UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Facultad de Ciencias y Humanidades

"TOPICOS EN ALGEBRA DE BOOLE"

TRABAJO DE INVESTIGACION

PRESENTADO POR

GLORIA ISABEL GALO BONILLA

NURIA ISABEL SALMERON MONTERROSA

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE

Licenciado en Matemática

DICIEMBRE DE 1976

SAN SALVADOR   EL SALVADOR   CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
INSTITUTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

" TOPICOS EN ALGEBRA DE BOOLE "

TRABAJO PRESENTADO POR:

GLORIA ISABEL GALO BONILLA
NURIA ISABEL SALMERON MONTERROSA

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

DICIEMBRE DE 1976

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR EN FUNCIONES

DR. CARLOS ALFARO CASTILLO

SECRETARIO GENERAL

DR. MANUEL ATILIO HASBUN

FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DECANO

LIC. RENE VAQUERANO

SECRETARIO

LIC. SALVADOR ALBERTO VALDIVIESO

TRIBUNAL DE TESIS

ING. MARIO FREDY HERNANDEZ

LIC. JOAQUIN ANTONIO SERMEÑO LIMA

LIC. MARIO MORALES BURGOS

INTRODUCCION

La finalidad del presente trabajo es la de acrecentar el material bibliográfico en el área de álgebra, una de las disciplinas de mayor desarrollo en el campo matemático del país. El aporte concreto es dentro de la materia de las álgebras de Boole; siendo el objetivo primordial - el de establecer una relación funtorial entre las estructuras algebráicas y las topológicas.

La lectura de este trabajo exige conocimientos elementales de teoría de Categorías y de Topología General. Sin embargo para el lector no familiarizado con éstas ramas se han preparado en el apéndice dos capítulos que proporcionan el conocimiento básico de las disciplinas mencionadas. En cuanto al orden de presentación los temas - se han desarrollado como sigue: Primero se le dió a los - espacios de Boole, estructuras de Categoría; luego,además de construirse la categoría de las álgebras de Boole, se forma un isomorfismo entre álgebras de Boole y anillos de Boole; y se definen algunas álgebras particulares como - son: álgebras libres, distributivas y proyectivas. La parte medular de este trabajo se encuentra en el tercer capítulo, en donde se construye un funtor que relaciona la -

categoría de las álgebras de Boole y la categoría de los espacios de Boole. Para finalizar, en el último capítulo se aprecia con mayor intensidad el importante papel que juega el concepto de orden en la teoría de las álgebras Booleanas.

En general se ha trabajado construyendo todo lo necesario para establecer el vínculo entre álgebras de Boole y espacios de Boole y algunas propiedades adicionales relacionadas con el objetivo principal; claro es que existe mucho más de lo que aquí se encuentra sobre álgebras Booleanas y lo cual podría dar lugar a otros trabajos de investigación. Se cree que éste, prestará alguna utilidad a los estudiosos del álgebra.

INDICE

CAPITULO I
ESPACIOS DE BOOLE

1.1. DEFINICIONES. EJEMPLOS. PROPOSICIONES.

1.1.1. DEFINICIONES

a) Un espacio topológico X es llamado "totalmente discontinuo" si la componente conexa de un elemento cualquiera "x" es igual a $\{x\}$, es decir, si cada componente conexa tiene un solo elemento. Por (II.6.5), es equivalente a que los clopens de X sean una base, si X es -- compacto.

b) Un espacio topológico X es llamado un "espacio de Boole", si X es un espacio compacto y totalmente discontinuo.

1.1.2. EJEMPLOS

E1 Sea X un conjunto y $p \in X$; $A \subset X$ es un abierto si A - está incluido en el complemento de $\{p\}$ ó bien si A es un subconjunto cofinito que contiene al punto "p".
X es un espacio de Boole (con esta definición de abierto) cuyos clopens son los subconjuntos finitos de $X - \{p\}$ y los subconjuntos cofinitos de X que contienen a "p".

E2 <u>Espacio de Cantor</u>

Sea $A = \{0, 1\}$ un conjunto con sólo dos elementos y consideremos en A la topología discreta, con la cual A es evidentemente un espacio topológico compacto.

Si $I \neq \Phi$ es un conjunto, sea $X = \prod_{i \in I} A_i$, en donde $A_i = A$ para todo $i \in I$. Como cada A_i es compacto, X, con la topología producto, es un espacio topológico compacto (II.9.4). Sea E_I el conjunto de funciones $f : I \to A$, y para cada $j \in I$ sean los conjuntos

$$B_{0j} = \{f \in E_I \mid f(j) = 0\}$$

$$B_{1j} = \{f \in E_I \mid f(j) = 1\}$$

Consideremos:

$\beta = \{0 \subset E_I$ / 0 es igual a una intersección finita de conjuntos de la forma B_{0J} ó $B1_J$, $j \in I\}$.

Si $P \subset EI$, diremos que P es un abierto si $P = \Phi$ ó si P es unión de conjuntos $0 \in \beta$. Es rutinario verificar que con esta definición de abiertos EI es un espacio topológico.

La función $g : X \longrightarrow EI$ es trivialmente biyectiva

$$(X_i)_{i \in I} \rightsquigarrow f : i \rightsquigarrow x_i$$

g es continua, ya que si $0 \in \beta$, 0 es de la forma

$$
\begin{aligned}
O &= \bigcap_{k=1}^{n} B_{m_k i_k} \qquad \text{con } m_k \in \{0, 1\} \text{ e } i_k \in I \\
g^{-1}(O) &= g^{-1}\left(\bigcap_1^n B_{m_k i_k}\right) \\
&= \bigcap_1^n g^{-1}(B_{m_k i_k}) \\
&= \bigcap_1^n \{(x_i)_{i\in I} \mid g((x_i)) \in B_{m_k i_k}\} \\
&= \bigcap_1^n \{(x_i)_{i\in I} \mid x_{i_k} = m_k\} \\
&= \prod_{i\in I} O_i ,
\end{aligned}
$$

en donde $O_{i_k} = \{m_k\}$ para todo $k \leq n$ y $O_j = A$ para $j \neq i_k$ y todo $k \leq n$, el cual es un elemento de la base de X.

De manera similar g^{-1} es también continua.

Luego g e s una biyección bicontinua con lo cual E_I es también compacto.

Si $O \in \beta$, $O = \bigcap_{k=1}^{n} B_{m_k i_k}$ entonces

$$
O^c = \bigcup_{k=1}^{n} B^c_{m_k i_k} = \bigcup_1^n B_{\tilde{n}_k i_k} , \quad \text{con } \tilde{n}_k = 0 \text{ si } m_k = 1
$$

y $\tilde{n}_k = 1$ si $m_k = 0$ de donde O^c es un abierto, lo cual implica que O es un clopen. Por tanto, cada abierto de E será igual a la unión de los clopens contenidos en él. Así EI es un espacio totalmente discontinuo.

El espacio de Boole E_I es llamado "Espacio de Cantor".

1.1.3. PROPOSICION

Sean X un espacio compacto de Hausdorff, A un campo de subconjuntos clopen de X tal que para todo par x, y de puntos distintos de X, existe P en A con $x \in P$ y $y \in P^c$. Entonces

i) X es un espacio de Boole.

ii) A = C L(X).

NOTA

A es campo de subconjuntos de X, significa que A es estable para uniones finitas, intersecciones finitas y complementos.

PRUEBA

i) a) Si F es un cerrado de X y $x \in F^c$, entonces existe $B \in A$, tal que $F \subset B$ y $x \notin B$.

Para cada $z \in F$, existe $A_z \in A$ tal que $z \in A_z$ y $x \notin A_z$; por ser cerrado, F es compacto; como $F \subset \bigcup_{z \in F} A_z$ y cada A_z es un abierto, existen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en F tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{z_i}$.

El clopen $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_{z_i}$ satisface la condición pedida.

b) Si O es un abierto de X y $x \in O$, entonces existe $B \in A$ tal que $x \in B$ y $B \subset O$.

Como O^c es un cerrado, por parte a) existe $D \in A$ tal que $x \in D^c$ y $O^c \subset D$. El clopen D^c es el elemento buscado.

c) X es totalmente discontinuo.

Sea O un abierto; por b), para cada $x \in O$, existe $B_x \in A$ tal que $x \in B_x$ y $B_x \subset O$, de donde $O \subset \bigcup_{x \in O} B_x$; de aquí se implica fácilmente que O es la unión de los clopens que él contiene.

ii) $CL(X) = A$.

Sea $B \in CL(X)$; por ser abierto $B = \bigcup A_i$. $A_i \in A$ y $A_i \subset B$; por ser cerrado, $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ con $A_i \in A$; por ser A estable, para uniones finitas se tiene que $B \in A$. Por tanto $CL(X) = A$.

1.1.4. PROPOSICION

Si un campo A de subconjuntos clopen de un espacio de Hausdorff compacto X, es una base, entonces X es un espacio de Boole y $A = CL(X)$.

PRUEBA

i) X es totalmente discontinuo.

Sea O un abierto de A, entonces por ser A una base $O = \cup A_i$, $A_i \in A$, $A_i \subset O$. Como cada A_i es un clopen contenido en A, entonces $O = \bigcup_{\substack{B_i \in CL(X) \\ B_i \subset O}} B_i$, luego X es totalmente discontinuo.

ii) $CL(X) = A$.

Bastará probar que $CL(X) \subset A$.

Sea $B \in CL(X)$; por ser B un abierto, $B = \cup A_i$ con $A_i \in A$ y $A_i \subset B$; por ser B cerrado $B = \bigcup_1^n A_i$ con $A_i \in A$ y $A_i \subset B$. Luego $B \in A$ por ser A estable para uniones finitas, de donde $CL(X) = A$.

1.1.5. PROPOSICION

Todo subconjunto cerrado Y de un espacio Booleano X es un espacio Booleano con respecto a la topología inducida de X. Todo conjunto clopen en Y es la intersección de Y con algún subconjunto clopen de X.

PRUEBA

1º) Y es espacio de Boole con respecto a la topología inducida de X.

i) Y es compacto, ya que es un cerrado en el compacto X.

ii) Y es totalmente discontinuo.

Dado O un abierto de Y, este puede escribirse como $O = Y \cap U$, con U un abierto en X. Por ser U abierto $U = \cup A_i$, $A_i \in CL(X)$ y $A_i \subset U$; luego

$O = Y \cap (\cup A_i) = \cup (Y \cap A_i)$ con

$Y \cap A_i \in CL(Y)$ y $Y \cap A_i \subset O$, por lo que Y es totalmente discontinuo.

2º) Sea $Q \in CL(Y)$; por ser un abierto en Y, existe U abierto en X tal que $Q = Y \cap U$; como $U = \cup K$; $K \in CL(X)$, $K \subset U$. $Q = \bigcup_{\substack{k \in CL(X) \\ k \subset U}} (Y \cap K)$; por ser Q un cerrado en Y, Q es un compacto de Y y existe una familia finita $(K_i)_{i \leq n}$, $K_i \in CL(X)$, $K_i \subset U$ tal que $Q = \bigcup_{i=1}^{n} (Y \cap K_i)$.

El clopen $P = \bigcup_{1}^{n} K_i$ es tal que $Q \subset P \subset U$ y como $Y \cap U = Q$ se deduce que $Q = Y \cap P$.

1.1.6. PROPOSICION

Sean X un espacio de Boole, $\{P_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos de CL(X) y consideremos CL(X) ordenado por inclusión, $U = \cup_i P_i$. Entonces:

i) $\{P_i\}_{i \in I}$ posee supremo en CL(X) $\leftrightarrow \overline{U}$ es abierto.

ii) Si $\overline{U}$ es abierto entonces $\text{Sup}\{P_i\}_{i \in I} = \overline{U}$.

PRUEBA

i) a) Si $\{P_i\}_{i\in I}$ posee supremo entonces $\overline{U}$ es abierto.

Sea $P = \text{Sup}\,\{P_i\}$; por ser P cerrado, $\overline{U} \subset P$.

Por ser P abierto, $P \cap \overline{U}^c$ es abierto.

Si $P \cap \overline{U}^c \neq \Phi$, existiría $Q \neq \Phi$, Q clopen,

$Q \subset P \cap \overline{U}^c$; luego $\overline{U} \subset Q^c$ y como $\overline{U} \subset P$ entonces $\overline{U} \subset Q^c \cap P$ y $Q^c \cap P \subsetneq P$ ya que $Q \subset P$.

Además $P_i \subset Q^c \cap P \subsetneq P$ para todo i, lo cual contradice la definición de P. Por tanto

$P \cap \overline{U}^c = \Phi$, lo que implica que $P = \overline{U}$; así $\overline{U}$ es abierto.

b) Si $\overline{U}$ es abierto, $\overline{U}$ es clopen tal que $P_i \subset \overline{U}$ para todo i. Sea P un clopen con $P_i \subset P$ para todo i; de aquí $U \subset P$ y $\overline{U} \subset P$ por ser P cerrado. Luego $\overline{U} = \text{Sup}\,\{P_i\}_{i\in I}$.

ii) Si $\overline{U}$ es abierto, entonces $\text{Sup}\,\{P_i\}_{i\in I} = \overline{U}$. Probado en b).

1.1.7. PROPOSICION

Sea X un espacio de Boole,

$(A_i)_{i\in I}$ una familia de clopen de X;

$P = \text{Sup}\,\{A_i\}_{i\in I}$ (en CL(X));

$U = \bigcup_{i\in I} A_i$;

Entonces $P - U$ es raro.

PRUEBA

Si $P = \text{Sup}\,\{A_i\}_{i\in I}$, entonces $P = \overline{U}$. Por tanto $P - U = \overline{U} - U = Fr(U)$ y por (II.3.13) $Fr(U)$ es raro.

1.1.8. PROPOSICION

Si $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios de Boole, entonces existen para cada $j \in I$, funciones continuas m_j y p_j como en el diagrama siguiente:

$$E_j \xrightarrow{m_j} \Pi\, E_i \xrightarrow{p_j} E_j$$

tales que $p_j \circ m_j = 1_{E_j}$.

PRUEBA

1º) Definición de p_j .

$p_j : (x_i)_{i\in I} \rightsquigarrow x_j$, que es trivialmente continua.

2º) Definición de m_j .

Para cada $i \neq j$ tomemos de E_i un punto e_i cualquiera y definamos m_j así:

$m_j : x \rightsquigarrow (x_i)_{i\in I}$, en donde $x_i = e_i$, si $i \neq j$ y $x_j = x$.

La función m_j es continua, ya que si O es un abierto de ΠE_i entonces

$$m_j^{-1}(0) = \begin{cases} P_i(0) & \text{, si para cada } i \neq j\text{: } e_i \in P_i(0) \\ \\ \phi & \text{, si para algún } i \neq j\text{: } e_i \notin P_i(0) \end{cases}$$

3º) $P_j \circ m_j = 1_{E_j}$.

Si $x \in E_j$: $(P_j \circ m_j)(x) = P_j(m_j(x))$

$$= P_j((x_i)_{i \in I})$$

$$= x_j$$

$$= x .$$

1.1.9. PROPOSICION

Si $(X_i)_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos totalmente discontinuos entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es totalmente discontinuo.

PRUEBA

Sean $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ y $B \subset \Pi X_i$ un subconjunto conexo tal que $x \in B$. Para cada $j \in I$, $P_j(B)$ es un conexo de X_j (porque P_j es continua), y como $x_j \in P_j(B)$, $P_j(B) = \{X_j\}$ (por ser x_j totalmente discontinuo). Por tanto $B = \{x\}$. Luego ΠX_i es totalmente discontinuo.

1.1.10 PROPOSICION

Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios de Boole, entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es un espacio de Boole.

PRUEBA

Por (II.9.4) y (1.1.9), $\prod_{i\in I} X_i$ es compacto y totalmente discontinuo. Luego es un espacio de Boole.

1.2 ESPACIO DE BOOLE INYECTIVO

1.2.1 DEFINICION

Un espacio de Boole E es llamado "inyectivo" si dados dos espacios de Poole G, H y dos funciones continuas f, g como en el diagrama.

$$\begin{tikzcd} E & & G \\ & H \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

existe una función continua $\bar{f}: G \to E$ tal que $\bar{f} \circ f = g$.

NOTA

$\underset{f}{\rightarrowtail}$ denotará una inyección.

$\underset{f}{\twoheadrightarrow}$ denotará una suryección.

1.2.2 PROPOSICION

Sean $(E_i)_{i\in I}$ una familia de espacios de Boole, P el espacio producto. Entonces las dos condiciones que siguen son equivalentes:

a) P es inyectivo.

b) Cada E_i es inyectivo.

PRUEBA

a) $\Longrightarrow$ b)

Sea $j \in I$ y consideremos el diagrama de espacios de Boole.

$$\begin{tikzcd}
E_j & & G \\
& H \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Encontraremos $\bar{f} : G \to E_j$ tal que $\bar{f} \circ f = g$.

Por propiedades de P tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, shift left, "P_j"] & \\
E_j \arrow[ur, shift left, "m_j"] & & G \arrow[ul, "r"'] \\
& H \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

en donde $P_j \circ m_j = 1_{E_j}$

$m_j \circ g = r \circ f$ (r existe porque P es inyectivo).

tomando $\bar{f} = P_j \circ r$, la cual es continua ya que P_j y r son continuas,

se tiene: $\bar{f} \circ f = P_j \circ (r \circ f)$

$$
\begin{aligned}
P_j \circ (r \circ f) &= P_j \circ (m_j \circ g) \\
&= (P_j \circ m_j) \circ g \\
&= 1_{E_j} \circ g \\
&= g.
\end{aligned}
$$

Por tanto E_j es inyectivo.

b) $\Longrightarrow$ a)

Sea el diagrama de espacios de Boole, donde g, f son continuas

$$
\begin{tikzcd}
P & & G \\
& H \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

Encontraremos $\overline{f} : G \to P$ tal que $\overline{f} \circ f = g$.

Para cada $j \in I$, por ser E_j inyectivo se tiene el diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
E_j & & G \arrow[ll, "t_j"'] \\
& H \arrow[ul, "g_j"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

en donde $g_j = P_j \circ g$.

Definimos $\overline{f} : G \to P$
$x \rightsquigarrow (t_j(x))_{j \in I}$

$$\text{Si } x \in H: (\overline{f} \circ f)(x) = \overline{f}(f(x)) = (t_j(f(x)))_{j \in I}$$

$$= (g_j(x))_{j \in I}$$

$$= ((P_j \circ g)(x))_{j \in I}$$

$$= (P_j(g(x)))_{j \in I}$$

$$= g(x)$$

Luego $\overline{f} \circ f = g$.

CAPITULO II

CATEGORIA DE LAS ALGEBRAS DE BOOLE

2.1. ANILLOS DE BOOLE

2.1.1. DEFINICION

Sea $(A, +, .)$ un anillo, diremos que A es anillo de Boole si A es unitario y si $x . x = x$ para todo x en A.

2.1.2. EJEMPLOS DE ANILLOS DE BOOLE

E1 $\frac{Z}{2Z} = \{m + 2Z \mid m \in Z\} = \{0, 1\}$

donde

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0 & 0 . 0 = 0 \\ 1 + 1 = 0 & 1 . 1 = 1 \\ 1 + 0 = 1 & 0 . 1 = 0 \\ 0 + 1 = 1 & 1 . 0 = 0 \end{array}$$

E2 $F(X, \frac{Z}{2Z})$ con X un conjunto diferente de vacío, donde $0(x) = 0$ y $1(x) = 1$ para todo x en X y para $f_1, f_2 \in F(X, \frac{Z}{2Z})$ se tiene

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(f_1 . f_2)(x) = f_1(x) . f_2(x) .$$

E3 $B = \{p \in A \mid p^2 = p\}$ donde A es un anillo unitario, conmutativo y $p \Delta q = p + q - 2pq$; se tiene que $(B, \Delta, .)$ es un anillo de Boole.

2.1.3. PROPOSICION

Sea A un anillo de Boole y $p, q \in A$, entonces:

i) $p + p = 0$

ii) $p . q = q . p$.

PRUEBA

i) $$p + q = (p + q)^2 = (p + q)(p + q)$$
$$= p^2 + qp + pq + q^2$$
$$= p + qp + pq + q .$$

Luego por Ley Cancelativa $qp + pq = 0$

haciendo $q = p$ tenemos $p + p = 0$.

ii) Se tiene que $qp + pq = 0$ y como $pq = -pq$ entonces $qp = pq$.

2.1.4. PROPOSICION

Sean A un anillo de Boole, I e A un ideal propio. Entonces el anillo cociente $\frac{A}{I}$ es un anillo de Boole.

PRUEBA

i) " $\frac{A}{I}$ es anillo unitario".

Sea 1 la unidad de A y $x \in A$, entonces

$$(x + I)(1 + I) = x . 1 + I = x + I.$$

ii) " $\frac{A}{I}$ cumple la propiedad $p . p = p$ ".

$$(x + I)(x + I) = x . x + I = x + I.$$

MORFISMOS ENTRE ANILLOS DE BOOLE

2.1.5 DEFINICION

Sean $(A, +, .)$ y $(B, \Delta, *)$ anillos de Boole y f una función de A a B, diremos que f es un morfismo si:

i) $f(x + y) = f(x) \Delta f(y)$ para todo $x, y \in A$.

ii) $f(x . y) = f(x) * f(y)$ para todo $x, y \in A$.

2.1.6 EJEMPLO

Sean A un anillo de Boole, I un ideal propio, luego

$$f : A \rightarrow \frac{A}{I} \qquad x \rightsquigarrow x + I$$

es un morfismo.

Se observa que el núcleo de este morfismo es I, es decir $\operatorname{Ker} f = I$.

NOTA

Considerando como objetos a los anillos de Boole y como morfismos los morfismos entre anillos de Boole, disponemos de una categoría, llamada Categoría de Anillos de Boole y denotada A_{nB} .

ANILLOS DE BOOLE SIN UNIDAD

2.1.7 DEFINICION

Sea $(A,+,.)$ un anillo no unitario, diremos que A es un anillo de Boole sin unidad si $x . x = x$ para todo x en A.

2.1.8 PROPOSICION

Todo anillo de Boole sin unidad puede ser incluido en un anillo de Boole.

PRUEBA

Sea $(A, +, .)$ un anillo de Boole sin unidad. Nuestro objetivo será formar un anillo de Boole B y establecer un isomorfismo entre A y un subanillo de B; de esta manera, A quedará incluido en un anillo de Boole. Formemos el anillo $\frac{Z}{2Z}$ y construyamos el conjunto $B = \frac{Z}{2Z} \times A = \{(\bar{m}, x) \mid \bar{m} \in \frac{Z}{2Z} \text{ y } x \in A\}$, demos a B estructura de anillo con las operaciones

$$(\bar{m}, x) + (\bar{n}, y) = (\bar{m} + \bar{n}, x + y)$$

$$(\bar{m}, x) . (\bar{n}, y) = (\bar{m} . \bar{n}, my + nx + xy).$$

Probemos que el producto está bien definido:

"$((\bar{m},x),(\bar{n},y)) = ((\bar{m}',x'), (\bar{n}',y'))$

$\Longrightarrow (\bar{m} . \bar{n}, my + nx + xy) =$

$(\bar{m}'\bar{n}', m'y' + n'x' + x'y')$ ".

$((\bar{m}, x), (\bar{n}, y)) = ((\bar{m}', x'), (\bar{n}', y'))$ si y solo si

$$(\bar{m}, x) = (\bar{m}', x') \quad y \quad (\bar{n}, y) = (\bar{n}', y')$$

si y solo si

$$\bar{m} = \bar{m}' \quad , \quad x = x'$$

$$\bar{n} = \bar{n}' \quad y \quad y = y'$$

de aquí

$$\bar{m}\,\bar{n} = \bar{m}'\,\bar{n}' \quad y \quad xy = x'y' \;;$$

además

$$\bar{m} = \bar{m}' \implies m - m' \in 2Z \implies (m-m')y = 0$$

(porque $y + y = 0$).

$$\bar{n} = \bar{n}' \implies n - n' \in 2Z \implies (n-n')x = 0$$

(porque $x + x = 0$)

de aquí

$$my = m'y$$

$$nx = n'x \,.$$

Luego: $(\bar{m} \cdot \bar{n}, my + nx + xy) = (\bar{m}' \cdot \bar{n}', m'y' + n'x' + x'y')$.

Se puede probar que $(B, +, .)$ es un anillo.

Probaremos que $(B, +, .)$ es un anillo unitario, considerando como elemento unitario de $(B, .)$ al elemento $(\bar{1}, 0)$ ya que si $x \in A$ y $m \in Z$, entonces

$$(\bar{m}\ ,\ x)\ .\ (\bar{1}\ ,\ 0) = (\bar{m}\ .\ \bar{1}\ ,\ m.0 + 1.x + x.0)$$
$$= (\bar{m}\ .\ \bar{1}\ ,\ x)$$
$$= (\bar{m}\ ,\ x).$$

Los elementos de B cumplen la propiedad:

$$"(\bar{m},\ x).(\bar{m},\ x) = (\bar{m},\ x)".$$

$$(\bar{m}\ ,\ x).(\bar{m},\ x) = (\bar{m}^2\ ,mx + mx + x^2) = (\bar{m}\ ,0 + x) = (\bar{m}\ ,x)$$

por lo tanto B es un anillo de Boole.

Definamos $D \subset B$ de la siguiente forma:

$$D = \{(\bar{0}\ ,\ x)\ |\ x \in A\}$$

y probemos que D es un subanillo de B.

Para ello bastará probar que D es subgrupo de B y que cumple la Ley de Cierre para la operación " . " . Así:

i) Sean $(\bar{0}, x)$ y $(\bar{0}, y)$ en D, entonces $(\bar{0}, x) - (\bar{0}, y) = (\bar{0}, x - y)$; como $x, y \in A$ y A es anillo entonces $(x - y) \in A$, luego $(\bar{0}\ , x) - (\bar{0}\ , y) \in D$. Por lo tanto D es un subgrupo de B.

ii) $(\bar{0}\ , x)\ .\ (\bar{0}\ , y) = (\bar{0}\ , xy)$ implica que $(\bar{0}, x)\ .\ (\bar{0}, y) \in D$, ya que $x\ y \in A$.
Luego D es subanillo de B.

Construyamos $\psi : A \to D$ y probemos que ψ
$x \rightsquigarrow (\overline{0}\, , x)$

es isomorfismo.

a) "ψ es morfismo".

Si x, y son elementos de A, entonces:

1) $\psi(x + y) = (\overline{0}\, , x + y)$

$= (\overline{0} + \overline{0}\, , x + y)$

$= (\overline{0}\, , x) + (\overline{0}\, , y)$

$= \psi(x) + \psi(y)$.

2) $\psi(x \, . \, y) = (\overline{0}\, , xy)$

$= (\overline{0}\, , x)\, (\overline{0}\, , y)$

$= \psi(x) \, . \, \psi(y)$.

b) "ψ es biyectiva".

1) "ψ es inyectiva".

Si x, y son elementos de A, entonces:

$\psi(x) = \psi(y) \Longrightarrow (\overline{0}\, , x) = (\overline{0}\, , y) \Longrightarrow x = y$.

2) "ψ es suryectiva".

Si $(\overline{0}\, , x) \in D$, entonces $\psi(x) = (\overline{0}\, , x)$.

2.2. ALGEBRAS DE BOOLE

2.2.1. DEFINICION

Llamaremos Algebra Booleana a la estructura formada por un conjunto $A \neq \emptyset$ y tres funciones:

$$\vee : A \times A \to A : (x, y) \rightsquigarrow x \vee y$$

$$\wedge : A \times A \to A : (x, y) \rightsquigarrow x \wedge y$$

$$' : \quad A \to A : \quad x \rightsquigarrow x'$$

que cumple con los siguientes axiomas:

Sean $x, y, z \in A$.

i) Leyes conmutativas para "$\wedge$" y "$\vee$"

$$x \wedge y = y \wedge x$$

$$x \vee y = y \vee x .$$

ii) Leyes distributivas

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) .$$

iii) Leyes de absorción

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

iv) $$(x \vee x') \wedge y = y$$

$$(x \wedge x') \vee y = y$$

<u>NOTA</u>

Denotaremos "1" al elemento $x \vee x'$, en donde "x" es un elemento cualquiera de A. Denotaremos "0" al elemento $x \wedge x'$, en donde "x" es un elemento cualesquiera de A. (En 2.2.3-2 se probará que están bien definidos).

2.2.2. EJEMPLOS

E1 Sea $X \neq \phi$; $(P(X), \cap, \cup, C)$ es un Algebra de Boole.

E2 Si X es un espacio topológico, el conjunto

$R(X) = \{M \subset X \mid \overset{\circ}{\overline{M}} = M\}$ es un Algebra de Boole con las operaciones

$$M \wedge P = M \cap P$$

$$M \vee P = (M \cup P)^{\overset{\circ}{-}}$$

$$M' = \overline{M}^{c} \text{ .}$$

<u>Prueba</u>

Probemos inicialmente que "$P \wedge P' = \phi$" , "$P \vee P'' = X$" para todo $P \in R(X)$.

a) $P \wedge P' = P \cap \overline{P}^{c} = \phi$.

b) $P \vee P' = (P \cup \overline{P}^{c})^{\overset{\circ}{-}}$

$$= (\overline{P^{c}}^{\,c} \cup \overline{P}^{c})^{\overset{\circ}{-}}$$

$$= (\overline{P^{c}} \cap \overline{P})^{c\,\overset{\circ}{-}}$$

$$= [Fr(P)]^{c\,\overset{\circ}{-}}$$

$$= [Fr(P)]^{\circ c \circ} = \phi^{\overset{\circ}{c}} = \overset{\circ}{X} = X \text{ .}$$

Probemos ahora que los axiomas del Algebra de Boole se satisfacen:

i) CONMUTATIVA

$$P \wedge Q = Q \wedge P$$

$$P \vee Q = Q \vee P$$

se cumplen ya que la unión y la intersección son operaciones conmutativas.

ii) DISTRIBUTIVAS

a) "$M \wedge (P \vee Q) = (M \wedge P) \vee (M \wedge Q)$"

$$M \wedge (P \vee Q) = (M \cap (P \cup Q)^{\underline{a}})$$

$$= \overset{\underline{a}}{M} \cap (P \cup Q)^{\underline{a}}$$

$$= (M \cap (P \cup Q))^{\underline{a}} \qquad (II.3.12)$$

$$= [(M \cap P) \cup (M \cap Q)]^{\underline{a}}$$

$$= (M \wedge P) \vee (M \wedge Q) \; .$$

b) "$M \vee (P \wedge Q) = (M \vee P) \wedge (M \vee Q)$"

$$M \vee (P \wedge Q) = [M \cup (P \cap Q)]^{\underline{a}}$$

$$= [(M \cup P) \cap (M \cup Q)]^{\underline{a}}$$

$$= (M \cup P)^{\underline{a}} \cap (M \cup Q)^{\underline{a}}$$

$$= (M \vee P) \wedge (M \vee Q).$$

iii) LEYES DE ABSORCION

"$M \wedge (M \vee P) = M$"

"$M \vee (M \wedge P) = M$" .

$$M \wedge (M \vee P) = M \cap (M \cup P)^{\overset{\circ}{-}}$$

$$= \overset{\circ}{\overline{M}} \cap (M \cup P)^{\overset{\circ}{-}}$$

$$= (M \cap (M \cup P))^{\overset{\circ}{-}}$$

$$= \overset{\circ}{\overline{M}} = M$$

$$M \vee (M \wedge P) = (M \cup (M \cap P))^{\overset{\circ}{-}}$$

$$= \overset{\circ}{\overline{M}}$$

$$= M.$$

iv) $(M \wedge M') \vee P = P$

$(M \vee M') \wedge P = P$

$(M \wedge M') \vee P = \Phi \vee P$ (ya que $M \wedge M' = \Phi$)

$$= (\Phi \cup P)^{\overset{\circ}{-}} = \overset{\circ}{\overline{P}} = P .$$

$(M \vee M') \wedge P = X \wedge P$ (ya que $(M \vee M') = X$)

$$= X \cap P = P .$$

Luego $R(X)$ es un Algebra de Boole.

2.2.3. PROPIEDADES

Toda Algebra de Boole A, satisface las siguientes propiedades.

Sean p, q, r elementos de A.

1º) Principio de Dualidad.

El principio de Dualidad en un Algebra de Boole nos dice que toda proposición cierta, con las operaciones $\wedge$, $\vee$, se transforma en una proposición cierta si se intercambian de lugar los signos "$\wedge$" y "$\vee$". Verifiquemos que en realidad ésto se cumple; se puede observar fácilmente que al intercambiar estos signos, los axiomas de definición en realidad permanecen iguales ya que en cada axioma la primera identidad se transforma en la segunda y viceversa.

2º) $p \vee p' = q \vee q'$ y $p \wedge p' = q \wedge q'$

$p \wedge p' = (p \wedge p') \vee (q \wedge q') = q \wedge q'$ (por axioma iv).

Por dualidad $p \vee p' = q \vee q'$.

3º) Si $t \in A$ es tal que $p \vee t = 1$ y $p \wedge t = 0$, entonces $p' = t$

$$\begin{aligned} p' = p' \vee (p \wedge p') &= p' \vee 0 \\ &= p' \vee (p \wedge t) \\ &= (p' \vee p) \wedge (p' \vee t) \\ &= 1 \wedge (p' \vee t) \\ &= (p \vee t) \wedge (p' \vee t) \\ &= (p \wedge p') \vee t \\ &= t \text{ (por axioma iv).} \end{aligned}$$

Luego $p' = t$.

4º) i) $p \wedge 1 = p$; $p \vee 0 = p$.

$p \wedge 1 = p$ ya que $p \vee p' = 1$ y $p \wedge (p \vee p') = p$ (por axioma iv)

$p \vee 0 = p$ porque $p \wedge p' = 0$ (por axioma iv)

$p \vee (p \wedge p') = p$.

ii) Si $a \wedge p = a$, $a \vee q = a$, para todo a en A, entonces $p = 1$ y $q = 0$.

$p = p \wedge 1 = 1$; $q = q \vee 0 = 0$.

5º) $a \wedge 0 = 0$, $a \vee 1 = 1$ para todo a en A.

i) $(a \wedge 0) \vee 0 = a \wedge 0$ (por 4-i)).

$(a \wedge 0) \vee 0 = 0$ (por Ley de Absorción)

Luego $a \wedge 0 = 0$.

ii) $(a \vee 1) \wedge 1 = a \vee 1$

$(a \vee 1) \wedge 1 = 1$

Luego $a \vee 1 = 1$.

6º) $0' = 1$ y $1' = 0$.

$1 \vee 0 = 1$, $1 \wedge 0 = 0$ (por 4-i)).

Luego $0' = 1$, $1' = 0$ (por 3)).

7º) $p'' = p$.

Tenemos que $p \vee p' = 1$, $p \wedge p' = 0$ por definición.

Luego por (3) $p = p''$.

8º) $p \wedge p = p, \quad p \vee p = p.$

$$\begin{aligned} p &= p \vee 0 \qquad \text{(por 4-i))} \\ &= p \vee (p \wedge p') \\ &= (p \vee p) \wedge (p \vee p') \\ &= (p \vee p) \wedge 1 \\ &= p \vee p. \end{aligned}$$

Por dualidad se tiene que $p \wedge p = p$.

9º) $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r, \quad p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r.$

Lo probaremos para "V".

$$\begin{aligned} p \vee (q \vee r) &= (p \vee (q \vee r)) \wedge (p \vee p') \\ &= ((p \vee (q \vee r)) \wedge p) \vee ((p \vee (q \vee r)) \wedge p') \end{aligned}$$

Pero $\quad p \wedge (p \vee (q \vee r)) = p \wedge ((p \vee q) \vee r)$

y $\quad p' \wedge (p \vee (q \vee r)) = p' \wedge ((p \vee q) \vee r)$

(se probará al final).

Por lo tanto

$$\begin{aligned} p \vee (q \vee r) &= (((p \vee q) \vee r) \wedge p) \vee (((p \vee q) \vee r) \wedge p') \\ &= ((p \vee q) \vee r) \wedge (p \vee p') \\ &= (p \vee q) \vee r. \end{aligned}$$

Probemos ahora que

i) $p \wedge (p \vee (q \vee r)) = p \wedge ((p \vee q) \vee r).$

$p \wedge (p \vee (q \vee r)) = p \quad$ (Por absorción)

Además

$$p \wedge ((p \vee q) \vee r) = (p \wedge (p \vee q)) \vee (p \wedge r)$$
$$= p \vee (p \wedge r)$$
$$= p.$$

ii) $p' \wedge (p \vee (q \vee r)) = p' \wedge ((p \vee q) \vee r)$

$$p' \wedge (p \vee (q \vee r)) = (p' \wedge p) \vee (p' \wedge (q \vee r))$$
$$= 0 \vee (p' \wedge (q \vee r))$$
$$= p' \wedge (q \vee r)$$

$$p' \wedge ((p \vee q) \vee r) = (p' \wedge (p \vee q)) \vee (p' \wedge r)$$
$$= (p' \wedge p) \vee (p' \wedge q) \vee (p' \wedge r)$$
$$= (p' \wedge q) \vee (p' \wedge r)$$
$$= p' \wedge (q \vee r).$$

10º) $p \vee q = q \iff p \wedge q = p$

i) $p \vee q = q \implies p \wedge q = p$

$$p \vee q = q \implies p \wedge (p \vee q) = p \wedge q$$
$$\implies p = p \wedge q.$$

ii) $p \wedge q = p \implies p \vee q = q$

$$p \wedge q = p \implies (p \wedge q) \vee q = p \vee q$$
$$\implies q = p \vee q.$$

11º) $(p \wedge q)' = p' \vee q'$; $(p \vee q)' = p' \wedge q'$.

i) $(p \wedge q)' = p' \vee q'$.

Por (3) bastará probar que

$(p \wedge q) \wedge (p' \vee q') = 0$ y $(p \wedge q) \vee (p' \vee q') = 1$.

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \wedge (p' \vee q') &= ((p' \vee q') \wedge p) \wedge q \\
&= ((p' \wedge p) \vee (q' \wedge p)) \wedge q \\
&= (0 \vee (q' \wedge p)) \wedge q \\
&= (q' \wedge q) \wedge p \\
&= 0 \wedge p \\
&= 0 \qquad \text{(por (5)).}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \vee (p' \vee q') &= ((p \wedge q) \vee p') \vee q' \\
&= ((p \vee p') \wedge (p' \vee q)) \vee q' \\
&= (1 \wedge (p' \vee q)) \vee q' \\
&= (p' \vee q) \vee q' \\
&= p' \vee (q \vee q') \\
&= p' \vee 1 \\
&= 1 \qquad \text{(por (5)).}
\end{aligned}
$$

ii) $(p \vee q)' = p' \wedge q'$

Por dualidad.

2.3 RELACION DE ORDEN EN UN ALGEBRA DE BOOLE

2.3.1 PROPOSICION

En un Algebra de Boole A, la relación binaria $p \leq q$

si y solo si $p \vee q = q$ (o equivalentemente $p \wedge q = p$ por 2.2.3-10) es una relación de orden parcial (ésto es que cumple las leyes Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva).

PRUEBA

i) La relación es reflexiva.

Si $a \in A$: $a \leq a$; ya que $a \wedge a = a$ (por axioma i).

ii) La relación es antisimétrica.

Se probará que la relación siguiente es verdadera.

$p \leq q$ y $q \leq p \implies p = q$.

Si $p \leq q$ entonces $p \wedge q = p$;

si $q \leq p$ entonces $p \wedge q = q$

como $p \wedge q = p$ y $p \wedge q = q$ se tiene que $p = q$.

iii) La relación es transitiva .

Probemos que:

$p \leq q \wedge q \leq r \implies p \leq r$.

Si $p \leq q$ entonces $p \wedge q = p$;

si $q \leq r$ entonces $q \wedge r = q$

como $p \wedge q = p$ y $q = q \wedge r$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
p &= p \wedge q = p \wedge (q \wedge r) \\
&= (p \wedge q) \wedge r = p \wedge r
\end{aligned}
$$

de donde $p \leq r$.

2.3.2. PROPIEDADES

Sea A un Algebra de Boole y p, q, r, s elementos de A. Se cumplen las siguientes propiedades:

1º) $0 \leq p$ y $p \leq 1$

$0 \leq p$ ya que $0 \wedge p = 0$

$p \leq 1$ ya que $p \wedge 1 = p$.

2º) Si $p \leq q$ y $r \leq s$ entonces

i) $p \wedge r \leq q \wedge s$

ii) $p \vee r \leq q \vee s$

i) Si $p \leq q$ entonces $p \wedge q = p$

si $r \leq s$ entonces $r \wedge s = r$

por tanto $p \wedge r = (p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$

$= (p \wedge r) \wedge (q \wedge s)$.

Luego $p \wedge r \leq q \wedge s$.

ii) Se sigue de igual manera.

3º) Si $p \leq q$ entonces $q' \leq p'$

$p \leq q \Longrightarrow p \wedge q = p$

$\Longrightarrow (p \wedge q)' = p'$

$\Longrightarrow p' \vee q' = p'$

$\Longrightarrow q' \leq p'$.

4º) $p \leq q \Longleftrightarrow p' \vee q = 1$.

i) $p \leq q \implies p \vee q = q$

$\implies p' \vee (p \vee q) = p' \vee q$

$\implies (p' \vee p) \vee q = p' \vee q$

$\implies 1 \vee q = p' \vee q$

$\implies 1 = p' \vee q.$

ii) $p' \vee q = 1 \implies (p' \vee q) \wedge p = 1 \wedge p$

$\implies (p' \wedge p) \vee (q \wedge p) = p$

$\implies 0 \vee (q \wedge p) = p$

$\implies q \wedge p = p$

$\implies p \leq q.$

5º) i) $p \wedge q = \text{Inf.}\ \{p, q\}$

ii) $p \vee q = \text{Sup.}\ \{p, q\}$.

Prueba

i) $p \wedge q \leq q$ y $p \wedge q \leq p$ ya que $(p \wedge q) \vee p = p$ y $(p \wedge q) \vee q = q$ (por absorción). Luego $p \wedge q$ es cota inferior de $\{p, q\}$. Si $r \in A$ es tal que $r \leq p$ y $r \leq q$ entonces $r \wedge r \leq p \wedge q$ de donde $r \leq p \wedge q$. Luego $p \wedge q$ es la mayor de las cotas inferiores.

ii) Se prueba de manera similar.

NOTA

1º) Por la propiedad anterior, toda Algebra de Boole es un conjunto parcialmente ordenado.

2º) Si $\{p_i\}$ es una familia de elementos de A, entonces denotaremos al supremo de los $\{p_i\}$ por $\bigvee_i p_i$ y al ínfimo por $\bigwedge_i p_i$.

3º) Si A es un Algebra de Boole y $\{x_i\}$ una sucesión de elementos de A, diremos que $\{x_i\}$ es una sucesión disjunta si $x_i \wedge x_j = 0$ para $i \neq j$.

2.3.3. PROPOSICION

Sea $\{y_i\}$ una sucesión de elementos de un Algebra de Boole A que posee supremo, entonces existe una sucesión disjunta $\{x_i\}$ de A tal que:

$$x_i \leq y_i$$

$\{x_i\}$ posee supremo

$$\bigvee_i x_i = \bigvee_i y_i$$

PRUEBA

Definamos $\{x_i\}$ así:

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_2 \wedge y_1'$$

$$\vdots$$

$$x_i = y_i \wedge \Big(\bigvee_{1 \leq j < i} y_j \Big)' .$$

"$\{x_i\}$ es una sucesión disjunta".

Sean x_i , $x_k \in \{x_i\}$ con $i < k$.

$$x_i \wedge x_k = (y_i \wedge (\bigwedge_{1 \le j < i} y_j')) \wedge (y_k \wedge (\bigwedge_{1 \le r < k} y_r') \quad ;$$

para algún r tal que $1 \le r < k$ se tiene que $y_r' = y_i'$ (ya que $i < k$). Luego

$$x_i \wedge x_k = (y_i \wedge (\bigwedge_{1 \le r < k} y_r')) \wedge (y_k \wedge (\bigwedge_{1 \le j < i} y_j'))$$

$$= 0 \wedge (y_k \wedge (\bigwedge_{1 \le j < i} y_j'))$$

$$= 0 .$$

"$x_i \le y$ con $y = \bigvee_i y_i$ ".

$$x_i = y_i \wedge (\bigvee_{1 \le j < i} y_j)' \le y_i \le y \quad \text{para todo } i$$

"y es la menor cota superior".

Probemos que $y_j \le (x_1 \vee x_2 \ldots\ldots \vee x_j)$ para todo j.

Por inducción: para $j = 1$ tenemos que

$$x_1 = y_1 \Longrightarrow y_1 \le x_1$$

Si $j = 2$, $\quad x_1 \vee x_2 = y_1 \vee (y_2 \wedge y_1')$

$$= (y_1 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee y_1')$$

$$= y_1 \vee y_2$$

Luego $y_2 \leq x_1 \vee x_2$.

Supongamos que la expresión es válida para todo $j \leq k$, es decir

$$\begin{array}{lcl} y_1 & \leq & x_1 \\ y_2 & \leq & x_1 \vee x_2 \\ \vdots & & \vdots \\ y_k & \leq & (x_1 \vee x_2 \ldots\ldots\ldots \vee x_k) \end{array}$$

de lo cual se puede implicar que

$$\bigvee_1^k y_i \leq \bigvee_1^k x_i \quad .$$

Probemos que $y_{k+1} \leq \bigvee_1^{k+1} x_i$.

$$\bigvee_1^{k+1} x_i = \bigvee_1^k x_i \vee x_{k+1} \geq \bigvee_1^k y_i \vee (y_{k+1} \wedge (\bigvee_{j=1}^k y_j)')$$

$$= \bigvee_1^{k+1} y_i \wedge (\bigvee_1^k y_i \vee (\bigvee_1^k y_j)')$$

$$= \bigvee_1^{k+1} y_i \geq y_{k+1} .$$

Hemos probado que $y_j \leq \bigvee_i^j x_i$ para todo j.

.Si $z \in A$ es tal que $x_i \leq z$, para todo i, entonces $(x_1 \vee x_2 \vee \ldots\ldots \vee x_j) \leq z$, para todo j, de donde

$$y_j \leq x_1 \vee x_2 \vee \ldots\ldots \vee x_j \leq z \text{ , para todo j.}$$

Luego $y \leq z$.

2.3.4. PROPOSICION

Si $\{p_i\}$ es una familia de elementos de un Algebra de Boole, entonces

i) $(\vee_i\ p_i)' = (\wedge_i\ p_i')$, si $\vee_i p_i$ existe.

ii) $(\wedge_i\ p_i)' = (\vee_i\ p_i')$, si $\wedge_i p_i$ existe.

PRUEBA

i) Sea $p = \vee_i p_i$.

$p_i \leq p$, para todo i por definición, de donde

$p' \leq p_i'$ para todo i.

Ahora probaremos que si $q \leq p_i'$ para todo i, entonces $q \leq p'$.

Sea $q \leq p_i'$; entonces $p_i \leq q'$ y como p es el supremo de $\{p_i\}$ se tiene que $p \leq q'$ ó sea que $q \leq p'$ de aquí $(\vee_i p_i)' = \wedge_i p_i'$.

ii) Se prueba de manera similar.

2.3.5. PROPOSICION

Sea $\{I_j\}$ una familia disjunta de conjuntos con unión I, y para cada $i \in I$ sea p_i un elemento de un Algebra de Boole. Entonces

$$V_j (V_{i \in I_j} p_i) = V_{i \in I} p_i .$$

PRUEBA

Llamemos $q_j = V_{i \in I_j} p_i$ y $q = V_j q_j$.

i) "q es cota superior de la familia $\{p_i\}_{i \in I}$ " .

Como cada $i \in I$ pertenece exactamente a un I_j , se sigue que para cada i hay un "j" con $p_i \leq q_j$; como además $q_j \leq q$, se sigue que "q" es una cota superior de $\{p_i\}$.

ii) "q es la menor cota superior".

Sea r tal que $p_i \leq r$ para todo i; como en particular $p_i \leq r$ para cada $i \in I_j$, se sigue de la definición de supremo que $q_j \leq r$; como este es verdadero para cada j, podemos concluir que $q \leq r$.

Esto completa la prueba.

2.3.6. PROPOSICION

Sea $\{q_i\}$ una familia de elementos de un Algebra de Boole A y $p \in A$. Entonces $p \wedge V_i q_i = V_i (p \wedge q_i)$.

PRUEBA

Sea $q = V_i\, q_i$.

i) $p \wedge q$ es cota superior de $\{p \wedge q_i\}_{i \in I}$.

Para cada $i \in I$: como $q_i \leq q$ entonces $p \wedge q_i \leq p \wedge q$.

ii) $p \wedge q$ es la menor cota superior .

Sea r tal que $p \wedge q_i \leq r$ para todo i.

Observemos que $q_i = (p \wedge q_i) V (p' \wedge q_i) \leq r V p'$;

luego, por definición de supremo $q \leq r V p'$, de donde $p \wedge q \leq p \wedge r \leq r$.

2.3.7. PROPOSICION

Si $\{p_i\}$ es una familia de elementos de un Algebra de Boole A y $p \in A$, entonces $p V (V_i\, p_i) = V_i(p V p_i)$.

PRUEBA

Sea $q = V_i\, p_i$.

i) $p V q$ es cota superior de $\{p V p_i\}_{i \in I}$.

Para cada $i \in I$: como $p_i \leq q$, entonces $p V p_i \leq p V q$.

ii) $p V q$ es la menor cota superior.

Sea r tal que $p V p_i \leq r$ para todo i; de aquí se tiene que $p \leq r$ y $p_i \leq r$ para todo i. Como "q" es el supremo de los p_i, $q \leq r$; de donde $p V q \leq r$.

2.3.8. PROPOSICION

Sean $\{p_i\}$ y $\{q_j\}$ familias de elementos en un Algebra de Boole A. Entonces:

$$V_i\, p_i \wedge V_j\, q_j = V_{i,j}\,(p_i \wedge q_j) .$$

PRUEBA

Sea $p = V_i\, p_i$ y $q = V_j\, q_j$.

i) $p \wedge q$ es cota superior de $\{p_i \wedge q_j\}_{\substack{i\in I \\ j\in J}}$.

Por definición de supremo: $p_i \leq p$ para todo i ,

$q_j \leq q$ para todo j ;

de aquí se tiene que $p_i \wedge q_j \leq p \wedge q$ para todo i, j.

ii) $p \wedge q$ es la menor cota superior.

Sea r tal que $p_i \wedge q_j \leq r$ para todo i, j.

De aquí, $V_i\, p_i \wedge q_j \leq r$ ó sea $p \wedge q_j \leq r$,

de donde $V_j(p \wedge q_j) \leq r$ ó sea $p \wedge q \leq r$.

2.3.9. PROPOSICION

Si $I \subset J$ entonces $\underset{i\in I}{V}\, p_i \leq \underset{i\in J}{V}\, p_i$.

PRUEBA

$p_j \leq \underset{i\in J}{V}\, p_i$ para todo j en J, en particular $p_j \leq \underset{i\in J}{V}\, p_i$ para todo j en I.

Luego $\bigvee_{i\in I} p_i \leq \bigvee_{i\in J} p_i$.

2.4. MORFISMOS ENTRE ALGEBRAS DE BOOLE

2.4.1. DEFINICION

Si A y B son dos Algebras de Boole y f una función de A en B, diremos que f es un morfismo si:

i) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, para todo x, y en A;

ii) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, para todo x, y en A;

iii) $f(x') = (f(x))'$, para todo x en A.

2.4.2. DEFINICION

i) Un morfismo f es llamado un monomorfismo si f es -- una función inyectiva.

ii) Un morfismo f es llamado un epimorfismo si f es una función sobreyectiva.

iii) Un morfismo f de A en B es llamado un isomorfismo si existen morfismos g, h tales que $f\circ g = 1B$ $h\circ f = 1_A$ (de otra forma, un isomorfismo es un morfismo biyectivo).

iv) Un morfismo f de A en B es llamado completo si -- preserva todos los supremos (y consecuentemente todos los ínfimos).

Es decir: si $\{p_i\}$ es una familia de elementos de A con $V_i\, p_i = p$, entonces la familia $\{f(p_i)\}$ tiene supremo igual a $f(p)$.

2.4.3. EJEMPLOS

E1 La función $\begin{array}{l} 1 : A \to A \\ \quad\ p \rightsquigarrow p \end{array}$ es un morfismo llamado morfismo identidad.

E2 Sea B un Algebra de Boole y "p" un elemento de B, $p \neq 0$. El conjunto $A = \{x \mid x \in B, x \leq p\}$ es un Algebra de Boole para las operaciones siguientes: Λ , V las mismas que en B, pero $\sim x = p \wedge x'$ (definición).

La función $\begin{array}{l} f : B \to A \\ \quad\ x \rightsquigarrow x \wedge p \end{array}$ es un morfismo ya que:

$$f(x \vee y) = (x \vee y) \wedge p = (x \wedge p) \vee (y \wedge p)$$
$$= f(x) \vee f(y).$$
$$f(x \wedge y) = (x \wedge y) \wedge p = (x \wedge p) \wedge (y \wedge p)$$
$$= f(x) \wedge f(y)$$
$$\sim f(x) = p \wedge (f(x))' = p \wedge (x \wedge p)'$$
$$= p \wedge (x' \vee p')$$
$$= (p \wedge x') \vee (p \wedge p')$$
$$= p \wedge x'$$
$$= f(x') .$$

E3 Sean A, B Algebras de Boole y $f : A \to B$ una función tal que:

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$
$$f(x') = (f(x))'$$

para todo $x, y \in A$.

Entonces f es un morfismo.

Probemos que $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

$$f(x' \vee y') = f(x') \vee f(y') = (f(x))' \vee (f(y))'$$

además $f(x' \vee y') = f((x \wedge y)') = (f(x \wedge y))'$

de donde $(f(x \wedge y))' = (f(x))' \vee (f(y))' = (f(x) \wedge f(y))'$

de aquí que $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

E4 Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ morfismos, entonces $g \circ f : A \to C$ es morfismo.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x \vee y) &= g(f(x \vee y)) \\ &= g(f(x)) \vee g(f(y)) \\ &= (g \circ f)(x) \vee (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x') = g(f(x')) &= g((f(x))') \\ &= (g(f(x)))' \\ &= ((g \circ f)(x))' .\end{aligned}$$

2.4.4. PROPIEDADES

1º) Si A, B son Algebras de Boole y $f : A \to B$ una biyección, entonces:

i) Si f es morfismo, f^{-1} también lo es.

ii) f es un isomorfismo si cumple la condición si-- guiente: para todo par de elementos a, b en A, $a \leq b$ si y solo si $f(a) \leq f(b)$.

Prueba

i) f^{-1} es morfismo.

Si $x, y \in B$ entonces

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x) \wedge f^{-1}(y)) &= f(f^{-1}(x)) \wedge f(f^{-1}(y)) \\ &= x \wedge y \\ &= f(f^{-1}(x \wedge y)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x) \vee f^{-1}(y)) &= f(f^{-1}(x)) \vee f(f^{-1}(y)) \\ &= x \vee y \\ &= f(f^{-1}(x \vee y)) \end{aligned}$$

por ser f inyectiva se tiene que:

$$f^{-1}(x \wedge y) = f^{-1}(x) \wedge f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(x \vee y) = f^{-1}(x) \vee f^{-1}(y) .$$

Además

$$\begin{aligned} f((f^{-1}(x)') &= (f(f^{-1}(x)))' \\ &= x' \\ &= f(f^{-1}(x')) . \end{aligned}$$

Y por ser f inyectiva

$$(f^{-1}(x))' = f^{-1}(x').$$

ii) Es suficiente probar que f es un morfismo.

$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.

Tenemos que $a \leq b \iff f(a) \leq f(b)$ para todo a, b en A.

$x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$ luego

$f(x) \leq f(x \vee y)$ y $f(y) \leq f(x \vee y)$

de aquí $f(x) \vee f(y) \leq f(x \vee y)$.

Además si $f(x) \vee f(y) = f(m)$

entonces $f(x) \leq f(m)$ y $f(y) \leq f(m)$

de aquí $x \leq m$ y $y \leq m$

es decir $x \vee y \leq m$

$$f(x \vee y) \leq f(m) = f(x) \vee f(y) .$$

Luego $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.

Por ser f sobre:

si $0 = f(x)$, entonces $0 \leq x \implies f(0) \leq f(x)$

$\implies f(0) \leq 0$

$\implies f(0) = 0$

si $1 = f(x)$, entonces $x \leq 1 \implies f(x) \leq f(1)$

$\implies 1 \leq f(1)$

$\implies 1 = f(1)$.

Luego $f(x) \vee f(x') = f(x \vee x') = f(1) = 1$

$f(x) \wedge f(x') = f(x \wedge x') = f(0) = 0$

lo cual implica que $f(x') = (f(x))'$. (2.2.3-3).

2º) Si $f: A \to B$ es un morfismo entre Algebras de Boole, entonces $a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$, para todo a, b en A.

PRUEBA

$$a \leq b \Longrightarrow a \vee b = b \Longrightarrow f(a \vee b) = f(b)$$

$$\Longrightarrow f(a) \vee f(b) = f(b) \Longrightarrow f(a) \leq f(b).$$

3º) Si f, g, h son morfismos, entonces

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Es trivial, ya que la composición de funciones es asociativa.

NOTA

Los morfismos definidos entre álgebras de Boole, dan a la clase de álgebras de Boole estructura de Categoría, la cual denotaremos por A_B.

2.5 ISOMORFISMOS ENTRE ALGEBRAS DE BOOLE Y ANILLOS DE BOOLE

2.5.1 PROPOSICION

Si $(A,+,.)$ es un anillo de Boole, entonces $(A, \vee, \wedge, ')$ es un álgebra de Boole en donde:

$$x \wedge y = xy$$

$$x \vee y = x + y + xy$$

$$x' = 1 + x.$$

PRUEBA

i) $x \wedge y = y \wedge x \quad , \quad x \vee y = y \vee x.$

$$x \wedge y = xy = yx$$
$$= y \wedge x$$
$$x \vee y = x + y + xy$$
$$= y + x + yx$$
$$= y \vee x$$

ii) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

$$x \vee (y \wedge z) = x + (y \wedge z) + x(y \wedge z)$$
$$= x + yz + x(yz).$$

Además: $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x + y + xy)(x + z + xz)$

$$= xx + yx + xyx + xz + yz$$
$$+ xyz + xxz + yxz + xyxz$$
$$= x + yx + xy + xz + yz$$
$$+ xyz + xz + yxz + xyz$$

$= x + yz + xyz$ (ya que en un anillo de Boole $a+a = 0$).

$$\therefore\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \wedge (y \vee z) = x(y \vee z)$$
$$= x(y + z + zy)$$
$$= xy + xz + xzy$$

Además $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = xy \vee xz$

$= xy + xz + xzxy$

$= xy + xz + xzy$

Por tanto

$(x \wedge (y \vee z)) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$

iii) Leyes de Absorción.

Para todo $x, y \in A$: $x \vee (x \wedge y) = x$ y

$x \wedge (x \vee y) = x.$

$x \vee (x \wedge y) = x + xy + x(xy)$

$= x + xy + xy$

$= x + 0$

$= x$

$x \wedge (x \vee y) = x(x + y + xy)$

$= x(x + y) + x(xy)$

$= xx + xy + (xx)y$

$= x + xy + xy$

$= x + 0$

$= x$

iv) "Para todo x, y $\in$ A:

$$(x \vee x') \wedge y = y$$

$$(x \wedge x') \vee y = y \text{ ."}$$

$$\begin{aligned}(x \vee x') \wedge y &= (x + x' + xx')y \\ &= [(x + x') + xx']y \\ &= (1 + 0)y \\ &= y \,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x \wedge x') \vee y &= xx' \vee y \\ &= xx' + y + xx'y \\ &= 0 + y + 0y \\ &= y \,.\end{aligned}$$

Luego (A, $\wedge$, $\vee$, ') es un Algebra de Boole.

2.5.2. PROPOSICION

Si (A, $\vee$, $\wedge$, ') es un Algebra de Boole, entonces (A, +, .) es un anillo de Boole en donde:

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

$$x \cdot y = x \wedge y \,.$$

PRUEBA

(A, +) es un grupo abeliano ya que:

1º) $$\begin{aligned}x + y &= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \\ &= (y' \wedge x) \vee (y \wedge x') \\ &= (y \wedge x') \vee (y' \wedge x) \\ &= y + x.\end{aligned}$$

2º) $x + 0 = (x \wedge 0') \vee (x' \wedge 0)$

$= (x \wedge 1) \vee (x' \wedge 0)$

$= x \vee 0$

$= x$.

3º) $x + x = (x \wedge x') \vee (x' \wedge x)$

$= x \wedge x'$

$= 0$.

4º) $x + (y + z) = (x + y) + z$

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= (x \wedge (y + z)') \vee (x' \wedge (y + z)) \\
&= [x \wedge ((y \wedge z') \vee (y' \wedge z))'] \vee \\
&\quad [x' \wedge ((y \wedge z') \vee (y' \wedge z))] \\
&= [x \wedge ((y' \vee z) \wedge (y \vee z'))] \vee \\
&\quad [(x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z)] \\
&= [x \wedge ((y \wedge z) \vee (y' \wedge z'))] \vee \\
&\quad [(x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z)] \\
&= (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee \\
&\quad (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x + y) + z &= ((x + y) \wedge z') \vee ((x + y)' \wedge z) \\
&= [((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \wedge z'] \vee \\
&\quad [((x' \vee y) \wedge (x \vee y')) \wedge z] \\
&= [(x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z')] \vee \\
&\quad [((x \wedge y) \vee (x' \wedge y')) \wedge z]
\end{aligned}
$$

$$= [(x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z')] \vee$$

$$[(x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z)]$$

$$= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee$$

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z).$$

Como el conectivo "v" es conmutativo, entonces

$x + (y + z) = (x + y) + z$.

Además $(A, .)$ es semigrupo unitario ya que $x . 1 = x$ pues $x . 1 = x \wedge 1 = x$.

Los elementos de A son idempotentes $x . x = x \wedge x = x$ de donde $(A, +, .)$ es un Anillo de Boole.

NOTA

Si $\mathbb{A}$ es una categoría, el funtor

$$1_{\mathbb{A}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \rightarrow & \mathbb{A} \\ A & \rightsquigarrow & A \\ f & \rightsquigarrow & f \end{array}$$

se llama morfismo identidad de la categoría $\mathbb{A}$.

2.5.3. PROPOSICION

Existen dos funtores $\mathbb{J} : A_B \rightarrow A_{nB}$ y $\mathbb{G} : A_{nB} \rightarrow A_B$ tales que

$$\mathbb{J} \circ \mathbb{G} = 1_{A_{nB}}$$

$$\mathbb{G} \circ \mathbb{J} = 1_{A_B} \quad .$$

PRUEBA

Por proposición 2.5.2 el funtor $\mathbb{J}$ se define así:

$$\begin{aligned}
\mathbb{J} \;:\; & A_B \longrightarrow A_{nB} \\
& (A, \vee, \wedge, ') \rightsquigarrow (A, +, .) \\
& f : A \to B \rightsquigarrow f : A \to B .
\end{aligned}$$

Por proposición 2.5.1 el funtor $\mathbb{G}$ se define así:

$$\begin{aligned}
\mathbb{G} \;:\; & A_{nB} \longrightarrow A_B \\
& (A, +, .) \rightsquigarrow (A, \vee, \wedge, ') \\
& f : A \to B \rightsquigarrow f : A \to B .
\end{aligned}$$

Debemos probar que:

i) $(\mathbb{G} \circ \mathbb{J})(A, \vee, \wedge, ') = (A, \vee, \wedge, ')$

ii) $(\mathbb{J} \circ \mathbb{G})(A, +, .) = (A, +, .)$.

i) Las operaciones de $(\mathbb{G} \circ \mathbb{J})(A, \vee, \wedge, ')$ son las mismas de $(A, \vee, \wedge, ')$ ya que:

a) $x \wedge y = xy = x \wedge y$

b) $x \vee y = x + y + xy = (x + y) + xy$

$$= ((x' \wedge y) \vee (x \wedge y')) + xy$$

$$= ((x' \wedge y) \vee (x \wedge y')) + (x \wedge y)$$

$$= [((x' \wedge y) \vee (x \wedge y')) \wedge (x \wedge y)'] \vee$$
$$[((x' \wedge y) \vee (x \wedge y'))' \wedge (x \wedge y)]$$
$$= [((x' \wedge y) \vee (x \wedge y')) \wedge (x' \vee y')] \vee$$
$$[((x \vee y') \wedge (x' \vee y)) \wedge (x \wedge y)]$$
$$= [(x' \vee y') \wedge (x' \wedge y)] \vee [(x' \vee y') \wedge$$
$$(x \wedge y')] \vee (x \wedge y)$$
$$= (y' \wedge x) \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge y)$$
$$= (y' \wedge x) \vee (y \wedge (x \vee x'))$$
$$= (y' \wedge x) \vee (y \wedge 1)$$
$$= (y' \wedge x) \vee y$$
$$= x \vee y\,.$$

c) $$x' = 1 + x$$
$$= (1 \wedge x') \vee (1' \wedge x)$$
$$= (1 \wedge x') \vee (0 \wedge x)$$
$$= x' \vee 0$$
$$= x'\,.$$

ii) Las operaciones de $(\mathbb{J} \circ \mathbb{B})(A, +, .)$ son las mismas de $(A, +, .)$.

a) $x \,.\, y = x \wedge y = xy$.

b) $x + y = (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')$

$= (x'y) \vee (xy')$

$= x'y + xy' + x'y \,.\, xy'$

$= (1 + x)y + x(1 + y) + (1 + x)y \,.\, x(1 + y)$

$= 1.y + xy + x.1 + xy + (1.y + xy)(x.1 + xy)$

$= y + x + y(x + xy) + xy(x + xy)$

$= x + y + yx + yxy + xyx + xyxy$

$= x + y + xy + xy + xy + xy$

$= x + y$.

NOTA

Por cumplirse esta propiedad se dice que existe un isomorfismo entre las categorías de Algebras de Boole y categorías de Anillos de Boole.

2.5.4. PROPOSICION

Si A y B son dos Algebras de Boole y $f : A \to B$ una función; entonces las condiciones que siguen son equivalentes:

i) f es un morfismo entre Algebras de Boole.

ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

$f(x \,.\, y) = f(x) \,.\, f(y)$ para todo x, y en A

$f(1) = 1$.

iii) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ para todo x, y en A

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$.

PRUEBA

i) $\Longrightarrow$ ii) Es obvia ya que existe un isomorfismo entre Anillos de Boole y Algebras de Boole.

Y además

$f(1) = f(x \vee x') = f(x) \vee f(x') = f(x) \vee (f(x))' = 1.$

ii) $\Longrightarrow$ iii) Resulta siempre por el isomorfismo que existe entre la Categoría de Algebras de Boole y Anillos de Boole.

Y además

$f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = f(x) - f(x) = 0$

iii) $\Longrightarrow$ i) es trivial.

2.6. PRODUCTO DE ALGEBRAS DE BOOLE

2.6.1. DEFINICION

Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de Algebras Booleanas. Llamaremos producto de los A_i a su producto cartesiano $\prod_i A_i$ construido como un Algebra Booleana de la manera siguiente:

si $p = \{p_i\}$ y $q = \{q_i\}$ entonces

$$p \vee q = (p_i \vee q_i)_i$$
$$p \wedge q = (p_i \wedge q_i)_i$$
$$p' = (p_i')_i .$$

2.6.2 PROPOSICION

Sea A el producto de una familia de Algebras de Boole $\{A_i\}$. Entonces para cada i, existe un epimorfismo natural de A a A_i, llamado la proyección f_i y definido por $f_i(p) = p_i(p)$.

Si además B es un Algebra Booleana y para cada "i", existe un morfismo g_i de B a A_i, entonces existe un único morfismo g de B a A, tal que:

$$f_i \circ g = g_i \quad \text{para todo i.}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f_i"'] & & B \arrow[ll, "g"'] \arrow[dl, "g_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

PRUEBA

Sea B un Algebra de Boole, tenemos que para cada "i", existe $g_i: B \to A_i$ morfismo. Probaremos que existe un único $g: B \to A$ morfismo tal que $f_i \circ g = g_i$ para todo i.

Definamos

$$g : B \longrightarrow A$$
$$b \rightsquigarrow (g_i(b))_{i \in I} \quad .$$

g es morfismo .

$$g(b_1 \vee b_2) = (g_i(b_1 \vee b_2))_{i \in I}$$

$$= ((g_i(b_1) \vee g_i(b_2))_{i \in I}$$

$$= (g_i(b_1))_{i \in I} \vee (g_i(b_2))_{i \in I}$$

$$= g(b_1) \vee g(b_2) \; .$$

$$g(b') = (g_i(b'))_{i \in I}$$

$$= ((g_i(b))')_{i \in I}$$

$$= (g_i(b))'_{i \in I}$$

$$= g(b)' \; .$$

Además $f_i \circ g = g_i$ para todo i ya que

$$(f_i \circ g)(b) = f_i(g(b)) = f_i((g_i(b))_{i \in I}) = g_i(b) \; .$$

g es único .

Supongamos que existe "h" tal que $f_i \circ h = g_i$ para todo i; además $f_i \circ g = g_i$ para todo i.

$$(f_i \circ h) = (f_i \circ g) \Longrightarrow (f_i \circ h)(b) = (f_i \circ g)(b), \text{para todo } b$$

$$\Longrightarrow f_i(h(b)) = f_i(g(b)), \text{para todo } b$$

$$\Longrightarrow p_i(h(b)) = p_i(g(b)), \text{para todo } b$$

$$\Longrightarrow h(b) = g(b), \qquad \text{para todo } b$$

$$\Longrightarrow h = g \,.$$

2.7. SUBALGEBRAS E IDEALES

2.7.1. DEFINICION

Se llama "Subálgebra" de un Algebra Booleana A, a un subconjunto B de A, tal que B junto con las operaciones de A constituye un Algebra de Boole.

2.7.2. EJEMPLOS

E1 Sea X un conjunto. Todo campo de conjuntos de X es una subálgebra de P(X).

E2 Si A es un Algebra de Boole, entonces $\{0,1\}$ y A son subálgebras de A.

E3 Si Z es el conjunto de los enteros, $m \in Z$ entonces $A = \{P \subset Z \mid (y \in P \Longleftrightarrow y + m \in P)\}$ es subálgebra de P(Z).

<u>Prueba</u>

i) $P, Q \in A \Longrightarrow P \cap Q \in A$.

Sea $y \in P \cap Q \Longleftrightarrow y \in P$ y $y \in Q$

$\Longleftrightarrow (y + m) \in P$ y $(y+m) \in Q$

$\Longleftrightarrow (y + m) \in P \cap Q$.

Luego $P \cap Q \in A$.

ii) $P, Q \in A \Longrightarrow P \cup Q \in A$.

$y \in P \cup Q \Longleftrightarrow y \in P$ ó $y \in Q$

$\Longleftrightarrow (y + m) \in P$ ó $(y + m) \in Q$

$\Longleftrightarrow (y + m) \in P \cup Q$.

Luego $P \cup Q \in A$.

iii) $P \in A \Longrightarrow P^c \in A$.

$y \in P^c \Longleftrightarrow y \notin P$

$\Longleftrightarrow (y + m) \notin P$

$\Longleftrightarrow (y + m) \in P^c$

Luego A es subálgebra de $P(Z)$.

Llamaremos "vertical" a un subconjunto P del cuadrado unidad, si para todo punto (x_0 , y_0) que pertenece a P, todo punto del segmento vertical que pasa por

(x_o , y_o) también pertenece a P.

Es decir P es vertical si:

$(x_o , y_o) \in P \Longrightarrow (x_o , y) \in P$ para todo $y \in [0, 1]$.

Sea $I = [0, 1]$.

"La clase de todos los conjuntos verticales en $I \times I$ es una subálgebra de $P(I \times I)$".

<u>Prueba</u>

i) Sean P, Q dos conjuntos verticales que pertenecen a $I \times I$. Probemos que $P \cup Q$ es vertical.

$$(x_o , y_o) \in P \cup Q \Longrightarrow (x_o , y_o) \in P \text{ ó } (x_o , y_o) \in Q$$
$$\Longrightarrow (x_o , y) \in P \text{ ó } (x_o , y) \in Q \text{ para todo } y \in I$$
$$\Longrightarrow (x_o , y) \in P \cup Q \text{ para todo } y \in I .$$

Luego $P \cup Q$ es vertical.

ii) Sean P y Q dos conjuntos verticales, probemos que $P \cap Q$ es vertical .

$$(x_o , y_o) \in P \cap Q \Longrightarrow (x_o , y_o) \in P \text{ y } (x_o , y_o) \in Q$$

$\Longrightarrow (x_o , y) \in P$ y $(x_o , y) \in Q$ para todo $y \in I$

$\Longrightarrow (x_o , y) \in P \cap Q$ para todo $y \in I$.

Luego $P \cap Q$ es vertical.

iii) Sea P un conjunto vertical, probemos que P^c es vertical.

Sea $(x_o , y_o) \in P^c$ y supongamos que

$(x_o , y_1) \notin P^c$ para algún $y_1 \in I$, luego

$(x_o , y_1) \in P$ y como P es vertical, entonces

$(x_o , y) \in P$ para todo $y \in I$, en particular

$(x_o , y_o) \in P$ lo cual es contradictorio.

Luego P^c es vertical.

E5 Sea X un espacio topológico. Entonces

$A = \{ P \subset X \mid P \text{ es clopen} \}$ es una subálgebra de $P(X)$.

<u>Prueba</u>

i) Si $P_1 \in A$ y $P_2 \in A$ entonces $P_1 \cup P_2 \in A$,

ya que unión de abiertos es un abierto y unión de dos cerrados es un cerrado.

ii) Si $P_1 \in A$ y $P_2 \in A$ entonces $P_1 \cap P_2 \in A$,

ya que intersección de cerrados es cerrado e intersección de dos abiertos es un abierto.

iii) Si $P \in A$ entonces $P^c \in A$ ya que si P abierto entonces P^c es cerrado, y si P cerrado entonces P^c es abierto.

A esta subálgebra de P(X) es denotado CL(X).

E6 Sea X un espacio topológico. Entonces

$A = \{B \subset X \mid \overline{\overset{\circ}{Fr(B)}} = \Phi\}$ es subálgebra de $P(X)$.

<u>Prueba</u>

i) "$(B_1 \in A$ y $B_2 \in A) \Longrightarrow B_1 \cup B_2 \in A$" .

Probaremos que $\overline{\overset{\circ}{Fr(B_1 \cup B_2)}} = \Phi$

Se tiene que

$Fr(B_1 \cup B_2) \subset Fr(B_1) \cup Fr(B_2)$,

luego

$\overline{\overset{\circ}{Fr(B_1 \cup B_2)}} \subset (Fr(B_1) \cup Fr(B_2))^{-\circ}$;

pero

$(Fr(B_1) \cup Fr(B_2))^{-\circ} = \Phi$

ya que unión de dos conjuntos raros es un conjunto raro.

Entonces $\overline{\overset{\circ}{Fr(B_1 \cup B_2)}} = \Phi$.

ii) "$(B_1 \in \mathcal{A}$ y $B_2 \in \mathcal{A}) \Longrightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{A}$" .

Probaremos que $(Fr(B_1 \cap B_2))^{\underline{o}} = \Phi$.

$x \in Fr(B_1 \cap B_2) \Longrightarrow x \in (\overline{B_1 \cap B_2} \cap \overline{(B_1 \cap B_2)^c})$

$\Longrightarrow (x \in \overline{B}_1$ y $x \in \overline{B}_2)$ y $(x \in \overline{B_1^c}$ ó $x \in \overline{B_2^c})$

$\Longrightarrow x \in \overline{B}_1 \cap \overline{B_1^c}$ ó $x \in \overline{B}_2 \cap \overline{B_2^c}$

$\Longrightarrow x \in Fr(B_1)$ ó $x \in Fr(B_2)$

$\Longrightarrow Fr(B_1 \cap B_2) \subset Fr(B_1) \cup Fr(B_2)$

$\Longrightarrow \mathring{\overline{Fr(B_1 \cap B_2)}} \subset \mathring{\overline{Fr(B_1) \cup Fr(B_2)}}$

y como $\mathring{\overline{Fr(B_1) \cup Fr(B_2)}} = \Phi$ entonces

$\mathring{\overline{Fr(B_1 \cap B_2)}} = \Phi$.

iii) "$B \in \mathcal{A} \Longrightarrow B^c \in \mathcal{A}$" .

Probemos que $\mathring{\overline{Fr(B^c)}} = \Phi$

$Fr(B^c) = \overline{B^c} \cap \overline{B^{c^c}} = Fr(B)$

pero $\mathring{\overline{Fr(B)}} = \Phi$, luego $\mathring{\overline{Fr(B^c)}} = \Phi$.

E7 Si $f : A \to B$ es un morfismo de Algebras de Boole, entonces $f(A)$ es una subálgebra de B.

Prueba

Si $x, y \in A$, probaremos que:

i) $f(x) \wedge f(y) \in f(A)$.

ii) $f(x) \vee f(y) \in f(A)$.

iii) $f(x)' \in f(A)$.

i) $f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y)$ de donde $f(x) \wedge f(y)$ pertenece a $f(A)$.

ii) Similar a la anterior.

iii) $f(x)' = f(x')$, por lo tanto $f(x)' \in f(A)$.

E8 Sea $X \neq \Phi$. Un subconjunto P de X es llamado conumerable (en X) si su complemento es numerable.

" $\mathbb{N}_c = \{P \subset X \mid P$ es numerable ó P es conumerable$\}$ es una subálgebra de $P(X)$".

Prueba

Sean $P \in \mathbb{N}_c$ y $Q \in \mathbb{N}_c$.

i) Si P es numerable y Q numerable, entonces $P \cup Q$ es numerable.

Si P es conumerable y Q conumerable entonces $P \cup Q$ es conumerable.

Si P es numerable y Q conumerable, entonces $P \cup Q$ es conumerable, ya que $(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c \subset Q^c$ ó sea $(P \cup Q)^c$ es numerable.

ii) Si P es numerable y Q numerable, entonces $P \cap Q$ es numerable.

Si P es numerable y Q conumerable, entonces $P \cap Q$ es numerable.

Si P es conumerable y Q conumerable, entonces $P \cap Q$ es conumerable.

iii) Si $P \in \mathbb{N}_c$ entonces $P^c \in \mathbb{N}_c$.

2.7.3 PROPOSICION

Si B es subálgebra de A, entonces $\{0, 1\} \subset B$.

PRUEBA

Probaremos que $0 \in B$ y $1 \in B$.

Sea $x \in B$, por ser B subálgebra, $x' \in B$. Luego $x \wedge x' \in B$ y $x \vee x' \in B$, es decir $0 \in B$ y $1 \in B$.

2.7.4 PROPOSICION

Sea A un Algebra de Boole, $(A_i)_{i \in I}$ una familia de subálgebras de A. Entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es una subálgebra de A.

PRUEBA

i) $(x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ y $y \in \bigcap_{i \in I} A_i) \Longrightarrow x \wedge y \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

$(x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ y $y \in \bigcap_{i \in I} A_i) \Longrightarrow (x \in A_i$ y $y \in A_i)$ para todo $i \in I$.

$$\Longrightarrow x \wedge y \in A_i \quad \text{para todo } i \in I$$

$$\Longrightarrow x \wedge y \in \bigcap_{i\in I} A_i$$

ii) $(x \in \bigcap_{i\in I} A_i \;\; y \;\; y \in \bigcap_{i\in I} A_i) \Longrightarrow x \vee y \in \bigcap_{i\in I} A_i.$

$$(x \in \bigcap_{i\in I} A_i \;\; y \;\; y \in \bigcap_{i\in I} A_i) \Longrightarrow (x \in A_i \;\; y \;\; y \in A_i)$$

$$\text{para todo } i \in I$$

$$\Longrightarrow x \vee y \in A_i \text{ para todo } i$$

$$\Longrightarrow x \vee y \in \bigcap_{i\in I} A_i \, .$$

iii) $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Longrightarrow x' \in \bigcap_{i\in I} A_i.$

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Longrightarrow x \in A_i \quad \text{para todo } i \in I$$

$$\Longrightarrow x' \in A_i \quad \text{para todo } i \in I$$

$$\Longrightarrow x' \in \bigcap_{i\in I} A_i \, .$$

2.7.5. PROPOSICION

Si A es un Algebra de Boole y $B \subset A$, entonces existe una subálgebra $[B]$ de A tal que:

i) $B \subset [B]$

ii) Si H es subálgebra de A tal que $B \subset H$, entonces $[B] \subset H$.

PRUEBA

i) "$B \subset [B]$" .

Si definimos a$[B]$ como la intersección de todas las subálgebras que contienen a B, entonces $[B] \neq \Phi$ ya que A es una subálgebra que contiene a B; luego se tiene que $B \subset [B]$.

ii) Si H es una subálgebra de A, tal que $B \subset H$, entonces trivialmente $[B] \subset H$ por la definición dada de $[B]$.

NOTA

En la propiedad anterior, la subálgebra $[B]$ es la menor subálgebra de A que contiene a B y se llama subálgebra generada por B.

Está definida así:

$[B] = \cap D$ tal que $B \subset D$ y D es subálgebra.

2.7.6. PROPOSICION

Sea B un Algebra de Boole y $E \subset B$, tal que $[E] = B$ y sean $f, g : B \to A$ morfismos (A un álgebra cualquiera) tal que $f(p) = g(p)$ si $p \in E$. Entonces $f = g$.

PRUEBA

Definamos el conjunto

$$M = \{y \in B \mid y = \bigvee_{i=1}^{n} (\bigwedge_{j=1}^{m} x_{i,j}) \quad \text{ó}$$

$$y = \bigwedge_{i=1}^{n} (\bigvee_{j=1}^{m} x_{i,j})$$

$$\text{con } x_{i,j} \text{ en } E \text{ ó } x'_{i,j} \text{ en } E\}$$

este conjunto cumple ser una subálgebra y además se puede probar que $M = [E]$.

Probemos que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in [E]$

$$f(y) = f(\bigvee_{i=1}^{n} (\bigwedge_{j=1}^{m} x_{i,j}))$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} (f(\bigwedge_{j=1}^{m} x_{i,j}))$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} f(x_{i,j})$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} g(x_{i,j}) \quad \text{ya que } x_{i,j} \in E \text{ ó } x'_{i,j} \in E$$

$$= g(y)$$

lo mismo para el caso en que $y = \bigwedge_{i=1}^{n} (\bigvee_{j=1}^{m} x_{i,j})$.

2.7.7. PROPOSICION

Sean B una subálgebra de A, r un elemento de A y $J = \{x \in A \mid x = (s \wedge r) \vee (t \wedge r') \text{ para algunos } s, t \in B\}$. Entonces J es la subálgebra generada por $B \cup \{r\}$.

PRUEBA

Probaremos que $J = [B \cup \{r\}]$ es decir:

i) J es subálgebra de A.

ii) $B \cup \{r\} \subset J$.

iii) Si H es una subálgebra tal que $B \cup \{r\} \subset H$, entonces $J \subset H$.

i) a) "$x, y \in J \Longrightarrow x \wedge y \in J$".

Sea $x = (s_1 \wedge r) \vee (t_1 \wedge r')$

$y = (s_2 \wedge r) \vee (t_2 \wedge r')$

$$\begin{aligned}
x \wedge y &= [(s_1 \wedge r) \vee (t_1 \wedge r')] \wedge \\
&\quad [(s_2 \wedge r) \vee (t_2 \wedge r')] \\
&= [((s_1 \wedge r) \vee (t_1 \wedge r')) \wedge (s_2 \wedge r)] \vee \\
&\quad [((s_1 \wedge r) \vee (t_1 \wedge r')) \wedge (t_2 \wedge r')] \\
&= ((s_1 \wedge r) \wedge (s_2 \wedge r)) \vee ((t_1 \wedge r') \wedge \\
&\quad (s_2 \wedge r)) \vee ((s_1 \wedge r) \wedge (t_2 \wedge r')) \vee
\end{aligned}$$

$$((t_1 \wedge r') \wedge (t_2 \wedge r'))$$

$$= ((s_1 \wedge s_2) \wedge r) \vee ((t_1 \wedge t_2) \wedge r') .$$

b) "$x, y \in J \Longrightarrow x \vee y \in J$".

$$x \vee y = [(s_1 \wedge r) \vee (t_1 \wedge r')] \quad \vee$$

$$[(s_2 \wedge r) \vee (t_2 \wedge r')]$$

$$= ((s_1 \wedge r) \vee (s_2 \wedge r)) \quad \vee$$

$$((t_1 \wedge r') \vee (t_2 \wedge r'))$$

$$= ((s_1 \vee s_2) \wedge r) \quad \vee \quad ((t_1 \vee t_2) \wedge r') .$$

c) "$x \in J \Longrightarrow x' \in J$" .

Sea $x = (s_1 \wedge r) \vee (t_1 \wedge r')$

Probaremos que si $y = (s_1' \wedge r) \vee (t_1' \wedge r')$, entonces $x' = y$, es decir $x \vee y = 1$ y $x \wedge y = 0$.

$$x \vee y = [(s_1 \wedge r) \vee (t_1 \wedge r')] \quad \vee$$

$$[(s_1' \wedge r) \vee (t_1' \wedge r')]$$

$$= [(s_1 \wedge r) \vee (s_1' \wedge r)] \quad \vee$$

$$[(t_1 \wedge r') \vee (t_1' \wedge r')]$$

$$= [(s_1 \vee s_1') \wedge r] \vee [(t_1 \vee t_1') \wedge r']$$

$$= (1 \wedge r) \vee (1 \wedge r')$$

$$= r \vee r'$$

$$= 1 .$$

$$x \wedge y = [(s_1 \wedge r) \vee (t_1 \wedge r')] \quad \wedge$$

$$[(s_1' \wedge r) \vee (t_1' \wedge r')]$$

$$= [(s_1 \wedge r) \wedge ((s_1' \wedge r) \vee (t_1' \wedge r'))] \vee$$

$$[(t_1 \wedge r') \wedge ((s_1' \wedge r) \vee (t_1' \wedge r'))]$$

$$= ((s_1 \wedge r) \wedge (s_1' \wedge r)) \vee ((s_1 \wedge r) \wedge (t_1' \wedge r')) \vee$$

$$((t_1 \wedge r') \wedge (s_1' \wedge r)) \vee ((t_1 \wedge r') \wedge (t_1' \wedge r')).$$

$$= 0 .$$

ii) "$B \cup \{r\} \subset J$".

$x \in B \cup \{r\} \Longrightarrow x \in B$ ó $x = r$

si $x \in B \Longrightarrow x \in J$ ya que $x = (x \wedge r) \vee (x \wedge r')$

si $x = r \Longrightarrow x \in J$ ya que $x = (1 \wedge r) \vee (0 \wedge r')$.

iii) Sea H subálgebra tal que $B \cup \{r\} \subset H$. Probaremos que $J \subset H$.

Sea $x \in J \Longrightarrow x = (s \wedge r) \vee (t \wedge r')$ con s, t en B.

$\Longrightarrow x \in H$ ya que s, t, r, r' pertenecen a H y H es subálgebra.

Luego $J = [B \cup \{r\}]$.

<u>2.7.8. DEFINICION</u>

Sea A un Algebra de Boole, $I \subset A$. I es llamado un ideal de A si:

$$I \vee I \subset I$$
$$A \wedge I \subset I$$
$$0 \in I .$$

NOTA

Un ideal I es llamado propio si $I \neq A$.

2.7.9. DEFINICION

Sea I un ideal de A. I es llamado ideal maximal de A si I es propio, y si I'es un ideal tal que $I \subset I'$ entonces $I' = I$ ó $I' = A$.

2.7.10. EJEMPLOS

E1 Si A es un Algebra de Boole, entonces $\{0\}$ es un ideal de A.

E2 Si X es un conjunto diferente de vacío y $x_o \in X$, entonccs $I = \{ P \subset X \mid x_o \notin P\}$ es un ideal maximal de P(X).

Prueba

i) "I es un ideal".

$$(P \in I \text{ y } Q \in I) \Longrightarrow (x_o \notin P \text{ y } x_o \notin Q)$$
$$\Longrightarrow x_o \notin P \cup Q$$
$$\Longrightarrow P \cup Q \in I .$$

$$(M \in P(X) \text{ y } P \in I) \Longrightarrow (M \subset X \text{ y } x_o \notin P)$$
$$\Longrightarrow x_o \notin M \cap P$$
$$\Longrightarrow M \cap P \in I .$$

"$\phi \in I$"

Es trivial ya que $\phi \subset X$ y $xo \notin \phi$.

ii) I es ideal maximal.

I es un ideal propio ya que $X \notin I$.

Sea I' un ideal tal que $I \subset I'$ y supongamos que $I \neq I'$, probaremos que $I' = P(X)$.

$$\text{Sea } Q \in I' - I \Longrightarrow x_o \in Q$$
$$\Longrightarrow x_o \notin Q^c$$
$$\Longrightarrow Q^c \in I$$
$$\Longrightarrow Q \cup Q^c \in I'$$
$$\Longrightarrow X \in I'$$

pero X es el 1 de P(X), entonces I' no es propio (se probará en 2.7.19) ya que $X \in I'$; luego $I' = P(X)$.

E3 Sea X un conjunto. $I = \{P \subset X \mid P \text{ es finito}\}$ es un ideal en P(X).

<u>Prueba</u>

i) Sea $P \in I$ y $Q \in I \Longrightarrow P$ es finito y Q es finito.

$\Longrightarrow P \cup Q$ es finito

$\Longrightarrow P \cup Q \in I$.

ii) Sea $M \subset X$ y $P \in I \Longrightarrow M \subset X$ y P es finito

$\Longrightarrow M \cap P$ es finito

$\Longrightarrow M \cap P \in I$.

iii) $\Phi \in I$ ya que $\Phi \subset X$ y Φ es finito.

E4 Sea X un conjunto. $A = \{B \subset X \mid B$ es numerable$\}$ es un ideal en $P(x)$.

<u>Prueba</u>

i) Sea $B \in A$ y $C \in A \Longrightarrow B$ es numerable y C es numerable

$\Longrightarrow B \cup C$ es numerable

$\Longrightarrow B \cup C \in A$.

ii) Sea $M \subset X$ y $B \in A$, entonces B es numerable y como $M \cap B \subset B$, tenemos que $M \cap B$ es numerable, ya que todo subconjunto de un conjunto numerable lo es también.

Luego, $M \cap B \in A$.

iii) $\Phi \subset X$ y Φ es numerable, ya que es finito.

Luego, $\Phi \in A$.

E5 Sea X un espacio topológico, $I = \{B \subset X \mid \overset{o}{B} = \Phi\}$ es un ideal en $P(X)$.

Prueba

i) "$A \in I$ y $B \in I \Longrightarrow A \cup B \in I$".

Trivial, ya que unión de dos conjuntos raros es un conjunto raro.

ii) $A \in I$ y $B \subset X \Longrightarrow A \cap B \in I$ (II.3.7.)

iii) $\Phi \in I$ ya que $\overset{\circ}{\overline{\Phi}} = \Phi$.

PROPIEDADES DE IDEALES

2.7.11. PROPOSICION

Sea A un Algebra de Boole, $I \subset A$. Entonces I es un ideal en el Algebra A si y sólo si I es ideal en el Anillo de Boole A.

PRUEBA

i) Si I es un ideal del álgebra A y x, y son elementos de I, entonces $x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$ es un elemento de I, lo que implica que $(I, +)$ es un subgrupo de $(A,+)$; $A I \subset I$ ya que $AI = A \wedge I$. Por lo tanto, I es un ideal del anillo A.

ii) Si I es un ideal en el anillo de Boole A, entonces $I \vee I \subset I$ ya que $x \vee y = x + y + xy$, además si $x \in A$ y $y \in I$, $xy = x \wedge y \in I$, es decir $A \wedge I \subset I$. También, $0 = y + y \in I$.

Luego, I es un ideal en el álgebra de Boole A.

2.7.12. PROPOSICION

El núcleo de todo morfismo es un ideal.

PRUEBA

Sea $f : A \to B$ un morfismo entre álgebras de Boole. Probaremos que $\text{Ker } f = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ es un ideal de A.

i) Sean $x \in \text{Ker} f$ y $y \in \text{Ker} f$

$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = 0 \vee 0 = 0.$

Luego, $x \vee y \in \text{Ker } f.$

ii) Sea $x \in A$, $y \in \text{Ker } f$

$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = f(x) \wedge 0 = 0.$

Luego, $x \wedge y \in \text{Ker } f.$

iii) $f(0) = 0$ ya que f es morfismo.

Luego, $0 \in \text{Ker } f.$

2.7.13. PROPOSICION

Todo ideal propio de un álgebra de Boole A es el núcleo de algún epimorfismo.

PRUEBA

Sea I un ideal propio de A, se probó que $\frac{A}{I}$ es un anillo de Boole y como existe un isomorfismo entre AB y A_{nB}, $\frac{A}{I}$ es una álgebra de Boole.

Sea $f : A \longrightarrow \frac{A}{I}$

$x \rightsquigarrow x + I$.

"f es epimorfismo".

a) $f(x + y) = (x + y) + I = (x + I) + (y + I) = f(x) + f(y)$

$f(xy) = xy + I = (x + I)(y + I) = f(x) . f(y).$

$f(1) = 1 + I = 1.$

b) f es una suryección, ya que un elemento cualquiera de

$\frac{A}{I}$ es de la forma $x + I = f(x)$ con x en A.

c) Ker $f = I$ ya que $x + I = I \iff x \in I.$

2.7.14. PROPOSICION

Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de ideales de un Algebra de Boole A, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un ideal de A.

PRUEBA

i) $(x \in \bigcap_{i \in I} A_i ,\ y \in \bigcap_{i \in I} A_i) \Longrightarrow (x \in A_i ,\ y \in A_i)$ para todo $i \in I$.

$\Longrightarrow x \vee y \in A_i$ para todo $i \in I$.

$\Longrightarrow x \vee y \in \bigcap_{i \in I} A_i$

ii) $(x \in A,\ y \in \bigcap_{i \in I} A_i) \Longrightarrow (x \in A,\ y \in A_i)$ para todo $i \in I$

$\Longrightarrow x \wedge y \in A_i$ para todo $i \in I$

$\Longrightarrow x \wedge y \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

iii) $0 \in A_i$, para todo i, por ser cada A_i un ideal, luego

$0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

2.7.15. PROPOSICION

Sean $A \neq \{0\}$ un álgebra de Boole, X_A el conjunto de ideales maximales. Entonces $X_A \neq \Phi$.

PRUEBA

Sea $\Omega = \{P \subset A \mid P$ es un ideal propio en $A\}$

$\Omega \neq \Phi$ ya que $\{0\} \in \Omega$.

Si Ω es ordenado por inclusión y si Ω' es un subconjunto de Ω totalmente ordenado, la unión de los elementos de Ω' es un elemento de Ω mayor que todos los de Ω'; luego, por el Lema de Zorn, en Ω hay al menos un elemento maximal P_o, el cual pertenece a X_A.

2.7.16. PROPOSICION

Un ideal propio I en un Algebra de Boole A es maximal si y sólo si $p \in I$ ó $p' \in I$ pero no ambos, para cada $p \in A$.

PRUEBA

i) Sea $I \in X_A$, $p \in A$, $p \notin I$; el conjunto

$J = \{x + yp \mid x \in I, y \in A\}$ es un ideal de A que contiene a I; como $p \in J$ y $p \notin I$, J contiene propiamente a I lo cual implica $J = A$; luego p' es de la forma $p' = x + yp$, $x \in I$, $y \in A$.

Luego, $p' = p' \cdot p' = xp' + yp.p' = xp' + y.0 = xp' \in I$.

Luego, $p' \in I$.

ii) Sea I un ideal, tal que para todo $p \in A$, $p \in I$ ó $p' \in I$. Si J es un ideal de A, tal que $I \subset J$ y $J \neq I$, entonces existe x, $x \in J$ y $x \notin I$, luego $x' \in I$, de aquí $x \vee x' \in J$; de donde para todo $y \in A$ se tiene que $y \wedge (x \vee x') = y \in J$, es decir $J = A$. Luego, $I \in X_A$.

2.7.17. PROPOSICION

Todo ideal propio en un Algebra de Boole puede ser incluido en algún ideal maximal.

PRUEBA

Sea I un ideal propio. Definamos

$\Omega = \{J \mid I \subset J, \ J$ un ideal propio de $A\}$

$\Omega \neq \Phi$ ya que $I \in \Omega$.

Ordenemos Ω por inclusión y sea $\Omega' \subset \Omega$, Ω' totalmente ordenado.

Si $T = \bigcup_{P \in \Omega'} P$ entonces $T \in \Omega$ y es mayorante de Ω', es decir $I \subset T$ para todo $I \in \Omega'$.

Luego por el lema de Zorn, existe un maximal J_o en Ω; se puede probar que $J_o \in X_A$.

2.7.18. PROPOSICION

Sea A un álgebra de Boole. Entonces la intersección de los ideales maximales de A es igual a $\{0\}$.

PRUEBA

Si $b \in A$, $b \neq 0$, entonces $J = \{x \in A \mid x \leq b'\}$ es un ideal propio de A, lo que implica que existe K un ideal maximal, tal que $J \subset K$; como $b' \in J$, $b' \in K$; luego $b \notin K$, de donde $b \notin \bigcap_{I \in X_A} I$.

Luego $\bigcap_{I \in X_A} I = \{0\}$.

2.7.19. PROPOSICION

Sea A un álgebra de Boole, $I \subset A$ un ideal. Entonces I es propio si y sólo si $1 \notin I$.

PRUEBA

i) Supongamos $1 \in I$.

$$1 \in I \Longrightarrow (x \wedge 1 \in I) \quad \text{para todo } x \in A.$$
$$\Longrightarrow x \in I \quad \text{para todo } x \in A.$$
$$\Longrightarrow A \subset I$$
$$\Longrightarrow A = I.$$

Luego si I es propio entonces $1 \notin I$.

ii) Si $1 \notin I$, es trivial que I es ideal propio ya que $I \neq A$.

2.7.20. PROPOSICION

Sean E un espacio topológico compacto, I un ideal maximal de CL(E). Entonces $\bigcap_{\substack{Z \in CL(E) \\ Z \notin I}} Z \neq \Phi$.

PRUEBA

Supongamos que $\bigcap_{\substack{Z \in CL(E) \\ Z \notin I}} Z = \Phi$. Por ser E compacto, existen $Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_n$, clopens de E, $Z_i \notin I$ para todo $i \leq n$, tales que $\bigcap_{i=1}^{n} Z_i = \Phi$ lo que implica que

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} Z_i^c .$$

Pero como I es ideal maximal, $Z_i^c \in I$, o sea que $E \in I$, lo cual es absurdo ya que I es un ideal propio.

2.7.21. PROPOSICION

Sean A un álgebra de Boole.

$$X_A = \{I \subset A \mid I \text{ es ideal maximal}\}$$

$$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{Mor}\,(A, \{0, 1\}) &\longrightarrow X_A \\ f &\rightsquigarrow \mathrm{Ker}\, f \end{aligned}$$

entonces Ψ es una biyección.

PRUEBA

i) "Ker f es un ideal maximal"

Probemos que $x \in \text{Ker } f$ ó $x' \in \text{Ker } f$ para todo $x \in A$. Supongamos que $x \notin \text{Ker } f$, entonces $f(x) = 1$, luego $(f(x))' = 0$, es decir $f(x') = 0$, por tanto $x' \in \text{Ker } f$.

ii) "Ψ es inyectiva".

Supongamos que $\Psi(f) = \Psi(g)$ y probemos que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.

Si $x \in A$, entonces

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \text{Ker } f \\ 1 & \text{si } x \notin \text{Ker } f \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Longrightarrow x \in \text{Ker } f \\ &\Longrightarrow x \in \text{Ker } g \\ &\Longrightarrow g(x) = 0 \end{aligned}$$

Luego $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Longrightarrow f(x') = 0 \\ &\Longrightarrow x' \in \text{Ker } f \\ &\Longrightarrow x' \in \text{Ker } g \\ &\Longrightarrow g(x') = 0 \\ &\Longrightarrow g(x) = 1 \end{aligned}$$

Luego $f(x) = g(x)$.

iii) "Ψ es suryectiva".

Si I es un ideal maximal de A, definimos

$$f : A \longrightarrow \{0,1\}$$
$$x \rightsquigarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x \in I \\ 1 \text{ si } x' \in I \end{cases}$$

entonces f es un morfismo, tal que Ker f = I.

Luego, Ψ es biyección.

2.8. RETRACCIONES

2.8.1. DEFINICION

Sean A, B Algebras de Boole; se dice que B es una retracción de A si existen f, g morfismos como en el diagrama, tales que $f \circ g = 1_B$.

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$$

NOTA

Podemos observar de esta definición que f es un epimorfismo y g es un monomorfismo, lo que equivale a que f es suryectiva y g inyectiva.

2.8.2. PROPOSICION

Si B es una retracción de A, entonces:

i) B es isomórfica a una subálgebra de A.

ii) B es isomórfica a un álgebra cociente $\frac{A}{I}$.

PRUEBA

Sea el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

i) Como g es morfismo, g(B) es subálgebra de A y siendo g inyectiva, tenemos que B es isomórfica a g(B).

ii) Como f es suryectiva, entonces podemos definir la siguiente función:

$$\overline{f} : B \longrightarrow \frac{A}{\operatorname{Ker} f}$$

$$f(x) \rightsquigarrow x + \operatorname{Ker} f$$

$\overline{f}$ es bien definida ya que:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow f(x) - f(y) = 0 \\ &\Longrightarrow f(x - y) = 0 \\ &\Longrightarrow x - y \in \operatorname{Ker} f \\ &\Longrightarrow x + \operatorname{Ker} f = y + \operatorname{Ker} f \end{aligned}$$

$\overline{f}$ es inyectiva

$$\begin{aligned} \overline{f}(f(x)) = \overline{f}(f(y)) &\Longrightarrow x + \ker f = y + \operatorname{Ker} f \\ &\Longrightarrow x - y \in \operatorname{Ker} f \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(x - y) = 0$$

$$\Longrightarrow f(x) - f(y) = 0$$

$$\Longrightarrow f(x) = f(y) .$$

$\overline{f}$ es sobreyectiva.

$\overline{f}$ es una suryección ya que un elemento cualquiera de $\frac{A}{\text{Ker } f}$ es de la forma $x + \text{Ker } f = \overline{f}(f(x))$ con $f(x)$ en B.

2.8.3. DEFINICIONES

Sea B un Algebra de Boole.

a) B es una "sub-retracción absoluta" si para todo monomorfismo $g : B \to A$, con A álgebra de Boole cualquiera, existe un epimorfismo $f : A \to B$ tal que $f \circ g = 1_B$.

b) B es una "retracción absoluta cociente" si a todo epimorfismo $f : A \to B$, A un álgebra de Boole cualquiera, le corresponde un monomorfismo $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$.

2.9. ALGEBRAS PARTICULARES

2.9.1. ALGEBRA LIBRE

2.9.1.1. DEFINICIONES

a) Un conjunto E generador de un álgebra de Boole B es llamado "libre" si para toda álgebra de Boole A y para toda función $g : E \to A$ existe un morfismo $f : B \to A$ tal que $f(p) = g(p)$ para todo p en E.

b) Una álgebra Booleana B es llamada "libre" si tiene un conjunto generador libre.

2.9.1.2. PROPIEDADES

i) "Sean E un generador libre de un álgebra de Boole B, $g : E \to A$ una función con A una álgebra de Boole. Entonces el morfismo $f : B \to A$, tal que $f_{|E} = g$ es único".

Prueba

Por ser E generador libre $f(p) = g(p)$ para todo p en E, o sea $f_{|E} = g$. Supongamos que existe $h : B \to A$ tal que $h_{|E} = g$; de aquí tenemos que $f_{|E} = h_{|E}$ y por (2.7.6) concluimos que $f = h$. Luego f es único.

ii) "Sean B_1, B_2 dos álgebras de Boole, E_1 un generador libre de B_1, E_2 un generador libre de B_2, $g : E_1 \to E_2$ una función biyectiva.

Entonces existe un isomorfismo f entre B1 y B_2".

<u>Prueba</u>. Consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "g"'] & B_1 \arrow[d, shift right, "f_2"'] \\ E_2 \arrow[r] \arrow[u, shift right, "g^{-1}"'] & B_2 \arrow[u, shift right, "f_1"'] \end{tikzcd}$$

en el cual $f_1 : B_2 \to B_1$ y $f_2 : B_1 \to B_2$ son morfismos tales que:

$$f_1\big|_{E_2} = g^{-1} \quad \text{y} \quad f_2\big|_{E_1} = g .$$

f_1 existe por ser E_2 generador libre de B_2 y porque g puede considerarse como una función de E_1 a B_2. Similarmente se justifica la existencia de f_2. Probaremos que f_1 y f_2 son inversos uno de otro.

Sea $x \in E_1$; se tiene:

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2)(x) &= f_1(f_2(x)) \\ &= f_1(g(x)) \\ &= g^{-1}(g(x)) \\ &= (g^{-1} \circ g)(x) \\ &= 1_{E_1}(x) \\ &= 1_{B_1}(x). \qquad (2.7.6.) \end{aligned}$$

Por coincidir en un generador tenemos que

$f_1 \circ f_2 = 1_{B_1}$; de manera similar se prueba que

$f_2 \circ f_1 = 1_{B_2}$.

Luego existe un isomorfismo entre B_1 y B_2 .

2.9.2. ALGEBRA DISTRIBUTIVA

2.9.2.1. DEFINICION

Una Algebra de Boole A es llamada "completamente distributiva" si para todo par de conjuntos I, J y para toda función $p : I \times J \to A$ se cumple que:

$$\inf_{i \in I} (\sup_{j \in J} p(i, j)) = \sup_{\psi \in F(I,J)} (\inf_{i \in I} (p(i, \psi(i))))$$

en donde $F(I, J)$ denota el conjunto de funciones de I a J.

2.9.2.2. EJEMPLO

"Si $X \neq \Phi$, entonces P(X) es completamente distributiva".

Probaremos que:

$$\bigcap_{i \in I} (\bigcup_{j \in J} p(i, j)) = \bigcup_{\Psi \in F(I,J)} (\bigcap_{i \in I} p(i, \Psi(i))) .$$

sea $P = \bigcap_{i \in I} (\bigcup_{j \in J} p(i, j))$ y $Q = \bigcup_{\Psi \in Z(I,J)} (\bigcap_{i \in I} p(i,\Psi(i)))$.

i) $x \in P \Longrightarrow x \in \bigcup_{j \in J} p(i, j)$ para todo $i \in I$

$\Longrightarrow x \in p(i, j_i)$ para todo $i \in I$ y para algún $j_i \in J$.

$\Longrightarrow x \in p(i, \Psi(i))$ para todo $i \in I$, con $\Psi(i) = j_i$.

$\Longrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} p(i, \Psi(i))$

$\Longrightarrow x \in Q$.

ii) $x \in Q \Longrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} p(i, \Psi(i))$ para algún $\Psi \in F(I, J)$

$\Longrightarrow x \in p(i, \Psi(i))$ para todo $i \in I$, $\Psi \in F(I, J)$

$\Longrightarrow x \in p(i, j_i)$ para todo $i \in I$, $j_i \in J$.

$\Longrightarrow x \in \bigcup_{j \in J} p(i, j)$ para todo $i \in I$.

$\Longrightarrow x \in P$.

2.9.3. ALGEBRAS PROYECTIVAS

2.9.3.1. DEFINICION

Se dice que un Algebra de Boole B es "proyectiva", si para todo epimorfismo $f : A \to C$, A, C álgebras cualesquiera, y para todo morfismo $h : B \to C$; existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $f \circ g = h$.

Es decir que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & C \\ & B \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

2.9.3.2. EJEMPLO

El Algebra de Boole $\{0, 1\}$ es un álgebra proyectiva ya que para todo epimorfismo $f : A \to C$ y todo morfismo $h : \{0, 1\} \to C$, existe el morfismo

$$\begin{array}{rcl} g : \{0, 1\} & \longrightarrow & A \\ 1 & \rightsquigarrow & 1 \\ 0 & \rightsquigarrow & 0 \end{array}$$

tal que $f \circ g = h$.

2.9.3.3. PROPOSICION

Toda álgebra proyectiva B es una retracción absoluta cociente.

PRUEBA

Sea un epimorfismo $f : A \to B$. Probaremos que existe un monomorfismo $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & B \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "1_B"'] & \end{tikzcd}$$

g existe y $f \circ g = 1_B$, ya que B es proyectiva.

g es inyectivo, ya que

$$g(x_1) = g(x_2) \Longrightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$$

$$\Longrightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$$

$$\Longrightarrow 1_B(x_1) = 1_B(x_2)$$

$$\Longrightarrow x_1 = x_2 .$$

Luego existe el monomorfismo

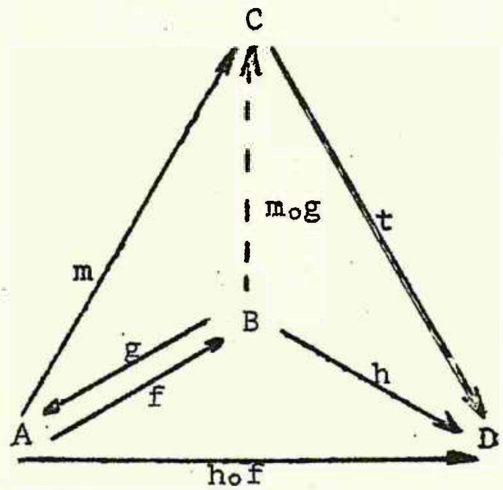
$$g : B \to A \quad \text{tal que} \quad f \circ g = 1_B .$$

2.9.3.4. PROPOSICION

Toda retracción de un álgebra proyectiva es proyectiva.

PRUEBA

Sea B una retracción de un álgebra A proyectiva y consideremos el diagrama:



f, g existen ya que B es retracción de A ($f \circ g = 1_B$).

Sean $t : C \to D$ un epimorfismo y $h : B \to D$ un morfismo; podemos formar el morfismo $h \circ f$ y como A es proyectiva, entonces existe $m : A \to C$ tal que $t \circ m = h \circ f$. De aquí tenemos que existe $m \circ g : B \to C$ tal que $t \circ (m \circ g) = h$.

Luego B es proyectiva.

2.9.3.5. PROPOSICION

Toda álgebra Booleana libre es proyectiva.

PRUEBA

Sea B un álgebra Booleana libre y sea I tal que $[I] = B$. Sean $f : A \to C$ un epimorfismo y $t : B \to C$ un morfismo.

Definamos $k : \begin{array}{l} I \longrightarrow A \\ x \rightsquigarrow a \end{array}$ tal que $f(a) = t(x)$;

está bien definida ya que f es epimorfismo.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & C \\
& I \arrow[ul, "k"'] \arrow[d, "j"] & \\
& B \arrow[uul, "r"] \arrow[uur, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

en donde "j" es la inyección canónica; r existe y $r \circ j = k$ porque I es un generador libre.

Probemos que $t/I = (f_o g)/I$.

Sea $x \in I$; se tiene que

$(f \circ r)(x) = f(r(x)) = f(k(x)) = f(a) = t(x)$.

Luego, por coincidir en un generador libre $t = f \circ r$.

Por tanto, B es proyectiva.

2.9.3.6. PROPOSICION

Toda retracción de un álgebra libre es proyectiva.

PRUEBA

Sea A una retracción de un álgebra libre; por (2.9.3.5.) A es retracción de un álgebra proyectiva, y por (2.9.3.4.) tenemos que A es proyectiva.

NOTA

Otras propiedades de álgebras proyectivas se verán en el capítulo III.

CAPITULO III
RELACION FUNTORIAL ENTRE ALGEBRAS DE BOOLE Y ESPACIOS DE BOOLE

El objetivo principal de este capítulo es construir un funtor entre la categoría de las Algebras de Boole y la Categoría de los Espacios de Boole.

3.1. ESPECTRO DE UN ALGEBRA DE BOOLE

3.1.1. DEFINICION

Si A es un álgebra de Boole, llamaremos espectro de A al conjunto $X_A = \{I \subset A \mid I \text{ es un ideal maximal}\}$

$X_A \neq \emptyset$ (por 2.7.15.).

3.1.2. PROPOSICION

Si A es un álgebra de Boole, la función siguiente es un morfismo inyectivo de álgebras de Boole:

$$\begin{aligned} h : A &\longrightarrow P(X_A) \\ x &\rightsquigarrow h(x) = \{I \in X_A \mid x \notin I\} . \end{aligned}$$

PRUEBA

Si x, y son dos elementos de A é $I \in X_A$ entonces

$$\begin{aligned} I \in h(x \vee y) &\Longleftrightarrow x \vee y \notin I \\ &\Longleftrightarrow x \notin I \text{ ó } y \notin I \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow I \in h(x) \text{ ó } I \in h(y)$$

$$\Longleftrightarrow I \in h(x) \cup h(y)$$

de donde

$$h(x \vee y) = h(x) \cup h(y).$$

Si $x \in A$ é $I \in X_A$:

$$I \in h(x') \Longleftrightarrow x' \notin I$$

$$\Longleftrightarrow x \in I$$

$$\Longleftrightarrow I \in h(x)^c$$

de donde $h(x') = h(x)^c$.

Luego, h es un morfismo.

h es inyectivo.

Si $x \in \operatorname{Ker} h$, entonces $h(x) = \Phi$, de donde $x \in I$ para todo $I \in X_A$; es decir que $x \in \bigcap_{I \in X_A} I$; como $\bigcap_{I \in X_A} I = \{0\}$ (por 2.7.18.), $x = 0$.

ESTRUCTURA DE ESPACIO DE BOOLE DE X_A.

3.1.3. DEFINICION

Si A es un álgebra de Boole, un subconjunto B de X_A será llamado un abierto si

$$B = \Phi \quad \text{ó si} \quad B = \bigcup_{h(x) \subset B} h(x) .$$

Es decir, que los conjuntos de la forma $h(x)$ constituyen una base de X_A. Se verifica trivialmente que se cumplen los axiomas necesarios para que, con esta definición de abiertos, X_A sea un espacio topológico.

3.1.4. PROPIEDADES

Si A es un álgebra de Boole, el espacio topológico X_A posee las propiedades que siguen:

1º) X_A es separado.

2º) Si $Y \neq \Phi$ y $Y \subset X_A$ entonces

$\overline{Y} = \{I \in X_A \mid K(Y) \subset I\}$ en donde $K(Y) = \bigcap_{I \in Y} I$.

3º) X_A es compacto.

4º) $CL(X_A) = h(A)$.

5º) X_A es totalmente discontinuo.

PRUEBA

1º) Si $I \neq J$ son elementos de X_A, tomamos $x \in A$ tal que $x \in I$, $x \notin J$; entonces $h(x)$ y $h(x')$ son dos abiertos disjuntos tales que $J \in h(x)$ é $I \in h(x')$.

2º) Sea $T = \{I \in X_A \mid K(Y) \subset I\}$. Si $J \in T^c$, existe $x \in K(Y)$ tal que $x \notin J$; para este x se cumple que $h(x) \subset T^c$, de donde T^c es abierto; luego T es un cerrado; como $Y \subset T$, $\overline{Y} \subset T$.

Si $J \in \overline{Y}^c$, existe $x \in A$ tal que $h(x) \subset \overline{Y}^c$ y $J \in h(x)$; si $L \in Y$ entonces $L \notin \overline{Y}^c$, de donde $L \notin h(x)$, o sea $x \in L$; como $x \notin J$, $K(Y) \not\subset J$; luego $J \in T^c$; por tanto $T \subset \overline{Y}$.

3º) Sea $(Y_i)_{i\in\Omega}$ una familia de cerrados de X_A, tales que $\bigcap_{i\in\Omega} Y_i = \Phi$. Probaremos que existe $\Gamma \subset \Omega$, Γ finito, tal que $\bigcap_{i\in\Gamma} Y_i = \Phi$.

$\sum_{i\in\Omega} K(Y_i)$ es trivialmente un ideal de A; si fuera propio, existiría $I \in X_A$ tal que $\sum_{i\in\Omega} K(Y_i) \subset I$ (por 2.7.17.), de donde $K(Y_i) \subset I$, para todo $i \in \Omega$; esto implicaría que $I \in \overline{Y}_i = Y_i$, para todo $i \in \Omega$, lo cual no es posible porque $\bigcap_{i\in\Omega} Y_i = \Phi$.

Por tanto $\sum_{i\in\Omega} K(Y_i) = A$; luego existen $i_1, i_2, \ldots i_n$ en Ω y $x_1 \in K(Y_{i_1})$, $x_2 \in K(Y_{i_2})$, ... $x_n \in K(Y_{i_n})$ tales que $1 = x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n$.

Si $J \in X_A$ fuera un elemento de $\bigcap_{j=1}^{n} Y_{i_j}$, entonces $K(Y_{i_j}) \subset J$, para todo $j \leq n$ (por ser $Y_{i_j} = \overline{Y}_{i_j}$).

de donde $x_1, x_2, \ldots. x_n$ serían elementos de J, lo cual no es posible porque $1 \notin J$.

Por tanto $\bigcap_{j=1}^{n} Y_{i_j} = \Phi$.

4º) Sea $Y \subset X_A$ un clopen; por ser abierto, Y es de la forma $Y = \bigcup_{i \in \Omega} h(x_i)$; como es también cerrado, Y es un compacto (porque X_A es compacto); luego existen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ en Ω tales que $Y = \bigcup_{j=1}^{n} h(x_{i_j})$, de donde $Y = h(x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \ldots. x_{i_n})$ $\in h(A)$; por tanto $CL(X_A) \subset h(A)$.

Para todo $x \in A$: $h(x)$ es un abierto (por definición); como $h(x) = h(x')^c$, $h(x)$ es también cerrado; luego $h(A) \subset CL(X_A)$.

5º) Como $h(A)$ es una base de la topología sobre X_A, entonces, la familia de clopens de X_A es una base.

NOTAS

1º) Las propiedades 1 - 3 - 5 nos dicen que X_A es un espacio de Boole.

2º) La propiedad 4 nos dice que todo clopen de X_A es de la forma $h(x)$, con $x \in A$.

3.1.5. PROPOSICION

Sean A, B dos álgebras de Boole,

Mor (A, B) = $\{ f : A \to B \mid f$ es un morfismo$\}$

Mor $(X_B, X_A) = \{f : X_B \to X_A \mid f$ es continua$\}$.

Entonces:

i) Hay una biyección X entre Mor (A, B) y Mor (X_B, X_A).

ii) X(f) es inyectivo $\Longleftrightarrow$ f es sobre.

iii) X(f) es sobre $\Longleftrightarrow$ f es inyectiva.

PRUEBA

i) a) Si $f : A \to B$ es un morfismo é $I \subset B$ un ideal maximal, $f^{-1}(I) = \{x \in A \mid f(x) \in I\}$ es un ideal maximal de A .

Si $x, y \in f^{-1}(I)$: $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \in I$

Si $x \in A$, $y \in f^{-1}(I)$; $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \in I$

$f(0) = 0 \in I$.

Luego $f^{-1}(I)$ es ideal.

Si $x \in A$ es tal que $x \notin f^{-1}(I)$ entonces $f(x) \notin I$. Como I es maximal, $f(x') = f(x)' \in I$.

Por tanto $f^{-1}(I)$ es ideal maximal.

b) Si $f \in$ Mor (A, B), la función $X_f : X_B \longrightarrow X_A$, $I \rightsquigarrow f^{-1}(I)$ es continua.

Si $x \in A$,

$$
\begin{aligned}
X_f^{-1}(h(x)) &= \{I \in X_B \mid X_f(I) \in h(x)\} \\
&= \{I \in X_B \mid f^{-1}(I) \in h(x)\} \\
&= \{I \in X_B \mid x \notin f^{-1}(I)\} \\
&= \{I \in X_B \mid f(x) \notin I\} \\
&= \{I \in X_B \mid I \in h(f(x))\} \\
&= h(f(x))
\end{aligned}
$$

como $h(x) \in CL(X_A)$ y $h(f(x)) \in CL(XB)$, la función es continua, pues preservan los clopens, los cuales forman una base en todo Espacio de Boole.

c) La función $X : \text{Mor } (A, B) \longrightarrow \text{Mor } (X_B, X_A)$
$\qquad f \rightsquigarrow X_f : I \rightsquigarrow f^{-1}(I)$

es una biyección.

Sean f, g Mor (A, B), $f \neq g$ y sea $x \in A$ tal que $f(x) \neq g(x)$; como la función h (3.1.2) es inyectiva, $h(f(x)) \neq h(g(x))$; luego existe $J \in X_B$ tal que $f(x) \in J$, $g(x) \notin J$; para este $J : x \in f^{-1}(J)$; $x \notin g^{-1}(J)$, o sea que $X_f(J) \neq X_g(J)$; por tanto $X_f \neq X_g$ y X es inyección.

Sea $t : X_B \to X_A$ una función continua; si $x \in A$, $t^{-1}(h(x))$ es un clopen de X_B, de don

de existe $y \in B$ tal que $t^{-1}(h(x)) = h(y)$;
si definimos $t'(x) = y$, tendremos un morfismo $t' : A \to B : x \rightsquigarrow y_x$ tal que $x_{t'} = t$; luego, X es suryección.

ii) X_f es inyectivo $\Longrightarrow$ f e s sobre.

Si Z, T son clopens de X_A :

$X_f^{-1}(Z \cup T) = X_f^{-1}(Z) \cup X_f^{-1}(T)$

$X_f^{-1}(Z \cap T) = X_f^{-1}(Z) \cap X_f^{-1}(T)$

$X_f^{-1}(Z^c) = X_f^{-1}(Z)^c$.

Luego $P = \{X_f^{-1}(Z) \mid Z \in CL(X_A)\}$ es un campo de subconjuntos clopens de X_B.

Si $I, J \in X_B$, con $I \neq J$, como X_f es inyectivo, $X_f(I) \neq X_f(J)$; por ser X_A separado existe un clopen Z tal que $X_f(I) \in Z$, $X_f(J) \in Z^c$ ó sea que

$I \in X_f^{-1}(Z)$.

$J \in X_f^{-1}(Z^c) = (X_f^{-1}(Z))^c$.

Por cumplirse la hipótesis de 1.1.3, se tiene que $P = CL(X_B)$.

Si $y \in B$, $h(y) \in CL(X_B)$; luego $h(y) \in P$, ó sea que $h(y) = X_f^{-1}(Z)$ para algún clopen $Z \in X_A$; como todo clopen de X_A es de la forma $h(x)$, existe

$x \in A$ tal que $h(y) = X_f^{-1}(h(x))$.

Pero como $X_f^{-1}(h(x)) = h(f(x))$, tenemos

$h(y) = h(f(x))$. Por ser h un morfismo inyectivo, $y = f(x)$. Por tanto f es sobre.

f sobre $\Longrightarrow X_f$ inyectivo .

Sea $X_f(I) = X_f(J)$, se tiene $f^{-1}(I) = f^{-1}(J)$.

Sea $x \in I$. Por ser f sobre se tiene que existe y tal que $x = f(y)$, de aquí que $y \in f^{-1}(I)$ ó sea $y \in f^{-1}(J)$ por lo que $f(y) \in J$ y luego $x \in J$. Por tanto $I \subset J$. De manera similar $J \subset I$. Luego $I = J$.

iii) X_f sobre $\Longrightarrow f$ inyectiva .

Sea x, y en A tal que $f(x) = f(y)$.

Sea $I \in X_A$, $I \notin h(x)$.

$I \notin h(x) \Longrightarrow x \in I \Longrightarrow f(x) \in f(I) \Longrightarrow f(y) \in f(I)$.

Como X_f es sobre existe $J \in X_B$ tal que $X_f(J) = I$, ó sea $f^{-1}(J) = I$. Luego

$$\begin{aligned} f(y) \in f(I) &\Longrightarrow f(y) \in f(f^{-1}(J)) \\ &\Longrightarrow f(y) \in J \\ &\Longrightarrow y \in f^{-1}(J) \\ &\Longrightarrow y \in I \\ &\Longrightarrow I \notin h(y). \end{aligned}$$

Luego $h(y) \subset h(x)$.

De manera igual $h(x) \subset h(y)$. Por lo tanto

$h(x) = h(y)$, como h es inyección $x = y$.

f inyectiva $\Longrightarrow$ X_f es sobre.

Sea $I \in X_A$, $f(I)$ es un ideal de B. Sea $J \in X_B$

tal que $f(I) \subset J$.

$f(I) \subset J \Longrightarrow f^{-1}(f(I)) \subset f^{-1}(J)$

$\Longrightarrow I \subset f^{-1}(J)$ (por ser f inyectiva)

Como $f^{-1}(J)$ es un ideal maximal, entonces

$I = f^{-1}(J) = X_f(J)$. Por tanto X_f es sobre.

NOTA

La función X tiene la propiedad adicional siguiente:

"si $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$ es un diagrama de álgebras de Boole, entonces $X(f \circ g) = X(g) \circ X(f)$".

$$
\begin{aligned}
(X(f \circ g))(I) = (f \circ g)^{-1}(I) &= g^{-1}(f^{-1}(I)) \\
&= g^{-1}(X_f(I)) \\
&= X_g(X_f(I)) \\
&= (X_g \circ X_f)(I) .
\end{aligned}
$$

3.2. CARACTER FUNTORIAL DE X_A

3.2.1. EL FUNTOR X

El espacio de Boole X_A que puede asociársele a toda álgebra de Boole A nos permite definir un funtor contravariante X que va de la categoría A_B de álgebras de Boole a la categoría de los espacios topológicos:

$$
\begin{array}{l}
X : A_B \longrightarrow T\,o\,P \\
\quad\;\; A \rightsquigarrow X_A \\
\quad\;\; f : A \to A_1 \rightsquigarrow X_f : X_{A_1} \longrightarrow X_A \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad I \rightsquigarrow f^{-1}(I)
\end{array}
$$

se prueba trivialmente que X es un funtor contravariante.

3.2.2. PROPOSICION

Si A es un álgebra de Boole hay un isomorfismo entre A y $CL(X_A)$.

PRUEBA

Basta identificar cada $x \in A$ con el clopen $h(x)$ ya que h es un morfismo inyectivo.

3.2.3. PROPOSICION

Sean A y B dos álgebras de Boole, $f : A \to B$ un isomorfismo. Entonces, hay una biyección bicontinua $\overline{f} : X_A \to X_B$.

PRUEBA

Si $I \in X_A$, $f(I)$ es un ideal maximal de B, por ser f un isomorfismo. Definimos $\overline{f}$ así:

$$\begin{aligned} \overline{f} : X_A &\longrightarrow X_B \\ I &\rightsquigarrow f(I) \; . \end{aligned}$$

$\overline{f}$ es continua, ya que si $x \in B$:

$$\begin{aligned} \overline{f}^{-1}(h(x)) &= \{I \in X_A \mid \overline{f}(I) \in h(x)\} \\ &= \{I \in X_A \mid f(I) \in h(x)\} \\ &= \{I \in X_A \mid x \notin f(I)\} \\ &= \{I \in X_A \mid f^{-1}(x) \notin I\} \\ &= \{I \in X_A \mid I \in h(f^{-1}(x))\} \\ &= h(f^{-1}(x)). \end{aligned}$$

La inversa de $\overline{f}$ es $X_f : X_B \longrightarrow X_A$, $I \rightsquigarrow f^{-1}(I)$

la cual es continua.

3.2.4. PROPOSICION

Sean A un álgebra de Boole, $\mathbb{I}_A$ el conjunto de ideales de A, $ab(X_A)$ el conjunto de abiertos del espacio de Boole X_A. Entonces hay una biyección entre $\mathbb{I}_A$ y $ab(X_A)$.

PRUEBA

1º) Si I es un ideal de A, $\varepsilon(I) = \{J \in X_A \mid I \not\subset J\}$ es un abierto de X_A.

Si $J \in \varepsilon(I)$, sea $x \in I$, $x \notin J$;

$h(x) \subset \varepsilon(I)$, ya que $L \in h(x) \Longrightarrow x \notin L$

$\Longrightarrow I \not\subset L$.

Luego $h(x)$ es un clopen tal que $J \in h(x)$ y $h(x) \subset \varepsilon(I)$, de donde $\varepsilon(I)$ es un abierto de X_A.

2º) Si I es un ideal de A y $p : A \longrightarrow \frac{A}{I}$ es el morfismo canónico, la función:

$$\begin{aligned} t : X_{\frac{A}{I}} &\longrightarrow (X_A - \varepsilon(I)) \\ J &\rightsquigarrow p^{-1}(J) \end{aligned}$$

es una biyección.

La inversa de t es la función:

$$\begin{aligned} t' : (X_A - \varepsilon(I)) &\longrightarrow X_{\frac{A}{I}} \\ J &\rightsquigarrow p(J) \ . \end{aligned}$$

3º) Sean I, T dos ideales de A. Entonces

$$\varepsilon(I) \subset \varepsilon(T) \Longrightarrow I \subset T.$$

$$\varepsilon(I) \subset \varepsilon(T) \Longrightarrow I \subset L, \text{ para todo } L \in X_A \text{ tal que } T \subset L$$

$$\Longrightarrow I \subset \bigcap_{\substack{L \in X_A \\ T \subset L}} L$$

$$\Longrightarrow I \subset \bigcap_{L \in (X_A - \varepsilon(T))} L$$

$$\Longrightarrow I \subset \bigcap p^{-1}(M), \quad M \in X_{\frac{A}{T}}$$

$$\Longrightarrow I \subset p^{-1}(\bigcap M), \quad M \in X_{\frac{A}{T}}$$

$$\Longrightarrow I \subset p^{-1}(T), \quad (T \text{ es el cero de } \tfrac{A}{T})$$

$$\Longrightarrow I \subset T.$$

4º) La función
$$\varepsilon : \mathbb{I}_A \longrightarrow ab(X_A)$$
$$I \rightsquigarrow \varepsilon(I)$$

es una inyección.

$$\varepsilon(I) = \varepsilon(T) \Longrightarrow \varepsilon(I) \subset \varepsilon(T) \text{ y } \varepsilon(T) \subset \varepsilon(I)$$

$$\Longrightarrow I \subset T \text{ y } T \subset I$$

$$\Longrightarrow I = T.$$

5º) La función ε es una suryección.

Sea O un abierto de X_A é $I = \{x \in A \mid h(x) \subset O\}$ trivialmente I es un ideal de A. Además:

$$\varepsilon(I) = \{J \in X_A \mid I \not\subset J\}$$

$$= \{J \in X_A \mid h(x) \subset 0 \ \text{ y } \ x \notin J, \text{ para cierto } x \in A\}$$

$$= \{J \in X_A \mid h(x) \subset 0 \ \text{ y } \ J \in h(x), \text{ para cierto } x \in A\}$$

$$= \{J \in X_A \mid J \in 0\}$$

$$= 0 .$$

Luego ε es suryección.

3.2.5. PROPOSICION

Si A, B son dos álgebras de Boole, hay una **biyección** $\Psi : Mor(A, B) \longrightarrow Mor(CL(X_A), CL(X_B))$.

PRUEBA

Si $f \in Mor(A, B)$, definimos

$$\Psi(f) : CL(X_A) \longrightarrow CL(X_B)$$
$$h(x) \rightsquigarrow h(f(x))$$

la función $\Psi(f)$ está bien definida porque todo clopen de X_A es de la forma $h(x)$; $\Psi(f)$ es un morfismo ya que h es un morfismo.

Ψ es inyección.

Si $g, f \in Mor(A, B)$, $f \neq g$, sea $x \in A$ tal que $f(x) \neq g(x)$; entonces $h(f(x)) \neq h(g(x))$, ósea $\Psi(f)(x) \neq \Psi(g)(x)$; luego $\Psi(f) \neq \Psi(g)$, de donde Ψ es inyección.

Ψ es suryección.

Si $g \in Mor(CL(X_A), CL(X_B))$, definimos $f : \begin{matrix} A \longrightarrow B \\ x \rightsquigarrow y \end{matrix}$,

en donde "y" es el único elemento de B tal que $g(h(x)) = h(y)$; trivialmente $\Psi(f)=g$, ó sea que Ψ es sobreyectiva.

NOTA

La función Ψ anterior, tiene la propiedad adicional siguiente:

Dadas tres álgebras de Boole: A, B, C y un diagrama $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$, entonces $\Psi(f \circ g) = \Psi(f) \circ \Psi(g)$.

Ya que si $x \in A$:

$$\begin{aligned}(\Psi(f \circ g))(h(x)) &= h(f(g(x))) \\ &= \Psi(f)(h(g(x))) \\ &= \Psi(f)(\Psi(g)(h(x))) \\ &= (\Psi(f) \circ \Psi(g))(h(x)) \ .\end{aligned}$$

3.2.6. PROPOSICION

Si E es un espacio de Boole, la función

$$\psi_E : \begin{matrix} E \longrightarrow X_{CL(E)} \\ x \rightsquigarrow \{Z \in CL(E) \mid x \notin Z\} \end{matrix}$$

es una biyección bicontinua.

PRUEBA

Ψ_E está bien definida.

Si $T, Z \in \Psi_E(x) : (x \notin T \;\; y \;\; x \notin Z)$

$\Longrightarrow (x \notin T \cup Z) \Longrightarrow T \cup Z \in \Psi_E(x)$.

Si $T \in CL(E)$ y $Z \in \Psi_E(x) : x \notin Z$

$\Longrightarrow x \notin T \cap Z \Longrightarrow T \cap Z \in \Psi_E(x)$

$x \notin \Phi \Longrightarrow \Phi \in \Psi_E(x)$.

Si $Z \in CL(E)$ es tal que $Z \notin \Psi_E(x)$, entonces $x \in Z$; luego $x \notin Z^c$, ó sea que $Z^c \in \Psi_E(x)$.

Por tanto $\Psi_E(x)$ es un ideal maximal de $CL(E)$.

Ψ_E es una inyección.

$$\Psi_E(x) = \Psi_E(y) \Longrightarrow \{Z \in CL(E) \mid x \in Z\} = \{Z \in CL(E) \mid y \in Z\}$$

$$\Longrightarrow \bigcap_{\substack{Z \in CL(E) \\ x \in Z}} = \bigcap_{\substack{Z \in CL(E) \\ y \in Z}}$$

$$\Longrightarrow C_x = C_y \qquad \text{(por II.6.4.)}$$

$$\Longrightarrow \{x\} = \{y\}$$

$$\Longrightarrow x = y .$$

Ψ_E es suryección.

Si I es un ideal maximal de CL(E), existe

$y \in \bigcap_{\substack{z \in CL(E) \\ z \notin I}} Z$ (por 2.7.20.); para este y:

$$\Psi_E(y) = \{z \in CL(E) \mid y \notin Z\} = \{z \in CL(E) \mid z \in I\} = I \; .$$

Ψ_E es continua.

Sea $Z \in CL(E)$; $\Psi_E^{-1}(h(z)) = \{x \in E \mid \Psi_E(x) \in h(z)\}$

$$= \{x \in E \mid Z \notin \Psi_E(x)\}$$

$$= \{x \in E \mid x \in Z\}$$

$$= Z$$

como todo abierto de $X_{CL(E)}$ es unión de subconjuntos de la forma h(Z), Z c E un clopen, Ψ_E es continua.

Ψ_E^{-1} es continua.

Si Z es un clopen de E, $\Psi_E(Z) = h(Z)$ implica que Ψ_E^{-1} es continua, ya que todo abierto de E es unión de subconjuntos clopens.

3.2.7. PROPOSICION

Sean A un álgebra de Boole, E un espacio de Boole, $Mor(X_A, E) = \{f : X_A \to E \mid f \text{ es continua}\}$

Mor (CL(E), A) = {f : CL(E) → A | f es un morfismo}. Entonces hay una biyección.

$$\alpha_{A,E} : \mathrm{Mor}(X_A, E) \longrightarrow \mathrm{Mor}\ (CL(E), A).$$

PRUEBA

1º) Si $f : X_A \to E$ es una función continua, la aplicación $\overline{f} : CL(E) \rightsquigarrow A$ en donde $\overline{f}(P)$ es igual
$P \rightsquigarrow \overline{f}(P)$
al único punto de A tal que $h(\overline{f}(P)) = f^{-1}(P)$ es un morfismo .

Sean P, Z ∈ CL(E); x, y en A tales que
$h(x) = f^{-1}(P)$, $h(y) = f^{-1}(Z)$. Como h es un morfismo, $h(x \vee y) = h(x) \cup h(y)$

$$= f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Z)$$

$$= f^{-1}(P \cup Z)$$

de donde

$$\overline{f}(P \cup Z) = x \vee y = \overline{f}(P) \vee \overline{f}(Z)$$

de modo semejante

$$\overline{f}(P \cap Z) = \overline{f}(P) \wedge \overline{f}(Z)$$

y

$$\overline{f}(P^c) = \overline{f}(P)' .$$

2º) La función $\alpha_{A,E}$: $Mor\ (X_A\ , E) \longrightarrow Mor\ (CL(E), A)$

$$f \rightsquigarrow \overline{f}$$

es una biyección.

$\alpha_{A,E}$ es inyección.

$\overline{f} = \overline{g}$ implica $f^{-1}(p) = g^{-1}(p)$, para todo clopen $P \subset E$.

Si $I \in X_A$, $\{f(I)\} = C_{f(I)} = \cap Z,\ Z \in CL(E)$ y $f(I) \in Z$

$= \cap Z,\ Z \in CL(E)$ é $I \in f^{-1}(Z)$

$= \cap Z,\ Z \in CL(E)$ é $I \in g^{-1}(Z)$

$= \cap Z,\ Z \in CL(E)$ é $g(I) \in Z$

$= C_{g(I)}$

$= \{g(I)\}$.

Luego $f(I) = g(I)$, de donde $f = g$.

Por tanto $\alpha_{A,E}$ es inyección.

$\alpha_{A,E}$ es suryección.

Sea $g : CL(E) \to A$ un morfismo y consideremos el diagrama $X_A \xrightarrow{Xg} X_{CL(E)} \xrightarrow{\psi_E^{-1}} E$; la composición $\psi_E^{-1} \circ X_g$ es una función continua que prueba la suryección de $\alpha_{A,E}$, ya que si P es un clopen de E:

$$
\begin{aligned}
(\Psi_E^{-1} \circ X_g)^{-1}(P) &= \{I \in X_A \mid \Psi_E^{-1} \circ X_g)(I) \in P\} \\
&= \{I \in X_A \mid \Psi_E^{-1} (X_g(I)) \in P\} \\
&= \{I \in X_A \mid \Psi_E^{-1} (g^{-1}(I)) \in P\} \\
&= \{I \in X_A \mid \bigcap_{\substack{Z \in CL(E) \\ Z \notin g^{-1}(I)}} Z \in P\} \\
&= \{I \in X_A \mid g(P) \notin I\} \\
&= h(g(p)).
\end{aligned}
$$

<u>3.2.8. PROPOSICION</u>

Si $f : A \to B$ es un morfismo entre álgebras de Boole y $g : E \to F$ una función continua entre espacios de Boole, entonces el diagrama siguiente es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}\,(X_A, E) \arrow[r, "\alpha_{A,E}"] \arrow[d, "\gamma_{f,g}"'] & \mathrm{Mor}\,(CL(E), A) \arrow[d, "\delta_{f,g}"] \\
\mathrm{Mor}\,(X_B, F) \arrow[r, "\alpha_{B,F}"] & \mathrm{Mor}\,(CL(F), B)
\end{tikzcd}
$$

en donde:

$\gamma_{f,g}(t) = g \circ t \circ X_f$, $\delta_{f,g}(r) = f \circ r \circ CL(g)$.

PRUEBA

Probemos que $\delta_{f,g} \circ \alpha_{A,E} = \alpha_{B,F} \circ \gamma_{f,g}$.

Si $m : X_A \to E$ es función continua y $P \in CL(F)$:

$$(\delta_{f,g} \circ \alpha_{A,E})(m)(P) = (f \circ \alpha_{A,E}(m) \circ CL(g))(P) \text{ (ver 3.2.10-2)}$$

$$= f(\alpha_{A,E}(m)(g^{-1}(P)))$$

$$= f(x) \text{ , en donde } x \text{ es tal que}$$

$$h(x) = m^{-1}(g^{-1}(P)).$$

$$(\alpha_{B,F} \circ \gamma_{f,g})(m)(P) = (\alpha_{B,F}(g \circ m \circ X_f))(P)$$

$$= y \text{ , en donde } y \text{ es tal que}$$

$$h(y) = (g \circ m \circ X_f)^{-1}(P)$$

$$= X_f^{-1}(m^{-1}(g^{-1}(P)))$$

pero $X_f^{-1}(m^{-1}(g^{-1}(P))) = X_f^{-1}(h(x)) = h(f(x))$

(prueba de que X_f es continua en 3.1.5.).

Luego $f(x) = y$. Por lo tanto

$$\delta_{f,g} \circ \alpha_{A,E} = \alpha_{B,F} \circ \gamma_{f,g} .$$

3.2.9. PROPOSICION

Sean E, F dos espacios de Boole,

$\mathrm{Mor}\ (E, F) = \{f : E \to F \mid f \text{ es continua}\}$

$\mathrm{Mor}\ (X_{CL(E)}, X_{CL(F)}) = \{f : X_{CL(E)} \to X_{CL(F)} \mid f \text{ es continua}\}.$

Entonces hay una biyección

$\gamma : \mathrm{Mor}\ (E, F) \to \mathrm{Mor}\ (X_{CL(E)}, X_{CL(F)})$.

PRUEBA

Si $f \in \mathrm{Mor}\ (E, F)$, tenemos el diagrama

$$X_{CL(E)} \xrightarrow{\Psi_E^{-1}} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\Psi_F} X_{CL(F)} .$$

Si $g \in \mathrm{Mor}\ (X_{CL(E)}, X_{CL(F)})$, tenemos el diagrama

$$E \xrightarrow{\Psi_E} X_{CL(E)} \xrightarrow{g} X_{CL(F)} \xrightarrow{\Psi_f^{-1}} F .$$

Luego, podemos definir $\gamma(f) = \Psi_F \circ f \circ \Psi_E^{-1}$ y $\delta(g) = \Psi_F^{-1} \circ g \circ \Psi_E$.

γ y δ son funciones inversas una de la otra, ya que:

$(\gamma \circ \delta)(g) = \gamma(\delta(g)) = \gamma(\Psi_F^{-1} \circ g \circ \Psi_E) = \Psi_F \circ \Psi_F^{-1} \circ g \circ \Psi_E \circ \Psi_E^{-1} = g$

$(\delta \circ \gamma)(f) = \delta(\Psi_F \circ f \circ \Psi_E^{-1}) = \Psi_F^{-1} \circ \Psi_F \circ f \circ \Psi_E^{-1} \circ \Psi_E = f$.

<u>NOTA</u>

La función γ cumple la propiedad adicional siguiente: "Si $E \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} G$ es un diagrama de espacios de Boole, entonces $\gamma(f \circ g) = \gamma(f) \circ \gamma(g)$".

$$\gamma(f) \circ \gamma(g) = (\Psi_G \circ f \circ \Psi_F^{-1}) \circ (\Psi_F \circ g \circ \Psi_E^{-1})$$

$$= \Psi_G \circ (f \circ g) \circ \Psi_E^{-1}$$

$$= \gamma(f \circ g) .$$

<u>3.2.10. PROPOSICION</u>

Sean E, F dos espacios de Boole,

$\mathrm{Mor}\ (E, F) = \{f : E \to F \mid f \text{ es continua}\}$

$\mathrm{Mor}\ (CL(F), CL(E)) = \{f : CL(F) \to CL(E) \mid f$ es morfismo de Algebras de Boole$\}$.

Entonces hay una biyección

$$CL : \mathrm{Mor}(E, F) \longrightarrow \mathrm{Mor}\ (CL(F), CL(E)).$$

<u>PRUEBA</u>

Se tiene el diagrama:

$$\mathrm{Mor}\ (E,F) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Mor}\ (X_{CL(E)}, X_{CL(F)}) \xrightarrow{X^{-1}} \mathrm{Mor}\ (CL(F), CL(E)) .$$

$CL = X^{-1} \circ \gamma$ es la biyección buscada.

<u>NOTAS</u>

La función CL cumple las propiedades siguientes:

1º) $CL(f \circ g) = CL(g) \circ CL(f)$.

$$CL(F \circ g)(Z) = (X^{-1} \circ \gamma)(f \circ g)(Z) = (X^{-1}(\gamma(f \circ g)))(Z)$$

$$= (X^{-1}(\gamma(f) \circ \gamma(g)))(Z)$$

$$= (X^{-1}(\gamma(g)) \circ X^{-1}(\gamma(f)))(Z)$$

$$= (CL(g) \circ CL(f))(Z).$$

2º) $CL(f)(Z) = f^{-1}(Z)$.

Sea $f \in Mor\ (E, F)$ y $Z \in CL(F)$.

$$CL(f)(Z) = ((X^{-1} \circ \gamma)(f))(Z)$$

$$= (X^{-1}(\gamma(f)))(Z)$$

$$= (X^{-1}(\Psi_F \circ f \circ \Psi_E^{-1}))(Z)$$

$$= T\ ,$$

en donde T es el único clopen de E tal que

$$h(T) = (\Psi_E \circ f^{-1} \circ \Psi_F^{-1})(h(Z))\ .$$

Pero

$$(\Psi_E \circ f^{-1} \circ \Psi_E^{-1})(h(Z)) = (\Psi_E \circ f^{-1})(\Psi_F^{-1}(h(Z)))$$

$$= (\Psi_E \circ f^{-1})(Z)$$

$$= \Psi_E(f^{-1}(Z))$$

$$= h(f^{-1}(Z)).$$

Por tanto $T = f^{-1}(Z)$. (Ya que h e s un morfismo inyectivo).

3º) Si $f : E \to F$ es una función continua entre espacios de Boole, entonces:

f e s inyectiva $\Longleftrightarrow$ CL(f) es sobre.

f e s sobre $\Longleftrightarrow$ CL(f) es inyectivo.

<u>Prueba</u>

$CL(f) = (X^{-1} \circ \gamma)(f) = X^{-1}(\Psi_F \circ f \circ \Psi_E^{-1})$.

Como Ψ_E y Ψ_E^{-1} son biyecciones, $\Psi_F \circ f \circ \Psi_E^{-1}$ es inyectivo o sobre si f e s, respectivamente inyectivo o sobre. Luego por (3.1.5.) $X^{-1}(\Psi_E \circ f \circ \Psi_E^{-1})$ es sobre o inyetivo si f es,respectivamente inyectivo o sobre.

Por tanto

f inyectivo $\Longrightarrow$ CL(f) sobre

f sobre $\Longrightarrow$ CL(f) inyectivo.

$$\begin{aligned} f = CL^{-1}(CL(f)) &= (\gamma^{-1} \circ X)(CL(f)) \\ &= \gamma^{-1}(X(CL(f))) \\ &= \Psi_F^{-1} \circ X(CL(f)) \circ \Psi_E \ . \end{aligned}$$

Si CL(f) es inyectivo o sobre, X(CL(f)) es respectivamente, sobre o inyectivo (3.1.5).

Como Ψ_F^{-1} y Ψ_E son biyecciones,

$\Psi_F^{-1} \circ X(CL(f)) \circ \Psi_E$ será, por tanto, inyectivo o sobre si CL(f) es respectivamente, sobre o inyectivo. Luego

$$CL(f) \text{ inyectivo} \Longrightarrow f \text{ sobre}$$
$$CL(f) \text{ sobre} \Longrightarrow f \text{ inyectivo.}$$

3.2.11. PROPOSICION

Dado un espacio topológico E, CL(E) es una subálgebra de P(E); luego podemos definir el funtor contravariante:

$$\begin{aligned} CL : ToP &\longrightarrow A_B \\ E &\rightsquigarrow CL(E) \\ f : E \to F &\rightsquigarrow CL(f) : CL(F) \longrightarrow CL(E) \\ & \qquad\qquad P \rightsquigarrow f^{-1}(P). \end{aligned}$$

Fácilmente se prueba que CL es un funtor contravariante de la categoría de espacios topológicos a la categoría de las álgebras de Boole.

Si llamamos E_B a la categoría de los espacios de Boole y si consideramos $CL : E_B \longrightarrow A_B$, (o sea si restringimos el dominio del funtor CL a los espacios de Boole), probaremos que X y CL son funtores adjuntos a la izquierda.

"Los funtores

$$X : A_B \longrightarrow E_B$$
$$A \rightsquigarrow X_A$$
$$f:A\to B \rightsquigarrow X_f : X_B \to X_A \qquad y$$

$$CL : E_B \longrightarrow A_B$$
$$E \rightsquigarrow CL(E)$$
$$f:E\to F \rightsquigarrow CL(f): CL(F) \to CL(E)$$

son adjuntos a la izquierda".

De acuerdo a la definición (I.4.1.) la proposición (3.2.8.) lo demuestra.

3.3. SUMA DE ESPACIOS DE BOOLE

3.3.1. DEFINICION

Dada una familia $(X_i)_{i\in I}$ de espacios de Boole, sea $A = \Pi_{CL(X_i)}$ (una álgebra producto). Llamaremos suma de la familia $(X_i)_{i\in I}$ al espacio de Boole X_A.

NOTA

La suma de una familia (X_i) de espacios de Boole se representa $\sum X_i$.

La suma de dos espacios de Boole E, F se representa E + F.

3.3.2. PROPIEDADES

Sean A y B álgebras de Boole.

1º) Sean $I \in X_{AxB}$,

$Pr_1(I) = \{x \in A \mid (x, y) \in I$, para algún $y \in B\}$

$Pr_2(I) = \{y \in B \mid (x, y) \in I$, para algún $x \in A\}$.

Se tiene

i) Si $Pr_1(I) \neq A$ entonces $Pr_1(I) \in X_A$.

ii) Si $Pr_2(I) \neq B$ entonces $Pr_2(I) \in X_B$.

2º) a) Si $I \in X_A$ entonces $I \times B \in X_{AxB}$.

b) Si $I \in X_B$ entonces $A \times I \in X_{AxB}$.

3º) Si $I \in X_{AxB}$ entonces I es de la forma $Pr_1(I) \times B$

ó es de la forma $A \times Pr_2(I)$.

4º) a) Si $x \in A$ entonces $\{I \times B \mid I \in h(x)\} = h(x, o)$.

b) Si $x \in B$ entonces $\{A \times I \mid I \in h(x)\} = h(o, x)$.

5º) Sean $\hat{A} = \{I \times B \mid I \in X_A\}$, $\hat{B} = \{A \times I \mid I \in X_B\}$.

Entonces

i) $\hat{A} \cup \hat{B} = X_{AxB}$

ii) $\hat{A} \cap \hat{B} = \Phi$

iii) $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son clopens.

PRUEBA

1º) i) Si $Pr_1(I) \neq A$. Sean x_1 , $x_2 \in Pr_1(I)$.

x_1 , $x_2 \in Pr_1(I) \Longrightarrow (x_1, y_1) \in I$ y

$(x_2, y_2) \in I$ para algún $y_1 \in B$ y algún $y_2 \in B$ ya que I es ideal.

$\Longrightarrow (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) \in I$

$\Longrightarrow (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \in I$

$\Longrightarrow x_1 \vee x_2 \in Pr_1(I)$.

Sean $x_1 \in Pr_1(I)$ y $x \in A$; de aquí $(x_1, y_1) \in I$ para algún $y_1 \in B$. Además $(x, o) \in A \times B$ y por ser I un ideal de $A \times B$ se tiene que $(x_1 \wedge x, y_1 \wedge 0) \in I$ por lo que $x_1 \wedge x \in Pr_1(I)$.

$o \in Pr_1(I)$ ya que $(o, o) \in I$.

Por lo tanto $Pr_1(I)$ es un ideal de A.

$Pr_1(I)$ es maximal.

Supongamos que $x \notin Pr_1(I)$, entonces $(x, y) \notin I$ para todo $y \in B$; de aquí $(x, y)' \in I$ para todo $y \in B$, ya que I es maximal, es decir $(x', y') \in I$, para todo $y \in B$. Por tanto $x' \in Pr_1(I)$.

ii) Similar a la anterior.

2º) a) Sea $I \in X_A$ y probemos que $I \times B \in X_{A \times B}$.

Sean $(x_1, y_1) \in I \times B$, $(x_2, y_2) \in I \times B$.

$x_1 \vee x_2 \in I$ por ser I un ideal

$y_1 \vee y_2 \in B$ por ser B un álgebra.

Luego

$(x_1 \vee x_2 , y_1 \vee y_2) = (x_1 , y_1) \vee (x_2 , y_2) \in I \times B.$

Sean $(x_1 , y_1) \in I \times B$, $(x, y) \in A \times B$.

$x_1 \wedge x \in I$ por ser I un ideal de A

$y_1 \wedge y \in B$ por ser B un álgebra.

Luego

$(x_1 \wedge x, y_1 \wedge y) = (x_1 , y_1) \wedge (x, y) \in I \times B.$

$(o, o) \in I \times B.$

Por tanto $I \times B$ es un ideal de $A \times B$.

$I \times B$ es maximal.

Supongamos que $(x, y) \notin I \times B$, de aquí que $x \notin I$ y como I es ideal maximal de A se tiene que $x' \in I$. Además $y' \in B$; luego $(x', y') \in I \times B$ es decir $(x, y)' \in I \times B$.

b) De manera similar a la anterior.

3º) Sea $I \in X_{AxB}$, $I = Pr_1(I) \times Pr_2(I)$. Si $Pr_1(I) = A$ y $Pr_2(I) = B$ entonces se tiene $I = A \times B$ lo cual no es posible ya que I es un ideal maximal. Luego $Pr_1(I) \neq A$ ó $Pr_2(I) \neq B$.

Si $Pr_1(I) \neq A$ entonces $Pr_1(I) \in X_A$.

Si $Pr_2(I) \neq B$ entonces $Pr_2(I) \in X_B$.

Como $Pr_1(I) \times B$ es un ideal maximal por parte 2 y además $I \subset Pr_1(I) \times B$, entonces $I = Pr_1(I) \times B$. Similarmente si $Pr_2(I) \neq B$.

4º) a) Sea $x \in A$.

i) $I \in h(x) \Longrightarrow x \notin I$

$\Longrightarrow (x, 0) \notin I \times B$

$\Longrightarrow I \times B \in h(x, 0)$

Luego $\{I \times B \mid I \in h(x)\} \subset h(x, 0)$.

ii) $J \in h(x, 0) \Longrightarrow (x, 0) \notin J$

$\Longrightarrow x \notin Pr_1(J)$ ya que $0 \in Pr_2(J)$

$\Longrightarrow Pr_1(J) \in h(x)$.

Como $Pr_1(J) \neq A$ entonces $J = Pr_1(J) \times B$.

Luego $h(x, 0) \subset \{I \times B \mid I \in h(x)\}$.

b) Similarmente.

5º) i) $\hat{A} \cup \hat{B} = X_{A \times B}$ es inmediato por parte 2 y 3.

ii) $\hat{A} \cap \hat{B} = \phi$.

Supongamos que $Z \in \hat{A} \cap \hat{B}$; luego $Z = I \times B$ con $I \in X_A$ y $Z = A \times J$ con $J \in X_B$; de aquí se tiene $I \times B = A \times J$ lo cual es contradictorio ya que $I \neq A$ y $J \neq B$. Luego $\hat{A} \cap \hat{B} = \phi$.

iii) $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son clopen en $A \times B$ por parte 4.

3.3.3. PROPOSICION

Si E, F son dos espacios de Boole, existen funciones continuas

$$E \xrightarrow{n} E + F \xrightarrow{m} E$$

$$F \xrightarrow{s} E + F \xrightarrow{r} F$$

tales que $m \circ n = 1_E$ y $r \circ s = 1_F$.

PRUEBA

Consideremos

$$\begin{aligned} U : X_{CL(E)} &\longrightarrow X_{CL(E)\times CL(F)} \\ I &\rightsquigarrow I \times CL(F). \end{aligned}$$

U es bien definida, ya que $I \times CL(F)$ es un ideal maximal de $CL(E) \times CL(F)$ por ser I un ideal maximal de $CL(E)$.

Probemos que U es continua.

Sea $(M, N) \in CL(E) \times CL(F)$.

$$\begin{aligned} U^{-1}(h(M, N)) &= \{I \in X_{CL(E)} \mid U(I) \in h(M, N)\} \\ &= \{I \in X_{CL(E)} \mid I \times CL(F) \in h(M, N)\} \\ &= \{I \in X_{CL(E)} \mid (M, N) \notin I \times CL(F)\} \\ &= \{I \in X_{CL(E)} \mid M \notin I\} \\ &= h(M). \end{aligned}$$

Sean $I_o \in X_{CL(E)}$,

$I_1 = \{Z \in CL(E) \mid (Z, T) \in I$, para algún $T \in CL(F)\}$

y definamos

$$v : X_{CL(E)xCL(F)} \longrightarrow X_{CL(E)}$$

$$I \rightsquigarrow \begin{cases} I_1 , & \text{si } I_1 \neq CL(E) \\ I_o , & \text{si } I_1 = CL(E) \end{cases}$$

$v(I)$ es trivialmente un ideal maximal de $CL(E)$ (3.3.2-1).

"v es continua".

Sea $Z \in CL(E)$.

CASO 1

Si $Z \in I_o$.

"$(Z, T) \notin I$, para todo $T \in CL(F)$ si y solo si $(Z, \Phi) \notin I$".

Si $(Z, T) \notin I$, para todo $T \in CL(F)$; entonces $(Z, \Phi) \notin I$.

Si $(Z, T) \in I$, entonces $(Z, T) \wedge (Z, T^c) \in I$, por ser I un ideal, es decir $(Z, \Phi) \in I$.

$$\begin{aligned} v^{-1}(h(z)) &= \{I \mid v(I) \in h(z)\} \\ &= \{I \mid Z \notin v(I)\} \\ &= \{I \mid (Z, T) \notin I, \text{ para todo } T \in CL(F)\} \\ &= \{I \mid (Z, \Phi) \notin I\} \end{aligned}$$

$= \{I \mid I \in h(Z, \Phi)\}$

$= h(Z, \Phi).$

<u>CASO 2</u>

Si $Z \notin I_o$ entonces $Z^c \in I_o$ por ser I_o maxima.

$v^{-1}(h(Z^c)) = h(Z^c, \Phi)$ por caso anterior pero:

$$v^{-1}(h(Z^c)) = v^{-1}(h(Z)^c)$$

$$= (v^{-1}(h(Z)))^c$$

$$= h(Z^c, \Phi)$$

$$= h(Z, F)^c .$$

Luego

$$v^{-1}(h(Z)) = h(Z, F).$$

De acuerdo a sus definiciones se tiene que $v \circ u = 1_{X_{CL(E)}}$. Utilizando la biyección Ψ_E, definimos: $n = u \circ \Psi_E$, $m = \Psi_E^{-1} \circ v$ entonces

$$m \circ n = \Psi_E^{-1} \circ v \circ u \circ \Psi_E = \Psi_E^{-1} \circ 1_{X_{CL(E)}} \circ \Psi_E$$

$$= \Psi_E^{-1} \circ \Psi_E = 1_E .$$

De manera igual se definen s, r tales que $r \circ s = 1_F$.

3.3.4. PROPOSICION

Si E_1, E_2 son dos espacios de Boole, las dos condiciones que siguen son equivalentes

1º) $E_1 + E_2$ es inyectivo.

2º) E_1 y E_2 son ambos inyectivos.

PRUEBA

1) $\Longrightarrow$ 2)

Probaremos que E_1 es inyectivo.

Sea el diagrama de espacios de Boole

$$\begin{tikzcd}
E_1 & & G \\
& H \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

hay que encontrar $\overline{f} : G \to E_1$ tal que $\overline{f} \circ f = g$.

Por propiedades de $E_1 + E_2$ tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& E_1 + E_2 \arrow[dl, shift left, "m"] & \\
E_1 \arrow[ur, shift left, "n"] & & G \arrow[ul, "r"'] \\
& H \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

en donde $m \circ n = 1_{E_1}$, $r \circ f = n \circ g$ (r existe por ser $E_1 + E_2$ inyectivo).

Tomando $\overline{f} = m \circ r$, tenemos:

$$(m \circ r) \circ f = m \circ (r \circ f) = m \circ (n \circ g) = (m \circ n) \circ g$$
$$= 1_{E_1} \circ g = g.$$

Luego E_1 es inyectivo.

De modo semejante E_2 es inyectivo.

2) $\Longrightarrow$ 1)

Sea el diagrama de espacios de Boole.

$$\begin{tikzcd} E_1 + E_2 & & G \\ & H \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

hay que encontrar $\overline{f} : G \to E_1 + E_2$ tal que $\overline{f} \circ f = g$.

Sean los diagramas $E_1 \underset{m}{\overset{n}{\rightleftarrows}} E_1 + E_2$,

$E_2 \underset{r}{\overset{s}{\rightleftarrows}} E_1 + E_2$ con $m \circ n = 1_{E_1}$ y $r \circ s = 1_{E_2}$.

Se tiene que $H_1 = g^{-1}(n(E_1))$ y $H_2 = g^{-1}(s(E_2))$ son dos clopens disjuntos de H tales que $H_1 \cup H_2 = H$ por (3.3.2-5); luego $f(H_1)$ y $f(H_2)$ son dos cerrados disjuntos de G (por ser H compacto, H_1 y H_2 son compac-- tos de H; por ser f continua, $f(H_1)$ y $f(H_2)$ son compactos de G; por tanto son cerrados; y son disjuntos porque f es inyectiva).

Por ser $f(H_1)$ y $f(H_2)$ disjuntos y cerrados, -- existen dos clopens disjuntos G_1 y G_2 tales que: $f(H_1) \subset G_1$, $f(H_2) \subset G_2$ por (II.5.7.) y por formar los clopens una base y ser $f(H_1)$ y $f(H_2)$ compactos.

Consideremos $G = X_1 \cup X_2$, con $X_1 = G_1$, $X_2 = G - X_1$. Por ser E_1 y E_2 inyectivos, tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} E_1 & & X_1 \arrow[ll, "t_1"'] \\ & H_1 \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_2 & & X_2 \arrow[ll, "t_2"'] \\ & H_2 \arrow[ul, "g_2"] \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

en donde $g_1 = (m \circ g)_{|H_1}$, $f_1 = f_{|H_1}$

$$g_2 = (r \circ g)_{|H_2} , \quad f_2 = f_{|H_2} .$$

Definamos

$$\bar{f} : G \longrightarrow E_1 + E_2$$

$$x \rightsquigarrow \begin{cases} n(t_1(x)) & , \text{ si } x \in X_1 \\ s(t_2(x)) & , \text{ si } x \in X_2 \end{cases}$$

Sea $x \in H$.

Si $x \in H_1$:

$(\overline{f} \circ f)(x) = \overline{f}(f(x)) = \overline{f}(f_1(x))$ como $f_1(x) \in X_1$

$= n(t_1(f_1(x))) = n((t_1 \circ t_1)(x)) = n(g_1(x))$

$= n((m \circ g)(x)) = (n \circ m)(g(x)) = (n \circ m)(n(y))$

$= n((m \circ n)(y)) = n(y) = g(x)$

De igual manera, si $x \in H_2$: $(\overline{f} \circ f)(x) = g(x)$.

Por tanto $\overline{f} \circ f = g$.

3.3. 5. PROPOSICION

Si B_1 y B_2 son dos álgebras de Boole, hay una biyección bicontinua entre $X_{B_1 x B_2}$ y $X_{B_1} + X_{B_2}$.

PRUEBA

Como $X_{B_1} + X_{B_2} = X_{CL(X_{B_1}) x CL(X_{B_2})}$, bastará encontrar un isomorfismo entre $B_1 x B_2$ y $CL(X_{B_1}) x CL(X_{B_2})$.

La función

$$B_1 x B_2 \longrightarrow CL(X_{B_1}) x CL(X_{B_2})$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (h(x), h(y))$$

es trivialmente un isomorfismo.

3.3.6. DEFINICION

Un espacio de Boole E es llamado "proyectivo" si dados dos espacios de Boole G, H y funciones continuas como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "g"'] & & G \arrow[dl, "f"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

existe una función continua $\overline{f} : E \to G$ tal que $f \circ \overline{f} = g$.

<u>3.3.7. PROPOSICION</u>

Sean E, F dos espacios de Boole, $f : E \to F$ una biyección bicontinua. Entonces

1º) Si E es inyectivo, F es inyectivo.

2º) Si E es proyectivo, F es proyectivo.

<u>PRUEBA</u>

1º) Sea el diagrama de espacios de Boole

$$\begin{tikzcd} F & & G \\ & H \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

Por ser E inyectivo, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & E & \\ F \arrow[ur, "f^{-1}"] & & G \arrow[ul, "t_1"'] \\ & H \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd} \qquad t_1 \circ t = f^{-1} \circ g.$$

La función continua $\bar{t} = f \circ t_1$ es tal que

$\bar{t} \circ t = g$.

Luego, F es inyectivo.

2º) Se demuestra de manera similar.

3.3.8. PROPOSICION

Sean A, B dos álgebras de Boole, $f : A \to B$ un isomorfismo. Entonces si A es proyectiva, B es proyectiva.

PRUEBA

Sea

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "g"'] & & C \arrow[dl, "t"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

un diagrama de álgebras de Boole; por ser A proyectiva, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "r"] & \\ B \arrow[dr, "g"'] & & C \arrow[dl, "t"] \\ & D & \end{tikzcd} \qquad t \circ r = g \circ t.$$

"r" existe ya que A es proyectiva.

$\bar{t} = r \circ f^{-1}$ es tal que $t \circ \bar{t} = g$.

Luego B es proyectiva.

3.3.9. PROPOSICION

Si E es un espacio de Boole, las dos condiciones siguientes son equivalentes:

1º) E es inyectivo.

2º) CL(E) es proyectiva.

PRUEBA

1) $\Longrightarrow$ 2)

Sea el diagrama de álgebras de Boole

$$\begin{tikzcd} CL(E) \arrow[dr, "g"'] & & A \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Encontraremos $\overline{f} : CL(E) \to A$ tal que $f \circ \overline{f} = g$. Aplicando el funtor contravariante X (3.2.1.) tendremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & E & \\ X_{CL(E)} \arrow[ur, "m"] & & X_A \arrow[ul, "t"'] \\ & X_B \arrow[ul, "X_g"] \arrow[ur, "X_f"'] & \end{tikzcd} \qquad t \circ X_f = m \circ X_g.$$

en donde $m = \Psi_E^{-1}$ (3.2.6.); t existe por ser E inyectivo, ósea que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X_{CL(E)} & & X_A \arrow[ll, dashed, "r"'] \\ & X_B \arrow[ul, "X_g"] \arrow[ur, "X_f"'] & \end{tikzcd}$$

con $r = m^{-1} \circ t$

aplicando la función inversa de X (3.2.1.)

$$X^{-1}(r \circ X_f) = X^{-1}(X_g)$$

ó sea $X^{-1}(X_f) \circ X^{-1}(r) = X^{-1}(X_g)$ ó $f \circ X^{-1}(r) = g$.

$X^{-1}(r)$ es la función $\overline{f}$ buscada.

2) $\Longrightarrow$ 1)

Sea un diagrama de espacios de Boole.

$$\begin{tikzcd} E & & G \\ & H \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Encontraremos $\overline{f} : G \to E$ continua tal que $\overline{f} \circ f = g$. Aplicando el funtor contravariante CL (3.2.10.) tendremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} CL(E) \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "CL(g)"'] & & CL(G) \arrow[dl, "CL(f)"] \\ & CL(H) & \end{tikzcd}$$

$CL(f) \circ m = CL(g)$

"m" existe porque CL(E) es proyectiva.

Aplicando la función $t = CL^{-1}$ (3.2.10.) se tiene $t(CL(f) \circ m) = t(CL(g))$ ó $t(m) \circ t(CL(f)) = t(CL(g))$ ó $t(m) \circ f = g$; de donde $\overline{f} = t(m)$ es la función buscada.

3.3.10. PROPOSICION

Si B es un álgebra de Boole, las condiciones que siguen son equivalentes:

1º) B es proyectiva.

2ª) X_B es inyectivo.

PRUEBA

1) $\Longrightarrow$ 2)

Sea un diagrama de espacios de Boole

$$\begin{tikzcd}
X_B & & E \\
& F \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Hallaremos $\overline{f} : E \to X_B$ continua tal que $\overline{f} \circ f = g$.

Aplicando el funtor CL tendremos el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & B \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "m"] & \\ CL(X_B) \arrow[dr, "CL(g)"'] & & CL(E) \arrow[dl, "CL(f)"] \\ & CL(F) & \end{tikzcd}$$

$$CL(f)_\circ m = CL(g)_\circ h$$

ó

$$CL(f)_\circ m_\circ h^{-1} = CL(g)$$

en donde h e s la biyección de B a $CL(X_B)$.

Aplicando la función $t = CL^{-1}$ (3.2.10.)

$$t(CL(f) \circ m \circ h^{-1}) = t(CL(g))$$

ó $\quad t(m \circ h^{-1}) \circ t(CL(f)) = t(CL(g))$

ó $\quad t(m \circ h^{-1}) \circ f = g$

$\overline{f} = t(m \circ h^{-1})$ es la función buscada.

2) $\Longrightarrow$ 1)

Sea el diagrama de álgebras de Boole

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] B \arrow[dr, "g"'] & & C \arrow[dl, "f"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

aplicando el funtor X tendremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_B & & X_C \arrow[ll, "m"'] \\ & X_D \arrow[ul, "X_g"] \arrow[ur, "X_f"'] & \end{tikzcd} \qquad m \circ X_f = X_g$$

"m" existe por ser X_B inyectivo.

Aplicando la función X^{-1} se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, dashed, "X^{-1}(m)"] \arrow[dr, "g"'] & & C \arrow[dl, "f"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Luego B e s proyectiva.

3.3.11. PROPOSICION

Sean A, B dos álgebras de Boole. Entonces A x B e s proyectiva si y solo si A y B son ambas proyectivas.

PRUEBA

A x B es proyectiva $\Longleftrightarrow$ $X_{A\times B}$ es inyectivo (3.3.10.)

$\Longleftrightarrow$ $X_A + X_B$ es inyectivo (3.3.5.)

$\Longleftrightarrow$ X_A y X_B son ambos inyectivos (3.3.4.)

$\Longleftrightarrow$ A y B son ambas proyectivas.

3.3.12. DEFINICION

Dada una familia $(A_i)_{i\in I}$ de álgebras de Boole, llamaremos "suma de la familia $(A_i)_{i\in I}$", al álgebra $CL(\Pi X_{A_i})$, y se representa por $\sum A_i$.

3.3.13. PROPOSICION

Sea $(B_i)_{i\in I}$ una familia de álgebras de Boole.

Entonces $\sum B_i$ es proyectiva si y solo si cada B_i es proyectiva.

PRUEBA

$\sum B_i$ es proyectiva $\Longleftrightarrow$ $CL(\Pi X_{B_i})$ es proyectiva (3.3.12.)

$\Longleftrightarrow$ ΠX_{B_i} es inyectivo (3.3.9.)

$\Longleftrightarrow$ cada X_{B_i} es inyectivo (1.2.2.)

$\Longleftrightarrow$ cada B_i es proyectiva (3.3.10.)

CAPITULO IV
ALGEBRAS DE BOOLE COMPLETAS

4.1. ALGEBRA DE BOOLE COMPLETA

4.1.1. DEFINICION

Un álgebra Booleana es llamada "completa" si todo subconjunto de ella tiene un supremo y un ínfimo.

NOTA

Por (2.3.4.), podemos afirmar que "si todo subconjunto de un álgebra de Boole posee un supremo (o también si todo subconjunto tiene un ínfimo) entonces es completa".

4.1.2. EJEMPLOS

E1 Si $X \neq \Phi$, entonces $P(X)$ es un álgebra de Boole -- completa.

E2 El conjunto $R(X) = \{ P \subset X \mid P \text{ es abierto regular}\}$ con

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sup } \{p_i\} = (\bigcup p_i)^{\Omega} \\ \text{Inf } \{p_i\} = (\bigcap p_i)^{\Omega} \end{array}\right. \quad p_i \in R(X)$$

es un álgebra de Boole completa.

PRUEBA

"$\text{Sup } \{p_i\} = (\bigcup p_i)^{\Omega}$".

Sea $P = (\bigcup P_i)^{\text{o}}$.

Como el producto en los abiertos regulares coincide con la intersección de conjuntos cualesquiera; entonces la relación de orden es la misma dada por la inclusión.

$$P_i \subset \bigcup_i P_i \quad \text{y} \quad \bigcup_i P_i \subset \overset{\circ}{\overline{\bigcup_i P_i}} \qquad \text{por (II.3.9.)}$$

luego $P_i \subset P$ para todo i.

Sea $Q \in R(X)$ tal que $P_i \subset Q$, para todo i.

Probemos que $P \subset Q$.

$$\begin{aligned} P_i \subset Q, \text{ para todo } i &\Longrightarrow \bigcup_i P_i \subset Q \\ &\Longrightarrow \overset{\circ}{\overline{\bigcup_i P_i}} \subset \overset{\circ}{\overline{Q}} \\ &\Longrightarrow P \subset Q. \end{aligned}$$

De manera similar se prueba para el ínfimo.

4.2. σ - ALGEBRAS DE BOOLE

4.2.1. DEFINICIONES

a) Una "σ - álgebra" es un álgebra de Boole en la que todo conjunto numerable posee un supremo.

b) Sean X un espacio topológico, B un campo. B se llama "σ - campo" si es una σ - álgebra, es decir si es estable para las uniones numerables.

c) Sea A una σ - álgebras, $B \subset A$. B es llamada una "σ - subálgebra de A" si para todo $N \subset B$, N numerable, se cumple que N posee supremo en B.

d) Sean A, B, σ - álgebras de Boole, $f : A \to B$ un morfismo. f es llamado "σ - morfismo" si para todo $M \subset A$, M numerable se cumple que: $f(\mathrm{Sup}\{M\}) = \mathrm{Sup}\{f(M)\}$.

e) Sea A una σ - álgebra. A es una "σ - álgebra libre" si posee un conjunto libre de generadores.

f) Sea A un álgebra de Boole, I un ideal de A. I es llamado "σ - ideal" si para todo $B \subset I$, B numerable se tiene que B posee supremo en I.

g) Sean X un espacio topológico, $\{A_i\}_{i \in I}$ el conjunto de abiertos en X, B el σ - campo generado por los A_i (notación: $B = \langle\{A_i\}\rangle$), se llama "conjunto de Borel" o "Boreliano" a todo elemento de B.

h) Sea X un espacio de Boole. $S \subset X$. Se dice que S es un "conjunto de Baire en X", si pertenece al σ - campo generado por la clase de todos los conjuntos clopens.

i) Un espacio de Boole X, es un "σ - espacio de Boole" si la cerradura de todo conjunto abierto de Baire es abierto.

4.2.2. EJEMPLOS

E1 El álgebra numerable - conumerable de un conjunto $X \neq \Phi$ es una σ - álgebra.

Prueba

Sea $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos de X que son numerables o conumerables.

Probaremos que " $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ es numerable - conumerable".

i) A_i es numerable para todo i. Luego $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ es numerable ya que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

ii) Si A_j es conumerable para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces A_j^c es numerable. Se tiene que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$ e A_j^c por lo que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$ es numerable.

E2 "La clase de todos los subconjuntos magros de un espacio topológico X es un σ - ideal de P(X)".

Prueba

Sea $M = \{ B \subset X \mid B \text{ es magro} \}$.

"M es un ideal".

i) $\Phi \in M$.

ii) $(A \in M \text{ y } B \in M) \Longrightarrow (A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \text{ y } B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)$

donde A_i y B_i son raros.

$\Longrightarrow A \cup B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i)$

$\Longrightarrow A \cup B \in M$

ya que $A_i \cup B_i$ es raro para todo i.

iii) $(A \in M$ y $B \subset X) \Longrightarrow A \cap B = (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \cap B$

A_i raro.

$\Longrightarrow A \cap B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap B)$

$\Longrightarrow A \cap B \in M$

ya que $A_i \cap B$ es raro.

"M es σ - ideal".

Sea $P \subset M$ tal que P e s numerable.

Sea $T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, $A_i \in P$.

como cada A_i es magro tenemos que

$$T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{ij})$$

$$= \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} B_{ij}$$

Luego T e s magro ya que todo B_{ij} es r a r o. T e s el supremo de P.

E3 "Los conjuntos raros de Borel forman un σ - ideal en el σ - álgebra de todos los conjuntos de Borel".

Es una consecuencia del ejemplo anterior.

4.2.3. PROPOSICION

El núcleo de un σ - morfismo es un σ - ideal.

PRUEBA

Sea $f : A \to B$ un σ - morfismo.

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Ker} f$.

Tenemos que $\operatorname{Sup}\{f(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$

De aquí $f(\operatorname{Sup}\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$

de donde $\operatorname{Sup}\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Ker} f$, es decir Ker f es σ - ideal.

4.2.4. PROPOSICION

Todo σ - ideal propio es el núcleo de un σ - morfismo suryectivo.

PRUEBA

Sea B una σ - álgebra.

$M \subset B$, M un σ - ideal propio, probaremos que el morfismo

$$f : B \longrightarrow B/M \quad \text{es un } \sigma\text{ - morfismo suryectivo.}$$
$$x \rightsquigarrow x + M$$

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, como B es σ - álgebra sea

$\operatorname{Sup}\{X_n\} = X$.

Probaremos que $\operatorname{Sup}\{f(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = f(\operatorname{Sup}\{X_n\})$.

Sean $f(X_n) = Y_n$, $f(\operatorname{Sup}\{X_n\}) = Y$,

$Z \in \frac{B}{M}$; $Y_n \leq Z$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por ser f sobre, sea $t \in B$ tal que $f(t) = Z$.

Probemos que $Y \leq Z$.

$$
\begin{aligned}
Y_n \leq Z &\Longrightarrow f(X_n) \leq f(t) \\
&\Longrightarrow f(X_n \wedge t') \leq 0 \\
&\Longrightarrow f(X_n \wedge t') = 0 \\
&\Longrightarrow X_n \wedge t' \in M \\
&\Longrightarrow \operatorname{Sup}\{X_n \wedge t'\} \in M \\
&\Longrightarrow X \wedge t' \in M \\
&\Longrightarrow f(X \wedge t') = 0 \\
&\Longrightarrow f(X) \leq f(t) \\
&\Longrightarrow Y \leq Z.
\end{aligned}
$$

<u>4.2.5.</u>

Toda álgebra de Boole completa es una σ - álgebra.

PRUEBA

Es trivial ya que todo subconjunto de un álgebra de Boole completa posee supremo.

4.2.6.

La intersección de σ - subálgebras es σ - subálgebra.

PRUEBA

Sea $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de σ - subálgebras del álgebra A. $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset A_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Sea $E \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ tal que E es numerable. Luego E posee supremo en $\bigcap A_i$ ya que cada A_i es σ - subálgebra.

4.2.7.

Sea X un espacio topológico compacto. B el σ - campo de conjuntos de Borel de X. M el σ - ideal formado por los magros de Borel. R(X) el álgebra de los abiertos regulares de X.

Entonces:

1º) Existe $f : B \longrightarrow R(X)$, $Y \rightsquigarrow f(Y)$ tal que

i) $Y + M = f(Y) + M$

ii) f es σ - morfismo suryectivo.

iii) $\mathrm{Ker}\, f = M$.

2ª) $\frac{B}{M}$ es una álgebra completa.

PRUEBA

1º) Denotaremos $P \equiv T$ la relación $P + T \in M$ es decir $P + M = T + M$.

Sea $B_a = \{ P \subset X \mid (O + P) \in M$, para algún O abierto$\}$.

Todo abierto pertenece a B_a ya que para O abierto, $O + O = \phi \in M$.

"B_a forma un σ - campo".

a) $Z \in B_a$ y $Y \in B_a \Longrightarrow Z \cup Y \in B_a$.

$Z \in B_a$ y $Y \in B_a \Longrightarrow Z + O_1 \in M$ y $Y + O_2 \in M$ para algún O_1 y O_2 abiertos $\Longrightarrow (Z + O_1) \cup (Y + O_2) \in M$ ya que M es ideal.

Luego $(Z \cup Y) + (O_1 \cup O_2) \in M$ ya que

$(Z \cup Y) + (O_1 \cup O_2) \subset (Z + O_1) \cup (Y + O_2) \in M$

y M es ideal. Entonces como $O_1 \cup O_2$ es abierto se tiene que $Z \cup Y \in B_a$.

b) $Z \in B_a$ y $Y \in B_a \Longrightarrow Z \cap Y \in B_a$.

$Z \in B_a$ y $Y \in B_a \Longrightarrow (Z + O_1) \cup (Y + O_2) \in M$

para algún O_1 y O_2 abiertos y como

$(Z \cap Y) + (O_1 \cap O_2) \subset (Z + O_1) \cup (Y + O_2) \in M$

entonces para $U = O_1 \cap O_2$ abierto. Se tiene que $Z \cap Y \in B_a$.

c) $Z \in B_a \Longrightarrow Z^c \in B_a$.

Sea $Z \in B_a$, existe U abierto tal que $Z + U \in M$, es decir, $Z + M = U + M$.

Probemos que $Z + \overline{U} \in M$ es decir $(Z + M = \overline{U} + M)$, para ello será suficiente ver que

$U + M = \overline{U} + M$.

$U + \overline{U} = (U \cap \overline{U}^c) \cup (U^c \cap \overline{U}) = \Phi \cup Fr(U) \in M$

luego $Z + \overline{U} \in M$.

Se tiene que $Z^c + \overline{U}^c \in M$ ya que:

$Z^c + \overline{U}^c = (Z^c \cap \overline{U}) \cup (Z \cap \overline{U}^c) = Z + \overline{U}$

luego B_a es un campo.

B_a es σ - campo .

Sea $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $B_i \in B_a$ para todo i; probaremosque $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in B_a$.

$B_i \in B_a \Longrightarrow B_i + O_i \in M$ para algún O_i abierto

$\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i + O_i) \in M$ ya que M es σ - ideal

y como $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i + \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i + O_i) \in M$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$

es un abierto, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in B_a$. Luego el σ - campo de Borel B está incluido en B_a, ya que todo abierto pertenece a B_a.

Definamos $f : B \longrightarrow R(X)$, $Y \rightsquigarrow f(Y) = \hat{U}$ en donde U es un abierto tal que $Y + M = U + M$.

i) $Y + f(Y) \in M$.

Se probó que $U + M = \overline{U} + M$ para U abierto.

Además $U \subset \hat{U}$, entonces se tiene

$U + M = \hat{U} + M$ ya que $U \subset \hat{U} \subset \overline{U}$ y como

$Y + M = U + M$ entonces $Y + M = \hat{U} + M$, es decir, $Y + f(Y) \in M$.

f está bien definida.

"$Y_1 = Y_2 \Longrightarrow f(Y_1) = f(Y_2)$".

Sea $Y_1 = Y_2$. Se tiene que $Y_1 \equiv f(Y_1)$ y

$Y_2 \equiv f(Y_2)$ de aquí que $f(Y_1) \equiv f(Y_2)$.

Sea $f(Y_1) = U$ donde U es abierto regular.

$f(Y_2) = V$ donde V es abierto regular.

Probaremos que "$U = V$".

Tenemos que $U \equiv V$ y además $U \equiv \overline{U}$ y

$V \equiv \overline{V}$ entonces $V \equiv \overline{U}$ y $U \equiv \overline{V}$ es decir

$V + \overline{U} \in M$ y $U + \overline{V} \in M$.

$V \cap \overline{U}^{c} \subset (V \cap \overline{U}^{c}) \cup (V^{c} \cap \overline{U}) \Longrightarrow V \cap \overline{U}^{c} \in M$ (1)

$U \cap \overline{V}^{c} \subset (U \cap \overline{V}^{c}) \cup (U^{c} \cap \overline{V}) \Longrightarrow U \cap \overline{V}^{c} \in M$ (2)

de (1) y (2) se tienen conjuntos abiertos magros en un espacio topológico compacto; entonces se cumple que: $V \cap \overline{U}^{c} = \Phi$ y $U \cap \overline{V}^{c} = \Phi$ (II.8.6)

luego: $V \subset \overline{U}$ y $U \subset \overline{V}$;

y de aquí $\overline{V} = \overline{U}$ y como U y V son abiertos regulares, entonces $U = V$.

ii) f es morfismo.

$f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$.

Sea $S_1 \equiv U$; $U \equiv \mathring{\overline{U}}$ luego $S_1 \equiv \mathring{\overline{U}}$

$S_2 \equiv V$; $V \equiv \mathring{\overline{V}}$ luego $S_2 \equiv \mathring{\overline{V}}$

Se tiene que $S_1 \cup S_2 \equiv \mathring{\overline{U}} \cup \mathring{\overline{V}}$.

$f(S_1 \cup S_2) = (\mathring{\overline{U}} \cup \mathring{\overline{V}})^{\circ}$

$= (f(S_1) \cup f(S_2))^{\circ}$

$= (f(S_1) \vee f(S_2)$

$f(S^c) = (f(S))'$

$S \equiv U \Longrightarrow S \equiv \overline{U} \Longrightarrow S^c \equiv \overline{U}^{c}$.

Luego $f(S^c) = \overline{U}^{c} = (f(S))^{\underline{c}} = (f(S))'$.

f σ - morfismo .

Probemos que $f(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_n) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} \{f(S_n)\})^{\Omega}$

$$S_n \equiv U_n \Longrightarrow S_n \equiv \overset{\Omega}{U}_n$$

luego $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_n \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} \overset{\Omega}{U}_n$

$$f(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_n) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} \overset{\Omega}{U}_n)^{\Omega}$$

$$= (\bigcup_{i=1}^{\infty} f(S_n))^{\Omega} .$$

f es suryectiva.

Trivial, ya que si $a \in R(X)$ entonces $a \equiv a$ porque $R(X) \subset B$.

iii) Ker f = M .

Ya que $f(S) = \Phi \Longleftrightarrow S \in M$.

2°) Sea $g : \frac{B}{M} \longrightarrow R(X)$

$Y + M \rightsquigarrow f(Y)$.

g bien definida.

$$Z + M = Y + M \Longrightarrow Z + Y \in M$$

$$\Longrightarrow f(Z + Y) = 0$$

$$\Longrightarrow f(Z) + f(Y) = 0$$

$$\Longrightarrow f(Z) = f(Y) .$$

g inyectiva.

$$f(Z) = f(Y) \Longrightarrow f(Z) + f(Y) = 0$$
$$\Longrightarrow f(Z + Y) = 0$$
$$\Longrightarrow Z + Y \in M$$
$$\Longrightarrow Z + M = Y + M.$$

g suryectiva .

Trivial, ya que f lo es.

Entonces g es isomorfismo y como R(X) es completa entonces $\frac{B}{M}$ es completa también.

4.2.8. PROPOSICION

Sean A una σ - álgebra Booleana.

$E \subset A$.

B σ - álgebra generada por E.

$p \in B$.

Entonces:

existe $D \subset E$ tal que:

1º) D es numerable.

2º) "p" pertenece a la σ - subálgebra generada por D.

PRUEBA

Sean $P = \{T \subset E \mid T \text{ es numerable}\}$; para cada $T \in P$.

Sea, $< T > = \sigma$ - álgebra generada por T. Probemos que $\bigcup_{T \in P} < T > = B$.

i) $\bigcup_{T \in P} < T >$ es álgebra.

$x \in \bigcup_{T \in P} < T >$ y $y \in \bigcup_{T \in P} < T > \Longrightarrow x \in < T_1 >$ y

$y \in < T_2 >$ para algún $T_1 \in P$ y $T_2 \in P$.

De aquí $x \in < T_1 \cup T_2 >$ y $y \in < T_1 \cup T_2 >$ como

$< T_1 \cup T_2 >$ es σ - álgebra, entonces

$x \vee y \in < T_1 \cup T_2 >$ y $x \wedge y \in < T_1 \cup T_2 >$.

Luego $x \vee y \in \bigcup_{T \in P} < T >$ y $x \wedge y \in \bigcup_{T \in P} < T >$

también si $x \in \bigcup_{T \in P} < T >$ entonces $x' \in \bigcup_{T \in P} < T >$.

ii) $\bigcup_{T \in P} < T >$ es σ - álgebra .

Sean $x_1 , x_2 \ldots\ldots x_n \ldots\ldots$ en $\bigcup_{T \in P} < T >$

entonces $x_1 \in < T_1 >$, $x_2 \in < T_2 >$ .... $x_n \in < T_n >$

..... para $T_1 , T_2 \ldots\ldots T_n \ldots\ldots$ en P.

De aquí que $x_j \in < \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i >$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

iii) $E \subset \bigcup_{T \in P} \langle T \rangle$.

$x \in E \Longrightarrow x \in \langle \{x\} \rangle \Longrightarrow x \in \bigcup_{T \in P} \langle T \rangle$.

iv) Sea $E \subset M$ y M σ - álgebra; probaremos que

$\bigcup_{T \in P} \langle T \rangle \subset M$.

$x \in \bigcup_{T \in P} \langle T \rangle \Longrightarrow x \in \langle T_o \rangle$ para $T_o \in P$.

Como $T_o \subset E \subset M$, se tiene que $\langle T_o \rangle \subset M$, luego $x \in M$.

Hemos probado que $B = \bigcup_{T \in P} \langle T \rangle$.

Como $p \in B$, entonces $p \in \langle T_1 \rangle$ para $T_1 \in P$, es decir, $T_1 \subset E$ y T_1 numerable.

4.2.9. PROPOSICION

Todo conjunto cerrado de Baire es la intersección de una clase numerable de conjuntos abiertos.

PRUEBA

Sean F un conjunto cerrado de Baire en un espacio de Boole X.

$(P_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de clopen de X tal que $F \in \langle (P_i)_{i \geq 1} \rangle$ (por propiedad anterior).

f_n la función característica asociada a P_n , para cada n.

$$e(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mid f_n(x) - f_n(y) \mid \quad \text{para todo}$$

x, y en X, la cual existe porque es una sumatoria de términos menores que 1.

En X definamos la relación de equivalencia:

$x \equiv y$ si y sólo si $e(x, y) = 0$.

Si $x \in X$, denotaremos $\overline{x}$ la clase de equivalencia de x por la relación $\equiv$.

Formemos $J = \{\overline{x} \mid x \in X\}$, definamos la función

$$d : J \times J \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(\overline{x}, \overline{y}) \rightsquigarrow e(x, y).$$

d está bien definida.

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}_1, \overline{y}_1) \Longrightarrow \overline{x} = \overline{x}_1 \quad y \quad \overline{y} = \overline{y}_1$$

$$\Longrightarrow e(x, x_1) = 0 \quad y \quad e(y, y_1) = 0$$

$$\Longrightarrow (f_n(x) - f_n(x_1)) = 0 \ y \ (f_n(y) - f_n(y_1)) = 0$$

$$\Longrightarrow f_n(x) = f_n(x1) \quad y \quad f_n(y) = f_n(y_1)$$

$$\Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| = |f_n(x_1) - f_n(y_1)|$$

$$\Longrightarrow e(x, y) = e(x_1, y_1) .$$

d es una distancia sobre J .

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = e(x,y) = e(y, x) = d(\bar{y}, \bar{x})$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \quad \text{ya que} \quad e(x, y) \geq 0$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \implies e(x, y) = 0$$

$$\implies x \equiv y$$

$$\implies \bar{x} = \bar{y}$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(z) + f_n(z) + f_n(y)|$$

$$\leq \sum_1^\infty \frac{1}{2^n}[|f_n(x) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(y)|]$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(z)| + \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} |f_n(z) - f_n(y)|$$

$$= d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y}).$$

Cada f_n es continua .

Sea $O \subset \mathbb{R}$ un abierto; como

$$f_n^{-1}(O) = \begin{cases} \Phi & \text{si } 1 \notin O,\ 0 \notin O \\ P_n^c & \text{si } 0 \in O,\ 1 \notin O \\ P_n & \text{si } 0 \notin O,\ 1 \in O \\ X & \text{si } 0 \in O,\ 1 \in O. \end{cases}$$

entonces $f_n^{-1}(0)$ es abierto. De donde f_n es continua.

Sea $x \in X$ un elemento fijo. Para cada n la función

$$\begin{aligned} g_n : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightsquigarrow \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| \end{aligned}$$

es continua ya que f_n lo es.

Luego, para cada r, la función $h_r = \sum_{n=1}^{r} g_n$ es continua.

Sea la función

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightsquigarrow e(x, y) \end{aligned}$$

probaremos que la sucesión $(h_r)_{r\geq 1}$ converge uniformemente a f.

$$|f(r) - h_r(y)| = |\sum_{1}^{\infty} g_n(y) - \sum_{1}^{r} g_n(y)|$$

$$= |\sum_{r+1}^{\infty} g_n(y)| \leq \sum_{r+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^{r+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{r+2}} < \varepsilon \quad \text{para todo } r,$$

$$r \geq n_o \quad \text{para cierto } n_o.$$

Luego f es continua.

Sea $\begin{array}{l} g : X \longrightarrow J \\ x \rightsquigarrow \bar{x} \end{array}$ probemos que es continua.

Sea $B(\bar{x}, \xi)$ una bola abierta en J.

$$g^{-1}(B(\bar{x}, \xi)) = \{y \in X \mid d(\bar{x}, \bar{y}) < \xi\}$$

$$= \{y \in X \mid e(x, y) < \xi\}$$

$$= \{y \in X \mid f(y) < \xi\}$$

$$= f^{-1}(B(0, \xi))$$

lo cual es un abierto en X ya que f es continua.

Sea $M = \{Y \subset X \mid Y = \bigcup_{\bar{x} \in T} \bar{x}$, para algún $T \subset J\}$

probemos que es una σ - álgebra de P(X).

$$\bigcup_{\bar{x} \in T} \bar{x} \cup \bigcup_{\bar{y} \in T_1} \bar{y} = \bigcup_{\bar{x} \in T \cup T_1} \bar{x}$$

$$\bigcup_{\bar{x} \in T} \bar{x} \cap \bigcup_{\bar{y} \in T_1} \bar{y} = \bigcup_{\bar{x} \in T \cap T_1} \bar{x}$$

$$\left(\bigcup_{\bar{x} \in T} \bar{x}\right)^c = \bigcup_{\bar{x} \in J-T} \bar{x}$$

luego M es una subálgebra y M es σ - álgebra ya que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\bar{x} \in T_n} \bar{x}\right) = \bigcup_{\bar{x} \in \bigcup_1^\infty T_i} \bar{x} .$$

Sea $B = \{Y \subset X \mid Y = g^{-1}(T)$, para algún $T \subset J\}$ y probemos que $B = M$; para ello es suficiente demostrar que para $T \subset J$: $\bigcup_{\bar{x} \in T} \bar{x} = g^{-1}(T)$.

$$y \in \bigcup_{\bar{x} \in T} \bar{x} \iff y \in \bar{x} \quad \text{para algún } \bar{x} \in T.$$

$$\iff y \in g^{-1}(\{\bar{x}\}) \text{ para algún } \bar{x} \in T.$$

$$\iff y \in g^{-1}(T)$$

luego B es un σ - campo.

$P_n \in B$, para cada n .

$$y \in P_n \implies y \in \bar{y}$$

$$\implies y \in \bigcup_{x \in P_n} \bar{x}$$

$$y \in \bigcup_{x \in P_n} \bar{x} \implies y \in \bar{x} \text{ , para algún } x \in P_n$$

$$\implies \bar{y} = \bar{x} \text{ , para algún } x \in P_n$$

$$\implies y \equiv x \text{ , para algún } x \in P_n$$

$$\implies e(y, x) = 0$$

$$\implies f_n(x) - f_n(y) = 0$$

$$\implies f_n(x) = f_n(y)$$

$$\implies f_n(y) = 1$$

$$\implies y \in P_n .$$

Luego $P_n = \bigcup_{\bar{x} \in T} \bar{x}$ donde $T = \{\bar{x} \mid x \in P_n\}$.

$F \in B$ ya que $P_n \in B$, para todo n, implica que $<\{P_n\}> \subset B$ por ser B una σ - subálgebra de P(X).

Luego F e s de la forma $F = g^{-1}(T)$ para algún $T \subset J$. Como $g(g^{-1}(T)) = T$ entonces T e s un compacto ya que F e s un cerrado en un compacto y g e s continua. T compacto en un separado implica T e s cerrado y por ser J un espacio métrico se tiene que $T = \bigcap_1^\infty O_i$ con O_i abierto en J. Luego $F = \bigcap_1^\infty g^{-1}(O_i)$.

NOTA

La propiedad anterior, es equivalente a decir que: "todo conjunto abierto de Baire en un espacio de Boole es la unión de una clase numerable de conjuntos cerrados".

4.2.10. PROPOSICION

Todo conjunto abierto de Baire en un espacio de Boo le es la unión de una clase numerable de conjuntos clopen.

PRUEBA

Sea G un abierto de Baire; por lo anterior $G = \bigcup_1^\infty F_n$ con F_n cerrado; además por ser G un abierto

$$G = \bigcup_{i \in I} Z_i \qquad Z_i \subset G \text{ y } Z_i \text{ clopen,}$$

de aquí $F_n \subset \bigcup_{i\in I} Z_i$; como F_n es un compacto entonces existe $J_n \subset I$ finito tal que $F_n \subset \bigcup_{i\in J_n} Z_i = C_n$.

Por lo que $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset G$.

NOTA

Llamaremos álgebra dual de un espacio de Boole X al álgebra $CL(X)$.

4.2.11. PROPOSICION

El álgebra dual A de un espacio Booleano X es una σ - álgebra si y solo si X es un σ - espacio.

PRUEBA

i) Sea A una σ - álgebra y O un abierto de Baire en X, por propiedad anterior se tiene que $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$, con P_n clopen, y por estar en un σ - campo, $(P_n)_{n\geq 1}$ tiene un supremo en A y por propiedad (1.1.6.) $\overline{O}$ es abierto, de aquí que X es un σ - espacio.

ii) Sea X un σ - espacio y sea $\{P_n\}$ una clase numerable de elementos de A, luego $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ es un conjunto abierto de Baire en X, como $\overline{O}$ es un abierto para cada n, entonces $\{P_n\}$ tiene un supremo en A por (1.1.6). Luego X es una σ - álgebra.

4.3. ALGEBRA DE BOOLE CON LA CONDICION DE CADENA NUMERABLE (C.C.N.).

4.3.1. DEFINICION

Sea A un álgebra de Boole. Se dice que A satisface la condición de cadena numerable si todo conjunto E, $E \subset A$ disjunto de elementos no ceros, es numerable.

NOTA

1º) p, q en A son disjuntos si $p \wedge q = 0$.

2º) Un subconjunto E de A es disjunto si para todo p, q en E tales que $p \neq q$ entonces $p \wedge q = 0$.

4.3.2. EJEMPLO

El álgebra de abiertos regulares de un espacio X con una base numerable satisface la C.C.N. .

PRUEBA

Sea $(A_i)_{i \in I}$ una clase disjunta de abiertos regulares no vacios y B una base numerable de X.

Para cada abierto regular podemos encontrar un elemento de la base incluido en el tal que:

$$A_i \nparallel A_j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \Phi$$

$$\Longrightarrow E_i \cap E_j = \Phi \text{ para } E_i \subset A_i \quad y$$

$$E_j \subset A_j$$

$$\Longrightarrow E_i \nparallel E_j$$

De ésta forma se puede establecer una biyección entre $(A_i)_{i \in I}$ y un subconjunto de la base.

4.3.3. PROPOSICION

Un álgebra de Boole A satisface la C.C.N. si y solo si todo conjunto E en A tiene un subconjunto numerable D tal que D y E tienen las mismas cotas superiores.

PRUEBA

i) Sea $E \subset A$, E un conjunto disjunto de elementos no ceros, tal que $D \subset E$, D numerable y D y E con las mismas cotas superiores.

Probaremos que $D = E$.

Sea $p \in E$ y $p \notin D$.

$p \wedge p_i = 0$ para todo $p_i \in D$, ya que E es disjunto.

Luego $p' \wedge p_i = p_i$; $p_i \leq p'$, es decir p' es cota superior de D y p' no es cota superior de E; ya que si lo fuera: $p \cup p' = p' \Longrightarrow 1 = p' \Longrightarrow p = 0$ lo cual es contradictorio, luego E = D. De aquí que E es numerable.

ii) Sea $E \subset A$, $M = [E]$ el ideal generado por E.

$$B = \{x \mid x \leq \bigvee_{i=1}^{n} p_i \text{ , para ciertos } p_i \text{ en } E\} .$$

B es ideal .

$0 \in B$.

$$(x \in B \text{ y } y \in B) \Longrightarrow x \leq \bigvee_{i=1}^{n} p_i \text{ y } y \leq \bigvee_{i=1}^{m} q_i$$

$$\Longrightarrow x \vee y \leq \bigvee_{i=1}^{n+m} t_i \text{ , } t_i = p_i \text{ , } i \leq n$$

$$t_i = q_{i-n}, \; i > n$$

$$\Longrightarrow x \vee y \in B.$$

$$(x \in A \;\; y \;\; y \in B) \Longrightarrow x \in A \;\; y \;\; y \leq \bigvee_{i=1}^{n} p_i$$

$$\Longrightarrow x \wedge y \leq \bigvee_{i=1}^{n} p_i$$

$$\Longrightarrow x \wedge y \in B.$$

Como B es un ideal tal que $E \subset B$, entonces $M \subset B$.

$$x \in B \Longrightarrow x \leq \bigvee_{i=1}^{n} p_i, \quad p_i \in E .$$

$$\Longrightarrow x \leq \bigvee_{i=1}^{n} p_i, \; p_i \in M; \text{ ya que } E \subset M$$

$$\Longrightarrow x \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} p_i) = x \in M; \text{ por ser } M \text{ ideal.}$$

Luego $M = B$.

a) E y M tienen las mismas cotas superiores.

Toda cota superior de M es cota superior de E ya que $E \subset M$.

d cota superior de $E \Longrightarrow x_i \leq d$, para todo $x_i \in E$.

$$\Longrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} x_i \leq d, \text{ para todo } x_i \in E.$$

$\Longrightarrow$ d es cota superior de B.

$\Longrightarrow$ d es cota superior de M.

b) Sea F un conjunto maximal disjunto de elementos no cero en M.

Probemos que F y M tienen las mismas cotas superiores. Toda cota superior de M es cota superior de F, ya que $F \subset M$.

Sea d, cota superior de F, y supongamos que d no es cota superior de M, es decir, existe $p \in M$ tal que $p \not\leq d$. Tenemos que $p_i \leq d$, para todo $p_i \in F$, luego $p_i \wedge d' = 0$. $(p \wedge d') \wedge p_i = p \wedge (d' \wedge p_i) = 0$ y $(p \wedge d') \neq 0$, ya que $p \not\leq d$; de aquí que $(p \wedge d')$ es disjunto con p_i, para todo $p_i \in F$. Luego

$$p \wedge d' \in F \Longrightarrow p \wedge d' \leq d$$

$$\Longrightarrow (p \wedge d') \wedge d' = p \wedge d' = 0$$

lo cual es contradictorio; por lo tanto d es cota superior de M. De a) y b) tenemos que E y F tienen las mismas cotas superiores y además F es numerable.

Sea $y \in F$, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n elementos de E tal que $y \leq \bigvee_{i=1}^{n} x_i$, formemos el conjunto

$D = \bigcup_{y \in F} F_y$, donde $F_y = \{x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n\}$.

D es numerable ya que es la unión numerable de conjuntos finitos.

"D y E tienen las mismas cotas superiores".

Toda cota superior de E es de D ya que $D \subset E$.

d cota superior de D $\Longrightarrow x \leq d$, para todo $x \in D$.

$\Longrightarrow \text{Sup } F_y \leq d$

$\Longrightarrow y \leq d$, para todo $y \in F$

$\Longrightarrow$ d es cota superior de F

$\Longrightarrow$ d es cota superior de E.

4.3.4. PROPOSICION

Una σ - álgebra Booleana que satisface la condición de cadena numerable es completa.

PRUEBA

Sea $B \subset A$, A una σ - álgebra.

Si B es numerable, B tiene un supremo por definición de σ - álgebra.

Si B no es numerable, existe $D \subset B$ tal que D es numerable y D y B tienen las mismas cotas superiores. Luego por tener D un supremo, B también lo tiene.

4.3.5. PROPOSICION

Si A es un álgebra de Boole, entonces las dos condi ciones que siguen son equivalentes:

1º) A satisface la condición de cadena numerable.

2º) Todo subconjunto E de A que posee un supremo, admite un subconjunto D numerable tal que D tiene un supremo y es igual al supremo de E.

PRUEBA

1) $\Longrightarrow$ 2).

Sea $E \subset A$ tal que existe el supremo de E; por propiedad (4.3.3) existe D numerable tal que $D \subset E$ (y con las mismas cotas superiores).

$x \leq \text{Sup } E$ para todo $x \in D$.

Sea b tal que $x \leq b$ para todo $x \in D$. Entonces $y \leq b$ para todo $y \in E$; de aquí que $\sup E \leq b$; por lo tanto $\text{Sup } E = \text{Sup } D$.

2) $\Longrightarrow$ 1).

Sea $E \subset A$, un conjunto disjunto de elementos no cero y sea $\Omega = \{F \subset A \mid E \subset F,\ F \text{ disjunto}\}$.

Sea $\Omega' \subset \Omega$ totalmente ordenado. Probemos que

$P = \bigcup_{F \in \Omega'} F$ es mayorante de Ω' en Ω, $E \subset \bigcup_{F \in \Omega'} F$, además

$\bigcup_{F \in \Omega'} F$ es disjunto: $x \nleq y$ con $x \in \bigcup_{F \in \Omega'} F$, $y \in \bigcup_{F \in \Omega'} F$

entonces existen F_1 y F_2 tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$; como Ω' es totalmente ordenado se tiene $F_1 \subset F_2$ ó $F_2 \subset F_1$. En el primer caso tenemos que $x \in F_2$ de aquí que $x \wedge y = 0$; lo mismo que el segundo caso. Luego $\bigcup_{F \in \Omega'} F$ es disjunto.

Por lo tanto, aplicando Lema de Zorn, existe F_o maximal para Ω .

"Sup $F_o = 1$".

Sea $y \in A$ tal que $x \leq y$; para todo $x \in F_o$.

Si $y \neq 1$ entonces $y' \neq 0$ y se tendría que $x \wedge y' = 0$ para todo $x \in F_o$, luego $F_o \not\subset F_o \cup \{y'\}$ lo cual es contradictorio ya que Fo es maximal, entonces $y = 1$, es decir Sup $F_o = 1$.

Por hipótesis, como F_o tiene supremo entonces existe "D" numerable tal que $D \subset F_o$ y Sup D = Sup F_o.

"$D = F_o$".

Supongamos que existe $x \in F_o$ y $x \notin D$.

$x \wedge x_i = 0$ para todo $x_i \in D$; luego $x_i \leq x'$ para todo $x_i \in D$.

Como Sup D = 1, entonces $1 \leq x'$ de aquí $1 = x'$ ósea $0 = x$ esto es una contradicción ya que $x \in F_o$.

Luego F_o es numerable y por lo tanto E también es numerable.

4.4. ALGEBRAS MEDIBLES Y ESPACIOS DE BOOLE MEDIBLES

4.4.1. DEFINICIONES

Sea A un álgebra Booleana y $\mu : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.

a) μ es "no negativa" si $\mu(p) \geq 0$, para todo $p \in A$.

b) μ es "finitamente aditiva" si
$\mu(p \vee q) = \mu(p) + \mu(q)$, siempre que p y q sean disjuntos.

c) Sea $\{P_n\}$ una sucesión disjunta de elementos de A con un supremo P en A. Se dice que "μ es numerablemente aditiva" si $\mu(P) = \sum_{n=1,2,...} \mu(P_n)$.

d) μ es una "medida" sobre A si μ es no negativa y numerablemente aditiva.

e) Una medida μ es "normalizada" si $\mu(1) = 1$.

f) Una medida μ es "positiva" si para todo P en A se cumple que $\mu(P) = 0 \Longrightarrow P = 0$.

4.4.2. DEFINICIONES

a) Se dice que A es una "álgebra medible" si es una σ - álgebra y si existe sobre A una medida μ positiva y normalizada.

b) A es una álgebra "medible finitamente aditiva" si existe sobre A una medida μ , finitamente aditiva.

4.4.3. EJEMPLOS

E1 Sea X un conjunto finito, P(X) el campo de todo los subconjuntos de X. Entonces $\mu : P(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu(P)$ es el número de elementos en P, para todo p que pertenece a P(X), es una medida.

Prueba

i) Si $P = \phi$ entonces $\mu(P) = 0$.

Si $P \neq \Phi$, existe "m" elementos en P $(m > 0)$.

Luego $\mu(P) \geq 0$.

ii) Si P_1 , P_2 , ... P_r son elementos disjuntos de P(X) es evidente que:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{r}\right) = \mu(P_1) + \mu(P_2) + \ldots\ldots \mu(P_r) ,$$

E2 Sea X un conjunto finito y μ la medida del ejemplo anterior. Entonces P(X) es un álgebra medible con

$\mu_1(P) = \dfrac{\mu(P)}{\mu(X)}$ para todo $P \in P(X)$.

Prueba

Por ser P(X) un álgebra de Boole completa, es una σ - álgebra de Boole.

μ_1 es una medida y

i) $\mu_1(P) = 0 \Longrightarrow P = \Phi$

ii) $\mu_1(X) = \dfrac{\mu(X)}{\mu(X)} = 1$.

NOTA

La función medida es monótona, en el sentido que si $p, q \in A$, con $p \leq q$, entonces $\mu(P) \leq \mu(q)$.

PRUEBA

Si $p \leq q$ entonces $q = p \vee q = p \vee (q \wedge p')$.

$\mu(q) = \mu(p \vee (q \wedge p')) = \mu(p) + \mu(q \wedge p') \geq \mu(p)$

de donde $\mu(p) \leq \mu(q)$.

4.4.4. PROPOSICION

Sean B una σ - álgebra Booleana, v una medida normalizada en B, $M_1 = \{q \in B \mid v(q) = 0\}$. Entonces M_1 es un σ - ideal propio en B. Además si $A = \dfrac{B}{M_1}$ y f es el σ-epimorfismo canónico de B sobre A, entonces existe una única medida μ, positiva y normalizada en A tal que

$\mu(f(q)) = v(q)$ para todo $q \in B$.

PRUEBA

a) "M_1 es un σ - ideal propio en B".

i) $(v(0) = v(0 \vee 0) = v(0) + v(0)) \Longrightarrow v(0) = 0$.

Luego $0 \in M_1$.

ii) Sean $q_1 \in M$ y $q_2 \in M_1$.

Si $q_1 \wedge q_2 = 0$ entonces

$v(q_1 \vee q_2) = v(q_1) + v(q_2) = 0 + 0 = 0$

Por tanto $q_1 \vee q_2 \in M_1$.

Si $q_1 \wedge q_2 \neq 0$, entonces construyamos

$r_1 = q_1$, $r_2 = q_2 \wedge q_1'$ y por (2.3.3.)

$q_1 \vee q_2 = r_1 \vee r_2$ de donde se tiene que

$v(q_1 \vee q_2) = v(q_1 \vee (q_2 \wedge q_1')) = v(q_1) + v(q_2 \wedge q_1') = 0$

ya que v es monótona. Luego $q_1 \vee q_2 \in M_1$.

iii) Sean $q_1 \in M_1$ y $q_2 \in B$.

Como $q_1 \wedge q_2 \leq q_1$ entonces

$v(q_1 \wedge q_2) \leq v(q_1) = 0$

luego $v(q_1 \wedge q_2) = 0$ y $q_1 \wedge q_2 \in M_1$.

iv) Como $v(1) = 1$ entonces $1 \notin M_1$ y de aquí que M_1 es propio.

v) Sea $\{q_i\}$ una sucesión numerable de elementos de M_1 con $\operatorname{Sup}\{q_i\} = q$; probaremos que $q \in M_1$.

Si $\{q_i\}$ es disjunta entonces $v(q) = \sum_{i=1,2..} v(q_i) = 0$ luego $q \in M$.

Si $\{q_i\}$ es no disjunta; podemos construir una sucesión disjunta $\{r_i\}$ con $r = \operatorname{Sup} r_i = q$ y $r_i \leq q_i$ para todo i (2.3.3.) de aquí que

$v(q) = v(r) = \sum_{i=1,2,...} v(r_i) \leq \sum_{i=1,2,...} v(q_i) = 0$; luego $q \in M$.

b) Sea $p \in A$. Definamos μ así:

$\mu(p) = v(q)$ para $q \in B$ tal que $f(q) = p$.

i) "μ está bien definida".

Sea q_1 , $q_2 \in B$.

$$
\begin{aligned}
f(q_1) = f(q_2) &\Longrightarrow f(q_1 + q_2) = 0 \\
&\Longrightarrow q_1 + q_2 \in M_1 \\
&\Longrightarrow v(q_1 + q_2) = 0 \\
&\Longrightarrow v[(q_1 \wedge q_2') \vee (q_1' \wedge q_2)] = 0 \\
&\Longrightarrow v(q_1 \wedge q_2') + v(q_1' \wedge q_2) = 0 \\
&\Longrightarrow v(q_1 \wedge q_2') = 0 \ \text{ y } \ v(q_1' \wedge q_2) = 0
\end{aligned}
$$

de aquí que:

$$v(q_1) = v(q_1) + v(q_1' \wedge q_2)$$
$$= v(q_1 \vee (q_1' \wedge q_2))$$
$$= v(q_1 \vee q_2).$$

$$v(q_2) = v(q_2) + v(q_1 \wedge q_2')$$
$$= v(q_2 \vee (q_1 \wedge q_2'))$$
$$= v(q_1 \vee q_2)$$

luego $v(q_1) = v(q_2)$.

ii) μ es no negativa porque v es no negativa.

iii) μ es numerablemente aditiva.

Sea $\{p_n\}$ una sucesión disjunta en A y $\{q_n\}$ una sucesión en B tal que $f(q_n) = p_n$ (esto es posi_ ble por ser f sobre) $\{q_n\}$ no necesariamente es disjunta. Formemos una sucesión $\{r_n\}$ disjunta así: $r_n = q_n \wedge (\bigvee_1^{n-1} q_i)'$ tal que

$$f(r_n) = p_n$$

$$f(r_n) = f(q_n \wedge (\bigvee_1^{n-1} q_i)')$$

$$= f(q_n) \wedge f\left(\bigwedge_{1}^{n-1} q_i'\right)$$

$$= f(q_n) \wedge \left(\bigwedge_{1}^{n-1} f(q_i')\right)$$

$$= p_n \wedge \bigwedge_{1}^{n-1} p_i'$$

$$= \bigwedge_{1}^{n-1} (p_n \wedge p_i')$$

$$= p_n \; .$$

Sea p el supremo de los p_n y r el supremo de los r_n , luego

$$\mu(p) = \mu(f(r)) = v(r) = \sum_{n=1,2\ldots} v(r_n) = \sum_{n=1,2\ldots} \mu(f(r_n))$$

$$= \sum_{n=1,2\ldots} \mu(p_n)$$

de donde μ es numerablemente aditiva.

iv) "Unicidad de μ".

Sea n otra medida en A tal que $n(f(q)) = v(q)$, para todo $q \in B$. Se tiene que

$n(f(q)) = \mu(f(q))$ y de aquí que $n = \mu$.

v) "μ es positiva".

Sea $\mu(p) = 0$, para $p \in A$; luego $v(q) = 0$, para $f(q) = p$; de aquí que $q \in M_1$ por lo que $p = M_1$ (ya que M_1 es el cero del cociente).

vi) "μ es normalizada".

$\mu(1 + M) = (f(1)) = v(1) = 1$.

4.4.5. PROPOSICION

Sean A, B σ - álgebras, f un σ - epimorfismo Booleano de B sobre A y μ una medida normalizada sobre A.

Si $v(q) = \mu(f(q))$, para todo $q \in B$, entonces:

a) v es una medida normalizada en B.

b) $\mathrm{Ker}\, f \subset M_1$, para $M_1 = \{q \in B \mid v(q) = 0\}$.

c) $\mathrm{Ker}\, f = M_1 \Longleftrightarrow \mu$ es positiva.

PRUEBA

a) i) v es no negativa, ya que $v(q) = \mu(f(q)) \geq 0$ para todo $q \in B$.

ii) "v es numerablemente aditiva".

Sea $\{q_n\}$ una sucesión disjunta de elementos de B, con $\mathrm{Sup}\,\{q_n\} = q$.

Formemos $\{f(q_n)\}$ en A con $\mathrm{Sup}\,\{f(q_n)\} = f(q)$.

$\{f(q_n)\}$ es disjunta ya que $\{q_n\}$ es disjunta y f es morfismo. Luego

$$v(q) = \mu f(q)) = \sum_{n=1,2...} \mu(f(q_n)) = \sum_{n=1,2...} v(q_n) .$$

iii) "ν es normalizada".

$\nu(1) = \mu(f(1)) = \mu(1) = 1.$

b) "Ker f $\subset M_1$".

$q \in \text{Ker } f \Longrightarrow f(q) = 0$

$\Longrightarrow \mu(f(q)) = \mu(0) = 0$

$\Longrightarrow \nu(q) = 0$

$\Longrightarrow q \in M_1$.

c) i) Sea μ positiva.

$q \in M_1 \Longrightarrow \nu(q) = 0$

$\Longrightarrow \mu(f(q)) = 0$

$\Longrightarrow f(q) = 0$ ya que μ es positiva

$\Longrightarrow q \in \text{Ker } f$

luego $M_1 = \text{Ker } f$.

ii) Sea $\mu(p) = 0$, luego como f es σ - epimorfismo, existe q en B tal que $f(q) = p$.

$\mu(f(q)) = \nu(q) = 0 \Longrightarrow q \in M_1$

$\Longrightarrow q \in \text{Ker } f$

$\Longrightarrow f(q) = 0$

$\Longrightarrow p = 0.$

4.4.6. PROPOSICION

Toda álgebra medible finitamente aditiva satisface la condición de cadena numerable.

PRUEBA

Sea A un álgebra medible finitamente aditiva.

Sea B un conjunto disjunto de elementos no cero, en A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, formemos un conjunto:

$$A_n = \{x \in B \mid \mu(x) > \frac{1}{n}\}$$

para cada n, A_n no puede contener n ó más elementos ya que si $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, fueran elementos distintos en A_n. Entonces:

$$\mu(x_1 \vee x_2 \ldots \vee x_n) = \mu(x_1) + \mu(x_2) + \ldots \mu(x_n)$$

$$> \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n} = 1$$

esto es contradictorio porque μ es normalizada.

"$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$".

$$A_n \subset B \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in B.$$

Sea $x \in B$ y $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

luego $x \notin A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\mu(x) \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$; de aquí $\mu(x) = 0$ entonces $x = 0$, lo cual es contradictorio ya que $x \in B$. Por tanto B es numerable y A satisface la C.C.N. .

4.4.7. PROPOSICION

Toda álgebra medible es completa.

PRUEBA

Sea A un álgebra medible, luego A es álgebra medible finitamente aditiva y por propiedad (4.3.4.) A es completa, ya que por la propiedad anterior satisface la C.C.N..

4.5. ALGEBRAS ATOMICAS

4.5.1. DEFINICIONES

a) Si A es un álgebra de Boole, un elemento "α" de A es llamado un "átomo" si $\alpha \neq 0$ y si "$b \leq \alpha \Longrightarrow b = 0$ ó $b = \alpha$".

b) Una álgebra A es llamada'atómica' si para todo $x \in A$, $x \neq 0$, existe un átomo α tal que $\alpha \leq x$.

c) Una álgebra A es llamada "no atómica" si no posee átomos.

4.5.2. EJEMPLOS

E1 Si $X \neq \phi$ es un conjunto, el álgebra P(X) es atómica,por ejemplo si $x \in X$ entonces $\{x\}$ es un átomo de P(X).

E2 $A = \{P \subset X \mid P$ es finito ó P^c es finito$\}$ es un álgebra atómica.

4.5.3. PROPOSICION

Si A es una álgebra de Boole, las condiciones que siguen, son equivalentes:

a) Existe un conjunto X tal que A es isomorfa a P(X).

b) A es un álgebra completa y distributiva.

c) A es un álgebra atómica y completa.

PRUEBA

a) $\Longrightarrow$ b).

P(X) es una álgebra completa y distributiva y como A es isomorfa a P(X), entonces A también es completa y distributiva.

b) $\Longrightarrow$ c).

Sea $I = A$, $J = \{1, -1\}$ y definamos la función

$$\begin{aligned} p : I \times J &\longrightarrow A \\ (x, 1) &\rightsquigarrow x \\ (x, -1) &\rightsquigarrow x' \end{aligned}$$

$$\operatorname*{Sup}_{j \in J} (p(x, j)) = \operatorname{Sup} \{p(x, 1), p(x, -1)\} = \operatorname{Sup} \{x, x'\}$$
$$= x \vee x' = 1.$$

Como $\operatorname*{Sup}_{j \in J} (p(x, j)) = 1$ entonces

$\operatorname*{Inf}_{x \in A} (\operatorname*{Sup}_{j \in J} p(x, j)) = 1$ y como A es distributiva

$$\operatorname*{Sup}_{\psi\in F'(A,J)} (\operatorname*{Inf}_{x\in A} p(x, \psi(x))) = 1 .$$

Sea $a \in A$ tal que $a \neq 0$. Se tiene

$$a = a \wedge 1 = a \wedge \operatorname*{Sup}_{\psi\in F'(A,J)} (\operatorname*{Inf}_{x\in A} p(x, \psi(x)))$$

$$= \operatorname*{Sup}_{\psi\in F'(A,J)} (a \wedge \operatorname*{Inf}_{x\in A} p(x, \psi(x))) \quad \text{por } (2.3.6.)$$

de aquí que $\operatorname*{Sup}_{\psi\in F'(A,J)} (a \wedge \operatorname*{Inf}_{x\in A} p(x, \psi(x))) \neq 0$ luego

existe $\psi_o \in F'(A, J)$ tal que $a \wedge \operatorname*{Inf}_{x\in A} p(x, \psi_o(x)) \neq 0$,

ya que de lo contrario tendríamos $a = 0$.

Sea $d = a \wedge \operatorname*{Inf}_{x\in A} p(x, \psi_o(x))$, probemos que: d es un átomo.

Sea $b \in A$ tal que $b \leq d$.

$p(b, \psi_o(b)) = b$ ó $p(b, \psi_o(b)) = b'$.

i) Si $p(b, \psi_o(b)) = b$, entonces

$\operatorname*{Inf}_{x\in A} p(x, \psi_o(x)) \leq b$, luego

$a \wedge \operatorname*{Inf}_{x\in A} p(x, \psi_o(x)) \leq a \wedge b \leq b$ es decir $d \leq b$,

de donde $b = d$.

ii) Si $p(b, \psi_o(b)) = b'$ entonces

$\operatorname{Inf}_{x \in A} p(x, \psi_o(x)) \leq b'$ lo cual implica

$d \leq a \wedge b' \leq b'$; como $b \leq d$ y $d \leq b'$ entonces

$b = b \wedge b' = 0$ ó sea, d es un átomo. Luego A es

atómica porque d es un átomo tal que $a \leq d$.

c) $\Longrightarrow$ a).

Sea $X = \{x \in A \mid x \text{ es un átomo}\}$.

Definamos la función

$$f : A \longrightarrow P(X)$$
$$a \rightsquigarrow \{x \in X \mid x \leq a\} .$$

"f es morfismo".

Sean a, b en A y x un átomo.

$$\begin{aligned} x \leq a \vee b &\Longrightarrow x = x \wedge (a \vee b) \\ &\Longrightarrow x = (x \wedge a) \vee (x \wedge b) \\ &\Longrightarrow x \wedge a \neq 0 \text{ ó } x \wedge b \neq 0 \\ &\Longrightarrow x \wedge a = x \text{ ó } x \wedge b = x \quad \text{(ya que x es átomo)} \\ &\Longrightarrow x \leq a \text{ ó } x \leq b . \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} x \in f(a \vee b) &\Longleftrightarrow x \leq a \vee b \\ &\Longleftrightarrow x \leq a \text{ ó } x \leq b \\ &\Longleftrightarrow x \in f(a) \text{ ó } x \in f(b) \\ &\Longleftrightarrow x \in (f(a) \cup f(b)). \end{aligned}$$

ii) $x \in f(a \wedge b) \Longleftrightarrow x \leq a \wedge b$

$\Longleftrightarrow x \leq a$ y $x \leq b$

$\Longleftrightarrow x \in f(a)$ y $x \in f(b)$

$\Longleftrightarrow x \in (f(a) \cap f(b))$.

iii) $f(a)' = f(a')$.

Probemos: $f(a') \cup f(a) = X$, $f(a') \cap f(a) = \Phi$.

Sea x un átomo.

$x \in (f(a') \cup f(a)) \Longleftrightarrow x \in f(a' \vee a)$

$\Longleftrightarrow x \leq a' \vee a$

$\Longleftrightarrow x \leq 1$

$\Longleftrightarrow x \in X$ (ya que todos los átomos son menores que 1).

Sea $f(a') \cap f(a) \neq \Phi$.

$x \in (f(a') \cap f(a)) \Longrightarrow x \in f(a' \wedge a)$

$\Longrightarrow x \leq a' \wedge a$

$\Longrightarrow x \leq 0$

$\Longrightarrow x = 0$

lo cual es contradictorio ya que x es átomo. Luego $f(a') \cap f(a) = \Phi$.

f es biyección.

i) $a \in \text{Ker } f \iff f(a) = \Phi$

$\iff a = 0$

luego f es inyectiva.

ii) Sea $E \subset X$, como A es completa, existe $a = \text{Sup } E$.

$x \in E \Longrightarrow x \leq a$

$\Longrightarrow x \in f(a)$.

Luego $E \subset f(a)$.

$x \in f(a) \Longrightarrow x \leq a$

$\Longrightarrow x = x \wedge a$

$\Longrightarrow x = x \wedge \text{Sup } E$

$\Longrightarrow x = \text{Sup } \{x \wedge y \mid y \in E\}$

como x es átomo ($x \neq 0$), existe $y_o \in E$ tal que:

$x \wedge y_o \neq 0$. Luego

$(x \wedge y_o \leq x,\ x \wedge y_o \neq 0,\ x \text{ átomo}) \Longrightarrow x \wedge y_o = x$

$(x \wedge y_o \leq y_o,\ x \wedge y_o \neq 0,\ y_o \text{ átomo}) \Longrightarrow x \wedge y_o = y_o$

de aquí que: $x = y_o$ y por lo tanto $x \in E$.

Luego $f(a) \subset E$. Y con ésto f es suryectiva.

4.5.4. PROPOSICION

Toda álgebra Booleana finita es atómica.

PRUEBA

Sea A un álgebra Booleana finita, probaremos que para todo x en A, $x \neq 0$ existe "a" en A, a átomo tal que $a \leq x$.

Sea $B = \{x_i \in A \mid x_i \neq 0,\ x_i \leq x,\ \wedge x_i \neq 0\}$.

"$\wedge x_i$ es un átomo".

Sea $y \in A$; $y \leq \wedge x_i$ y supongamos que $y \neq 0$; y es uno de los x_i , luego $\wedge x_i \leq y$; por tanto $y = \bigwedge_1^n x_i$.

4.5.5. PROPOSICION

Si p e s un elemento no cero de un álgebra Booleana atómica A, entonces existe un morfismo f a dos valores en A tal que $f(p) = 1$.

PRUEBA

Sea $p \neq 0$, a un átomo y $a \leq p$.

$J = \{x \in A \mid x \leq a'\}$ es un ideal propio, por lo cual puede ser incluido en un ideal maximal I.

Definamos la función:

$$f : A \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$x \rightsquigarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I \\ 1 & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

"$f(p) = 1$".

Probaremos que $p \notin I$.

Como $a \leq p$ entonces $p' \leq a'$ se tiene que $p' \in J$ luego $p' \in I$, ya que $J \subset I$.

Luego, $p \notin I$, porque I es maximal.

4.5.6. PROPOSICION

Sean A un álgebra de Boole.

$D = \{I \in X_A \mid \{I\}$ es un abierto$\}$

$E = \{\{I\} \mid I \in D\}$.

Entonces:

a) $P \in CL(X_A)$ es un átomo en $CL(X_A)$ si y sólo si $P \in E$.

b) A es atómica si y sólo si $\overline{D} = X_A$.

PRUEBA

a) i) Si $P \in E$, entonces P es abierto y por ser P unitario en un espacio separado es cerrado, luego $P \in CL(X_A)$ y evidentemente es un átomo.

ii) Sea $P \in CL(X_A)$; P átomo.

Sean $I \neq J$ tal que $I, J \in P$.

Como X_A es un espacio separado existen O_1, O_2 abiertos con $I \in O_1$, $J \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \phi$.

Por definición de abierto en X_A, existen x_1, x_2 en A tal que $I \in h(x_1) \subset O_1$ y $J \in h(x_2) \subset O_2$.

De aquí que $h(x_1) \cap h(x2) = \Phi$.

Se tiene que

$I \in P \cap h(x_1)$ y $P \cap h(x_1) \underset{\neq}{\subset} P$, ya que $J \in P$ y $J \notin P \cap h(x_1)$ lo cual implica que P no es áto mo siendo una contradicción. Luego $P \in E$.

b) i) Sea A atómica, entonces $CL(X_A)$ es atómica por el isomorfismo que existe entre A y $CL(X_A)$.

Probaremos que $\overline{D} = X_A$.

$D = \{I \in X_A | 0 \cap D \neq \Phi$, para todo $0 \subset X_A$, 0 abierto e $I \in 0\}$

Sea $I \in X_A$ y sea $0 \subset X_A$ un abierto tal que $I \in 0$. Luego existe $x \in A$ tal que $I \in h(x) \subset 0$ se tiene que $h(x) \neq \Phi$ y $h(x) \in CL(X_A)$ entonces por ser atómica $CL(X_A)$, existe M átomo, $M \in CL(X_A)$ tal que $M \subset h(x)$; luego, $M \in E$ por parte a), es decir, $M = \{J\}$ para algún $J \in D$ y de aquí $0 \cap D \neq \Phi$ de donde $I \in \overline{D}$, ó sea $X_A \subset \overline{D}$. Luego $\overline{D} = X_A$.

ii) Sea $\overline{D} = X_A$ y sea $P \neq \Phi$, $P \in CL(X_A)$; como P es un abierto de X_A entonces $P \cap D \neq \phi$, es decir, existe $I \in D$ e $I \in P$; como $I \in D$ y $\{I\} \subset P$ entonces $\{I\}$ es un átomo de $CL(X_A)$. Es decir, $CL(X_A)$ es atómica y por tanto también lo es A.

4.6. COMPLETACION

4.6.1. DEFINICIONES

a) Un espacio de Boole X es llamado "completo" si la adherencia de todo conjunto abierto es un abierto.

b) Se le llama espacio de Boole medible, a un σ - espacio de Boole X junto con una medida normalizada sobre el σ - campo de los conjuntos de Borel, tal que los conjuntos abiertos no vacíos tienen medida positiva y los conjuntos raros de Borel tienen medida cero.

4.6.2. PROPOSICION

Si A es álgebra de Boole, las condiciones que siguen son equivalentes:

a) A es completa.

b) Si $O \subset X_A$ es un abierto, entonces $\overline{O}$ es abierto.

PRUEBA

a) $\Longrightarrow$ b).

Sea O un abierto, $O \subset X_A$.

$I = \{x \in A \mid h(x) \subset O\}$ es un ideal de A.

Sabemos que $\varepsilon(I) = \{J \in X_A \mid I \not\subset J\} = O$.

Como A es completa, entonces existe "a" tal que $a = \text{Sup } I$.

Probemos que $\overline{0} = h(a)$.

i) "$\overline{0} \subset h(a)$".

$$j \notin h(a) \Longrightarrow a \in J$$

$\Longrightarrow x \wedge a \in J$, para todo $x \in A$ (ya que J es ideal).

$\Longrightarrow x \in J$, para todo $x \in I$ (ya que $a = \text{Sup } I$)

$\Longrightarrow I \subset J$

$\Longrightarrow J \notin \varepsilon(I)$

luego $\varepsilon(I) \subset h(a) \Longrightarrow 0 \in h(a)$

$\Longrightarrow \overline{0} \subset h(a)$ ya que $h(a)$ es cerrado.

ii) "$h(a) \subset \overline{0}$".

$J \notin \overline{0} \Longrightarrow k(0) \not\subset J$ por (3.1.4.)

$\Longrightarrow b \in k(0)$ y $b \notin J$, para algún b.

Para todo $x \in I$ se tiene: $L \in h(x) \Longrightarrow L \in 0$, y por (3.1.4.) : $k(0) \subset L$; luego $b \in L$ y esto implica que $L \notin h(b)$ por lo que $h(x) \cap h(b) = \Phi$, para todo $x \in I$.

$h(x) \cap h(b) = \Phi \Longrightarrow h(x \wedge b) = \Phi$

$\Longrightarrow x \wedge b = 0$

$\Longrightarrow x \leq b'$ para todo $x \in I$

$\Longrightarrow a \leq b'$ ya que $a = \text{Sup } I$

$$\Longrightarrow a \wedge b' = a$$

$\Longrightarrow a \in J$, ya que $b' \in J$, por ser J maximal.

$$\Longrightarrow J \notin h(a)$$

Luego $h(a) \subset \overline{0}$.

b) $\Longrightarrow$ a).

Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \theta}$ una familia de elementos de A.

$I = \{x \in A \mid x \leq x_\lambda,$ para todo $\lambda \in \theta\}$ es un ideal.

Como $\varepsilon(I)$ es un abierto entonces por hipótesis $\overline{\varepsilon(I)}$ es un clopen; luego existe $a \in A$ tal que $\overline{\varepsilon(I)} = h(a)$, probemos que:

$$a = \operatorname{Inf}\{x_\lambda \mid \lambda \in \theta\}$$

$J \notin h(x_\lambda) \Longrightarrow x_\lambda \in J$

$\Longrightarrow x \wedge x_\lambda \in J$, para todo $x \in I$.

$\Longrightarrow x \in J$, para todo $x \in I$.

$\Longrightarrow I \subset J$.

$\Longrightarrow J \notin \varepsilon(I)$

luego $\varepsilon(I) \subset h(x_\lambda) \Longrightarrow \overline{\varepsilon(I)} \subset h(x_\lambda)$

$\Longrightarrow h(a) \subset h(x_\lambda)$, por ser h morfismo

$\Longrightarrow a \leq x_\lambda$

por tanto "a" es cota inferior de los x_λ.

Sea $b \in A$ tal que $b \leq x_\lambda$, para todo $\lambda \in \theta$

$$
\begin{aligned}
b \leq x_\lambda &\Longrightarrow b \in I \\
&\Longrightarrow h(b) \subset \varepsilon(I), \text{ ya que } \varepsilon(I) = 0 \\
&\Longrightarrow h(b) \subset \overline{\varepsilon(I)} \\
&\Longrightarrow h(b) \subset h(a) \\
&\Longrightarrow b \leq a.
\end{aligned}
$$

4.6.3. PROPOSICION

El álgebra dual A de un espacio Booleano X es completa si y solo si X es completo.

PRUEBA

i) Sea A completa y sea 0 un abierto en X.

Sea $\{P_i\}$ la familia de clopens tal que $P_i \subset 0$; luego $0 = \bigcup_{P_i \subset 0} P_i$ y como A es completa, existe el supremo de $\{P_i\}$; aplicando la propiedad (1.1.6.) se tiene $\overline{0}$ es abierto; luego X es completo.

ii) Sea X completo y sea $\{P_i\}$ una familia de elementos de A.

Sea $0 = \bigcup_i P_i$; $\overline{0}$ es abierto ya que X es completo.

Luego por propiedad (1.1.6.) $\{P_i\}$ tiene un supremo en A y $\overline{0} = V_i P_i$.

NOTACION

En las siguientes tres proposiciones denotaremos:

X = un σ - espacio Booleano.

A = CL(X).

B = el σ - campo de los conjuntos de Borel.

M = el σ - ideal de los conjuntos magros de Borel.

f = el σ - epimorfismo natural de B hacia el álgebra de los abiertos regulares en X con núcleo M --- (4.2.7.).

4.6.4. PROPOSICION

Si ν es una medida normalizada sobre B tal que los conjuntos abiertos no vacíos tienen medida positiva y los conjuntos raros de Borel tienen medida cero, y si μ es la restricción de ν a A, entonces μ es una medida positiva normalizada sobre A (en consecuencia A es un álgebra medible).

PRUEBA

a) "μ es una medida".

$\mu(P) \geq 0$, para todo $P \in A$ ya que ν es no negativa (si P es raro $\mu(P) = 0$).

Probemos que μ es numerablemente aditiva.

Sea $\{P_n\}$ una sucesión disjunta de elementos de A con

$\text{Sup}\{P_n\} = P \in A$.

Sea $U = \bigcup_{1}^{\infty} P_n$; por propiedad (1.1.6.) se tiene que

$P = \overline{U}$. Además:

$\overline{U} = U \cup Fr(U)$ ya que U es abierto.

$v(\overline{U}) = v(U \cup Fr(U)) = v(U) + v(F_r(U))$

pero $v(Fr(U)) = 0$ ya que $Fr(U)$ es raro,

luego $v(\overline{U}) = v(U)$ y $v(\overline{U}) = \mu(\overline{U}) = \mu(P)$.

Se tiene entonces que:

$$\mu(P) = v(U) = \sum v(P_n) = \sum \mu(P_n)$$

ó sea μ es numerablemente aditiva.

b) μ es positiva.

Sea $\mu(P) = 0$ para $P \in A$,

luego $\mu(P) = v(P) = 0$ y como v es positiva

entonces $P = 0$.

c) μ normalizada.

$\mu(1) = v(1) = 1$.

4.6.5. PROPOSICION

Si μ es una medida positiva y normalizada en A, entonces f es una función de B sobre A.

Si $v(S) = \mu(f(S))$ para todo $S \in B$, entonces v es una medida normalizada en B tal que los conjuntos abiertos no vacíos tienen medida positiva y tal que los conjuntos de medida cero son exactamente los conjuntos magros.

PRUEBA

a) El álgebra A junto con la medida μ es un álgebra medible y por lo tanto completa; por propiedad anterior X es completo.

Todo conjunto regular abierto en X es clopen ya que si P es un conjunto regular abierto $(\overset{\circ}{\overline{P}} = P)$, por ser X completo se tiene que $\overline{P}$ es abierto, luego $\overset{\circ}{\overline{P}} = \overline{P}$ y de aquí que $P = \overline{P}$ por lo que P es clopen, y aplicando propiedad (4.2.7.) se tiene que $f : B \to A$ es una función sobreyectiva.

b) Sea O un abierto tal que $O \neq \Phi$.

$v(O) = \mu(f(O))$. Probaremos que $\mu(f(O)) \neq 0$, es decir que $f(O) \neq \Phi$ (ya que μ es positiva). Por (II.8.6.) se tiene que O no es magro ya que $O \neq \Phi$; luego $f(O) \neq \Phi$, y a que $\operatorname{Ker} f = M$ y $O \notin M$ de aquí que $v(O) > 0$.

Como μ es positiva por (4.2.7.) $\operatorname{Ker} f = \{q \in B \mid v(q) = 0\}$ y como $\operatorname{Ker} f = M$, entonces los conjuntos de medida cero son exactamente los conjuntos magros.

4.6.6. PROPOSICION

El álgebra dual A de un espacio Booleano X es un álgebra medible si y sólo si X es un espacio de Boole medible.

PRUEBA

i) Si A es un álgebra medible entonces por proposición (4.6.5.) X es espacio de Boole medible.

ii) Si X es espacio de Boole medible entonces por proposición (4.6.4.) A es un álgebra medible.

4.6.7. DEFINICIONES

a) Una "completación" de un álgebra Booleana A, es un álgebra de Boole B completa junto con un monomorfismo $h: A \to B$ tal que:

i) Si $P = \bigvee P_i$ en A, entonces $\bigvee h(P_i) = h(P)$ en B.

ii) El álgebra completa generada por h(A) en B es B misma.

b) Una completación "(B, h) de A es minimal" si para cada completación (C, g) de A existe un monomorfismo completo (es decir que, cumple la propiedad i) anterior) $f: B \to C$ tal que $f \circ h = g$; ósea que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g"'] & & B \arrow[dl, "f"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

4.6.8. PROPOSICION

Si (B, h) y (C, k) son completaciones minimales de A, entonces existe un isomorfismo $f: B \to C$ tal que $f \circ h = k$ y $f^{-1} \circ k = h$.

PRUEBA

Sean (B, h) y (C, k) completaciones minimales de A, luego existen monomorfismos completos f, g tales que $f \circ h = k$ y $g \circ k = h$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "k"'] & & B \arrow[dl, shift right, "f"'] \\
& C \arrow[ur, shift right, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Se tiene que:

$$f \circ g \circ k = f \circ (g \circ k) = f \circ h = k$$

$$g \circ f \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ k = h.$$

Probemos que "$g = f^{-1}$", es decir "$f \circ g = 1_C$" y "$g \circ f = 1_B$".

$$f \circ g \circ k = 1_C \circ k \Longrightarrow (f \circ g \circ k)(x) = (1_C \circ k)(x) \quad \text{para todo } x \in A.$$

$$\Longrightarrow (f \circ g)(k(x)) = 1_C(k(x))$$

y por condición ii) de completación $f \circ g = 1_C$.

Similarmente se tiene que $g \circ f = 1_B$.

4.6.9. PROPOSICION

Si A es el álgebra dual de un espacio Booleano X, si B es el álgebra de conjuntos regulares abiertos en X y si h es la función identidad de A en B, entonces (B, h) es una completación minimal de A.

PRUEBA

a) B es una completación en A.

B es completa, ya que es el álgebra de regulares abiertos.

$$\text{Sea} \quad h : A \longrightarrow B$$
$$P \rightsquigarrow P$$

Probemos que h es monomorfismo completo.

Sea $\{P_i\}$, $P_i \in A$. Si $P = \text{Sup}\,\{P_i\}$ en A y $Q = \text{Sup}\,\{P_i\}$ en B. Sea $U = \bigcup_i P_i$ (4.1.2.)(E.2))

luego $\overline{U} = P$ por (1.1.6.) y $\mathring{\overline{U}} = Q$.

$\overline{U}$ es abierto, por ser supremo de abiertos.

$P = \overline{U}$ y $\mathring{P} = \mathring{\overline{U}} = Q$. Luego $P = Q$.

Por tanto h es monomorfismo completo.

Probemos que $[h(A)]_C = B$ donde $[h(A)]_C$ es el álgebra completa generada por h(A).

Por ser $h(A) = A$, $h(A) \subset B$; como B es completa entonces $[h(A)]_C \subset B$.

Probaremos que $B \subset [h(A)]_C$ para lo cual basta ver que cada abierto regular es el supremo de una familia de clopen de A; ya que al ser el supremo de una familia de clopen, le pertenece a $[h(A)]_C$ por ser ésta completa.

Sea $U \in B$ entonces $U = \bigcup_{P_i \subset U} P_i$ con $P_i \in A$.

Por ser U un abierto regular se tiene $\overset{\circ}{\overline{U}} = \text{Sup}\,\{P_i\}$ en B y de aquí que $U = \text{Sup}\,\{P_i\}$ es decir $U \in [h(A)]_C$.

b) B completación minimal de A.

Sea (C, k) una completación de A. Consideremos el diagrama.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "k"'] & & B \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

y definamos f así; para $U \in B$, $f(U) = \text{Sup}\,\{k(P_i)\}$, con $P_i \in A$ tales que $U = \bigcup_i P_i$, $f(U)$ existe ya que por ser C completa el supremo le pertenece.

"$f(U') = (f(U))'$".

Sea $U = \cup P_i$ con $P_i \in A$.

$U \in B \Longrightarrow \overline{U}^c \in B.$

$\Longrightarrow \overline{U}^c = \cup Q_j$, $Q_j \in A$ y $P_i \cap Q_j = \Phi$

ya que $U \cap \overline{U}^c = \Phi$ es decir:

$\cup P_i \cap \cup Q_j = \cup (P_i \cap Q_j) = \Phi \Longrightarrow P_i \cap Q_j = \Phi$

de aqui $k(P_i) \wedge k(Q_j) = 0.$

$f(U) \wedge f(\overline{U}^c) = 0.$

$0 = \mathrm{Sup}\ \{k(P_i) \wedge k(Q_j)\}$

$= \mathrm{Sup}\ \{k(P_i)\} \wedge \mathrm{Sup}\ \{k(Q_j)\}$

$= f(U) \wedge f(\overline{U}^c).$

$f(U) \vee F(\overline{U}^c) = 1.$

$U \vee \overline{U}^c = 1$ en B luego $\underset{i,j}{\mathrm{Sup}}\ \{P_i \vee Q_j\} = 1$ en A,

entonces $\underset{i,j}{\mathrm{Sup}}\ \{k(P_i) \vee k(Q_j)\} = k(1)$ en C, ósea

$\underset{i,j}{\mathrm{Sup}}\ \{k(P_i)\} \vee \underset{i,j}{\mathrm{Sup}}\ \{k(Q_j)\} = 1$

y por tanto $f(U) \vee f(\overline{U}^c) = 1$

de aquí que $f(U') = (f(U))'$.

f e s completo .

Sea $\{U_j\}$ una familia de elementos de B. Probaremos que $f(\mathrm{Sup}\{U_j\}) = \mathrm{Sup}\{f(U_j)\}$.

Sea $U = \mathrm{Sup}\{U_j\}$.

Sean O_1, O_2 en B.

$$O_1 < O_2 \Longrightarrow O_1 \vee O_2 = O_2$$

$$\Longrightarrow (O_1 \cup O_2)^{\circ} = O_2$$

$$\Longrightarrow O_1 \subset O_2 .$$

$$O_1 \subset O_2 \Longrightarrow f(O_1) < f(O_2) .$$

Sea $O_1 = \bigcup\limits_{i \in I} P_i$ y $O_2 = \bigcup\limits_{i \in I} Q_i$.

$\mathrm{Sup}\{P_i\} = \overline{O}_1$ y $\mathrm{Sup}\{Q_i\} = \overline{O}_2$

$$O_1 \subset O_2 \Longrightarrow \overline{O}_1 \subset \overline{O}_2 \Longrightarrow \mathrm{Sup}\{P_i\} \subset \mathrm{Sup}\{Q_i\}$$

$$\Longrightarrow k(\mathrm{Sup}\{P_i\}) < k(\mathrm{Sup}\{Q_i\})$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Sup}\{k(P_i)\} < \mathrm{Sup}\{k(Q_i)\}$$

$$\Longrightarrow f(O_1) < f(O_2) .$$

Luego como f preserva el orden para todo j,

$$U_j < U \Longrightarrow f(U_j) < f(U) \Longrightarrow \mathrm{Sup}\{f(U_j)\} \leq f(U)$$

de donde $\operatorname{Sup}_j \{f(U_j)\} \leq f(U)$.

$f(U) \leq \operatorname{Sup}_j \{f(U_j)\}$.

Sea $Q \subset U$ tal que $Q \in A$.

$$Q = Q \cap U = Q \cap \operatorname{Sup}_j \{U_j\}$$

$$= \operatorname{Sup}_j \{Q \cap U_j\}$$

$$= \operatorname{Sup}_j \{Q \cap \operatorname{Sup}_i \{P_{j,i}\}\}$$

$$= \operatorname{Sup}_j \operatorname{Sup}_i \{Q \cap (P_{j,i})\}$$

Luego

$$k(Q) = \operatorname{Sup}_j \operatorname{Sup}_i \{k(Q) \wedge k(P_{j,i})\}$$

$$= \operatorname{Sup}_j \{k(Q) \wedge f(U_j)\}$$

$$= k(Q) \wedge \operatorname{Sup}_j \{f(U_j)\}$$

de aquí que

$k(Q) \leq \operatorname{Sup}_j \{f(U_j)\}$ para todo $Q \in A$; pero

$\operatorname{Sup}\{k(Q)\} = f(U)$, para $Q \in A$ y $Q \subset U$, por tanto

$f(U) \leq \operatorname{Sup}_j \{f(U_j)\}$.

f monomorfismo .

$U \in \text{Ker } f \iff f(U) = 0$

$\iff \text{Sup } \{k(P_i)\} = 0$

$\iff k(P_i) \leq 0$, para todo $P_i \in A$

$\iff k(P_i) = 0$, para todo $P_i \in A$

$\iff P_i = \Phi$, para todo i.

$\iff \bigcup_i P_i = \Phi$

$\iff U = \Phi$.

$f \circ h = k$.

Sea $U \in A$; $(f \circ h)(U) = f(h(U)) = f(U) = k(U)$ por definición de f.

Luego (C, k) es completación minimal.

4.6.10. PROPOSICION

Sea A un álgebra de Boole.

X_A el espacio de Boole asociado a A.

$R(X_A)$ el álgebra de abiertos regulares de X_A.

Entonces $R(X_A)$ es una completación minimal de A.

PRUEBA

Sea f el isomorfismo que existe entre A y $CL(X_A)$ por proposición (4.6.9.) $R(X_A)$ es una completación minimal de $CL(X_A)$ por lo que existe el monomorfismo completo $g: CL(X_A) \to R(X_A)$.

Si tomamos $\ell = g \circ f$ y por ser f isomorfismo entre A y $CL(X_A)$ es trivial probar que $(R(X_A), \ell)$ es una completación minimal de A.

4.6.11. PROPOSICION

La completación minimal B de un álgebra A tiene la propiedad que todo elemento de B es el supremo de los elementos de A que él domina.

PRUEBA

Sea (B, t) la completación minimal de A. Probaremosque si $x \in B$, entonces

$$x = \operatorname{Sup} \{t(y) \mid y \in A,\ t(y) \leq x\} .$$

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "\ell"'] & & B \arrow[dl, shift left, "f^{-1}"] \\
& R(X_A) \arrow[ur, shift left, "f"] &
\end{tikzcd}$$

en el cual por proposición (4.6.8.) $f \circ \ell = t$, $f^{-1} \circ t = \ell$.

Sea $x \in B$; $f^{-1}(x)$ es un regular abierto, luego

$$f^{-1}(x) = \operatorname{Sup}\{\ell(y) \mid y \in A,\ \ell(y) \leq f^{-1}(x)\}$$

$$x = \operatorname{Sup}\{f(\ell(y)) \mid y \in A,\ f(\ell(y)) \leq x\}$$

$$x = \operatorname{Sup}\{t(y) \mid y \in A,\ t(y) \leq x\}\ .$$

4.7. ALGEBRAS INYECTIVAS

4.7.1. DEFINICION

Un álgebra de Boole "B" es "inyectiva" si para todo monomorfismo $g : C \to A$ (A, C álgebras cualesquiera) y para todo morfismo $h : C \to B$; existe un morfismo $f : A \to B$ tal que $f \circ g = h$. Es decir que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] & \\
B & & C \arrow[ll, "h"] \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

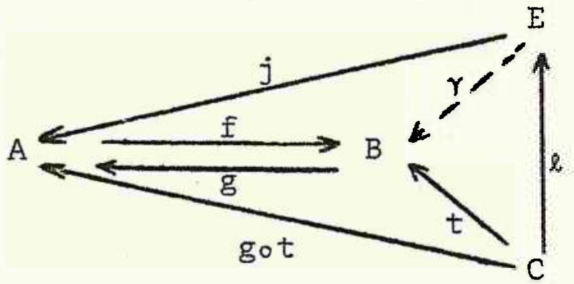
4.7.2. PROPOSICION

Toda retracción de un álgebra inyectiva es inyectiva.

PRUEBA

Sea B una retracción de un álgebra inyectiva A.

Consideremos el siguiente diagrama:



Por ser B retracción de A existen los morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$.

Sea $\ell : C \to E$ un monomorfismo y

$t : C \to B$ un morfismo ;

podemos formar el morfismo $g \circ t : C \to A$; por ser A inyectiva, existe el morfismo $j : E \to A$ tal que $j \circ \ell = g \circ t$.

Definamos $\gamma = f \circ j$ y probemos que "$\gamma \circ \ell = t$".

$$\begin{aligned} \gamma \circ \ell = (f \circ j) \circ \ell &= f \circ (j \circ \ell) \\ &= f \circ (g \circ t) \\ &= (f \circ g) \circ t \\ &= 1_B \circ t \\ &= t. \end{aligned}$$

Luego B e s inyectiva.

<u>4.7.3. PROPOSICION</u>

Sean A un álgebra de Boole generada por una subálgebra C y un elemento r; $h : C \to B$ un morfismo, p_* y p^*

elementos de B tal que $h(s) \leq p_*$ donde $s \in C$ y $s \leq r$ y $p^* \leq h(t)$ donde $t \in C$ y $r \leq t$.

Entonces para cada p en B con $p_* \leq p \leq p^*$, existe una única extensión $f: A \to B$, de h, tal que $f(r) = p$.

PRUEBA

Como $A = [C \cup \{r\}]$; los elementos de A se pueden representar en la forma $(s \wedge r) \vee (t \wedge r')$ con s y t en C por (2.7.7.).

Definamos f así:

$$f: A \longrightarrow B$$

$$(s\wedge r)\vee(t\wedge r') \rightsquigarrow (h(s)\wedge p)\vee(h(t)\wedge p').$$

a) f es bien definida.

$$(x\wedge r)\vee(y\wedge r') = (m\wedge r)\vee(n\wedge r') \Longrightarrow (h(x)\wedge p)\vee(h(y)\wedge p') = (h(m)\wedge p)\vee(h(n)\wedge p').$$

Sean $(x \wedge r) \vee (y \wedge r') = (m \wedge r) \vee (n \wedge r')$

de aquí:

1º) $r \vee [(x \wedge r) \vee (y \wedge r')] = r \vee [(m \wedge r) \vee (n \wedge r')]$

2º) $r' \vee [(x \wedge r) \vee (y \wedge r')] = r' \vee [(m \wedge r) \vee (n \wedge r')]$

luego

1º) $r \vee y = r \vee n$

2º) $x \vee r' = m \vee r'$

de las igualdades anteriores se tiene que:

$$r \vee (y' \wedge n) = r \quad , \quad r' \vee (x \wedge m') = r'$$

$$r \vee (y \wedge n') = r \quad , \quad r' \vee (x' \wedge m) = r'$$

y por lo tanto tenemos que

$$y \wedge n' \leq r \quad y \quad r \leq x' \vee m \quad (x \wedge m' \leq r')$$

luego por hipótesis

$$h(y \wedge n') \leq p_* \leq p$$

$$p < p^* \leq h(m \vee x')$$

de donde

$$h(y \wedge n') \leq p \leq h(m \vee x')$$

por lo que

$$p' \leq h(y') \vee h(n)$$

$$p' = p' \wedge (h(y') \vee h(n))$$

$$p' = (p' \wedge h(y')) \vee (p' \wedge h(n))$$

$$h(y) \wedge p' = (h(y) \wedge p' \wedge h(y')) \vee (h(y) \wedge p' \wedge h(n))$$

$$= h(y) \wedge p' \wedge h(n)$$

de manera similar se obtiene

$$h(n) \wedge p' = h(y) \wedge p' \wedge h(n).$$

Luego $h(y) \wedge p' = h(n) \wedge p'$.

Con procedimiento semejante obtenemos

$h(x) \wedge p = h(m) \wedge p.$

b) $f(r) = p.$

$$\begin{aligned} f(r) &= (f(1 \wedge r) \vee (0 \wedge r')) \\ &= (h(1) \wedge p) \vee (h(0) \wedge p') \\ &= (1 \wedge p) \vee (0 \wedge p') \\ &= p \vee 0 \\ &= p. \end{aligned}$$

c) $f_{|C} = h.$

Sea $x \in C$; como $[C \cup \{r\}] = A$ (2.7.7.)

entonces $x = (x \wedge r) \vee (x \wedge r')$.

$$\begin{aligned} f((x \wedge r) \vee (x \wedge r')) &= (h(x) \wedge p) \vee (h(x) \wedge p') \\ &= h(x) \wedge (p \vee p') \\ &= h(x) \wedge 1 \\ &= h(x). \end{aligned}$$

d) f es morfismo.

i) $f(x_1 \vee x_2) = f(x_1) \vee f(x_2)$ con x_1, x_2 en A.

Sea $x_1 = (s_1 \wedge r) \vee (t_1 \wedge r')$

$x_2 = (s_2 \wedge r) \vee (t_2 \wedge r')$.

$$f(x_1 \vee x_2) = f(((s_1 \vee s_2) \wedge r) \vee ((t_1 \vee t_2) \wedge r'))$$

$$= (h(s_1 \vee s_2) \wedge p) \vee (h(t_1 \vee t_2) \wedge p')$$

$$= ((h(s_1) \vee h(s_2)) \wedge p) \vee ((h(t_1) \vee h(t_2)) \wedge p')$$

$$= (h(s_1) \wedge p) \vee (h(s_2) \wedge p) \vee$$

$$(h(t_1) \wedge p') \vee (h(t_2) \wedge p')$$

$$= [(h(s_1) \wedge p) \vee (h(t_1) \wedge p')] \vee$$

$$[(h(s_2) \wedge p) \vee (h(t_2) \wedge p')]$$

$$= f(x_1) \vee f(x_2).$$

ii) $f(x)' = f(x')$, donde $x \in A$.

Sea $x = (s_1 \wedge r) \vee (t_1 \wedge r')$.

Se tiene que $x' = (s_1' \wedge r) \vee (t_1' \wedge r')$ (2.7.7.)

$$f(x) = (h(s_1) \wedge p) \vee (h(t_1) \wedge p')$$

$$f(x') = (h(s_1') \wedge p) \vee (h(t_1') \wedge p') .$$

Probaremos que : $f(x) \wedge f(x') = 0$

$f(x) \vee f(x') = 1$.

$$f(x) \wedge f(x') = [(h(s_1) \wedge p) \vee (h(t_1) \wedge p')] \wedge$$

$$[(h(s_1') \wedge p) \vee (h(t_1') \wedge p')]$$

$$= [((h(s_1) \wedge p) \vee (h(t_1) \wedge p')) \wedge (h(s_1') \wedge p)] \vee$$

$$[((h(s_1) \wedge p) \vee (h(t_1) \wedge p')) \wedge (h(t_1') \wedge p')]$$

$$= [(h(t_1) \wedge p') \wedge (h(s_1') \wedge p)] \vee$$

$$[(h(s_1) \wedge p) \wedge (h(t') \wedge p')]$$

$$= 0 \vee 0 = 0.$$

$$f(x) \vee f(x') = [(h(s_1) \wedge p) \vee (h(t_1) \wedge p')] \vee$$

$$[(h(s_1') \wedge p) \vee (h(t_1') \wedge p')]$$

$$= [(h(s_1) \wedge p) \vee (h(s_1') \wedge p)] \vee$$

$$[(h(t_1) \wedge p') \vee (h(t_1') \wedge p')]$$

$$= p \vee p'$$

$$= 1.$$

e) f es única.

Sea $g : A \to B$ tal que $g(r) = p$ y $g_{|C} = h$ luego $g_{|C\cup\{r\}} = f_{|C\cup\{r\}}$ ya que $g(r) = f(r)$ entonces por coincidir en un generador tenemos que:

$g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, de donde $g = f$.

<u>4.7.4. PROPOSICION</u>

Si A es un álgebra de Boole entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) A es subretracción absoluta.

b) A es retracción de un álgebra completa.

c) A es completa.

d) A es inyectiva.

PRUEBA

a) $\Longrightarrow$ b)

Sea A una subretracción absoluta y sea (H, h) una completación minimal de A; $h: A \to H$ es un monomorfismo y por ser A subretracción absoluta existe $t: H \to A$ epimorfismo tal que $t \circ h = 1_A$; luego A es retracción del álgebra completa H.

b) $\Longrightarrow$ c)

Sea A una retracción de un álgebra completa B; es decir, existen morfismos f, g: $B \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} A$ tal que $f \circ g = 1_A$.

Probaremos que A es completa es decir que para todo $E \subset A$, existe el supremo de E. Como $g(E) \subset B$ y B es completa, entonces existe el supremo de g(E).

Sea $a = \text{Sup}\ \{g(E)\}$.

$f(a) = \text{Sup}\ E$

i) $x \leq f(a)$, para todo $x \in E$.

$x \in E \Longrightarrow g(x) \in g(E)$

$\Longrightarrow g(x) \leq a$, para todo $x \in E$

$\Longrightarrow f(g(x)) \leq f(a)$, para todo $x \in E$

$$\Longrightarrow (f \circ g)(x) \leq f(a), \quad \text{para todo } x \in E$$

$$\Longrightarrow x \leq f(a), \text{ para todo } x \in E.$$

ii) Sea $b \in A$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in E$. Probaremos que $f(a) \leq b$.

$$x \leq b \Longrightarrow g(x) \leq g(b)$$

$$\Longrightarrow a \leq g(b)$$

$$\Longrightarrow f(a) \leq f(g(b))$$

$$\Longrightarrow f(a) \leq 1_A(b)$$

$$\Longrightarrow f(a) \leq b.$$

Luego A es completa.

c) $\Longrightarrow$ d)

Sea A un álgebra de Boole completa.

Consideremos el diagrama.

$$\begin{tikzcd} & B & \\ A & & C \arrow[ul, "g"'] \arrow[ll, "h"] \end{tikzcd}$$

donde $g : C \to B$ es un monomorfismo

$h : C \to A$ es un morfismo

y probaremos que existe un morfismo $f : B \to A$ tal que $f \circ g = h$.

Formemos el conjunto Ω , así:

$$\Omega = \{(T,\ t) \mid g(C) \subset T,\ T \text{ subálgebra de } B$$
$$t : T \to A \text{ morfismo tal que } t \circ g = h\}$$

$\Omega \neq \Phi$ ya que $(g(C),\ t) \in \Omega$ con $\begin{aligned} t : g(C) &\longrightarrow A \\ g(x) &\rightsquigarrow h(x) \end{aligned}$

Definamos $(T,\ t) \leq (T',\ t')$ si y solo si $T \subset T'$ y $t'_{|T} = t$.

Sea $\Omega' \subset \Omega$ tal que Ω' es totalmente ordenado.

Sea $(N,\ n)$ tal que $N = \bigcup_{(T,t)\in\Omega'} T$ y

$\begin{aligned} n : N &\longrightarrow A \\ x &\rightsquigarrow t(x) \end{aligned}$ si $x \in T$.

n es bien definida.

Sea $x \in T_1$ y $x \in T_2$; probemos que $t_1(x) = t_2(x)$.

Como Ω' es totalmente ordenado tenemos que $(T_1 \subset T_2$ y $t_{2_{|T_1}} = t_1)$ ó $(T_2 \subset T_1$ y $t_{1_{|T_2}} = t_2)$; en ambos casos se tiene que $t_1(x) = t_2(x)$.

Demostremos que $(N,\ n)$ es mayorante de Ω'.

Probemos que $(N,\ n) \in \Omega$.

N subálgebra de B .

a) $x \in N$ implica que existe T_1 tal que $x \in T_1$ para $(T_1 , t_1) \in \Omega'$.

$y \in N$ implica que existe T_2 tal que $x \in T_2$ para $(T_2 , t_2) \in \Omega$.

Pero $T_1 \subset T_2$ ó $T_2 \subset T_1$, de aquí $x \vee y \in N$.

b) $x \in N$ implica que existe "T" tal que $x \in T$ para $(T, t) \in \Omega'$; luego $x' \in T$ ya que T es subálgebra de A. Por tanto $x' \in N$.

$n \circ g = h$.

Sea $x \in C$

$$
\begin{aligned}
(n \circ g)(x) &= n(g(x)) \\
&= t(g(x)) \quad \text{ya que } g(x) \in T \\
&= (t \circ g)(x) \\
&= h(x).
\end{aligned}
$$

Entonces por lema de Zorn, existe (T_o , t_o) maximal de Ω.

$T_o = B$.

Supongamos que $T_o \neq B$ y sea $r \in B$, $r \notin T_o$ construyamos $L = [T_o \cup \{r\}]$; se tiene $T_o \subset L$.

Sea $p_* = \operatorname{Sup} \{t_o(y) \mid y \in T_o \text{ y } y \leq r\}$

$p^* = \operatorname{Inf} \{t_o(z) \mid z \in T_o \text{ y } r \leq z\}$;

el supremo y el infimo existen ya que A es completa.

Probemos que $p_* \leq p^*$, es decir que p^* es cota superior de $\{t_o(y) \mid y \in T_o \text{ y } y \leq r\}$.

$t_o(y) \leq p^*$ para todo $y \leq r$, $y \in T_o$.

Para todo $y, z \in T_o$ tal que $y \leq r \leq z$ se tiene $t_o(y) \leq t_o(z)$. Luego si $y \in T_o$, $y \leq r$, tenemos que $t_o(y)$ es cota inferior de $\{t_o(z) \mid r \leq z\}$ de donde $t_o(y) \leq p^*$ y por tanto $p_* \leq p^*$. Nos encontramos ahora en las condiciones de (4.7.3.); por lo tanto existe un único morfismo $\ell : L \to A$ tal que $\ell(r) = p$ y $\ell_{|T_o} = t_o$.

$(L, \ell) \in \Omega$.

L es subálgebra.

$g(C) \subset L$ ya que $g(C) \subset T_o \subset L$.

$\ell \circ g = h$.

Sea $x \in C$.

$$\begin{aligned}(\ell \circ g)(x) &= \ell(g(x)) \\ &= t_o\,(g(x)) \\ &= (t_o \circ g)(x) \\ &= h(x)\end{aligned}$$

luego $(T_o, t_o) < (L, \ell)$ ya que $T_o \subsetneq L$ y $\ell_{|T_o} = t_o$

esto es contradicción porque (T_o, t_o) es maximal en Ω. Por tanto $B = T_o$.

Es decir existe $t_o : B \to A$ tal que $t_o \circ g = h$.

Luego A es inyectiva.

d) $\Longrightarrow$ a)

Sea $g : A \to B$ un monomorfismo; B álgebra de Boole cualquiera. Probaremos que existe $f : B \to A$ epimorfismo tal que $f \circ g = 1_A$. Como A es inyectiva tenemos que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "t"'] & \\ A & & A \arrow[ul, "g"'] \arrow[ll, "1_A"] \end{tikzcd} \qquad t \circ g = 1_A$$

"t" es epimorfismo ya que para cada $x \in A$ se tiene $x = t(g(x))$.

4.7.5. PROPOSICION

Sean A, B dos álgebras de Boole, $f : A \to B$ un isomorfismo. Entonces si A es inyectiva, B es inyectiva.

PRUEBA

Sea
$$\begin{tikzcd} B & & C \\ & D \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$
un diagrama de álgebras

de Boole; por ser A inyectiva, se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & A & \\ B \arrow[ur, "f^{-1}"] & & C \arrow[ul, "r"'] \\ & D \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

$$r \circ t = f^{-1} \circ g$$

"r" existe porque A es inyectiva.

$\overline{t} = f \circ r$ es tal que $\overline{t} \circ t = g$.

Luego B es inyectiva.

4.7.6. PROPOSICION

Si E es un espacio de Boole, las condiciones que siguen son equivalentes:

1º) E es proyectivo.

2º) CL(E) es inyectiva.

PRUEBA

1) $\Longrightarrow$ 2)

Sea el diagrama de álgebras de Boole

$$\begin{tikzcd} CL(E) & & A \\ & B \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Encontraremos $\overline{f} : A \to CL(E)$ tal que $\overline{f} \circ f = g$.
Aplicando el funtor contravariante X (3.2.1.) se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\Psi_E"'] \arrow[dr, "t"] & \\ X_{CL(E)} \arrow[dr, "X_g"'] & & X_A \arrow[dl, "X_f"] \\ & X_B & \end{tikzcd} \quad ; \quad X_g \circ \Psi_E = X_f \circ t.$$

en donde "t" existe por ser E proyectivo.

Es decir que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X_{CL(E)} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "X_g"'] & & X_A \arrow[dl, "X_f"] \\ & X_B & \end{tikzcd} \qquad \text{con } r = t \circ \Psi_E^{-1}$$

Aplicando la función inversa de X (3.1.5.)

$$X^{-1}(X_f \circ r) = X^{-1}(X_g)$$

ó sea que

$$X^{-1}(r) \circ X^{-1}(X_f) = g$$

$$X^{-1}(r) \circ f = g .$$

Luego $X^{-1}(r)$ es la función $\overline{f}$ buscada.

2) $\Longrightarrow$ 1)

Sea un diagrama de espacios de Boole

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "g"'] & & G \arrow[dl, "f"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

Encontraremos $\bar{f} : E \to G$ continua tal que $f \circ \bar{f} = g$. Aplicando el funtor contravariante CL (3.2.11.) tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
CL(E) & & CL(G) \arrow[ll, "m"'] \\
& CL(H) \arrow[ul, "CL(g)"] \arrow[ur, "CL(f)"'] &
\end{tikzcd} \qquad m \circ CL(f) = CL(g)$$

"m" existe porque CL(E) es inyectiva. Aplicando $t = CL^{-1}$ (3.2.10) tenemos

$$t(m \circ CL(f)) = t(CL(g))$$

$$t(CL(f) \circ t(m)) = t(CL(g))$$

$$f \circ t(m) = g$$

$\bar{f} = t(m)$ es la función buscada.

4.7.7. PROPOSICION

Si B es una álgebra de Boole, las dos condiciones que siguen son equivalentes:

1º) B e s inyectiva.

2º) X_B es proyectivo.

PRUEBA

1) $\Longrightarrow$ 2)

Sea un diagrama de espacios de Boole

$$\begin{tikzcd} X_B \arrow[dr, "g"'] & & E \arrow[dl, "f"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Encontraremos $\overline{f} : X_B \to E$ continua tal que $f \circ \overline{f} = g$.

Aplicando el funtor CL, tendremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & B & \\ CL(X_B) \arrow[ur, "h"] & & CL(E) \arrow[ul, "m"'] \\ & CL(F) \arrow[ul, "CL(g)"] \arrow[ur, "CL(f)"'] & \end{tikzcd}$$

en donde $h \circ CL(g) = m \circ CL(f)$ ó

$CL(g) = h^{-1} \circ m \circ CL(f)$ (1)

y en donde h e s la biyección entre $CL(X_B)$ y B

"m" existe porque B e s inyectiva.

Aplicando la función $t = CL^{-1}$ en (1):

$$t(CL(g)) = t((h^{-1} \circ m) \circ CL(f))$$

$$t(CL(g)) = t(CL(f)) \circ t(h^{-1} \circ m)$$

$$g = f \circ t(h^{-1} \circ m).$$

Luego $\bar{f} = t(h^{-1} \circ m)$ es la función buscada.

2) $\Longrightarrow$ 1)

Sea el diagrama de álgebras de Boole

$$\begin{tikzcd} B & & C \\ & D \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor X se tiene

$$\begin{tikzcd} X_B \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "X_g"'] & & X_C \arrow[dl, "X_f"] \\ & X_D & \end{tikzcd} \qquad X_f \circ m = X_g.$$

"m" existe por ser X_B proyectivo.

Aplicando la función X^{-1} (3.1.5.) se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} B & & C \arrow[ll, "X^{-1}(m)"'] \\ & D \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Luego B es inyectiva.

4.7.8. PROPOSICION

Sean A, B dos álgebras de Boole. Entonces $A \times B$ es inyectiva si y solo si A y B son ambas inyectivas.

PRUEBA

$A \times B$ es inyectiva $\Longleftrightarrow$ $X_{A \times B}$ es proyectivo

$\Longleftrightarrow$ $X_A + X_B$ es proyectivo

$\Longleftrightarrow$ X_A y X_B son ambos proyectivos

$\Longleftrightarrow$ A y B son ambas inyectivas.

4.7.9. PROPOSICION

Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de álgebras de Boole. Entonces $\sum A_i$ es inyectiva si y solo si cada A_i es inyectiva.

PRUEBA

$\sum A_i$ es inyectiva $\Longleftrightarrow$ $CL(\Pi X_{A_i})$ es inyectivo

$\Longleftrightarrow$ $X_{CL(\Pi X_{A_i})}$ es proyectivo

$\Longleftrightarrow$ ΠX_{A_i} es proyectivo

$\Longleftrightarrow$ cada X_{A_i} es proyectivo

$\Longleftrightarrow$ cada A_i es inyectivo.

A P E N D I C E

Con el desarrollo de este apéndice, pretendemos, en alguna medida, sentar las bases iniciales en Teoría de Categorías y Topología, o sea dar los conceptos elementales que nos faciliten la comprensión de los temas a desarrollar en este trabajo.

I - ELEMENTOS DE TEORIA DE CATEGORIAS

I.1 CATEGORIA

I.1.1 DEFINICION

Una categoría "$\mathfrak{C}$" consiste en:

1º) Una familia $Ob(\mathfrak{C})$ cuyos elementos son llamados objetos de $\mathfrak{C}$.

2º) Para cada par A, B de objetos de $\mathfrak{C}$, un conjunto denominado Mor(A, B) cuyos elementos son llamados Morfismos de A a B.

3º) Para cada objeto A, un elemento de Mor(A, A), - denotado 1_A , llamado Morfismo Identidad de A.

4º) Una Ley de Composición: si A, B, C pertenecen a $Ob(\mathfrak{C})$ y "f" y "g" son elementos de Mor(A, B) y Mor(B, C) respectivamente, existe un morfismo $g \circ f \in Mor(A, C)$. (En otras condiciones $g \circ f$ no está definido).

Se satisfacen los tres axiomas siguientes:

1º) Los conjuntos Mor(A, B) son disjuntos.

2º) Si f, g, h son Morfismos de A a B, de B a C y de C a D respectivamente, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g)f$.

3º) Si $f \in Mor(A,B)$ entonces $1_B \circ f = f \circ 1_A = f$.

I.1.2 EJEMPLOS

1º) Categoría de los Conjuntos "S" cuyos objetos son los conjuntos y los morfismos de un conjunto A a un conjunto B, son todas las funciones

$$f : A \to B.$$

2º) Categoría de Grupos "Gr" cuyos objetos son los grupos y los morfismos de un grupo A a un grupo B, son las funciones

$$f : A \to B \quad \text{tales que} \quad f(x.y) = f(x) \,.\, f(y),$$

para todo x, y en A.

3º) Categorías de Espacios Vectoriales "Vk" cuyos objetos son los Espacios Vectoriales sobre un campo k y los morfismos son las funciones lineales.

4º) Categoría de Anillos "An" cuyos objetos son los anillos y los morfismos de un anillo A a un anillo B, son las funciones

$$f : A \to B \quad \text{tales que}$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x \,.\, y) = f(x) \,.\, f(y)$$

para todo x, y en A.

I.2 MORFISMOS

I.2.1 DEFINICION

Sea $\mathbb{C}$ una categoría; A, B objetos de $\mathbb{C}$, $f \in Mor(A, B)$.

El morfismo f es llamado "monomorfismo" si para todo par de morfismos g, h se cumple:

$$f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h.$$

El diagrama siguiente ilustra esta definición:

$$E \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

I.2.2 DEFINICION

Sea $\mathbb{C}$ una categoría; A, B objetos de $\mathbb{C}$, $f \in Mor(A, B)$. El morfismo f es llamado "epimorfismo" si para todo par de morfismos g, h se cumple:

$$g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h.$$

El diagrama siguiente ilustra la definición:

$$A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} E$$

I.2.3 DEFINICION

Sea $\mathbb{C}$ una categoría, A, B objetos de $\mathbb{C}$, $f \in Mor(A, B)$. El morfismo f es llamado "isomorfismo" si existen morfismos g, h tales que:

$$f \circ g = 1_B$$

$$h \circ f = 1_A$$

I.2.4 PROPOSICION

Si $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$ es un diagrama en una Categoría $\mathcal{C}$. Entonces:

i) $f \circ g$ es un monomorfismo si f y g lo son.

ii) $f \circ g$ es un epimorfismo si f y g lo son.

iii) g es un monomorfismo si $f \circ g$ lo es.

iv) f es un epimorfismo si $f \circ g$ lo es.

PRUEBA

i) Sean f, g monomorfismos, probaremos que $f \circ g$ es un monomorfismo.

Sea:

$$(f \circ g) \circ h = (f \circ g) \circ h'; \text{ asociando}$$

$$f \circ (g \circ h) = f \circ (g \circ h')$$

por ser f monomorfismo

$$g \circ h = g \circ h'$$

por ser g monomorfismo

$$h = h'.$$

Luego:

$$f \circ g$$

es un monomorfismo.

ii) Si f, g son epimorfismos, probaremos que $f \circ g$ es epimorfismo.

Sea:

$$h \circ (f \circ g) = h' \circ (f \circ g) \text{ asociando}$$

$$(h \circ f) \circ g = (h' \circ f) \circ g$$

por ser g epimorfismo

$$h \circ f = h' \circ f$$

por ser f epimorfismo

$$h = h' .$$

Luego:

$$f \circ g$$

es epimorfismo.

iii) Si $f \circ g$ es monomorfismo, probaremos que g es monomorfismo.

Sea:

$$g \circ m = g \circ n ,$$

entonces

$$f \circ (g \circ m) = f \circ (g \circ n)$$

ósea:

$$(f \circ g) \circ m = (f \circ g) \circ n$$

de donde:

$$m = n$$

por ser $f \circ g$ monomorfismo.

Luego:

$$g \circ m = g \circ n \rightarrow m = n.$$

iv) Probaremos que f es un epimorfismo, si $f \circ g$ lo es.

Sea:

$$m \circ f = n \circ f ,$$

entonces

$$(m \circ f) \circ g = (n \circ f) \circ g$$

ósea:

$$m \circ (f \circ g) = n \circ (f \circ g)$$

pero, por ser $f \circ g$ epimorfismo, tenemos que

$$m = n.$$

Luego, f es un epimorfismo.

I.3 FUNTORES

I.3.1 DEFINICION

Sean $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ dos Categorías; un funtor $\mathbb{F}$ de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{D}$ es una "función doble" $\mathbb{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ que a cada objeto A de $\mathbb{C}$, le hace corresponder un objeto $\mathbb{F}(A)$ en $\mathbb{D}$ y a cada morfismo f de A a B en $\mathbb{C}$ un morfismo $\mathbb{F}(f)$ de $\mathbb{F}(A)$ a $\mathbb{F}(B)$.

$$\mathbb{F} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$A \rightsquigarrow \mathbb{F}(A)$$

$$f : A \to B \rightsquigarrow \mathbb{F}(f) : \mathbb{F}(A) \to \mathbb{F}(B).$$

Un funtor $\mathbb{F}$ satisface dos condiciones:

1º) $\mathbb{F}(g \circ h) = \mathbb{F}(g) \circ F(h)$, si $g \circ h$ existe en $\mathbb{C}$.

2º) $\mathbb{F}(1_A) = 1_{\mathbb{F}(A)}$, para todo $A \in Ob(\mathbb{C})$.

Se distinguen dos tipos de funtores:

- Funtor Covariante.
- Funtor Contravariante.

El funtor Covariante, es el que acabamos de definir.

El funtor Contravariante, es aquel en el cual la igualdad $\mathbb{F}(g \circ h) = \mathbb{F}(g) \circ \mathbb{F}(h)$ es sustituida por la igualdad $\mathbb{F}(g \circ h) = \mathbb{F}(h) \circ \mathbb{F}(g)$

I.3.2 EJEMPLOS

1º) $\mathbb{F} : Gr \longrightarrow An$

$$A \rightsquigarrow Z \times A$$

$$f : A \to B \rightsquigarrow \mathbb{F}(f) : Z \times A \longrightarrow Z \times B$$

$$(m, x) \rightsquigarrow (m, f(x))$$

Las operaciones sobre $Z \times A$ son definidas así:

$(m, x) + (n, y) = (m + n, x + y)$

$(m, x) . (n, y) = (mn, my + nx)$.

$\mathbb{F}$ es un funtor covariante.

2º) Si k es un cuerpo, tenemos el funtor contravariante:

$$\mathbb{T} : V_k \longrightarrow V_k$$

$$A \rightsquigarrow Mor(A, K)$$

$$f : A \to B \rightsquigarrow \mathbb{T}(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{T}(B) & \longrightarrow & \mathbb{T}(A) \\ g & \rightsquigarrow & g \circ f \end{array}$$

I.3.3. PROPOSICION

Si en el diagrama siguiente:

$$A \xrightarrow{\mathbb{F}} \mathbb{B} \xrightarrow{\mathbb{G}} \mathbb{C}$$

A, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ son categorías y $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ funtores; entonces:

i) $\mathbb{G} \circ \mathbb{F}$ es un funtor covariante si $\mathbb{G}$ y $\mathbb{F}$ lo son.

ii) $\mathbb{G} \circ \mathbb{F}$ es un funtor covariante si $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ son contravariantes.

iii) $\mathbb{G} \circ \mathbb{F}$ es contravariante si $\mathbb{F}$ es covariante y $\mathbb{G}$ contravariante.

PRUEBA

i) Sean $\mathbb{G}$, $\mathbb{F}$ funtores covariantes, a probar que $\mathbb{G}\,\mathbb{F}$ es covariante, o sea:

$$\mathbb{G}\mathbb{F}(h_\circ f) = \mathbb{G}\mathbb{F}(h)\ _\circ \mathbb{G}\mathbb{F}(f)$$

$$\mathbb{G}\,\mathbb{F}(h_\circ f) = \mathbb{G}(\mathbb{F}(h_\circ f)) = \mathbb{G}(\mathbb{F}(h)\ _\circ \mathbb{F}(f))$$

$$= \mathbb{G}\,\mathbb{F}(h)\ _\circ \mathbb{G}\,\mathbb{F}(f)\ .$$

ii) Sean $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ funtores contravariantes, a probar que $\mathbb{G}\,\mathbb{F}$ es covariante.

$$\mathbb{G}\,\mathbb{F}(h_\circ f) = \mathbb{G}(\mathbb{F}(h_\circ f))$$

$$= \mathbb{G}(\mathbb{F}(f)\ _\circ \mathbb{F}(h))$$

$$= \mathbb{G}\,\mathbb{F}(h)\ _\circ \mathbb{G}\,\mathbb{F}(f).$$

Luego, $\mathbb{G}\,\mathbb{F}$ es covariante.

iii) Sea $\mathbb{F}$ un funtor covariante y $\mathbb{G}$ contravariante, entonces probaremos que $\mathbb{G}\,\mathbb{F}$ es contravariante.

$$\mathbb{G}\,\mathbb{F}(h_\circ f) = \mathbb{G}(\mathbb{F}(h_\circ f))$$

$$= \mathbb{G}(\mathbb{F}(h)\ _\circ \mathbb{F}(f))$$

$$= \mathbb{G}\,\mathbb{F}(f)\ _\circ \mathbb{G}\,\mathbb{F}(h).$$

Luego, $\mathbb{G}\,\mathbb{F}$ es contravariante.

I.4 FUNTORES ADJUNTOS

I.4.1 DEFINICION

Si $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ son dos categorías

$$S : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$$

$$\mathbb{T} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$

dos funtores contravariantes.

Se dice que S y $\mathbb{T}$ son funtores adjuntos a la izquierda, si para cada par de objetos $C \in Ob(\mathbb{C})$ y $D \in Ob(\mathbb{D})$ hay una biyección:

$$\alpha_{C,D} : Mor(S(C), D) \to Mor(\mathbb{T}(D), C)$$

tal que si

$$f : C \to C'$$

$$g : D \to D'$$

son morfismos de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ respectivamente, el diagrama si-- guiente es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
Mor(S(C), D) \arrow[r, shift left, "\alpha_{C,D}"] \arrow[d, "\gamma f{,}g"'] & Mor(\mathbb{T}(D), C) \arrow[l, shift left, "\beta C{,}D"] \arrow[d, "\delta f{,}g"] \\
Mor(S(C'), D') \arrow[r, shift left, "\alpha_{C',D'}"] & Mor(\mathbb{T}(D'), C') \arrow[l, shift left, "\beta_{C',D'}"]
\end{tikzcd}$$

en donde

$$\beta_{C,D} = \alpha^{-1}_{C,D}$$

$$\gamma_{f,g}(m) = g \circ m \circ S(f)$$

$$\delta_{f,g}(n) = f \circ n \circ \Pi(g) .$$

II ELEMENTOS DE TOPOLOGIA GENERAL

II.1 ESPACIOS TOPOLOGICOS

II.1.1. DEFINICION

Sea X un conjunto y $T \subset P(X)$. Se dice que T es una topología en X si:

i) $\phi \in T$ y $X \in T$.

ii) Si $A_i \in T$ para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$.

iii) Si $A_i \in T$ para todo $i \in I$, donde I es un conjunto finito, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i \in T$.

NOTAS

1º) Al par (X, T), donde X y T son los de la definición anterior, se le llama espacio topológico. Cuando no sea necesario especificar T, nos referiremos a X como un espacio topológico.

2º) Los elementos de T son llamados los conjuntos abiertos de X.

II.1.2. EJEMPLOS

1º) $T_1 = \{X, \phi\}$ es una topología en X.

2º) $T_2 = P(X)$ es una topología en X.

3º) $T_3 = \{A \subset X \mid A = \phi$ ó $C_X A$ es finito$\}$ es una topología en X.

II.1.3. DEFINICION

Sea (X, T) un espacio topológico y $\mathbb{B} \subset T$. Entonces $\mathbb{B}$ se llama una base para T si todo abierto, es unión de elementos de $\mathbb{B}$.

NOTA

La definición anterior es equivalente con el siguiente enunciado:

"Para cada $A \in T$ y cada $x \in A$, existe $B \in \mathbb{B}$, tal que $x \in B$ y $B \subset A$".

II.1.4. DEFINICIONES

a) Un conjunto $A \subset X$ de un espacio topológico (X, T) se llama cerrado si A^c con respecto a X es abierto.

b) Sea (X, T) un espacio topológico. Un conjunto $A \subset X$ es llamado un clopen si A es a la vez abierto y cerrado.

II.1.5. EJEMPLOS

E1) El conjunto $Z \subset \mathbb{R}$ es cerrado.

E2) Si $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ es cerrado.

E3) ϕ y E son conjuntos clopens.

II.1.6. PROPIEDADES DE CONJUNTOS CERRADOS

Sea (X, T) un espacio topológico; entonces:

i) X y ϕ son cerrados.

ii) Toda intersección de cerrados es un cerrado.

iii) Toda unión finita de conjuntos cerrados, es un -- conjunto cerrado.

PRUEBA

i) Evidente por la definición de cerrado.

ii) Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados.

G_i^c es un conjunto abierto, para todo $i \in I$, por lo tanto $\left(\bigcap_{i\in I} G_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} G_i^c$ es un abierto por ser unión de abiertos; luego $\bigcap_{i\in I} G_i$ es un cerrado.

iii) Sean $G_1, G_2, \ldots. G_n$ cerrados. G_i^c es abierto para $i = 1, 2, \ldots n$. Luego $\left(\bigcup_1^n G_i\right)^c = \bigcap_1^n G_i^c$, es un abierto por ser intersección finita de abiertos; por lo tanto, $\bigcup_1^n G_i$ es cerrado.

II.1.7. PROPIEDADES DE CONJUNTOS CLOPENS

Sea (X, T) un espacio topológico; entonces:

i) Φ y X son clopens.

ii) La intersección de dos clopens es un clopen.

iii) La unión de dos clopens es un clopen.

iv) El complemento de un clopen es clopen.

PRUEBA

i) Φ y X son clopens (es evidente por la definición de clopen).

ii) Sean A, B clopens, entonces $A \cap B$ es clopen.

$A \cap B$ es un abierto por ser intersección finita de abiertos. Además $A \cap B$ es un cerrado por ser intersección de cerrados. Luego $A \cap B$ es clopen.

iii) Sean A, B clopens, entonces $A \cup B$ es elopen .

$A \cup B$ es un abierto, por ser unión de abiertos. $A \cup B$ es un cerrado, por ser unión finita de cerrados. Luego $A \cup B$ es un clopen.

iv) Si A es clopen, entonces A^c es clopen.

A es un abierto, entonces A^c es cerrado.

A es un cerrado, entonces A^c es abierto.

Luego A^c es un clopen.

II.2 SUBESPACIOS - ESPACIOS SEPARADOS O DE HAUSDORFF

II.2.1. DEFINICION

Sea (X, T) un espacio topológico, $S \subset X$ y $S \neq \phi$ y $TS = \{O \cap S \mid O \in T\}$ la topología inducida en S por la topología T. El espacio topológico (S, TS) se llama subespacio del espacio topológico (X, T).

NOTA

De la definición anterior, se obtiene que $U \in S$ es un abierto en el sub-espacio S de X (X espacio topológico) si y solo si existe un abierto $O \subset X$, tal que $U = O \cap S$.

Ejemplo: todo intervalo de $\mathbb{R}$ es un sub-espacio de $\mathbb{R}$.

II.2.2. PROPOSICION

Sea X un espacio topológico y S un sub-espacio de X. Un conjunto $A \subset S$ es cerrado en S, si y solo si, existe un conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $A = F \cap S$.

PRUEBA

i) Sea $A \subset S$, A cerrado en S; entonces A^c es abierto en S; por lo tanto existe O abierto en X, tal que $A^c = O \cap S$, esto es $S - A = O \cap S$. De aquí resulta que

$$A = (O \cap S)^c = S - (O \cap S) = S \cap (X - O),$$

siendo $(X - O)$ cerrado en X. Luego existe un conjunto cerrado $F = X - O$, $F \subset X$ tal quc $A = F \cap S$.

ii) Sea $F \subset X$ un conjunto cerrado tal que $A = F \cap S$. Probaremos que el complemento de A (respecto a S) es abierto en S.

En efecto:

$A^c = S - A = S - (F \cap S) = S \cap (X - F)$ que es un abierto en S ya que $X - F = F^c$ es abierto en X, por ser F cerrado. Luego si A^c es un abierto se obtiene que A es un cerrado en S.

II.2.3. DEFINICION

Un espacio topológico (X, T) se llama separado o de Hansdorff si para todo x, y en X, $x \neq y$, existen abiertos A y B tales que $x \in A$, $y \in B$ y $A \cap B = \Phi$.

II.2.4. EJEMPLO

$\mathbb{R}$ es un espacio separado, en donde los abiertos son todos los subconjuntos A de $\mathbb{R}$ que satisfacen que para todo $x \in A$, existe $h > 0$, tal que

$$]x - h, x + h[\subset A.$$

II.2.5. PROPOSICION

En un espacio topológico separado X, toda parte reducida a un punto es un conjunto cerrado.

PRUEBA

Sea $x \in X$ y X separado. Mostremos que $\{x\}^c$ es abierto.

Sea $y \in \{x\}^c$, por ser X separado, existen abiertos A y B, tales que $x \in A$, $y \in B$ y $A \cap B = \Phi$.

De aquí se tiene que $B \subset \{x\}^c$ y por ser "y" arbitrario resulta que $\{x\}^c$ es abierto. Luego $\{x\}$ ó sea toda parte reducida a un punto es un conjunto cerrado.

II.2.6. PROPOSICION

Todo sub-espacio de un espacio separado es separado.

PRUEBA

Sea X un espacio topológico separado y S un sub-espacio de X. Sean x, y en S; $x \neq y$. Por ser X separado, existen abiertos A y B con $x \in A$, $y \in B$ tales que $A \cap B = \Phi$.

Formamos los abiertos de S: $A_x = A \cap S$; $B_y = B \cap S$. Se ve claramente que $A_x \cap B_y = \phi$, por lo tanto S es separado.

II.3. ADHERENCIA, INTERIOR, FRONTERA Y CONJUNTOS RAROS.

II.3.1. DEFINICIONES

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$.

1º) Un punto $x \in X$ se dice que es adherente a A, si todo abierto que contiene a "x" contiene al menos un punto de A (que puede ser "x" mismo).

2º) El conjunto de todos los puntos adherentes a A, se llama la adherencia de A (o la cerradura de A), y se denota por $\overline{A}$.

3º) El interior de A, denotado $\mathring{A}$, es el abierto más grande contenido en A. Es decir

$$\mathring{A} = \bigcup_{O \subset A} O ,$$

O abierto.

4º) Se llama frontera de A, al conjunto de puntos adheren tes a A y a su complemento. Se denota por Fr(A). Así

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

5º) A es un <u>conjunto raro</u>, si el interior de la adherencia de A es vacío.

II.3.2. EJEMPLOS

E1 En $\mathbb{R}$ si $A =]0, 1]$ entonces $\overline{A} = [0, 1]$

$$B = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \} \text{ entonces } \overline{B} = B \cup \{0\}.$$

E2 En $\mathbb{R}$, el interior de $[a, b]$ es $]a, b[$.

E3 En $\mathbb{R}$, si $A =]0, 1]$ entonces

$Fr(A) = [0, 1] \cap ( ]-\infty , 0] \cup [1, +\infty[ ) = \{0, 1\}.$

Si $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, entonces

$Fr(B) = B \cup \{0\}.$

E4 En todo espacio topológico, Φ es un conjunto raro.

II.3.3. PROPIEDADES

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$.

Entonces:

1º) $A \subset \overline{A}$; $\mathring{A} \subset A$.

2º) A es cerrado $\Longleftrightarrow$ $A = \overline{A}$.

3º) A es abierto $\Longleftrightarrow$ $A = \mathring{A}$.

4º) $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

5º) $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

6º) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

7º) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

8º) $\overline{\Phi} = \Phi$, $\mathring{X} = X$.

9º) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$; $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$.

10º) $Fr(A) = \overline{A} - \mathring{A}$.

11º) $Fr(A) \cap \mathring{A} = \Phi$.

12º) $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$; $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$.

II.3.4. PROPOSICION

Sea X un espacio topológico, $A \subset X$ y $B \subset X$. Entonces $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$.

PRUEBA

$$
\begin{aligned}
Fr(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{(A \cup B)^c} \\
&\subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A^c} \cap \overline{B^c}) \\
&= [(\overline{A} \cap \overline{A^c}) \cap \overline{B^c}] \cup [(\overline{B} \cap \overline{B^c}) \cap \overline{A^c}] \\
&= [Fr(A) \cap \overline{B^c}] \cup [Fr(B) \cap \overline{A^c}] \\
&\subset Fr(A) \cup Fr(B).
\end{aligned}
$$

II.3.5. PROPOSICION

Sea X un espacio topológico, A abierto y $B \subset X$, entonces: $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

PRUEBA

Sea $x \in A \cap \overline{B}$ y sea 0 un abierto que contiene a "x". Como $x \in A \cap \overline{B}$, $x \in A$ y por ser A abierto, $0 \cap A$ es un abierto que contiene a "x".

Además, $x \in \overline{B}$ de donde se sigue que: $(0 \cap A) \cap B \neq \Phi$, ó lo que es igual $0 \cap (A \cap B) \neq \Phi$ de donde $x \in \overline{A \cap B}$.

Luego, $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

II.3.6. PROPOSICION

Sean A, B conjuntos raros de un espacio topológico X, entonces $A \cup B$ es raro.

PRUEBA

Sabemos que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Sea E un abierto tal que $E \neq \Phi$. Probaremos que $E \not\subset \overline{A \cup B}$, es decir que existe $x \in E$ tal que $x \notin \overline{A \cup B}$.

$E \not\subset \overline{A}$ ya que A es raro y $E \neq \Phi$. Luego existe $x \in E$ tal que $x \notin \overline{A}$, de aquí que existe un abierto 0 tal que $0 \cap \overline{A} = \Phi$, $x \in 0$.

$E_1 = 0 \cap E \not\subset \overline{B}$, porque B es raro; esto quiere decir que existe $y \in 0 \cap E$ tal que $y \notin \overline{B}$; $y \notin \overline{A}$ porque $y \in 0$, por lo tanto $y \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Luego $\overset{\circ}{\overline{A \cup B}} = \Phi$.

II.3.7. PROPOSICION

Sea X un espacio topológico, $A \subset X$ y B un conjunto raro, entonces $B \cap A$ es raro.

PRUEBA

Probaremos que $\overset{\circ}{\overline{B \cap A}} = \Phi$

$B \cap A \subset B$, de donde se tiene que

$\overset{\circ}{\overline{B \cap A}} \subset \overset{\circ}{\overline{B}}$ y como $\overset{\circ}{\overline{B}} = \Phi$ entonces

$$\overset{\circ}{\overline{B \cap A}} = \Phi .$$

II.3.8. PROPOSICION

Si $P \subset Q$, entonces $\overset{c}{\overline{Q}} \subset \overset{c}{\overline{P}}$.

PRUEBA

Si $P \subset Q$, entonces $\overline{P} \subset \overline{Q}$ de donde $\overset{c}{\overline{Q}} \subset \overset{c}{\overline{P}}$.

II.3.9. PROPOSICION

Si P es abierto, entonces $P \subset \overset{\circ}{\overline{P}}$.

PRUEBA

$P \subset \overline{P}$ por propiedad de adherencia; además $\overset{\circ}{P} \subset \overset{\circ}{\overline{P}}$, pero como P es abierto $\overset{\circ}{P} = P$. Luego, $P \subset \overset{\circ}{\overline{P}}$.

II.3.10. PROPOSICION

Si P es abierto, entonces $\overset{c}{\overline{P}} = (\overset{c}{\overline{P}})^{\overset{\circ}{-}}$.

PRUEBA

i) Por proposición anterior, como P es abierto, $P \subset \overset{\circ}{P}$; aplicando (II.3.8) tenemos que $\overset{c}{\overset{\circ}{P}} \subset \overset{c}{P}$; pero $\overset{c}{\overset{\circ}{P}} = \overset{\circ}{\overset{c}{P}}$; luego $\left(\overset{c}{P}\right)^{\circ} \subset \left(\overset{c}{P}\right)$.

ii) $\overset{c}{P}$ es un abierto, luego aplicando (II.3.9) tenemos que $\overset{c}{P} \subset \left(\overset{c}{P}\right)^{\circ}$.

II.3.11. PROPOSICION

Si P es abierto, entonces $\overset{\circ}{P} = \left(\overset{\circ}{P}\right)^{\circ}$.

PRUEBA

$$P \text{ abierto} \Longrightarrow \overset{c}{P} = \left(\overset{c}{P}\right)^{\circ} \quad \text{(por proposición anterior)}$$

$$\Longrightarrow \left(\overset{c}{P}\right)^{c} = \left(\overset{c}{P}\right)^{\overset{c}{\circ}}$$

$$\Longrightarrow \overset{\circ}{P} = \left(\overset{\circ}{P}\right)^{\overset{c}{\overset{\circ}{c}}} = \left(\overset{\circ}{P}\right)^{\overset{c}{c}} = \left(\overset{\circ}{P}\right)^{\circ}$$

$$\Longrightarrow \overset{\circ}{P} = \left(\overset{\circ}{P}\right)^{\circ}$$

II.3.12. PROPOSICION

Si P y Q son abiertos, entonces

$$(P \cap Q)^{\circ} = \overset{\circ}{P} \cap \overset{\circ}{Q}.$$

PRUEBA

i) $\mathring{P} \cap \mathring{Q} \subset (P \cap Q)^{\circ}$.

$P \cap \overline{Q} \subset \overline{P \cap Q}$ (II.3.5), de donde se obtiene $P \cap \mathring{Q} \subset (P \cap Q)^{\circ}$ (1); haciendo $P = \mathring{P}$ en (1) tenemos que $\mathring{P} \cap \mathring{Q} \subset \left[\mathring{P} \cap Q\right]^{\circ}$. Por otra parte, aplicando (1) con los papeles de P y Q intercambiados, tenemos $\mathring{P} \cap Q \subset (P \cap Q)^{\circ}$, de donde $(\mathring{P} \cap Q)^{\circ} \subset (P \cap Q)^{\circ\circ} = (P \cap Q)^{\circ}$ ya que $P \cap Q$ es abierto.

Luego $(\mathring{P} \cap \mathring{Q}) \subset (\mathring{P} \cap Q)^{\circ} \subset (P \cap Q)^{\circ}$ de donde $\mathring{P} \cap \mathring{Q} \subset (P \cap Q)^{\circ}$.

ii) $(P \cap Q)^{\circ} \subset \mathring{P} \cap \mathring{Q}$.

Como $P \cap Q \subset P$ y $P \cap Q \subset Q$ entonces $(P \cap Q)^{\circ} \subset \mathring{P}$ y $(P \cap Q)^{\circ} \subset \mathring{Q}$ de aquí que $(P \cap Q)^{\circ} \subset \mathring{P} \cap \mathring{Q}$.

II.3.13. PROPOSICION

La frontera de un conjunto abierto es un conjunto cerrado y raro.

PRUEBA

Sabemos que $Fr(P) = \overline{P} \cap \overline{P^c}$.

Por ser P abierto $\overline{P^c} = P^c$.

Supongamos que el interior de la frontera de P es distinto de vacío; luego existe un abierto $A \neq \Phi$ tal que $A \subset Fr(P)$, es decir, $A \subset \overline{P} \cap P^c$; de aquí $A = A \cap \overline{P}$ y como $A \subset P^c$ entonces $A \cap P = \Phi$, lo cual es una contradicción ya que si $x \in A$ entonces $x \in \overline{P}$, de donde para todo abierto O que contiene a "x" $O \cap P \neq \Phi$.

Por tanto

$$\overset{\circ}{\overline{Fr(P)}} = \Phi \ .$$

II.4. CONJUNTOS REGULARES ABIERTOS

II.4.1. DEFINICION

Sea X un espacio topológico. Un conjunto abierto "P" es llamado "regular" si coincide con el interior de su cerradura. O sea P es regular si $P = \overset{\circ}{\overline{P}}$.

II.4.2. PROPOSICION

Si $\{P_i\}$ es una familia de conjuntos regulares abiertos, entonces $(\bigcup_i P_i)^{\overline{\circ}}$ y $(\bigcap_i P_i)^{\overline{\circ}}$ son conjuntos regulares abiertos.

PRUEBA

i) Como $\bigcup_i P_i$ es un abierto, aplicando (II.3.11.)

se tiene $\left(\bigcup_i P_i\right)^{\circ} = \overset{\circ}{\overline{\left(\bigcup_i P_i\right)^{\circ}}}$.

ii) Aplicando (II.3.9) se tiene que

$$\left(\bigcap_i P_i\right)^{\circ} \subset \overset{\circ}{\overline{\left(\bigcap_i P_i\right)^{\circ}}} .$$

$\bigcap_i P_i \subset P_j$ para todo j;

$\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{\bigcap_i P_i}}}} \subset \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{P_j}}}$ para todo j; como P_j es un regular abierto. Se tiene

$\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{\bigcap_i P_i}}}} \subset P_j$ para todo j; luego

$\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{\bigcap_i P_i}}}} \subset \bigcap_i P_i \subset \overline{\bigcap_i P_i}$ y de aquí obtenemos

$$\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\bigcap_i}}} P_i \subset \overset{\circ}{\bigcap_i} P_i .$$

II.4.3. PROPOSICION

i) Φ es un abierto regular.

ii) Si X es un espacio topológico, entonces X es un abierto regular.

iii) Si P y Q son abiertos regulares, entonces $P \cap Q$ es un abierto regular.

iv) Si P es un abierto regular, entonces $\overset{c}{P}$ es un abierto regular.

PRUEBA

i) $\Phi = \overset{\circ}{\Phi}$ trivial.

ii) $X = \overset{\circ}{X}$ trivial.

iii) $P \cap Q = (P \cap Q)^{\circ}$.

Por ser P y Q abiertos regulares

$P = \overset{\circ}{P}$ y $Q = \overset{\circ}{Q}$ de donde

$(P \cap Q) = \overset{\circ}{P} \cap \overset{\circ}{Q} = (P \cap Q)^{\circ}$ (II.3.12).

iv) $\overset{c}{P} = (\overset{c}{P})^{\circ}$ es trivial (por proposición II.3.10).

II.5. FUNCIONES CONTINUAS - ESPACIOS COMPACTOS.

II.5.1. DEFINICION

Sean (X, T_1) y (Y, T_2) espacios topológicos,

$f : X \to Y$ una función. Se dice que <u>f es continua en el punto $x_o \in X$</u> si para todo abierto $O_{f(x_o)}$ que contiene a $f(x_o)$, existe un abierto O_{x_o} que contiene a x_o, tal que si $x \in O_{x_o}$ entonces $f(x) \in O_{f(x_o)}$.

NOTA

1º) Se dirá que $f : X \to Y$ es continua si es continua en cada uno de sus puntos.

2º) Se prueba que "$f : X \to Y$ es continua si y solo si la imagen inversa por f de todo abierto de Y es un abierto de X".

II.5.2. DEFINICIONES

1º) Sea X un conjunto y $A \subset X$. Una familia $(O_i)_{i \in I}$ de partes de X, se llama un cubrimiento de A si $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$.

2º) Un espacio topológico X se llama compacto si

i) X es separado.

ii) Si de todo cubrimiento abierto de X, se puede extraer un cubrimiento finito de X.

3º) Si X es un espacio topológico y $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de X, se dice que la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ cumple la propiedad de intersección finita si para todo $J \subset I$ finito se cumple que $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \Phi$.

EJEMPLO

Todo intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ es compacto.

II.5.3. PROPOSICION

Si X es un espacio topológico, las condiciones que siguen son equivalentes:

a) X es compacto.

b) X es separado y para toda familia $(A_i)_{i \in I}$ de cerrados de X tal que $\bigcap_{i \in I} A_i = \Phi$, existe $J \subset I$, J finito tal que $\bigcap_{i \in J} A_i = \Phi$.

c) X es separado y para toda familia $(A_i)_{i \in I}$ de cerrados de X con la propiedad de intersección finita se cumple que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \Phi$.

DEMOSTRACION

a $\Longrightarrow$ b)

i) X es separado por definición de compacto.

ii) Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de cerrados tal que $\bigcap_{i \in I} A_i = \Phi$ entonces $(A_i^c)_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de X; luego existe $J \subset I$, J finito tal que $X = \bigcup_{i \in J} A_i^c$, ó sea que $\Phi = \bigcap_{i \in J} A_i$.

b $\Longrightarrow$ c)

i) X es separado por condición b).

ii) Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita; si $\bigcap_{i \in I} A_i = \Phi$, existiría $J \subset I$ finito tal que $\bigcap_{i \in J} A_i = \Phi$, lo cual contradice la definición de propiedad de intersección finita. Luego $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \Phi$.

c $\Longrightarrow$ a)

i) X es separado por condición c).

ii) Sea $(O_i)_{i \in I}$ una familia de abiertos de X tal que $X = \bigcup_{i \in I} O_i$. Si para todo $J \subset I$, J finito, se tuviera que $X \neq \bigcup_{i \in J} O_i$, entonces $(O_i^c)_{i \in I}$ sería una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita; luego se tendría $\Phi \neq \bigcap_{i \in I} O_i^c$ ó sea que $X \neq \bigcup_{i \in I} O_i$, como ésto es una contradicción, debe de existir $J \subset I$, J finito tal que

$$X = \bigcup_{i \in J} O_i .$$

II.5.4. PROPOSICION

En un espacio compacto, todo subconjunto cerrado es compacto.

PRUEBA

Sea X un espacio compacto y $F \subset X$ un subconjunto cerrado de X. Por ser X separado, resulta que F es separado ya que $F \subset X$.

Sea $(F_i)_{i \in I}$ una familia cualesquiera de cerrados en F, tal que $\bigcap F_i = \Phi$. Los F_i son cerrados en X; luego por ser X compacto, existe $J \subset I$, J finito tal que

$\bigcap_{i \in J} F_i = \Phi$, por tanto F es compacto.

II.5.5. PROPOSICION

En un espacio separado, todo subconjunto compacto es cerrado.

PRUEBA

Sea X un espacio separado y A un subconjunto compacto de X. Probaremos que A es cerrado, o sea que A^c es abierto.

Sea $x_o \in A^c$. Por ser X separado, para todo $y \in A$, existen abiertos $O1_y$, $O2_y$ tales que $y \in O1_y$, $x_o \in O2_y$ y $O1_y \cap O2_y = \Phi$. Cuando "y" se mueve en A, los abiertos $O1_y$ forman un cubrimiento abierto de A y por ser éste compacto se puede extraer un cubrimiento finito. Sea pues $A \subset O1_{y_1} \cup O1_{y_2} \cup O1_{y_3} \ldots\ldots \cup O1_{y_n}$

donde cada O_{1y_i} es un abierto que contiene a

y_i $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$.

Como para cada abierto O_{1y_i} existe un abierto

O_{2y_i} tal que $x_o \in O_{2y_i}$, el conjunto

$O = O_{2y_1} \cap O_{2y_2} \cap \ldots\ldots O_{2y_n}$ es un abierto que contiene a "x_o" y como $O_{1y_i} \cap O_{2y_i} = \Phi$ se tiene que

$(O_{1y_1} \cup O_{1y_2} \cup \ldots\ldots \cup O_{1y_n}) \cap O = \Phi$ y por lo tanto

$A \cap O = \Phi$. Así $O \subset A^c$ y A^c resulta ser un abierto.

Luego A es cerrado.

<u>II.5.6. PROPOSICION</u>

Sea X un espacio topológico compacto, F un espacio separado y $f : X \to F$ una función continua. Entonces $f(X)$ es compacto.

<u>PRUEBA</u>

F es un espacio separado y $f(X) \subset F$, de donde se obtiene que $f(X)$ es separado. Sea $(W_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de $f(X)$; $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} W_i$, luego $X \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(W_i)$.

Por ser f continua resulta que $f^{-1}(W_i)$ es abierto para todo $i \in I$ y por ser X compacto existe $J \subset I$, J finito tal que $f(x) \subset \bigcup_{i \in J} W_i$. Por tanto $f(x)$ es compacto.

II.5.7. PROPOSICION

Sea X un espacio topológico compacto; E, F dos cerrados disjuntos, no vacíos, de X. Entonces existen dos abiertos disjuntos E', F' tales que $E \subset E'$ y $F \subset F'$.

PRUEBA

Sea $x \in E$; como X es separado, para cada elemento $y \in F$, hay dos abiertos disjuntos A_{xy}, B_{xy} tales que $x \in A_{xy}$, $y \in B_{xy}$. Como F es un compacto de X, existen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en F, tales que $F \subset \bigcup_1^n B_{xy_i}$. Entonces $O_x = \bigcap_1^n A_{xy_i}$ y $W_x = \bigcup_1^n B_{xy_i}$ son dos abiertos disjuntos tales que $x \in O_x$, $F \subset W_x$. Como E es compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en E tales que $E \subset \bigcup_1^m O_{x_i}$. Luego $E' = \bigcup_1^m O_{x_i}$ y $F' = \bigcap_1^m W_{x_i}$ son dos abiertos disjuntos tales que $E \subset E'$ y $F \subset F'$.

II.6. ESPACIOS CONEXOS

II.6.1. DEFINICION

Un espacio topológico X es llamado conexo si no existen dos abiertos disjuntos y diferentes de vacío cuya unión sea igual a X.

NOTA

La definición anterior es equivalente a:

i) No existe una partición de X formada por dos cerrados.

ii) Los únicos clopens de X son Φ y X.

EJEMPLO

El conjunto $\mathbb{R}$ y cualquier intervalo en $\mathbb{R}$ son conjuntos conexos.

II.6.2. PROPOSICION

Sea X un espacio topológico. La siguiente relación es de equivalencia en X: $x\ R\ y$ ó $x \sim y$ si y solo si existe un subconjunto A de X, tal que A es conexo y $x, y \in A$.

PRUEBA

i) $\sim$ es reflexiva ya que $x \in \{x\}$ y $\{x\}$ es conexo.

ii) $\sim$ es simétrica ya que si $x\ R\ y$ entonces $x, y \in A$, A conexo, de donde $y, x \in A$, ó sea $y\ R\ x$.

iii) $\sim$ es transitiva.

$x\ R\ y \iff x, y \in A$, A conexo.

$y\ R\ z \iff y, z \in B$, B conexo.

Luego $x, z \in A \cup B$, $A \cup B$ conexo, de donde $x\ R\ z$. ($A \cup B$ es conexo cuando A y B son conjuntos no disjuntos y en este caso $y \in A$ y $y \in B$).

II.6.3. PROPOSICION

Sea X un espacio topológico. Para cada elemento $x \in X$, su clase de equivalencia C_x por la relación anterior cumple:

a) C_x es conexo.

b) $x \in C_x$.

c) Si A es un subconjunto de X que contiene a "x" y A es conexo, entonces $A \subset C_x$.

d) C_x es cerrado en X.

PRUEBA

a) Sea $B = \bigcup_{i \in I} A_i$, $x \in A_i$, A_i subconjunto conexo de X; entonces B es un conexo de X, y "x" le pertenece. Probemos que $B = C_x$.

$B \subset C_x$, ya que si $y \in B$ existe un A_i conexo de X, con $x \in A_i$, $y \in A_i$; luego $y \sim x$, de donde $y \in C_x$.

$C_x \subset B$. Sea $y \in C_x$; entonces $x R y$, de donde existe A_i conexo tal que $x, y \in A_i$. Luego $y \in A_i$, por lo que $y \in B$.

Por tanto $C_x = B$; entonces C_x es conexo.

b) $x \in C_x$ por la definición de C_x.

c) Como $C_x = B$, C_x es el mayor subconjunto conexo de X tal que "x" le pertenece; luego $A \subset C_x$.

d) $C_x = \overline{C}_x$.

$C_x \subset \overline{C}_x$ por definición de cerradura.

$\overline{C}_x \subset C_x$.

Si C_x es conexo, entonces $\overline{C}_x$ es conexo. Luego $\overline{C}_x \subset C_x$ ya que C_x es el mayor conexo que contiene a "x". Luego C_x es cerrado en X.

II.6.4. PROPOSICION

Sean X un espacio topológico compacto.

$x \in X$.

$H = \{T \subset X \mid T$ es clopen y $x \in T\}$

Entonces $C_x = \bigcap_{T \in H} T$.

PRUEBA

Si $T \in H$, $C_x \cap T$ es un clopen de C_x distinto de Φ; como C_x es conexo, $C_x = C_x \cap T \in T$; luego $C_x \subset \bigcap_{T \in H} T$.

Probemos que $D = \bigcap_{T \in H} T$ es conexo.

Sean E, F dos cerrados de D tal que $D = F \cup E$, $F \cap E = \Phi$ y supongamos que $x \in E$. Como D es un cerrado en X, E y F som también cerrados de X; por ser X compacto, existen dos abiertos disjuntos E_1 y F_1 con $E \subset E_1$, $F \subset F_1$. Como $E_1^c \cap F_1^c \subset D^c = \bigcup_{T \in H} T^c$, existen $T_1, T_2, \ldots\ldots T_n$ en H, tales que

$E_1^c \cap F_1^c \subset \bigcup_{i=1}^{n} T_i^c$ ($E_1^c \cap F_1^c$ es un compacto de X por ser cerrado).

$T_o = \bigcap_{1}^{n} T_i$ es un clopen de X tal que

$E_1^c \cap F_1^c \subset T_o^c$, ó sea $T_o \subset E_1 \cup F_1$; como E_1 y F_1 son disjuntos, $T^1 = T_o \cap E_1 = T_o \cap F_1^c$ es un clopen; además $x \in E \subset D \cap E_1 \subset T_o \cap E_1 = T^1$, ó sea que $T^1 \in H$. Luego $F \subset D \subset T^1 \subset E_1$, implica que $F = \Phi$, ya que $F \subset F_1$ y $E_1 \cap F_1 = \Phi$.

Por tanto D es un conexo que contiene a x , de donde $D \subset C_x$ y así $C_x = \bigcap_{T \in H} T$.

II.6.5. PROPOSICION

Sean X un espacio topológico compacto.

$B = \{T \subset X \mid T \text{ es clopen}\}$.

Entonces, las condiciones que siguen son equivalentes:

a) Para todo $x \in X$; $C_x = \{x\}$.

b) B es una base de X.

PRUEBA

a) $\Longrightarrow$ b)

Sea $O \neq \Phi$, $O \subset X$, un abierto y $x \in O$. Como $\bigcap_{\substack{T\in B\\ x\in T}} T = C_x = \{x\} \subset O$, tenemos que $X = O \cup \bigcup_{\substack{T\in B\\ x\in T}} T^c$.

Luego existen $T_1, T_2, \ldots\ldots T_n$ clopens que contienen a "x" tales que $X = O \cup T_1^c \cup T_2^c \cup \ldots\ldots \cup T_n^c$ de donde $\bigcap_1^n T_i \subset O$ es un clopen que contiene a x. Por tanto

$$O = \bigcup_{\substack{T\in B\\ T\subset O}} T .$$

b) $\Longrightarrow$ a)

Si x, y son dos elementos de X, tales que $x \neq y$; por ser X separado existen dos abiertos disjuntos O y W tales que $x \in O$, $y \in W$. Por tanto existe un clopen $T \subset O$ tal que $x \in T$, $y \notin T$. Luego $y \notin \bigcap_{\substack{T\in B\\ x\in T}} T = C_x$, de donde $C_x = \{x\}$.

II.6.6. PROPOSICION

Sean X, Y dos espacios topológicos, X conexo $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f(X)$ es un subespacio conexo de Y.

PRUEBA

Si $A \subset f(X)$ es un clopen de $f(X)$, entonces $f^{-1}(A)$ es un clopen de X; como X es conexo, $f^{-1}(A) = X$ ó $f^{-1}(A) = \Phi$, de donde $A = f(X)$ ó $A = \Phi$. Luego $f(X)$ es conexo.

II.6.7. DEFINICION

Las clases de equivalencia inducidas por la relación de equivalencia " $\sim$ " ("$x \sim y$ si existe un conjunto conexo que contiene a ambos elementos") se llaman componentes conexas del espacio topológico X.

II.7. ESPACIOS METRICOS

II.7.1. DEFINICION

Sea E un conjunto. Se llama métrica o distancia en E a toda función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:

i) $d(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in E \times E$.

ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

iii) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $(x, y) \in E \times E$.

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in E$.

NOTAS

- El par (E, d) se llama espacio métrico.
- $d(x, y)$ se dice que es la distancia entre "x" y "y".

EJEMPLO

$(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico donde $d(x, y) = |x - y|$.

II.7.2. DEFINICION

Sea (E, d) un espacio métrico. La topología T_d, que tiene por base a los conjuntos $B(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) < r, \quad x \in E\}$, $r > 0$, se llama la topología en E, inducida o determinada por la distancia "d".

II.7.3. PROPIEDAD

En un espacio métrico, todo conjunto cerrado es la intersección de una clase numerable de conjuntos abiertos.

PRUEBA

Sea E un espacio métrico, $A \neq \Phi$, $A \subset E$ entonces

$\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ con $V_n = \{x \in A \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\}$ $n \in \mathbb{N}$.

i) V_n es abierto.

Sea x que pertenece a V_n, entonces

$d(x, A) < \frac{1}{n}$ y tomemos $r = \frac{1}{n} - d(x, A) > 0$.

Probemos que $B(x, r) \subset V_n$.

Sea y que pertenece a $B(x, r)$, entonces

$d(x, y) < r$; además

$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, de donde se tiene

$$d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$$
$$< \frac{1}{n} - d(x, A) + d(x, A)$$
$$= \frac{1}{n} \quad , \text{ por lo tanto } \quad y \in V_n .$$

Luego V_n es un abierto.

ii) $\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

a) $\overline{A} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

Sea $x \in \overline{A}$, entonces para todo $r = \frac{1}{n} > 0$, $n \in \mathbb{N}$ $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \Phi$; para $y \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$, $d(x, A) \leq d(x, y) < \frac{1}{n}$; entonces $x \in V_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset \overline{A}$.

Sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$, entonces $x \in V_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $r > 0$; existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < r$, de donde existe $y \in A$ tal que $d(x,y) < r$.

Luego $B(x, r) \cap A \neq \Phi$ por tanto $x \in \overline{A}$.

II.8. CONJUNTOS MAGROS

II.8.1. DEFINICION

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$, A es un conjunto magro si se puede expresar como la unión numerable de conjuntos raros. Es decir, si

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \quad \text{y}$$

B_i raro.

II.8.2. PROPOSICION

El vacío es un conjunto magro.

La prueba es trivial ya que $\Phi = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi$, siendo Φ un conjunto raro.

II.8.3. PROPOSICION

La unión de dos magros es un magro.

PRUEBA

Sean A, B conjuntos magros, probaremos que $A \cup B$ es magro. Por ser A y B conjuntos magros:

$$A = \bigcup_{1}^{\infty} C_i \quad , \quad C_i \text{ raro}$$

$$B = \bigcup_{1}^{\infty} D_i \quad , \quad D_i \text{ raro.}$$

Luego:

$$A \cup B = \bigcup_1^{\infty} C_i \;\cup\; \bigcup_1^{\infty} D_i \quad , \quad C_i \text{ y } D_i \text{ raros}$$

$$= \bigcup_1^{\infty} (C_i \cup D_i) \quad , \quad C_i \cup D_i \text{ es raro (II.3.6).}$$

Luego $A \cup B$ es magro.

II.8.4. PROPOSICION

Sea X un espacio topológico. A magro y $B \subset X$, entonces $B \cap A$ es magro.

PRUEBA

Por ser A un conjunto magro $A = \bigcup_1^{\infty} C_i$, C_i raro;

además

$$A \cap B = \bigcup_1^{\infty} C_i \cap B$$

$$= \bigcup_1^{\infty} (C_i \cap B)$$

con $C_i \cap B$ raro (II.3.7.).

Luego $A \cap B$ es magro.

II.8.5. PROPOSICION

Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos magros, entonces su unión es un magro.

PRUEBA

Como cada A_i es magro. $A_i = \bigcup_1^{\infty} C_i$ con $\overset{\circ}{\bar{C}}_i = \Phi$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\cup A_i = \bigcup_1^{\infty} C_i$.

II.8.6. PROPOSICION

Un conjunto abierto magro en un espacio X compacto de Hausdorff es vacío.

PRUEBA

Supongamos que U es un abierto de X tal que $U \neq \Phi$; probaremos que U no es magro.

Primer caso

$U \neq X$. Si $\{S_n\}$ es una sucesión de conjuntos raros de X, se demostrará que U contiene al menos un punto x tal que $x \notin S_n$, para todo n (ósea $U \not\subseteq \cup S_n$). Sea $x_o \in U$; para cada $y \in U^c$ existen O_{1y}, O_{2y} abiertos tales que $x_o \in O_{1y}$, $y \in O_{2y}$ y $O_{1y} \cap O_{2y} = \Phi$. Se tiene que $U^c \subset \bigcup_{y \in U^c} O_{2y}$; como X es compacto y U^c es un cerrado, U^c es compacto; luego existen $y_1, y_2 \ldots y_n$ en U^c tales que $U^c \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{2y_i}$.

Si tomamos $V_1 = \bigcap_{i=1}^{n} O_{1y_i}$, entonces V_1 es abierto y $V_1 \cap \bigcup_{i=1}^{n} O_{2y_i} = \Phi$; además $V_1 \neq \Phi$ ya que $x_o \in V_1$.

" $\overline{V}_1 \subset U$ ".

$$z \in U^c \Longrightarrow z \in \bigcup_{i=1}^{n} O_{2y_i}$$

$$\Longrightarrow z \in O_{2y_j} \text{ , para algún } 1 \leq j \leq n \text{ .}$$

O_{2y_j} es un abierto que contiene a z tal que $O_{2y_j} \cap V_1 = \Phi$, luego $z \notin \overline{V}_1$.

$V_1 \not\subset \overline{S}_1$ ya que $\overset{\circ}{S}_1 = \Phi$, sea $y \in V_1$ y $y \notin \overline{S}_1$ entonces existe un abierto O_1 tal que $y \in O_1$, $O_1 \cap S_1 = \Phi$.

Formemos el abierto $U_1 = O_1 \cap V_1 \neq \Phi$ se tiene que $\overline{V}_1 \subset U$ y $U_1 \subset V_1$.

Para el abierto $U_1 \neq \Phi$, se puede seguir el mismo procedimiento anterior y se tendría $\overline{V}_2 \subset U_1$ y $U_2 \subset V_2$; por recurrencia se tiene para todo $k \in \mathbb{N}$: $\overline{V}_k \subset U_{k-1}$ y $U_k \subset V_k$. Luego hemos construido una sucesión decreciente de abiertos $\{U_k\}$ contenidos en U tales que: $U_1 \cap S_1 = \Phi$, $U_2 \cap S_2 = \Phi$, ..., $U_k \cap S_k = \Phi$, ... y $U_k \subset U_{k-1}$ para todo k.

Por otra parte se tiene que $\bigcap\limits_k U_k = \bigcap\limits_k \overline{U}_k$ ya que

$$x \in \bigcap \overline{U}_k \Longrightarrow x \in \overline{U}_{k+1}, \text{ para todo } k$$

$$\Longrightarrow x \in U_k \quad , \text{ para todo } k$$

$$\Longrightarrow x \in \bigcap U_k \ .$$

$\bigcap\limits_k \overline{U}_k \neq \Phi$ por ser X compacto. Luego como $\bigcap\limits_k U_k \neq \Phi$ tal que $(\bigcap\limits_k U_k) \cap S_n = \Phi$ para cada n, se tiene que existe $x \in \bigcap\limits_k U_k$ tal que $x \notin S_n$ para todo n, por tanto $x \notin \bigcup\limits_n S_n$.

<u>Segundo caso</u>

U = X. Si existe V un abierto, $V \neq \Phi$, $V \neq X$, entonces para toda sucesión $\{S_n\}$ de conjuntos raros existe $x \in V$ tal que $x \notin \bigcup S_n$ (por caso anterior), luego $X \neq \bigcup S_n$.

Si X es el único abierto distinto de vacío entonces X no posee conjuntos raros diferentes de vacío ya que si $S \subset X$ y $S \neq \Phi$ entonces $\overline{S} = X$. Luego X no es magro.

II.9. TOPOLOGIA PRODUCTO

II.9.1. DEFINICION

Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, definiremos sobre ΠX_i una topología de la manera siguiente: para cada $j \in I$ sea la función

$$\begin{aligned} P_j : \Pi X_i &\rightarrow X_j \\ (X_i)_{i\in I} &\rightsquigarrow X_j \end{aligned}$$

Diremos que $A \subset \prod_{i\in I} X_i$ es un"abierto" si es unión de conjuntos de la forma $\bigcap_{j\in J} P_j^{-1}(O_j)$, $J \subset I$, J finito, O_j un abierto de X_j.

Se cumplen trivialmente las condiciones para que, con esta definición de abiertos, ΠX_i sea un espacio topológico.

NOTAS

a) Los conjuntos de la forma $\bigcap_{j\in J} P_j^{-1}(O_j)$, $J \subset I$, J finito, O_j un abierto de X_j constituyen una base para esta topología.

b) $\bigcap_{i\in J} P^{-1}(O_j) = \prod_{i\in I} T_i$, en donde:

$$T_i = X_i \text{ , para todo } i \notin J$$

$$T_i = O_i \text{ , para todo } i \in J.$$

c) Cada función $P_j : \Pi X_i \to X_j$ es continua, ya que si $O \subset X_j$ es un abierto de X_j entonces $P_j^{-1}(O)$ es un elemento de la base.

II.9.2. PROPOSICION

Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos separados, entonces ΠX_i es un espacio topológico separado.

PRUEBA

Sean $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I}$ elementos de ΠX_i tales que $x \neq y$ por lo que existe $j \in I$ tal que $x_j \neq y_j$. Como X_j es separado, existen A, B dos abiertos disjuntos de X_j tales que $x_j \in A$, $y_j \in B$. Como P_j es una función continua $P_j^{-1}(A)$ y $P_j^{-1}(B)$ son dos abiertos disjuntos de $\prod_{i\in I} X_i$ tales que $x \in P_j^{-1}(A)$, $y \in P_j^{-1}(B)$. Luego $\prod_{i\in I} X_i$ es separado.

II.9.3. PROPOSICION

Sean X un espacio topológico, $B = \{B_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X con la propiedad de intersección finita, $\mathbb{M}$ el conjunto formado por familias M de subconjuntos de X tales que cada familia M contiene a B y cumple la propiedad de la intersección finita.

Entonces:

1) $\mathbb{M}$, ordenado por inclusión, posee un elemento maximal M_o.

2) El elemento maximal M_o cumple con las propiedades siguientes:

a) Si $E1, E2, \ldots, E_n \in M_o$, entonces $\bigcap_{1}^{n} E_i \in M_o$.

b) Si $A \subset X$ es tal que $A \cap E \neq \phi$ para todo $E \in M_o$ entonces $A \in M_o$.

<u>PRUEBA</u>

1) Sea $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$ un subconjunto totalmente ordenado y formemos $T = \bigcup_{j \in \mathbb{M}'} J$.

Si $E1, E2, \ldots, E_n$ son subconjuntos de X que pertenecen a T, entonces existen $J1, J2, \ldots, J_n$ en $\mathbb{M}'$ tales que $E1 \in J_1$, $E2 \in J2, \ldots, E_n \in J_n$; como $\mathbb{M}'$ es totalmente ordenado existe un índice $m \leq n$ tal que $J_i \subset J_m$, para todo $i \leq n$. Luego $E_i \in J_m$ para todo $i \leq n$, y como J_m cumple la propiedad de intersección finita, $\bigcap_{1}^{n} E_i \neq \phi$, ó sea que T cumple con la propiedad de intersección finita. Como $B \subset J$, para todo $J \in \mathbb{M}'$, $B \subset T$; es decir que

$T \in \mathbb{M}$, y por su definición es un mayorante de $\mathbb{M}'$. Luego $\mathbb{M}$ posee un elemento maximal (por lema de Zorn). Sea M_o un elemento maximal.

2) a) Lo probaremos sólo para $n = 2$, y luego por inducción será cierto para todo n.

Sean A, B dos elementos de M_o y $C = A \cap B$. Bastará probar que $M_o \cup \{C\}$ posee la propiedad de intersección finita. Si $M_1, M_2, \ldots M_n$ es una cantidad finita de elementos de $M_o \cup \{C\}$ entonces $\bigcap_1^n M_i \neq \Phi$ pues será intersección de elementos de M_o.

b) Sea $A \subset X$ tal que $A \cap E \neq \Phi$, para todo $E \in M_o$. Bastará probar que $M_o \cup \{A\}$ cumple la propiedad de intersección finita.

Sean $E_1, E_2, \ldots E_n$ una cantidad finita de elementos de $M_o \cup \{A\}$; si cada E_i es distinto de A, $\bigcap_1^n E_i \neq \Phi$ pues será intersección de una cantidad finita de elementos de M_o. Si, por ejemplo, $A = E_1$ entonces $\bigcap_1^n E_i = A \cap (\bigcap_2^n E_i) \neq \Phi$ ya que $\bigcap_2^n E_i \in M_o$.

II.9.4. PROPOSICION

Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos compactos entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es compacto.

PRUEBA

a) ΠX_i es separado por ser un producto de espacios separados.

b) Sea $F = \{F_t\}_{t\in T}$ una familia de subconjuntos cerrados de $\prod_{i\in I} X_i$ que cumplen la propiedad de intersección finita.

Probaremos que $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \Phi$ (por II.5.3).

Sea $M_o = \{M_k\}_{k\in K}$ un maximal entre la familia de subconjuntos de ΠX_i que contienen a F y que cumplen la propiedad de intersección finita.

Para cada $j \in I$, $\{\overline{P_j(M_k)}\}_{k\in K}$ es una familia de cerrados de X_j que cumple la propiedad de intersección finita, y como X_j es compacto, $\bigcap_{k\in K} \overline{P_j(M_k)} \neq \Phi$.

Sea $x_j \in \bigcap_{k\in K} \overline{P_j(M_k)}$, es decir $x_j \in \overline{P_j(M_k)}$, para todo $k \in K$, entonces, para todo abierto $O \subset X_j$:

$$x_j \in O \Longrightarrow O \cap P_j(M_k) \neq \Phi .$$

Sea $x = (x_i)_{i \in I}$. Si B es un elemento de la base para la topología de $\prod_{i \in I} X_i$; B es de la forma

$B = \bigcap_{i \in J} P^{-1}(O_i)$, $J \subset I$ finito, O_i un abierto de --

X_i para cada $i \in J$.

Si $x \in B$, $x_j \in P_j(B) = O_j$, de donde: $O_j \cap P_j(M_k) \neq \Phi$ para todo $k \in K$. Luego $P_j^{-1}(O_j) \cap M_k \neq 0$ para todo $k \in K$. Luego $P_j^{-1}(O_j) \in M$. Por tanto $P_j^{-1}(O_j) \in M$, para todo $j \in J$. Luego

$B \cap M_k = (\bigcap_{j \in J} P_j^{-1}(O_j)) \cap M_k \neq \Phi$, para todO $k \in K$,

por ser intersección de una cantidad finita de elementos de M_o. Es decir que $x \in \overline{M}_k$, para todo $k \in K$.

Luego $\bigcap_{k \in K} \overline{M}_k \neq \Phi$. ComO $F_t \in F$ entonces $F_t \in M_o$ y cada F_t es cerrado, $F \subset \{\overline{M}_k \mid k \in K\}$, lo que implica

$\bigcap_{k \in K} \overline{M}_k \subset \bigcap_{t \in T} F_t$. POr tanto $\bigcap_{t \in T} F_t \neq \Phi$.

BIBLIOGRAFIA

1) Halmos P., LECTURES ON BOOLEAN ALGEBRAS, D.Van Nostrand Co., 1963.

2) Sikorski R., BOOLEAN ALGEBRAS, 3a.edicion, Springer - Verlag, New York Inc., 1969.

3) Grigori A., CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ALGEBRA BOOLEANA, Editorial Trillas, México, 1973.

4) Halmos P., TEORIA INTUITIVA DE CONJUNTOS, 8a. edición Compañía Editorial Continental S.A., 1973.

5) Oubiña L., INTRODUCCION A LA TEORIA DE CONJUNTOS, 5a. edición,Eudeba. 1970.

6) Marroquín Escoto M., NOTAS DE TOPOLOGIA GENERAL, Universidad de El Salvador, Facultad de Ciencias y Humanidades, Departamento de Matemática. Publicaciones Año 1, No. 2, 1975.