UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

"TOPICOS DE APLICABILIDADES"

TRABAJO DE INVESTIGACION PRESENTADO

POR

JUAN RICARDO RAMIREZ MARDONES

PREVIO A LA OPCION AL GRADO DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

AGOSTO 1977

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

" TOPICOS DE " APLICABILIDADES

TRABAJO DE INVESTIGACION PRESENTADO

POR

JUAN RICARDO RAMIREZ MARDONES

PREVIO A LA OPCION AL GRADO DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

AGOSTO 1977

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTRO AMERICA

U N I V E R S I D A D   D E   E L   S A L V A D O R

RECTOR EN FUNCIONES

DR. CARLOS ALFARO CASTILLO

F A C U L T A D   D E   I N G E N I E R I A   Y   A R Q U I T E C T U R A

DECANO

ARQ. MANUEL ENRIQUE ALFARO

SECRETARIO

ING. LUIS A. CARVAJAL VALDEZ

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo es una colección de definiciones y proposiciones que parten de la definición de " Aplicabilidad ". Es intensión mia, el definir un " Ente Matemático " que agrupe algunas estructuras conocidas, tales como Filtros, Anillos y Topologías, y además sea base para futuras investigaciones (quizás principalmente), y es por ello que talvez se sienta que falta bastante por decir, además de lo escrito.

!!

El trabajo consta de cinco partes.

En la primera parte se define lo que es una Aplicabilidad y a partir de esta definición se muestra que los filtros, anillos y topologías cumplen con ser aplicabilidades, también se muestra que el producto-unión de aplicabilidades pueder ser una aplicabilidad.

En la segunda parte se trata de agregar elementos o quitarlos de una aplicabilidad, y de ver si el conjunto resultante sigue siendo una aplicabilidad, para terminar definiendo lo que son aplicabilidades Inicial y Final.

La tercera parte se dedica a trabajar con dos aplicabilidades y la intersección de sus conjuntos de aplicables.

La cuarta parte trata de Espacios Topológicos Aplicables, definiendo primeramente lo que se entenderá por Aplicabilidad Constante, y luego mostrando ejemplos de espacios topológicos aplicables y aplicabilidad constante.

La quinta parte trata delos Espacios de Aplicabilidad, y es un Espacio de Aplicabilidad, un conjunto y una aplicabilidad sobre él. Termina esta parte (y el trabajo), definiendo cuando dos espacios serán Idemorfos, estudiando la relación que guardan los conceptos de Idemorfismo y Homeomorfismo en un espacio topológico, y como se conserva la propiedad de ser Aplicable por medio de idemorfismos .

Antes de terminar con esta " relación de contenido ", quiero agradecer al Licenciado Javier Rivera Lazo el haberme asesorado en el presente trabajo, y el haberme mostrado " detallitos " en el trabajo con los cuales estaría el contenido mostrando algunos errores de bastante peso.

He de usar en el trabajo la siguiente convención respecto al símbolo de " Contenencia de Conjuntos ":

La relación $A \subset B$ indicará $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

San Salvador, Agosto de 1977

¿inclusión?

Esto no creo sea correcto establecerlo aquí!

I N D I C E

00 00

1

APLICABILIDADES

- APLICABILIDADES
- FILTROS, ANILLOS Y APLICABILIDADES
- APLICABILIDADES RESTRINGIDAS
- CADENAS DE SOBRANTES Y APLICABILIDADES
- TOPOLOGIAS Y APLICABILIDADES
- PRODUCTO-UNION DE APLICABILIDADES

APLICABILIDADES

1.1 Definición

Sea X un conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se llama APLICABILIDAD (sobre X) si para cada par (A,B) de elementos de ? P(X) , no comparables y no disjuntos, existe un elemento H de $\mathcal{A}$ tal que H es X-aplicable a la intersección de A y B$^{(0)}$ y H es diferente de A y de B. ?

¿Def.?

debe establecer respecto a qué relación; ¿inclusión?

Definición

Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X.

El conjunto PARES DE ? es el conjunto A?

$$p(\mathcal{A}) = \{ (A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \ / \ A \text{ y } B \text{ son no comparables y no disjuntos} \}.$$

$A \not\subset B$, $B \not\subset A$, $A \cap B \neq \emptyset$

Definición

Sea $\mathcal{A}_x$ el conjunto

$$\{ \mathcal{A} \subset P(X) \ / \ \mathcal{A} \text{ es una aplicabilidad (sobre X)} \}.$$

$\mathcal{A}_x$ conj. de aplicabilidades sobre X

Si $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_x$, el conjunto APLICABLES DE $\mathcal{A}$ es el conjunto

$$a\mathcal{A} = \{ D \in \mathcal{A} \ / \ \text{existe } (A,B) \in p(\mathcal{A}) \text{ y } D \ a \ A \cap B \ (X) \text{ y } D \neq A \text{ y } D \neq B \}.$$

parece que usa lo que está definiendo!

Nota: Si (A,B) $\in p(\mathcal{A})$ entonces (B,A) $\in p\,\mathcal{A})$.

1.2 Por qué no tratar de operar con aplicabilidades? Para ello, consideremos los siguientes conjuntos: $X = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$$\mathcal{A}_1 = \{ \{1\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{1,2,5\}, \{5\}, \{1,2\} \}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{ \{2,3,4\}, \{1,4,5\}, \{2,4\}, \{1,3,5\}, \{2,3\}, \{1,2,3,5\} \}$$

Subtítulo?

Cómo es $p\ \mathcal{A}_1)$? Consideremos el conjunto A siguiente:

$$A = \{ (\{2,3\},\{3,4\}),(\{2,3\},\{3,5\}),(\{2,3\},\{1,2,5\}),$$
$$(\{2,3\},\{1,2\}),(\{3,4\},\{3,5\}),(\{3,5\},\{1,2,5\}) \},$$

podemos verificar que los conjuntos de cada par-elemento de A, cumplen ser no disjuntos y no comparables, además que para cada uno de esos elementos, existe un H en $\mathcal{A}_1$ X-aplicable a la intersección del par con H diferente a los conjuntos componentes (del par).

$$\{3,5\} \text{ a } \{2,3\} \cap \{3,4\} \quad (X)$$
$$\{3,4\} \text{ a } \{2,3\} \cap \{3,5\} \quad (X)$$
$$\{1,2\} \text{ a } \{2,3\} \cap \{1,2,5\} \quad (X)$$
$$\{1,2,5\} \text{ a } \{2,3\} \cap \{1,2\} \quad (X)$$
$$\{2,3\} \text{ a } \{3,4\} \cap \{3,5\} \quad (X)$$
$$\{5\} \text{ a } \{3,5\} \cap \{1,2,5\} \quad (X);$$

ahora, si consideramos el conjunto A' como:

$A' = \{ (B,D) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \ / \ (D,B) \in A \}$, conseguimos todos los pares de elementos de $\mathcal{A}_1$ que son no comparables y no disjuntos al unir A y A', y podemos afirmar que $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_X$, además podemos afirmar que

$$p\ \mathcal{A}_1) = A \cup A'.$$

También puede verificarse que $\mathcal{A}_2$ es un elemento de $\mathcal{A}_X$.

Se cumplirá que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \in \mathcal{A}_X$?

Para mi (O nuestra) satisfacción, la respuesta es afirmativa.

estas relaciones han de probarse de manera general!

Consideremos ahora los conjuntos

$$\mathcal{A}_3 = \{\{2,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{1,5\},\{5\}\}, \text{ y}$$
$$\mathcal{A}_4 = \{\{1,4\},\{2,3,4\},\{3,4,5\},\{3,4,6\}\};$$

$\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4 \in \mathcal{A}_X$. Pero $\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4 \in \mathcal{A}_X$?

Tenemos que $\{1,5\} \in \mathcal{A}_3$ y que $\{1,4\} \in \mathcal{A}_4$, entonces $\{1,5\}$, $\{1,4\}$ son elementos de la unión, y podemos observar que no existe elemento en la unión que cumple ser X-aplicable a la intersección de ellos, siendo el elemento diferente de ellos. Por lo tanto,

$$\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4 \notin \mathcal{A}_X .$$

De los anteriores ejemplos concluimos que la unión de aplicabilidades no es siempre una aplicabilidad.

FILTROS, ANILLOS Y APLICABILIDADES

1.3 Una colección de conjuntos, puede, bajo determinadas condiciones, tomar los nombres de: Filtro, Anillo, o bien, Topología.
A continuación, se trata de establecer la relación que guardan un filtro, un anillo, y un poco más tarde una topología, con una aplicabilidad.

Sería conveniente definir lo que es un filtro.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro (en X) y sean A,B en $\mathcal{F}$ que cumplen ser no comparables Como $\mathcal{F}$ es un filtro, entonces $A \cap B$ está en $\mathcal{F}$ y por ser A,B no comparables, $A \cap B$ es diferente de A y de B ; luego, $\mathcal{F}$ cumple:

$$\mathcal{F} \in \mathcal{A}_X .$$

¿es esta siempre una colección de aplicab. sobre X.?

Sea $\mathcal{R}$ un anillo(1). Sean A,B en $\mathcal{R}$ no disjuntos y no comparables. A, A - B están en $\mathcal{R}$, y entonces $A - (A - B) = A \cap B$ está en $\mathcal{R}$, y se tiene que:

$$\mathcal{R} \in \mathcal{A}_X .$$

esta llamada no tiene respuesta?

De lo anterior concluimos que todo anillo y todo filtro (en X), es una aplicabilidad (sobre X)

APLICABILIDADES RESTRINGIDAS

1.4 Definición

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$ tal que para cada elemento (A,B) de $p\mathcal{A}$), existe H en $\mathcal{A}$ tal que H es ($A \cup B$)-aplicable a $A \cap B$, con H diferente de A y de B. Entonces $\mathcal{A}$ se llama APLICABILIDAD RESTRINGIDA.

Sea $\overline{\mathcal{A}}_X$ el conjunto deles aplicabilidades restringidas (sobre X).

1.5 Proposición

Para cualquier conjunto X no vacío se cumple:

$$\overline{\mathcal{A}}_X \subseteq \mathcal{A}_X \; .$$

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in \overline{\mathcal{A}}_X$, entonces para cada (A,B) $\in p\mathcal{A}$), existe $D \in s\mathcal{A}$ tal que D a $A \cap B$ ($A \cup B$) con $D \neq A,B$; pero $A \cup B \subseteq X$, y así, para cada par (A,B) $\in p\mathcal{A}$), existe $D \in s\mathcal{A}$ tal que D es X-aplicable a $A \cap B$, con $D \neq A,B$, luego $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$.

Proposición

Para $X = R^2$, existe $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$ tal que $\mathcal{A} \notin \overline{\mathcal{A}}_X$.

Demostración. Sea C el conjunto de los círculos de radio $\frac{1}{2}$ y de centro en los puntos (2,2),(2,5),(5,2),(5,5). Sea C' el conjunto de los círculos de radio 2 y centro en los puntos anteriores.

$$C = \{ C_{\frac{1}{2}}(2,2),\ C_{\frac{1}{2}}(2,5),\ C_{\frac{1}{2}}(5,2),\ C_{\frac{1}{2}}(5,5) \} \text{, y}$$

$$C' = \{ C_2(2,2),\ C_2(2,5),\ C_2(5,2),\ C_2(5,5) \} \text{, con}$$

$$C_r(p,q) = \{ (x,y) \in R^2 \;/\; d(\,(x,y),(p,q)\,) < r \} \; .$$

Ahora bien, se tiene que:

$$C_2(2,n) \text{ a } C_{\frac{1}{2}}(2,n) \;\; (R^2) \; ; \;\; n = 2,5$$

$$C_2(5,n) \text{ a } C_{\frac{1}{2}}(5,n) \;\; (R^2) \; ; \;\; n = 2,5 \; .$$

Considérense los Sobrantes de Aplicación (3)

$$S_n(\, C_2(2,n)\,) \;\; ; \; n = 2,5 \quad (3)$$

$$S_n(\, C_2(5,n)\,) \;\; ; \; n = 2,5 \; .$$

El conjunto $\mathcal{C} = \{ S_2(\, C_2(2,2)\,),\ S_5(\, C_2(2,5)\,),\ S_2(\, C_2(5,2)\,),\ S_5(\, C\,(5,5)\,) \}$ C' cumple:

?

Me parece que esto procede de una generalización que debe hacerse si es posible

$$\mathcal{C} \in \mathcal{A}_X .$$

Ahora bien,

$S_5(\ C_2(2,5)\ ) \cap S_2(\ C_2(2,2)\ ) \neq \emptyset$, y los únicos elementos de $\mathcal{C}$ que son R^2-aplicables a dicha intersección son $C_2(2,5)$ y $C_2(2,2)$ siendo diferentes a los sobrantes mencionados, y en ambos casos se tiene que ninguno de los conjuntos está contenido en la unión de los sobrantes, asi,

$$\mathcal{C} \notin \overline{\mathcal{A}}_X .$$

que no ha sido precisamente definida!

CADENAS DE SOBRANTES Y APLICABILIDADES

1.6 En la proposición anterior, se ha utilizado una Cadena de Sobrantes (4) para llegar a una aplicabilidad. Será posible que siempre que se tenga una cadena de sobrantes se llegue a una aplicabilidad?

En la definición de una cadena de sobrantes intervienen una serie de elementos:

? ¿qué entiende por esto?

a) $A = \{ A_i \ / \ i \in I \}$ una colección disjunta de subconjuntos propios no vacíos de un universo X;

¿$A_i \cap A_j = \emptyset ,\ i \neq j$?

b) $B = \{ B_i \ / \ i \in I \}$ una colección de subconjuntos de X tales que para cada i, $i \in I$, B_i a A_i (X);

c) $S = \{ S_i(B_i) \ / \ i \in I \}$ el conjunto de sobrantes de aplicación (la cadena de sobrantes).

Entonces, tratando de copiar a la última proposición:

$$\mathcal{C} = S \cup B \in \mathcal{A}_X \ ?$$

Nuestro trabajo consiste en encontrar para cada par (C,D) de elementos de $\mathcal{C}$ no comparables y no disjuntos, un elemento H de $\mathcal{C}$ diferente a C y D que cumpla ser X-aplicable a $C \cap D$.

Como $\mathcal{C}$ es la unión de dos conjuntos, debemos tomar pares en un mismo conjunto, y luego pares con unelemento de cada conjunto.

Sean $C,D \in B$ tales que C,D son no comparables y no disjuntos. Pongamos $C = B_j, D = B_p$ para $j,p \in I$. Para B_j, B_p, existe $S_j(B_j)$ (ó $S_p(B_p)$) en S tal que $S_j(B_j)$ a $B_j \cap B_p$ (X) y $S_j(B_j) \neq B_j, B_p$.

Sean ahora $C,D \in S$ tales que $C,D \in pS)$. Pongamos $C = S_r(B_r), D = S_q(B_q)$, $r,q \in I$ (en S siempre es posible encontarlos). Para $S_r(B_r), S_q(B_q)$, existe B_r (o B_q) en B tal que B_r a $S_r(B_r) \cap S_q(B_q)$ (X) y $B_r \neq S_q(B_q)$, $S_r(B_r)$.

Sea ahora $C \in B$ y $D \in S$ tales que son no comparables y no disjuntos. Pongamos $C = B_q$, $D = S_p(B_p)$, con $q,p \in I$, $q \neq p$. Como se tiene que $B_q \cap A_p$ es vacío para $q \neq p$, y se tiene que $S_q(B_q)$ a $B_q \cap S_p(B_p)$ (X) con $S_q(B_q)$ diferente a B_q y a $S_p(B_p)$ (por $B_q \cap S_p(B_p) = S_q(B_q) \cap S_p(B_p) \subseteq S_q(B_q) \subset X$), entonces hemos encontrado el H que buscamos para este caso.

Asi, para $C,D \in p\mathcal{C})$, se ha encontardo $H \in \mathcal{C}$ tal que H a $C \cap D$ (X) con $H \neq C,D$. Entonces:

$$\mathcal{C} \in \mathcal{A}_X .$$

TOPOLOGIAS Y APLICABILIDADES

1.7 Definicion

Sea $\mathcal{D} \in \mathcal{A}_X$, entonces:

I) $\mathcal{D}$ es COMPLETA si $X, \emptyset \in \mathcal{D}$.

II) $\mathcal{D}$ es TRIVIAL si para cada $(A,B) \in p\mathcal{D})$ se tiene $A \cap B \in \mathcal{D}$.

1.8 Se tiene que en una topología de X (sea T la topología), si A,B están en T, entonces $A \cap B$ está en T. Si se toman A y B no disjuntos y no comparables, se tiene que $A \cap B$ a $A \cap B$ (X) y $A \cap B \neq A,B$.

Asi, toda topología T de X cumple:

$T \in \mathcal{A}_X$.

Nota: para toda topología T de X, T es una aplicabilidad trivial y completa.

PRODUCTO-UNION DE APLICABILIDADES

Notación: $2\mathcal{S} = \mathcal{S} \overset{\cup}{\times} \mathcal{S}$ (5)

1.9 Proposición

Sea $\mathcal{S} \in \mathcal{A}_X$. Si $\mathcal{S}$ es una topología, entonces $2\mathcal{S} \in \mathcal{A}_X$.

Demostración. Para demostrar esta proposición se pueden tomar dos caminos: a) mostrar que $2\mathcal{S}$ es una topología probando que i. $X, \emptyset$ pertenecen a $2\mathcal{S}$, ii. la intersección de dos elementos de $2\mathcal{S}$ está en $2\mathcal{S}$, iii. la unión de elementos de $2\mathcal{S}$ está en $2\mathcal{S}$, o

b) mostrar que $2\mathcal{S} = \mathcal{S}$. Mostraré b).

$2\mathcal{S} = \mathcal{S}$, siendo $\mathcal{S}$ una topología. Obviamanté $\mathcal{S} \subseteq 2\mathcal{S}$. Para ver la otra inclusión, vasta tener en cuenta que todo elemento de $2\mathcal{S}$ es unión de dos elementos de $\mathcal{S}$ y por ser $\mathcal{S}$ una topología, dicho elemento está en $\mathcal{S}$. Asi, $2\mathcal{S} = \mathcal{S}$, y

$$2\mathcal{S} \in \mathcal{A}_X .$$

Consideremos el conjunto $X = \{a,b,c,d\}$ con $\mathcal{L} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, entonces $2\mathcal{L} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{c,b\}\}$. $\mathcal{L} \in \mathcal{A}_X$ por nulidad. $2\mathcal{L} \in \mathcal{A}_X$, más aún, $2\mathcal{L} \in \bar{\mathcal{A}}_X$, $2\mathcal{L}$ es trivial. Hemos obtenido:

$$2\mathcal{L} \in \mathcal{A}_X \text{ con } \mathcal{L} \in \mathcal{A}_X .$$

Sea ahora $\mathcal{Z} = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$,

$2\mathcal{Z} = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b,c\}\}$ y se tiene que $\mathcal{Z}$ y $2\mathcal{Z}$ son triviales, o sea

$$2\mathcal{Z} \in \mathcal{A}_X \text{ con } \mathcal{Z} \in \mathcal{A}_X .$$

Sea ahora $\mathcal{P} = \{ \{a,c\}, \{b,c\}, \{d\} \}$, entonces tenemos

$2^{\mathcal{P}} = \{ \{a,c\}, \{b,c\}, \{d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c\} \}$.

$\mathcal{P} \notin \mathcal{A}_X$ porque no existe $D \in \mathcal{P}$ que cumpla

$D = \{a,c\} \cap \{b,c\}$ (X), siendo D diferente de los conjuntos; en cambio se tiene que $2^{\mathcal{P}} \in \mathcal{A}_X$, así,

$$2^{\mathcal{P}} \in \mathcal{A}_X \text{ con } \mathcal{P} \notin \mathcal{A}_X .$$

Ahora, si $\mathcal{J} = \{ \{a,b\}, \{b,c,d\} \}$, entonces $2^{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \cup \{X\}$, y

$$2^{\mathcal{J}} \notin \mathcal{A}_X \text{ con } \mathcal{J} \notin \mathcal{A}_X .$$

Se ha podido observar varios casos y no parece haber ley que nos diga que si $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}_X$ entonces $2^{\mathcal{A}} \notin \mathcal{A}_X$. En cambio, los dos primeros casos nos dicen que $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$ y que $2^{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_X$.

Antes de aventurarnos a asegurar:

$\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X \Longrightarrow 2^{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_X$, procedemos a hacer algunas averiguaciones.

1.10 Proposición

Sea $\mathcal{F}$ un filtro, entonces $2^{\mathcal{F}} \in \mathcal{A}_X$.

Demostración. $\mathcal{F} = 2^{\mathcal{F}}$.

1.11 Proposición

Sea $\mathcal{L}$ un anillo, entonces $2^{\mathcal{L}} \in \mathcal{A}_X$.

Demostración. $\mathcal{L} = 2^{\mathcal{L}}$.

1.12 Nota: Volviendo al problema planteado al final de la sección 1.9, veamos el siguiente ejemplo.

Sea $X = \{a,b,c,d,e\}$ y

$\mathcal{A} = \{ \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{d,e\} \}$. $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$ ..

$p(\mathcal{A}) = \{ (\{a,b,c\}, \{b,c,d\}), (\{a,b,c\}, \{a,c,d\}), (\{b,c,d\},$
$\{a,c,d\}), (\{b,c,d\}, \{d,e\}), (\{a,c,d\}, \{d,e\})$ ..
$(\{a,b,c,d\}, \{d,e\}), \ldots \}$

(los ... indican los pares (B,A) tales que (A,B) está expresado en el conjunto p$\mathcal{A}$)).

$\{a,b,c,d\} \in e\mathcal{A}$, más aún, $\{a,b,c,d\}$ a $A \cap B$ (X) para todo (A,B) en p$\mathcal{A}$) en los que A o B no es $\{a,b,c,d\}$; para el par ($\{a,b,c,d\}$, $\{d,e\}$), tenemos que $\{a,c,d\}$ es X-aplicable a la intersección de sus componentes.

Ahora bien, $2\mathcal{A} = \{ \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,d,e\}, \{b,c,d,e\}, \{a,c,d,e\} \}$ unido con $\mathcal{A}$.

$\{a,c,d,e\} \cap \{b,c,d,e\} = \{c,d,e\}$ y no existe D en $2\mathcal{A}$ diferente de ellos que sea X-aplicable a $\{c,d,e\}$ luego $2\mathcal{A} \notin \mathcal{A}_x$.

Así:

$$\mathcal{A} \in \mathcal{A}_x \quad \text{NO IMPLICA} \quad 2\mathcal{A} \in \mathcal{A}_x \ .$$

(2) ELEMENTOS AGREGABLES Y DESECHABLES

- ELEMENTOS AGREGABLES
- ELEMENTOS DESECHABLES

ELEMENTOS AGREGABLES

2.1 Definicion

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$. Un subconjunto A de X se llama AGREGABLE (en $\mathcal{A}$) si:

A 1) A $\notin \mathcal{A}$

A 2) Existe (C,D) en p $\mathcal{A}$) tal que A a C $\cap$ D (X)

A 3) $\mathcal{A} \cup \{A\} \in \mathcal{A}_X$.

El conjunto AGREGABLES EN $\mathcal{A}$, es el conjunto

$$A\mathcal{A} = \{ A \subset X \ / \ A \text{ es agregable (en } \mathcal{A} \text{) } \}.$$

2.2 Ejemplos

Sea X $= \{1,2,3,4,5,6\}$, y sea

$\mathcal{A} = \{ \{1,2,3\} , \{3,4,5\} , \{2,3,6\} , \{2,3\} , \{3\} , \{1,2,3,6\},$
$\{3,4,5,6\} \}$.

$\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$.

Consideremos el conjunto $\{1,3\}$ subconjunto de X. $\{1,3\}$ cumple:

$\{1,3\} \notin \mathcal{A}$

$\{1,3\}$ a $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5,6\}$ (X)

$\mathcal{A} \cup \{\{1,3\}\} \in \mathcal{A}_X$,

asi, $\{1,3\} \in A\mathcal{A}$.

Sea ahora el subconjunto de X, $\{2,3,4,5,6\}$. Dicho conjunto cumple:

$\{2,3,4,5,6\} \notin \mathcal{A}$;

formemos p $\mathcal{A}$):

p $\mathcal{A}$) $= \{$ ($\{1,2,3\}$, $\{3,4,5\}$),($\{1,2,3\}$, $\{2,3,6\}$),($\{1,2,3\}$, $\{3,4,5,6\}$),($\{3,4,5\}$, $\{2,3,6\}$),($\{2,3,6\}$, $\{3,4,5,6\}$), ($\{3,4,5\}$, $\{2,3\}$),($\{3,4,5\}$, $\{1,2,3,6\}$),($\{2,3\}$, $\{3,4,5,6\}$),($\{1,2,3,6\}$, $\{3,4,5,6\}$) . . . $\}$, puede observarse que las intersecciones de los pares de p $\mathcal{A}$), son los conjuntos $\{3\}$, $\{2,3\}$, $\{3,6\}$ y que:

$\{2,3,4,5,6\}$ a $\{3\}$ (X)

$\{2,3,4,5,6\}$ a $\{2,3\}$ (X)

$\{2,3,4,5,6\}$ a $\{3,6\}$ (X), o sea que para todo (A,B) en p $\mathcal{A}$), $\{2,3,4,5,6\}$ a $A \cap B$ (X). ($\{2,3,4,5,6\} \neq A,B$).

Podemos observar que $\{2,3,4,5,6\}$ cumple con:

$\mathcal{A} \cup \{\{2,3,4,5,6\}\} \in \mathbb{A}_X$, para verlo, escribamos p $\mathcal{A} \cup \{\{2,3,4,5,6\}\}$).

p $\mathcal{A} \cup \{\{2,3,4,5,6\}\}$) = p $\mathcal{A}$) $\cup \{ (\{1,2,3\}, \{2,3,4,5,6\}),$
$(\{1,2,3,6\}, \{2,3,4,5,6\}), \ldots \}$,

tenemos que $\{2,3\}$ a $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5,6\}$ (X) , y que

$\{2,3,6\}$ a $\{1,2,3,6\} \cap \{2,3,4,5,6\}$ (X) ;

luego, $\mathcal{A} \cup \{\{2,3,4,5,6\}\} \in \mathbb{A}_X$, y tenemos que:

$\{2,3,4,5,6\} \in$ A$\mathcal{A}$.

El conjunto $\{2,3,4,5,6\}$ cumple con una propiedad que no es necesaria para ser agregable. Esta propiedad me sugiere la siguiente definición:

2.3 Definición

Sea $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_X$ y sea A $\in$ A$\mathcal{A}$. A se llama TOTALMENTE AGREGABLE (en $\mathcal{A}$) si para todo (C,D) en p $\mathcal{A}$), A es X-aplicable a $C \cap D$.

El conjunto TOTALMENTE AGREGABLES (en $\mathcal{A}$), es el conjunto:

T$\mathcal{A}$ = $\{ A \subset X$ / A es Totalmente Agregable (en $\mathcal{A}$) $\}$.

El conjunto $\{2,3,4,5,6\}$ en el ejemplo anterior, es totalmente agregable.

2.4 Definición

Sea $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_X$. El CONJUNTO PRINCIPAL de $\mathcal{A}$ es el conjunto: $\mathcal{A}^{*} = \{ A \in \mathcal{A} \ / \text{ Existe } B \in \mathcal{A} \text{ y } (A,B) \in p\mathcal{A}) \}$.

Notas: Para $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$, $\quad p\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}^{*} \times \mathcal{A}^{*}$,

$$\mathcal{A}^{*} \cup {}^{a}\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X .$$

2.5 Consideremos el conjunto $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ y sea T el conjunto $T = \{ X, \emptyset, \{3,4,5\}, \{2,3,6\}, \{2,3,4,5,6\}, \{3\} \}$. T es una topología de X, por lo tanto una aplicabilidad. Más aún,

$$T - \{X, \emptyset\} \in \mathcal{A}_X ,$$
$$T - \{ \{2,3,4,5,6\} \} \in \mathcal{A}_X ,$$
$$T - \{ \{3\} \} \in \mathcal{A}_X ,$$
$$T - \{ \{2,3,4,5,6\} , X , \emptyset \} \in \mathcal{A}_X ,$$
$$T - \{ \{2,3,4,5,6\} , \{3\} , X , \emptyset \} \notin \mathcal{A}_X , \text{ y}$$
$$T - \{ \{2,3,4,5,6\} , \{3\} \} \notin \mathcal{A}_X .$$

$(pT) = \{ (\{3,4,5\} , \{2,3,6\}),(\{2,3,6\} , \{3,4,5\}) \})$.

ELEMENTOS DESECHABLES

2.6 Definición

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$. Un elemento D de $\mathcal{A}$ se llama DESECHABLE (de $\mathcal{A}$) si:

$$\mathcal{A} - \{D\} \in \mathcal{A}_X .$$

El conjunto DESECHABLES DE $\mathcal{A}$, es el conjunto

$$\mathcal{A}_D = \{ D \in \mathcal{A} \ / \ D \text{ es Desechable de } \mathcal{A} \}.$$

En el apartado 2.5 podemos observar algunos conjuntos desechables de T.

2.7 Definición

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$. $\mathcal{A}$ se llama REDUCIBLE si:

$$\mathcal{A} - \mathcal{A}_D \in \mathcal{A}_X .$$

2.8 Proposición

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_x$, entonces si $D \in \mathcal{A}$ es tal que $D \notin a\mathcal{A}$, entonces se tiene que $D \in \mathcal{A}_D$.

Demostración. $D \notin a\mathcal{A}$, entonces para todo (A,B) en $p\mathcal{A}$), D cumple

a) $D \notin A \cap B\ (X)$, o

b) $D\ a\ A \cap B\ (X)$, pero con $D = A$, o, $D = B$.

Puede darse uno de los siguientes casos:

a') $D \in \mathcal{A}^{*}$,

b') $D \notin \mathcal{A}^{*}$;

si el caso es a'), para el resto de los pares de $p\mathcal{A}$) que no tienen como componente a D, seguirán existiendo elementos en $a\mathcal{A}$, o sea que se cumplirá $\mathcal{A} - \{D\} \in \mathcal{A}_x$;

si el caso es b'), por tenerse $D \notin a\mathcal{A}$, no hay posibilidad que ningún par de $p\mathcal{A}$) se quede sin aplicable, y asi $\mathcal{A} - \{D\}$ sigue siendo una aplicabilidad.

2.9 Definiciones

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_x$.

I) $\mathcal{A}$ se llama TERMINAL si $T\mathcal{A} = \emptyset$,

II) $\mathcal{A}$ se llama INICIAL si $\mathcal{A}_D = \emptyset$.

3

APLICABILIDADES ANGULARES

- DEFINICION
- APLICABILIDADES ANGULARES PERPENDICULARES

DEFINICION

3.1 Definición

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ $\in$ $\mathbb{A}$. Se dice que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son ANGULARES DE PRIMERA CLASE (o simplemente Angulares) cuando cumplen:

Existe un único $M \in a\mathcal{A} \cap a\mathcal{D}$.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son angulares, el conjunto M recibe el nombre de RAZON.

3.2 Definiciones

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ $\in$ angulares de razón M.

I) El ANGULO entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ se define como el conjunto:

$$m(\mathcal{A} : \mathcal{D}) = \left\{ A \in \mathcal{A}^{*} \;/\; \text{Existe } B \in \mathcal{A} \text{ y } M \text{ a } A \cap B \ (X) \text{ con } M \neq A \text{ y } M \neq B \right\} ,$$

II) El Angulos entre $\mathcal{D}$ y $\mathcal{A}$ se define como el conjunto

$$m(\mathcal{D} : \mathcal{A}) = \left\{ A \in \mathcal{D}^{*} \;/\; \text{Existe } B \in \mathcal{D} \text{ y } M \text{ a } A \cap B \ (X) \text{ con } M \neq A \text{ y } M \neq B \right\} .$$

3.3 Definición

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ $\in$ $\mathbb{A}$. Se dice que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ son ANGULARES DE SEGUNDA CLASE cuando cumple:

Existen M_1 y $M_2 \in a\mathcal{A} \cap a\mathcal{C}$ y M_1, M_2 son comparables.

Nota: Dos aplicabilidades angulares de primera clase, lo son de segunda

Se puede generalizar a decir ANGULARES DE MULTIPLE CLASE cuando:

Existen $M, N, L, \ldots \in a\mathcal{A} \cap a\mathcal{C}$ comparables dos a dos.

3.4 Ejemplos.

a) Sea $X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, y sean

$\mathcal{A} = \{ \{1,2\} , \{3,4\} , \{1,3,5\} , \{2,3\} , \{0,4\} , \{4\} , \{2,4,5,6\} \}$ y

$\mathcal{D} = \{ \{4\} , \{1,4\} , \{2,3,6\} , \{0,3,4,5,5\}, \{1,2,3,6\} , \{1,3\} \}$,

$A, D \in \mathcal{A}$.

$^{a}A = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3,5\}, \{2,3\}, \{0,4\}, \{4\}, \{2,4,5,6\}\} = A$

$^{a}D = \{\{4\}, \{2,3,6\}, \{0,3,4,5,6\}, \{1,2,3,6\}, \{1,3\}\} \quad (\neq D)$,

$^{a}A \cap {}^{a}D = \{\{4\}\}$. Asi, A y D son angulares de razón $\{4\}$

Ahora bien: $\{4\}(A : D) = \{\{3,4\}, \{0,4\}, \{2,4,5,6\}\}$ y

$\{4\}(D : A) = \{\{1,4\}, \{0,3,4,5,6\}\}$, también puede observarse que la unión de estos ángulos no es una aplicabilidad.

Por qué se ha hecho la anterior observación?

Primeramente, por pura curiosidad. Ya viendo un poco más calmado la posibilidad de que para algunas aplicabilidades angulares de razón M se cumpla que la unión de los ángulos sea una aplicabilidad, me he propuesto mostrar un ejemplo (mejor dicho, forzar un ejemplo)

Sea $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y sean los conjuntos

$M(A : C) = \{\{2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,3,6\}\}$ y

$M(C : A) = \{\{2,3,5,6\}, \{2,3,5,7\}, \{3,6\}, \{1,3\}\}$.

Asi, si ponemos $M = \{1,2,3,5,6\}$,

$\{1,2,3,5,6\}(A : C) \cup \{1,2,3,5,6\}(C : A) =$

$\{\{1,2,3,5\}, \{2,3,4\}, \{1,3,6\}, \{2,3,5,6\}, \{1,3\}, \{2,3,5,7\}, \{3,6\}\}$

es una aplicabilidad donde:

$p\{1,2,3,5,6\}(A : C) \cup \{1,2,3,5,6\}(C : A)) =$

$\{(\{2,3,4\}, \{1,2,3,5\}), (\{2,3,4\}, \{1,3,6\}),$
$(\{2,3,4\}, \{2,3,5,6\}), (\{2,3,4\}, \{2,3,5,7\}),$
$(\{2,3,4\}, \{1,3\}), (\{2,3,4\}, \{3,6\}), (\{1,2,3,5\},$
$\{1,3,6\}), (\{1,2,3,5\}, \{2,3,5,6\}), (\{1,2,3,5\},$
$\{2,3,5,7\}), (\{1,2,3,5\}, \{3,6\}), (\{1,3,6\}, \{2,3,5,6\}),$
$(\{1,3,6\}, \{2,3,5,7\}), (\{2,3,5,6\}, \{2,3,5,7\}), (\{2,3,5,7\},$
$\{1,3\}), (\{2,3,5,6\}, \{1,3\}), (\{3,6\}, \{1,3\}), (\{2,3,5,7\},$
$\{3,6\}) \ldots\}$;

formemos ahora $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{A} = \{ \{2,3,4\} , \{1,2,3,5\} , \{1,3,6\} , \{1,2,3,5,6\} , \{4,7\} , \{1,7\} , \{1,4,7\} \}, \text{ y}$$

$$\mathcal{C} = \{ \{2,3,5,6\} , \{2,3,5,7\} , \{3,6\} , \{1,3\} , \{1,2,3,5,6\} , \{2,4,7\} , \{1,2,7\} , \{1,2\} \}$$ las cuales cumplen:

$$\mathcal{A} , \mathcal{C} \in \mathfrak{A} \text{ , y } a\mathcal{A} \cap a\mathcal{C} = M = \{1,2,3,5,6\} .$$

Se han construido dos aplicabilidades angulares $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ de razón M tales que: $M(\mathcal{A} : \mathcal{C}) \cup M(\mathcal{C} : \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$.

APLICABILIDADES ANGULARES PERPENDICULARES

3.5 Definición

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{C} \in \mathfrak{A}$ angulares de razón M. Se dice que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ son PERPENDICULARES si:

$$M(\mathcal{A} : \mathcal{C}) \cup M(\mathcal{C} : \mathcal{A}) \in \mathfrak{A} .$$

3.6 Definiciónes

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{D} \in \mathfrak{A}$ perpendiculares de razón M, entonces:
EL PLANO DE $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ (en ese orden !!) es el conjunto $\mathcal{A} \times \mathcal{D}$.
EL CENTRO DEL PLANO DE $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ es el conjunto $M(\mathcal{A} : \mathcal{D}) \times M(\mathcal{D} : \mathcal{A})$,
EL ANGULO PRINCIPAL DEL PLANO DE $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ es el conjunto

$$\{ (A,B) \in p\mathcal{A}) / M \text{ a } A \cap B \text{ (X) con } M \neq A,B \}.$$

3.7 Nota: Puede definirse el plano de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{A}$, el centro de dicho plano unicamente cambiando el orden del producto cartesiano en las definiciones 3.6, y se puede definir el ángulo principal de ese plano como:

$$\{ (A,B) \in p\mathcal{D}) / M \text{ a } A \cap B \text{ (X) con } M \neq A,B \} .$$

3.8 Definición

Seen A, D & A_{x} perpendiculares de razón M. Una función

f: $A \times D \longrightarrow D \times A$ se llama PLANAR si f es tal que:

$f((A,B)) = (B,A)$, para todo $(A,B) \in A \times D$.

Nota: Es de notar que esa Una función es Unica .

3.9.notas:

I) si f es planar, entonces f es inyectiva, pues si (B,A) = (D,C) en $D \times A$, entonces (A,B) = (C,D), o sea que si f((A,B)) es igual a f((C,D)) entonces (A,B) = (C,D);

II) si f es planar, entonces f es suryectiva, pues para todo (B,A) en $D \times A$, se tiene que (A,B) está en $A \times D$ y f((A,B)) = (B,A);

III) si f es planar, entonces f transforma el centro del plano de A y D en el centro del plano de D y A .

00 00

(4)

E
T
S
O
P
P
A
O
C
L
I
O
O
G
S
I

S E L B A C I L P A

O
S

- APLICABILIDADES CONSTANTES
- ESPACIOS TOPOLOGICOS APLICABLES
- ESPACIOS CONTABLES Y APLICABLES

APLICABILIDADES CONSTANTES

4.1 Definición

Sea $\mathcal{A} \in \hat{\mathcal{A}}_X$. Se dice que $\mathcal{A}$ es CONSTANTE EN T si:

C 1) $T \in \mathcal{A}$ y T es no vacío

C 2) $A \cap B$ a T (X), para todo (A,B) $\in p \mathcal{A}$).

Diremos que $\mathcal{A} \in \hat{\mathcal{A}}_X$ es CONSTANTE si $\mathcal{A}$ es Constante en algún T.

4.2 Como ya se ha mostrado, si (X, $\mathcal{T}$) es un espacio topológico, en-- tonces $\mathcal{T} \in \hat{\mathcal{A}}_X$.

Sería interesante, creo yo, buscar más subconjuntos de P(X) (poten-- cias de X) que cumplieran con ser aplicabilidades, sin olvidar la condi ción de (X, $\mathcal{T}$).

Para comenzar, consideremos un elemento " a " de X y el conjunto N(a) de todos los vecindarios del punto " a ".

Se cumple que para cualquiera dos vecindarios del punto V_1 y V_2, V_1 in- tersectado con V_2 es un vecindario del punto ($V_1 \cap V_2 \in N(a)$), en- tonces si V_1 y V_2 son no comparables, tendremos que:

$V_1 \cap V_2$ a $V_1 \cap V_2$ (X) , así:

$N(a) \in \hat{\mathcal{A}}_X$.

(podríamos obviar este resultando teniendo en cuenta que N(a) es un fil tro).

Ahora bien, si tomamos un Sistema Fundamental de Vecindarios $\mathcal{F}$ del pulto " a ", tendremos que $\mathcal{F}$ es una aplicabilidad.

4.3 Definición

Sea(X, $\mathcal{T}$) un espacio topológico. Diremos que (X, $\mathcal{T}$) es un ESPACIO TOPOLOGICO APLICABLE (o simplemente Aplicable) si

$\mathcal{T}$ es Constante o si $\mathcal{T}^*$ es vacío.

4.4 Ejemplos.

a) Sea $X = \{a,b\}$. Toda topología de X, nos lleva a un Espacio Aplicable con $T^* = \emptyset$.

$T_1 = \{X, \emptyset\}$ $\qquad\qquad T_1^* = \emptyset$,

$T_2 = \{X, \emptyset , \{a\}\}$ $\qquad\qquad T_2^* = \emptyset$,

$T_3 = \{X, \emptyset , \{b\}\}$ $\qquad\qquad T_3^* = \emptyset$, y

$T_4 = \{X, \emptyset , \{a,b\}\}$ $\qquad\qquad T_4^* = \emptyset$;

y así, (X,T_1) , (X,T_2) , (X,T_3) , (X,T_4) son aplicables.

b) Sea X un conjunto no vacío y sea $x \in X$, consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{T}_x = \left\{ A \subseteq X \;/\; A = \emptyset \text{ ó } x \in A \right\}$$ y mostremos que $\mathcal{T}_x$ es una topología en X.

a) $X \in \mathcal{T}_x$, $\emptyset \in \mathcal{T}_x$ por definición;

b) Sean $A_1,A_2 \in \mathcal{T}_x$, entonces $A_1 \cap A_2$ es o vacío o x pertenece a él, luego $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_x$;

c) Sea T una colección de elementos de $\mathcal{T}_x$, entonces $\bigcup_{A \in T} A$ es un elemento de $\mathcal{T}_x$, porque dicha unión es o vacía o x pertenece a ella.

Así, $\mathcal{T}_x$ es una topología en X.

Consideremos ahora $\mathcal{T}_x^*$ y sea $\bigcap \mathcal{T}_x^* = \{y \in X \;/\; y \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{T}_x^*\}$.

$\bigcap \mathcal{T}_x^* \neq \emptyset$ porque $x \in A$, para todo $A \in \mathcal{T}_x^*$, luego $x \in \bigcap \mathcal{T}_x^*$ o sea que $\{x\} \subseteq \bigcap \mathcal{T}_x^*$, lo que implica que $\bigcap \mathcal{T}_x^* \in \mathcal{T}_x$.

Consideremos $(A,B) \in p\,\mathcal{T}_x)$, entonces (A, B) cumple: $A \cap B\ a\ \{x\}(X)$ porque $x \in A \cap B$.

Por otro lado, $\bigcap \mathcal{T}_x^* \subseteq A$, para todo $A \in \mathcal{T}_x^*$, luego $A \cap B\ a \bigcap \mathcal{T}_x^*(X)$ para todo $(A,B) \in p\,\mathcal{T}_x)$.

Así, existen al menos dos conjuntos T de $\mathcal{T}_x$ que cumples:

$$A \cap B\ a\ T\ (X), \text{ para todo } (A,B) \in p\,\mathcal{T}_x),$$

y tenemos $(X, \mathcal{T}_x)$ es aplicable.

definido

ESPACIOS CONTABLES Y APLICABLES

4.5 Proposición

A partir de un C_1-espacio (primer espacio contable) se puede llegar a un espacio aplicable.

Demostración. Sea $(X, \mathcal{T})$ un C_1-espacio. Sea $p \in X$, entonces existe una base local contable en p, sea B_p, a partir de la cual se puede construir una base local de encaje.

Sea $B_p = \{B_1, B_2, B_2, \ldots\}$.

Sean $E_1 = B_1$,

$$E_2 = B_1 \cap B_2 \subset B_1 = E_1$$

$$E_3 = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \subset B_1 \cap B_2 = E_2 \subset E_1$$

.

.

$$E_n = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n \subset B_1 \cap B_2 \ldots \cap B_{n-1} = E_{n-1} \subset \ldots \subset E_1$$

.

.

Asi, la base local de encaje E_p es:

$E_p = \{E_1, E_2, \ldots\}$ y cumple que:

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \quad .$$

Consideremos el conjunto

$\mathcal{T}_{E_p} = \{A \subseteq X \;/\; A = \emptyset \text{ o } A \in E_p\}$, osea el conjunto $\{\emptyset, E_1, E_2, \ldots\}$.

Veamos que $(E_1, \mathcal{T}_{E_p})$ es un espacio topológico:

a) $E_1, \emptyset \in \mathcal{T}_{E_p}$ por definición;

b) Sean $E_i, E_j \in \mathcal{T}_{E_p}$, entonces $E_i \cap E_j \in \mathcal{T}_{E_p}$, ya que :

$$E_i \cap E_j = E_j \text{ si } j \leqslant i$$
$$= E_i \text{ si } i < j \quad (i,j \in N),$$

c) Como $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ entonces la unión de un número cualquiera de elementos de $\mathcal{T}E_p$, estará en $\mathcal{T}E_p$. Veámoslo:
Sea $\{E_i / i \in I\}$ una colección de elementos de $\mathcal{T}E_p$, y esta colección es numerable. Sea $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ y veamos que $E \in \mathcal{T}E_p$. Tenemos que I es numerable, más aún, $I \subset N$, $I \neq \emptyset$, luego I tiene un primer elemento i_o, entonces $i_o \leqslant j$, para todo $j \in I$, entonces tenemos que:

$$E_{i_o} \supseteq E_j \text{ , para todo } j \in I \text{ , así:}$$
$$E = E_{i_o} \in \mathcal{T}E_p .$$

Así, $(E_1, \mathcal{T}E_p)$ es un espacio topológico. Además $\mathcal{T}E_p{}^*$ es vacío, luego $(E_1, \mathcal{T}E_p)$ es aplicable.

Corolario

A partir de un C_2-espacio (segundo espacio contable), se puede costruir un espacio aplicable.
Demostración. Sea $(X, \mathcal{T})$ un C_2-espacio, entonces $(X, \mathcal{T})$ es un C_1-espacio, y por ello se puede construir a partir de él un espacio aplicable.

4.6 Proposición

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico con X compacto. Sea $\mathcal{T}^c = \{A / A^c \in \mathcal{T}\}$ tal que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}^c - \{\emptyset\}$ posee la propiedad de la intersección finita, entonces $\mathcal{T}^c$ es constante.
Demostración. Los elementos de $\mathcal{T}^c$ son los conjuntos $\mathcal{T}$- cerrados. Demostremos primero que $\mathcal{T}^c \in \mathcal{A}_x$. Como sabemos, la intersección de dos conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado, o sea que pertenece a $\mathcal{T}^c$, entonces resulta fácil ver que $\mathcal{T}^c$ es una aplicabilidad trivial; más aún, $\mathcal{T}_1$ es trivial $(\emptyset \in \mathcal{T}^c{}_D)$.

$\mathcal{T}_1$ posee la propiedad de la intersección finita, esto quiere decir que toda subcolección finita de $\mathcal{T}_1$ posee una intersección no vacía. Como X es compacto y $\mathcal{T}_1$ posee la propiedad mencionada, entonces $\mathcal{T}_1$ posee una intersección ($\bigcap \mathcal{T}_1$) no vacía (*).

Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{T}_1^{*}$ y supongámoslo no vacío.

Como $\bigcap \mathcal{T}_1 \neq \emptyset$, sea $T = \bigcap \mathcal{T}_1$, entonces $T \subset A$, para todo $A \in \mathcal{T}_1$; así, sean $A, B \in \mathcal{T}_1^{*}$ tales que (A, B) $\in$ p $\mathcal{T}_1$). $A, B \in \mathcal{T}_1$, entonces $A \cap B$ está en $\mathcal{T}_1$, luego $T \subseteq A \cap B \subset X$, así, $A \cap B \in T(X)$, y $T \in \mathcal{T}_1$, entonces $T \in \mathcal{T}^c$ y :

$$\mathcal{T}^c \text{ es constante en } T = \bigcap \mathcal{T}_1 .$$

[C][C][T][T]

5

ESPACIOS DE APLICABILIDAD

- DEFINICION
- IDEMORFISMOS

DEFINICION

5.1 Definición.

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$, entonces el par $(X, \mathcal{A})$ se llama ESPACIO DE APLICABILIDAD.

Nota: Todo espacio topológico es un espacio de aplicabilidad.

($\Longleftarrow$) ?

5.2 Definiciones

Sean $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_X$ y $\mathcal{D} \in \mathcal{A}_Y$. Considérense los espacios de aplicabilidad $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{D})$.

I) Una función $f: X \longrightarrow Y$ es CONTINUA si la imagen inversa de todo elemento de $\mathcal{D}$ pertenece a $\mathcal{A}$.

II) Una función $f: X \longrightarrow Y$ es PRINCIPAL si la imagen inversa de todo elemento de $\mathcal{D}^*$ pertenece a $\mathcal{A}^*$.

5.3 Definición

Sean X,Y conjuntos no vacíos. Una función $f: X \longrightarrow Y$ se llama CONSERVATIVA si para cualquier par (A,B) de subconjuntos de X con A,B no comparables, se tiene que $f(A), f(B)$ son no comparables.

Nota: si una función f es conservativa en $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{D})$ espacios de aplicabilidad, entonces:

I) $(A,B) \in p\,\mathcal{A})$ entonces $(f(A), f(B)) \in p\,\mathcal{D})$,

II) para todo $A \in \mathcal{A}^*$, $f(A) \in \mathcal{D}^*$.

¿Tiene sentido hablar entonces de continuidad?

5.4 Definición

Sean $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{D})$ dos espacios de aplicabilidad. Se dice que X e Y son IDEMORFOS si existe una función $f: X \longrightarrow Y$ biyectiva tal que f y f^{-1} sean conservativas y continuas.

En este caso, la función f recibe el nombre de IDEMOSFISMO.

De la definición anterior se deduce:

I) si $f: X \longrightarrow Y$ es un idemosfismo, entonces f, f^{-1} son principales,

II) dos espacios topológicos idemorfos son homeomorfos.

5.5 Lema

Sean (X, $\mathcal{A}$) , (Y, $\mathcal{D}$) espacios topológicos tales que X es aplicable. Si X e Y son idemorfos (los respectivos espacios), entonces Y es aplicable.

Demostración. Sean A,B elementos de $\mathcal{D}^*$ tales que (A,B) $\in p\,\mathcal{D}$). Como f^{-1} es conservativa se tiene que ($f^{-1}(A), f^{-1}(B)$) $\in p\,\mathcal{A}$), entonces existe $T \in \mathcal{A}$ tal que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ a T (X), o sea que T es un subconjunto de la intersección.

Ahora bien, $f(T) \subseteq f(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(A)) \cap f(f^{-1}(B)) = A \cap B$ por ser f biyectiva.

Así, $A \cap B$ es Y-aplicable a $f(T)$, pero, $f(T) \in \mathcal{D}$? $f(T) \in \mathcal{D}$ porque f^{-1} es continua. Así, se ha demostrado que Y es aplicable.

Hay que hacer algunas consideraciones respecto a algunas propiedades de f que no se han utilizado en la demostración, como:

la continuidad de f, que no se necesita por ser f^{-1} conservativa; la conservatividad de f tampoco se ha utilizado , entonces reescribiendo el lema anterior, tenemos el siguiente:

Teorema

Sean (X, $\mathcal{A}$) , (Y, $\mathcal{D}$) espacios topológicos con X aplicable. Sea $f: X \longrightarrow Y$ biyectiva talque f^{-1} es continua y conservativa, entonces Y es aplicable. (Más aún, si Y es aplicable, al tener f continua y conservativa con f biyectiva, lo será X).

REFERENCIAS

(0) Ramírez M., Juan R. Conjuntos Aplicables , Primera Parte # 1

(1) Rudin, Walter . Principles of Mathematical Analysis Pag 227

(2) Ramírez M., Juan R, Conjuntos Aplicables , Primera Parte # 4

(3) Ramírez M., Juan R. Conjuntos Aplicables , Primera Parte # 5 Ej 7

(4) Ramírez M., Juan R. Conjuntos Aplicables , Primera Parte # 5

(5) Ramírez M., Juan R. Conjuntos Aplicables , Segunda Parte # 3

(6) Lipschutz, S. Topología General Teorema 11.4 Pag 153.

BIBLIOGRAFIA

(1) Conjuntos Aplicables

Juan R. Ramírez M.

(2) Principles of Mathematical Analysis 2ed.

Walter Rudin

McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. Tokyo , 1964

(3) Topología General

Seymour Lipschutz

McGraw-Hill Book Company, Schaum's Outline Series.