oblícuas.

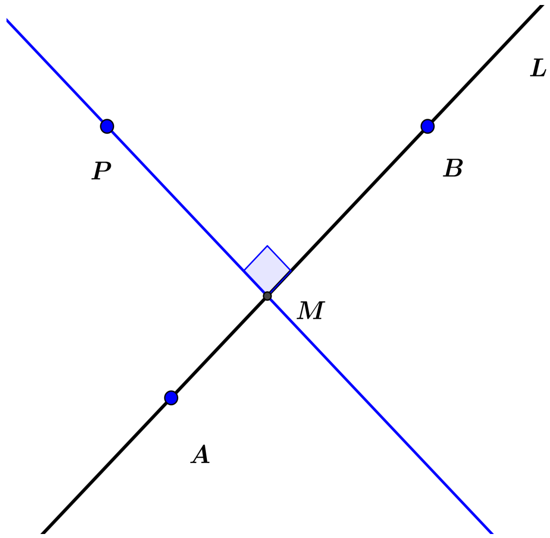


Figura 7. Distancia de un punto a una recta.

3.5. Triángulos rectángulos notables

Se denomina a aquellos triángulos rectángulos en los cuales conocemos las medidas de sus ángulos internos se establece una determinada relación entre las longitudes de sus lados y viceversa.

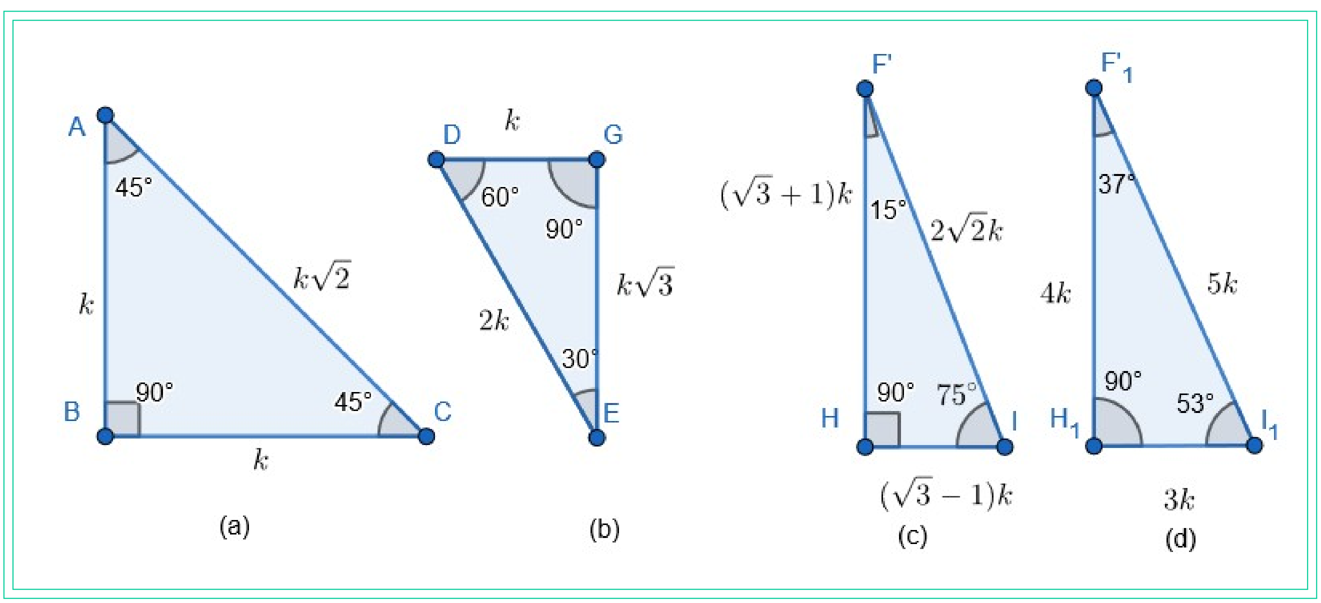


Figura 8. Algunos triángulos rectángulos notables.

4. Congruencia de triángulos.

En este sección estudiaremos las condiciones que deben cumplir para que dos triángulos sean congruentes, además de los criterios que nos facilitaran identificar la congruencia de dos triángulos, continuando con la aplicación de dichos criterios, en caso particular la demostración del teorema de la base media. Finalizando con la aplicación del teorema de la base media y los criterios de la base media.

Definición 4.1. Congruencia de triángulos

Se dice que dos triángulos $\triangle ACB$ y $\triangle QPR$ son congruentes si y sólo si tienen iguales sus tres lados y sus tres ángulos, esto es $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ y $\angle C = \angle R$ y además $AB = QP, BC = QR$ y $CA = RP$. Se denota por $\triangle ACB \cong \triangle QPR$

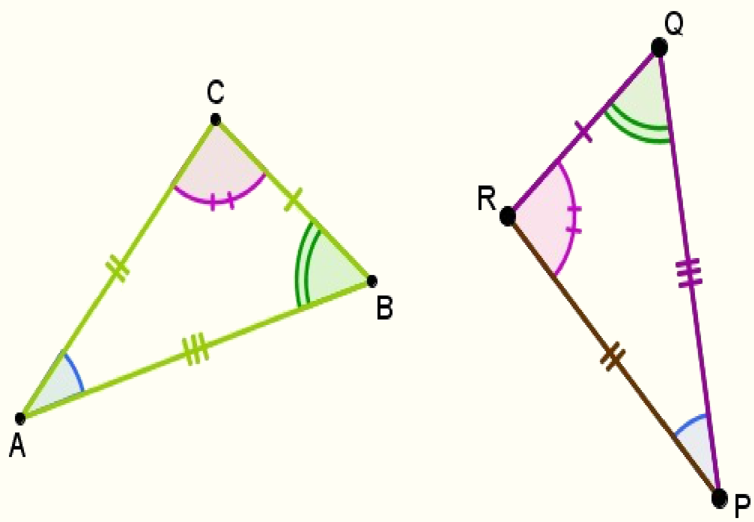


Figura 9. Definición de congruencia de dos triángulos.

En geometría, la congruencia de triángulos es muy importante, dado que nos permite demostrar si dos figuras geométricas son iguales: dos ángulos, la suma de dos lados, la resta de dos lados, entre otras.

Para demostrar que dos elementos geométricos son iguales, es conveniente construir triángulos congruentes y utilizar los siguientes criterios que vamos a enunciar.

4.1. Criterios de congruencia

1. Criterio LAL (Lado, Ángulo, Lado): dos triángulos son congruentes si y sólo si tienen dos lados iguales y el ángulo determinado por dichos lados son iguales. Es decir que $AB = PQ$, $BC = QR$ y $\alpha = \beta$ como se observa en la Figura 10

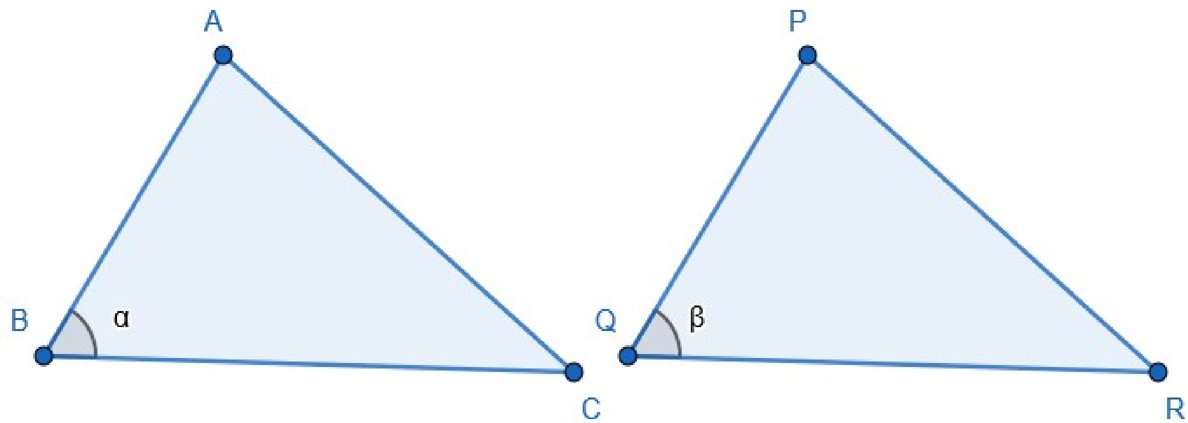


Figura 10. Primer criterio de congruencia.

2. Criterio ALA (Ángulo, Lado, Ángulo): dos triángulos son congruentes si y sólo si tienen iguales dos ángulos y un lado, donde los ángulos iguales tienen como base el lado igual. Es decir que $AB = PQ$, $\delta = \gamma$ y $\alpha = \beta$ como se observa en la Figura 11.

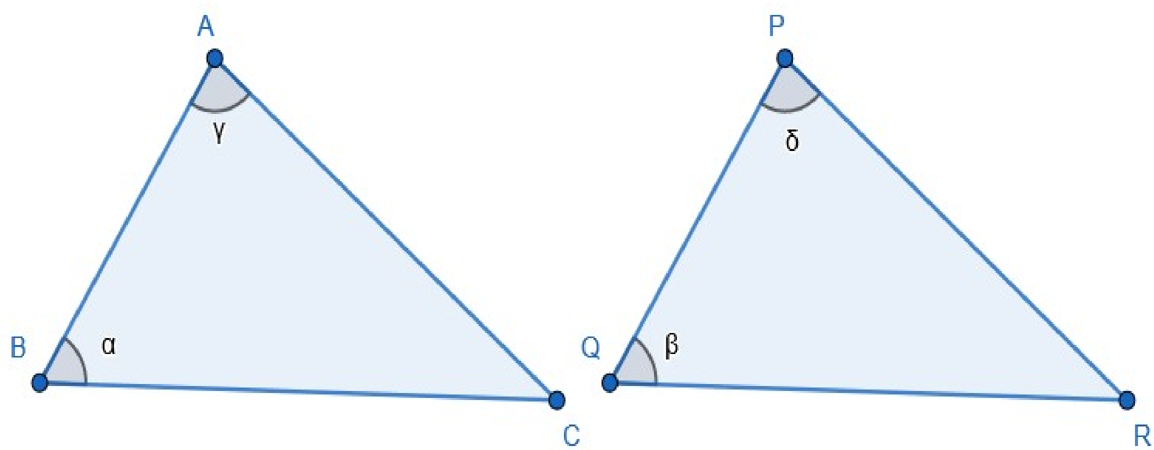


Figura 11. Segundo criterio de congruencia

3. Criterio LLL (Lado, Lado , Lado): dos triángulos son congruentes si y sólo si tienen iguales sus tres lados. Es decir que $AB = PQ$, $AC = PQ$ y $BC = QR$ como se observa en la Figura 12.

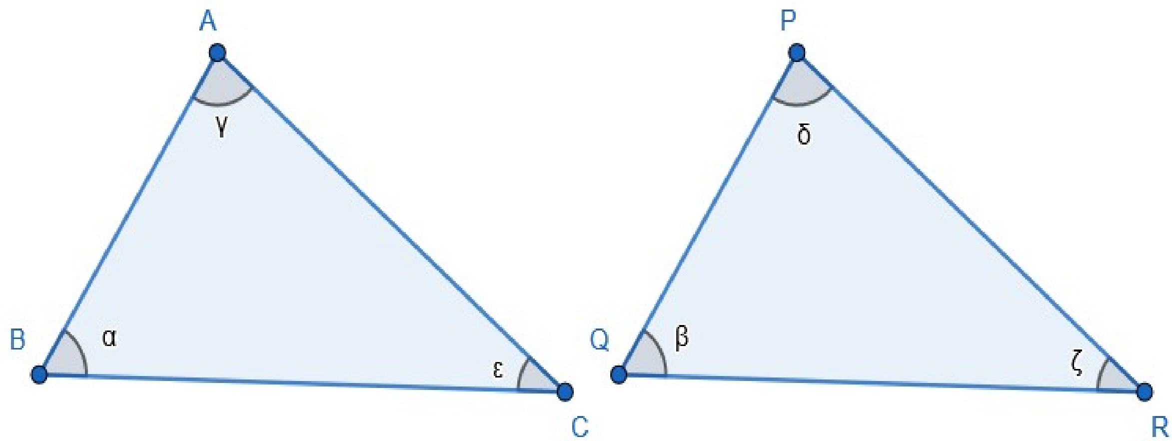
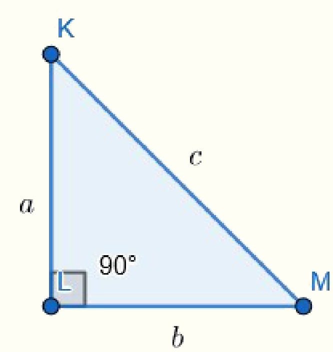


Figura 12. Tercer criterio de congruencia

Recordatorio

Teorema de Pitágora establece que: $a^2 + b^2 = c^2$.



Para triángulos rectángulos, los criterios se simplifican, ya que al tener dos lados iguales, el tercer lado es igual (ésto por el teorema de Pitágoras)

1. Criterio LA: Lado, Ángulo. Dos triángulos rectángulos, son congruentes si y sólo si tienen iguales, un lado y un ángulo.

2. Criterio LL: Lado, Lado. Dos triángulos rectángulos, son congruentes si y sólo si tienen iguales dos de sus lados.

4.2. Teorema de la Base Media

EL teorema de la base media, es muy importante debido a que nos asegura si el segmento formado por los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y además nos proporciona la relación que existe entre ambos segmentos.

Teorema 4.1. Teorema de la base media

En todo triángulo, el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

En la Figura 13, $\overline{MN}$ es el segmento que une los puntos medios de los lados AB y AC del $\triangle ABC$, a este segmento se le llama **base media del triángulo**. Se verifica que $MN = \dfrac{BC}{2}$ y que $MN \parallel BC$.

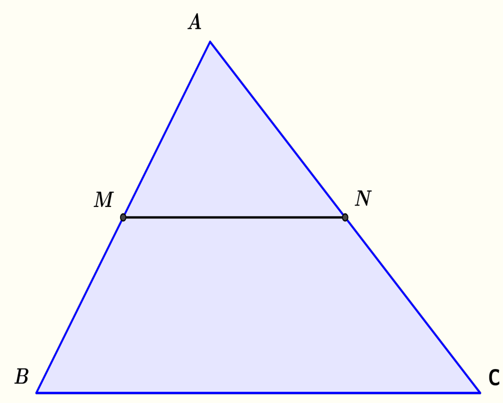


Figura 13. Teorema de la base media.

Demostración.

- Prolongar el segmento MN hasta el punto P tal que $MN = NP$ y formar el triángulo $\triangle NPC$.

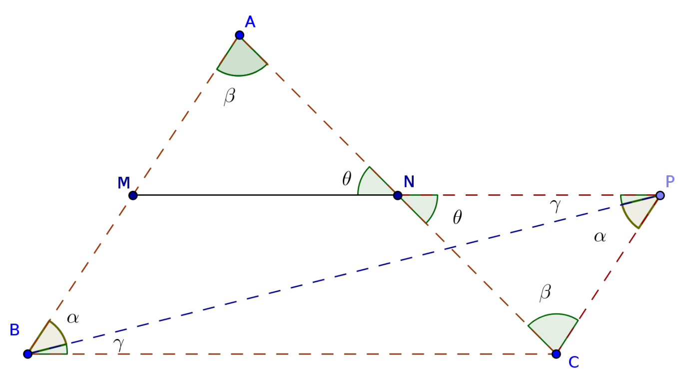


Figura 14. demostración Teorema de la base media.

- Se obtiene que $AN = NC$, $MN = NP$ y el $\angle CNP = \angle MNA$ (por ser ángulo opuesto por vértice), aplicando el criterio (L-A-L) los triángulos $\triangle MNA$ y $\triangle NCP$ son congruentes. Posteriormente, el $\angle NCP = \angle MAN$, por lo tanto, $CP \parallel MA$.

$$CP = MA = MB \implies MB = CP$$

- uniendo el punto B con el punto P se forman los triángulos $\triangle BMP$ y $\triangle BPC$ que son congruentes ya que $BM = PC$, $BP = BP$, $\angle BPC = \angle PBM$ (por ángulos alternos internos entre las paralelas MA y PC) aplicando el criterio $(L - A - L)$. Luego, $MP = BC$, entonces

$$MN = \frac{1}{2}MP = \frac{1}{2}BC$$

Además, $\angle PBC = \angle MPB \implies MP \parallel BC$ o que $MN \parallel BC$.

■

Teorema 4.2. Menor mediana de un triángulo rectángulo

En todo triángulo rectángulo, la mediana relativa a la hipotenusa es la mitad de la longitud de la hipotenusa y es la menor de las tres medianas del triángulo.

Demostración

En la Figura 15, BM es la mediana relativa a la hipotenusa AC del $\triangle ABC$, probaremos que $BM = \dfrac{AC}{2}$; (con lo cual se tendrá que $BM = AM = MC$).

Si por M se traza una paralela al lado AB, que corte al lado BC en N, entonces N es el punto medio de BC aplicando el teorema de la base media se tiene que $\overline{MN}$ es paralela a $\overline{AB}$, entonces el $\angle MNC = 90°$. Los triángulos rectángulos BMN y NMC son congruentes, dado que se puede aplicar el criterio $L - L$, esto por que comparten un lado y $BN = NC$ entonces $BM = MC = AM$. Además

$$BM = \frac{AC}{2}$$

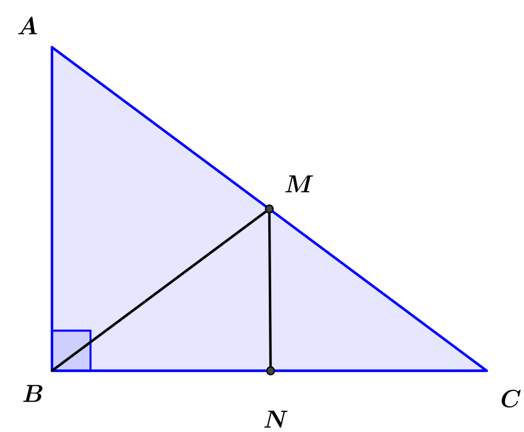


Figura 15. Teorema de la menor mediana.

Probar que BM es la menor mediana, debemos utilizar el teorema de Pitagóras, y comparar los valores de las tres medianas (Para practicar queda como ejercicio terminar la prueba). ■

Dentro de las estrategias para la resolución de estos problemas debemos considerar los siguientes aspectos:

- La construcción de una figura que sea precisa y clara del ejercicio o problema, estos, nos proporcionará una mejor visualización y comprensión del problema que deseamos dar solución.
- Tener comprendido las condiciones en las cuales son aplicable los criterios de congruencia para triángulos, el teorema de la base media e implicaciones y la teoría estudiada hasta el momento.
- Recordar que en ocasiones necesario trazar una recta paralelas a un segmento, para aplicar las propiedades de rectas paralelas cortas por un secante. En los siguientes ejemplos se aplican los aspectos mencionados anteriormente.

5. Ejemplos

✓Ejemplo 5.1
En la Figura 16 calcular la longitud del lado KM, si el lado $JL = 50$.

Solución.

Se tiene que el triángulo $\triangle JKI$ es el triángulo rectángulo notable 37, 57; donde se aplica la relación que aparece en la Figura 8 d), es decir $JL = 5k$, $KL = 4k$, $JK = 3k$. Entonces

$$JL = 50$$

$$5k = 50$$

$$k = 10$$

además, $KL = 3k = 30$. También el $\triangle MLK$ es es el triángulo rectángulo notable 37, 57; aplicando relación de la Figura 8 d), donde $KL = 5k_1$, $KM = 3k_1$, $ML = 4k_1$, como $KL = 30 \implies k_1 = 6$, por lo tanto $KM = 18$.

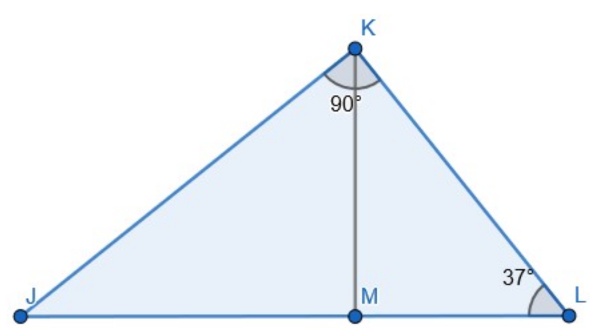


Figura 16. Ejemplo

■

✓Ejemplo 5.2

En la Figura 17 se tiene que $DE \parallel AC$. ¿ Cuánto es el valor de x?

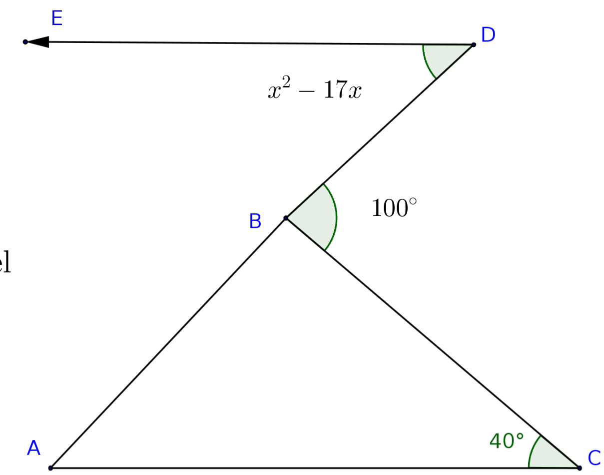


Figura 17. Ejemplo

Solución.

Como $DE \parallel AC$ entonces $\angle D = \angle A$ por ser ángulos alternos internos. Pero en $\triangle ABC$ se tiene que:

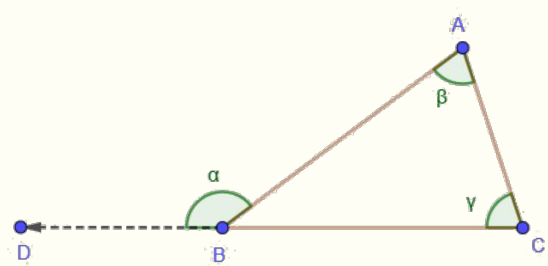
$$\begin{aligned} \angle A + 40^\circ &= 100^\circ \quad \text{Por teorema 3.1 a)} \\ x^2 - 17x - 60^\circ &= 0 \end{aligned}$$

Implica que $x = 20^\circ$

■

Recordatorio

Teorema 3.1 a) establece $\beta + \gamma = \alpha$



✓Ejemplo 5.3

En la Figura 18, se han trazado la altura AE y la bisectriz AD, donde $\angle B$ es mayor que $\angle C$. Demuestre que $\angle DAE = \dfrac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

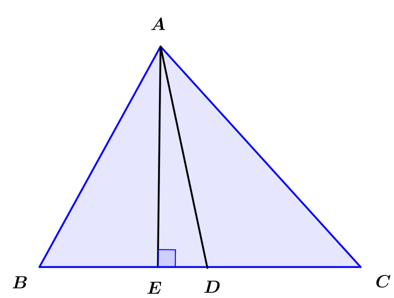


Figura 18. Ejemplo

Solución.

$$\begin{aligned}\angle BAD &= \frac{1}{2}\angle BAC\\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC - \angle BCA)\\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle BCA\end{aligned}$$

Recordatorio

La suma de los ángulos internos de un triángulos es 180° entonces $\triangle BAC$

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ$$
$$\implies \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle BCA$$

$$\begin{aligned}\angle DAE &= \angle BAD - \angle BAE && \text{observando la Figura 18}\\ &= \angle BAD - (90^\circ - \angle B)\\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) - 90^\circ + \angle B\\ &= \frac{1}{2}(\angle B - \angle C).\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 5.4
En un triángulo $\triangle ABC$, $AB = AC$, $\angle BAD = 30^\circ$ y $AE = AD$. Encontrar la medida del $\angle CDE$.

Solución.

Primeramente se realiza un dibujo que se adecue al problema, como se muestra en la Figura 19.

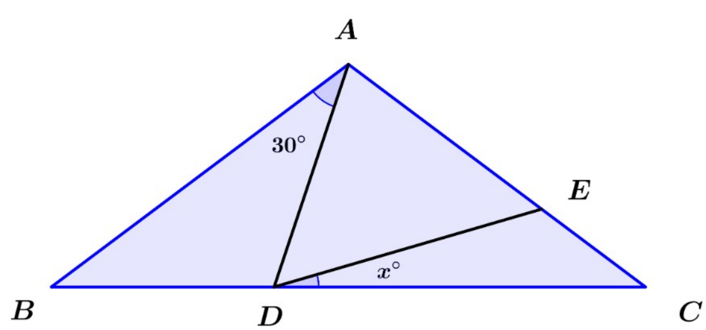
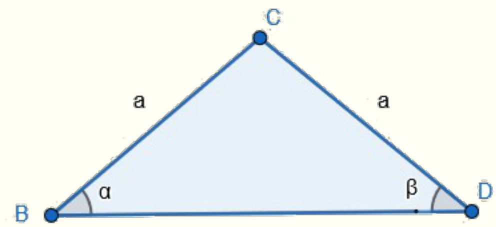


Figura 19. Ejemplo

$$
\begin{aligned}
x^\circ &= \angle EDC \\
&= \angle ADC - \angle ADE, \quad \triangle \text{ ADE es isósceles} \\
&= \angle ADC - \angle AED \\
x^\circ &= \angle ADC - (x^\circ + \angle BCA) \\
2x^\circ &= \angle ADC - \angle BCA \\
x^\circ &= \frac{1}{2}(\angle ADC - \angle BCA), \text{ Por teorema 3.1 a)} \\
x^\circ &= \frac{1}{2}(\angle ABC + 30^\circ - \angle BCA) \\
&= 15^\circ \quad \text{ya que } \angle ABC = \angle BCA
\end{aligned}
$$

Recordatorio

En triángulo isósceles tenemos que $\alpha = \beta$ y $BC = CD$.



✓ Ejemplo 5.5

En la siguiente figura, $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH$ y $\beta = 70^\circ$. Encontrar la medida del ángulo α.

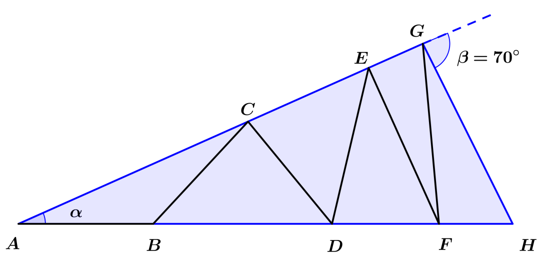


Figura 20. Ejemplo 3.

Solución.

Según la Figura 20 obtenemos que $\angle ACB = \alpha$ luego se tiene:

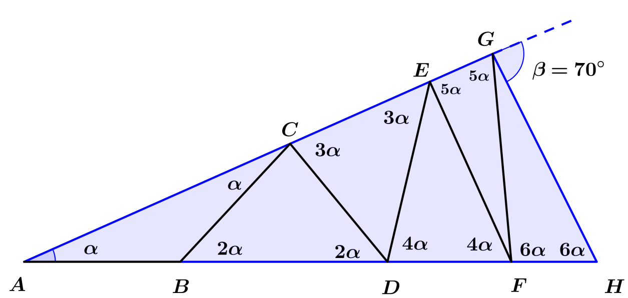


Figura 21. Ejemplo

1. $\angle CBD = \angle CAB + \angle ACB = \alpha + \alpha = 2\alpha$, $\triangle ABC$ es isósceles.

2. Como $BC = CD$, $\angle CBD = \angle CDB = 2\alpha$, porque el $\triangle BCD$ es isósceles.

3. $\angle DCE = \angle CAD + \angle ADC = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$, aplicando el teorema 3.1 a) en $\triangle ADC$.

4. $CD = DE$ entonces $\angle DCE = \angle CED = 3\alpha$, porque el $\triangle CDE$ es isósceles.

5. $\angle EDF = \angle EAD + \angle AED = 4\alpha$, aplicando el teorema 3.1 a) en $\triangle ADE$.

6. $DE = EF$ implica $\angle EDF = \angle EFD = 4\alpha$, porque el $\triangle DEF$ es isósceles.

7. $\angle GEF = \angle EAF + \angle AFE = \alpha + 4\alpha = 5\alpha$, aplicando el teorema 3.1 a) en $\triangle AFE$

8. $EF = FG$ implica $\angle FEG = \angle EGF = 5\alpha$, aplicando que $\triangle EFG$ es isósceles.

9. $\angle GFH = \angle GAF + \angle AGF = \alpha + 5\alpha = 6\alpha$, aplicando teorema 3.1 a) en $\triangle AGF$

10. Finalmente $\angle GAH + \angle GHA = \alpha. + 6\alpha = 7\alpha$ aplicando teorema 3.1 a) en $\triangle AHG$.

$$7\alpha = 70^\circ = \beta.$$

Por tanto, la medida de α es 10°.

■

✓Ejemplo 5.6

En un triángulo ABC, $AB = AC$, D está sobre AB y E está sobre la prolongación de AC tal que $BD = CE$. Si el segmento $\overline{DE}$ intercepta a $\overline{BC}$ en G. Demuestre que $DG = GE$.

Solución

A partir de los datos problemas se construye la Figura 22. Por el punto D, se traza la recta DF paralela a AE, con F sobre BC. Luego

$\angle FDG = \angle CEG$ por ángulos alternos internos

$\angle DGF = \angle EGC$ ángulos opuestos por el vértice G

y puesto que

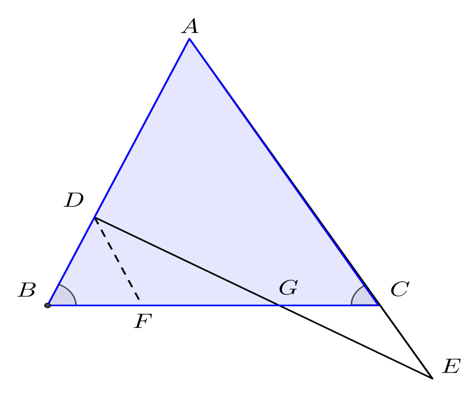


Figura 22. Ejemplo

$$\angle BFD = \angle BCA = \angle DBF$$

por lo que

$$\begin{aligned} DF &= BD, \quad \triangle BFD \text{ es isósceles} \\ &= CE \end{aligned}$$

Luego $\triangle DFG \cong \triangle ECG$ (criterio $A - A - L$) entonces

$$DG = GE$$

■

✓Ejemplo 5.7

.

El triángulo $\triangle ABC$ es equilátero, D es un punto interior del triángulo $\triangle ABC$ y P es un punto exterior del triángulo $\triangle ABC$ tal que $AD = BD$, $AB = BP$ y $\overline{BD}$ biseca $\angle CBP$. Encuentre $\angle BPD$.

Solución

1. A partir de los datos problemas dibujamos la Figura 23.

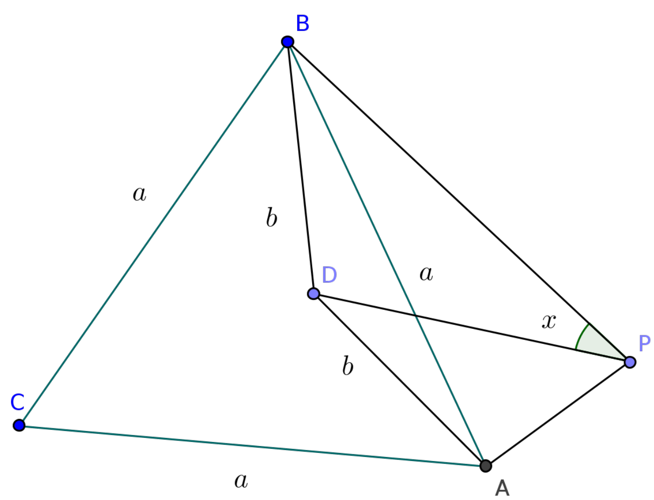


Figura 23. Ejemplo

2. Trazamos el segmentos DC como se muestra en la Figura 24

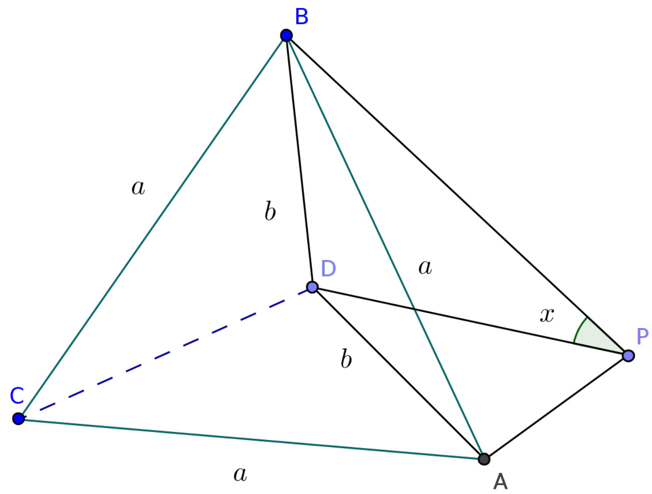


Figura 24. Ejemplo

3. Los $\triangle BDP$ y $\triangle CBD$ tienen un lado en común que es BD, $BC = BP$ y $\angle CBD = \angle DBP$ (por ser bisectriz del $\angle CBP$), aplicando el criterio $(L - A - L)$ el $\triangle BDP$ es congruente con $\triangle BCD$ entonces $\angle BCD = x$.

4. Los $\triangle CBD$ y $\triangle CDA$ tiene un lado en común que DC, que $BC = AC$ y $BD = DA$, aplicando el criterio de congruencia $(L - L - L)$ se tiene que $\triangle CBD$ es congruente con $\triangle CDA$ entonces $\angle DCA = \angle BCD = x$.

   Por tanto

$$\begin{aligned} \angle BCA &= 60^\circ \\ 2x &= 60^\circ \\ x &= 30^\circ \\ \angle BPD &= 30^\circ \end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 5.8

En la Figura 25, D, E son puntos sobre AB y AC tal que $AD = DB$, $AE = 2EC$ y BE intercepta a $\overline{CD}$ en el punto F. Demuestre que $4EF = BE$

Demostración

Sea M el punto medio de AE, luego se traza el segmento $\overline{DM}$, aplicando el teorema de la base media a los triángulos ABE y CDM respectivamente, obteniendo:

$$DM = \frac{1}{2}BE$$
$$EF = \frac{1}{2}DM$$

por lo tanto

$$EF = \frac{1}{4}BE \implies BE = 4EF.$$

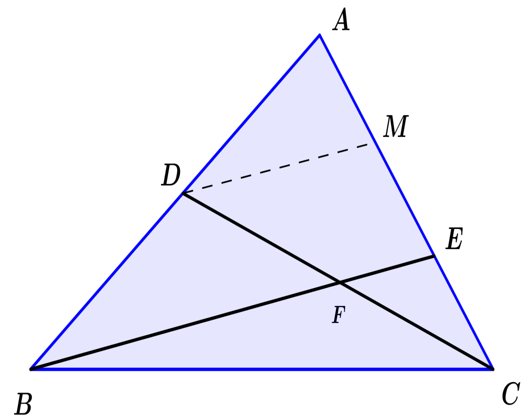


Figura 25. Ejemplo

■

✓Ejemplo 5.9

En un triángulo ABC, E es el punto medio de BC y D es el pie de la altura desde A a BC. Supóngase que $AB = 2DE$. Demuestre que $\angle B = 2\angle C$.

Solución.

A partir de los datos del problema se construye la Figura 26.

Por el punto E trazamos $EM \parallel AB$, por el teorema de la base media sabemos que el punto M será el punto medio del segmento AC, entonces el segmento DM será la menor mediana del triángulo ACD recto en D, por lo tanto $DM = MC$, así el triángulo DMC es isósceles. De lo anterior, tenemos lo siguiente

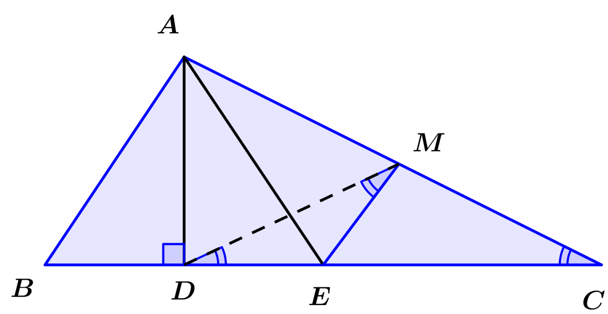


Figura 26. Ejemplo

a) $\angle CBA = \angle MEC$.

b) El $\angle MDE = \angle DME$, debido al teorema de la base media

$$ME = \frac{AB}{2} = \frac{2DE}{2} = DE$$

así el triángulo DME es isósceles.

c) Finalmente $\angle CBA = \angle MEC = \angle MDE + \angle DME = 2\angle MDE = 2\angle C$, ya que $\angle MDE = \angle DME$.

■

✓Ejemplo 5.10

Demostrar que en todo triángulo ABC, el ángulo formado por una bisectriz interior y una exterior, está dado por la siguiente relación $x = \dfrac{\alpha}{2}$, ver figura

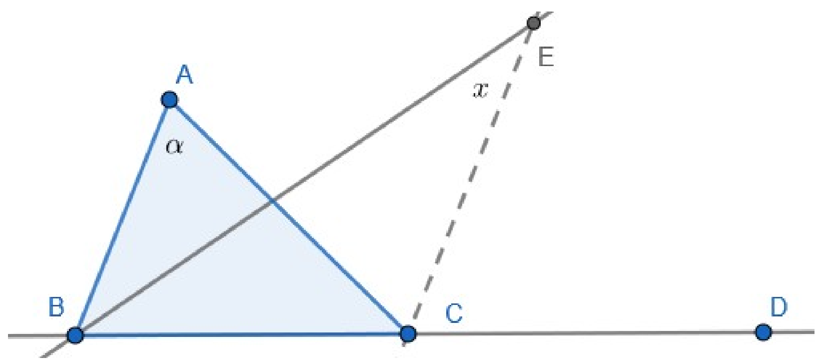


Figura 27. Ejemplo

Solución

Por el teorema 1.1 a) que demuestra que la suma de dos ángulos interiores es igual al suplementario del tercero, se tiene que $\angle ACD = \alpha + \angle ABC$ en el triángulo ABC y $\angle ECD = x + \angle EBD$ entonces.

$$\begin{aligned}
\angle ACD &= \alpha + \angle ABC, \quad \angle ACD = 2\angle ECD \text{ por ser bisectriz el segmento } CE \\
2\angle ECD &= \alpha + 2\angle EBD \\
2\left(x + \angle EBD\right) &= \alpha + 2\angle EBD \\
2x + \cancel{2\angle EBD} &= \alpha + \cancel{2\angle EBD} \\
2x &= \alpha \\
x &= \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 5.11

En un triángulo ABC, $AB = AC$, $\angle A = 80^\circ$. Si los puntos D, E y F están sobre los lados BC, CA y AB respectivamente, tal que $CE = CD$, $BF = BD$, determinar el valor del $\angle EDF$.

Solución

A partir del enunciado se construye la Figura 28:

Por hipótesis el $\triangle ABC$ es isósceles, $\angle B = \angle C = \alpha$, y puesto que la suma de los ángulos internos en todo triángulo es 180°, se tiene

$$80^\circ + 2\alpha = 180^\circ, \quad \text{entonces} \quad \alpha = 50^\circ$$

Por otro lado, el triángulo BFD también es isósceles, con $BF = BD$ y así $\angle F = \angle D = 65^\circ$, finalmente, puesto que $CE = CD$, se tiene que el $\triangle DCE$ también es isósceles, así $\angle E = \angle D = 65^\circ$, luego para obtener el ángulo x°, obtenemos la siguiente relación $65^\circ + x^\circ + 65^\circ = 180^\circ$, de donde $x^\circ = 50^\circ$. ∎

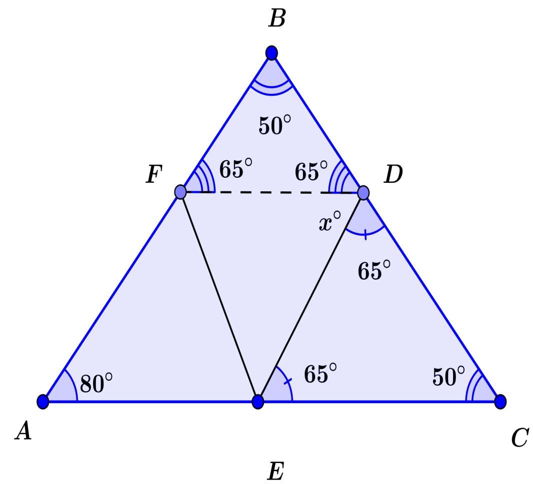


Figura 28. Ejemplo

✓Ejemplo 5.12

De la Figura 29, si $BA = AE$, $BD = EC$ y $AD = AC$. Calcular θ

Solución

Dado que EC=BD, AD=AC, AB=BE, aplicando el criterio $(L - L - L)$ implica que el $\triangle AEC$ es congruente con $\triangle ABD$, de donde $\angle AEC = \angle ABD = 7\theta$. Además el $\triangle ABE$ es isósceles y $\angle ABE = \angle AEB = 3\theta$.

$$\angle BEA + \angle AEC = 180^\circ$$

$$3\theta + 7\theta = 180^\circ$$

$$10\theta = 180^\circ$$

$$\theta = 18^\circ$$

∎

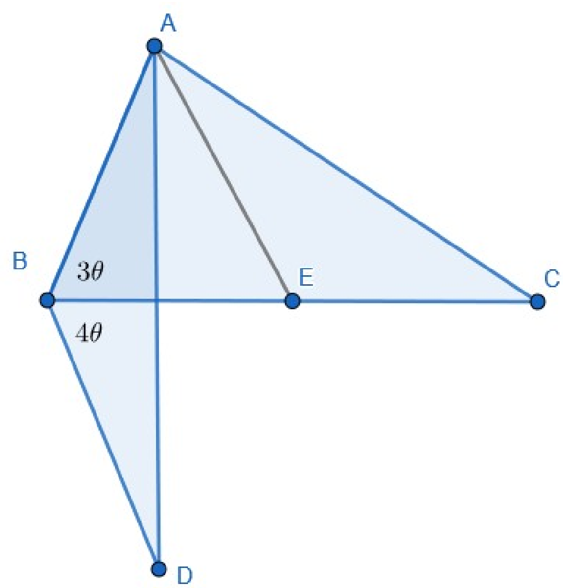


Figura 29. Ejemplo

✓Ejemplo 5.13

Dado un triángulo ABC equilátero de lado 1, se ubica un punto exterior al lado BC tal que $BD = DC$ y el ángulo $BDC = 120°$. Se ubican los puntos M y N sobre los lados AB y AC respectivamente, tal que $\angle MDN = 60°$. Encuentre el perímetro del $\triangle AMN$.

Sugerencia: prolongue AB, hasta un punto P, de forma que $BP = NC$.

Solución

A partir del enunciado y de prolongar la recta AB hasta el punto P de manera que $BP = NC$ como se muestra en la Figura 30:

Al unir el punto D con el punto P se forma el $\triangle BDP$. Por hipótesis el triángulo ABC es equilátero, cada uno de sus ángulos interno mide $60°$, además en el $\triangle BDC$, el $\angle DBC = \angle DCB = 30°$, ya que el $\angle BDC = 120°$, así $\angle PBD = 90° = \angle NCD$ y $BD = DC$, aplicando el criterio $L - A - L$ entonces el $\triangle BDP$ es congruente con el $\triangle NCD$.

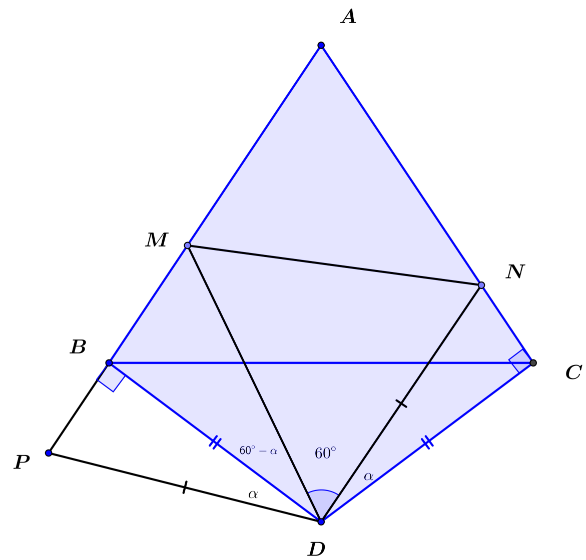


Figura 30. Ejemplo

Luego, los triángulos MPD y MDN son congruentes aplicando el criterio $L - A - L$, debido a $PD = DN$, el lado MD es común en ambos triángulos y $\angle BDM = 120° - 60° - \alpha = 60° - \alpha$. Entonces el $\angle PDM = \alpha + (60° - \alpha) = 60°$. Por tanto $MP = MN$, y además

$$\begin{aligned}
\text{Perímetro:} \quad \triangle MAN &= MA + MN + NA \\
&= (1 - MB) + MN + (1 - NC) \\
&= 1 - MB + MB + BP + 1 - PB \\
&= 1 - \cancel{MB} + \cancel{MB} + \cancel{BP} + 1 - \cancel{PB} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

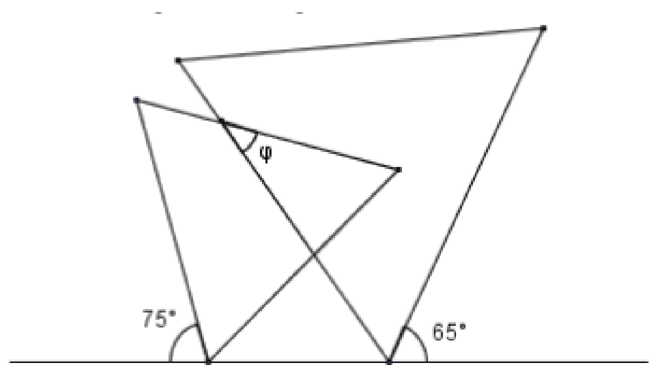
■

6. Problemas

Resolver los siguientes problemas de forma clara, ordenada y justificando a detalle todos sus procesos.

6.1. Propiedades de triángulos

1. En la figura adjunta ambos triángulos son equiláteros. Encuentre el valor de φ.



2. En la Figura 31, calcular el $\angle x$ si el $\angle AOB = 100°$ y $L_1 \parallel L_2$.

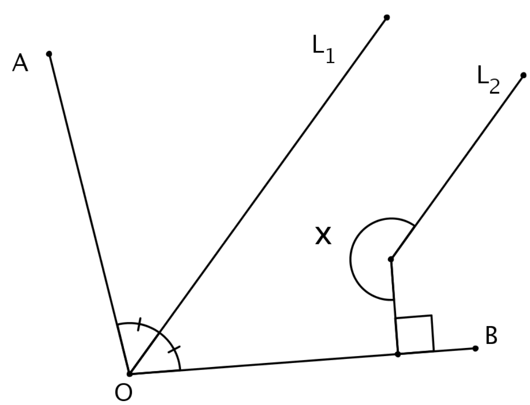


Figura 31.

3. En la Figura 32, $ABDE$ es un cuadrado y BCD es un triángulo isósceles con $BD = DC$. Si $\angle ABC = 160°$, determinar la medida de $\angle AEC$.

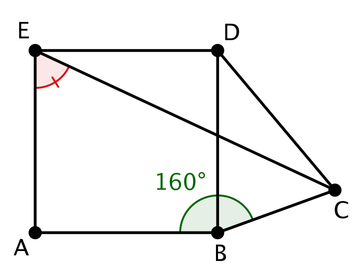
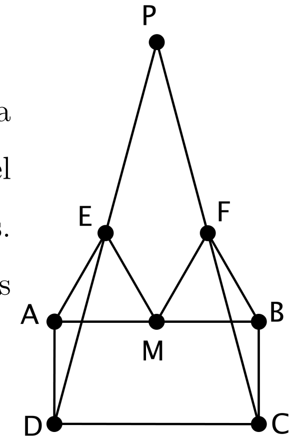


Figura 32.

4. (XV Competencia de Clubes Cabri Primera Ronda) En la figura adjunta, $ABCD$ es un rectángulo tal que $AB = 2BC$. M es el punto medio de AB y los triángulos AME y MBF son equiláteros. Si P es la intersección de las rectas DE y CF, encuentre los ángulos del $\triangle CDP$.



5. Probar que una bisectriz exterior de un triángulo es paralela al lado opuesto si y sólo si el triángulo es isósceles.

6. Si AB y FG son rectas paralelas, el $\angle ABC = \angle CDE = \theta$, el $\angle DEF = \dfrac{\theta}{2}$ y el $\angle GFH = 150°$. Calcule θ. Figura 33

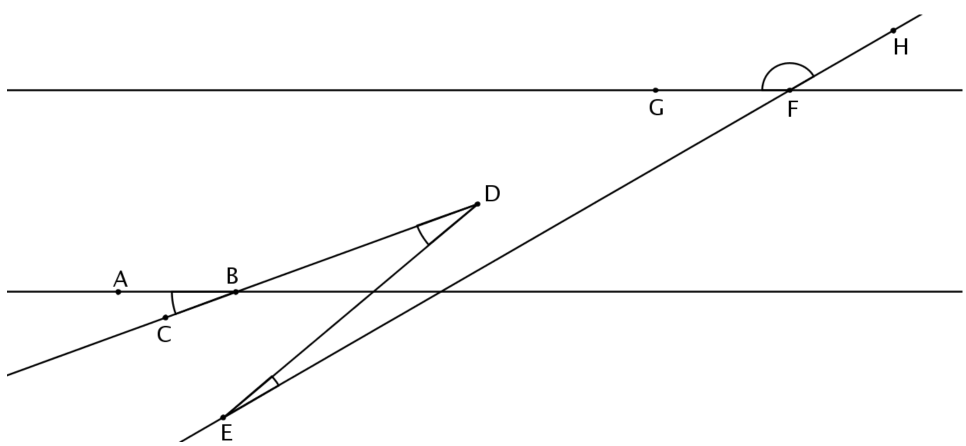


Figura 33.

7. Hallar la suma de los ángulos $\alpha + \epsilon + \theta + \phi$ en la Figura 34.

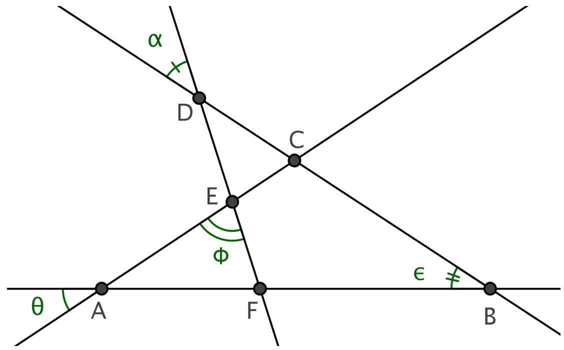


Figura 34.

8. Determine el valor de la suma $\angle A + \angle B + \angle I + \angle H + \angle F + \angle G$. Figura 35.

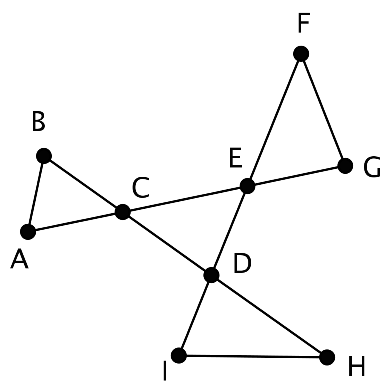


Figura 35.

9. En el $\triangle ABC$ el $\angle BAC = 36°$ y $AC = AB$. Probar que la bisectriz interior BD (D en AC) es congruente con el lado BC.

10. Sea ABC un triángulo rectángulo en B con $AB = BC$, se construye exteriormente el triángulo equilátero BCD. Encuentre el ángulo $\angle DAB$.

11. En el $\triangle ABC$, $AB = AC$ y D un punto sobre la recta AC, tal que $BC = BD = DA$. Determine la medida del ángulo $\angle ABD$, si:

    a) D está entre A y C.

    b) A está entre D y C.

12. En un $\triangle ABC$, D es un punto sobre el lado AC tal que $AB = AD$. Si $\angle ABC - \angle ACB = 90°$, hallar el $\angle CBD$.

13. Se tiene un triángulo isósceles ABC, $AB = BC$ en el cual se traza al altura AF tal que $BF = 6$ y $FC = 2$. Hallar AC.

14. En la Figura 36, el $\angle ABC = \angle ACE$, $DC = EC$, ¿Qué línea notable es AD del $\triangle BCA$?

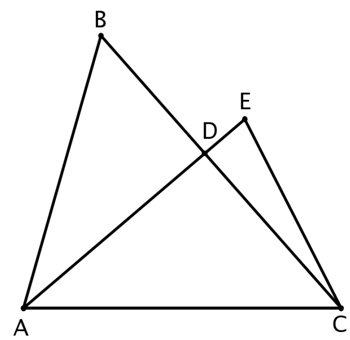


Figura 36.

15. ¿Cuál es el valor de $b - a$ en la Figura 37?

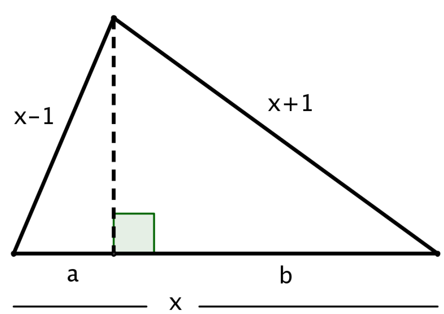


Figura 37.

16. Sea ABC un triángulo tal que las medianas respectivas a B y C son perpendiculares. Demuestre que se cumple la relación.

$$5BC^2 = CA^2 + AB^2.$$

17. La hipotenusa BC de un triángulo rectángulo ABC se divide en 4 segmentos congruentes por los puntos G, E y H. Si $BC = 20$, encuentra la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos AG, AE y AH. Figura 38.

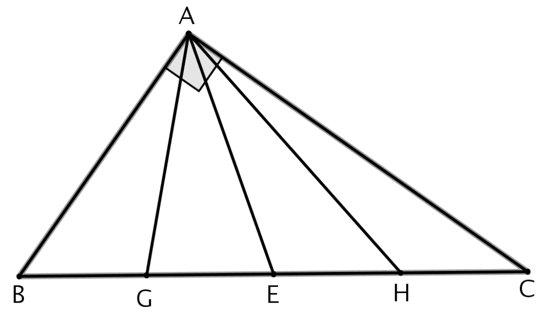


Figura 38.

18. Dado un cuadrado $ABCD$, se construyen los triángulos equiláteros ABP (exteriormente) y ADQ (interiormente). Probar que C, P y Q están alineados.

19. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle CAB = 90°$. D es un punto sobre la prolongación de BC tal que $BD = BA$. E es un punto en el mismo semiplano que A respecto de BC, tal que $CE \perp BC$ y además $CE = CA$. Mostrar que A, D y E están alineados.

20. El cuadrilátero $ABCD$ mostrado en la Figura 39 cumple que $AB \parallel CD$ y $BC \parallel DA$.[1] Sobre las prolongaciones de AB y AD se construyen puntos E y F tales que $BC = BE$ y $DC = DF$. Demuestre que C, E y F están alinedos.

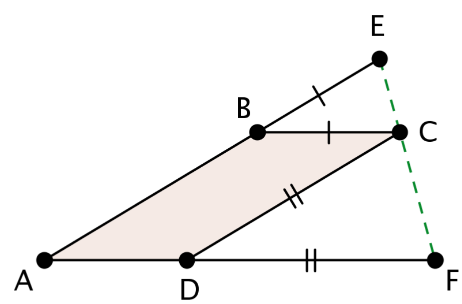
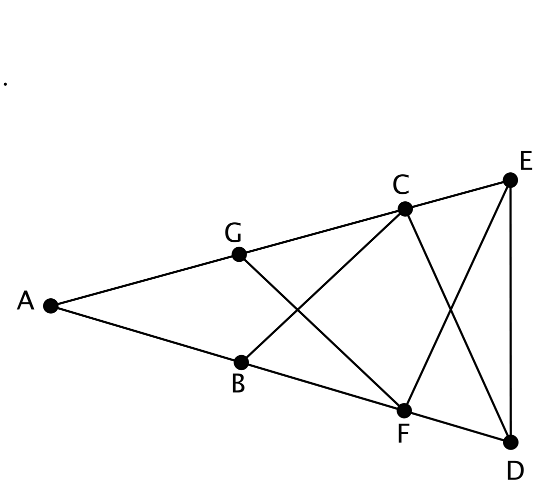


Figura 39.

21. En la figura adjunta, $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA$. Calcule la medida del $\angle DAE$.



[1] El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

22. Los lados de un triángulo isósceles son 12 y 5 metros, ¿cuál es su perímetro?

23. Muestre que los lados de un triángulo cumplen que $|a-b|<c$ y que $c<\dfrac{a+b+c}{2}$.

24. Muestre que es posible construir un triángulo con segmentos de longitudes a, b, c si y sólo existen números positivos x, y, z tales que: $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$.

6.2. Criterios de congruencia

25. En un triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ y P, Q están sobre BE y la prolongación de $\overline{CF}$ respectivamente tal que $BP=AC$ y $CQ=AB$. Demuestre que AP es perpendicular a AQ.

26. En un triángulo ABC, $\angle ACB=60°$, $\angle BAC=75°$, $AD\perp BC$ en D, $BE\perp AC$ en E, AD intercepta BE en H. Encuentre $\angle CHD$.

27. El ABC es equilátero, D es un punto interior del $\triangle ABC$ y P es un punto exterior del $\triangle ABC$ tal que $AD=BD$, $AB=BP$ y BD biseca $\angle CBP$. Encuentre $\angle BPD$.

28. En un triángulo isósceles ABC, $AB=BC$, $\angle B=20°$. M, N son puntos sobre AB y BC respectivamente, tal que $\angle MCA=60°$, $\angle NAC=50°$. Encuentre $\angle NMC$.

29. Dado un triángulo rectángulo isósceles con $AC=BC$ y $\angle ACB=90°$. D es un punto sobre AC y E está sobre la prolongación de BD tal que $AE\perp BE$. Si $AE=\frac{1}{2}BD$, demuestre que BD biseca al $\angle ABC$.

30. En un triángulo ABC, E es el punto medio de BC y D es el pie de la altura desde A a BC. Supóngase que $AB=2DE$. Demuestre que $\angle B=2\angle C$.

31. En el triángulo ABC, BE es la bisectriz de $\angle ABC$, AD es la mediana sobre el lado BC y AD intercepta a BE en O perpendicularmente. Dado que $BE=AD=4$, encuentre la longitud de los tres lados del triángulo ABC.

32. Dado un triángulo ABC. Si los lados AB y AC se toman como la hipotenusa de dos triángulos rectángulos ABD y ACE exteriores al triángulo ABC respectivamente, tal que $\angle ABD=\angle ACE$. Demuestre que $DM=EM$, donde M es el punto medio de BC.

7. Respuesta de los problemas

El siguiente apartado son las respuesta de los problemas.

- *Problema 1.* 40°.
- *Problema 2.* 220°.
- *Problema 3.* 75°.
- *Problema 4.* 30°.
- *Problema 6.* 20°.
- *Problema 7.* 180°.
- *Problema 8.* 360°.
- *Problema 10.* 15°.
- *Problema 11.* a) 36°, b) 72°.
- *Problema 12.* a) 90°.
- *Problema 13.* a) $\sqrt{32}$.
- *Problema 14.* bisectriz.
- *Problema 15.* $a - b = -4$.
- *Problema 17.* 200.
- *Problema 18.* $\frac{180}{7}$.
- *Problema 26.* 45°.
- *Problema 27.* 30°.
- *Problema 28.* 60°.
- *Problema 31.* 4, 8 $\sqrt{48}$.

8. Sugerencia

Si desea mayor información a cerca de las propiedades, congruencia de triángulos y teorema de la base media revisar los siguientes enlaces:

- `https://www.fceia.unr.edu.ar/~vittone/geometria_1/Unidad32016.pdf`.
- `https://www.geogebra.org/m/zWpAe3K6`.
- `http://ingenieria2.udea.edu.co/multimedia-static/elementos_geometria_euclidiana/descargas/0609.pdf`.
- `https://www.youtube.com/watch?v=iH_YC8nQSWI`.
- `https://www.youtube.com/watch?v=eLKiGxh3yfw`

Universidad de El Salvador
Modalidad a Distancia
Facultad de Ciencias Naturales Y Matemática
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Cuadriláteros

Asignatura:
Geometría Euclídea I

Coordinador de carrera:

Coordinadora de cátedra:

Elaborado por:
Lic. Javier Antonio Ramos Martínez

Ciudad Universitaria, San Salvador 20 de abril de 2020

Índice

Cuadriláteros

SUMARIO

- Cuadriláteros: definición, clasificación y características.
- Polígonos: definición, clasificación y características.
- Problemas.

Al finalizar el estudio de este capítulo será capaz de

- *Resolver problemas donde se aplica las propiedades de los cuadriláteros.*
- *Resolver problemas donde se aplica las propiedades de los polígonos.*

Introducción

Se inicia el material de la unidad 3, con una descripción histórica sobre los cuadriláteros y los polígonos, posteriormente se empieza estudiando con los aspectos relacionados con la geometría, definición, las propiedades de los cuadriláteros. Además las clasificación de los cuadriláteros profundizando en las propiedades que cada tipo de cuadrilátero tiene, aplicando dicha propiedades en la resolución de problemas.

Dentro de las aplicaciones de la propiedades de los cuadriláteros se demostrará el Teorema de Pitágoras, dicho teorema cuenta con una gran gama de diferentes demostraciones. Finalizando la parte teórica sobre la definición, clasificación y propiedades de los polígonos. Como el todos los anteriores materiales esta la parte de los problemas resueltos y de los problemas propuestos estos con el fin de fijar y adquirir la habilidad de utilizar la teoría en la resolución de problemas.

1. Referencia Histórica

La Geometría en el Antiguo Egipto tuvo gran importancia a tenor de los escritos de los historiadores griegos Herodoto, Estrabón y Diodoro, quienes incluso atribuían a los egipcios el nacimiento de esta ciencia. Con posterioridad éstos se la transmitieron a los griegos. Estos historiadores nos relataron que los conocimientos egipcios sobre geometría, así como los de las culturas mesopotámicas, pasaron íntegramente a los griegos a través de Tales de Mileto, los pitagóricos, y Euclides.

Las inundaciones provocadas por el Nilo en el antiguo Egipto obligaban a los agrimensores o ”tensadores de cuerda”, como los llamó Heródoto, a recalcular las lindes de los campos año tras año. Por tanto, y desde muy antiguo, tuvieron que resolver problemas de medición de la tierra, esto es, de geometría, imprescindibles en una sociedad compleja que contaba con una nutrida corte de registradores.

Los egipcios se enfrentaron al cálculo del área de cuadriláteros y triángulos, y alcanzaron una buena aproximación al cálculo del área del círculo. Después de contemplar las grandes construcciones llevadas a cabo por los egipcios, deberíamos esperar una geometría muy avanzada. Pero desgraciadamente no hay constancia de ello, y las únicas fuentes que podemos analizar son el papiros Ahmes y el papiro de Moscú.

Con los datos que tienen en estos 2 papiro no descubrió aspectos especiales de la geometría y lo único que nos aportan son algunos datos para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas muy básicas. Los cálculos, aunque no correctos, si son lo suficientemente aproximados para cubrir las necesidades de la vida cotidiana. Además no existe distinción entre los cálculos exactos y los aproximados por lo que no sabe si pensar que consideraban todos como exactos o sencillamente que no se planteaban el error cometido.

En primer lugar hay que tener en cuenta que hasta la llegada de los griegos, al igual que en Babilonia, no existía una división entre la geometría y la aritmética, o la matemática en general, y todas las ramas se englobaban dentro de una misma, limitándose a aplicar la aritmética al cálculo de áreas, volúmenes y algún otro problema geométrico. A pesar de que, según Heródoto y como hemos comentado antes, la geometría se desarrolló ante la necesidad de recalcular las lindes tras la inundación del Nilo, no parece del todo claro que fuese exactamente así. Indudablemente ésta era una de las aplicaciones más importantes pero desde luego no la única. Los babilonios por ejemplo tenían una geometría muy similar a la desarrollada en Egipto y sin embargo no tenían esa necesidad de agrimensura.

Llama la atención el hecho de haber encontrado inscripciones en las que se calcula el área de figuras cuadrangulares, pertenecientes a campos de cultivo, en las que el método empleado es muy erróneo, y únicamente aproximado en el caso de campos que se tienden a formas rectangulares. En los muros del templo de Edfú aparece este método, que consistía en obtener el área de la figura multiplicando entre sí las semisumas de las longitudes de lados opuestos. Se dice que para calcular el área de un campo de lados a, b, c y d siendo a, b y c,d los lados opuestos se siga la regla

$$A = \frac{(a+b)}{2} \times \frac{(c+d)}{2}$$

Lógicamente esta fórmula es exacta para figuras rectangulares, pero cuanto más irregular sea la figura más error se comete. Incluso se utiliza para campos triangulares, en los que se afirma que debe tomarse el lado d como "nada". Como puede apreciarse no se puede afirmar que tuviesen una geometría muy avanzada pues todo se basa en aproximaciones muy groseras a las fórmulas reales.

En el papiro Ahmes vemos que el cálculo de áreas tendía a emplear la conversión de la figura a analizar en "algo parecido a una figura conocida"que permita llegar al área buscada. Un sistema de cálculos parciales cuya suma permita obtener el área de la figura inicial. Veremos este método en el cálculo del área del círculo. Es quizá un primer paso hacia la demostración geométrica y un intento de encontrar las relaciones mutuas entre figuras geométricas, pero que se quedó ahí, en un primer paso, y al que nunca se le ha dado la importancia que tiene. Por este método se justifica el cálculo del área de un triángulo isósceles.

Según Ahmes debe dividirse la mitad de la base y multiplicar el resultado por la altura. Como es lógico el escriba no emplea los términos base, altura o isósceles para expresarse, pero por la figura y la explicación que da debemos pensar que se trata de un triángulo isósceles. Ahmes justifica este cálculo afirmando que puede considerarse el triángulo formado por 2 triángulos rectángulos, de manera que el desplazamiento de uno de ellos da lugar a un rectángulo con lados de la misma longitud que el triángulo de partida. Curiosamente Ahmes describe el triángulo como "un pedazo de tierra de una cierta anchura en un extremo y que llega a un punto".

Luego de haber leído la pequeña reseña histórica sobre el cuadriláteros se va enunciar la definición, clasificación y propiedades:

2. Cuadriláteros

Definición 2.1. Cuadriláteros

Es la unión de los segmentos que unen cuatro puntos del plano, donde tres cualesquiera de ellos no están alineados. El cuadrilátero de la Figura 1 se lee **el cuadrilátero BADC**, en la misma orientación que las agujas del reloj.

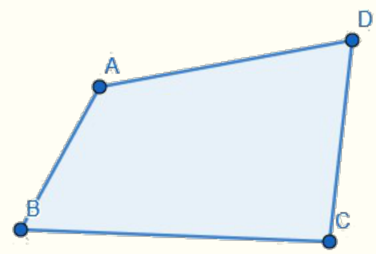


Figura 1. Cuadriláteros

2.1. Clasificación de Cuadriláteros

Los cuadriláteros pueden clasificarse de acuerdo a sus diagonales de la siguiente forma:

Definición 2.2. Cuadrilátero Convexo

Es un cuadrilátero con las dos diagonales en su interior.

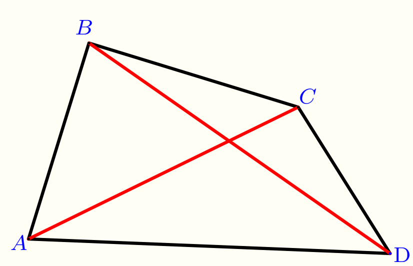


Figura 2. Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Definición 2.3. Cuadrilátero Entrante

Es un cuadrilátero con una diagonal en el interior y otra en el exterior.

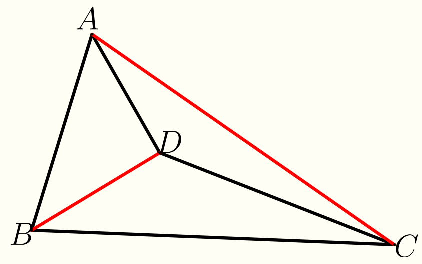


Figura 3. Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Tanto los cuadriláteros convexos como los entrantes son cuadriláteros *simples*, que son los cuadriláteros cuyos lados no se cortan salvo en los extremos; en contraposición, los cuadriláteros cruzados no son simples.

Definición 2.4. Cuadrilátero Cruzado

Es un cuadrilátero con las diagonales en su exterior.

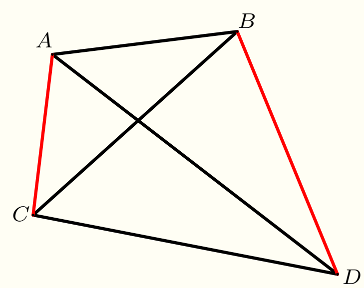


Figura 4. Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Es muy frecuente que se considere que un cuadrilátero es convexo, a menos que se especifique lo contrario. Esto es así porque muchos resultados son más claros en un cuadrilátero convexo, sin embargo, es importante darse cuenta que existen teoremas que no se cumplen para cualquier tipo de cuadriláteros, por ejemplo:

Teorema 2.1.

La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero no cruzado es $360°$.

Demostración

La demostración de este resultado se basa en la trazar unas de sus diagonales internas del cuadrilátero el cual lo divide en dos triángulos cuyos ángulos internos conforman los ángulos internos del cuadrilátero como se muestra en la Figura 2 y 3, como cada triángulos los ángulos internos suman $180°$, sumando se obtiene $360°$ sin embargo, estas condiciones no pueden lograrse en un cuadrilátero cruzado; de hecho, la suma de los ángulos internos puede hacerse arbitrariamente pequeña cuando el cuadrilátero es cruzado.

■

También hay otras clasificaciones de cuadriláteros de acuerdo a sus lados y ángulos.

Cuadrilátero Equiángulo: un cuadrilátero (convexo) es equiángulo si todos sus ángulos internos son iguales.Dado el teorema anterior, los ángulos son iguales a $90°$, por ello este cuadrilátero es llamado *rectángulo*.

Cuadrilátero Equilátero: un cuadrilátero (convexo) es equilátero si todos sus lados son iguales. A este cuadrilátero también se le conoce como *rombo*.

Cuadrado: es un cuadrilátero que es equiángulo y equilátero. El área de la región determinada por un cuadrado es $lado^2$.

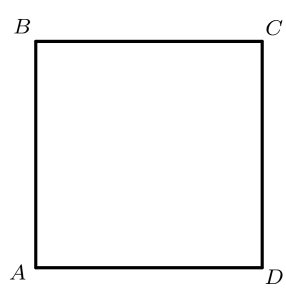


Figura 5. Cuadrado

Trapecio Es un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos.

Definición 2.5. Paralelogramo

Es el cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos y congruentes. En todo paralelogramo se cumple que sus ángulos opuestos son congruentes y sus diagonales se bisecan. El paralelogramo también se conoce como romboide.

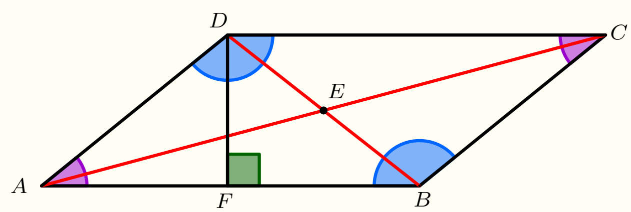


Figura 6. Paralelogramo

El área de un palelogramo es $A = base \cdot altura$. Dado el paralelogramo $ABCD$, por propiedades de ángulos entre paralelas es posible probar el siguiente resultado:

Teorema 2.2.

Los ángulos opuestos son iguales y los ángulos consecutivos son suplementarios: $\angle BAD = \angle DCB = \alpha$ y $\angle CBA = \angle ADC = 180 - \alpha$ (ver Figura 7).

Demostración

Como $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$ entonces por ángulos entre rectas paralelas cortas por una secante se tiene que $\angle BAD = \angle ABE$. Las rectas $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ entonces por ángulos correspondientes tenemos que $\angle ABE = \angle DCB = \alpha$, además $\angle CBA = \angle ADC = 180° - \alpha$.

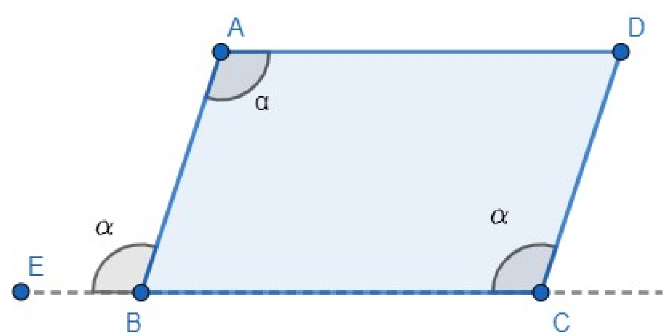


Figura 7.

■

Teorema 2.3.

Los lados opuestos de un paralelogramos son iguales.

Demostración

En el paralelogramo de la Figura 6, aplicando el teorema anterior resulta que $\angle ADC = \angle CBA$, y $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle ACB = CAD$ por ser ángulos entre rectas paralelas entonces aplicando el criterio (A-L-A) los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$ son congruentes; esto implica que $AB = CD$ y $BC = DA$

■

Recordatorio

El criterio $(A - L - A)$ dice que: Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados iguales y el ángulo formado ambos lados es igual.

Teorema 2.4.

Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

Demostración

En la Figura 8, si E es la intersección de $\overline{AC}$ con $\overline{BD}$, resulta $\angle BAE = \angle ECD$ y $\angle EBA = \angle EDC$ por ángulos alternos internos entre rectas paralelas, además $DC = AB$ aplicando el criterio de congruencia para triángulos $(A-L-A)$, los $\triangle ABE$ y $\triangle CDE$ son congruentes, por lo tanto $AE = CE$ y $BE = DE$.

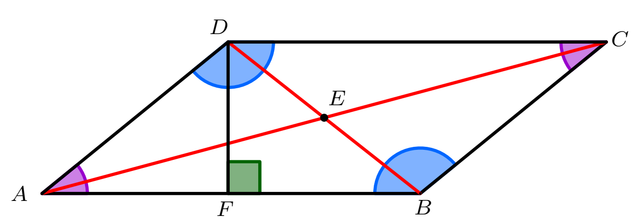


Figura 8. Paralelogramo

■

Además, se cumple el siguiente resultado:

Teorema 2.5. Ley del Paralelogramo

Si cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo entonces el doble de la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales, es decir

$$2\left(AB^2 + BC^2\right) = AC^2 + BD^2$$

Demostración

Por el teorema de Pitágoras en triángulo FDB (ver Figura 8) se tiene que: $FB^2 + FD^2 = DB^2$, sea H el punto de intersección entre la proyección de AB y proyección de la altura del triángulo ACB, por el teorema de pitágoras se tiene que: $AC^2 = AH^2 + CH^2$.

$$\begin{aligned} DB^2 + AC^2 &= FB^2 + FD^2 + AH^2 + CH^2 \\ &= FB^2 + FD^2 + (AB + BH)^2 + DF^2 \\ &= FB^2 + FD^2 + (AB + AF)^2 + DF^2 \\ &= FB^2 + FD^2 + AB^2 + 2AB \cdot AF + AF^2 + DF^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DB^2 + AC^2 &= AB^2 + (DF^2 + AF^2) + FD^2 + FB^2 + 2AB \cdot AF \\ &= AB^2 + AD^2 + FD^2 + (AB - AF)^2 + 2AB \cdot AF \\ &= AB^2 + BC^2 + FD^2 + AB^2 - \cancel{2AB \cdot AF} + AF^2 + \cancel{2AB \cdot AF} \\ &= 2AB^2 + BC^2 + (FD^2 + AF^2) \\ &= 2AB^2 + BC^2 + AD^2 \\ &= 2AB^2 + 2BC^2 \end{aligned}$$

■

Definición 2.6. Rectángulo

Es el paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos igual a 90°.

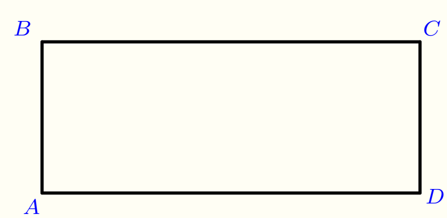


Figura 9. Rectángulo

El área de la región determinada por un rectángulo es $A = AB \cdot AD$. Dentro de las propiedades que cumple los rectángulos son:

Teorema 2.6.

Las diagonales de un rectángulo son iguales; además, el punto de intersección de estas equidista de los cuatro vértices y por tanto es el centro de una circunferencia que pasa por todos los vértices.

Demostración

Si se forma dos triángulos como se muestra en la figura siguiente

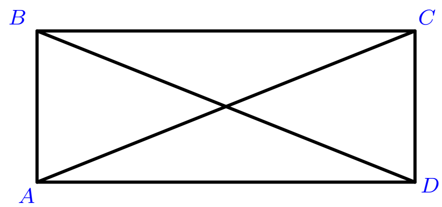


Figura 10.

Sabemos que un rectángulo es un paralelogramo y por el teorema 2.3 donde establece que los lados opuestos son iguales se tiene $AB = CD$, $BC = AD$ y $\angle B = \angle D$, por criterio $(L - A - L)$, $\triangle ABC$ es congruente con $\triangle ADC$, por lo que $AC = BD$, además por el teorema 2.4 el punto de intersección equidista de los cuatro vértice

Recordatorio

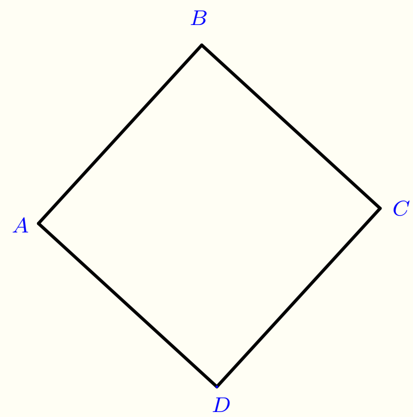
El criterio $(L - A - L)$ dice que: dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos iguales y el lado correspondiente es igual.

■

Por otra parte, observe que si se aplica la ley del paralelogramo a un rectángulo se obtiene el *Teorema de Pitágoras.*

Definición 2.7. Rombo

Es el paralelogramo que tiene sus cuatro lados son iguales.

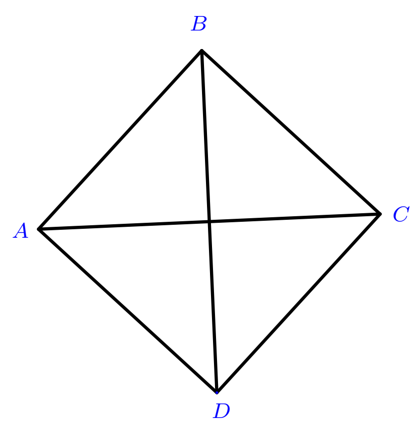


Teorema 2.7.

Las diagonales de un rombo bisecan a los ángulos interiores del rombo.

Demostración

En el rombo $ABCD$, se trazan las diagonales como se muestran en la figura siguiente



El triángulo $\triangle ABD$ es congruente con $\triangle DBC$ dado que $AB = BC$, $AD = DC$ y comparten un lado aplicando criterio $(L - L - L)$ entonces $\angle ABD = \angle DBC$ y $\angle BDA = \angle CDB$. También Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$ son congruente dado que $AB = AD$, $BC = CD$ y comparten un lado aplicando criterio $(L - L - L)$ entonces $\angle CAB = \angle DAC$ y $\angle BCA = \angle ACD$.

■

Teorema 2.8.

Las diagonales de un rombo cumplen ser una mediatriz de la otra.

Demostración

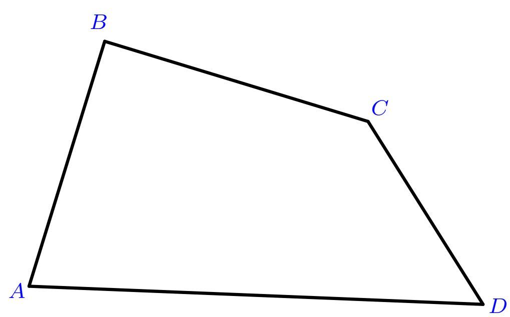
Cuando trazamos las diagonales de rombo se obtienen cuatro triángulos congruentes, por el criterio $(L-L-L)$, por lo que las diagonales se cortan perpendicularmente y cada diagonal pasa por el punto medio de la otra por el teorema 2.4, entonces una diagonal es la mediatriz de la otra diagonal y viceversa.

Definición 2.8. Trapezoides

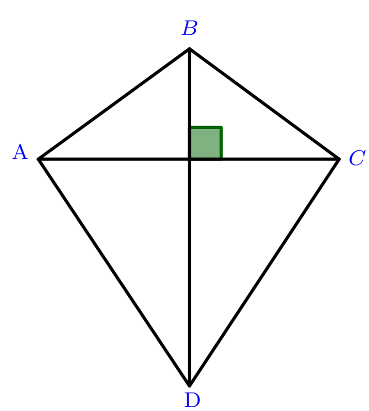
Es un cuadrilátero que no tiene pares de lados paralelos.

Los trapezoides se clasifican en:

Trapezoide asimétrico: No tiene ningún par de lados paralelos o congruentes.



Trapezoide simétrico: Dos pares de lados consecutivos son congruentes; además una de las diagonales es mediatriz de la otra.



Definición 2.9. Trapecios

Es el cuadrilátero que tiene dos lados paralelos denominados base y los otros dos no son paralelos. La distancia entres sus bases se llama altura, y el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se denomina mediana. Sea M y N los puntos medios de AB y CD entonces MN es la mediana, además $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ como se muestra en la figura siguiente.

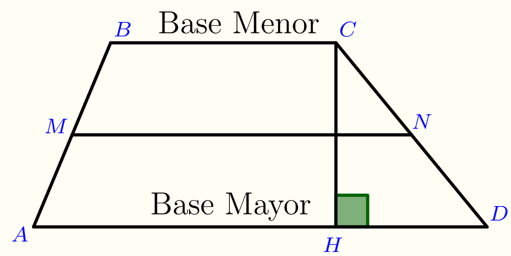
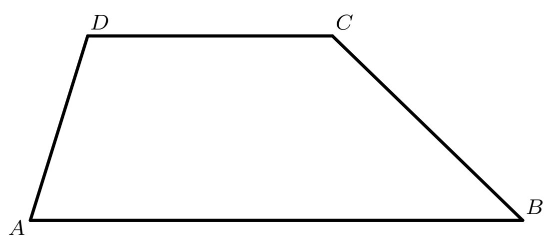


Figura 11. Trapecio

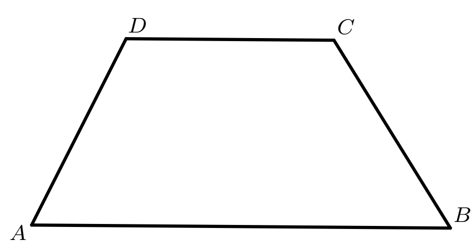
El área se calcula como $A = \dfrac{(base\,mayor + base\,menor) \cdot altura}{2}$

Los trapecios se clasifican en:

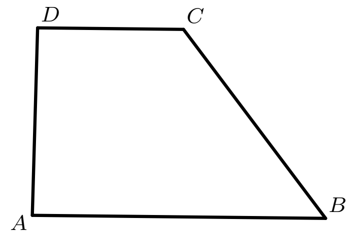
Trapecio escaleno: Es aquel en que sus lados no paralelos son diferentes.



Trapecio isósceles: Es aquel en sus lados no paralelos son congruentes. $AB = CD$



Trapecio rectángulo: Cuando uno de sus lados no paralelos es perpendicular a las bases.



Luego, exponer la clasificación de los trapecios, se enuncia el siguiente teorema el cual establece una relación entre el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos con sus bases.

Teorema 2.9. Base media para trapecio

La base media o mediana de un trapecio es igual a la semisuma de las bases.

Demostración

Dado el trapecio $ADCB$ (con $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$), sea M y N los puntos medios de AB y CD, respectivamente como se muestra en la Figura 12.

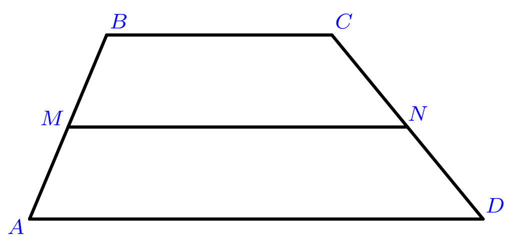


Figura 12.

Si el cuadrilátero $MBCN$ se rota con centro en M y ángulo $180°$ se genera un cuadrilátero $C'N'MA$ como lo muestra la Figura 13.

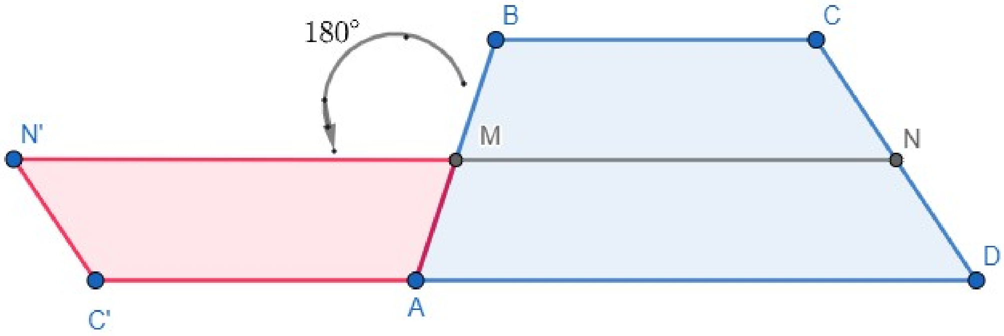


Figura 13.

observe que $ND = N'C'$ y $\overline{ND} \parallel \overline{N'C'}$, por lo que $C'N'ND$ es un paralelogramo y

$$\begin{aligned} N'N &= C'D \\ 2MN &= C'A + AD \\ 2MN &= BC + AD \\ \Rightarrow MN &= \frac{AD + BC}{2} \end{aligned}$$

El segmento MN es llamado *base media* del trapecio.

Los trapecios isósceles son muy importantes cuando se estudian los ángulos en la circunferencia; resulta que un trapecio es isósceles si y sólo si los cuatro vértices se ubican sobre una misma circunferencia.

2.2. Teorema de Pitágoras

A continuación se enunciará uno de los teoremas mas famosos de la geometría plana, además, se enunciará y demostrará su reciproco.

Teorema 2.10. Teorema de Pitágoras.

Para un triángulo rectángulo con catetos a y b e hipotenusa c, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

El teorema de Pitágoras es uno de los teoremas con más demostraciones, demostraciones que utilizan áreas, congruencias, semejanza entre otras ideas, hasta el momento nosotros estudiaremos algunas pruebas utilizado áreas.

Demostración

Considere la siguiente construcción

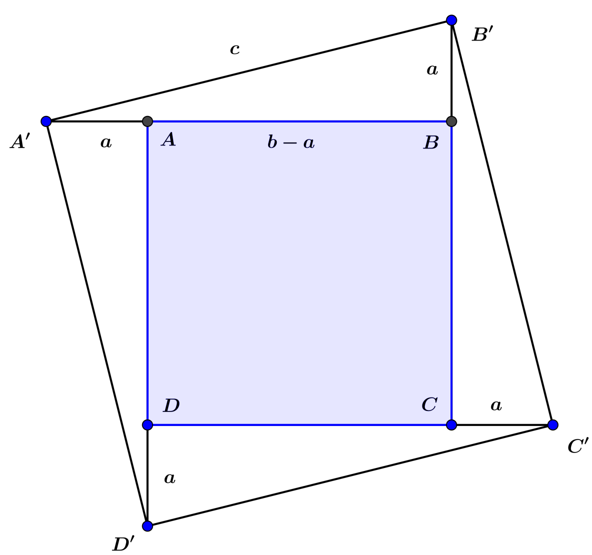


Figura 14. Demostración del teorema de Pitágoras

Se tiene el cuadrado $ABCD$, de lado $b-a$, a partir de éste se construye el cuadrado $A'B'C'D'$, de longitud c, ahora bien, nótese que podemos escribir el área del cuadrado grande de dos formas distintas:

1. El área del cuadrado $A'B'C'D'$ es c^2.

2. Por otro lado, los triángulos ABB', $B'CC'$, $C'DD'$ y $A'AD$ son congruentes, por el criterio $(L-A-L)$. El área en este caso se puede escribir como $4 \cdot \frac{ba}{2} + (b-a)^2$

$$\begin{aligned} c^2 &= 4 \cdot \frac{ba}{2} + (b-a)^2 \\ &= \cancel{2ba} + b^2 - \cancel{2ba} + a^2 \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.11. Recíproco del teorema de Pitágoras.

Si las longitudes a, b y c de un triángulo cumplen

$$c^2 = a^2 + b^2$$

entonces el triánglo es rectángulo, de hipotenusa c y catetos a y b

Demostración

Sea el triángulo ABC cumple que $AC^2 + BC^2 = AB^2$, luego se traza la altura AH como se muesta en la Figura 15, probaremos que el punto $H = C$. Por el teorema de Pitágoras sobre el triángulo AHB se tiene:

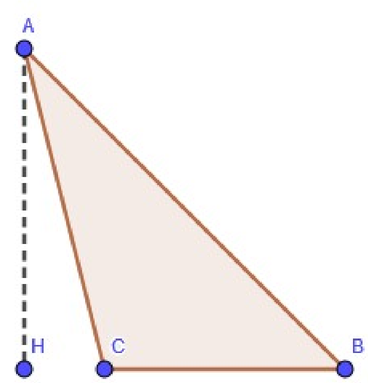


Figura 15.

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + HB^2 \\ AB^2 &= (AC^2 - HC^2) + HB^2 \\ AB^2 &= (AC^2 - HC^2) + (HC + BC)^2 \\ AB^2 &= AC^2 - \cancel{HC^2} + \cancel{HC^2} + 2HC \cdot BC + BC^2 \\ AB^2 &= (AC^2 + BC^2) + 2HC \cdot BC \\ AB^2 &= AB^2 + 2HC \cdot BC \\ \cancel{AB^2} &= \cancel{AB^2} + 2HC \cdot BC \\ 0 &= 2HC \cdot BC \end{aligned}$$

Como $BC \neq 0$, entonces $HC = 0$, lo que implica que $H = C$.

■

2.3. Teoremas sobre áreas

Para iniciar a enunciar los teoremas sobre área de triángulos y cuadriláteros, se enunciará algunos postulados que serán la base teórica para los teoremas enunciados.

a) Si dos triángulos son congruentes, entonces el área de la región determinada por los dos triángulos son iguales.

b) El área de la región determinada por un cuadrado es el cuadro de la longitud de su lado.

Teorema 2.12.

El área de la región determina por rectángulo es el producto de sus lados.

Demostración.

Sea un rectángulo que tiene como lados a b y h, se construye una cuadrado de lado $b + h$, como se muestra en la Figura 16.

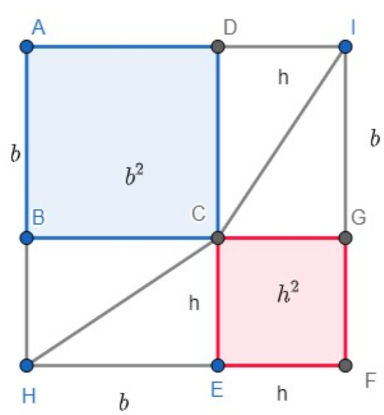


Figura 16.

Se tiene que el área de $AIFH$ es $(b+h)^2$, y también la suma del los cuadros $BADC$ y $CGFE$, y los rectángulos $HBCE$ y $CDIG$ dichos rectángulos son congruentes debido a que forman 4 triángulos congruentes (Por criterio L-A-L), por lo tanto el área determinada por estos triángulos es igual. Entonces

$$
\begin{aligned}
(b+h)^2 &= b^2 + \text{Área}_{HBCE} + \text{Área}_{CDIG} + h^2 \\
\cancel{b^2} + 2b \cdot h + \cancel{h^2} &= \cancel{b^2} + 2 \cdot \text{Área}_{HBCE} + \cancel{h^2} \\
2b \cdot h &= 2 \cdot \text{Área}_{HBCE} \\
b \cdot h &= \text{Área}_{HBCE}
\end{aligned}
$$

Teorema 2.13.

El área de la región determinada por triángulo es el producto de la base por la altura.

Demostración

Existen tres casos:

- Caso 1: Si el triángulo es rectángulo.

  Sea h: altura, b: base, se construye la Figura 17 de forma que el $\triangle BAC$ es congruente con el $\triangle ADC$.

  Se tiene que $\text{Área}_{BAC} = \text{Área}_{ADC}$, además se forma el rectángulo $BADC$, entonces el área de la región determinada por el rectángulo es:

$$
\begin{aligned}
\text{Área}_{BADC} &= b \cdot h \\
\text{Área}_{BAC} + \text{Área}_{ADC} &= b \cdot h \\
2 \cdot \text{Área}_{BAC} &= b \cdot h \\
\text{Área}_{BAC} &= \frac{b \cdot h}{2}
\end{aligned}
$$

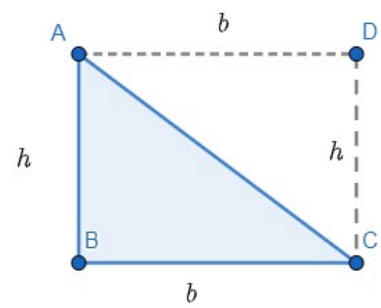


Figura 17.

- Caso 2: Si es un triángulo acutángulo.

  Sea AD: altura $= h$, BC : base$= b$, se construye la Figura 18 de que se forman dos triángulos rectángulos el área de la región determinada por el triángulo BAC es la suma de la áreas de las regiones determinadas por los triángulos rectángulos BAD y DAC.

$$\begin{aligned}
\text{Área}_{BAC} &= \text{Área}_{BAD} + \text{Área}_{DAC}\\
&= \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} \quad \text{Factor común } h\\
&= \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}\\
&= \frac{b \cdot h}{2}
\end{aligned}$$

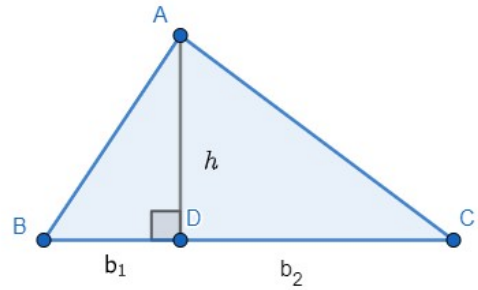


Figura 18.

- Caso 3: Si es un triángulo obtusángulo.

  Sea AD: altura $= h$, BC : base$= b$, se construye la Figura 17.

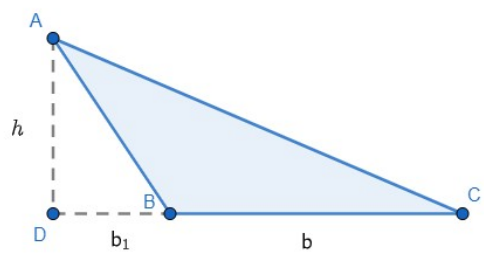


Figura 19.

Se forman dos triángulos rectángulos DAC y DAB, entonces

$$\begin{aligned}
\text{Área}_{ACB} &= \text{Área}_{DAC} - \text{Área}_{DAB}\\
&= \frac{(b_1 + b) \cdot h}{2} + \frac{b_1 \cdot h}{2} \quad \text{Factor común } h\\
&= \frac{((\cancel{b_1} + b) - \cancel{b_1}) \cdot h}{2}\\
&= \frac{b \cdot h}{2}
\end{aligned}$$

Teorema 2.14.

El área de una región determinada por un trapecio es

$$\text{Área trapecio} = \frac{(base\,menor + base\,mayor) \cdot h}{2}$$

Demostración

Se construye la Figura 20:

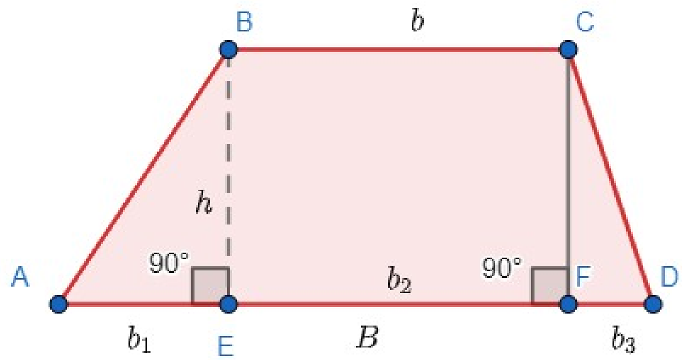


Figura 20. Demostración de área de un trapecio

Se tiene que el área de la región determinada por el trapecio es la suma del área de las regiones determinadas por los triángulo ABE, FCD y el rectángulo $BCFE$. Entonces

$$\begin{aligned}
\text{Área trapecio} &= \text{Área}_{ABE} + \text{Área}_{EBCF} + \text{Área}_{DCD} \\
&= \frac{b_1 \cdot h}{2} + b_2 \cdot h \frac{b_3 \cdot h}{2} \quad \text{Factor común } h \\
&= \frac{(b_1 + 2b_2 + b_3) \cdot h}{2} \\
&= \frac{((b_1 + b_2 + b_3) + b_2) \cdot h}{2} \quad b_2 = b \\
&= \frac{((b_1 + b_2 + b_3) + b) \cdot h}{2} \\
&= \frac{(B + b) \cdot h}{2}
\end{aligned}$$

Teorema 2.15.

El área de una región determinada por un paralelogramo es el producto de cualquier base por la altura correspondiente.

Demostración

Se construye la Figura 21:

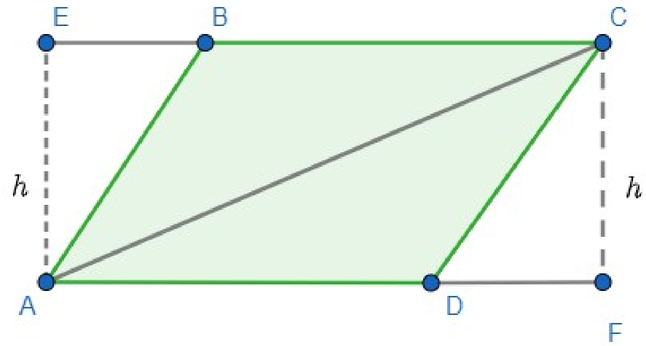


Figura 21. Demostración del área de un paralelogramo

Donde se trazó la diagonal AC se forman dos triángulos congruentes (Criterios L-A-L), entonces

$$
\begin{aligned}
\text{El área del paralelogramo } ABCD &= \text{Área}_{ABC} + \text{Área}_{ACD} \\
&= \frac{BC \cdot h}{2} + \frac{AD \cdot h}{2} \quad \text{Factor común } h \\
&= \frac{(BC + AD) \cdot h}{2} \quad BC = AD \text{ por ser lados de un paralelogramo} \\
&= \frac{2AD \cdot h}{2} \\
&= AD \cdot h
\end{aligned}
$$

Teorema 2.16. Área del rombo

El área de una región determinada por un rombo es el producto de las medidas de sus diagonales por dos.

Demostración

Pasos de la demostración:

1. Construir un rombo y trazar las diagonales.
2. Identificar que se forma cuatro triángulos rectángulos (justificar).
3. Calcular el área de la región determinada por el rombo, a partir de la suma de las áreas determinadas por los triángulos rectángulos congruentes.
4. Concluir con la demostración

Los cálculos y cuentas necesarias quedan como ejercicio.

3. Polígonos

Definición 3.1. Poligonos

Sean $P_1, P_2, \cdots, P_n$ una conjunto de puntos en el plano, donde no hay tres puntos alineados, y $n \geq 3$, a la unión de los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, $\cdots$, $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$ se denomina **polígono** como se muestra en la Figura 22.

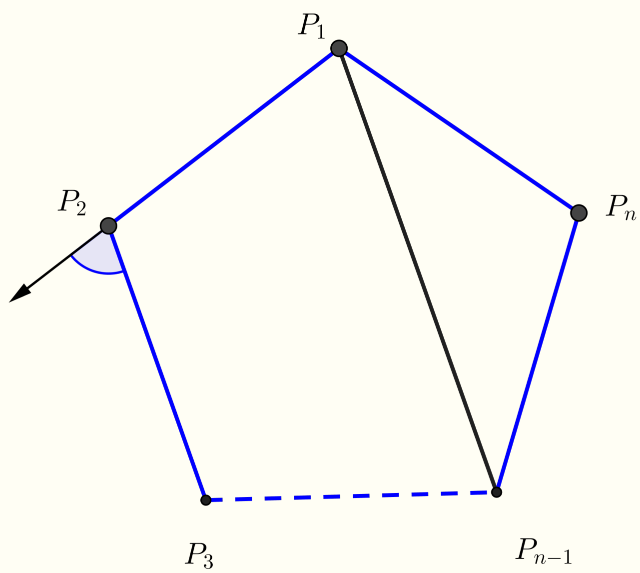


Figura 22. Elementos de un polígono

Los puntos $P_1, P_2, \cdots, P_n$ son llamados vértices del polígono y los segmentos que lo determinan son sus lados, los cuales no deben interceptarse más que en sus extremos.

Los ángulos del polígono son $\angle P_1, \angle P_2, \cdots, \angle P_n$. El perímetro del polígono es igual a la suma de sus lados. Llamaremos diagonal de un polígono al segmento de recta que une dos vértices no consecutivos. El ángulo exterior de un polígono es el ángulo determinado por un lado y por la prolongación del lado adyacente. En todo polígono se cumple que el número de de lados es igual al número de vértices e igual a su número de diagonales.

Un polígono con n lados se llama n-gono. Así pues, podemos llamar a los triángulos y cuadriláteros como 3-gono y 4-gono respectivamente, aunque estos términos casi nunca se utlizan. Los 5-gono se llaman pentágonos, los 6-gono se denominan hexágono, etc.

3.1. Clasficación.

1. **Polígono convexo:** cualquiera de sus lados está contenido en una recta que separa al plano en dos semiplanos, de modo que los otros lados se encuentran en un mismo semiplano. La unión de un polígono convexo con su interior determina un conjunto convexo, llamado poligonal convexa.

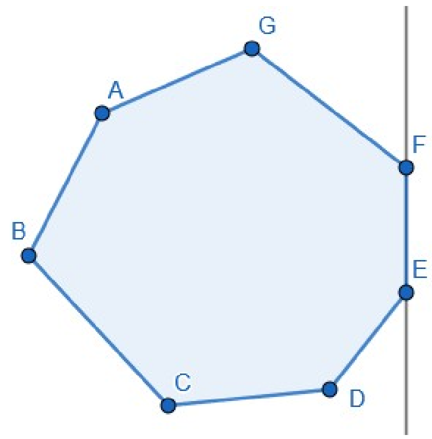


Figura 23. Polígono Convexo.

2. **Polígono no convexo:** si una recta contiene a uno de sus lados, se notará que en cada semiplano determinado por la recta hay puntos del polígono. La reunión de este tipo de polígono con su interior determina un cunjunto no convexo, llamado región poligonal non convexa.

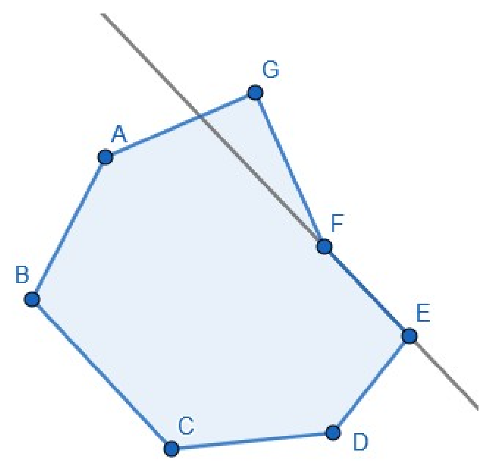


Figura 24. Polígono no Convexo

3. **Polígono equiángulo:** es aquel polígono convexo donde todos sus ángulos son iguales.

Figura 25. Ejemplo de polígono equiángulos.

4. **Polígono equilátero:** es aquel polígono convexo o no convexo donde todos sus lados son iguales.

5. **Polígono regular:** polígono convexo que es equiángulo y equilátero.

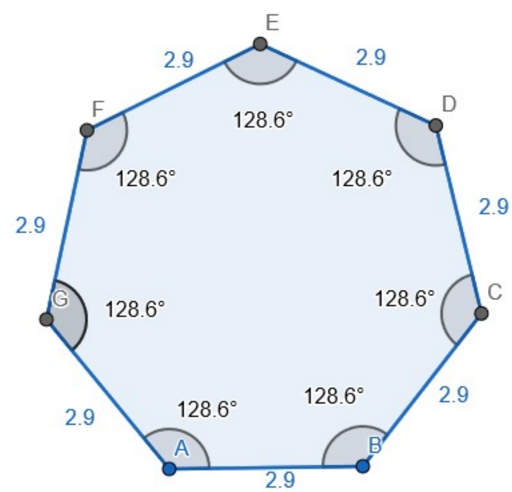


Figura 26. Ejemplo de polígono regular

3.2. Propiedades elementales.

Las demostraciones de las siguientes propiedades, quedan a cargo del lector.

1. La suma de las medidas de los ángulos internos en un polígono convexo de n lados es

$$S_I = 180°(n-2).$$

2. La suma de los ángulos exteriores es $S_E = 360°$.

3. El número total de diagonales en un polígono de n lados es

$$N_d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

4. El número de diagonales que se pueden trazar desde ”M”vértices consecutivos es

$$N_M = M \cdot n - \frac{(M+1)(M+2)}{2}.$$

5. El máximo número de ángulos agudos de un polígono convexo es 3.

6. El número de diagonales que se pueden trazar de un vértices es $n-3$.

3.3. Propiedades para polígonos regulares.

1. La medida del ángulo interior es $\dfrac{180°(n-2)}{n}$.

2. La medida del ángulo exterior es $\dfrac{360°}{n}$.

3. Medida del ángulo central $\dfrac{360°}{n}$.

4. La suma de las medidas de los ángulos centrales es $360°$.

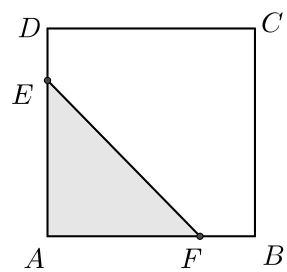
Recordatorio

- Si el ejercicio o problema no proporciona figura, se recomienda la construcción de una excelente figura, esto nos dará una mejor compresión del problemas, posibilitando la resolución del ejercicio o problema.
- Los criterios de congruencias de triángulos, el teorema de la base media e implicaciones, las propiedades de los triángulos y paralelogramo son contenidos que deben estar asimilados y comprendido como se aplican en la resolución de problemas.
- Los trazos de segmentos son una estrategia importante, debido a que nos permiten construir la aplicación de propiedades, por ejemplo, ángulos entre rectas paralelas, propiedades de un triángulo isósceles, de otro triángulo congruente, etc.
- Los ejemplos que se presenta a continuación tiene el objetivo de proporcionar ideas y estrategias de resolución de problemas geométricos, se recomienda resolver los ejemplos sin ayuda del material, con la intención de practicar y memorizar la teoría.

4. Ejemplos

✓Ejemplo 4.1

Si $ABCD$ es un cuadrado de lado 1 y EF es paralela a la diagonal DB, si $EF = 1$, ¿Cuánto es el área de la región sombreada?



Solución

Trazamos la diagonal DB, esta diagonal es bisectriz del ángulo $\angle EDC$ lo que implica que $\angle EDB = 45^\circ = \angle DBF$ y como $DB \parallel EF$ entonces $\angle AEF = \angle EDB$ y $\angle EFA = \angle DBF$ ambos de 45 grados. El $\triangle AEF$ es un triángulo rectángulo isósceles, entonces el lado $EA = AF = a$, aplicando el teorema de Pitágoras en el $\triangle AEF$

$$AE^2 + AF^2 = 1$$
$$2a^2 = 1$$
$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

entonces el área del área sombreado es

$$A = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

✓Ejemplo 4.2

Las diagonales de un cuadrilátero $ABCD$ se cortan en O, sean M y N puntos en la diagonal $\overline{AC}$ tales que $AM = CN$ y $BMDN$ es un paralelogramo. Mostrar que $ABCD$ es un paralelogramo.

Demostración

Se construye la Figura 27 a partir de los datos, Para demostrar que $ABCD$ es un paralelogramo debemos probar que $AB = CD$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $BC = AD$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

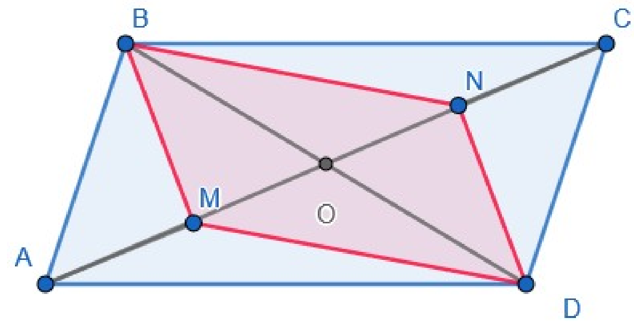


Figura 27. Ejemplo

Como $AM = CN$, $BM = ND$ (por $BMDN$ es paralelogramo) y $\angle BMA = \angle DNC$ (porque los ángulos suplementarios $\angle OMB$, $\angle OND$ son iguales por ser ángulo entre rectas paralelas), entonces aplicando el el criterio de congruencia $(L-A-L)$ los ABM y $\triangle NCD$ son congruentes. Implicando que $AB = CD$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ por que $\angle MAD = \angle NCD$.

Además $\angle NOB = \angle AOD$ (por ser ángulos opuestos por el vértice), $BO = OD$ (porque el punto O es centro de paralelogramo $BMDN$ los cuales se bisecan) y en consecuencia $AO = OC$, aplicando el criterio $(L - A - L)$ entonces los triángulos BCO y AOD son congruentes. A partir de esta congruencia se tiene que $BC = AD$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ por que $\angle BCN = \angle MAD$. Por lo tanto $ABCD$ es un paralelogramo. ■

✓Ejemplo 4.3

En la Figura 28, $AF = 8$, $FC = 2$, $BF = FE$ y $ADCB$ es un cuadrilátero rectángulo. Encuentre la medida de DE.

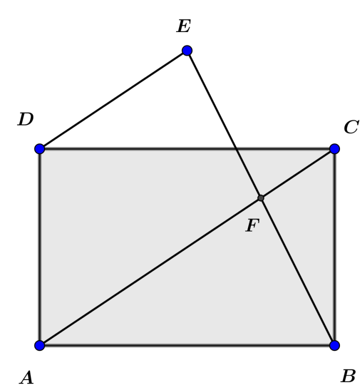


Figura 28. Ejemplo

Solución.

Trazamos la diagonal $\overline{BD}$ la cual se intercepta con $\overline{AC}$ en O como se muestra en la Figura 29.

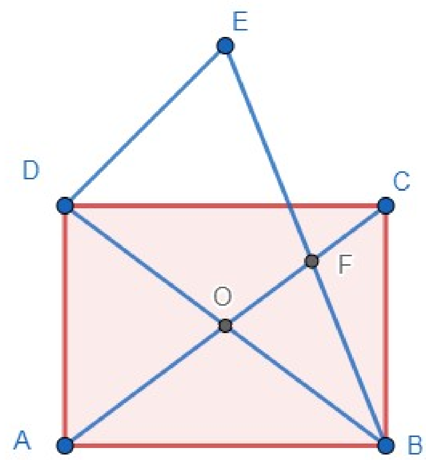


Figura 29. Ejemplo

como $ABCD$ es un rectángulo, entonces las diagonales se biseca, es decir $DO = BO$, por hipótesis $EF = FB$; aplicando el teorema de la base media en el triángulo DEB resulta que $\overline{DE} \parallel \overline{OF}$, además $DE = 2OF$, y puesto que $AF = 8$ y $FC = 2$ implica que $AC = 10 = 2OC \implies OC = 5$, de donde $OF = OC - FC = 3$, por tanto $DE = 2(OF) = 2(3) = 6$.

✓Ejemplo 4.4

Demuestre que en cualquier trapezoide convexo $ABCD$, el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos internos consecutivos es igual al promedio de los otros dos ángulos.

Demostración. Se construye la Figura 30, a partir de ella lo que se debe probar que es $\alpha = \dfrac{\beta + \theta}{2}$.

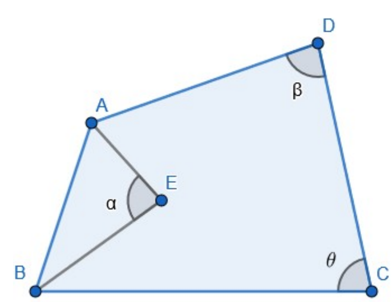


Figura 30. Ejemplo

Sabemos que en un trapezoide convexo la suma de sus ángulos internos es 360°, entonces

$$\begin{aligned}
\angle CBA + \angle BAD + \angle ADC + \angle DCB &= 360° \\
2\angle EBA + 2\angle BAE\beta + \theta &= 360° \\
2\left(180° - \alpha\right) + \beta + \theta &= 360° \\
\cancel{360°} - 2\alpha + \beta + \theta &= \cancel{360°} \\
-2\alpha &= -\beta + \theta \\
\alpha &= \frac{\beta + \theta}{2}
\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 4.5

Sea $ABCD$ un paralelogramo y E un punto en la región determinada por $\overline{AB}$ y las prolongaciones de $\overline{CB}$ y $\overline{DA}$. Por el punto medio O de BD se traza el segmento $\overline{EF}$ tal que $EO = OF$. Demostrar que los triángulos BCE y AFD son congruentes.

Demostración

A partir de enunciado del problema se construye la Figura 31:

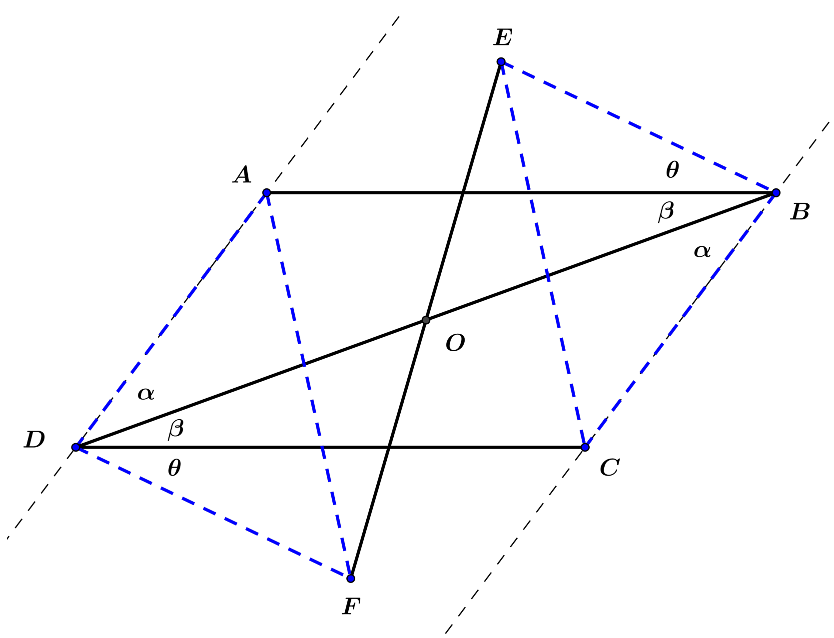


Figura 31. Ejemplo

Como $ABCD$ es un paralelogramo, se tiene que $AD = BC$, por otro lado $\angle DOF = \angle EOB$ por ser ángulos opuestos por el vértice O y por hipótesis $EO = OF$ aplicando el criterio $(L - A - L)$ los triángulos EBO y DOF son congruentes, de esta congruencia resulta $DF = EB$. Además, como $\angle ADB = \angle DBC = \alpha$, $\angle BDC = \angle ABD = \beta$ y $\angle CDF = \angle EBA = \theta$, por la congruencia anterior entonces, $\angle ADF = \angle EBC$, Así, los triángulos EBC y ADF son congruentes por criterio $(L - A - L)$.

■

✓Ejemplo 4.6

En un triángulo ACB $\angle C = 90°$, $\overline{AD}$ es bisectriz, $BD = 2,5$ y $CD = 1,5$. Encuentre AC

Solución

Considere la siguiente Figura 32. Trazamos $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ y así los triángulos CAD y ADE son congruentes, esto por el criterio $(A - L - A)$, entonces $AC = AE$ y $DE = CD = 1,5$. Luego, utilizando el teorema de Pitágoras en $\triangle BED$ tenemos:

$$\begin{aligned} BE &= \sqrt{BD^2 - DE^2} \\ &= \sqrt{6,25 - 2,25} \\ &= 2 \end{aligned}$$

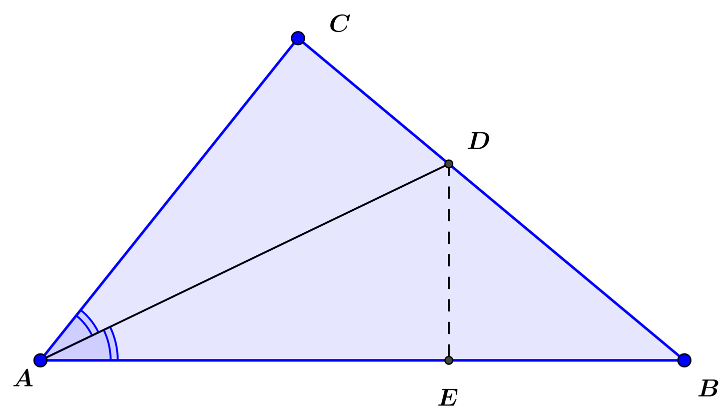


Figura 32. Ejemplo

Finalmente, si hacemos $AC = AE = x$ y aplicamos el teorema de pitágoras en el triángulo ABC se tiene la ecuación

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= x^2 + 4^2 \\ 4x &= 12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Por tanto, $AC = 3$ ■

✓Ejemplo 4.7

Formula para la mediana: en un triángulo ABC, $\overline{AM}$ es la mediana sobre el lado $\overline{BC}$. Demuestre que

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2).$$

Demostración

A partir del enunciado del problema se construye la Figura 33.

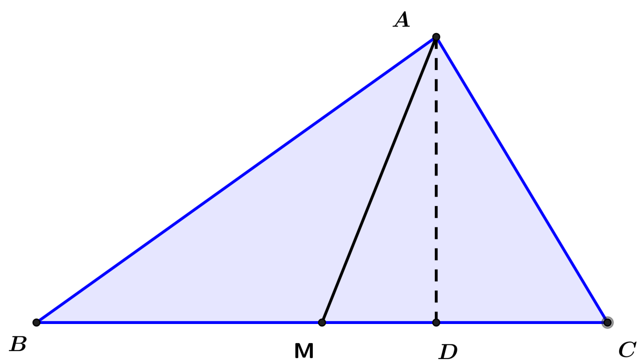


Figura 33. Ejemplo

Trazamos $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Por el teorema de Pitágoras sobre el $\triangle ADB$ resulta

$$\begin{aligned} AB^2 &= BD^2 + AD^2 \\ &= (BM + MD)^2 + AD^2 \\ &= BM^2 + 2BM \cdot MD + MD^2 + AD^2 \end{aligned} \tag{1}$$

aplicando el teorema de Pitágoras sobre $\triangle ADM$ resulta

$$\begin{aligned} AD^2 + MD^2 &= AM^2 \\ AD^2 &= AM^2 - MD^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1) resulta

$$\begin{aligned} AB^2 &= BM^2 + 2BM \cdot MD + \cancel{MD^2} + AM^2 - \cancel{MD^2} \\ &= BM^2 + AM^2 + 2BM \cdot MD. \end{aligned}$$

De manera similar en el $\triangle ACD$

$$\begin{aligned}AC^2 &= AD^2 + DC^2\\ &= AD^2 + (MC - MD)^2\\ &= AD^2 + MC^2 - MC \cdot MD + MD^2, \quad \text{sustituyendo la ecuación (2}\\ &= AM^2 - \cancel{MD^2} + MC^2 - 2MC \cdot MD + \cancel{MD^2}\end{aligned}$$

$$AC^2 = MC^2 + AM^2 - 2MC \cdot MD.$$

teniendo en cuenta que $BM = MC$ resulta

$$\begin{aligned}AB^2 + AC^2 &= BM^2 + AM^2 + \cancel{2BM \cdot MD} + MC^2 + AM^2 - \cancel{2MC \cdot MD}\\ &= BM^2 + AM^2 + MC^2 + AM^2\\ &= 2(AM^2 + BM^2)\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 4.8

En el trapecio $ADCB$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\angle DAB = \angle ADC = 90°$, se construye un triángulo ABC es equilátero. Dado que la mediana del trapecio es $EF = \dfrac{15}{4}$, encuentre la longitud de AB.

Demostración

A partir de las datos del problema se tiene la Figura 34:

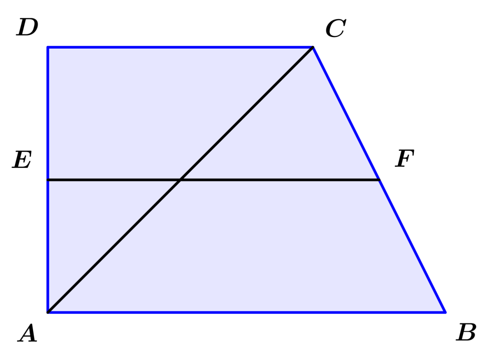


Figura 34. Ejemplo

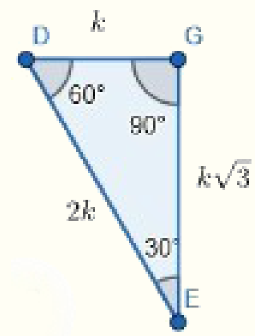
Sabemos que $\angle DAB = 90°$ esto implica que el $\angle DAC = 30°$, debido a que el ángulo interno $\angle CAB$ del triángulo equilátero ABC es de $60°$.

$CD = \dfrac{1}{2}AC$ porque $\triangle ADC$ es triángulo rectángulo notable de $30, 60$. Además $CD = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}AB$ porque $\triangle ABC$ es equilátero. Luego, utilizando el teorema de la base media para trapecio se tiene que:

$$EF = \frac{1}{2}(CD + AB) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AB + AB\right) = \frac{3}{4}AB$$
$$\frac{15}{4} = \frac{3}{4}AB$$
$$5 = AB$$

Recordatorio

El triángulo rectángulo de $30, 60$ cumple que:



■

✓Ejemplo 4.9

En un triángulo ABC, el $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{ME} \perp \overline{AB}$, $AE = 4$, encuentre BC.

Solución

A partir del enunciado del problemas se construye la Figura 35. Puesto que $\overline{EM} \perp \overline{AB}$ resulta los triángulos rectángulos BME y EMA, además, por el criterio $(L - L)$ dichos triángulos son congruentes, debido a que $BM = MA$ y comparten un lado. Así $\angle EBM = \angle EBA = \angle A = 30°$, $\angle CBE = 60° - 30° = 30°$, además $BE = AE$, como $\triangle CBE$ y $\triangle EMA$ son triángulo rectángulo notable de $30, 60$ se tiene que

$$CE = \frac{BE}{2} = \frac{AE}{2} = ME = 2\text{cm}$$

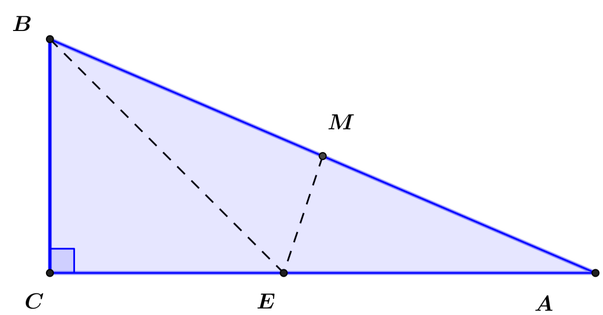


Figura 35. Ejemplo

finalmente, utilizando el teorema de pitágoras y haciendo $BC = x$ tenemos

$$(2x)^2 = x^2 + 6^2$$
$$x^2 = 12$$
$$x = 2\sqrt{3}.$$

Por tanto, $BC = 2\sqrt{3}$.

■

✓Ejemplo 4.10
El ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo es:

Demostración

Sea ABCD un paralelogramo como se muestra en la Figura 36.
Si se toma $\angle DAC = \alpha$ y $\angle ABC = \beta$, se trazan las bisectrices de estos ángulos internos y se toma a D como el punto de intersección de estas rectas, se tendrá por propiedades de paralelogramos que $\alpha + \beta = 180°$, de donde, $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 90°$ Por lo tanto

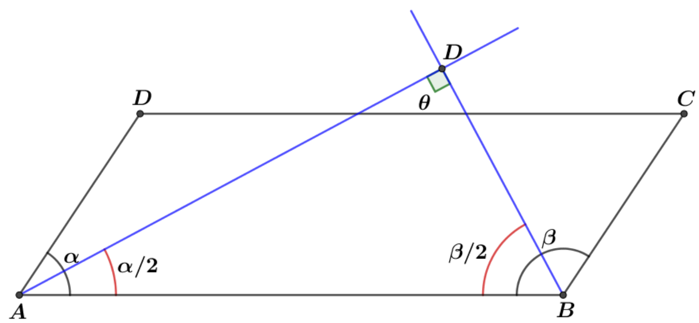


Figura 36. Ejemplo

$$\begin{aligned}\theta &= 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\\ &= 180° - 90°\\ &= 90°\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 4.11
Dado el trapecio $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, demuestre que la bisectriz interior del $\angle A$ es paralela a la bisectriz exterior del $\angle D$.

Demostración:

Sea el trapecio $ABCD$, denotando que $\angle BAD = \alpha = \angle FDA$, por ser ángulos entre las paralelas (dado que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$). Tracemos las bisectrices L_1, para el ángulo interno $\angle BAD$, y L_2 para el ángulo externo $\angle FDA$ como lo muestra la Figura 37.

Ahora se obtiene que $\angle BAW = \dfrac{\alpha}{2} = \angle DWA$ por ser ángulos entre paralelas ($AB \parallel DC$), además $\angle FDZ = \dfrac{\alpha}{2} = \angle GDW$ por ángulos opuestos por vértice, entonces $\angle DWA = \angle GDW$. Por lo tanto $L_1 \parallel L_2$ que es precisamente lo que se quería demostrar.

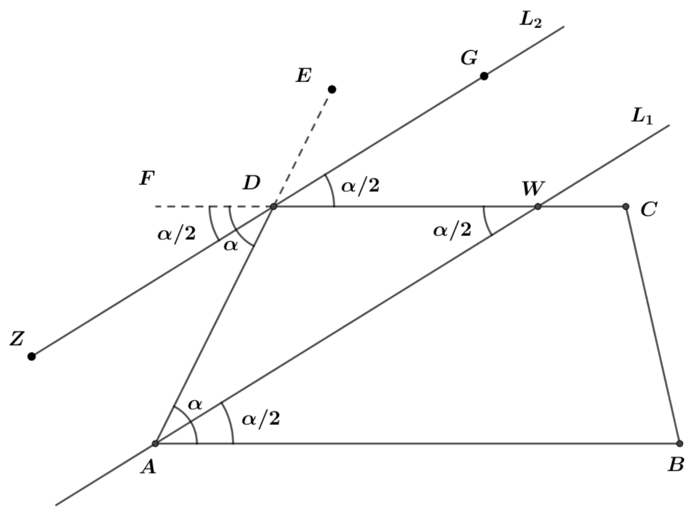


Figura 37. Ejemplo

■

✓Ejemplo 4.12

En el cuadrado $ABCD$, E es el punto medio de $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ interceptan a CE en F. Demuestre que $\overline{AF} \perp \overline{BE}$.

Demostración. A partir de la lectura de los datos se construye la Figura 38.

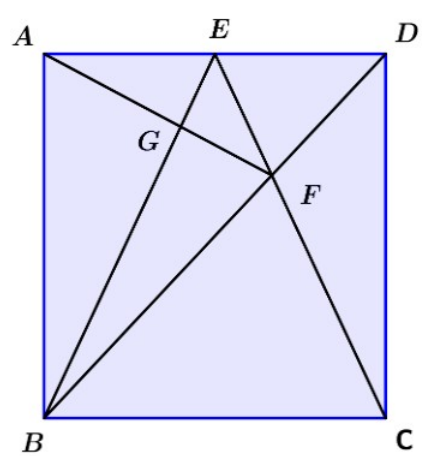


Figura 38. Ejemplo

Sea G el punto de intersección de AF y BE. Tenemos que los triángulos ABE y ECD son triángulos rectángulos y $AB = CD$, $AE = ED$; aplicando el criterio $(L - A - L)$ se tiene que el $\triangle ABE$ es congruente con el $\triangle DCE$.

Además por el criterio $(L - A - L)$ el $\triangle ADF$ es congruente con $\triangle CDF$, dado que $AD = DC$, comparten un lado y la diagonal $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo interno ADC por lo que $\angle ADF = \angle FDC$, de esta congruencia se obtiene que $\angle EAG = \angle DCF = \angle ABG$, pero en el triángulo ABE resulta que el $\angle AEG + \angle ABG = 90°$ entonces:

$$\begin{aligned}
\angle AGE + \angle AEG + \angle EAG &= 180° \\
\angle AGE + (\angle AEG + \angle ABG) &= 180° \\
\angle AGE + 90° &= 180° \\
\angle AGE &= 90°
\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 4.13

En todo trapezoide convexo, el cuadrilátero que se forma al unir los puntos medios de cada lado es un paralelogramo.

Demostración

Considere la Figura 39, se denota por M, N, P y Q los puntos medios de $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$,

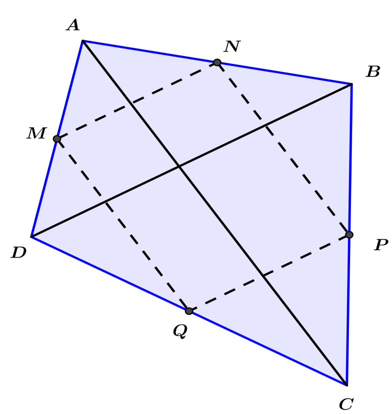


Figura 39. Ejemplo

El segmento $\overline{NP}$ es base media del triángulo ABC y $\overline{MQ}$ es base media del triángulo ADC de donde se obtiene que $\overline{MP} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{NP} \parallel \overline{AC}$ y además

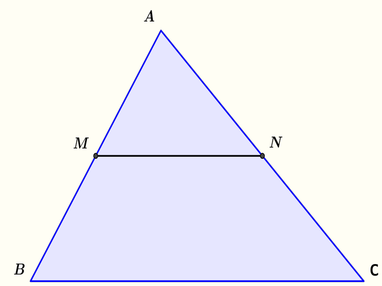
$$MQ = \frac{AC}{2} = NP,$$

de manera simila se tiene la misma situación para los lados $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$, por tanto, hemos demostrado que $MNPQ$ es un paralelogramo, ya que hemos demostrado que los lados opuestos son congruentes y paralelos.

■

Recordatorio

Teorema de la base media establece que $MN \parallel BC$ y además $MN = \dfrac{BC}{2}$



✓Ejemplo 4.14

En un cuadrilátero $ABCD$, $m\angle A = m\angle D = 80°$, $m\angle CAD = 50°$ y $m\angle ADB = 50°$. Calcular $m\angle CBD$.

Solución

A partir del enunciado del ejemplo se construye la Figura 40. Para encontrar el $\angle CBD$, probaremos que los triángulos BAE y CDE son congruente. A partir de los datos iniciales se obtiene que $\angle BEA = 100°$, observando en el triángulo BAD tenemos que $\angle EBA = 50°$ y además en el triángulo ADC el $\angle DCA = 50°$ lo que implica que los $\triangle BAD$, $\triangle EDA$ y $\triangle CDA$ son isósceles.

También se tiene que $\angle BEA = \angle DEC$ por ser ángulos opuestos por el vértice. Debido a que $BA = AD = CD$, $EA = ED$ y $\angle EAB = \angle CDE$ entonces los triángulos BAE y CDE son congruente por el criterio $(L - A - L)$.

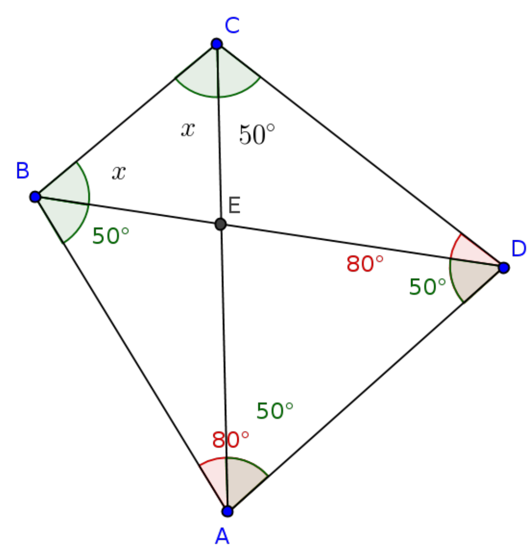


Figura 40. Ejemplo

De lo anterior se tiene que $BE = EC$ implicando que $\triangle BEC$ es isósceles y además

$$\begin{aligned}\angle BEC + \angle ECB &= 100^\circ\\ x + x &= 100^\circ\\ x &= 50^\circ\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 4.15

En un triángulo ABC, $\angle C = 90^\circ$, E, D son puntos sobre AC y BC respectivamente. Demuestre que

$$AD^2 + BE^2 = AB^2 + DE^2.$$

Solución

Considere la siguiente Figura 41.

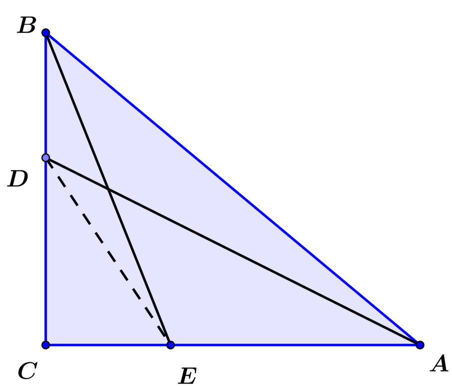


Figura 41. Ejemplo

Por el teorema de Pitágoras tenemos

$$AD^2 = DC^2 + AC^2 \tag{3}$$

$$BE^2 = BC^2 + CE^2 \tag{4}$$

Sumando las ecuaciones 3 y 4 se tiene que

$$\begin{aligned}AD^2 + BE^2 &= DC^2 + BC^2 + AC^2 + CE^2\\ &= (DC^2 + CE^2) + (BC^2 + AC^2) \quad \text{por el teorema de Pitágoras en } \triangle CDE \text{ y } \triangle CBA\\ &= DE^2 + AB^2\end{aligned}$$

■

✓**Ejemplo 4.16**

En un triángulo ABC, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si las distancias de A, M, N a una recta exterior son 7, 9 y 6 respectivamente. Hallar la distancia a dicha recta del punto medio de $\overline{AC}$.

Solución

A partir del enunciado del ejemplo, se obtiene la Figura 42.

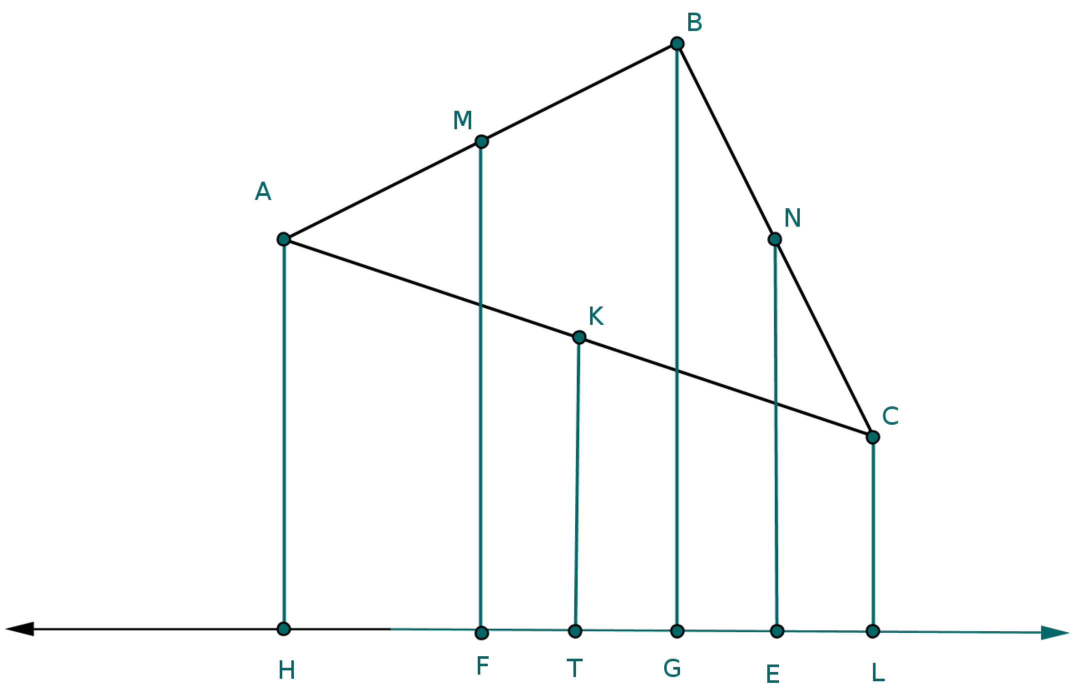


Figura 42. Ejemplo

1. El trapecio $HABG$: $\overline{MF}$ es mediana, entonces aplicando el teorema de la base media para trapecio se tiene: $\dfrac{7+BG}{2} = 9 \Rightarrow BG = 11$.

2. El trapecio $BGLC$: $\overline{NE}$ es mediana, entonces aplicando el teorema de la base media para trapecio se tiene: $\dfrac{CL+BG}{2} = 6 \Rightarrow CL = 1$.

3. Y en el trapecio $AHLC$: $\overline{KT}$ es mediana, entonces aplicando el teorema de la base media para trapecio se tiene: $\dfrac{AH+CL}{2} = KT \Rightarrow KT = 4$.

$\blacksquare$

Recordatorio

- Si dentro de las condiciones del problema se nos proporciona un trapecios, entonces la estrategia para la resolución es trazar segmentos auxiliares con la intención de forma paralelogramos o triángulos para utilizar las propiedades que estos poseen. En el siguiente enlace se muestran un vídeo donde se ejemplifica la estrategias https://www.youtube.com/watch?v=ScYeag_SoUQ.

Continuamos con la resolución de ejemplos donde se aplica la teoría de polígonos.

✓Ejemplo 4.17
¿Qué polígono convexo tiene tantas diagonales como lados?

Solución

Sabemos que el número de diagonales en un polígono convexo es $\dfrac{n(n-3)}{2}$, el cual debe ser igual a n, por tanto formulamos la siguiente ecuacíon

$$\begin{aligned} n &= \frac{n(n-3)}{2} \\ 2n &= n^2 - 3n \\ 0 &= n^2 - 5n \\ 0 &= n(n-5) \end{aligned}$$

Por tanto, $n = 5$. El polígono es un pentágono.

$\blacksquare$

✓Ejemplo 4.18
En un pentágono convexo, tres de sus ángulos miden 120° cada uno, y los otros dos son congruentes. Hallar el valor de dicho ángulo.

Solución

La suma de los cinco ángulos del pentágono es

$$S_I = 180^\circ(5-2) = 540^\circ$$

Finalmente, por las condiciones del problema

$$\begin{aligned}120^\circ + 120^\circ + 120^\circ + 2x^\circ &= 540^\circ\\ 360^\circ + 2x^\circ &= 540^\circ\\ 2x &= 180^\circ\\ x^\circ &= 90^\circ.\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 4.19
Las medidas de los ángulos interiores de un pentágono convexo están en progresión aritmética. Calcular el mayor valor entero de la razón.

Solución

Sean r la razón de la progresión y $\alpha - 2r$ la medida del menor ángulo interior del pentágono; luego el mayor ángulo será $\alpha + 2r$.

$$\begin{aligned}(\alpha - 2r) + (\alpha - r) + (\alpha) + (\alpha + r) + (\alpha + 2r) &= 180(5-2)\circ\\ 5\alpha &= 180(5-2)\circ\\ 5\alpha &= 540^\circ\\ \alpha &= 108^\circ\end{aligned}$$

Ahora ningún ángulo debe ser mayor a 180°, entonces

$$\begin{aligned}\alpha + 2r &< 180^\circ\\ 108^\circ + 2r &< 180^\circ\\ 2r &< 72\\ r &< 36\end{aligned}$$

Entonces el mayor valor entero es $r = 35$.

✓Ejemplo 4.20
En un polígono equiángulo desde 5 vértices consecutivos se han trazado 54 diagonales, hallar el valor del ángulo exterior.

Solución

Sea n el número de lados del polígono, para lo cual se tiene que:

$$N°d = 5n - \frac{(5+1)(5+2)}{2}$$

$$54 = 5n - 21$$

$$75 = 5n$$

$$15 = n$$

Posteriormente la medida de los ángulos interiores θ es:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{18(n-2)}{n}\\ &= \frac{180°(15-2)}{15}\\ &= 156°\end{aligned}$$

✓Ejemplo 4.21

En un hexágono equiángulo $FEDCBA$, se sabe que: $FE = 2$, $ED = 3$, $CD = 4$, $BC = 5$. Hallar AF.

Solución

Se construye la Figura 43. Calculamos su ángulo interior $(n = 6)$.

$$i = \frac{180°(6-2)}{6}$$

$$i = 120°$$

Formamos el triángulo equilátero GHI, donde

$$GH = HI = IG$$

además se forma tres triángulos equiláteros GFA, EHD y BCI.

$$GF + FE + EH = DH + CD + CI$$

$$AF + 2 + 3 = 3 + 4 + 5$$

$$AF = 7$$

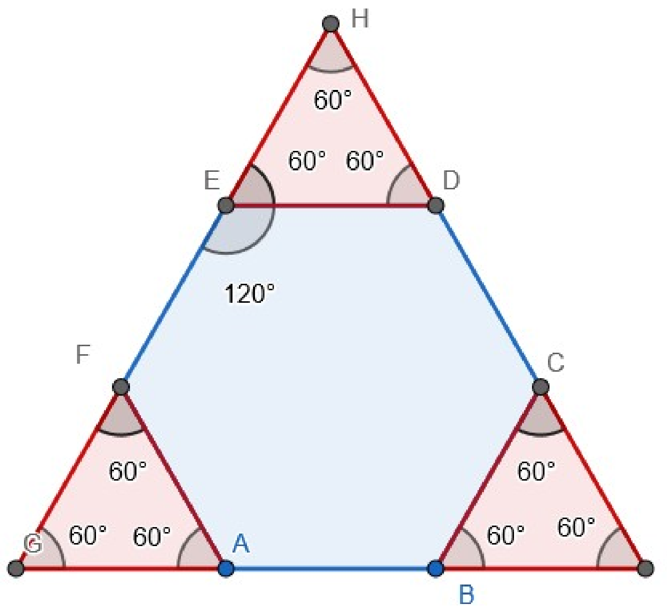


Figura 43. Ejemplo

✓Ejemplo 4.22

La Figura 44 $ABCDEF$ es un hexágono equiángulo, se trazan las bisectrices $\overline{FH}$, $\overline{DI}$ y BG de los ángulos $\angle EFA$, $\angle CDE$ y $\angle ABC$ respectivamente. Hallar el perímetro del $\triangle HGI$, si $BC = 4$, $EF = 7$.

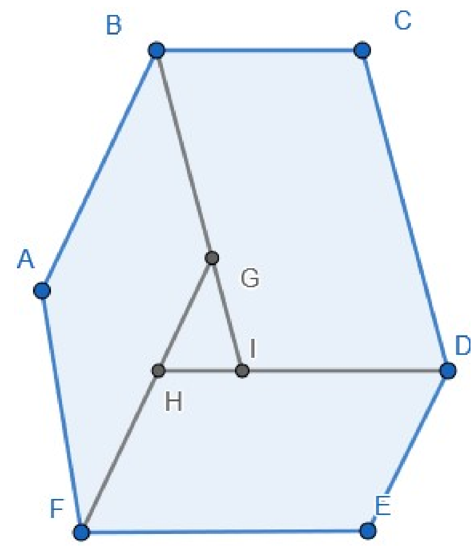


Figura 44. Ejemplo 2.5

Solución

Ya que el hexágono es equiángulo entonces la medida de su ángulo interior es 120°. Recordar que para verificar si un cuadrilátero es un paralelogramo sus ángulos opuestos deben ser iguales, como $\angle GBC = \angle CDI$ entonces $BCDI$ es paralelogramo, de donde resulta que $BC = ID = 4$.

Como $BC \parallel HD$ se tiene que $\angle GIH = \angle GBC = 60°$ por ser ángulos alternos internos entre rectas paralelas. Además $\angle IDE = \angle EFH$ entonces $FTDE$ es un paralelogramo debido a que sus ángulos opuestos son iguales, de donde: $EF = HD = 7$.

Finalmente, $DH \parallel FE$ se tiene que $\angle IHG = \angle EFH = 60°$ por ángulos correspondiente entre rectas paralela, Entonces el $\triangle HGI$ es equilátero ya que todos sus ángulos internos miden 60°, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
P_{\triangle HGI} &= 3(HD - ID) \\
&= 3(7 - 4) \\
&= 9
\end{aligned}
$$

✓**Ejemplo 4.23**

En la Figura 45, el pentágono $LKJIH$ es regular y además $LK = OI$. Con estos datos se pide calcular el valor de x.

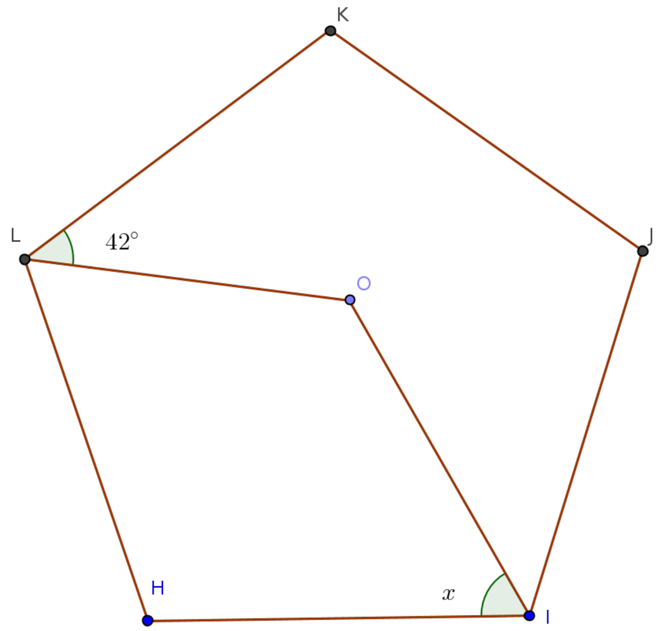


Figura 45. Ejemplo

Solución

Trazamos el segmento $\overline{LI}$ como lo muestra la Figura 46, implica que $\triangle LHI$ es un triángulo isósceles.

$\Rightarrow \angle HLI = \angle LIH = 36°$.

Posteriormente se construye el triángulo equilátero LIP de lado LI como se muestra en la Figura 46. Entonces resulta que

$$\begin{aligned} \angle OLH &= 66° \\ \angle OLI + \angle IHL &= 66° \\ 36° + \angle IHL &= 66° \\ \angle IHL &= 30° \end{aligned}$$

$\Rightarrow \angle PLO = 30°$, como $LO = LO$, $LI = LP$ y $\angle PLO = \angle OLI = 30° \Rightarrow \triangle PLO$ es congruente con $\triangle OLI$ por el criterio (L-A-L).

$\Rightarrow OP = OI$

$\Rightarrow OIP$ es isósceles

$\Rightarrow \triangle LHI$ es congruente con $\triangle POI$ por el criterio (L-L-L)

$\Rightarrow \angle OIP = 36°$

$\Rightarrow \angle OIP = 24°$

$\Rightarrow x = 36° + 24°$

$\Rightarrow x = 60°$

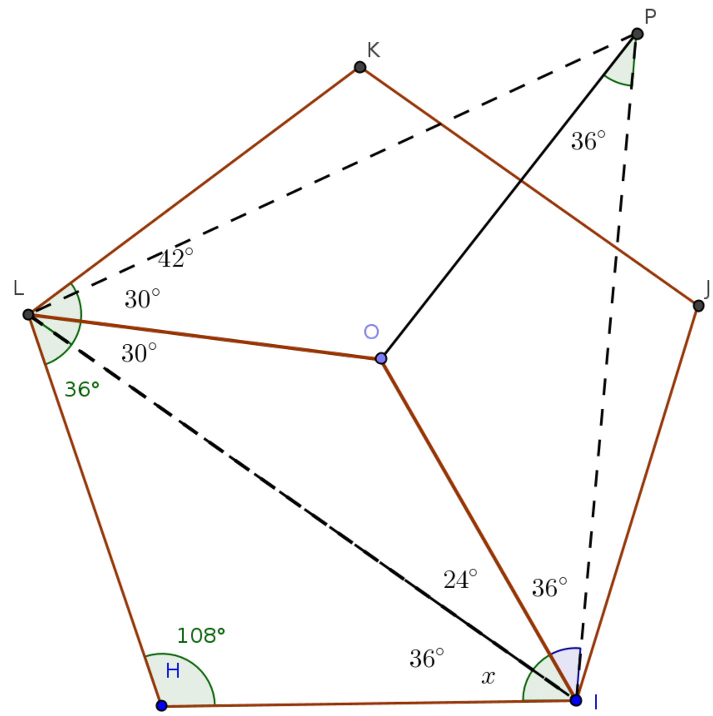


Figura 46. Ejemplo

■

5. Problemas Propuestos

Resolver los siguientes problemas de forma clara, ordenada y justificando a detalle todos sus procesos.

5.1. Cuadriláteros

1. En un triángulo ABC, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, D es un punto sobre $\overline{BC}$. Demuestre que
$$BD^2 + CD^2 = 2AD^2.$$

2. Dado un triángulo rectángulo tiene perímetro de $30cm$ y un área de $30cm^2$. Encuentre las longitudes de sus tres lados.

3. En el rectángulo $ABCD$, $\overline{CE} \perp \overline{DB}$ en E, $BE = \frac{1}{4}BD$ y $CE = 5cm$. Encuentre la longitud de AC.

4. En un triángulo ABC, $\angle C = 90^\circ$, D es el punto medio de $\overline{AC}$. Demuestre que
$$AB^2 + 3BC^2 = 4BD^2.$$

5. En el triángulo rectángulo ABC, $\angle C = 90^\circ$, E, D son puntos sobre $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Demuestre que
$$AD^2 + BE^2 = AB^2 + DE^2.$$

6. En un triángulo ABC, $\angle C = 90^\circ$, D es el punto medio de $\overline{AB}$, E, F son dos puntos sobre $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente y $\overline{DE} \perp \overline{DF}$. Demuestre que
$$EF^2 = AE^2 + BF^2.$$

7. Dado un punto P interior del triángulo equilátero ABC, tal que $PA = 2$, $PB = 2\sqrt{3}$, $PC = 4$. Encuentre la longitud del lado del triángulo ABC.

8. Dado el trapecio $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, demuestre que la bisectriz interior del $\angle A$ es paralela a la bisectriz exterior del $\angle D$.

9. A un rombo $ABCD$ se le construyen exteriormente los cuadrados $ABEF$ y $BCGH$. Demuestre que $\triangle ABD = \triangle EBH$.

10. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Se construyen triángulos equiláteros exteriores $\triangle CDP$ y $\triangle ADQ$. Demuestre que el $\triangle BPQ$ es equilátero.

11. Demuestre que las bisectrices interiores de un paralelogramo forman un rectángulo (¿qué sucede si el paralelogramo es además rombo?).

12. Demuestre que las bisectrices exteriores de un paralelogramo forman un rectángulo.

13. Sea $ABCD$ un paralelogramo. La bisectriz interna del $\angle CDA$ corta a $\overline{BA}$ en M, y la bisectriz interna del $\angle BAD$ corta a $\overline{CD}$ en N. Demuestre que $ADNM$ es un rombo.

14. Demuestre que si por el punto de intersección de las diagonales de un rombo se trazan perpendiculares a los lados del rombo, entonces los puntos de intersección de dichas perpendiculares con los lados del rombo forman un rectángulo.

15. Demuestre que las bisectrices de los ángulos definidos por las diagonales de un rombo, cortan a los lados del rombo en cuatro puntos que forman un cuadrado.

16. En un $\triangle ABC$ sea G la intersección de las medianas $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$. Sean B'', C'' las reflexiones de G respectivas a los puntos B' y C'.

    a) Demuestre que $AGCB''$ y $AGBC''$ son paralelogramos.

    b) A partir de lo anterior, demuestre que $BCB''C''$ también es paralelogramo.

    c) Demuestre que A' pertenece a la recta AG, y concluya que las tres medianas de un triángulo concurren en el punto G, llamado el *centroide* del $\triangle ABC$.

    d) Demuestre que $CG = 2GC'$; relaciones similares se cumplen para las otras dos medianas.

17. Sea $ABCD$ un paralelogramo tal que existe un punto E sobre el lado $\overline{AB}$ que cumple $\angle CED = 90$. Sean M y N los pies de las perpendiculares trazadas desde A y B hacia $\overline{DE}$ y $\overline{CE}$, respectivamente. Demuestre que $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{MN}$ concurren.

18. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo y O es un punto en su interior. Sean P, Q, R, S, los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, respectivamente. Por P se traza una paralela a $\overline{OR}$,

por Q se traza una paralela a $\overline{OS}$, por R se traza una paralela a $\overline{OP}$, y por S se traza una paralela a $\overline{OQ}$. Demuestre que estas cuatro rectas concurren.

19. Un trapecio isósceles tiene diagonales perpendiculares y su área es 2010, determine su altura.

20. Sobre los lados del $\triangle ABC$ se trazan exteriormente los cuadrados $ABPQ$, $CARS$ y $BCTU$. Luego se trazan los paralelogramos $AQA'R$, $CSC'T$ y $BUB'P$.

    a) Sean A'', B'', C'' los centros de los cuadrados $BCTU$, $CARS$, $ABPQ$, respectivamente. Demuestre que estos centros están sobre los lados del $\triangle A'B'C'$.

    b) Demuestre que $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$, $\overline{CC''}$ concurren.

21. Se dibujan cuadrados exteriores a los lados de un paralelogramo, demuestre que:

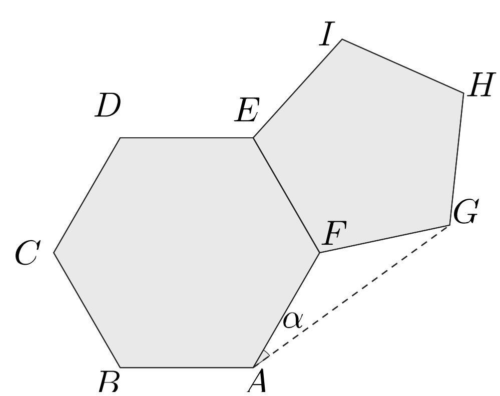
    a) El cuadrilátero determinado por los centros de esos cuadrados es un cuadrado.

    b) Las diagonales de ese cuadrado son concurrentes con las del paralelogramo.

22. Dado un $\triangle ABC$, se construyen exteriormente los triángulos rectángulo isósceles $\triangle ACP$ y $\triangle BCQ$, con $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ como hipotenusas. Si M es el punto medio de $\overline{AB}$, demuestre que el $\triangle MPQ$ también es un triángulo rectángulo isósceles.

5.2. Polígonos

23. Si $ABCDEF$ es un hexágono regular y $EFGHI$ es un pentágono regular. La medida del ángulo α es

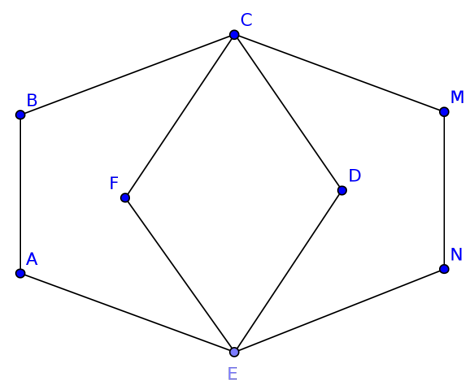


24. En un pentágono convexo tres de sus ángulos miden 120° cada uno y los otros dos son congruentes: hallar uno de estos últimos.

25. Hallar el número de lados de un polígono regular de lado igual $4\,cm$ si el número de las diagonales es cuatro veces su perímetro expresado en centímetros.

26. La mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de un icoságono regular forma un ángulo de:

27. En la figura $ABCDE$ y $EFCMN$ son pentágonos regulares. Calcule $\angle FED$



28. Calcule la suma de los ángulos internos de un pentágono convexo.

29. Calcular la medida del ángulo exterior de un dodecágono regular.

30. De todos los polígonos regulares, ¿Cuál es el que posee mayor ángulo central?

31. Calcular la medida del ángulo central de un polígono que posee 360 lados.

32. En un hexágono equiángulo $ABCDEF$, $AB = CD$. Hallar $\angle ADE$.

33. Se sabe que un polígono convexo la suma de sus ángulos interiores es 540°. Con este dato se pide averiguar el número total de sus diagonales.

34. Demuestre que no existe un polígono con 2017 diagonales en total.

35. Se construye el cuadrado $ABCD$, luego el triángulo equilátero BCE (exterior al cuadrado), luego el cuadrado $BEFG$ (exterior al triángulo), finalmente se construye el hexágono regular $ABGHIJ$. Se traza la bisectriz del ángulo CBE hasta un punto K (fuera del triángulo BCE) tal que $BC = BK$. Demuestre que $AK = AG$.

36. Se construye un polígono equilátero de 5 lados $ABCDE$, tal que $ABCD$ es un cuadrado y CDE es un triángulo equilátero. Encuentre el ángulo AEB.

37. Demuestre que en todo polígono equiángulo de 6 lados $ABCDEF$ se cumple que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ y $\overline{CD} \parallel \overline{FA}$.

    Sugerencia: Trazar paralelas (como en las primeras clases).

6. Respuesta de los problemas

- *Problema 2.* 13.83, 2.17 y 14.
- *Problema 3.* $\frac{20}{3}\sqrt{3}$.
- *Problema 23.* 30°.
- *Problema 24.* 90°.
- *Problema 25.* $n = 29$.
- *Problema 26.* 18°.
- *Problema 27.* 72°.
- *Problema 28.* 540°.
- *Problema 29.* 30°.
- *Problema 30.* el cuadrado.
- *Problema 31.* 1°.
- *Problema 32.* 60°.
- *Problema 33.* El números de diagonales es 5.
- *Problema 36.* 30°.

7. Sugerencia

Si desea mayor información sobre las propiedades de los cuadriláteros y polígonos revisar los siguientes enlaces:

- `http://mate.ingenieria.usac.edu.gt/archivos/2.3-Cuadrilateros.pdf`.
- `https://plasticavegadeo.files.wordpress.com/2010/03/12-cuadrilateros1.pdf`.
- `http://www.feyalegria.org/sites/default/files/Nro14_Cuadrilateros_y_otros_Poligonos.pdf`.
- `https://www.youtube.com/watch?v=ScYeag_SoUQ`.

Universidad de El Salvador
Modalidad a Distancia
Facultad de Ciencias Naturales Y Matemática
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Semejanza de triángulos

Asignatura:

Geometría Euclídea I

Coordinador de carrera:

Coordinadora de cátedra:

Elaborado por:

Lic. Javier Antonio Ramos Martínez

Ciudad universidad, San Salvador, mayo del 2020

Índice

Semejanza de Triángulos

SUMARIO

- Teorema de Thales.
- Teorema de bisectrices, Menelao y Ceva.
- Semejanza de triángulos.
- Problemas.

Al finalizar el estudio de este capítulo será capaz de

- *Resolver problemas donde se aplica el teorema de Thales.*
- *Resolver problemas donde se aplica los criterios de semejanza de triángulos.*

Introducción

Se inicia con una pequeña referencia histórica sobre los orígenes del término semejanza, posteriormente se comenzamos la parte teórica estudiando unos de los teoremas fundamentales de la Geometría Plana nos referimos al teorema de Thales, unas de las implicaciones de la aplicación de teorema son surgimiento de los criterios semejantes de triángulos que se aplican para demostrar la semejanza entre dos triángulos, además, se estudiará los teoremas de la bisectriz, Menelao y Ceva. Como el todos los anteriores materiales esta la parte de los problemas resueltos y de los problemas propuestos estos con el fin de fijar y adquirir la habilidad de utilizar la teoría en la resolución de problemas.

1. Referencia histórica sobre semejanza

Las afirmaciones que se hagan acerca de los orígenes de la matemática, ya sea de la aritmética o de la geometría, serán necesariamente conjeturales. Con seguridad se puede afirmar que el desarrollo de la geometría puede haberse visto estimulado tanto por las necesidades prácticas de la construcción y de la agrimensura como por un sentimiento estético de diseño y orden. No hay documentos que nos permitan seguir la pista de la evolución de una idea a un teorema conocido, pero a veces el presunto origen de un concepto puede no ser más que la reaparición de una idea mucho más antigua que había permanecido en estado latente, este es el caso de la mayoría de los conceptos de nuestro tema.

Fueron muchos los científicos y matemáticos importantes los que utilizaron intuitivamente el concepto de semejanza para resolver algunos problemas. Conforme fue pasando el tiempo, surgió la necesidad de estudiar este fenómeno más a fondo ya que seguía apareciendo en muchas facetas de la vida. A continuación, haremos un recorrido por la historia de las matemáticas basándonos en el trabajo realizado por Boyer (2001):

- Hay división de opiniones acerca de si los babilonios estaban familiarizados o no con el concepto de semejanza de figuras, aunque es muy probable que si lo estuviesen. La semejanza entre todas las circunferencias parece haber sido dada por descontado en Mesopotamia, como lo fue también en Egipto, y los muchos problemas sobre medidas de triángulos que aparecen en las tablillas cuneiformes parecen sugerir un cierto concepto de semejanza.

En el museo de Bagdad se conserva una tabilla en la que está dibujado un triángulo rectángulo con los valores de sus lados subdivido en cuatro triángulos rectángulos menores cuyas áreas también se mencionan. A partir de estos valores el escriba calcula la longitud del lado mayor del triángulo principal utilizando aparentemente un tipo de fórmula de semejanza que viene a ser equivalente a nuestro teorema que dice que las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de lados correspondientes.

- Durante la época de la escuela pitagórica (siglo VI a.C.) fue Pitágoras quién mediante un experimento descubrió relaciones numéricas en la música. Tensó una cuerda musical que producía un sonido que tomó como fundamental: el tono, hizo señales en la cuerda que la dividían en doce partes iguales. Pisó la cuerda en 6 y entonces observó que se producía un sonido, pisó luego en 9 y resultaba otro y al pisar el 8 se obtenía otro diferente. Por ello, las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ correspondían a la octava, la cuarta y la quinta, es decir, Pitágoras estableció una relación entre la música, la proporcionalidad geométrica y la proporcionalidad numérica. Fue Platón un tiempo más tarde quien consiguió calcular las proporciones que producían los sonidos naturales. Si describimos estos sonidos por los símbolos Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do (sonidos del sistema occidental actual) las proporciones que los describen son respectivamente $1, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}$ y 2.

- Alrededor del año 585 a.C., nació un matemático imprescindible en nuestro tema: Thales. Se le atribuyen varios teoremas importantes aunque no hay ningún documento antiguo que pueda aportarse como prueba evidente de estos descubrimientos pero según la tradición Thales demostró algunos de estos, destaco los siguientes por la relevancia en nuestro tema: "Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes" y "Si dos rectas secantes son cortadas por una serie de rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra recta". Además, hay algunas otras referencias a Thales dispersas por las antiguas fuentes, pero la mayor parte de ellas describen actividades de carácter práctico: Diógenes Laercio, seguido por Plinio y Plutarco contaron que Thales midió las alturas de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura y también que calculó la distancia de un barco a la playa por medio de la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes.

- Algunos años después, comenzó la famosa época heroica de la matemática. Destacamos a Anaxágoras que murió en el 428 a.C., después de la muerte de Pericles. Se dice que éste murió de peste, por ello, los habitantes de la ciudad consultaron al Oráculo de Apolo para averiguar cómo acabar con la epidemia. Así surgió el llamado problema de la duplicación del cubo o problema de Delos: dada la arista de un cubo construir únicamente con regla y compás la arista de otro cubo que tengo volumen doble que el primero. Numerosos matemáticos intentaron resolver el problema pero sólo proporcionaron soluciones aproximadas aunque fue Arquitas, matemático griego, quién encontró una solución tridimensional del problema sin usar coordenadas. Además de esta solución, en la época platónica, Menecmo dio con las cónicas como resultado de una afortunada búsqueda de curvas que tuvieran las propiedades requeridas para resolver el problema del cubo. En 1837 se demostró que el problema no tiene solución.

- Euclides y sus matemáticas están claramente relacionados con nuestro tema porque lo estudió en profundidad y escribió muchas proposiciones interesantes. En el libro II de los Elementos encontramos algunas de ellas, por ejemplo, la proposición 11 donde aparece una figura usada actualmente en muchos libros modernos de geometría para ilustrar una propiedad iterativa que tiene la sección áurea. Los griegos tendían a evitar las proporciones y Euclides también sustituyéndolas mediante una relación entre longitudes que tendría que ser de la forma x/a=b/c por x c=ab. A pesar de ello, vuelven a aparecer en el libro V de los Elementos, e incluso aparece la definición de razón aunque es inútil porque es bastante vaga. Una vez desarrollada la teoría de proporciones en el libro V, Euclides la utiliza en el libro VI para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan al estudiar triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes.

- La proporción áurea ha sido famosa a lo largo de la historia por sus propiedades estéticas y se dice que la arquitectura de la antigua Grecia está fuertemente influenciada por su uso. Fue Euclides quién comenzó a hablar en los términos que siguen: la línea AB está dividida en razón de medios y extremos por C si $AB : AC = AC : CB$. A esta relación la llamamos proporción o razón áurea. Hasta el 150 a.C., la proporción áurea era considerada únicamente como una propiedad geométrica y no se habían interesado por asociarle un número a esa relación. Siglos después, Pacioli escribió Divina proporcione y afirma que la proporción áurea no es racional.

Una nota de principios del siglo XVI dice que la relación entre términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci tiende al número áureo, aunque el primer cálculo de la relación áurea en forma decimal fue realizada en 1597 por Michael Maestlin.

Luego de haber leído la pequeña reseña histórica sobre el concepto de semejanza vamos a enunciar el teorema de:

2. Teorema de Thales

Para iniciar recordemos las siguientes definiciones que se estudio en la unidad 1.

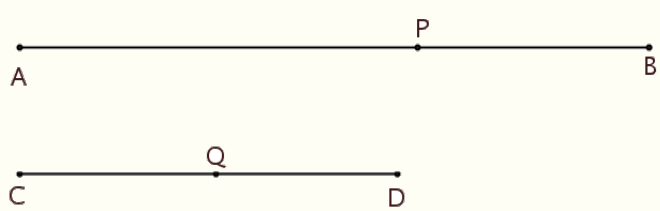
Definición 2.1.

1. Un punto $P \in AB$ divide al segmento AB en una razón dada r, si $\dfrac{PA}{PB} = r$.

2. Sean AB y CD dos segmentos, y sean $P \in AB$ y $Q \in CD$, decimos que P y Q dividen a AB y CD en segmentos proporcionales si

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD}$$

.



Antes de enunciar el Teorema de Thales, se enunciarán dos lemas que a pesar de su aparente sencillez es de mucha utilidad en problemas que involucran Áreas y Proporcionalidad.

Lema 2.1.

Sea $AB \parallel CD$. Demuestre que: Área(ABC) = Área(ABD).

Demostración

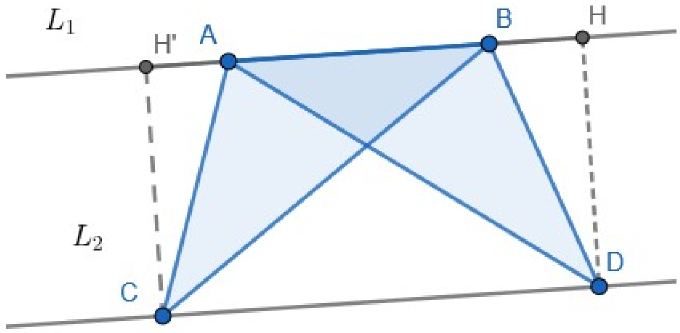


Figura 1.

Como $AB \parallel CD$, entonces $H'C = HD$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
H'C &= HD \\
AB \cdot H'C &= AB \cdot HD \\
\frac{AB \cdot H'C}{2} &= \frac{AB \cdot HD}{2} \\
\text{Área}(ABC) &= \text{Área}(ABD)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Lema 2.2.

Sea P un punto sobre el lado AB (o su prolongación) del $\triangle ABC$. Entonces

$$\frac{AP}{PB} = \frac{\text{Área}(APC)}{\text{Área}(PBC)}$$

Demostración

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\text{Área}(APC)}{\text{Área}(PBC)} &= \frac{AP \cdot \cancel{CH}}{PB \cdot \cancel{CH}} \\
&= \frac{AP}{PB}
\end{aligned}
$$

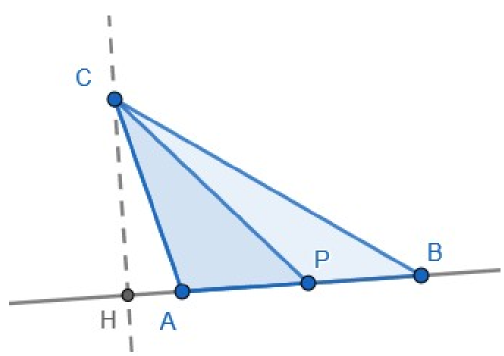


Figura 2.

Luego de recordar la definición y demostrar los lemas anteriores estamos listo para enunciar el teorema del Thales.

Teorema 2.1. Teorema de Thales

Si tres paralelas cortan a dos secantes entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

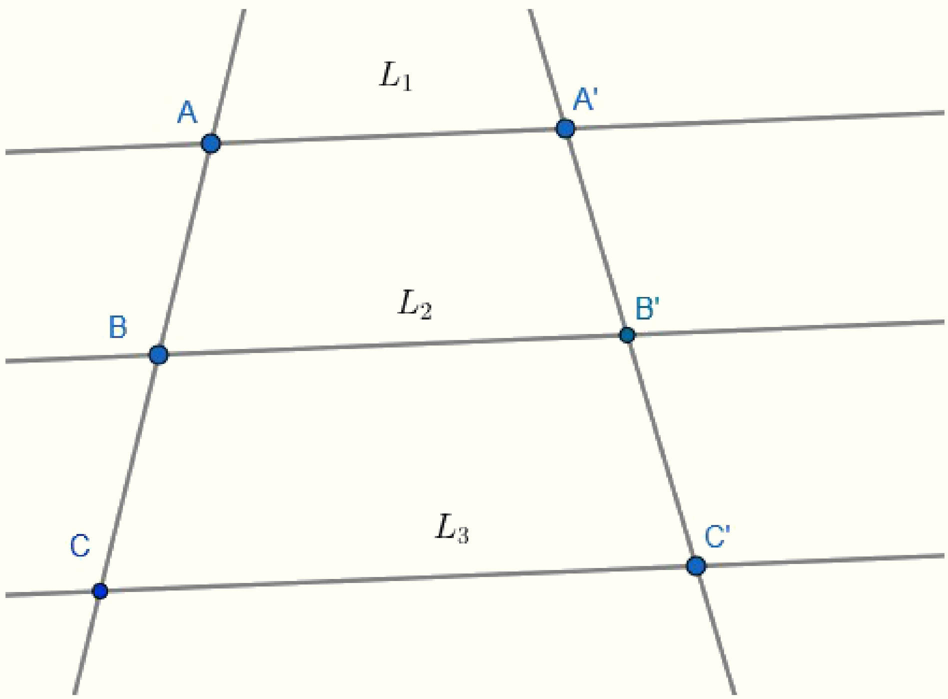


Figura 3. Teorema de Thales

El teorema de Thales puede enunciar de manera general como sigue: si tres o más paralelas cortan a dos o más secantes entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales. A continuación se enuncian los pasos a seguir en la demostración del teorema de Thales.

Demostración

Sean AA', BB' y CC' rectas paralelas que cortan a dos secantes en los puntos A, A', B, B', C, C' respectivamente (ver Figura 4). Probaremos que:

1. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\text{Área}(ABB')}{\text{Área}(BCB')}$

2. $\dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{\text{Área}(A'B'B)}{\text{Área}(B'C'B)}$.

3. $\text{Área}(ABB') = \text{Área}(A'B'B)$ y $\text{Área}(BCB') = \text{Área}(B'C'B)$.

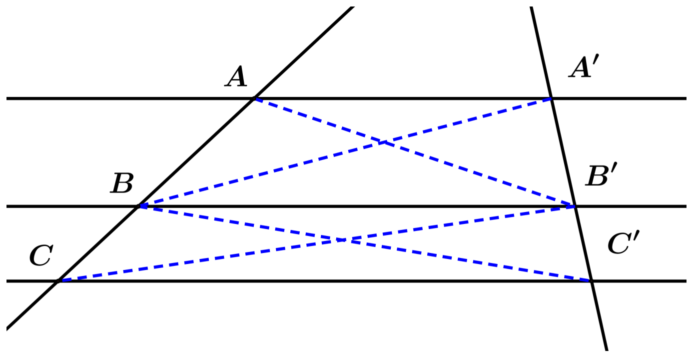


Figura 4. Representación gráfica del demostración del Teorema de Thales

1. Aplicando el lema 2.2 sobre el punto B y el $\triangle ACB'$ se obtiene:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\text{Área}(ABB')}{\text{Área}(BCB')} \tag{1}$$

2. Utilizando el lema 2.2 sobre el punto B' y el $\triangle A'C'B$ se obtiene:

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{\text{Área}(A'B'B)}{\text{Área}(B'C'B)} \tag{2}$$

3. Dado que $AA' \parallel BB'$ y empleando el lema 2.1 se tiene que

$$\text{Área}(ABB') = \text{Área}(A'B'B) \tag{3}$$

   También, por hipótesis se tiene que $BB' \parallel CC'$ y ocupando el lema 2.1 se tiene que

$$\text{Área}(BCB') = \text{Área}(B'C'B) \tag{4}$$

Tomando como base el las igualdades anteriores se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{BC} &= \frac{\text{Área}(ABB')}{\text{Área}(BCB')} \quad \text{por la igualdad (1)} \\
&= \frac{\text{Área}(A'B'B)}{\text{Área}(B'C'B)} \quad \text{por la igualdad (3) y (4)} \\
&= \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{por la igualdad (2)}
\end{aligned}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

■

Observación Importante: utilice las propiedades de las proporciones para demostrar las equivalencias siguientes (interprételas geométricamente):

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

Sea $\triangle ABC$ un triángulo, sabemos que su área puede calcularse al multiplicar la longitud de uno de sus lados por la longitud de la altura correspondiente a ese lado. Si denotamos por a la longitud de un lado del $\triangle ABC$ y h_a la longitud de la altura correspondiente, el área del $\triangle ABC$ se denota por (ABC) y es igual a:

$$(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente corolario:

Corolario 2.1.

Si dos triángulos tienen una misma altura entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón de las bases donde se levanta la altura común.

Demostración

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos con alturas iguales h como se muestra en la Figura 5.

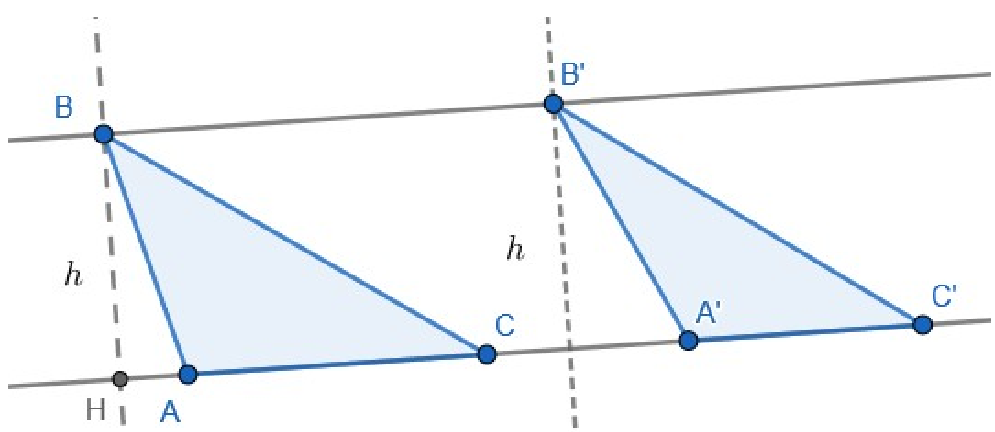


Figura 5.

Sean H y H' los pies de las alturas trazadas de los vértices B y B' a los lados AC y $A'C'$ respectivamente. Entonces:

$$(ABC) = \frac{BC \cdot h}{2}, \ (A'B'C') = \frac{B'C' \cdot h}{2}$$

La razón entre las áreas es:

$$\frac{(ABC)}{(A'B'C')} = \frac{\frac{AC \cdot h}{2}}{\frac{A'C' \cdot h}{2}} = \frac{AC}{A'C'}$$

■

El siguiente corolario se puede probar de manera análoga al anterior:

Corolario 2.2.

Si dos triángulos tienen una base igual entonces la razón de sus áreas es igual a la razón entre las alturas que se levantan sobre la base igual.

Luego de de enunciar corolarios que relación las áreas de dos triángulos que poseen la misma altura o con la base con su base o altura, se enunciará el siguiente teorema, donde se establece la aplicación del Teorema de Thales sobre triángulos.

Teorema 2.2. Teorema de Thales en triángulo

Toda recta paralela a un lado de un triángulo y que corte a los otros dos lados, divide a estos lados en segmentos proporcionales.

Demostración

Sea el triángulo ABC, se traza la recta paralela paralela al segmento $\overline{AC}$, D, E los puntos de corte con esa recta como se muestra en la Figura 6.

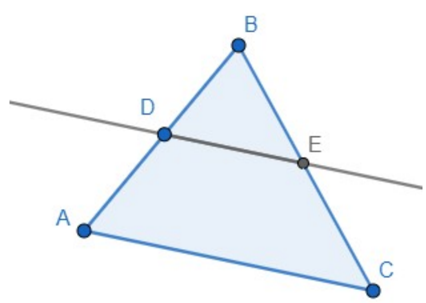


Figura 6. Representación gráfica del demostración del Teorema de Thales aplicado a triángulos

Se prolonga el segmentos $\overline{AC}$ y se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ en el punto B.

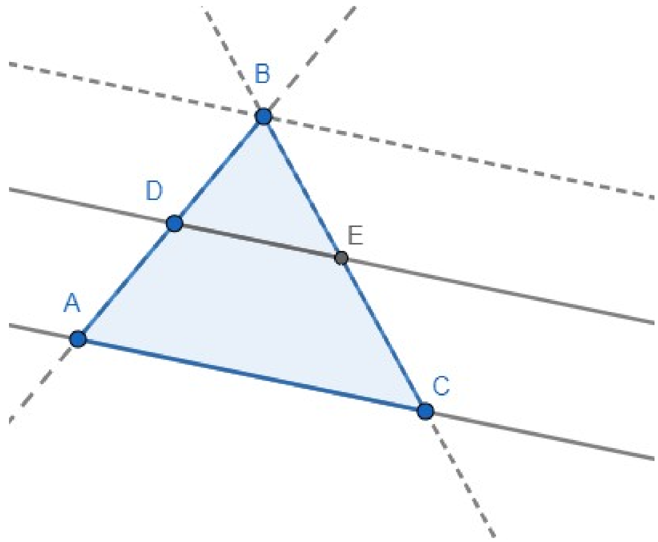


Figura 7. Representación gráfica del demostración del Teorema de Thales en triángulos

Aplicando el teorema de Thales

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EB}{CE}$$

Por propiedades de proporcionalidad

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CE}$$

■

Teorema 2.3. Recíproco del Teorema de Thales

Si tres rectas cortan a dos secantes en segmentos proporcionales y dos de estas rectas son paralelas entonces las tres rectas son paralelas.

Demostración

Sean AA', BB' y CC' rectas que cortan a dos secantes en los puntos A, A', B, B', C, C' respectivamente, tales que $AA' \parallel CC'$ y $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$. Por el punto B tracemos una recta paralela a AA', la cual intercepta a $A'C'$ en el punto D (ver Figura 8).

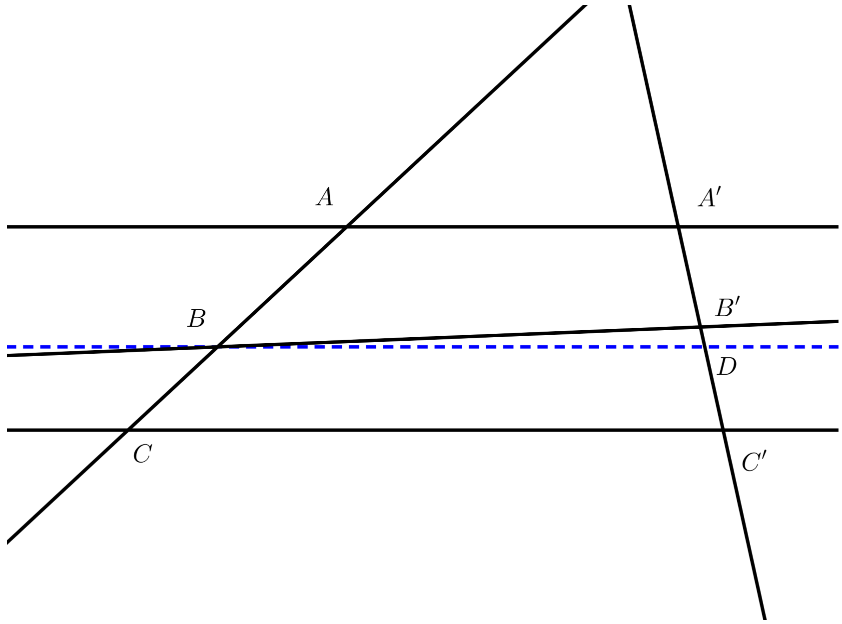


Figura 8. Representación gráfica del demostración del recíproco del teorema de Thales

Entonces, por el Teorema de Thales se tiene que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'D}{DC'}$$

de donde

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{A'D}{DC'}$$

$$\frac{A'B'}{B'C'} + 1 = \frac{A'D}{DC'} + 1$$

$$\frac{A'B'}{B'C'} + \frac{B'C'}{B'C'} = \frac{A'D}{DC'} + \frac{D'C'}{DC'}$$

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{A'C'}{DC'}$$

por lo que $B'C' = B'D + DC' = DC'$ y por tanto $B'D = 0$, o equivalentemente $B' = D$ y por lo tanto, $BB' \parallel AA'$.

$\blacksquare$

Corolario 2.3. Recíproco del Teorema de Thales en el triángulo

Si una recta intercepta dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales entonces la recta es paralela al tercer lado del triángulo.

Demostración

Sea el triángulo $\triangle ABC$ tal que $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BE}{CE}$, entonces demostraremos que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$. Para ello prolongamos el segmento $\overline{AC}$, y un recta paralela a $\overline{AC}$ en el punto B, como se muestra en la Figura 9.

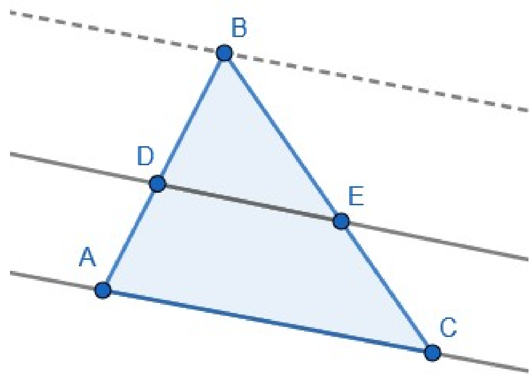


Figura 9. Representación gráfica del demostración del recíproco del teorema de Thales en triángulos

Aplicando el teorema de reciproco del teorema de Thales, se tiene que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.

■

Dentro de las aplicaciones del corolario 2.3 se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.4.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo y, D y E puntos en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si se cumple que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AE}$$

entonces $\overline{DE}$ es paralela a $\overline{BC}$.

Demostración

Supongamos que $\overline{DE}$ no es paralela a $\overline{BC}$. Sea C' un punto en AC, distinto de C, tal que $\overline{BC'}$ es paralela a $\overline{DE}$, entonces por el teorema de Thales, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC'}{AE}$.

Pero además, se cumple por hipótesis del problema, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$. entonces

$$\frac{AC'}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}$$

$$AC = AC'$$

Por tanto, los puntos C y C' deben ser iguales y $\overline{DE}$ es paralela a $\overline{BC}$.

■

Luego de haber estudiando el teorema de Thales y su reciproco, estudiaremos los teoremas de bisectriz, Menenlao, Ceva y baricentro e incentro.

Teorema 2.5. Teorema de bisectriz

En todo triángulo se cumple que los lados que forman el vértice de donde parte la bisectriz interior(exterior) son proporcionales a los segmentos determinados por dicha bisectriz sobre el lado opuesto. Es decir que:

En $\overline{BD}$ es bisectriz interior luego se cumple que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

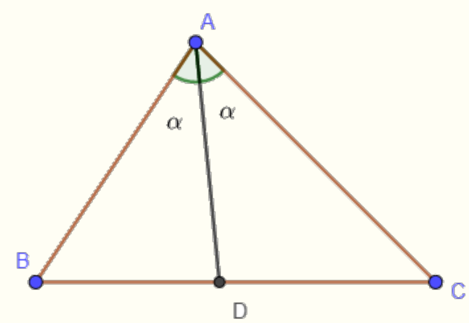


Figura 10. Bisectriz interior

En $\overline{BE}$ es bisectriz exterior se verifica:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BEh}{CE}$$

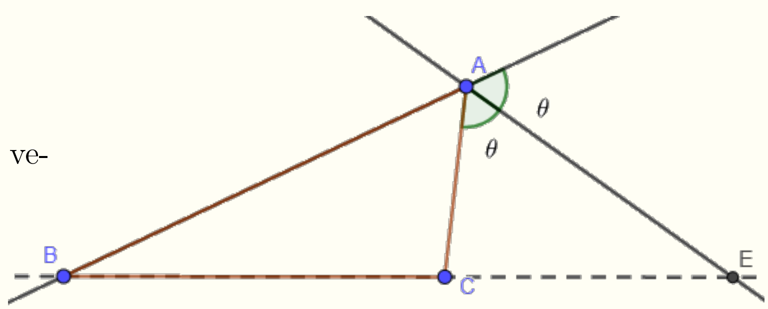


Figura 11. Bisectriz exterior

Demostración

En el triángulo ABC de la Figura 12, $\overline{AD}$ es la bisectriz del ángulo A y D es el punto de intersección con el lado BC. Trazamos una paralela a AD que pase por el vértice C y prolongamos el lado $\overline{AB}$ hasta cortarse en un punto E con la paralela, donde además se tiene

$$\angle ECA = \angle DAC = \angle BAD = \angle AEC$$

de donde resulta que el triángulo $\triangle CAE$ es isósceles, lo que implica $AC = AE$ y puesto que $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$, utilizando el teorema de Thales sobre triángulos (2.2) se tiene

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}.$$
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}.$$

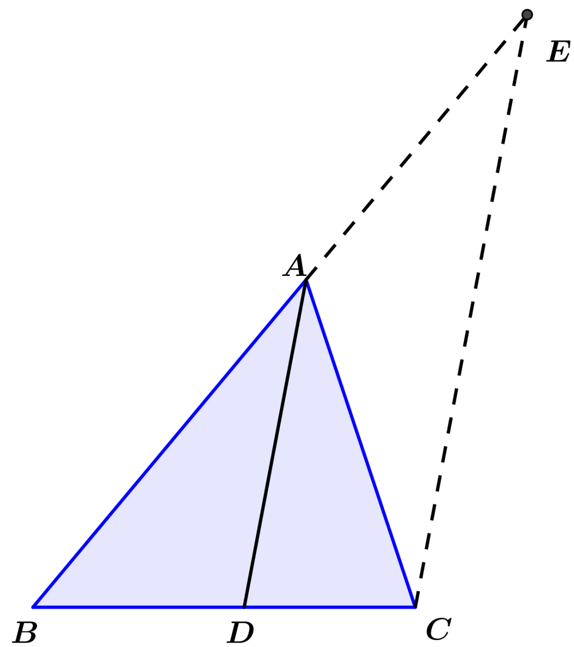


Figura 12. Teorema de la bisectriz interior

En el triángulo ABC de la Figura 13, $\overline{AE}$ es la bisectriz del ángulo A y E es el punto de intersección con la prolongación de $\overline{BC}$. Trazamos una paralela a $\overline{AE}$ que pase por el vértice C. Como $\overline{GC} \parallel \overline{AE}$ entonces

$$\angle AGC = \angle CEA = \angle ACG$$

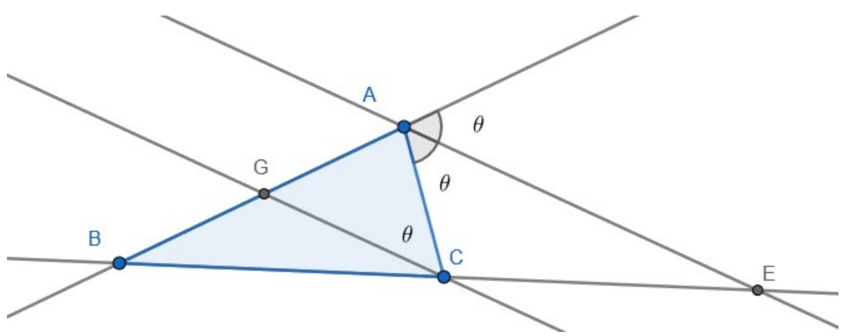


Figura 13. Representación de la demostración del teorema de la bisectriz interior

de donde obtenemos que el triángulo $\triangle ACG$ es isósceles, lo que implica $AC = AG$, empleando el teorema de Thales sobre triángulos $\triangle BAE$ se tiene

$$\frac{BG}{AG} = \frac{BC}{CE}.$$
$$\frac{BG}{AG} + 1 = \frac{BD}{CE} + 1$$
$$\frac{BG}{AG} + \frac{AG}{AG} = \frac{BD}{CE} + \frac{CE}{CE}$$
$$\frac{BG + AG}{AG} = \frac{BC + CE}{CE}$$
$$\frac{AB}{AG} = \frac{BE}{CE}$$
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$$

■

Teorema 2.6. Teorema de Menelao

Un recta secante a un triángulo determina sobre sus lados seis segmentos, cumpliéndose que el producto de tres de ellos considerados en forma no consecutiva es igual al producto de los tres restantes.

$$BP \cdot AQ \cdot CL = AP \cdot CQ \cdot BL$$

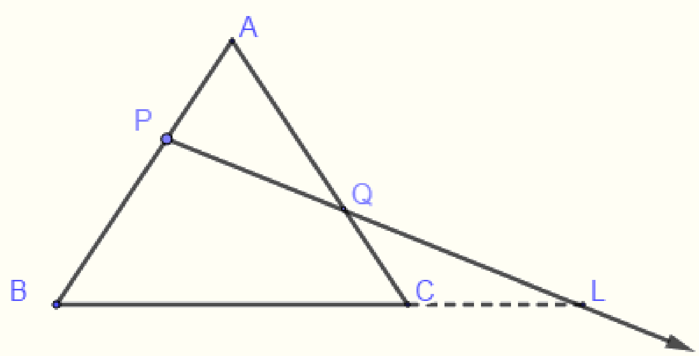


Figura 14. Teorema de Menelao

Demostración

Primero trazamos el segmento $\overline{CN}$ paralelo a $\overline{PQ}$.

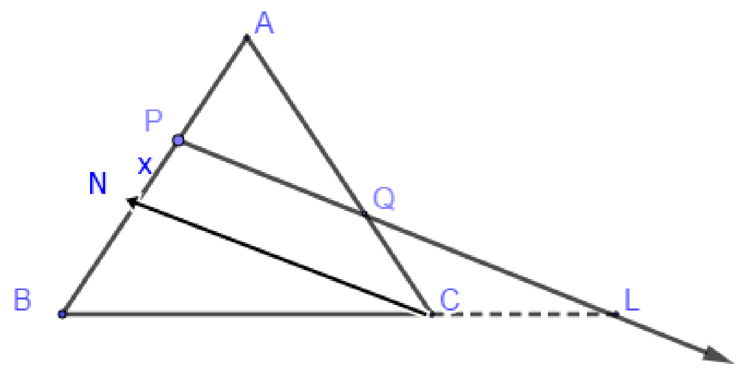


Figura 15. Demostración del teorema de Menelao

Aplicando el teorema de Thales en triángulo $\triangle NAC$, se tiene que:

$$\frac{PA}{x} = \frac{AQ}{QC}$$

Despejando x:

$$x = \frac{PA \cdot QC}{AQ}$$

además, teorema de Thales en triángulo $\triangle BPL$, se tiene que:

$$\frac{BC}{CL} = \frac{BN}{NP}$$
$$\frac{BC}{CL} + 1 = \frac{BN}{NP} + 1$$
$$\frac{BC}{CL} + \frac{CL}{CL} = \frac{BN}{NP} + \frac{NP}{NP}$$
$$\frac{BC + CL}{CL} = \frac{BN + NP}{NP}$$
$$\frac{BL}{CL} = \frac{BP}{x}$$

Despejando x:

$$x = \frac{BP \cdot CL}{BL}$$

$$x = x$$

$$\frac{BP \cdot CL}{BL} = \frac{PA \cdot QC}{AQ}$$

$$BP \cdot CL \cdot AQ = PA \cdot QC \cdot BL$$

■

Teorema 2.7. Teorema de ceva

Tres cevinas concurrentes trazadas desde los vértices de un triángulo determinan sobre sus lados seis segmentos, cumpliéndose que el el producto de tres de ellos considerados en forma no consecutiva es igual al producto de los tres restantes.

$$BM \cdot AN \cdot CL = AM \cdot CN \cdot BL$$

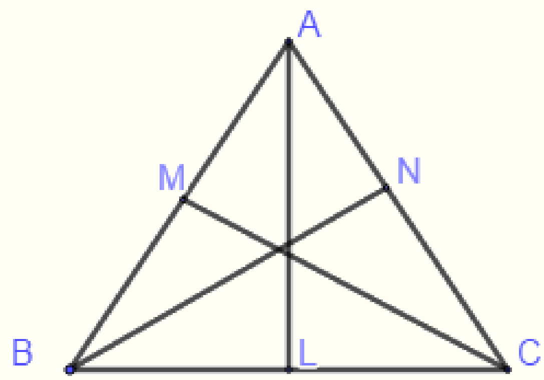


Figura 16. Teorema de ceva

Demostración

Se P el punto de intersección de las tres cevianas, aplicando el teorema de Menelao sobre el triángulo BAL se tiene que:

$$BM \cdot AP \cdot CL = AM \cdot LP \cdot BC \tag{5}$$

$$BM \cdot AP \cdot CL = AM \cdot LP \cdot (BL + CL) \tag{6}$$

Empleando el teorema de Menelao en triángulo LAC se tiene que:

$$NC \cdot AP \cdot BL = AN \cdot LP \cdot BC \tag{7}$$

$$NC \cdot AP \cdot BL = AN \cdot LP \cdot (BL + CL) \tag{8}$$

Dividiendo (6) entre (8) se tiene

$$\frac{BM \cdot \cancel{AP} \cdot CL}{NC \cdot \cancel{AP} \cdot BL} = \frac{AM \cdot \cancel{LP} \cdot \cancel{(BL + CL)}}{AN \cdot \cancel{LP} \cdot \cancel{(BL + CL)}}$$

$$BM \cdot CL \cdot AN \cdot CL = AM \cdot NC \cdot BL$$

■

Teorema 2.8.

Sea el triángulo ABC, y X, Y, Z puntos sobre los lados $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ respectivamente. Si

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1$$

entonces los segmentos $\overline{AX}, \overline{BY}$ $\overline{CZ}$ concurren.

Demostración

Denotando por W al punto de intersección de dos segmentos $\overline{AX}$ y $\overline{BY}$. Se Considera la recta que pasa por C y W, y llamamos F al punto de intersección con el lado $\overline{AB}$. Ocupando el teorema de Ceva se tiene

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AF}{FB} = 1 \tag{9}$$

y por hipótesis

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1 \tag{10}$$

Igualando (9) y (10) resulta que

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AZ}{ZB}$$

Por tanto los dos puntos F y Z han de coincidir.

Teorema 2.9.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Los tres segmentos de Ceva que al trazar las alturas, para las tres posibles bases, son concurrentes. Es decir que las tres altura se corta.

Demostración

Considerando la Figura 17

$$AZ = cos(\angle CAB) \cdot AC,\ BZ = cos(\angle ABC) \cdot BC$$

$$AY = cos(\angle CAB) \cdot AB,\ CY = cos(\angle BCA) \cdot BC$$

$$BX = cos(\angle ABC) \cdot AB,\ CX = cos(\angle BCA) \cdot AC$$

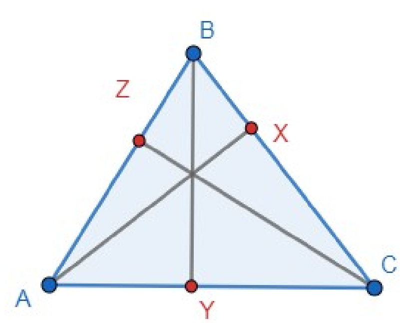


Figura 17.

$$\frac{AZ}{ZB}\frac{BX}{CX}\frac{CY}{AY} = \frac{cos(\angle CAB) \cdot AC}{cos(\angle ABC) \cdot BC}\frac{cos(\angle ABC) \cdot AB}{cos(\angle BCA) \cdot BC}\frac{cos(\angle BCA) \cdot AC}{cos(\angle CAB) \cdot AB}$$

Entonces $\dfrac{AZ}{ZB}\dfrac{BX}{CX}\dfrac{CY}{AY}=1$, por el teorema 2.8 se tiene que las tres alturas se cortan. ■

Corolario 2.4. Teorema del centroide

Sea el triángulo ABC, y el G el baricentro del triángulo entonces el baricentro divide a toda mediana a razón de $\frac{1}{2}$, es decir que si $\overline{BM}$ es una mediana entonces

$$\frac{GM}{BG}=\frac{1}{2}$$

Demostración

Sea el triángulo ABC y G el baricentro del triángulo, se traza la mediana $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$ como se muestra en la Figura 18.

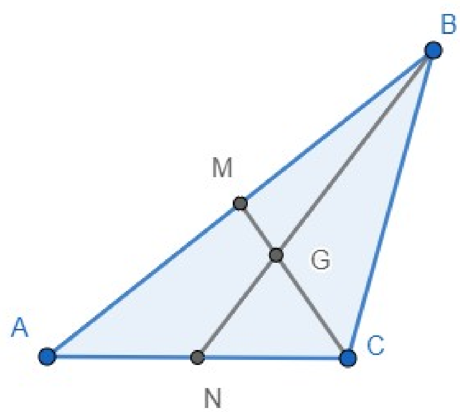


Figura 18. Teorema del centroide

Aplicando el teorema de Menelao sobre el triángulo ABN ($\overline{MC}$ es la recta que corta a los lados del triángulo) se tiene que:

$$\begin{aligned}
AM\cdot BG\cdot CN &= BM\cdot GN\cdot AC\\
\frac{AM\cdot BG}{BM\cdot GN} &= \frac{AC}{CN}, && \text{Como } N \text{ es punto medio entonces } AC=2CN\\
\frac{\cancel{AM}\cdot BG}{\cancel{BM}\cdot GN} &= \frac{2CN}{CN}, && M \text{ es punto medio de } \overline{AB} \text{ resulta } AM=BM\\
\frac{BG}{GN} &= \frac{2\cancel{CN}}{\cancel{CN}}\\
\frac{GN}{BG} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.10. Teorema del incentro y baricentro

En triángulo se cumple que el segmento que une el baricentro con el incentro es paralelo a un lado entonces dicho lado será igual a la semisuma de los otros lados es decir: Si $\overline{IG} \parallel \overline{AC}$ se cumple que

$$AC = \frac{AB + BC}{2}$$

Demostración

Sea el triángulo $\triangle ABC$, los puntos G y I es baricentro e incentro respectivamente. Trazamos la mediana $\overline{BJ}$, la bisectriz $\overline{BH}$, los segmento $\overline{IC}$ y $\overline{GI} \parallel \overline{AC}$ como se muestra en la Figura 19.

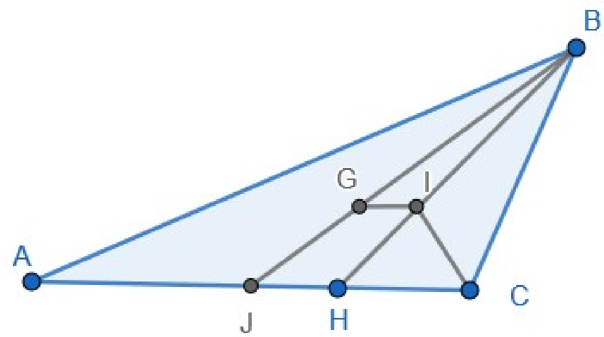


Figura 19. Teorema de baricentro e incentro

Empleando el teorema de Thales en triángulos en $\triangle JBH$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{HI}{BI} &= \frac{GJ}{BG} \\ &= \frac{1}{2} \quad \text{Por el corolario 2.4} \end{aligned}$$

Ocupando el teorema de la bisectriz sobre el triángulo ABH se tiene

$$\begin{aligned} \frac{AH}{AB} &= \frac{HI}{BI} \\ \frac{AH}{AB} &= \frac{1}{2} \\ AH &= \frac{AB}{2} \end{aligned}$$

nuevamente aplicando el teorema de la bisectriz sobre el triángulo HBC se tiene

$$\begin{aligned} \frac{CH}{BC} &= \frac{HI}{BI} \\ \frac{CH}{BC} &= \frac{1}{2} \\ CH &= \frac{BC}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= AH + CH \\ &= \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} \\ &= \frac{AB + BC}{2} \end{aligned}$$

■

2.1. Criterios de Semejanza de Triángulos

Definición 2.2. Triángulos semejantes.

Decimos que el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle A'B'C'$ (Ver Figura 20), lo cual denotamos así $ABC \sim A'B'C'$, si:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

y

$$\angle BAC = \angle B'A'C', \angle ABC = \angle A'B'C', \angle ACB = \angle A'C'B'.$$

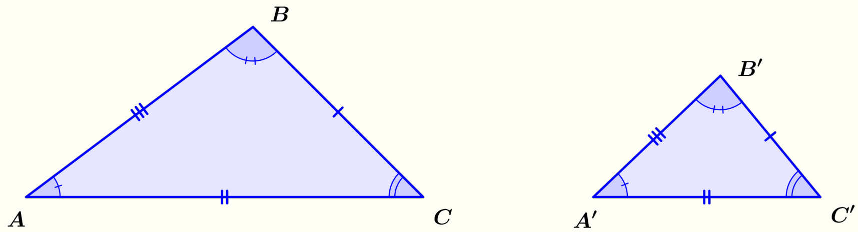


Figura 20. Definición de semejanza

El siguiente enlace se muestra un aplicación en Geogebra, donde muestra la razón que mantiene los lados de dos triángulos que son semejantes

`https://www.geogebra.org/m/WThkX8W7`.

En los tres teoremas que se muestran a continuación (los cuales son una aplicación del teorema de Thales) se establecen las condiciones mínimas para demostrar que dos triángulos son semejantes, a los cuales denominaremos: *Criterios de Semejanza de Triángulos.*

Teorema 2.11. Primer criterio de semejanza de triángulos: (A-A)

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

Demostración

Supongamos que en el $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ se tiene que $\angle ABC = \angle A'B'C'$ y $\angle ACB = \angle A'C'B'$, entonces $\angle BAC = \angle B'A'C'$ (Por la suma de ángulos internos en un triángulo).

Sea $D \in \overline{AB}$ y $E \in \overline{BC}$ tales que $BD = A'B'$ y $BE = B'C'$,

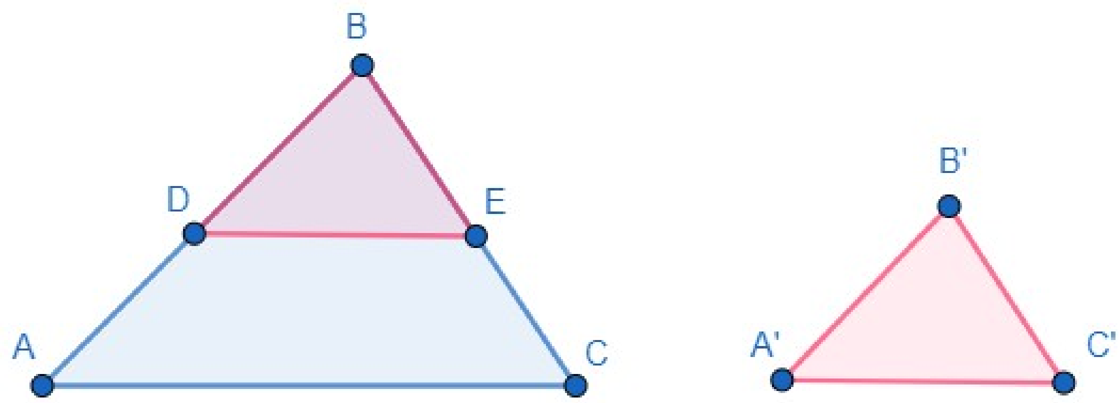


Figura 21. Primer criterio de semejanza

dado que $\angle DBE = \angle ABC = \angle A'B'C'$, se sigue por criterio (L-A-L) que $\triangle ADE \simeq \triangle A'B'C'$, por consiguiente $\angle ADE = \angle A'B'C' = \angle ABC$, de donde $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ (por ser iguales los ángulos correspondientes), ocupando el teorema de Thales para triángulos resulta:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$$

y por consiguiente

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \tag{11}$$

Sea $F \in \overline{AC}$ tal que $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$, entonces $FC = DE = A'C'$ (porque $DECF$ es paralelogramo y por ser $\triangle DBE$ congruente con $\triangle A'B'C'$) y aplicando el teorema de Thales para triángulo en el triángulo ABC resulta

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{FC}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \tag{12}$$

Luego, de (11) y (12) se tiene que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Así, se ha demostrado que los tres pares de ángulos son congruentes y los tres pares de lados son proporcionales, por lo tanto, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Teorema 2.12. Segundo criterio de semejanza de triángulos: (L-A-L)

Si un ángulo de un triángulo es congruente con otro ángulo de otro triángulo y los lados que comprenden al ángulo en el primer triángulo son respectivamente proporcionales a los lados que comprende al ángulo en el segundo triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

Demostración

Suponga que el $\angle ABC = \angle A'B'C'$ y que $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$. Sea $D \in \overline{AB}$ y $E \in \overline{BC}$ tales que $BD = A'B'$ y $BE = B'C'$.

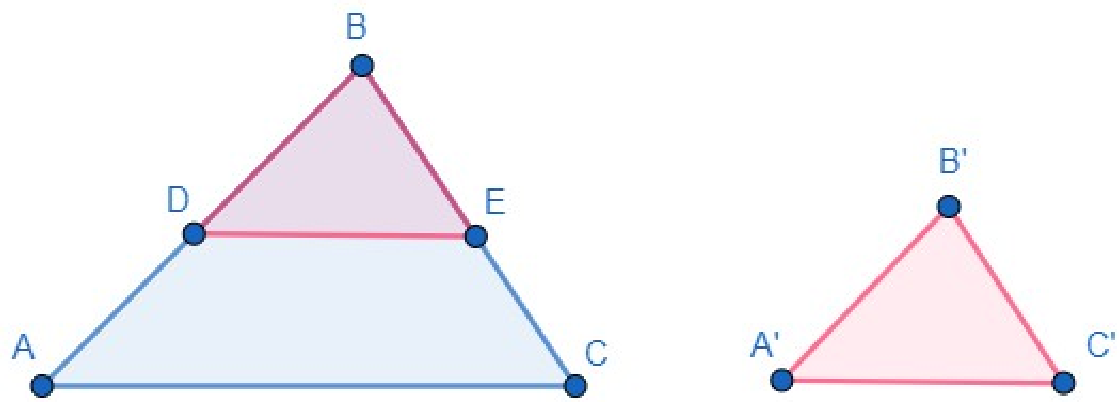


Figura 22. Segundo criterio de semejanza

Entonces por el criterio $(L-A-L)$, $\triangle ADE$ es congruente con $\triangle A'B'C'$, de lo cual se deduce que $\angle ADE = \angle A'B'C'$. Por otra parte tenemos que: $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BC}{BE}$, y utilizando el recíproco del teorema de Thales, resulta que $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, de lo cual a su vez se deduce que $\angle EDB = \angle CAB$, por ángulos correspondientes entre paralelas. Finalmente, por transitividad se tiene que $\angle CAB = \angle C'A'B'$. Por lo tanto, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, debido al primer criterio $(A-A)$.

■

Teorema 2.13. Tercer criterio de semejanza de triángulos: L-L-L

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

Demostración

Por hipótesis se tiene que: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ y como antes sean D y E puntos sobre $\overline{AB}$ y

$\overline{BC}$ respectivamente tales que $BD = A'B'$ y $BE = B'C'$. Entonces por el recíproco del teorema de Thales para triángulos se tiene que $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y por consiguiente el $\angle CAB = \angle EDB$ y el $\angle BCA = \angle BED$, de donde $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ (por el criterio $A-A$). Implica que $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{DE}$, luego por transitividad $\dfrac{AC}{DE} = \dfrac{BC}{B'C'}$, de donde $DE = B'C'$.

En consecuencia $\triangle ADE \simeq \triangle A'B'C'$ (por el criterio $L-L-L$), de lo cual se sigue que $\angle A'B'C' = \angle ADE$ y $\angle A'C'B' = \angle AED$, y por transitividad $\angle A'B'C' = \angle ABC$ y $\angle A'C'B' = \angle ACB =$. Empleando el primer criterio de semejanza $A-A$ implica que $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

3. Ejemplos

Luego las definiciones y teoremas enunciados y demostrados, estudiaremos algunos problemas en el que se aplique la teoría. El primer ejemplo es otra demostración del teorema de Pitágoras basándose en los criterios de semejanza de triángulos.

✓Ejemplo 3.1
Demostrar en todo triángulo rectángulo se cumple que la suma de los cuadrados de sus catetos es igual al cuadrado de su hipotenusa.

Demostración

Sea el triángulo rectángulo ABC, trazamos la altura $\overline{BH}$ como se muestra en la Figura 23.

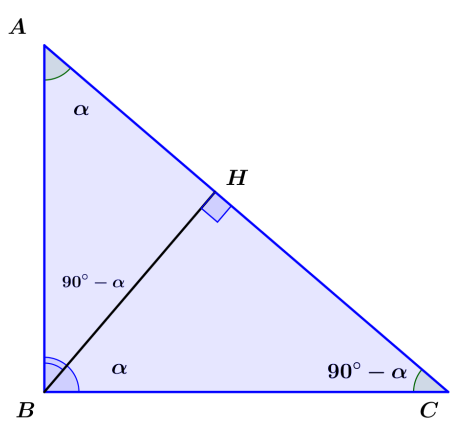


Figura 23. Teorema de Pitágoras

Los triángulos BAH y BAC son semejantes de debido a que tiene dos ángulos iguales. Entonces

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB} = \frac{BH}{BC}$$

de donde

$$AB^2 = AC \cdot AH \tag{13}$$

y puesto que los triángulos ABH y ABC también son semejantes porque tiene dos ángulos iguales, se obtiene

$$\frac{HC}{BC} = \frac{BH}{AB} = \frac{BC}{AC}$$

de donde

$$BC^2 = AC \cdot CH \tag{14}$$

finalmente, si sumamos las relaciones (13) y (14) obtenemos

$$BC^2 + AB^2 = AC \cdot CH + AC \cdot AH = AC \cdot (HC + AH) = AC \cdot AC = AC^2$$

■

En el siguiente ejemplo realizaremos otra demostración del corolario 2.4.

✓Ejemplo 3.2

Teorema del centroide: para cualquier triángulo ABC, sus tres medianas se interceptan en un punto común G y cada mediana es dividida en razón de $2:1$.

Demostración

Se construye el triángulo BAC de tal manera que las medianas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ se interceptan en un punto G, luego por el punto D se traza el segmento $\overline{DH}$ donde H está sobre $\overline{EC}$ que cumpla que $\overline{DH} \parallel \overline{BE}$ como se muestra en la Figura 24.

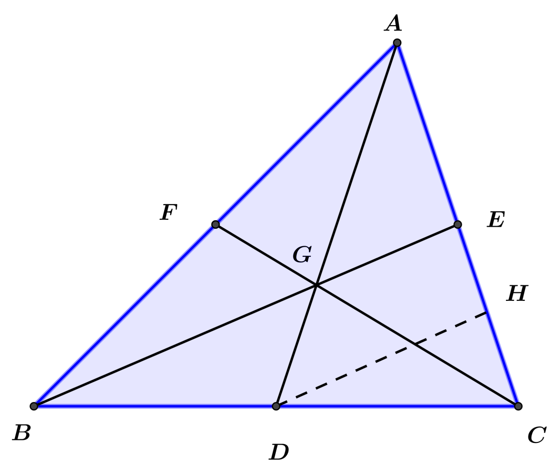


Figura 24. Teorema del centroide

Aplicando el teorema de la base media sobre el triángulo BEC se tiene

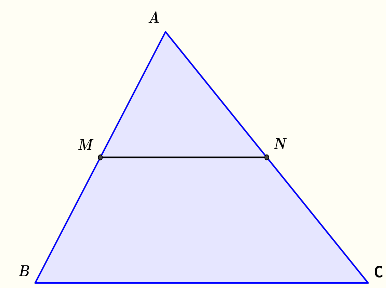
$$AE = EC = 2EH$$

y puesto que los triángulos AHD y AEG son semejantes por el criterio $(A - A)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AG} &= \frac{AH}{AE}\\ \frac{AD}{AG} &= \frac{3}{2}\\ \frac{AG+GD}{AG} &= \frac{3}{2}\\ \frac{DG}{AG} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Recordatorio

Teorema de base media: se verifica que $MN = \dfrac{BC}{2}$ y que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$



Por el punto E se traza el segmento $\overline{EK}$ donde K está sobre $\overline{DC}$ de forma que $\overline{EK} \parallel \overline{AD}$. Utilizando el teorema de la base media sobre el triángulo ACD se tiene

$$BD = CD = 2DK$$

y puesto que los triángulos BEK y BGD son semejantes por el criterio $(A - A)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{BE}{BG} &= \frac{BK}{BD}\\ \frac{BE}{BG} &= \frac{3}{2}\\ \frac{BG+EG}{BG} &= \frac{3}{2}\\ \frac{EG}{BG} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ahora, veamos que las tres medianas concurren. Supongamos que lo contrario, es decir, que la mediana CF corta a la mediana AD en un punto G', entonces éste punto también debe cumplir

$$\frac{DG'}{AG'} = \frac{1}{2}$$

de donde $G = G'$. Por tanto $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ concurren en G.

■

✓Ejemplo 3.3

En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{AD}$ y se ubica el punto E sobre $\overline{AD}$ tal que $BE = AC$. La prolongación $\overline{BE}$ intercepta en F a $\overline{CA}$. Demuestre que $AF = EF$.

Solución

Por el punto C trazamos la paralela a $\overline{AD}$ y se prolonga $\overline{BF}$ hasta cortar a la paralela en el punto G, como se muestra en la Figura 25, de ello resulta

$$\angle EAF = \angle FCG$$

$$\angle AEF = \angle FGC$$

Por lo tanto, los triángulos EAF y FGC son semejantes por el criterio $(A - A)$, así:

$$\frac{AF}{EF} = \frac{FC}{GF} = \frac{AF + FC}{EF + FG} = \frac{AC}{EG}$$

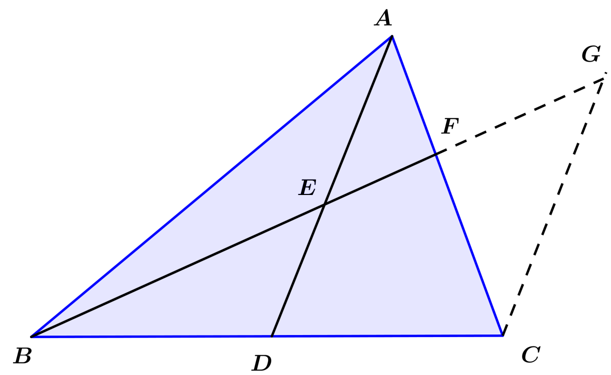


Figura 25. Ejemplo

Recordatorio

Si
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} = \frac{a+b}{c+d}$$

pero por hipótesis, $BE = AC$ y además $BE = EG$, entonces $\dfrac{AC}{EG} = 1$, por tanto $\dfrac{AF}{EF} = 1$.

■

✓Ejemplo 3.4

En el triángulo BAC, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ son medianas sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $\angle DAC = \angle CBE = 30°$, demuestre que el triángulo BAC es equilátero.

Demostración Considerando los datos del problema se construye la Figura 26.

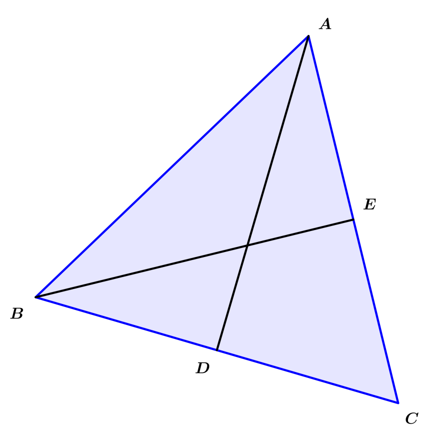


Figura 26. Ejemplo

Los triángulos ACD y BEC son semejantes dado $\angle DAC = \angle CBE = 30°$ y comparten el $\angle ECB$ (A-A), entonces se cumple

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC} = \frac{2DC}{2EC} = \frac{BC}{AC}$$

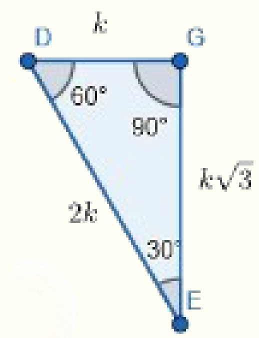
de donde

$$AC^2 = BC^2 \implies AC = BC$$

Lo que implica que $\triangle BAC$ es isósceles. En el triángulo BEC el $\angle CBE = 30°$, $EC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC$, se genera el triángulo notable de $30, 60$ entonces $\angle BEC = 90°$, así $\angle ACB = 60°$, como $\triangle BAC$ es isósceles resulta que todos los ángulos son de $60°$, por lo tanto el triángulo ABC es equilátero.

Recordatorio

El triángulo rectángulo de $30, 60$ cumple que:



■

✓Ejemplo 3.5

En un triángulo ABC D y E están sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, F está sobre el lado $\overline{AC}$ tal que $\overline{EF}$ es paralela a $\overline{BC}$, G está sobre $\overline{BC}$ de manera que EG sea paralela a $\overline{AD}$. Demuestre que

$$\frac{EF}{BC} + \frac{EG}{AD} = 1.$$

Demostración. Se construye la Figura 27 a partir del enunciado del problema.

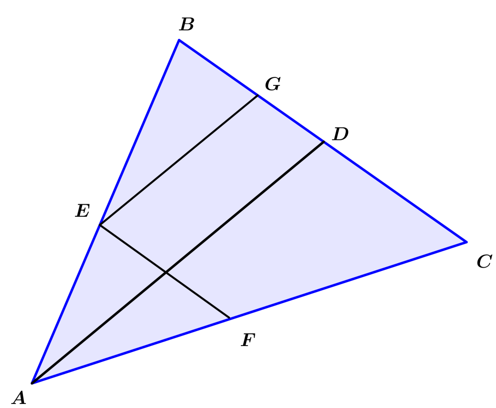


Figura 27. Ejemplo

Sabemos que $\angle AEF = \angle ABC$, $\angle EFA = \angle BCA$ por ser ángulo correspondiente de recta paralelas, aplicando el criterio $(A - A)$ los triángulos AEF y ABC son semejantes, de donde obtenemos las siguientes relaciones

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \tag{15}$$

Por otro lado, $\angle BGE = \angle BDA$, $\angle GEB = \angle DAB$ por ser ángulo correspondiente de recta paralelas los triángulos EBG y ABD también son semejantes, de donde obtenemos la siguiente relación

$$\frac{EG}{AD} = \frac{EB}{AB} = \frac{BG}{BD} \tag{16}$$

Combinando las ecuaciones (15) y (16) tenemos

$$\frac{EF}{BC} + \frac{EG}{AD} = \frac{AE}{AB} + \frac{EB}{AB} = \frac{AE + EB}{AB} = 1$$

■

✓Ejemplo 3.6

En un triángulo ABC, $AB = 8$, $BC = 7$, $CA = 6$. Se extiende $\overline{BC}$ hasta un punto P tal que $\triangle PAB \sim \triangle PCA$, encuentre la longitud de PC.

Solución

Considerando el enunciado del problema se construye la Figura 28.

La hipótesis es que $\triangle PAB \sim \triangle PCA$ resulta

$$\frac{PA}{PC} = \frac{AB}{CA} = \frac{PB}{PA}$$
$$\frac{PA}{x} = \frac{8}{6} = \frac{x+7}{PA}$$

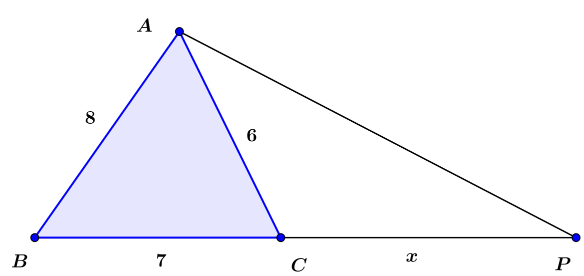


Figura 28. Ejemplo

donde

$$\frac{PA}{x} = \frac{8}{6}$$
$$PA = \frac{4}{3}x$$

y utilizando la otra igualdad

$$\frac{8}{6} = \frac{x+7}{PA}$$
$$PA = \frac{3(x+7)}{4}$$

Igualando se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{4x}{3} &= \frac{3x+21}{4} \\
\frac{4x}{3} - \frac{3x}{4} &= \frac{21}{4} \\
\frac{7}{12}x &= \frac{21}{4} \\
x &= \frac{12 \cdot 21}{7 \cdot 4} = \frac{63}{7} = 9.
\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 3.7

$ABCD$ es un rectángulo con $AD = 2$, $AB = 4$. P está sobre AB tal que $AP : PB = 2 : 1$, $CE \perp DP$ en E. Encuentre CE.

Solución

Considerando el enunciado del problema se construye la Figura 29.

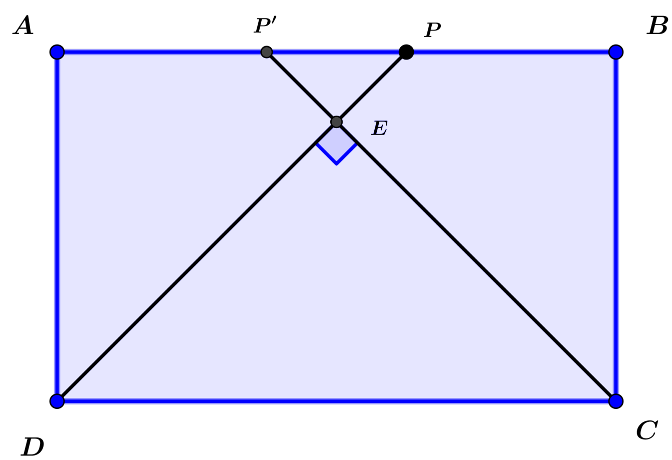


Figura 29. Ejemplo

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{1}$$

lo cual implica que $AP = 2PB$, y que

$$\begin{aligned}
AB &= AP + PB \\
4 &= 2PB + PB \\
\frac{4}{3} &= PB
\end{aligned}$$

Por lo que $AP = \frac{8}{3}$, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene

$$\begin{aligned}
DP^2 &= AD^2 + AP^2 \\
&= (2)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 \\
&= \frac{100}{9} \\
DP &= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que $\triangle DAP \sim \triangle DEC$ por el criterio (A-A), debido a que tiene un ángulo de 90 grados y $\angle PDA = \angle ECD$.

$$\frac{EC}{AB} = \frac{DP}{DC}$$
$$\frac{EC}{2} = \frac{\frac{10}{3}}{4}$$
$$EC = \frac{5}{3}$$

■

✓Ejemplo 3.8

En un $\triangle ABC$, $\angle A = 2\angle B$. Demuestre que $AC^2 + AB \cdot AC = BC^2$.

Según el enunciado del problema se construye la Figura 30, además se traza la bisectriz $\overline{AD}$.

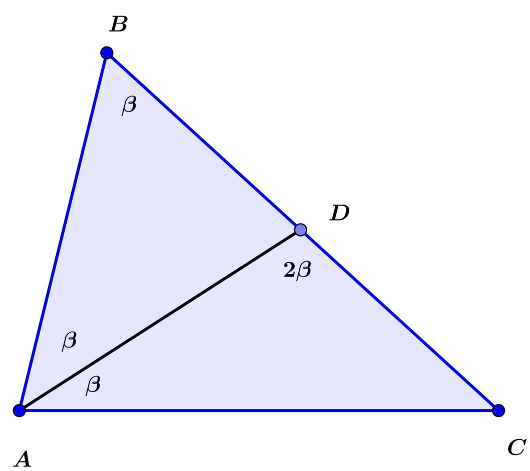


Figura 30. Ejemplo

Por el criterio $(A{-}A)$ triángulos ADC y ABC son semejantes, porque comparten $\angle ABC$ y $\angle ADC = \angle CAB$. Resulta

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} = \frac{AD}{AB} \implies AC \cdot AB = BC \cdot AD$$

Por otro lado,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \implies AC^2 = BC \cdot CD$$

Combinando los resultados anteriores

$$\begin{aligned} AC^2 + AB \cdot AC &= BC \cdot DC + BC \cdot AD \\ &= BC \cdot DC + BC \cdot BD \\ &= BC \cdot (BD + DC) \\ &= BC \cdot BC \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 3.9

En un triángulo ABC donde $BC = 2AB$, se traza la altura $\overline{BH}$, tal que $\angle HBC = 3\angle ABH$ si $AH = 2$, determine HC. Como se observa en la Figura 31.

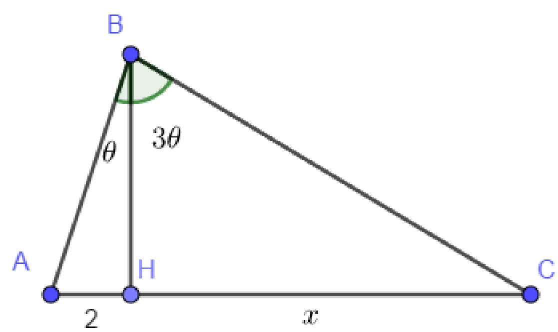


Figura 31. Ejemplo

Solución

Se traza la bisectriz $\overline{BD}$ como se muestra en la Figura 32. Resulta que el triángulo ABD es isósceles debido a que $\overline{BH}$ es altura y bisectriz del triángulo, además $AH = HD = 2$, entonces $AD = 4$; aplicando el teorema de la bisectriz sobre el triángulo ABC resulta

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$$
$$\frac{DC}{4} = \frac{BC}{AB}$$
$$\frac{DC}{4} = \frac{2AB}{AB}$$
$$DC = 8$$

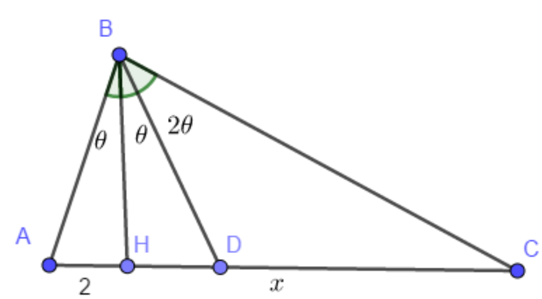


Figura 32. Ejemplo

Por lo tanto HC=10. ■

✓Ejemplo 3.10
Demostrar que las tres bisectrices de un triángulo se corta en un punto llamado incentro.

Demostración

Se trazan las bisectriz $\overline{AD}, \overline{BE}$ y $\overline{CF}$ como se muestra en la Figura siguiente.

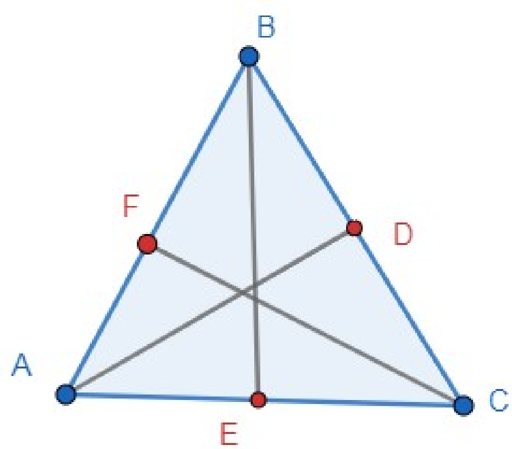


Figura 33. Ejemplo

Empleando el teorema de bisectriz sobre $\overline{BE}$ se tiene que

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{CE} \implies \frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB}$$

Análogamente se utiliza el teorema de bisectriz sobre $\overline{AD}$ se tiene que

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD} \implies \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

Nuevamente se emplea el teorema de bisectriz sobre $\overline{CF}$ se tiene que

$$\frac{AC}{AF} = \frac{BC}{FB} \implies \frac{AC}{BC} = \frac{AF}{FB}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} &= \frac{\cancel{AC}}{\cancel{BC}} \cdot \frac{\cancel{AB}}{\cancel{AC}} \cdot \frac{\cancel{BC}}{\cancel{AB}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Por el teorema 2.8 se tiene que las tres bisectrices se cortan. ■

✓**Ejemplo 3.11**

En la Figura 34, $TB = 7$, $AT = 15$, $AK = KC$ y $GC = 4$. Calcular TG.

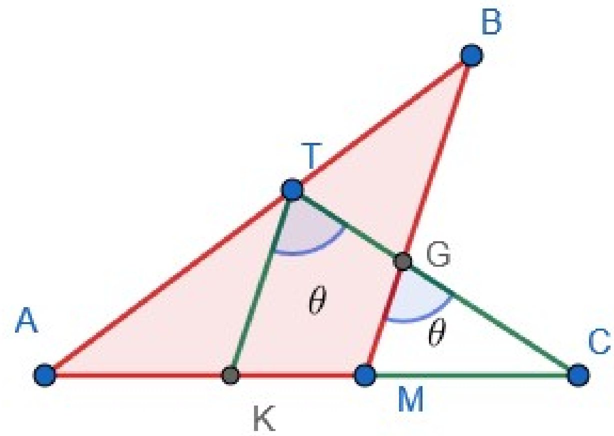


Figura 34. Ejemplo

Solución

Dado $\angle KTG = \angle MGC = \theta$, entonces $\overline{TK} \parallel \overline{MB}$, empleando el Teorema de Thales para el triángulo ABM se tiene:

$$\frac{AT}{TB} = \frac{AK}{KM}$$
$$\frac{15}{7} = \frac{AK}{KM}$$
$$\frac{15}{7} = \frac{KC}{KM}, \qquad \text{aplicando la propiedad de segmento } AC = AB + BC$$
$$\frac{15}{7} = \frac{KM + MC}{KM}$$
$$\frac{15}{7} - 1 = \frac{MC}{KM}$$
$$\frac{8}{7} = \frac{MC}{KM}$$

además de utilizar el Teorema de Thales para triángulos en el $\triangle TCK$ resulta que

$$\frac{GC}{TG} = \frac{MC}{KM}$$
$$\frac{4}{TG} = \frac{MC}{KM}$$
$$\frac{4}{TG} = \frac{8}{7}$$
$$TG = \frac{7}{2}$$

■

✓**Ejemplo 3.12**

En la Figura 35, se sabe que: $\dfrac{AB}{FB} = \dfrac{BM}{MN} = \dfrac{3}{2}$, $FB = FN$ y $AE = 6$. Hallar la medida de FC.

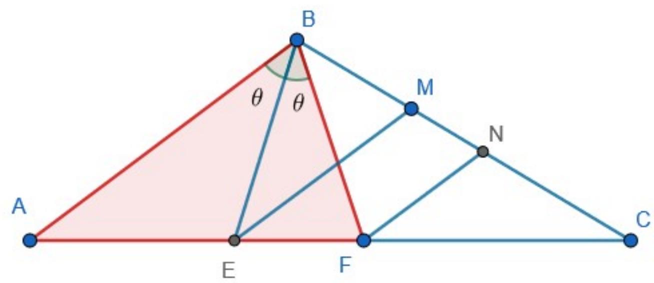


Figura 35. Ejemplo

Solución

Utilizando el teorema de la bisectriz interna sobre el $\triangle ABF$ resulta que

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AE} &= \frac{BF}{EF} \\ \frac{AB}{6} &= \frac{BF}{EF} \\ \frac{AB}{BF} &= \frac{6}{EF} \\ \frac{3}{2} &= \frac{6}{EF} \\ EF &= 4 \end{aligned}$$

entonces $\dfrac{AE}{EF} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \implies \dfrac{AE}{EF} = \dfrac{BM}{MN}$, utilizando el teorema del reciproco del Teorema de Thales resulta $\overline{EM} \parallel \overline{FN} \parallel \overline{AB}$, entonces $\angle EAB = \angle CEB$ (ángulos correspondiente entre rectas paralelas) y $\angle ABC = \angle EMC$ (ángulos correspondiente entre rectas paralelas) empleando el criterio $(A-A)$, se tiene que $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle EMC$, entonces se tiene la siguiente proporcionalidad

$$\begin{aligned} \frac{FC}{AC} &= \frac{FN}{AB} \\ \frac{FC}{FC+AF} &= \frac{FB}{AB} \\ \frac{FC}{FC+10} &= \frac{2}{3} \\ 3FC &= 2FC + 20 \\ FC &= 20 \end{aligned}$$

■

✓**Ejemplo 3.13**
En un triángulo ABC, recto en B se traza la altura BH, luego se ubican los puntos medios M de $\overline{BC}$ y N de $\overline{BH}$ tal que $AM = 2AN$. Calcular $\angle BCA$.

Solución

Se construye la Figura 36, a partir del enunciado del problema.

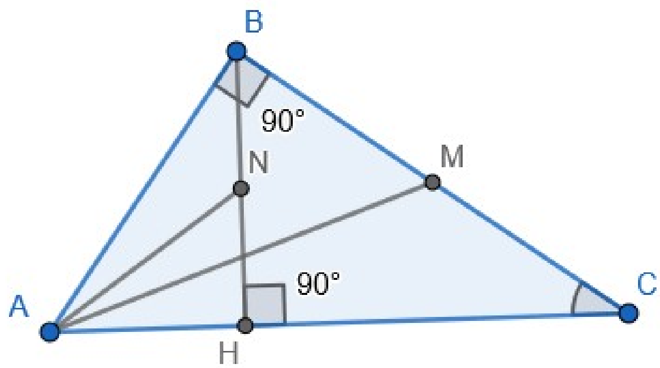


Figura 36. Ejemplo

A partir del figura anterior resulta que

$$\angle BCA + \angle CAB = 90°$$

$$\angle BCA + \angle CAB = \angle CAB + \angle ABH$$

$$\angle BCA = \angle ABH$$

Dado que $\triangle ABH$ y $\triangle HBC$ son rectángulos, y tiene un ángulos iguales empleando el criterio (A-A) resulta que son semejantes de donde

$$\frac{BH}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AC}$$
$$\frac{NC}{BM} = \frac{AH}{AB}$$

dado que dos lados de los triángulos ANH y ABM son proporcionales y además son triángulos rectángulos utilizando el criterio $(L - A - L)$ los triángulos son semejantes, de ello

$$\frac{NC}{BM} = \frac{AH}{AB} = \frac{AN}{AM}$$
$$\frac{NC}{BM} = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{2}$$

por lo tanto $\frac{1}{2} = \frac{AB}{AC} \implies AC = 2AB$, entonces el $\triangle ABC$ es el triángulo notable 30, 60 entonces $\angle BCA = 30°$. ■

✓Ejemplo 3.14

En la Figura 37 los lados de los cuadrados de menor a mayor miden 4, x y 9. Calcular x.

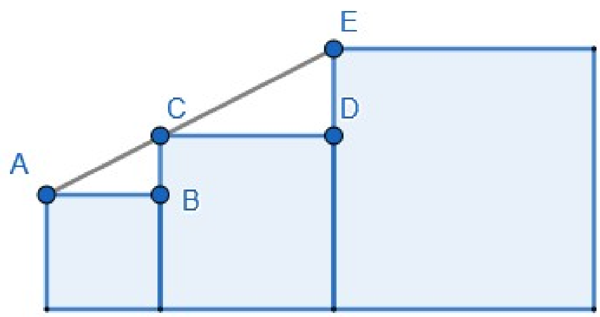


Figura 37. Ejemplo

Solución

Dado que el $\angle BAC = \angle DCE$ y los triángulos ABC y CDE son rectángulos entonces por el criterio $(A - A)$ los los triángulos ABC y CDE son semejantes, lo que implica que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{ED}$$
$$\frac{4}{x} = \frac{x-4}{9-x}$$
$$4(9-x) = x(x-4)$$
$$36 - 4x = x^2 - 4x$$
$$36 = x^2$$
$$6 = x$$

■

✓Ejemplo 3.15

En un triángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes AN , BL y CM. Las prolongaciones de MN y AC se cortan en P. Si: $\frac{1}{AL} + \frac{1}{AP} = \frac{1}{5}$. Calcular AC.

Solución

Se construye la Figura 38 a partir del enunciado del problema.

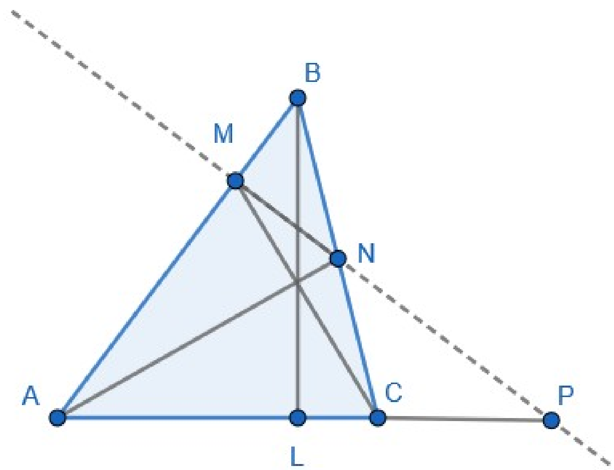


Figura 38. Ejemplo

Aplicando el Teorema de Ceva se tiene

$$AM \cdot BN \cdot CL = MB \cdot NC \cdot AL \tag{17}$$

$$AM \cdot BN \cdot CP = MB \cdot NC \cdot AP \tag{18}$$

dividiendo (15) entre (16) resulta

$$\begin{aligned}
\frac{CL}{CP} &= \frac{AL}{AP} \\
\frac{CL}{AL} &= \frac{CP}{AP} \\
\frac{AC - AL}{AL} &= \frac{AP - AC}{AP} \\
\frac{AC}{AL} - 1 &= -\frac{AC}{AP} + 1 \\
\frac{AC}{AL} + \frac{AC}{AP} &= 2 \\
\frac{1}{AL} + \frac{1}{AP} &= \frac{2}{AC} \\
\frac{1}{5} &= \frac{2}{AC} \\
AC &= 10
\end{aligned}$$

■

4. Problemas

Resolver los siguientes problemas de forma clara, ordenada y justificando a detalle todos sus procesos.

1. Sean AB y CD las bases del trapecio $ABCD$, cuyas diagonales se interceptan en E perpendicularmente. Si $AD = 13$, $AE = 12$ y $CE = 4$ encuentre las longitudes de CD y AB.

2. Sea $ABCD$ un trapecio de bases BC y AD, sus diagonales se cortan en E. Si $BE = 3$, $ED = 4$ y $CE = 2$, determine la medida de AE.

3. Las bases de un trapecio miden 3 y 5, y si su altura mide 4. Encontrar la distancia desde el punto de corte de las diagonales hasta la base mayor.

4. El $\triangle ABC$ es rectángulo en B. Se dibuja un rectángulo $BEDF$ con D sobre la hipotenusa, E y F sobre BC y AB, respectivamente. Si $AB = 1$, demuestre que $\dfrac{BC}{BE} = \dfrac{1}{1 - DE}$.

5. Sobre la circunferencia de centro O, se trazan los diámetros AB y CD tales que $\overline{AB} \perp \overline{CD}$. Sea P un punto sobre el arco CBD y Q el punto de intersección de las cuerdas $\overline{AP}$ y $\overline{CD}$. Si $DO = 1$, demuestre que $AP \cdot AQ = 2$.

6. Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente paralelos o respectivamente perpendiculares, entonces los dos triángulos son semejantes.

7. Las alturas, las bisectrices y las medianas homólogas de dos triángulos semejantes están en la misma razón que sus lados homólogos.

8. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos semejantes con $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'} = k$. Demuestre que: la razón entre los perímetros de los triángulos es k y que la razón entre sus áreas es k^2.

9. Sea ABC un triángulo, con D sobre $\overline{AB}$, E sobre $\overline{AC}$ y F sobre $\overline{BC}$, tal que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$, Demuestre que $BF = FC$.

10. Sea ABC un triángulo, con D sobre $\overline{AB}$, con E sobre $\overline{BC}$ y F sobre $\overline{AC}$, tal que $AD = 2BD$ y $FA = 2CF$. Demuestre que E es punto medio de BC.

11. Sea Γ una circunferencia y dado un triángulo ABC, sean L, L', M, M', N, N' los puntos de corte de la circunferencia con el triángulo , sobre los lados $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ respectivamente. Demostrar que si AL, BM, CN concurren, entonces $\overline{AL'}, \overline{BM'}, \overline{CN'}$ concurren.

12. En el triángulo ABC, rectángulo en A , se consideran las circunferencias inscritas y circunscritas. La recta AM es tangente a la circunferencia circunscrita en el punto A (M es punto de BC). S y R son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. La recta RS corta a la recta BC en N. Las rectas AM y SR se cortan en U. Demostrar que el triángulo UMN es isósceles.

13. Demuestre que si ABC es un triángulo y $\overline{AA'}$ es su bisectriz externa (con A' sobre $\overline{BC}$) entonces $\dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{AB}{AC}$

14. Demuestre que si ABC es un triángulo y suponga que las bisectrices internas de B y C cortan a $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ en b' y C' respectivamente y que la bisectriz externa de A corta a $\overline{BC}$ en A'. Demuestre que A', B', C' son colineales.

15. Demuestre que si ABC es un triángulo que los puntos en los que las bisectrices externas cortan a su lado opuesto correspondientes son colineales.

5. Respuesta a los problemas

- *Problema 1.* $AB = 3\sqrt{41}$, $CD = \sqrt{41}$.
- *Problema 2.* $AE = \dfrac{8}{3}$.
- *Problema 3.* $\dfrac{5}{2}$

6. Sugerencia

Si desea obtener mayor información sobre la semejanza de triángulos revisar los siguientes enlaces:

- Simulaciones de los criterios de semejanza: `https://www.geogebra.org/m/kym7x44R#material/htDXCTkD`
- `https://www.jica.go.jp/project//elsalvador/004/materials/ku57pq00002w8xyf-att/guia_metodologica_primaria_09_05.pdf`.
- `https://www.matematicasonline.es/cuarto-eso/ejercicios/semejanza2.pdf`.

Universidad de El Salvador
Modalidad a Distancia
Facultad de Ciencias Naturales Y Matemática
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Círculo y Circunferencia

Asignatura:

Geometría Euclídea I

Coordinador de carrera:

Coordinadora de cátedra:

Elaborado por:

Lic. Javier Antonio Ramos Martínez

Ciudad universitaria, San Salvador, 20 junio del 2020

Índice

Círculo y Circunferencia

SUMARIO

- Elementos de la Circunferencia.
- Ángulos semi-inscrito e inscritos en una circunferencia.
- Cuadriláteros ciclicos.
- Área de un círculo.
- Ejemplo.
- Problemas.

Al finalizar el estudio de este capítulo será capaz de

- *Resolver problemas donde se aplica las propiedades de los ángulos semi-inscritos e inscritos en una circunferencia.*
- *Resolver problemas donde se aplica las propiedades de los cuadriláteros cíclicos.*

Introducción

El último material de la asignatura de Geometría Euclídea, empieza con la narrativa de la historia del número pi, presentado datos curiosos, luego se define el concepto de circunferencia tiene haciendo mención a los elementos que poseen.

Continuando el estudio de los ángulos en una circunferencia los siguiente aspectos: definición, clasificación y propiedades con sus respectivas demostraciones.

Posteriormente, se abordará la relación que existen entre triángulos, cuadriláteros, rectas con las circunferencias, por ejemplo los cuadriláteros cíclicos, rectas tangentes, etc., Además de enunciar las propiedades se demostrará detalladamente.

Otro tema que se estudiará que esta muy relacionado con circunferencia nos estamos refiriendo al circulo, resaltado de este sus elementos y propiedades y enfocándonos en encontrar secciones de áreas acotadas por figura planas conocidas entre estas el circulo. Finalizando la pare Teórica e esta unidad se demostrará las relaciones métrica más importante en la circunferencia. Como el todos los anteriores materiales esta la parte de los problemas resueltos y de los problemas propuestos estos con el fin de fijar y adquirir la habilidad de utilizar la teoría en la resolución de problemas.

1. Historia del número Pi

El número π es un número muy popular en la Matemática, todos lo hemos estudiado y recordamos su valor aproximado; $3,14159....$, pero ¿de dónde le viene esa popularidad y esa fascinación que ha ejercido en la mente de todos los hombres de ciencia a lo largo de los años?

Sean dos circunferencias de longitudes; C_1 C_2 de diámetros respectivos D_1 y D_2. Com son dos figuras semejantes, podemos estable cer la relación de proporcionalidad entre s longitud y su diámetro

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2} = \cdots$$

esa relación de proporcionalidad, indepen diente del tamaño de la circunferencia, lo re presentamos con el símbolo π.

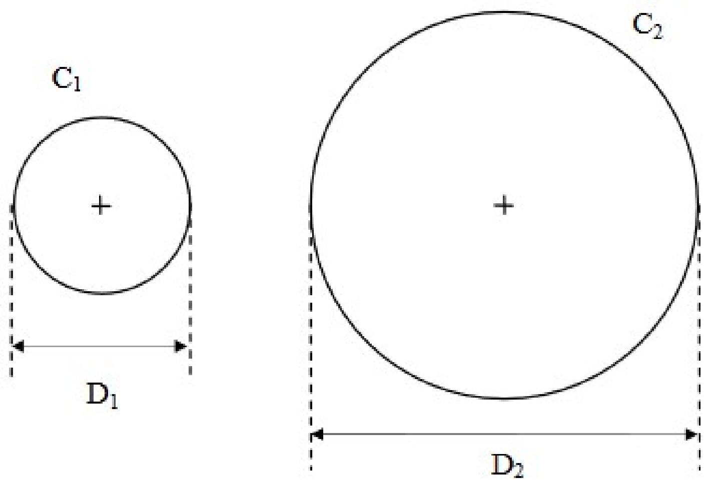


Figura 1.

El problema viene ahora. ¿Cuál es el valor numérico de ese símbolo, cuánto vale π? No, es una pregunta sencilla ni mucho menos. De hecho, la búsqueda de π le ha llevado milenios a la humanidad. Repasemos un poco la historia de esa búsqueda.

En las tablillas babilonias se le asigna de una forma aproximada el valor 3 a la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. En la Biblia, en el libro de las Crónicas, se describe un recipiente circular que formaba parte del templo de Salomón. Allí se especifica su tamaño; "diez codos de ancho y un cordón de 30 codos lo ceñía a su alrededor". Es decir, asignaba el valor 3 a nuestro número π al igual como la cultura babilonia. Si se recuerda el largo cautiverio de los judíos no se debe extrañar nos de la gran influencia que la cultura babilonia junto con sus mitos, costumbre y religión ejercieron sobre el pueblo hebreo. Afortunadamente, nadie tomó esas palabras de la Biblia como parte fundamental del dogma judío o cristiano, pues de lo contrario, todas las ruedas de la cristiandad debieran transformarse en bonitos pero incómodos hexágonos regulares. Esa aproximación grosera fue mejorada posteriormente. Los arquitectos fenicios y egipcios usaban el valor.

$$\pi = \frac{22}{7} = 3,142857143\cdots$$

Este valor aproximado difiere del real en poco más del 0,04 %, valor suficientemente bueno a efectos de cálculos técnicos pero los griegos sabían que ese valor no era correcto e intentaron descubrir su secreto. En la gran pirámide de Keops la relación entre el perímetro de la base y su altura es aproximadamente el valor 2π.

Arquímedes de Siracusa puso cerco a la circunferencia. Inscribió un polígono regular dentro del círculo y circunscribió otro del mismo número de lados por fuera. Conociendo los perímetros de los polígonos inscrito y circunscrito, sabemos que el perímetro de la circunferencia se encontrará entre esos dos valores. Cuanto mayor sea el número de lados de los polígonos más precisión obtendrá.

Inicia primero con un triangulo, luego un cuadrado, pentágono, hexágono, etc. al ir aumentando el número de lados los polígonos van aproximándose a la circunferencia y consecuentemente el número π se puede aproximar cuanto se quiera sin más que aumentar el número de lados. Arquímedes llegó a usar un polígono de 96 lados con lo cual obtuvo para π el valor.

$$\pi = \frac{3123}{994} = 3,141851107\cdots$$

Que difiere del valor verdadero en 1 parte por $12,000$. En China, en el siglo V, se mejoró el método de Arquímedes cuando se descubrió la mejor aproximación a π en forma del número racional.

Si quiere leer más sobre el tema de número π, puede revisar el siguiente enlace `http://vviana.es/doc/El%20numero%20Pi.pdf`

$$\pi = \frac{355}{113} = 3,14159292\cdots$$

2. Circunferencia y Círculo.

2.1. Elementos de la Circunferencia

Primeramente se va estudiar el concepto de circunferencia, posteriormente con los conceptos relacionados con una circunferencia.

Definición 2.1. Circunferencia

Es el lugar geométrico de puntos que equidistan de un punto dado, llamado el ***centro*** de la circunferencia; la distancia de cada punto de la circunferencia al centro es el ***radio***.

Por otra parte, todos los puntos que están a una distancia del centro menor o igual al radio forman el *círculo*; estos puntos quedan "al interior" o sobre la circunferencia.

Si A y B son dos puntos de una circunferencia, el segmento de recta $\overline{AB}$ define una ***cuerda***; en particular, si el centro de la circunferencia pertenece a la cuerda, ésta es llamada ***diámetro***. Es importante mencionar que para cada punto de la circunferencia existe exactamente un punto *diametralmente opuesto*.

En la Figura 2, se tiene una circunferencia de centro O y radio $r = OA = OB = OA'$; $\overline{AB}$ y $\overline{AA'}$ son cuerdas, pero $\overline{AA'}$ es también diámetro, por lo que A' es diametralmente opuesto a A y viceversa.
Observe que por la desigualdad triangular aplicada al triángulo isósceles $\triangle AOB$

$$\begin{aligned} AB &< AO + BO \\ &= r + r \\ &= AA' \end{aligned}$$

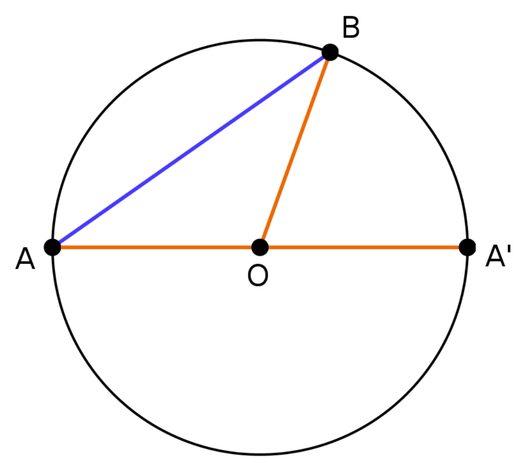


Figura 2. Elementos de una circunferencia

Si A es un punto fijo, esta desigualdad es válida para cualquier punto B sobre la circunferencia (excepto cuando $B = A'$ lo cual implica $AB = AA'$). Esto quiere decir que el diámetro es la mayor de todas las cuerdas.

2.2. Ángulos en la Circunferencia

Las porciones de circunferencia que quedan entre dos puntos ubicados en la circunferencia, se les llama ***arcos de circunferencia***; note que dos puntos sobre una circunferencia definen dos arcos de circunferencia como lo indica la 2, $\widehat{AB}$, forman dos arcos.
Si un ángulo tiene vértice sobre el centro de la circunferencia y está formado por dos radios, será

llamado ***ángulo central***; por ejemplo, $\angle AOB$ hace referencia a dos ángulos, cuya suma es $360°$, y *subtienden* respectivamente a uno de los arcos $\widehat{AB}$ como lo indica la Figura 2.

Finalmente, si un ángulo tiene el vértice sobre la circunferencia y está formado por dos cuerdas, será llamado *ángulo inscrito*; en la Figura 2, $\angle AA'B$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco AB.

Teorema 2.1.

El ángulo central es el doble del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco. Es decir que $\angle A'AB = \dfrac{\angle A'OB}{2}$.

Demostración

Considere la Figura 3, se demostrará que $\angle AOB = 2\angle APB$ en los tres casos mostrados.

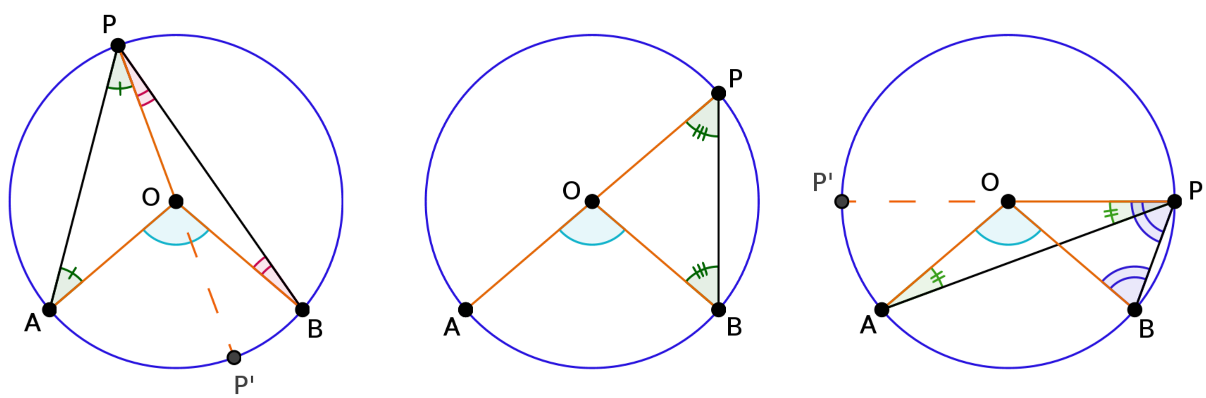


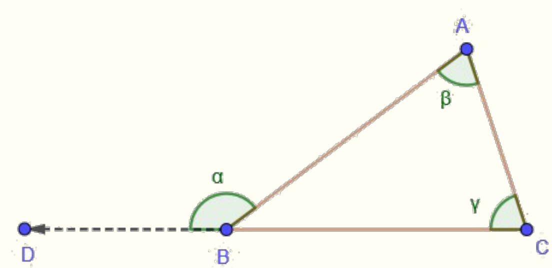
Figura 3.

En la circunferencia de la izquierda, sea P' el punto diametralmente opuesto a P; observe que $\triangle APO$ y $\triangle BPO$ son triángulos isósceles, y por el teorema del ángulo externo se tiene

$$\begin{aligned}
\angle AOB &= \angle AOP' + \angle BOP' \quad \text{aplic. teorema 1.1 a)} \\
&= (\angle APO + \angle OAP) + (\angle BPO + \angle OBP) \\
&= 2\angle APO + 2\angle BPO \\
&= 2\,(\angle APO + \angle BPO) \\
&= 2\angle APB
\end{aligned}$$

Recordatorio

Teorema 1.1 a) establece $\beta + \gamma = \alpha$



El caso de la circunferencia de en medio de la 3 se deduce:

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle OPB + \angle PBO \quad \text{el } \triangle OPB \text{ es isósceles.} \\ &= 2\angle OPB \end{aligned}$$

Para la circunferencia de la derecha de la Figura 3, el trabajo es análogo y sólo cambia en un pequeño arreglo algebraico

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle P'OB - \angle AOP' \quad \text{aplicando teorema 1.1 a)} \\ &= (\angle BPO + \angle OBP) - (\angle APO + \angle OAP) \\ &= 2\angle BPO - 2\angle APO \\ &= 2(\angle BPO - \angle APO) \\ &= 2\angle APB \end{aligned}$$

■

Corolario 2.1.

Todos los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son iguales (Ver Figura 4). En particular, los ángulos internos son iguales a 90° si subtienden a una semicircunferencia.

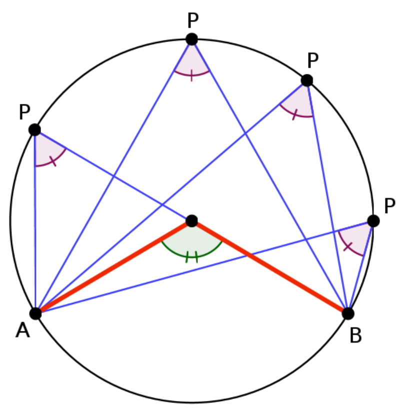


Figura 4.

Demostración

Todos los ángulos mostrados en la Figura 4 son iguales a la mitad del $\angle AOB$, y por tanto, son iguales entre sí. En particular, si $\overline{AB}$ fuera un diámetro, $\angle AOB = 180°$ y por tanto $\angle APB = 90°$.

■

Hay un par de ángulos más que son importantes: si un punto P es interno a la circunferencia, el ángulo de vértice P formado por dos cuerdas que pasan por P se llama ángulo ***interior***. De forma similar, si P es exterior y dos cuerdas de la circunferencia (al prolongarse) pasan por P, el ángulo con vértice P es llamado ángulo ***exterior***.

Teorema 2.2.

Los ángulos interior y exterior mostrados en la Figura 5 cumplen las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned}\angle AQC &= \frac{\angle BOD + \angle AOC}{2}\\ \angle APC &= \frac{\angle BOD - \angle AOC}{2}\end{aligned}$$

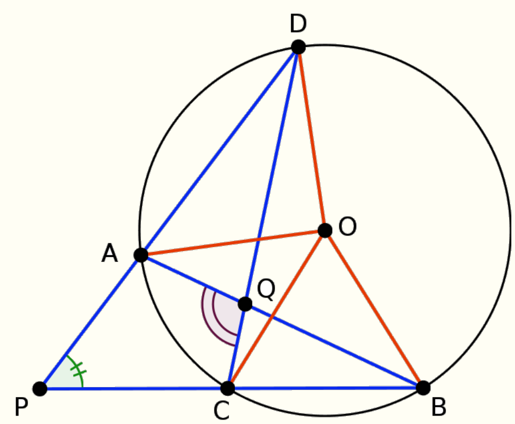


Figura 5.

Demostración:

- Demostrará que $\angle AQC = \dfrac{\angle BOD + \angle AOC}{2}$

  Considere la Figura 5, aplicando el teorema 2.1 tenemos que

$$2\angle BAD = \angle BOD \text{ y } 2\angle ADC = \angle AOC$$

$$\angle BAD = \frac{\angle BOD}{2} \text{ y } \angle ADC = \frac{\angle AOC}{2}$$

luego

$$\begin{aligned}\angle DQA &= 180^\circ - (\angle BAD + \angle ADC) \\ &= 180^\circ - \left(\frac{\angle BOD}{2} + \frac{\angle AOC}{2}\right)\end{aligned}$$

Por ángulos suplementarios

$$\angle AQC = \frac{\angle BOD}{2} + \frac{\angle AOC}{2} = \frac{\angle BOD + \angle AOC}{2}$$

- Demostrará que $\angle APC = \dfrac{\angle BOD - \angle AOC}{2}$

  Considere la Figura 5, aplicando el teorema 2.1

$$\angle AOC = 2\angle ABC \text{ entonces } \angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$$

  por ángulos suplementarios, se obtiene

$$\angle PAB = 180 - \angle BAD = 180 - \frac{\angle BOD}{2}$$

  entonces

$$\begin{aligned}\angle APC &= 180 - (\angle ABC + \angle PAB) \\ &= 180 - \left(\frac{\angle AOC}{2} + \left(180 - \frac{\angle BOD}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\angle BOD}{2} - \frac{\angle AOC}{2}\end{aligned}$$

  entonces

$$\angle APC = \frac{\angle BOD - \angle AOC}{2}$$

■

Los teoremas demostrados anteriores, son muy utilizados debido a la relación que nos proporciona entre ángulos centrales y los ángulos: inscritos, interiores o exteriores. Tomar en cuenta estos resultados, debido a que se hará uso de ellos en los ejemplos mostrados en esta unidad.

Teorema 2.3.

Todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia, además las mediatrices se cortan en un punto el cual es el centro de la circunferencia.

Demostración

Trazamos las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ que tienen la propiedad de que sus puntos equidistan de los extremos del lado, y llamemos O al punto de intersección, además construimos los segmentos $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ y $\overline{CO}$, como lo muestra la figura siguiente

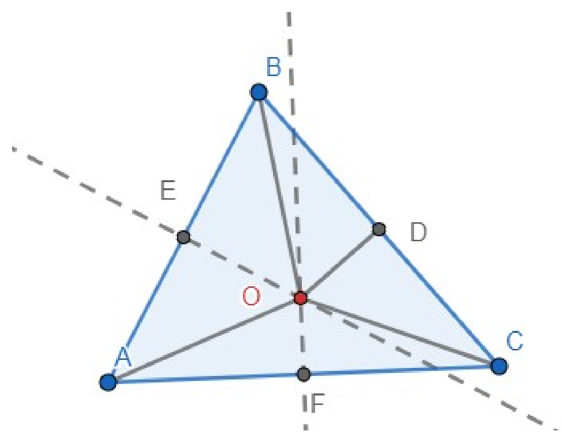


Figura 6.

Nos aparecen cuatro triángulos $\triangle AOE$, $\triangle EOB$, $\triangle AOF$ y $\triangle FOC$, en donde $\triangle AOE$ es congruente con el $\triangle EOB$ por el criterio (L-A-L). También, el $\triangle AOF$ es congruente con el $\triangle FOC$, por el criterio (L-A-L). Entonces $AO = BO = CO$ por tanto la perpendicular al segmento BC que pasa por el punto O corta a este segmento justamente en el centro ya que $\triangle BCO$ es isósceles. Obtenemos entonces que el punto O es la intersección de las tres mediatrices y es el centro de la circunferencia que se andaba buscando.

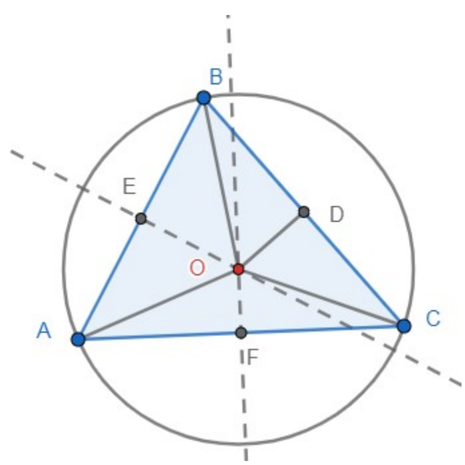


Figura 7.

■

3. Cuadriláteros Cíclicos.

Luego de estudiar los elementos de una circunferencia, ahora se abordará la propiedades que se nos proporcionan un cuadrilátero que esta inscrito en una circunferencia, dicho cuadrilátero se denomina cuadrilátero cíclicos o inscritos, pero de manera forma se enuncia así.

Definición 3.1. Cuadrilátero cíclico

Ahora suponga que sobre una circunferencia se ubican cuatro puntos A, B, C, D, como se muestra en la Figura 8. Al cuadrilátero $ABCD$ se le llama *cuadrilátero cíclico* o *concíclico*. Cumple que

$$\angle ABC + \angle CDA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180°.$$

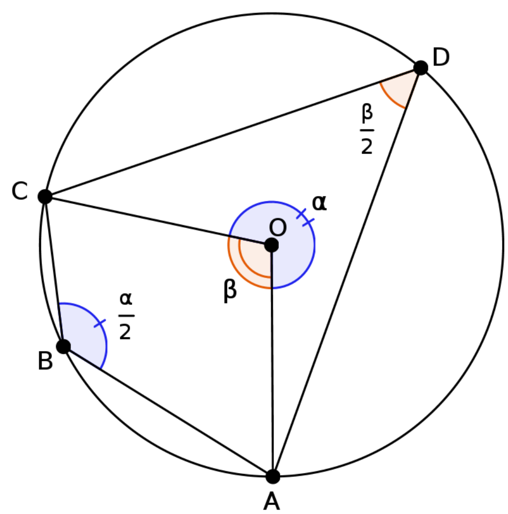


Figura 8.

Y análogamente $\angle DAB + \angle BCD = 180°$. Esto significa que si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico y convexo, entonces los ángulos opuestos son suplementarios. Para ello se plantea el siguiente teorema que nos establece una propiedad para identificar si un cuadrilátero es cíclico.

Teorema 3.1. Propiedad de cuadrilátero cíclico

El cuadrilátero convexo $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico si y sólo si

$$\angle A + \angle C = 180° = \angle B + \angle D$$

Demostración

Tenemos que probar doble implicación

- ”$\Rightarrow$” es por la definición de cuadrilátero cíclico.

- ”$\Leftarrow$”, esta implicación se demostrará por contradicción: si se supone que $ABCD$ es tal que $\angle B + \angle D = 180°$ pero no es cíclico.

Se define el punto D' como la otra intersección de $\overline{AD}$ con el circucírculo del $\triangle ABC$, como $ABCD'$ es cíclico (por construcción) entonces

$$\begin{aligned} \angle B + \angle D' &= 180° \\ \cancel{\angle B} + \angle D' &= \cancel{\angle B} + \angle D \\ \angle D &= \angle D' \end{aligned}$$

implica $\overline{CD} \parallel \overline{CD'}$ (rectas paralelas que se cortan en C) lo cual implica una contradicción.

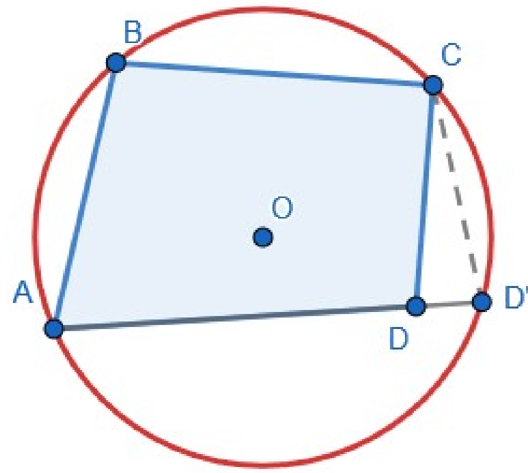


Figura 9. Representación gráfica de la demostración de teorema

■

Teorema 3.2.

El cuadrilátero convexo $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico si y sólo si se cumple alguna de las siguientes igualdades

$$\angle ABD = \angle ACD$$
$$\angle BCA = \angle BDA$$
$$\angle BAC = \angle BDC$$
$$\angle CAD = \angle CBD$$

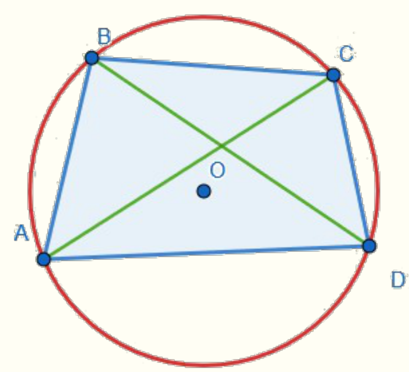


Figura 10. Representación de la demostración del teorema

Demostración

Como un teorema de doble implicación, se probará ambas implicaciones

- "$\Rightarrow$" si $ABCD$ es cuadrilátero cíclico existe una circunferencia que pasa por los vértices, como en la Figura 9, donde las iguales siguiente son iguales debido a que subtienden a un mismo arco.

$$\begin{aligned} \angle ABD &= \angle ACD \quad \text{subtienden el arco } \widehat{AD} \\ \angle BCA &= \angle BDA \quad \text{subtienden el arco } \widehat{AB} \\ \angle BAC &= \angle BDC \quad \text{subtienden el arco } \widehat{BC} \\ \angle CAD &= \angle CBD \quad \text{subtienden el arco } \widehat{CD} \end{aligned}$$

- "$\Leftarrow$"

  Se un cuadrilátero $ABCD$ que cumple las igualdades y se probará que es un cuadrilátero cíclico.

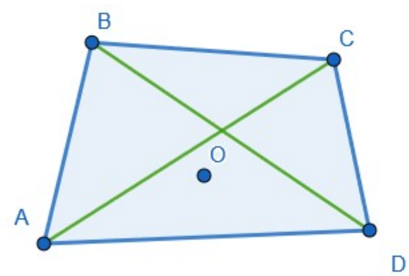


Figura 11. Representación gráfica de la demostración del teorema

Los ángulos internos del triángulo ABC cumplen

$$\begin{aligned} \angle B + \angle CAB + \angle BCA &= 180^\circ \\ \angle B + \angle BDC + \angle BDA &= 180^\circ \\ \angle B + \angle D &= 180^\circ \end{aligned}$$

aplicando el teorema 3.1 resulta que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

■

Recordatorio

Es importante recalcar que no todo cuadrilátero puede ser inscrito en una circunferencia; por ejemplo, un paralelogramo no será cíclico a menos que sea rectángulo.

3.1. Rectas y Circunferencias tangentes a una circunferencia

Dada una circunferencia, una recta puede ser *tangente* o *secante* a la circunferencia, dependiendo si la corta en **uno** o **dos** puntos, respectivamente; en cualquier otro caso, se dice que la recta no corta a la circunferencia.

Recordatorio

Cuando la recta es tangente a la circunferencia puede considerarse como un caso muy peculiar en el cual los "dos" puntos de corte coinciden.

Se estudiará los siguientes teoremas los cuales nos proporcionan propiedades que relación las rectas y circunferencia.

Teorema 3.3.

Una recta l corta a una circunferencia de centro O en dos puntos distintos A y B si y sólo si un ángulo entre l y $\overline{OA}$ es agudo.

Demostración

Sea l una recta secante a la circunferencia que corta a la circunferencia en A y B ($A \neq B$) como se muestra en la Figura 12; como el $\triangle AOB$ es isósceles, $\angle OAB < 90°$.

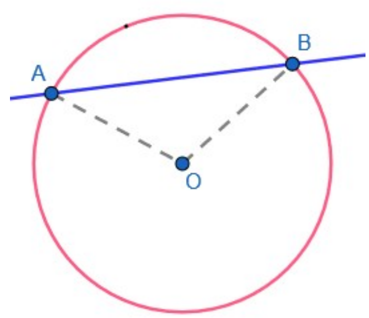


Figura 12. Teorema

Recíprocamente, si por A se traza una recta l tal que uno de los ángulos que forma con OA es menor que $90°$, se puede construir un punto B sobre l tal que $\angle OAB = \angle ABO < 90°$ y $A \neq B$ (basta proyectar O sobre l y luego reflejar A con respecto a este punto, el resultante es el punto B) como lo muestra la Figura 13; entonces el $\triangle AOB$ es isósceles, por lo que $OA = r = OB$, es decir B pertenece a la circunferencia y por tanto l corta a la circunferencia en dos puntos distintos.

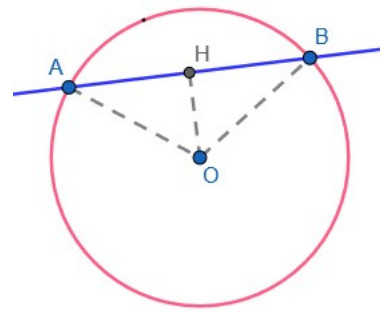


Figura 13.

■

Corolario 3.1.

Si l es una recta tangente en A, en una circunferencia de centro O, ninguno de los ángulos entre l y $\overline{OA}$ puede ser agudo, y por tanto $l \perp \overline{OA}$.

Observar que l es tangente a la circunferencia, entonces los puntos $H = A$, donde H es perpendicular a l, por lo tanto $l \perp \overline{OA}$. A partir de este resultado se prueban otros resultados muy conocidos y útiles.

Teorema 3.4.

Dado un punto P externo a una circunferencia de centro O, si $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son segmentos tangentes a la circunferencia en A y B, respectivamente, entonces el cuadrilátero $PAOB$ es cíclico.

Demostración

Se construye la Figura 14. Se trazan las rectas que pasan por los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$, aplicando el corolario 3.1 se tiene que $\angle OAP = \angle OBP = 90°$, luego $\angle OAP + \angle OBP = 180°$, aplicando el teorema 3.1 (propiedad de cuadrilátero cíclico), resulta que $APBO$ cuadrilátero cíclico.

■

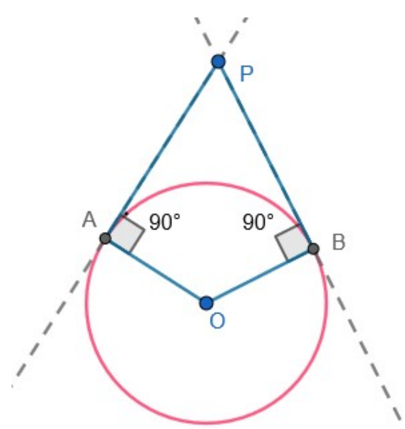


Figura 14.

Corolario 3.2.

Dado un punto P externo a una circunferencia de centro O, la circunferencia de diámetro $\overline{PO}$ corta a la circunferencia dada en dos puntos A y B tales que $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son rectas tangentes.

Demostración

A partir de los datos del corolario se construye la Figura 15.

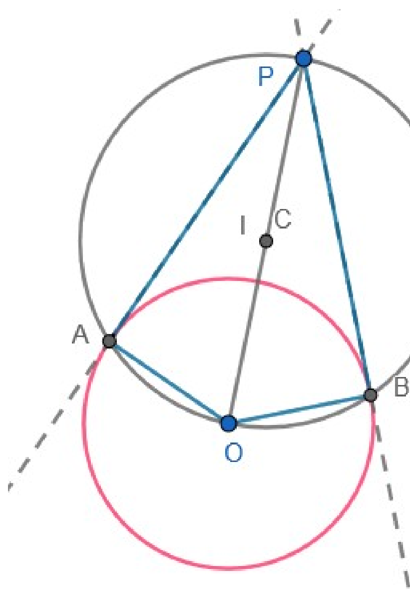


Figura 15.

donde los triángulos APO y PBO son rectángulos dado que $\angle OAP = \angle PBO = 90^\circ$ ya se ambos subtienden a una semicircunferencia, entonces, aplicando corolario 3.1 se tiene que $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes.

■

Definición 3.2.

El ángulo *semi-inscrito* en una circunferencia es aquel que se forma con una cuerda y la recta tangente en alguno de los extremos de la cuerda.

Luego de la definición anterior, se demostrará el siguiente teorema en donde relaciona el ángulo semi-inscritos y el arco que subtiende.

Teorema 3.5. Propiedad de ángulo semi-inscrito

La medida del ángulo semi-inscrito definido por la cuerda $\overline{AB}$ es igual a la medida de un ángulo inscrito que subtiende al arco $\widehat{AB}$.

Demostración

Considere la Figura 9.

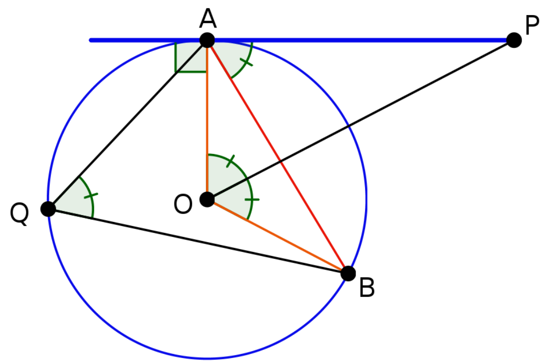


Figura 16.

Como P es un punto exterior por el corolario 3.2, entonces $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangente a la circunferencia de centro O, aplicando el teorema 3.4, resulta $APBO$ es cíclico, entonces $\angle PAB = \angle POB$; además, los triángulos rectángulos APO y OPB son congruentes, dado que $AO = OB$, comparten el lado OP y $AP = PB$ (criterio $L - L - L$), entonces $\angle POB = \angle POA$, por lo que

$$\begin{aligned}
\angle PAB &= \angle POB \\
2\angle PAB &= \angle POB + \angle POB \\
2\angle PAB &= \angle POB + \angle POA \\
2\angle PAB &= \angle AOB \\
\angle PAB &= \frac{\angle AOB}{2} \\
\angle PAB &= \angle AQB
\end{aligned}$$

■

Por otra parte, dado dos circunferencias puede ser *secante* o *tangente* a la primera, dependiendo si la corta en **uno** o **dos** puntos, respectivamente; en cualquier otro caso se dice que las circunferencias no se cortan.

Recordatorio

También se puede considerarse a las circunferencias tangentes como un caso especial de circunferencias secantes en el cual los puntos de corte coinciden.

Además, dos circunferencias pueden posicionarse una dentro de la otra, y claramente, la circunferencia de radio mayor es la *externa* mientras que otra es la *interna*; particularmente, si las circunferencias tienen el mismo centro se llaman *concéntricas*. Finalmente, combinando estas definiciones se tienen las circunferencias *tangentes exteriormente* y las *tangentes interiormente*.
A partir de las aclaraciones anteriores se enunciará los siguientes teoremas que establece propiedades, cuando se tiene la intersección de dos circunferencias.

Teorema 3.6.

Dadas dos circunferencias de centros O_1 y O_2 que se cortan en dos puntos distintos A y B, se cumple que $\overline{O_1O_2} \perp \overline{AB}$.

Demostración

Se construye la Figura 17.

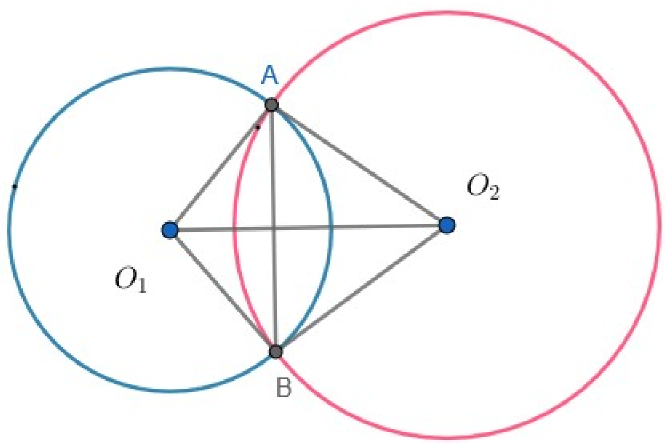


Figura 17.

Como O_2 es punto exterior, A y B son puntos de corte con la circunferencia de centro O_1, aplicando el corolario 3.2, resulta $\overline{O_2A}$ y $\overline{O_2B}$ son tangentes a la circunferencia de centro O_1, entonces $\triangle O_1AB$ y $\triangle O_1O_2B$ son triángulos rectángulos,además son congruentes, dado que $AO_1 = O_1B$, comparten el lado O_1O_2 y $AP = PB$ (criterio $L - L - L$), entonces $\angle POB = \angle POA$. A partir de lo anterior O_1O_2 es bisectriz, mediana y altura del triángulo isósceles O_1AB , por tanto $\overline{AB} \perp \overline{O_1O2}$.

■

Teorema 3.7.

Si dos circunferencias de centros O_1 y O_2 son tangentes en A, se cumple que O_1, A y O_2 están alineados.

Demostración

Se construye la Figura 18, tal que l es tangente a la circunferencia de centro O_1 y O_2.

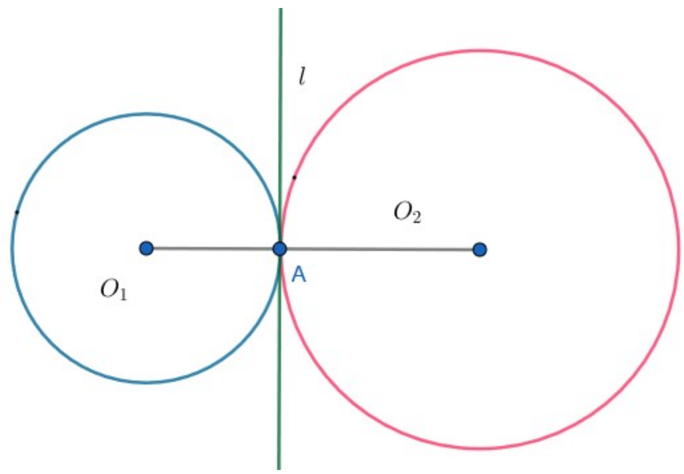


Figura 18.

Por el corolario 3.1 se tiene que $\overline{O_1A} \perp l$ y $\overline{O_2A} \perp l$, entonces $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2A}$.

■

Teorema 3.8.

a) Dos circunferencias, una dentro de la otra, no tienen rectas tangentes en común.

b) Dos circunferencias tangentes interiormente tienen una recta tangente común.

c) Dos circunferencias secantes (en dos puntos distintos) tienen dos rectas tangentes en común.

d) Dos circunferencias tangentes exteriormente tienen tres rectas tangentes en común.

e) Dos circunferencias no secantes y tal que ninguna contiene a la otra, tienen cuatro rectas tangentes en común.

Construcción de proposiciones de los literales anteriores.

Literal a)

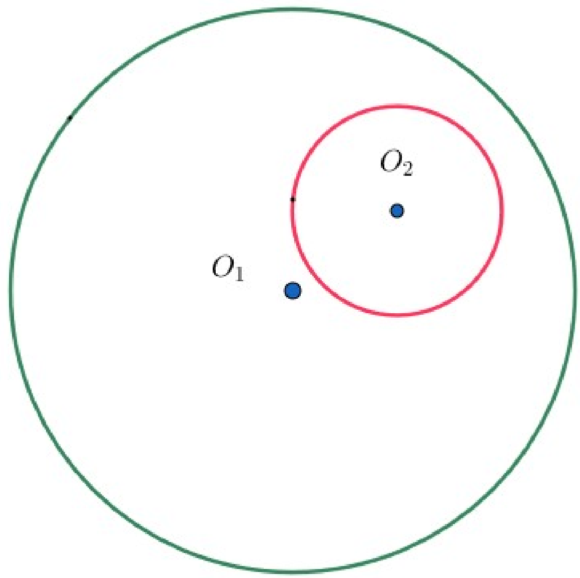


Figura 19. Literal a)

Literal b)

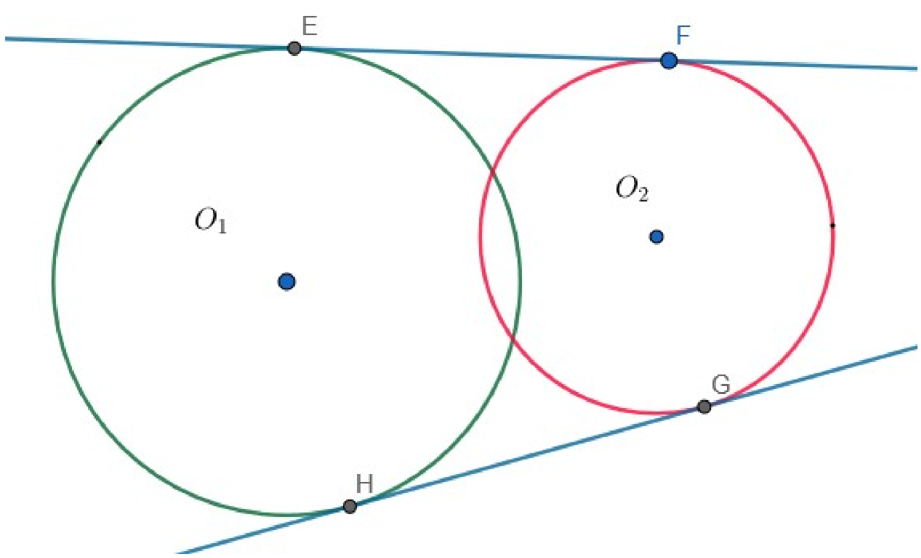


Figura 20. Literal b)

Literal c)

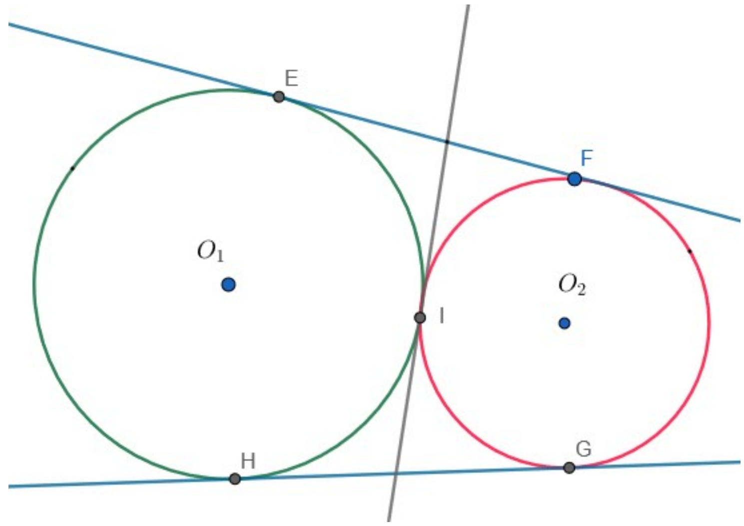


Figura 21. Literal c)

Literal d)

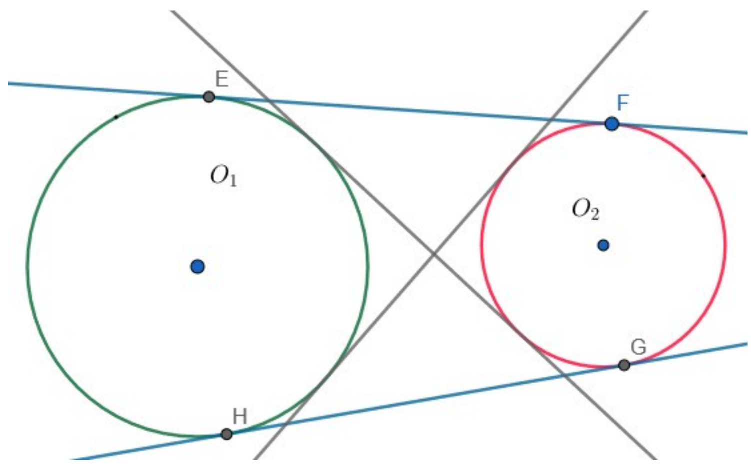


Figura 22. Literal d)

4. Círculo

En esta sección se abordará el estudio de la definición de circulo, enfocándonos en el cálculo de área de la región determinada.

Definición 4.1. Área de un círculo

El área de un círculo es igual a la mitad de la longitud de su circunferencia multiplicada por el radio de la misma.

$$A_{circulo} = \pi \cdot R^2$$

Luego enunciar la fórmula, para determinar el área de un circulo, se estudiará el área e una parte de un círculo.

Definición 4.2. Área de sector circular

El área de un sector circular es igual al área del círculo correspondiente multiplicado por el cociente entre su ángulo central y 360°.

Sea AOB el sector circular de área A, radio R y ángulo central θ. Luego:

$$A_{sectorABC} = \pi \cdot R^2 \frac{\theta}{360°}$$

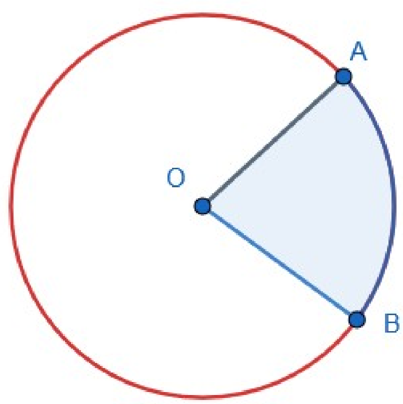


Figura 23. Área de sector circular

Los siguientes teorema establecen relaciones entre áreas de las regiones determinada por figuras planas y los lados o radios según sea el caso. En las demostraciones de estos teoremas se aplicará las operaciones entre áreas de triángulos, cuadrados, circulo o sector circular.

Teorema 4.1. Lúnulas de Hipócrates

Sobre los catetos de un triángulo rectángulo se construyen exteriormente semicírculos, entonces el área del triángulo rectángulo será igual a la suma de las áreas de las lúnulas determinada, por los semicírculos y el círculo circunscrito al triángulo rectángulo.

Sea A el área del triángulo rectángulo, A_1, A_2 las áreas de las lúnulas. Luego se cumple la relación:

$$A_{\triangle ABC} = A_1 + A_2$$

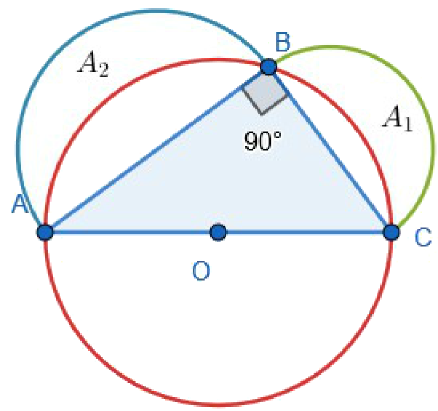


Figura 24. Lúnulas de Hipócrates

Demostración

Se tiene que la suma de las áreas de las regiones A_1 y A_2 es:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \text{Área de semicírculo de diámetro } \overline{AB} + \text{Área de semicírculo de diámetro } \overline{BC} \\ &- \left(\text{Área de semicírculo de diámetro } \overline{AC} - \text{Área del triángulo ABC}\right) \\ &= \frac{AB^2}{8}\pi + \frac{BC^2}{8}\pi - \left(\frac{AC^2}{8}\pi - \frac{AB \cdot BC}{2}\right) \\ &= \frac{AB^2 + BC^2}{8}\pi - \frac{AC^2}{8}\pi + \frac{AB \cdot BC}{2} \quad \text{aplicando el teorema de Pitágoras} \\ &= \cancel{\frac{AC^2}{8}}\pi - \cancel{\frac{AC^2}{8}}\pi + \frac{AB \cdot BC}{2} \\ &= \frac{AB \cdot BC}{2} \end{aligned}$$

■

Teorema 4.2.

Sea un cuadrado de lado a, entonces las sumas de las áreas de las regiones A_1, A_2 y A_3 de la Figura 25 es

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{a^2}{4}$$

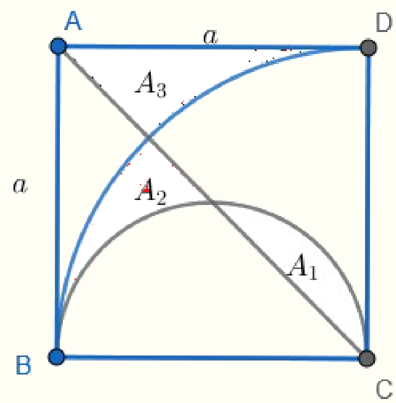


Figura 25.

Demostración

A partir de la figura se tiene que

$$\begin{aligned} A_3 &= \text{Área del triángulo ADC} - \text{Área de sector circular ACD} \\ &= \frac{a^2}{2} - a^2\pi\frac{45^\circ}{360^\circ} \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2\pi}{8} \end{aligned}$$

sea E el punto medio de $\overline{BC}$, y Q es el punto de intersección de $\overline{AC}$ y el semicircunferencia de diámetro $\overline{BC}$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Área de sector circular QEC} - \text{Área del triángulo } QCE \\ &= \frac{a^2}{4}\pi\frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{2} \\ &= \frac{a^2}{4}\pi\frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{a^2}{8} \\ &= \frac{a^2}{16}\pi - \frac{a^2}{8} \end{aligned}$$

Sea P el punto de intersección de $\overline{AC}$ y el arco $\widehat{BD}$.

$$\begin{aligned}
A_2 &= \text{Área del sector circular } BCP - \left(\text{Área del sector circular } BEQ + \text{Área del } \triangle QCE\right)\\
&= a^2\pi\frac{45^\circ}{360^\circ} + \left(\frac{a^2}{4}\pi\frac{90^\circ}{360^\circ} + \frac{a^2}{8}\right)\\
&= \frac{a^2\pi}{8} - \frac{a^2}{16}\pi - \frac{a^2}{8}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 &= \frac{a^2}{16}\pi - \frac{a^2}{8} + \frac{a^2\pi}{8} - \frac{a^2}{16}\pi - \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2\pi}{8}\\
&= \cancel{\frac{a^2}{16}\pi} - \frac{a^2}{8} + \cancel{\frac{a^2\pi}{8}} - \cancel{\frac{a^2}{16}\pi} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2} - \cancel{\frac{a^2\pi}{8}}\\
&= -\frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2}\\
&= \frac{a^2}{4}
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.3.

Sea un cuadrado de lado R, entonces el área de la región A_x de la Figura 26 es

$$A_x = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$$

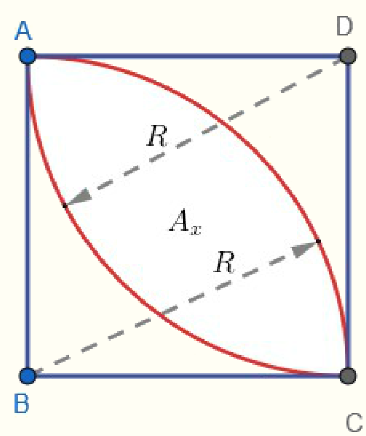


Figura 26.

Demostración

Si se traza el segmento $\overline{AC}$ el cual divide el área de la región de color blanco en dos partes iguales que es:

$$\begin{aligned}
A_x &= 2\left(\text{Área entre el arco } \widehat{AC} \text{ y } \overline{AC}\right)\\
&= 2\left(\text{Área del sector circular } ABC - \text{Área de } \triangle ACB\right)\\
&= 2\left(R^2\pi\frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2}{2}\right)\\
&= 2\left(\frac{R^2\pi}{4} - \frac{R^2}{2}\right)\\
&= \frac{R^2}{4}(\pi - 2)
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.4.

Sea un cuadrado de lado a, entonces el área de la región A_x de la Figura 27 es

$$A_x = \frac{a^2}{2}$$

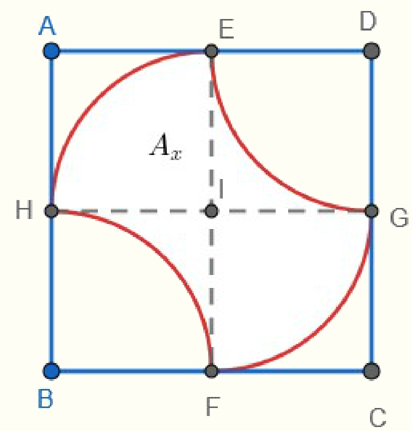


Figura 27.

Demostración

Se tiene que el área de la región de color blanco, esta divido en cuatro partes de las cuales dos son iguales es decir el área de la parte de cuadro $BHIF$ es igual al área del cuadro $IEDG$ y el área en cuadro $HAEI$ es igual a la del cuadro $FIGC$.

$$
\begin{aligned}
A_x &= 2\left(\text{Área cuadrado } BHIF\text{-Área del sector circular } HBF\right) + 2\left(\text{Área del sector circular } HIE\right)\\
&= 2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\pi\frac{90^\circ}{360^\circ}\right) + 2\left(\frac{a^2}{4}\pi\frac{90^\circ}{360^\circ}\right)\\
&= 2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16}\pi\right) + 2\left(\frac{a^2}{16}\pi\right)\\
&= \frac{a^2}{2} - \cancel{\frac{a^2}{8}\pi} + \cancel{\frac{a^2}{8}\pi}\\
&= \frac{a^2}{2}
\end{aligned}
$$

■

Teorema 4.5.

Sea el sector circular de radio R, entonces la suma de las área de las regiones A_1 y A_2 de la Figura 28 es

$$A_1 + A_2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$$

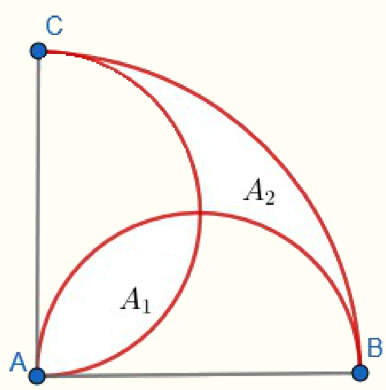


Figura 28.

Demostración

Se ubica el punto F medio, traza los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{GF}$, como lo indica la Figura 29. Se observa que que el segmento $\overline{AD}$, en dos partes iguales las áreas de las regiones A_1 y A_2.

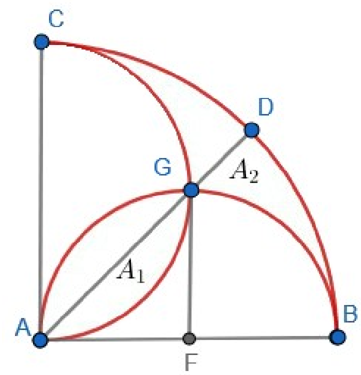


Figura 29.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 2\left(\text{Área del sector circular } AFG - \text{Área del } \triangle AGF\right)\\
&= 2\left(\frac{R^2}{4}\pi\frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{\frac{R}{2}\cdot\frac{R}{2}}{2}\right)\\
&= 2\left(\frac{R^2}{4}\pi\frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2}{8}\right)\\
&= 2\left(\frac{R^2}{16}\pi - \frac{R^2}{8}\right)\\
&\frac{R^2}{8}\pi - \frac{R^2}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \text{Área del sector circular } CAB - \text{Área del semicírculo de diámetro } AC\\
&- \text{Área del semicírculo de diámetro } \overline{AB} + A_1\\
&= R^2\pi\frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2}{8}\pi - \frac{R^2}{8}\pi + \frac{R^2}{8}\pi - \frac{R^2}{4}\\
&= \frac{R^2}{4}\pi - \frac{R^2}{8}\pi - \frac{R^2}{8}\pi + \frac{R^2}{8}\pi - \frac{R^2}{4}\\
&= \frac{R^2}{8}\pi - \frac{R^2}{4}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= \frac{R^2}{8}\pi - \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{8}\pi - \frac{R^2}{4}\\
&= \frac{R^2}{4}\pi - \frac{R^2}{2}\\
&= \frac{R^2}{4}(\pi - 2)
\end{aligned}
$$

Teorema 4.6.

Sea una semicírculo de de radio $R + r$, entonces el área de las región A_x de la Figura 30 es

$$A_x = \frac{PQ^2}{4}\pi$$

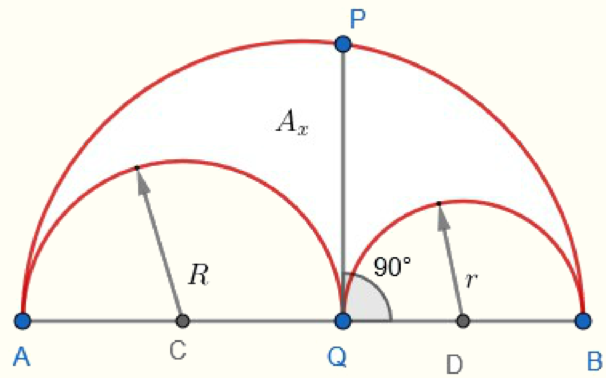


Figura 30.

Demostración

Se tiene que el área de la región A_x es

$$\begin{aligned} A_x &= \text{Área de semicírculo de arco } \widehat{AB} - \text{Área del semicírculo de de arco } \widehat{AQ} - \\ &\quad \text{Área del semicírculo de de arco } \widehat{QB} \\ &= \frac{(R+r)^2}{2}\pi - \left(\frac{(R)^2}{2}\pi + \frac{(r)^2}{2}\pi\right) \\ &= \frac{R^2 + 2Rr + r^2}{2}\pi - \left(\frac{(R)^2}{2}\pi + \frac{(r)^2}{2}\pi\right) \\ &= \cancel{\frac{(R)^2}{2}}\pi + Rr\pi + \cancel{\frac{(r)^2}{2}}\pi - \cancel{\frac{(R)^2}{2}}\pi - \cancel{\frac{(r)^2}{2}}\pi \\ &= Rr\pi \end{aligned}$$

Si se forma el el triángulo APB, donde el ángulo $\angle APB = \dfrac{\angle AQB}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, por la relación inscrito y central, entonces el $\triangle APB$ es rectángulo.

$$\begin{aligned} AP^2 + PB^2 &= AB^2 \\ AQ^2 + PQ^2 + QB^2 + PQ^2 &= AB^2 \\ (2R)^2 + PQ^2 + (2r)^2 + PQ^2 &= (2R+2r)^2 \\ 4R^2 + PQ^2 + 4r^2 + PQ^2 &= 4R^2 + 8Rr + 4r^2 \\ 2PQ^2 &= 8Rr \\ PQ^2 &= 4Rr \\ \frac{PQ^2}{4} &= Rr \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} A_x &= Rr\pi \\ &= \frac{PQ^2}{4}\pi \end{aligned}$$

■

5. Relaciones Métricas en la Circunferencia

En esta sección se estudiará los teoremas de las cuerdas, de las secantes y de la tangentes.

Teorema 5.1.

Sea un circunferencia, de trazan dos cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de tal forma que se interceptan en el punto P entonces $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

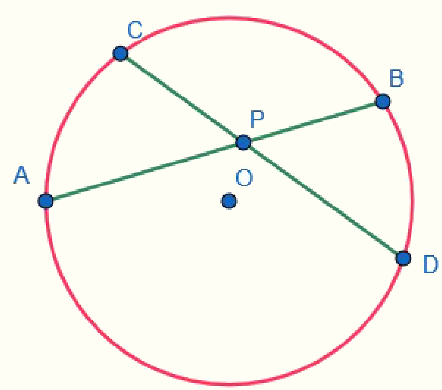


Figura 31.

Demostración

Se traza los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{BD}$ como se indica en la Figura 32.

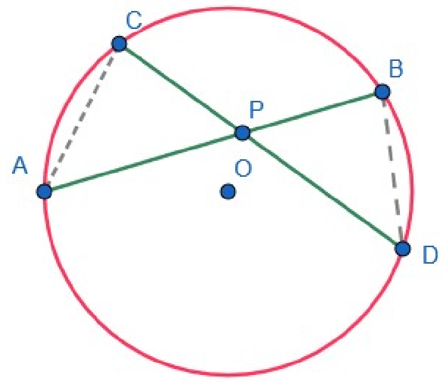


Figura 32.

Se resulta que $\angle ACD = \angle ABD$, $\angle PAC = \angle CDB$ por que subtiende el arco AD y CB respectivamente. Por lo que el criterio (A-A) resulta que $\triangle ACP$ es semejante a $\triangle PBD$, implica

$$\frac{AP}{PD} = \frac{CP}{PB} = \frac{AC}{BD}$$
$$\frac{AP}{PD} = \frac{CP}{PB}$$
$$AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

■

Corolario 5.1.

Si $\overline{AB}$ es diámetro en la Figura 33 entonces $(MH)^2 = AH \cdot HB$.

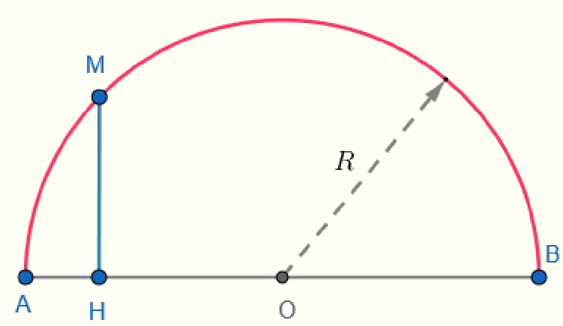


Figura 33.

Demostración

Para demostrar el corolario se va utilizar el teorema 5.1, pero para ello se necesita generar las condiciones para poder aplicarlo, para ello se completa la circunferencia y el prolonga el segmento $\overline{MH}$ hasta la intersección con la circunferencia como lo indica la Figura 34.

además se tiene $\triangle HOD$ es isósceles, implica que H es punto medio de $\overline{HD}$. De los trazos realizados resulta dos cuerdas que se interceptan en H, entonces aplicando el teorema 5.1, se tiene

$$MH \cdot HD = AH \cdot HB$$
$$MH^2 = AH \cdot HB$$

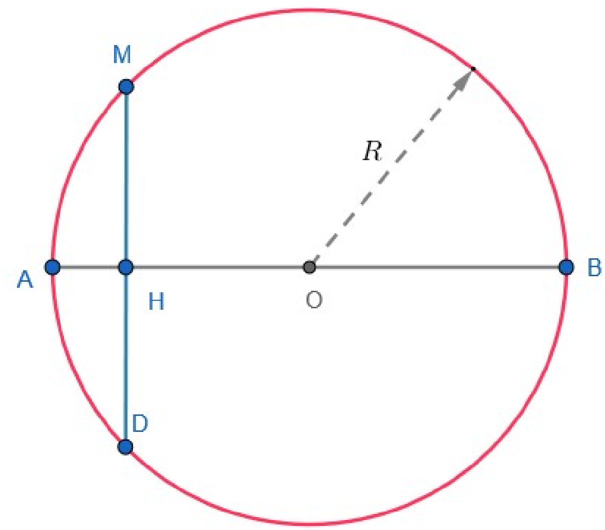


Figura 34.

■

Corolario 5.2.

Si P es un punto de la cuerda $\overline{AB}$ en la Figura 35, entonces $(OP)^2 = R^2 - AP \cdot PB$

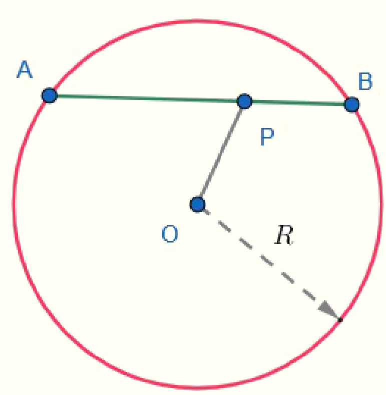


Figura 35.

Demostración

Se prolonga el segmento hasta que corta la circunferencia en los puntos E y D.

De la figura resulta dos cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ que se corta en P, aplicando el teorema 5.1 se tiene que

$$AP \cdot PB = PE \cdot PD$$

$$AP \cdot PB = (OE - OP) \cdot (OD + OP)$$

$$AP \cdot PB = (R - OP) \cdot (R + OP)$$

$$AP \cdot PB = R^2 - OP^2$$

$$OP^2 = R^2 - AP \cdot PB$$

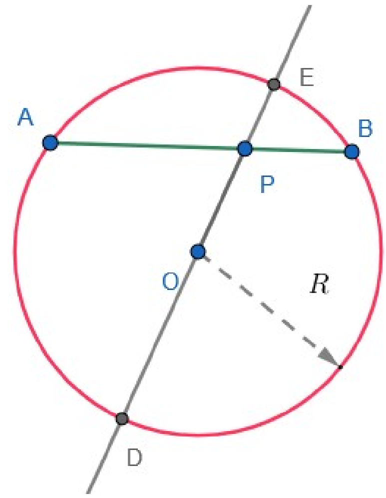


Figura 36.

■

Teorema 5.2.

Si PBA y PCD son rectas secantes según como se indica la Figura 37 entonces

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

.

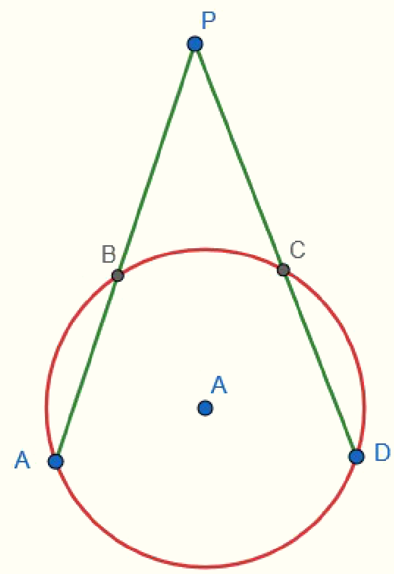


Figura 37.

Demostración

Se trazan los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ como lo indica la Figura 38, resulta un cuadrilátero cíclico del cual $\angle ABC + \angle PDA = 180° \implies \angle ABC = 180° - \angle PDA = \angle CBP$. De lo anterior se tiene que $\triangle APD$ es semejante al $\triangle BPC$, porque $\angle CDA = \angle CBP$ y comparten el $\angle APD$ (aplicando criterio (A-A)).

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{BC}$$
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$
$$PA \cdot PB = PD \cdot PC$$

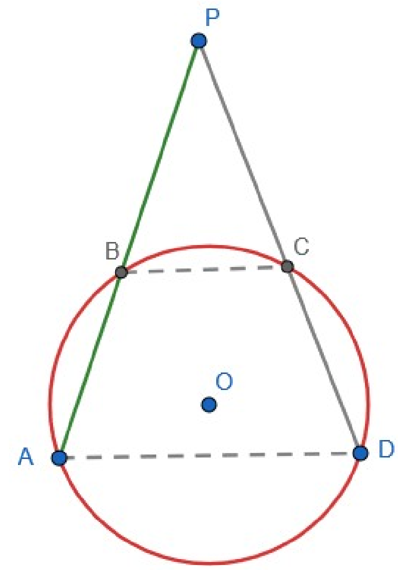


Figura 38.

■

Teorema 5.3.

Si PQ es una recta tangente según como se indica la Figura 39 entonces $(PQ)^2 = PA \cdot PB$.

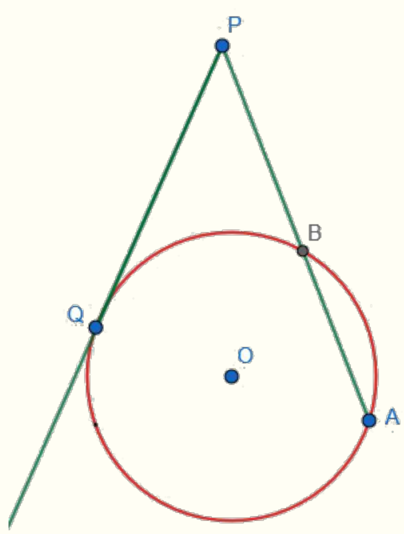


Figura 39.

Demostración

Se traza los segmentos $\overline{QB}$ y $\overline{QA}$.

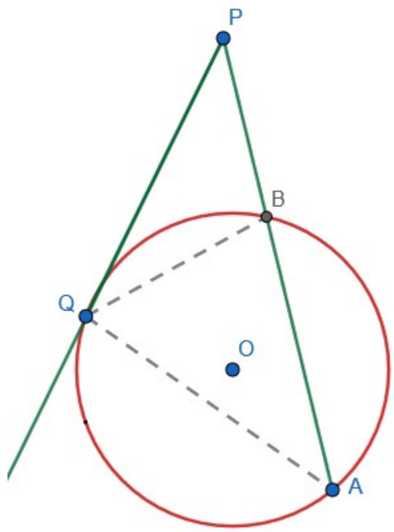


Figura 40.

De la figura resulta $\angle PAQ = \angle BQP$, por la relación entre los ángulos semi-inscritos e inscritos, entonces $\triangle QPB$ es semejante a $\triangle QPA$ por el criterio (A-A).

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{PA}{PQ} = \frac{QA}{QB}$$
$$\frac{PQ}{PB} = \frac{PA}{PQ}$$
$$PQ^2 = PA \cdot PB$$

$\blacksquare$

6. Ejemplos

✓Ejemplo 6.1
Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia y $\overline{BD}$ es bisectriz. Demuestre que el triángulo ADC es isósceles.

Demostración

A partir de los enunciado del problema se construye la Figura 41

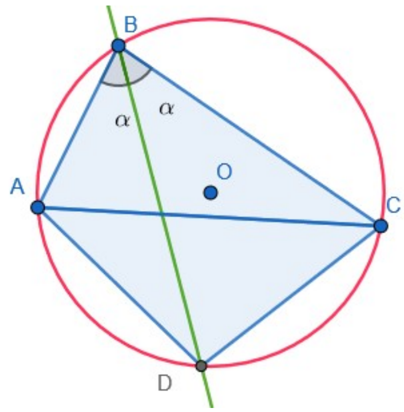


Figura 41. Ejemplo

Notar que por ser ángulos inscritos $\angle ABD = \angle ACD$ y análogamente $\angle DBC = \angle DAC$, entonces $\angle DAC = \angle ACD = \alpha$ por lo tanto el triángulo ADC es isósceles.

■

✓Ejemplo 6.2
Determine el valor del $\angle OBC$ de la Figura 42.

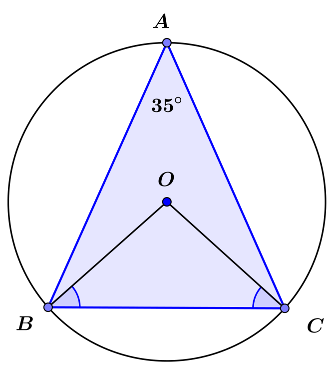


Figura 42. Ejemplo

Solución

$$\begin{aligned}\angle BOC &= 2\angle BAC \quad \text{Relación del ángulo central e inscrito}\\ &= 2(35^\circ)\\ &= 70^\circ\end{aligned}$$

por otro lado, puesto que el $\triangle BOC$ es isósceles, $\angle OBC = \angle OCB$ y por tanto el valor del

$$\begin{aligned}\angle OBC &= \frac{180^\circ - 70^\circ}{2}\\ &= 55^\circ\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 6.3

En la siguiente Figura 43, $\angle CAD = 20^\circ$ y $\angle BDC = 10^\circ$. Determine la medida del ángulo $\angle DAB$.

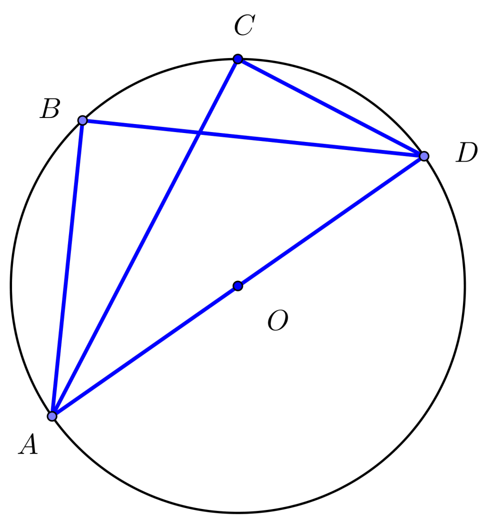


Figura 43. Ejemplo

Demostración

Dado que $\overline{AD}$ es diámetro de la circunferencia, se tiene que los ánglos ABD y ACD son de 90°, entonces

$$\begin{aligned}\angle CDA &= 90^\circ - \angle CDA\\ &= 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\angle BDA &= \angle CDA - \angle BDA \\ &= 70^\circ - 10^\circ \\ &= \angle 60^\circ,\end{aligned}$$

por tanto $\angle BAD = 30^\circ$. ■

✓Ejemplo 6.4

En el Figura 44, $ABCD$ es un cuadrado; determinar el valor de $\angle DGE$.

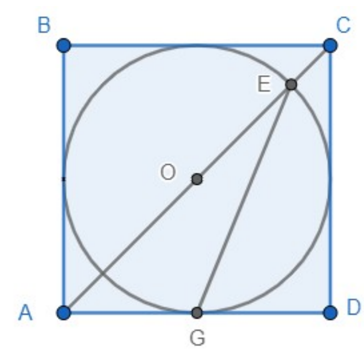


Figura 44. Ejemplo

Solución

Trazamos el radio $\overline{OG}$, como se indica en la Figura 45.

Como $\overline{AG}$, diagonal del cuadro $ABCD$, entonces $\angle GAO = 45^\circ$, por lo que $\angle AOG = 45^\circ$.

Se tiene que $OG = OE$, porque son radios de la circunferencias, entonces $\triangle GOE$ es isósceles, aplicando la propiedad de dice que la suma de dos ángulos internos es igual al suplementario del tercero resulta que el $\angle OEG = 22.5^\circ$. Por lo tanto

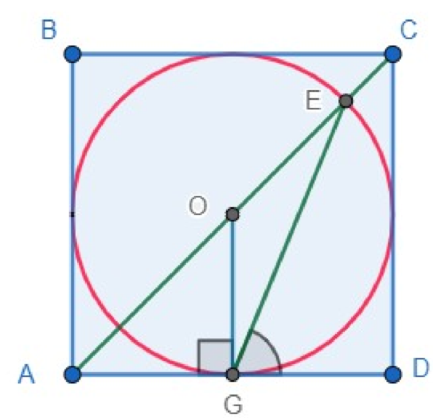


Figura 45. Ejemplo

$$\begin{aligned}\angle EGO + \angle DGE &= 90^\circ \\ 22.5^\circ + \angle DGE &= 90^\circ \\ \angle DGE &= 67.5^\circ\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 6.5

En un triángulo ABC, $\angle A = 2\angle C$; se traza la bisectriz interior AD, la circunferencia circunscrita al triángulo ABD intercepta a $\overline{AC}$ en E, calcularEC; si $AB = 7$.

Solución

Se construye la Figura 46.

Se denota el $\angle BCA = \alpha$, donde $\angle CAB = 2\alpha$, además $\angle EAD = \angle EBD$ por que subtienden el mismo arco DE. Trazando el segmento $\overline{BE}$, entonces el triángulo EBC es isósceles entonces $BE = EC$, además, $\angle AEB = 2\alpha$ por la propiedad de dice que la suma de dos ángulos internos es igual al suplementario del tercero, entonces el triángulo ABE también es isósceles, en donde:

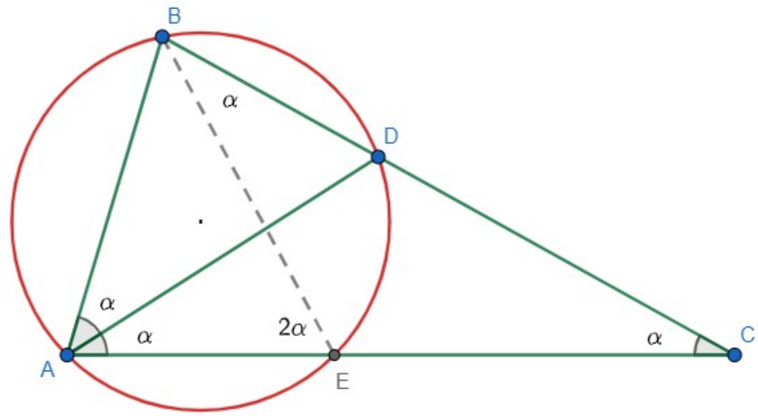


Figura 46. Ejemplo

$$BE = AB$$

$$BE = 7$$

$$EC = 7$$

✓Ejemplo 6.6

Determine el valor del $\angle DCF$, sabiendo $\overline{BE}$ es tangente en el punto D a la circunferencia de centro O. Ver Figura 47

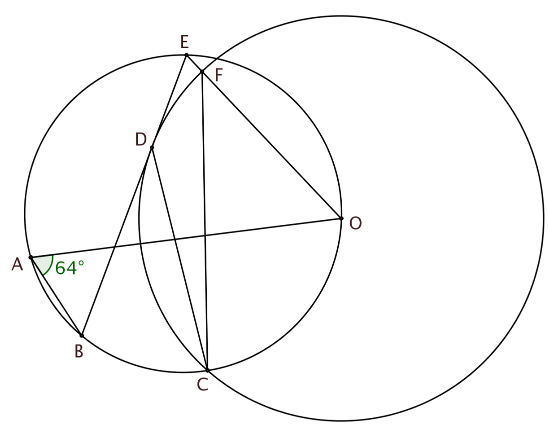


Figura 47.

Solución:

Se traza el segmento $\overline{DO}$, como lo indica la Figura 48, luego observar que $\angle BAO = \angle BEO$ por ser ángulos inscritos al mismos arco $\widehat{AO}$.

$\angle BDO$ es recto ya que D es punto de tangencia, de donde $\angle DOE = 90°$ - $\angle BAO = 90°$ - $64° = 26°$

De aquí arco $\widehat{DF} = \angle DOE = 26°$ por se ángulo central.

Por lo tanto el ángulo $\angle DCF = \dfrac{\widehat{DF}}{2} = \dfrac{26°}{2} = 13°$ por ser ángulo inscrito de arco $\widehat{DF}$

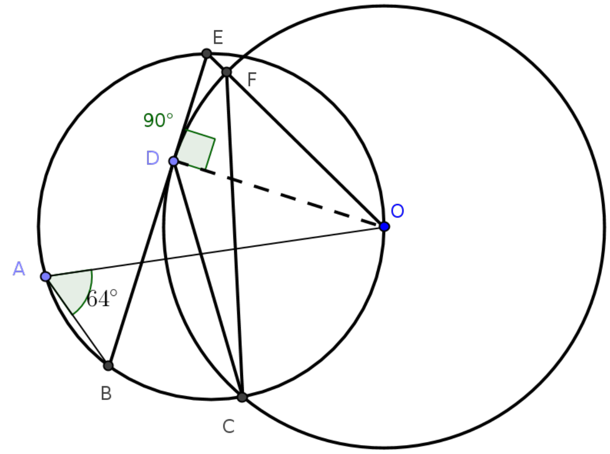


Figura 48.

■

✓Ejemplo 6.7

En Figura 49 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, además la recta tangente DE es paralela a BC. Hallar $\angle CDE$ si el arco $\widehat{AC} = 100$

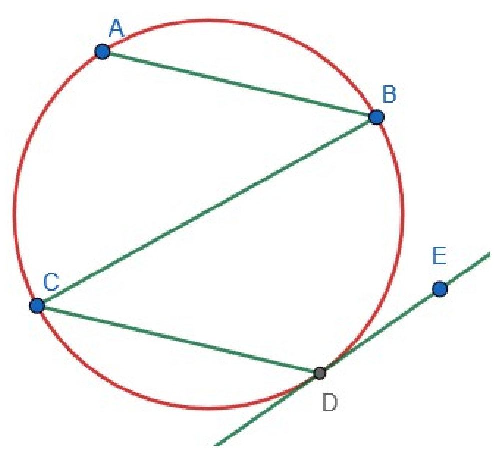


Figura 49.

Solución:

$\angle ABC = \angle BCD$ ya que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, además $\angle BCD = \angle CDR$ (R a lado izquierdo de D) ya que $\overline{CB} \parallel \overline{DE}$. Debido $\angle ABC = \dfrac{\widehat{CA}}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°$ (ángulo inscrito). Por lo tanto

$$\angle CDE = 180° - \angle CDR = 180° - 50° = 130°$$

■

✓**Ejemplo 6.8**

En Figura 50 O es el centro y $\overline{AP} \parallel \overline{QS}$. Hallar α

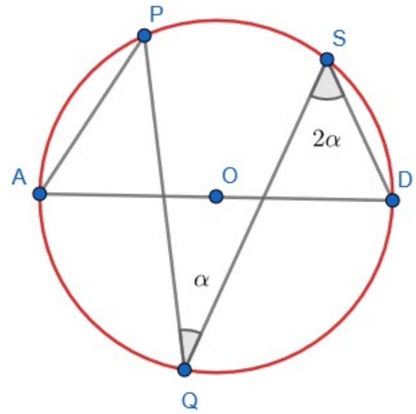


Figura 50.

Solución:

Como $\overline{AP} \parallel \overline{QS}$ entonces $\angle APQ = \angle PQS = \alpha$ por ser ángulos alternos internos.

$\angle APQ = \dfrac{\widehat{QA}}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha = \widehat{QA}$ (ángulo inscrito)

$\Rightarrow \angle DSQ = \dfrac{\widehat{DQ}}{2}$

$\Rightarrow 2\angle DSQ = \widehat{DQ}$

$\Rightarrow 2(2\alpha) = \widehat{DQ}$

$\Rightarrow 4\alpha = \widehat{DQ}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{BQ} + \widehat{QA} &= \widehat{AB} \\
4\alpha + 2\alpha &= 180^\circ \\
6\alpha &= 180^\circ \\
\alpha &= \frac{180^\circ}{6} \\
\alpha &= 30^\circ
\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 6.9

En un cuadrilátero cíclico con $\angle PSR = 90°$, y sean H y K los pies de las perpendiculares desde Q a las líneas $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$ respectivamente. Demuestre que la línea $\overline{HK}$ biseca a $\overline{QS}$.

Solución

A partir de los enunciado del problema se construye la Figura 51

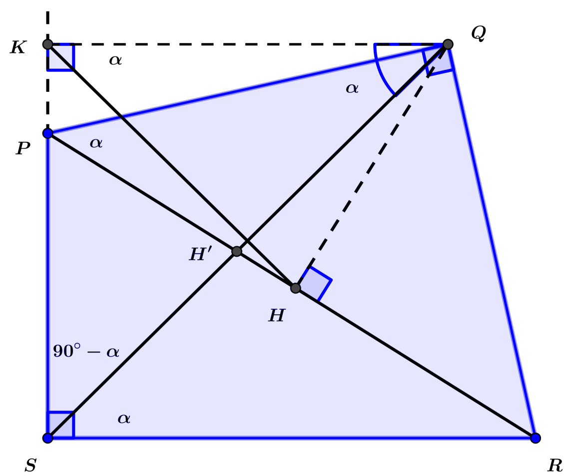


Figura 51.

Por construcción se tiene que $\overline{KQ} \parallel \overline{SR}$, por tanto $\angle QSR = \angle KQS = \alpha$, puesto que que $PQRS$ es cíclico, se tiene que $\angle RSQ = \angle RPQ = \alpha$. Por otro lado, el cuadrilátero $KQHP$ también es cíclico en donde $\angle HPQ = \angle HKQ$, por ángulo complementario se tiene que $\angle HKS = 90° - \alpha$. Se denota por Z el punto de corte entre $\overline{KH}$ y $\overline{SQ}$ entonces $\triangle ZKS$ y $\triangle ZQK$ son triángulos isósceles lo que implica que $KZ = ZQ$ y $KZ = ZS$ por transición se tiene que $ZS = ZQ$ por lo que se obtiene el resultado.

■

✓Ejemplo 6.10

Sean A, B y C; D, E y F, dos ternas de puntos colineales, tales que $ABED$ y $BCFE$ son cuadriláteros cíclicos. Entonces se cumple que $\overline{AD} \parallel \overline{CF}$.

Demostración

A partir de los enunciado del problema se construye la Figura 52 y se prolonga el segmento $\overline{DF}$.

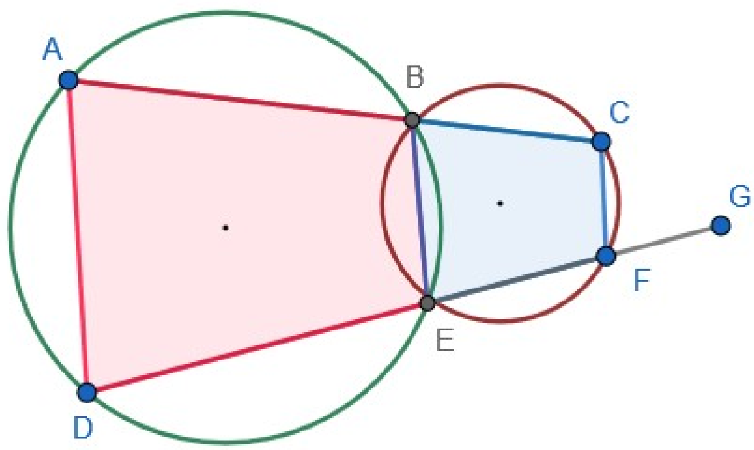


Figura 52. Ejemplo

Dado que $\angle ADE = 180° - \angle ABE$, debido a que el cuadrilátero $ABED$ es cíclico, además que $\angle EBC = 180° - \angle ABE = \angle ADE$ por ángulos suplementarios. Como $BCFE$ es cíclico entonces

$$\angle EFC = 180° - \angle EBC$$

$$180° - \angle CFG = 180° - \angle EBC \quad \text{ángulos suplementarios}$$

$$\angle CFG = \angle EBC$$

$$\angle CFG = \angle ADE$$

Por tanto $\angle CFG$ y $\angle ADE$ son correspondientes y $\overline{AD} \parallel \overline{CF}$.

■

✓Ejemplo 6.11

En la Figura 53, los puntos A, B, C y D están alineados, al igual que los puntos E, F, G y H. Demuestre que el cuadrilátero $ADEH$ es cíclico.

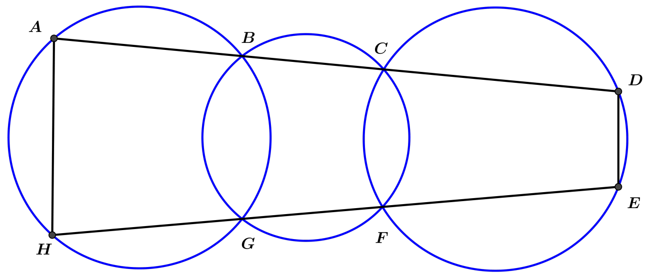


Figura 53.

Demostración

Si se trazan los segmentos $\overline{BG}$ y $\overline{CF}$. Si se denota el ángulo $\angle BAH = \alpha$ entonces $\angle HGB = 180° - \alpha$, ya que $ABGH$ es cíclico y por tanto $\angle BGF = \alpha$.

Luego el $\angle FCB = 180° - \alpha$ implica que $\angle FCD = \alpha$ y puesto que $DFED$ también es cíclico, entonces $\angle FED = 180° - \alpha$. Por tanto el cuadrilátero $ADEH$ es cíclico ya que los ángulos opuestos sumen $180°$.

■

✓Ejemplo 6.12

En la Figura 54 , se sabe que la medida del arco $\widehat{BAH} = 200$. Determine la medida del ángulo θ.

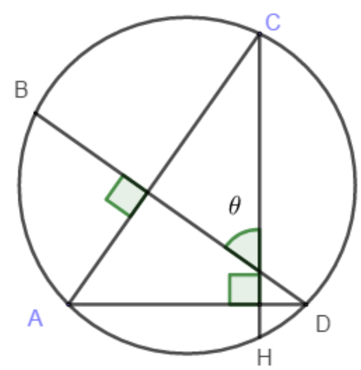


Figura 54.

Solución

Se tiene que el $\angle ACH = 90° - \theta$ entonces $\widehat{AH} = 2(90° - \theta)$. Además $\angle CAH = \theta$, lo que implica que $\angle ADB = 90° - \theta$, entonces $\widehat{BA} = 2(90° - \theta)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{BAH} &= \widehat{BA} + \widehat{AH} \\
200 &= 2(90° - \theta) + 2(90° - \theta) \\
200 &= 4(90° - \theta) \\
50 &= 90° - \theta \\
-40° &= -\theta \\
40° &= \theta
\end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 6.13

En la Figura 55, si $\overline{AB}$ es diámetro. Determinar el valor de x.

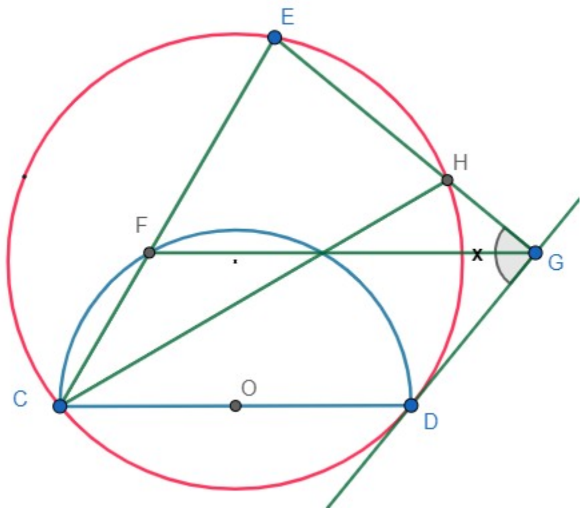


Figura 55. Ejemplo

Solución

Se traza los segmentos $\overline{HD}$ y $\overline{ID}$, como lo indica Figura 56.

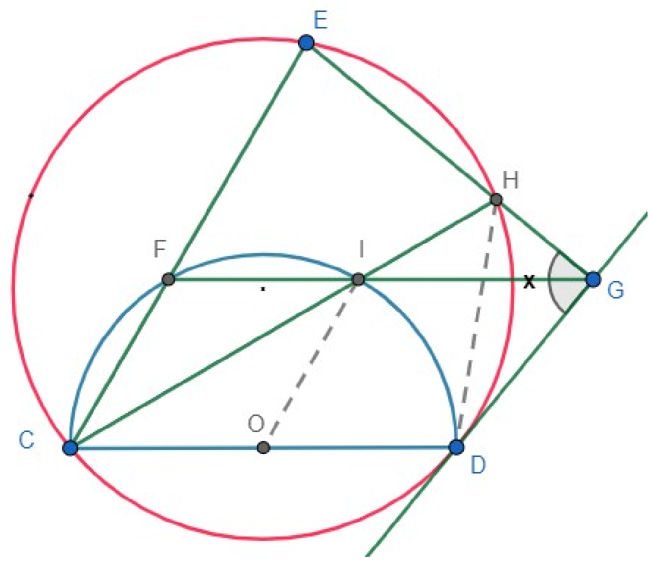


Figura 56. Ejemplo

El cuadrilátero inscrito $CFID$:

$$\angle DCE + \angle FID = 180°$$
$$\angle DCE = 180° - \angle FID$$
$$\angle DCE = \angle DIG$$

En el cuadrilátero inscrito $CEHD$:

$$\angle DCE + \angle EHD = 180°$$
$$\angle DCE = 180° - \angle EHD$$
$$\angle DCE = \angle DHG$$

Como los ángulos $\angle DIG = \angle DHG$ entonces se pueden trazar una circunferencia que pase por los puntos I, H, G y D, esto por que estos ángulos subtiende a un mismo arco DG, entonces el cuadrilátero $IHGD$ es inscrito, además $\angle CID = 90°$ ya que subtiende a una semicircunferencia:

$$\begin{aligned} \angle DIH + \angle HGD &= 180° \\ 180° - \angle CID + \angle HGD &= 180° \\ 90° + \angle HGD &= 180° \\ \angle HGD &= 90° \\ x &= 90° \end{aligned}$$

✓Ejemplo 6.14

Dos circunferencias son tangentes interiormente en un punto P. Sean A y B dos puntos en la circunferencia interior, y sean C y D las intersecciones de $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ con la circunferencia exterior respectivamente. Entonces se cumple que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Demostración

Se construye la Figura 57.

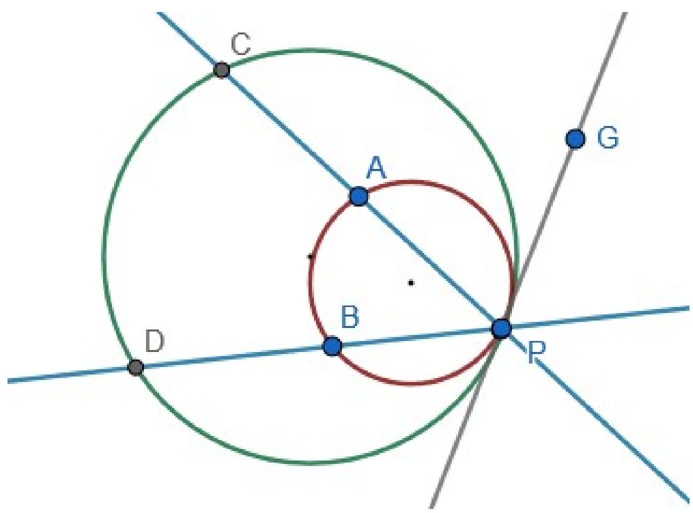


Figura 57. Ejemplo

Al trazar la tangente común a las circunferencias por P, se denota G a un punto en dicha recta. Como $\angle GPA$ es un ángulo semi-inscrito en la circunferencia interior, entonces $\angle GPA = \angle PBA$, pero también es un ángulo semi-inscrito en la circunferencia exterior, por tanto $\angle GPA = \angle PDC$, además $\angle GPA = \angle PBA = \angle PCD$, implicando $\angle PBA$ es correspondiente con $\angle PCD$, por tanto $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

■

✓**Ejemplo 6.15**

En la Figura 58. Determinar el área de la región sombreada comprendida entre dos circunferencias de centro en D y un cuadrado con vértice en D y lado 10.

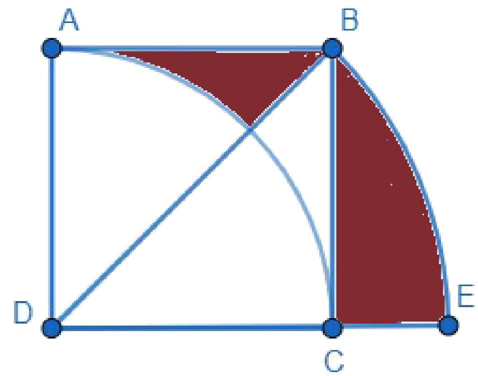


Figura 58. Ejemplo

Solución

El área de la región dentro del cuadrado A_1 es

$$\begin{aligned}A_1 &= \text{Área del } \triangle DAB - \text{Área del sector circular } ACB\\ &= \frac{100}{2} - \pi \cdot 100\frac{45°}{360°}\\ &= \frac{100}{2} - \frac{\pi \cdot 100}{8}\\ &= 50 - \frac{25\pi}{2}\end{aligned}$$

El área de la región fuera del cuadrado A_2 es:

$$\begin{aligned}A_2 &= \text{Área del sector circular BDE} - \text{Área del triángulo } DBC\\ &= DB^2\pi\frac{45°}{360°} - \frac{100}{2}\\ &= (10\sqrt{2})^2\pi\frac{1}{8} - \frac{100}{2}\\ &= 25\pi - 50\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}A_1 + A_2 &= 50 - \frac{25\pi}{2} + 25\pi - 50\\ &= \frac{25\pi}{2}\end{aligned}$$

Los siguientes ejemplo se aplica las propiedades que cumplen las circunferencias con el teorema de Thales y la relación que establecen dos triángulos semejantes.

✓**Ejemplo 6.16**

En la Figura 59, B es un punto de tangencia, $AB = 6$, $BC = 4$, $PB = 5$. Hallar BQ.

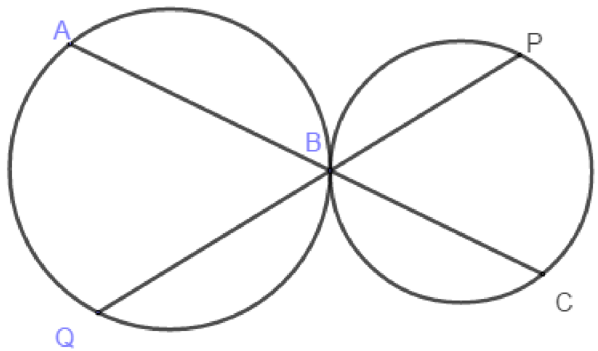


Figura 59. Ejemplo

Demostración

Se trazan los segmentos $\overline{AQ}$, $\overline{PC}$ y trazando tangente en $\overline{MN}$, como se muestra en la Figura 60.

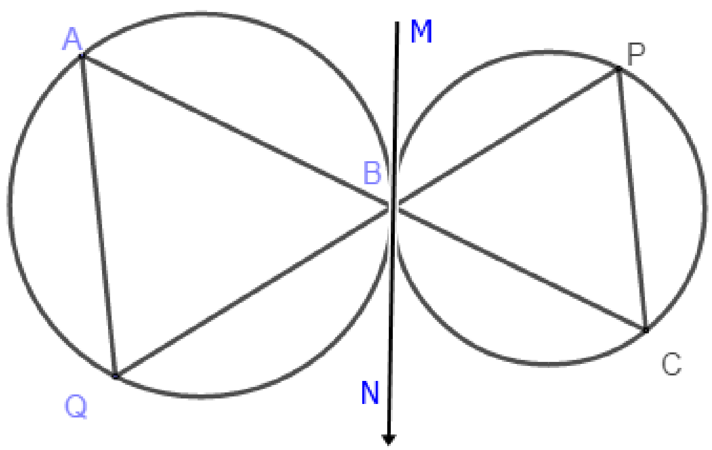


Figura 60. Ejemplo

Tenemos que:

$\angle QAB = \angle QBN$ relación entre ángulo semi-inscrito e inscrito

$\angle QAB = \angle MBP$ opuesto por el vértice

$\angle QAB = \angle BCP$ relación entre ángulo semi-inscrito e inscrito lo que implica que $\overline{AQ} \parallel \overline{PC}$, aplicando el teorema de Thales se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \frac{QB}{BP} \\ \frac{6}{4} &= \frac{BQ}{5} \\ 7.5 &= BQ \end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 6.17

En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$. Hallar MN, si $AC = 12$ y $BC = 3BM$.

Considerando los datos del problema se construye la Figura 61.

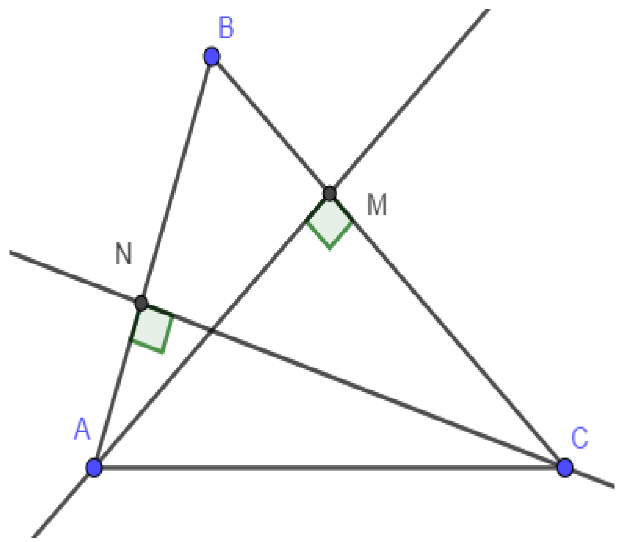


Figura 61. Ejemplo

Como $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ son alturas, entonces el cuadrilátero $ACMN$ es un cuadrilátero cíclico debido a que se puede construir una circunferencia de diámetro $\overline{AC}$, pasa por los puntos A, N, M y C entonces

$$\angle ACB + \angle ANM = 180^\circ$$
$$\angle ACB = 180^\circ - \angle ANM$$
$$\angle ACB = \angle MNB$$

por el primer criterio de semejanza de triángulos (A-A), $\triangle MBN \sim \triangle ABC$, debido a que $\angle ACB = \angle MNB$, comparten el ángulo $\angle ABC$. Implica que

$$\frac{BN}{BC} = \frac{BM}{AB} = \frac{MN}{AC}$$
$$\frac{MN}{12} = \frac{BN}{3BN}$$
$$MN = \frac{12}{3}$$
$$MN = 4$$

Recordatorio

Criterio de semejanza de triángulos (A-A): dos triángulos son semejantes si tiene dos ángulos congruentes.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

por lo tanto $MN = 4$

■

✓Ejemplo 6.18

En la figura mostrada se sabe que $AT = 9$ y además $BM = 4$. Hallar MT.

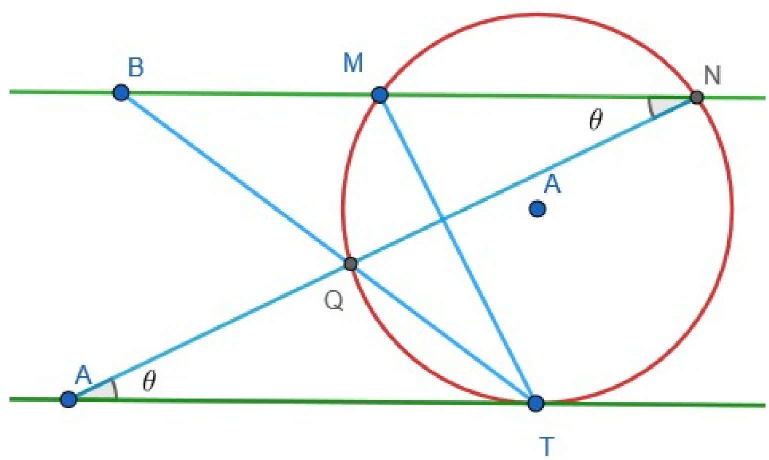


Figura 62. Ejemplo

Solución

Se tiene que

$$\angle MNQ = \frac{\widehat{QM}}{2} = \angle QTM = \theta$$

$$\angle ATQ = \angle QNT = \frac{\widehat{QT}}{2} = \alpha$$

Posteriormente tenemos que $\angle ATM = \alpha + \theta = \angle TMN$ por ser ángulo entre rectas paralelas, por lo que se tiene que $\triangle MNT$ es isósceles con $MT = NT$. por otro lado se tiene que $\triangle ANT \sim \triangle BMT$, por el primer criterio de semejanza de triángulos (A-A), esto se debe $\angle TBM = \angle ATB = \alpha$ (por ser ángulos alternos internos), y comparten el $\angle TAQ$, $\theta = \angle MNQ = \angle MTB$.

$$\begin{aligned} \frac{NT}{BM} &= \frac{AT}{MT} \\ \frac{MT}{4} &= \frac{9}{MT} \\ MT^2 &= 36 \\ MT &= 6 \end{aligned}$$

■

✓**Ejemplo 6.19**

En la Figura 63, O es centro B es el punto de tangencia, además F es el punto de intersección de los segmentos $\overline{BO}$ y $\overline{AE}$ de tal manera que $BF = 3$ y $FO = 2$, Calcular DE.

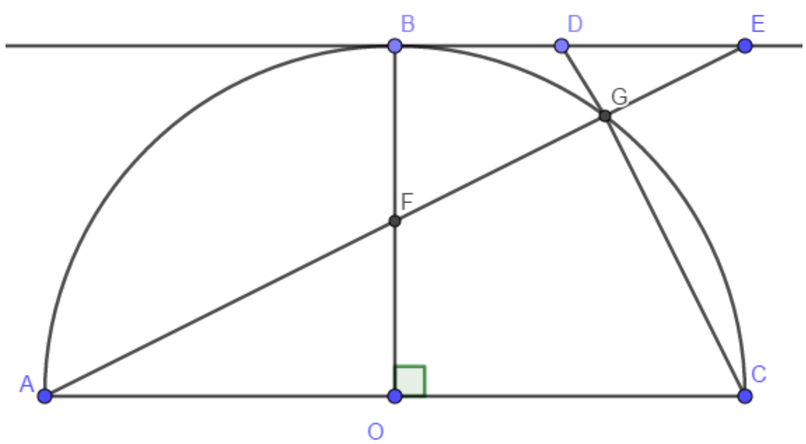


Figura 63.

Solución

Como lo indica la figura OB es el radio de la semicircunferencia que es 5 por lo que $OA = 5$ y $AC = 10$ aplicando el teorema de Pitágora en el triángulo AOF resulta $AF = \sqrt{29}$. Como lo indica la Figura 63, se tiene $\angle BFE = fig5\angle OFA$ por se ángulo opuesto por el vértice, $\angle FAO = \angle FEB$ por ángulos entre paralela, aplicando el criterio de semejanza (A-A) se tiene que $\triangle AFO = \triangle BFE$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{BE}{AO} &= \frac{BF}{FO} \\ BE &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Por teorema de Pitágoras $FE = \dfrac{3\sqrt{29}}{2}$. Además se tiene que los triángulos GAC es semejante con AOF por que comparten un ángulo y además ambos son triángulos rectángulos, entonces

$$\begin{aligned} \frac{AG}{AO} &= \frac{AC}{AF} \\ \frac{AG}{5} &= \frac{10}{\sqrt{29}} \\ AG &= \frac{50\sqrt{29}}{29} \end{aligned}$$

de lo anterior $FG = AG - AF = \dfrac{21\sqrt{29}}{29}$, he implica que $GE = FE - FG = \dfrac{45\sqrt{29}}{58}$.

Por último se tiene que los triángulos AGC es semejante con DGE por el criterio de (A-A), entonces:

$$\begin{aligned} \frac{DE}{AC} &= \frac{GE}{AG} \\ DE &= 4.5 \end{aligned}$$

■

✓Ejemplo 6.20

El triángulo equilátero ABC se encuentra inscrito en una circunferencia. Sobre la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto D; AD intercepta a la circunferencia en punto M y E es el punto de intersección entre $\overline{AC}$ y $\overline{BM}$. Si $AE = \sqrt{2}$ y $BD = 2\sqrt{2}$, calcular AB.

Solución

A partir de los enunciado del problema se construye la Figura 64.

Se $\angle ABM = \theta$, además $\angle BMA = \angle BCA = 60°$ por que subtiende el arco AC. Por otro lado

$$\begin{aligned} \angle BMA &= \angle MBC + \angle BDA \\ 60° &= 60° - \theta + \angle BDA \\ &= -\theta + \angle BDA \\ \theta &= \angle BDA \end{aligned}$$

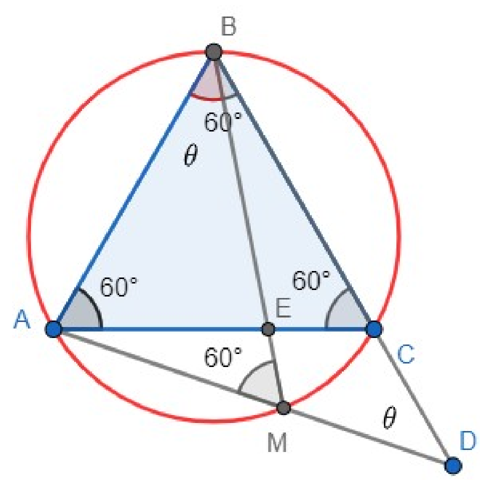


Figura 64. Ejemplo

Por el criterio (A-A), los triángulos ABE es semejante a ABD, por lo tanto

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{AB}$$
$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{AB}$$
$$\frac{AB}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{AB}$$
$$AB^2 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$
$$AB^2 = 4$$
$$AB = 2$$

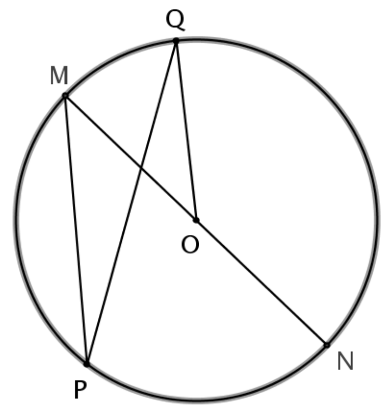
Luego de estudiar las definiciones, teoremas y los ejemplos que son evidencia de como se utiliza la teoría que se esta abordando, se esta listo para ir a la práctica por lo cual se motiva a trabajar los siguiente problemas, con la intención de fortalecer los contenidos abordados en esta unidad.

7. Problemas

Resolver los siguientes problemas de forma clara, ordenada y justificando a detalle todos sus procesos.

1. El $\triangle ABC$ es rectángulo en C. Sea D el pie de la perpendicular desde el vértice C hasta la hipotenusa. Sean r, r_1 y r_2 los respectivos radios de las circunferencias circunscritas a $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$. Pruebe que $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

2. Si el $\angle MPQ = 20°$, determine el valor del $\angle QON$ en la figura adjunta.



3. Dado un ángulo inscrito BAC, y su ángulo central BOC, se sabe que $\angle BAC + \angle BOC = 180°$. Calcular el $\angle OBC$.

4. En la Figura 65, $BCDO$ es un rombo. Determine el valor del ángulo θ y la medida de las diagonales de $BCDO$ si el radio de la circunferencia mide 6.

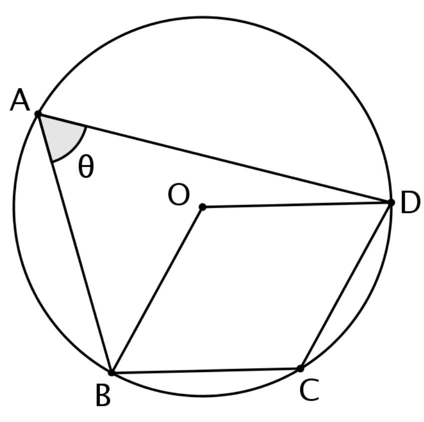


Figura 65.

5. Un cuadrilátero cíclico $ABCD$ satisface $\angle ABC = 2\angle CDA = \theta$. Calcule θ.

6. En la Figura 66, el $\angle AFE = 100°$ y el $\angle BCD = 150°$. Calcule el $\angle AGB$.

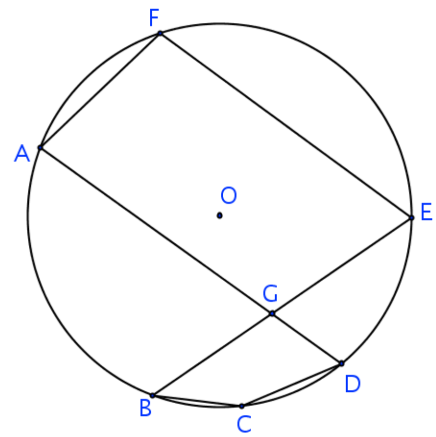


Figura 66.

7. Dado un ángulo $\angle AOB$, se trazan dos rectas l y m perpendiculares a los lados del ángulo en A y B respectivamente. Si P es el punto de corte de l y m, demuestre que A, B, O, P se ubican sobre una misma circunferencia.

8. En la Figura 67 se ha tomado un punto C sobre la circunferencia de centro O; $\overline{AC}$ y BC cortan a la segunda circunferencia en D y E respectivamente. Probar que $\overline{OC} \perp \overline{DE}$.

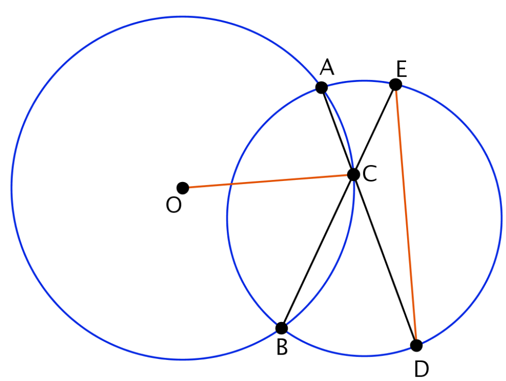


Figura 67.

9. Dada la Figura 68, demuestre que $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$.

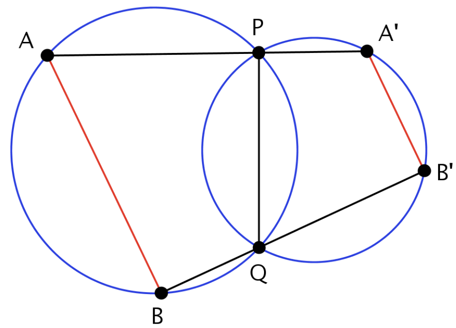


Figura 68.

10. En la Figura 69 CR es una recta tangente en C, demuestre que $\overline{AB} \parallel \overline{CR}$.

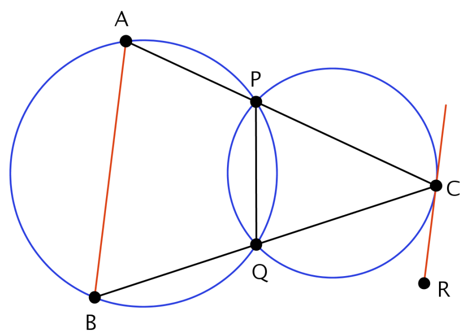


Figura 69.

11. Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 son tangentes (interior o exteriormente) en P (Ver Figura 70). Dos rectas que pasan por P cortan a Γ_1 y Γ_2 en A y C, y en B y D, respectivamente. Demuestre que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

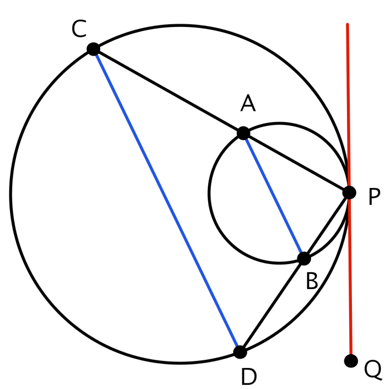


Figura 70.

12. (*) Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 son tangentes (interna o externamente) en un punto P; por este punto se traza una recta que corta nuevamente a la circunferencias en A y B, respectivamente. Demuestre que $\overline{AO_1} \parallel \overline{BO_2}$.

13. Dos circunferencias son tangentes externamente en el punto A. Una tangente exterior común toca a una circunferencia en B y a la otra en C. Demostrar que $\angle BAC = 90°$.

14. En la Figura 71, $\overline{DE}$ es tangente en D, y C es el punto medio del arco $\overline{AD}$. Encuentre el valor del ángulo seminscrito ADE.

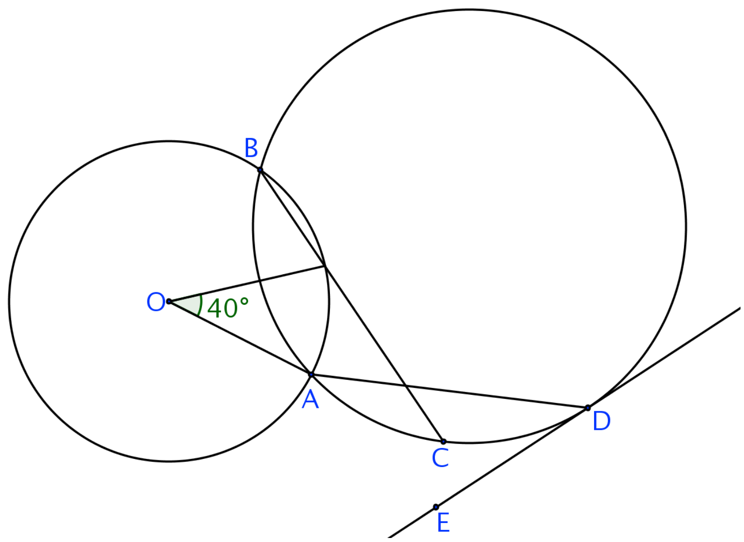


Figura 71.

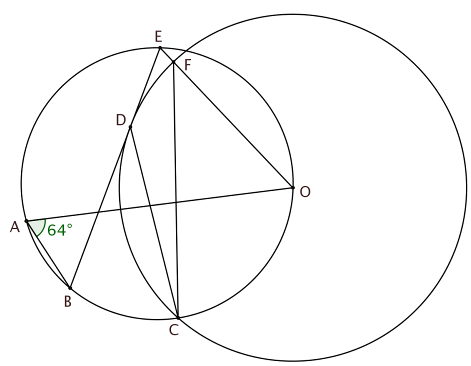


Figura 72.

15. Si el $\angle AEB = 30°$, $\angle ADE = 20°$ y $\angle ACE = 35°$, calcule el $\angle AFB$. Véase Figura 73.

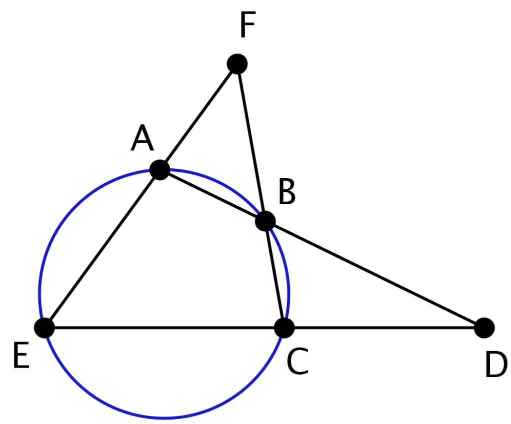


Figura 73.

16. Dada una circunferencia de diámetro $\overline{BC}$, se toma un punto P en la prolongación de $\overline{BC}$, y se traza la tangente $\overline{AP}$. Si $AP = AB$ y O es el centro de la circunferencia, demuestre que el $\triangle AOC$ es equilátero.

17. (*) Dadas dos circunferencias una fuera de la otra, demuestre que las tangentes comunes externas forman segmentos iguales; análogamente, las tangentes comunes internas forman segmentos iguales.

18. (*) **Teorema de Pithot.** Demuestre que en todo cuadrilátero inscribible, la suma de lados opuestos es igual.

19. (*) **Teorema de Steiner.** En todo cuadrilátero exinscrito a una circunferencia, la diferencia de las longitudes de lados opuestos es igual.

20. En la Figura 74, AB es una cuerda y por D se traza una recta tangente a la circunferencia paralela a AB. Demuestre que CD es bisectriz del $\angle ACB$.

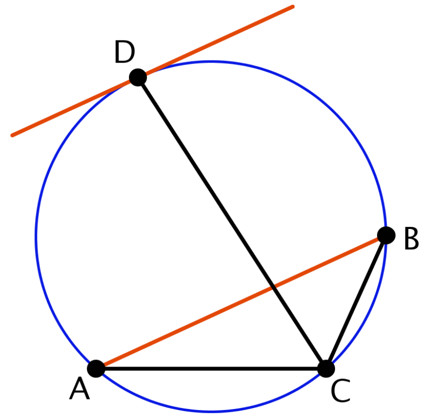
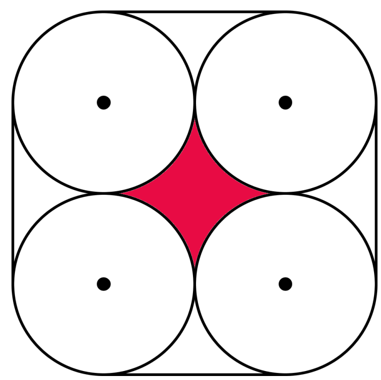


Figura 74.

21. (X OMCC - P2, Aarón) Sea $ABCD$ un cuadrilátero concíclico con diámetro AC, y sea O el centro de su circunferencia. Se construyen los paralelogramos $DAOE$ y $BCOF$. Demuestre que si E y F están sobre la circunferencia entonces $ABCD$ es rectángulo.

22. Cuatro cilindros de diámetro 1 están pegados apretadamente por una cuerda muy fina, como en la figura adjunta. Demostrar que la cuerda tine longitud $4 + \pi$. Demostrar también que el área sombreada entre los cilindros es $1 - \dfrac{\pi}{4}$.



23. En la Figura 75, $ABCD$ es un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$ y $DA = BC = 2$; tomando DA y BC como diámetros, se construyen dos circunferencias tangentes. Si $DC = 3AB$, calcule el área del trapecio.

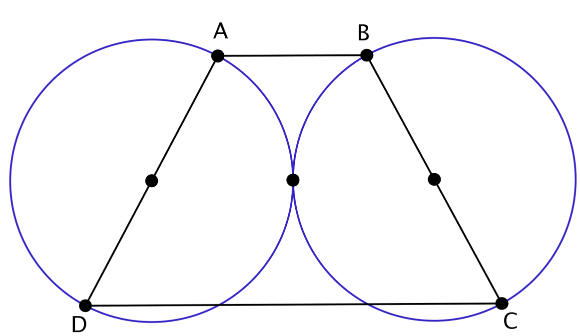


Figura 75.

24. La Figura 76 está formada por un paralelogramo y dos circunferencia tangentes entre sí y tangentes a tres lados del paralelogramo. Sabiendo que el radio de las mismas mide la cuarta parte del lado menor del paralelogramo, calcule la razón entre el lado mayor del paralelogramo y el radio de las circunferencias.

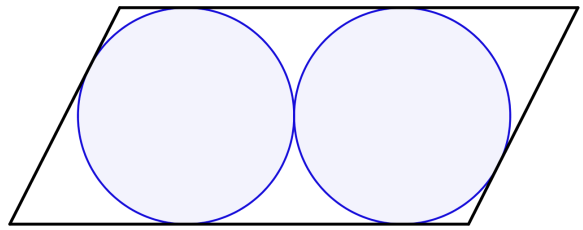


Figura 76.

25. (*) **Teorema de Miquel:** Dado un $\triangle ABC$, sean X, Y, Z puntos sobre AB, BC, CA, respectivamente. Demuestre que los circuncírculos de $\triangle AXZ$, $\triangle BYX$, $\triangle CZY$ tienen un punto en común M.

26. (*) Sea ABC un triángulo, y sean L y N las intersecciones de la bisectriz del ángulo A con el lado BC y el circuncírculo de ABC respectivamente. Construimos la intersección M del circuncírculo de ABL con el segmento AC. Prueba que los triángulos BMN y BMC tienen la misma área.

27. (*) Sea AB el diámetro de una semicircunferencia. Se colocan los puntos M y K sobre la semicircunferencia y sobre AB, respectivamente.[1] Sea P el centro de la circunferencia que pasa por A, K y M; sea Q el centro de la circunferencia que pasa por B, K y M. Demuestre que $MPKQ$ es concíclico.

28. En la Figura 77, $ABCDEF$ es un hexágono regular y las circunferencias de centro en los vértices son tangentes dos a dos. Si las circunferencias sobre los vértices B, D, F son iguales, demuestre que las circunferencias restantes son iguales.

[1] M y K son distintos de A y B.

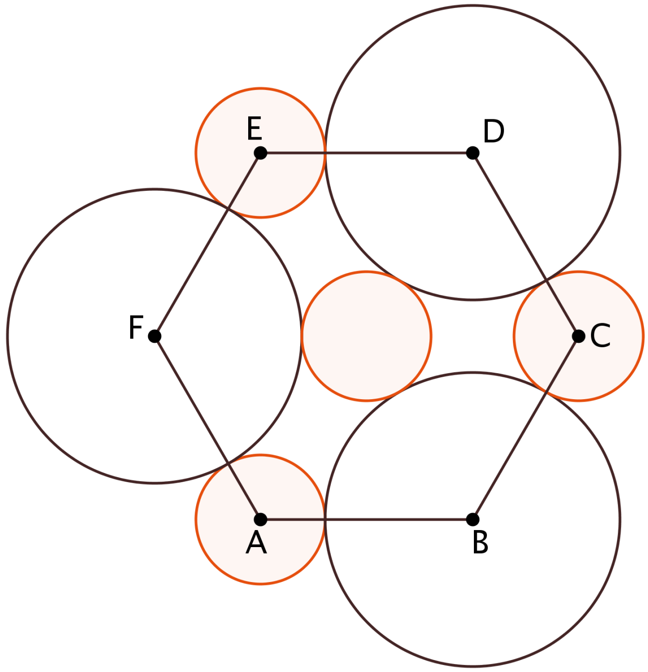


Figura 77.

29. (*) Las circunferencias Γ_1 y Γ_2 se cortan en los puntos A y B. Por el punto A se traza una recta que corta nuevamente a las circunferencias Γ_1 y Γ_2 en los puntos C y D, respectivamente. Por los puntos C y D se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se cortan en el punto M. Demuestra que $MCBD$ es cíclico.

30. (*) El $\triangle ABC$ cumple que $\angle A = 90°$ y $AB = AC$. Se toma un punto E del segmento AB, se construye interiormente un triángulo equilátero AEF. EF corta BC en I, y se construye exteriormente un triángulo equilátero BIJ. Encuentre $\angle EJB$.

31. (*) En la Figura 78, se sabe que $\angle AO_1B - \angle AO_2B = 70°$ y además la tangente $\overline{EB}$ forma el triángulo isósceles ABE, con $AB = AE$. Encuentre $\angle EBC$.

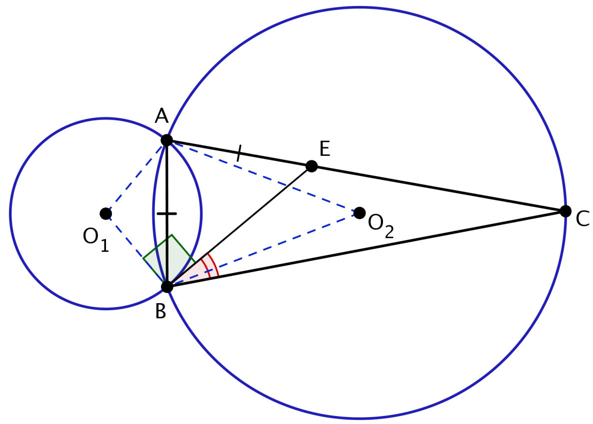


Figura 78.

32. (*) Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se cortan en A y B. Una recta por A corta a Γ_1 y Γ_2 en C y D, respectivamente, y la paralela a CD por B corta Γ_1 y Γ_2 en E y F, respectivamente. Demuestre que $\triangle CDB \equiv \triangle EAF$.

33. (*) **La Recta de Simson-Wallace.** Sean X, Y y Z los pies de las alturas trazadas desde un punto P en el circuncírculo del $\triangle ABC$ hacia AB, BC y CA, respectivamente. Demuestre que X, Y y Z están alineados.

34. (*) Sea P un punto exterior al cuadrado $ABCD$ tal que $\angle APC = 90°$, Q es la intersección de AB y PC, y R el pie de la perpendicular por Q a CA. Demuestre que P, R y D están alineados.

35. En la Figura 79, $ABCD$ es un trapecio rectángulo tal que la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ (y centro O) es tangente a $\overline{CD}$. Demostrar que O pertenece a la circunferencia de diámetro $\overline{CD}$ y que esta circunferencia es tangente a $\overline{BA}$.

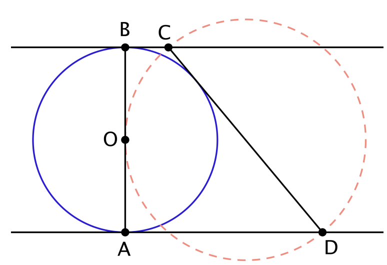


Figura 79.

36. El $\triangle ABC$ es rectángulo en C, la circunferencia de centro O es tangente a cada uno de los lados del $\triangle ABC$ en los puntos P, Q y R (como se muestra en la Figura 80), y se cumple que $AP = 20$ y $BP = 6$. Calcule OP.

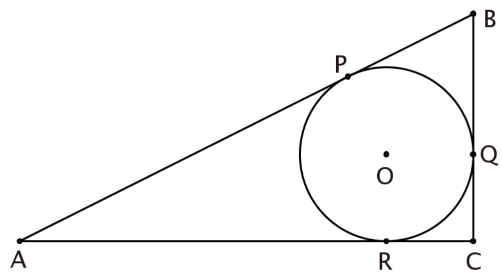


Figura 80.

37. Los vértices A y B de un triángulo equilátero $\triangle ABC$ están sobre una circunferencia de radio 1 y el vértice C está en el interior de la circunferencia. Un punto D (distinto de B) que esta en la circunferencia es tal que $AD = AB$. La recta DC corta por segunda vez a la circunferencia en E. Encuentre la longitud del segmento CE. Ver Figura 81.

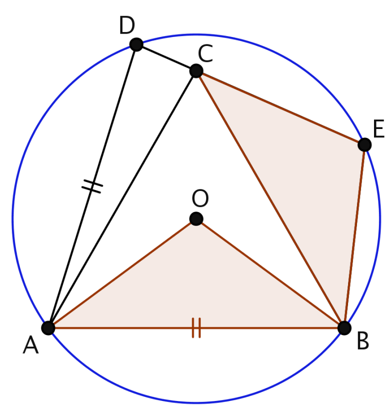


Figura 81.

38. En la Figura 82 se muestran tres semicircunferencias, una de diámetro AB (de centro O y radio r), otra de diámetro AO y la última de diámetro OB. Determine la razón entre el radio de la circunferencia tangente a estas tres semicircunferencias y r.

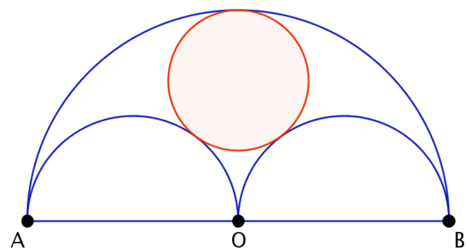


Figura 82.

39. El segmento AB es diámetro de un semicírculo con centro en O. Un círculo con centro en P es tangente a AB en O y también al semicírculo. Otro círculo con centro en Q es tangente a $\overline{AB}$, al semicírculo y al círculo de centro en P. Si $AB = 2$. ¿Cuál es el radio del círculo con centro en Q?

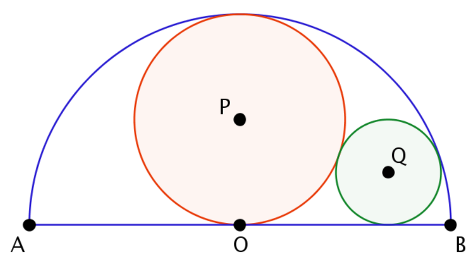


Figura 83.

40. (*) (OIM 2002, P-4) En un triángulo escaleno ABC se traza la bisectriz interior BD, con D sobre $\overline{AC}$. Sean E y F puntos sobre la recta $\overline{BD}$ tales que $\left(\overline{AE} \parallel \overline{CF}\right) \perp \overline{BD}$, y sea M el punto sobre el lado $\overline{BC}$ tal que $\overline{DM} \perp \overline{BC}$. Demuestre que $\angle EMD = \angle DMF$.

41. (*) (OMCC 2003, P-2) Sea S una circunferencia y AB un diámetro de ella. Sea t la recta tangente a S en B y considere dos puntos C y D en t tales que B este entre C y D. Sean E y F las intersecciones de S con AC y $\overline{AD}$ y sean G y H las intersecciones de S con $\overline{CF}$ y $\overline{DE}$. Demuestre que $AH = AG$.

42. (*) (The 59^{th} Romanian Mathematical Olympiad District Round) Considere un cuadrado $ABCD$ y un punto E sobre el lado AB. La diagonal AC corta al segmento DE en el punto P. La perpendicular por P a DE corta al lado BC en F. Probar que $EF = AE + CF$.

43. (*) **Teorema de Arquímedes:** En la Figura 84, la región delimitada por tres semicircunferencias mutuamente tangentes, es conocida como *cuchilla de zapatero* o *árbelos*. Demostrar

que las circunferencias sombreadas son congruentes.

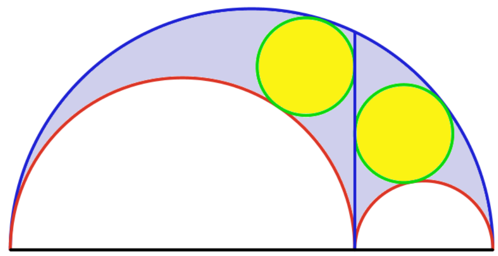


Figura 84. Teorema de Arquímedes

44. Calcular el área de la región sombreada si ACB es un triángulo equilátero de lado 6 y A es el centro del arco $\widehat{BC}$ (O es centro).

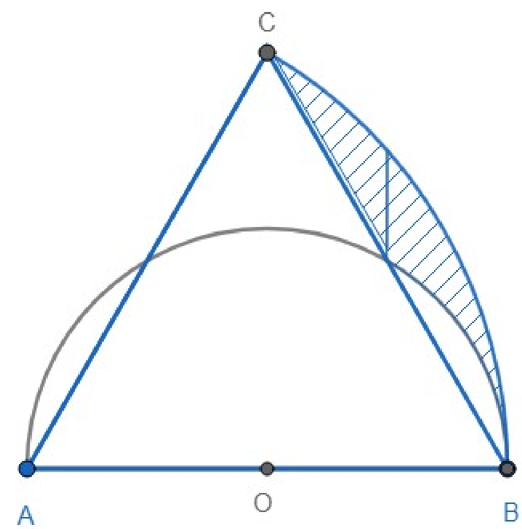


Figura 85.

8. Respuesta de los problemas

- *Problema 2.* $\angle MPQ 140°$.
- *Problema 3.* $\angle OBC 30°$.
- *Problema 4.* $\theta = 30°$, 6 y $4\sqrt{6}$.
- *Problema 5.* $\theta = 120°$.
- *Problema 6.* $\angle AGB = 110°$.
- *Problema 14.* $\angle ADE 40°$.
- *Problema 15.* $\angle AFB = 70°$.
- *Problema 23.* $A = 2\sqrt{3}$.
- *Problema 24.* $\dfrac{\text{radio}}{\text{lado mayor}} = \dfrac{1}{6}$.
- *Problema 31.* $\angle EBC = 35°$.
- *Problema 36.* $OP = 4$.
- *Problema 37.* $CE = 1$.

9. Sugerencia

Si desea obtener mayor información sobre los cuadriláteros cíclicos y propiedades de circunferencia revisar los siguientes enlaces:

- https://www.youtube.com/watch?v=oEJMdbNKeEU.
- https://www.sectormatematica.cl/Novedades/Circunferencia_y_Circulos.pdf.
- https://onmapsguanajuato.files.wordpress.com/2011/10/cuadrilateros-ciclicos.pdf.
- https://www.unirioja.es/talleres/creatividad_matematica/SeminarioBachillerato/RECURSOSGEOMETRIA.pdf.

Apéndice B

Universidad de El Salvador
Modalidad Educación a Distancia
Facultad de Ciencias Naturales Y Matemática
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Encuesta sobre la mediación pedagógica del material escrito de la asignatura Geometría Euclídea I, para la modalidad de Educación a Distancia de la Universidad de El Salvador

Población: Los estudiantes que cursan la asignatura de Geometría Euclídea I en ciclo I-2020.

Objetivo: comprobar si el material de la asignatura de Geometría Euclídea I, tiene los aspectos que debe contener un material escrito mediados pedagógicamente bajo el modelo de Educación a Distancia para la Universidad de El Salvador.

Indicaciones: Contestar cada una de las interrogantes seleccionado una opción o redactando un párrafo exponiendo su punto de visto. La calificación máxima, de 10 puntos, significa que lo que aparece en material es excelente, y la de 1 punto, significa que se requieren mejorías sustanciales.

1. En la escala del 1 al 10 la estructura del material escrito es adecuado.

2. En la escala del 1 al 10 la redacción del material escrito es adecuado.

3. En la escala del 1 al 10 el material escrito te motiva al estudio de Geometría Euclídea.

4. En la escala del 1 al 10, es fácil de comprender las demostraciones de los teoremas enunciados en el material escrito.

5. En la escala del 1 al 10 la cantidad de ejercicios resueltos en el material escrito es adecuado.

6. En la escala del 1 al 10 los pasos de la resolución de los ejercicios desarrollados son claros.

7. En la escala del 1 al 10 la construcción de las figuras facilitan comprender la resolución de los ejercicios.

8. En la escala del 1 al 10 los recordatorios colocados en la construcción de las demostraciones de los teoremas facilitan la compresión de estos.

9. En la escala del 1 al 10 los recordatorios colocados en desarrollo de la solución de los ejemplos, facilitan la compresión de estos.

10. Escriba algún comentario sobre el material escrito de Geometría Euclídea I.

11. ¿En promedio cuántas horas semanales utiliza para el estudio del material escrito de Geometría Euclídea I por semana?

12. Mencione dos aspectos que considera que están bien en el material.

13. ¿Qué aspectos Ud. considera que deben mejorarse del material escrito? ¿Por qué?

Universidad de El Salvador
Modalidad Educación a Distancia
Facultad de Ciencias Naturales Y Matemática
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Encuesta sobre la mediación pedagógica del material escrito de la asignatura Geometría Euclídea I, para la modalidad de Educación a Distancia de la Universidad de El Salvador

Población: Los Profesores Universitarios Modalidad de Educación a Distancia.

Objetivo: comprobar si el material de la asignatura de Geometría Euclídea I, tiene los aspectos que debe contener un material escrito mediados pedagógicamente bajo el modelo de Educación a Distancia para la Universidad de El Salvador.

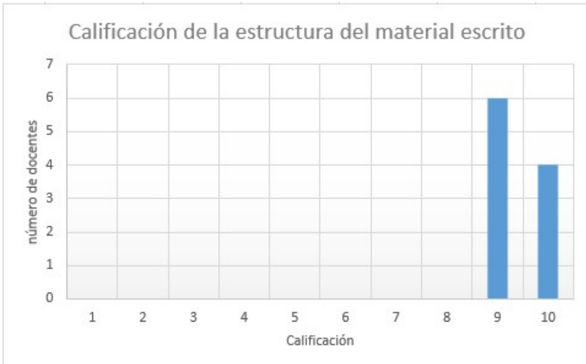
Indicaciones: Contestar cada una de las interrogantes seleccionado una opción o redactando un párrafo exponiendo su punto de visto. La calificación máxima, de 10 puntos, significa que lo que aparece en material es excelente, y la de 1 punto, significa que se requieren mejorías sustanciales.

1. En la escala del 1 al 10 la estructura del material escrito es adecuado.
2. En la escala del 1 al 10 la redacción del material escrito es adecuado.
3. En la escala del 1 al 10 el material escrito motiva a los estudiantes al estudio de Geometría Euclídea.
4. En la escala del 1 al 10, es fácil de comprender las demostraciones de los teoremas enunciados en el material escrito.

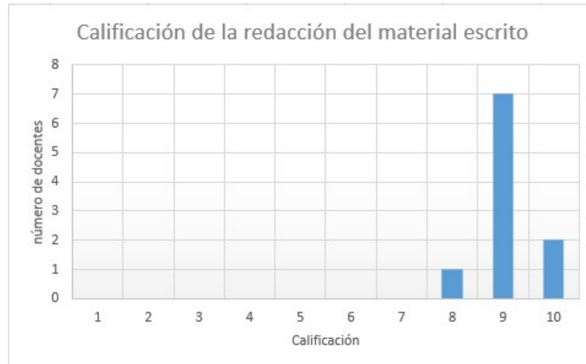
5. En la escala del 1 al 10 la cantidad de ejercicios resueltos en el material escrito es adecuado.
6. En la escala del 1 al 10 los pasos de la resolución de los ejercicios desarrollados son claros.
7. En la escala del 1 al 10 la construcción de las figuras facilitan comprender la resolución de los ejercicios.
8. En la escala del 1 al 10 los recordatorios colocados en la construcción de las demostraciones de los teoremas facilitan la compresión de estos.
9. En la escala del 1 al 10 los recordatorios colocados en desarrollo de la solución de los ejemplos, facilitan la compresión de estos.
10. Escriba algún comentario sobre el material escrito de Geometría Euclídea I.
11. Mencione dos aspectos que considera que están bien en el material.
12. ¿Qué aspectos Ud. considera que deben mejorarse del material escrito? ¿Por qué?

Apéndice C

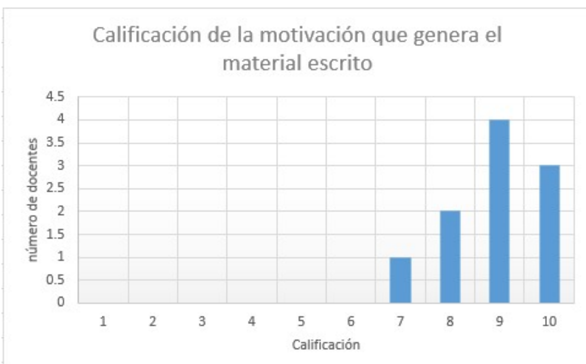
Resultados de la encuesta contestada por los docentes.



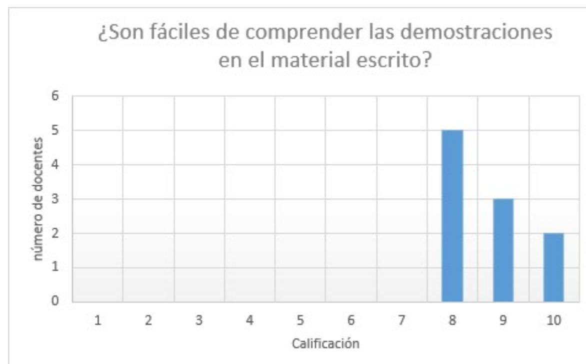
(a) Pregunta 1



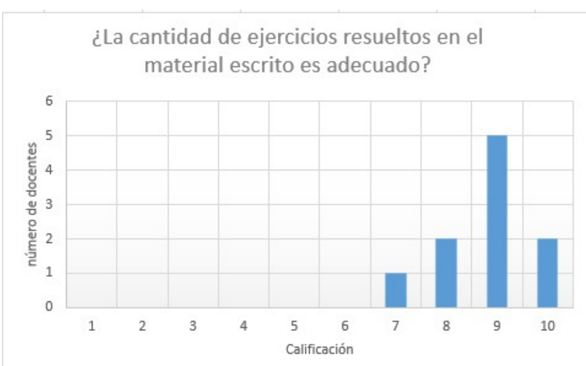
(b) Pregunta 2



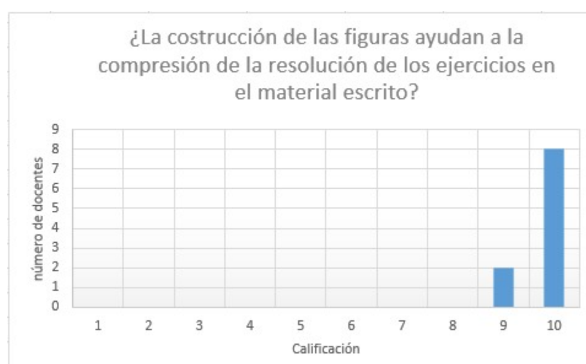
(c) Pregunta 3



(d) Pregunta 4

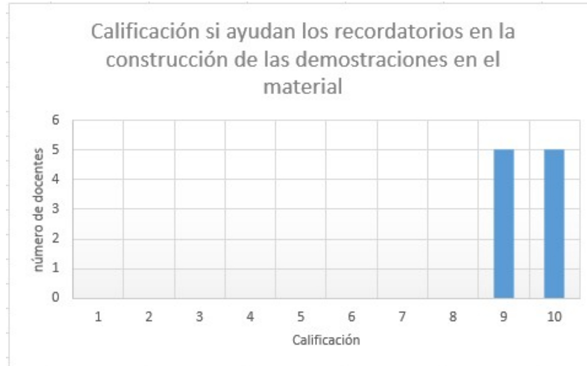


(e) Pregunta 5

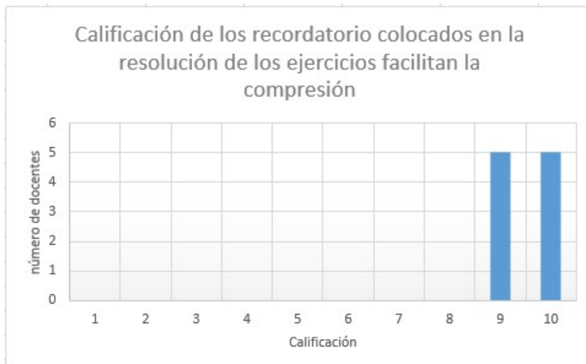


(f) Pregunta 6

(g) Pregunta 7



(h) Pregunta 8

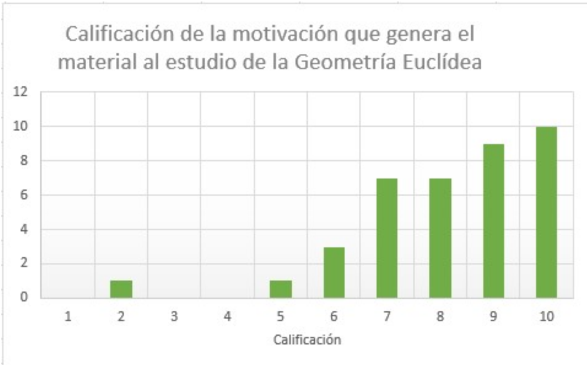


(i) Pregunta 9

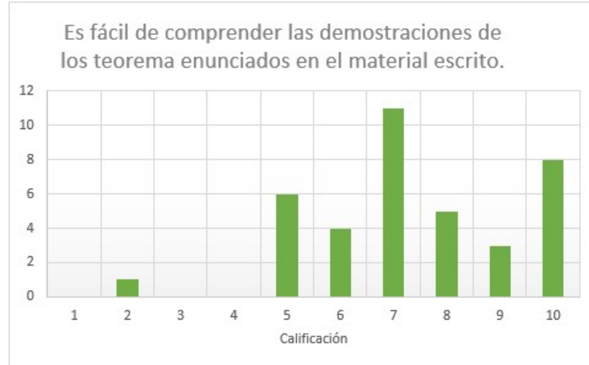
Resultados de la encuesta contestada por los estudiantes.

(j) Pregunta 1

(k) Pregunta 2



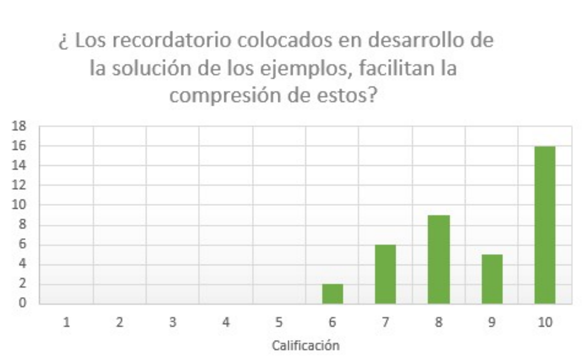
(l) Pregunta 3



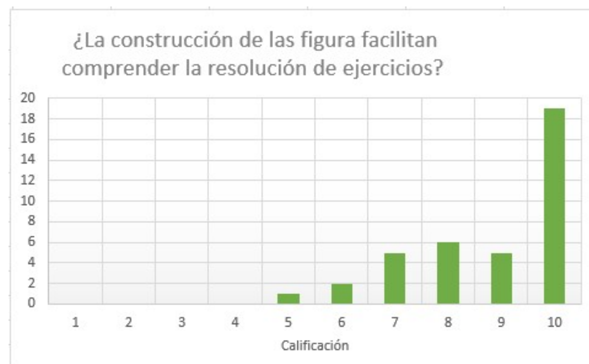
(m) Pregunta 4

(n) Pregunta 5

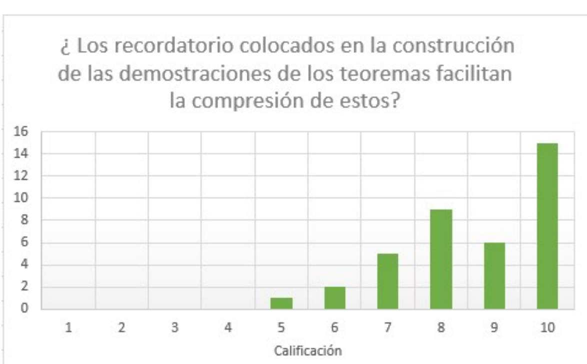
(ñ) Pregunta 6



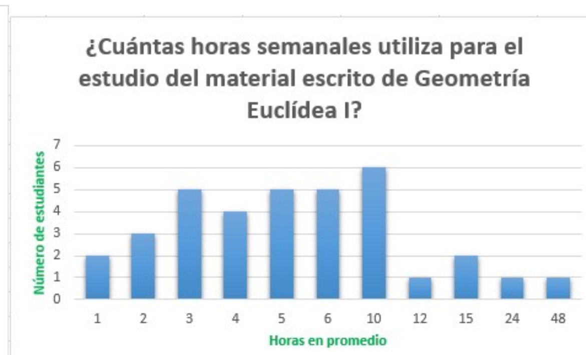
(o) Pregunta 7



(p) Pregunta 8



(q) Pregunta 9



(r) Pregunta 11

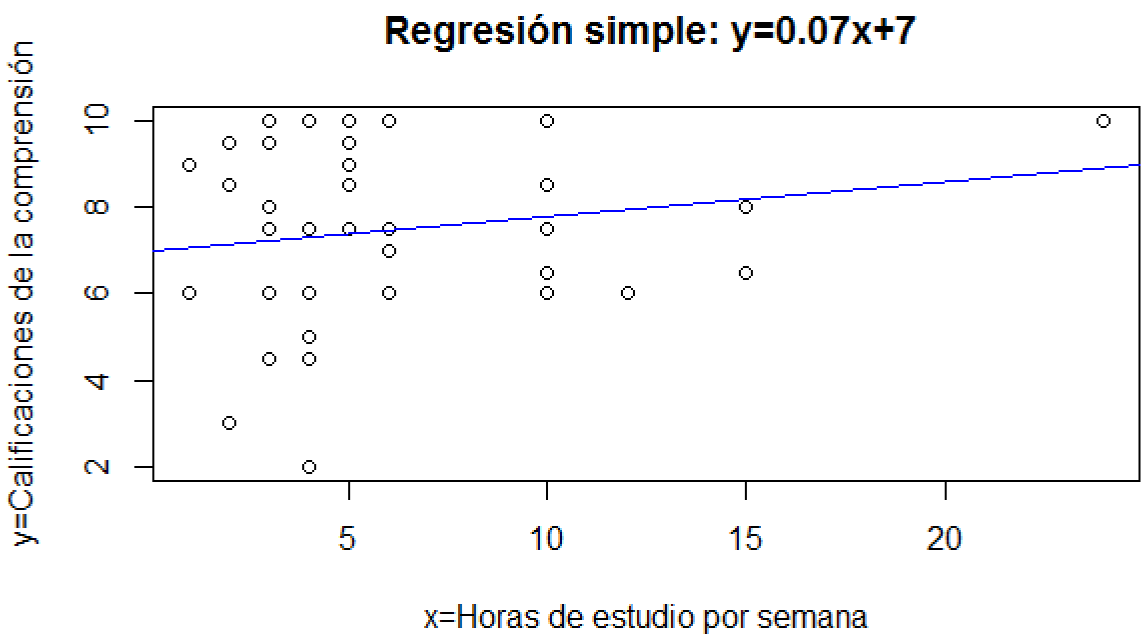


Figura 5: Diagrama de dispersión entre el número de horas semanales y promedio de las calificaciones de la comprensión de las demostraciones y soluciones de los ejercicios

Tabla 6: Análisis de varianza de la regresión entre v_1 y v_2

ANÁLISIS DE VARIANZA					
	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	1	4.9811	4.9811	1.1659	0.2876
Residuos	35	149.5189	4.2720		
Total	36	154.5			

v_1 : número de horas por semana, v_2 : promedio de las calificaciones de la comprensión de las demostraciones y solución de ejercicios.

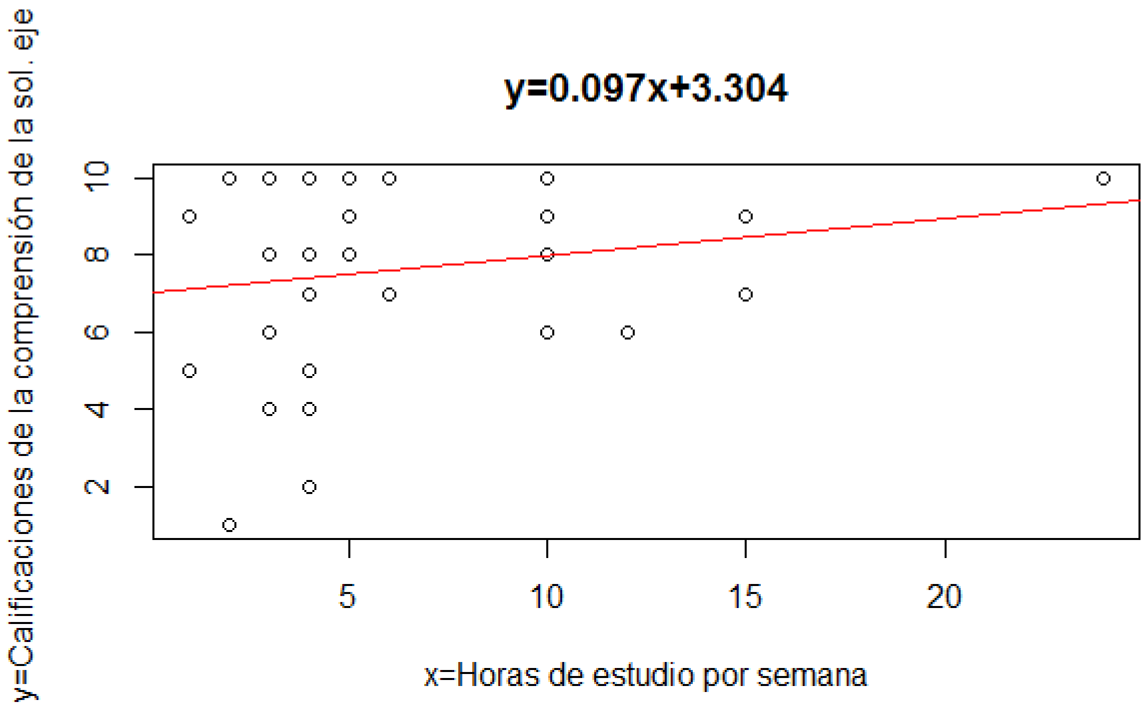


Figura 6: Diagrama de dispersión entre el número de horas por semana y las calificaciones de la comprensión de las soluciones de los ejercicios

Tabla 7: Análisis de varianza de la regresión entre v_3 y v_4

ANÁLISIS DE VARIANZA					
	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	1	7.5195	7.5185	1.3624	0.2510
Residuos	35	193.1832	5.5195		
Total	36	200.7			

v_3 : número de horas por semana, v_4 : calificaciones de la comprensión de las soluciones de los ejercicios.

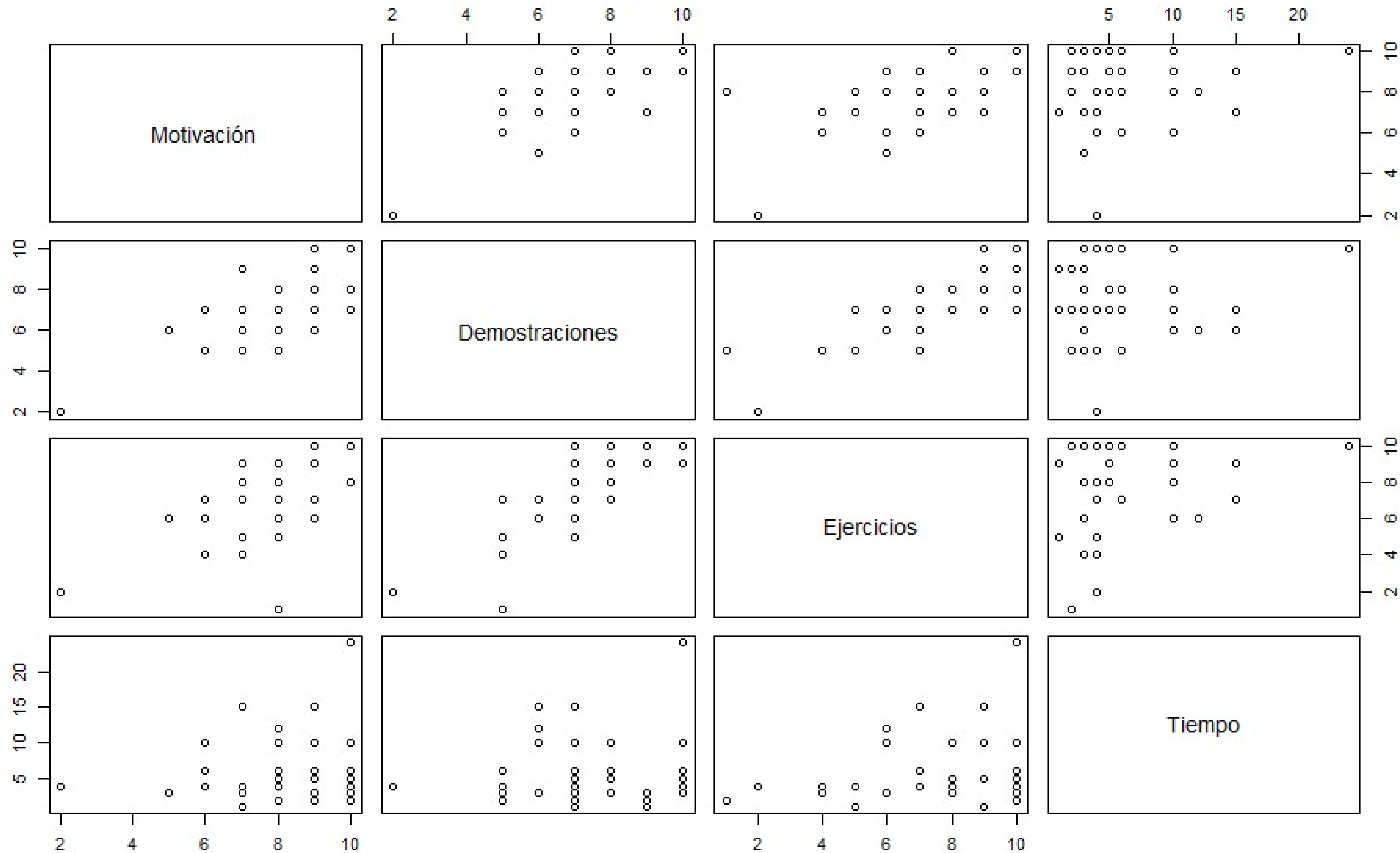


Figura 7: Diagrama de dispersión de las variable comprensión de las demostraciones, comprensión de los ejercicios, motivación y tiempo

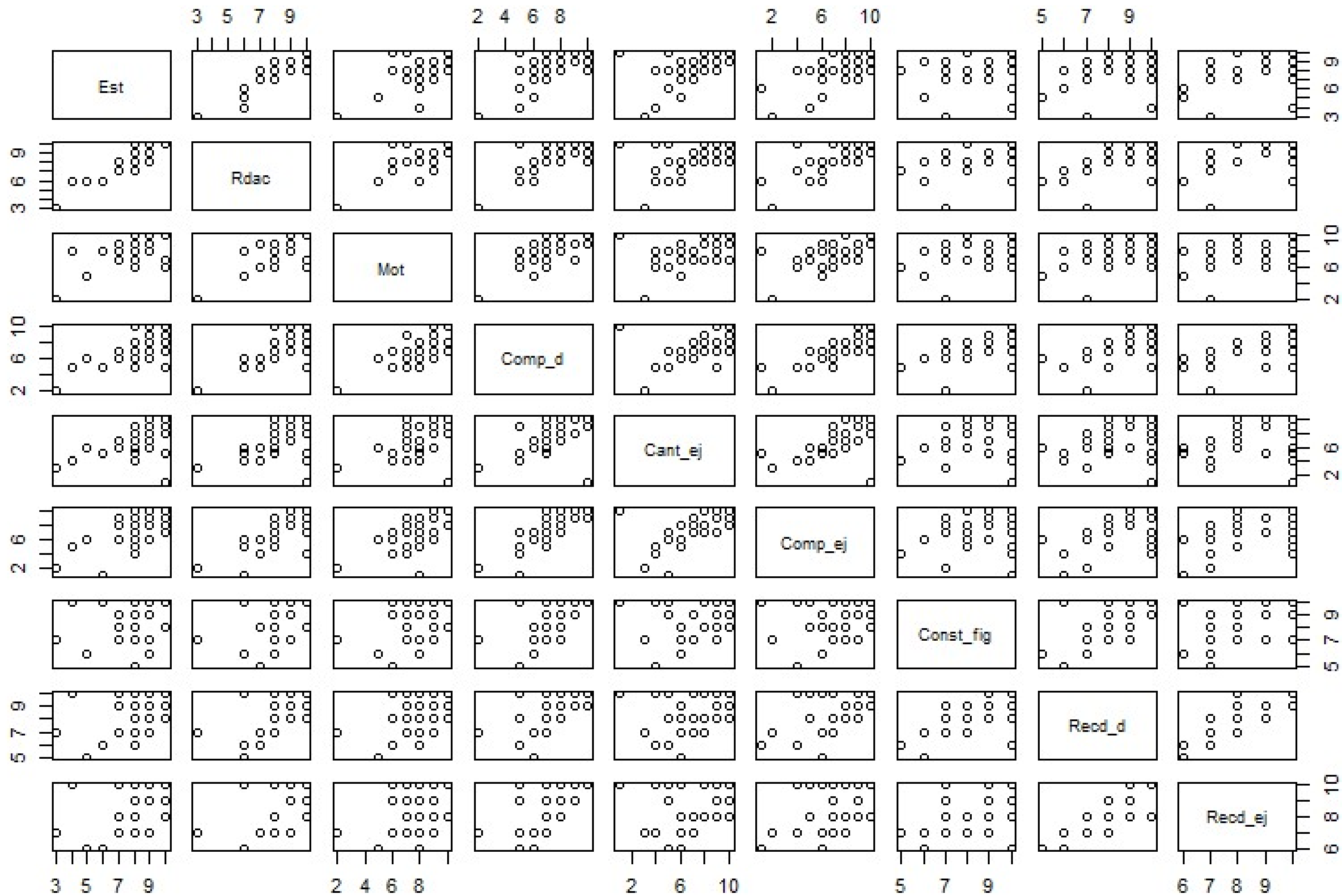


Figura 8: Diagrama de dispersión de las variable comprensión de las demostraciones, comprensión de los ejercicios, motivación, cantidad de ejercicios, estructura , redacción, construcción de las figuras, recordatorios en las demostraciones y recordatorios

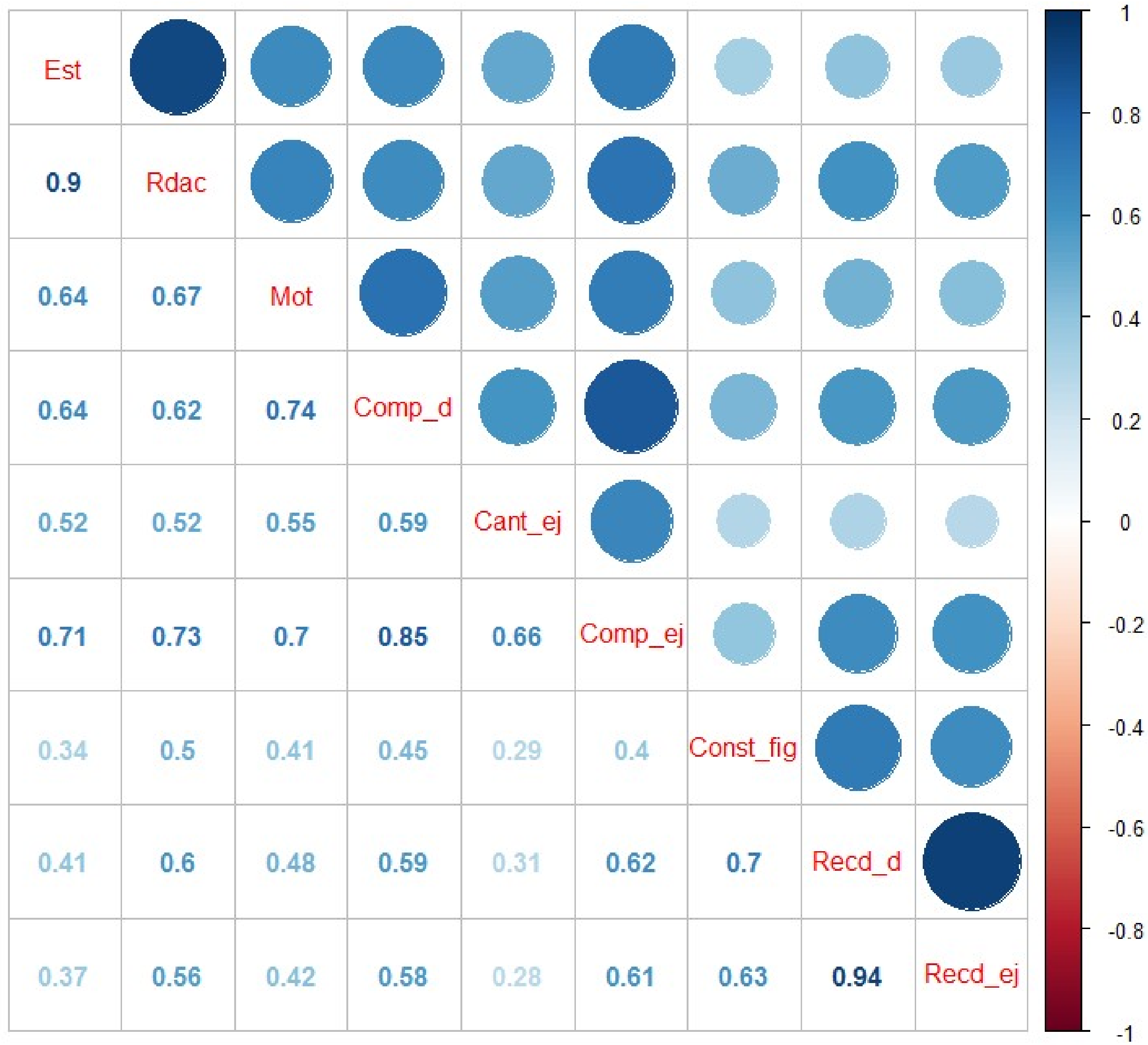


Figura 9: Diagrama de dispersión de las variable comprensión de las demostraciones, comprensión de los ejercicios, motivación, cantidad de ejercicios, estructura , redacción, construcción de las figuras, recordatorios en las demostraciones y recordatorios

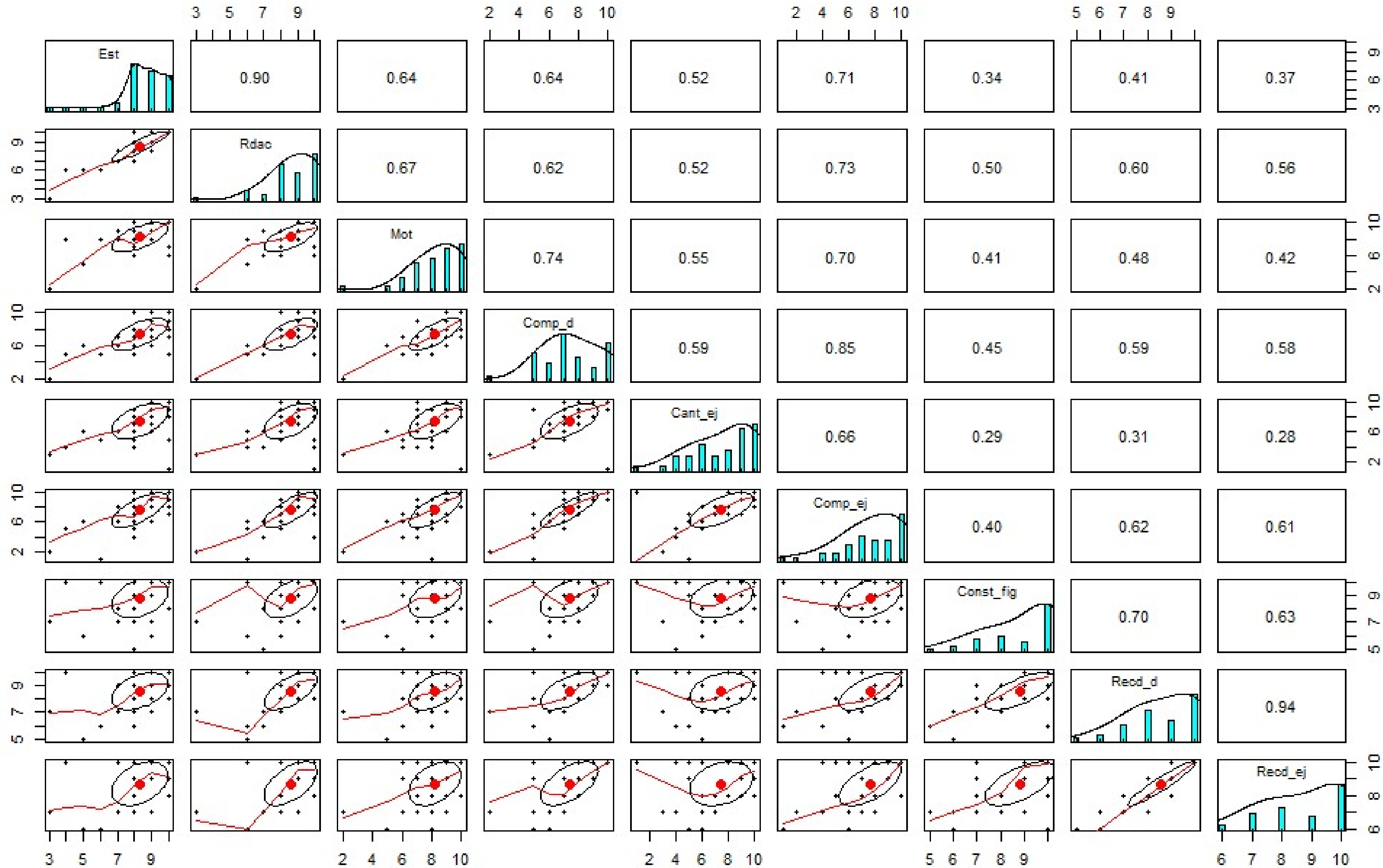


Figura 10: Diagrama de dispersión de las variable comprensión de las demostraciones, comprensión de los ejercicios, motivación, cantidad de ejercicios, estructura , redacción, construcción de las figuras, recordatorios en las demostraciones y recordatorios