UNICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Facultad de Ingeniería y Arquitectura

Departamento de Matemática

SEMINARIO DE GRADUACION

FUNDAMENTOS DE ANALISIS MATEMATICO

Daniel Flores De Paz

Diciembre de 1977

San Salvador El Salvador Centro América

ej. 1

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

SEMINARIO DE GRADUACION

FUNDAMENTOS DE ANALISIS MATEMATICO

Diciembre 1977

San Salvador, El Salvador, Centro América

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:	HONORABLE CONSEJO DE ADMINISTRACION PROVISIONAL DE LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
SECRETARIO GENERAL:	DR. EDMUNDO BARRERA RODRIGUEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO:	ARQ. MANUEL ENRIQUE ALFARO
SECRETARIO:	ING. LUIS A. CARBAJAL VALDEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO:	ING. GABRIEL MELENDEZ MAYORGA

TE-00-00128

TRABAJO DESARROLLADO POR:

DANIEL FLORES DE PAZ

PREVIO A LA OPCIONAL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

ASESOR: LIC. MAURO HERNAN HENRIQUEZ

INDICE

Página

CAPITULO III

CAPITULO IV

INTRODUCCION

El presente trabajo pretende básicamente dos objetivos:

1) Hacer una exposición formal de los conceptos del cálculo, vistos en cursos anteriores.
2) Servir de material bibliográfico, a los estudiantes que se inician en el estudio del Análisis Matemático.

El trabajo se desarrolla en cuatro capítulos.

El primer capítulo, se refiere a espacios métricos, conjuntos compactos y conjuntos conexos.

El segundo capítulo, continuidad, propiedades de funciones continuas y continuidad uniforme.

El tercer capítulo, se inicia con la revisión de algunos conceptos en $\mathbb{R}$, se interpreta la derivada como una transformación lineal, se enuncian además algunos conceptos sobre espacios vectoriales, se formulan y demuestran los teoremas de la función inversa e implícita.

El capítulo cuatro, estudia los conceptos básicos del integral de Riemann Stieltjes y las integrales impropias (Riemann).

Aclaro, que mi aporte en este trabajo consiste primordialmente en la ordenación de proposiciones, buscar ejemplos adecuados y hacer más comprensible la mayoría de las pruebas.

Quisiera expresar mi gratitud, a todas aquellas personas que de alguna forma contribuyeron para la realización de este trabajo.

Finalmente, expreso también mi agradecimiento al Licenciado Mauro Hernán Henríquez por sus críticas y sugerencias, y a mi esposa Ana de los Angeles por alentarme durante el desarrollo de este trabajo.

CAPITULO I

1.1 ESPACIOS METRICOS

DEFINICION 1.1.1

Sea E un conjunto. Una distancia en E es una aplicación $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, que tiene las propiedades siguientes:

i) $d(x, y) \geq 0$ para x, y de E

ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$ para x, y de E

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para x, y, z de E

La propiedad iv) recibe el nombre de "*Desigualdad Triangular*".

DEFINICION 1.1.2

Un espacio métrico es un conjunto E en el cual definimos una función distancia "d".

NOTACION

A un espacio métrico lo denotaremos por el par (E, d) y si no se presta a confusión, únicamente por E.

Ejemplo

Definamos la aplicación *valor absoluto* de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_o^+$ así,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por nociones del cálculo elemental, sabemos que esta aplicación satisface las siguientes propiedades:

Para x, y, z en $\mathbb{R}$.

i) $|x| \geq 0$

ii) $|x| = 0 \iff x = 0$

iii) $|x| = |-x|$

iv) $|xy| = |x|\,|y|$

v) $|x+y| \leq |x| + |y|$

vi) $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$

La función "d" definida de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $d(x, y) = |x-y|$ es una distancia en $\mathbb{R}$, lo cual resulta inmediato verificar a partir de las propiedades de la función valor absoluto. Esta distancia es llamada "*Distancia Usual*" en $\mathbb{R}$.

Ejemplo

La función $d1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

En efecto:

i) $d_1(x, y) \geq 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq 0$$

ii) $d_1(x, y) = 0 \iff x = y$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \iff |x_i - y_i| = 0 \quad \forall\, i = 1,2,\ldots,n$$

$$\iff x_i = y_i \qquad \forall\, i = 1,2,\ldots,n$$

$$\iff x = y$$

iii) $d_1(x, y) = d_1(y, x)$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \quad \text{por propiedad iii) de valor absoluto}$$

$$= d_1(y, x)$$

iv) $d1(x, y) \leq d1(x, z) + d_1(z, y)$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} [|x_i - z_i| + |z_i - y_i|] \quad \text{desigualdad triangular}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| \quad \text{Propiedades de Sumatoria}$$

$$\leq d_1(x, z) + d_1(z, y)$$

Ejemplo

Si tenemos los espacios métricos E1, E2, ..., E_n con $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sus respectivas distancias y $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ entonces la función $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 (x_i, y_i)} \qquad \forall (X, Y) \in E \times E$$

es una distancia en E.

En efecto: Las propiedades i), ii) y iii) son fácilmente verificables a partir del hecho de que cada una de las d_i es una distancia.

Probaremos únicamente la propiedad iv), para eso probaremos primero la desigualdad de *Cauchy-Schwartz*.

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i \right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{para } a_i, \, b_i \in \mathbb{R}$$

Para cualquier número real x tenemos que,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \ge 0$$

$$x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge 0$$

Si $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $\quad B = \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i$, $\quad C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

Obtenemos,

$$Ax^2 + 2\,Bx + C \ge 0$$

En particular para $A > 0$ podemos tomar $x = -\frac{B}{A}$ y obtendríamos,

$$B^2 - AC \le 0$$

que es la desigualdad deseada.

Para que la aplicación definida en nuestro ejemplo sea una distancia, nos falta mostrar que,

$$d(X, Y) \le d(X, Z) + d(Z, Y)$$

como cada una de las d_i es una distancia tenemos que:

$$d_i(x_i, y_i) \le d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i)$$

$$d_i^2(x_i, y_i) \le d_i^2(x_i, z_i) + 2\, d_i(x_i, z_i)\, d_i(z_i, y_i) + d_i^2(z_i, y_i) \quad (1)$$

Por definición de la distanciad tenemos que,

$$d^2(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i,z_i) + 2\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,z_i)d_i(z_i,y_i) + \sum_{i=1}^{n} d_i^2(z_i,y_i)$$

por (1) y propiedades de sumatoria.

Por Cauchy-Schwarz obtenemos,

$$d^2(X,Y) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i,z_i) + 2\left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i,z_i)\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2(z_i,y_i)\right]^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} d_i^2(z_i,y_i)$$

$$d^2(X,Y) \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, z_i)\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2(z_i, y_i)\right)^{1/2}\right]^2$$

de donde,

$$d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$$

Note que si $E = \mathbb{R}^n$ es decir que $E_i = \mathbb{R}$ para $i = 1,2, \ldots, n$ y las d_i -- están definidas igual que en el primer ejemplo obtenemos la distancia -- usual en $\mathbb{R}^n$.

BOLAS Y ESFERA

DIAMETRO DE UN CONJUNTO. DISTANCIA ENTRE DOS CONJUNTOS.

En las siguientes definiciones, consideráremos el espacio métrico (E, d) y "x" un punto de E.

DEFINICION 1.1.3

Sea $r > 0$. Llamaremos *Bola abierta* de centro x y radio r, al conjunto de puntos $y \in E$, tales que $d(x,y) < r$, la cual denotaremos por $B(x, r)$.

Así,

$$B(x, r) = \{y \in E / \ d(x, y) < r, \quad r > 0\}$$

DEFINICION 1.1.4

Sea $r > 0$. Llamaremos *Bola cerrada* de centro x y radio r, al conjunto de puntos $y \in E$, tales que $d(x,y) \leq r$, la cual denotaremos por $\overline{B}(x, r)$.

Así,

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in E / \ d(x, y) \leq r, \quad r > 0\}$$

DEFINICION 1.1.5

Sea $r > 0$. Llamaremos *Esfera* de centro x y radio r, al conjunto de puntos $y \in E$, tales que $d(x,y) = r$, la cual denotaremos por $S(x, r)$.

Así,

$$S(x, r) = \{y \in E / \ d(x, y) = r, \quad r > 0\}$$

Nota:

El centro de una bola abierta (cerrada) siempre pertenece a la bola, pero sin embargo una esfera con el mismo centro puede ser vacía.

Ejemplo

Sea $E = \{1,2,3,4\}$ y d la distancia usual en $\mathbb{R}$, si $x = 3$ y $0 < r < 1$ tenemos que,

$$B(3, r) = \{y \in E / \ d(3, y) < r\} = \{3\}$$

$$\overline{B}(3, r) = \{y \in E / \ d(3, y) \leq r\} = \{3\}$$

$$S(3, r) = \{y \in E / \ d(3, y) = r\} = \phi$$

Ejemplo

En la recta real $\mathbb{R}$, una bola abierta (cerrada) de centro x y radio $r > 0$, es el intervalo $]x-r, x+r[$, $([x-r, x+r])$. La esfera de centro x y radio $r > 0$ está formada por los puntos $x-r$, $x+r$.

Es decir,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} / d(x, y) < r\} =]x-r, x+r[$$

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R} / d(x, y) \leq r\} = [x-r, x+r]$$

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R} / d(x, y) = r\} = \{x-r, x+r\}$$

DEFINICION 1.1.6

Sea $A \subset E$, $A \neq \Phi$. Se llama *Diámetro* de A al número $\sup_{\substack{x \in A \\ y \in A}} d(x,y)$, si este existe, y se denota por $\delta(A)$. Si no existe se dice que el diámetro de A es $+\infty$.

Por definición $\delta(\Phi) = 0$. Se dice que A es *acotado* si $\delta(A) < +\infty$

DEFINICION 1.1.7

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de E. Llamaremos *distancia* de A a B al número $\inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y)$ y se denota por $d(A, B)$.

Cuando A se reduce a un punto, $d(A, B)$ se puede indicar como

$d(x, B) = d(\{x\}, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$ y se dice que $d(x, B)$ es la distancia del punto x al conjunto B.

CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS

DEFINICION 1.1.8

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. Diremos que A es *abierto*, si para cada $x \in A$, existe un $r > 0$, tq $B(x, r) \subset A$, es decir, si todo punto de A es centro de una bola abierta completamente contenida en A.

Ejemplo

i) E y Φ son abiertos.

ii) En $\mathbb{R}$ todo intervalo abierto es un abierto.

iii) En $\mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 4\}$ es un abierto.

iv) Toda bola abierta en $\mathbb{R}^n$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$.

Prueba

Sea $z \in B(x, r)$ por definición tenemos que,

$d(x, z) < r \implies r - d(x, z) > 0.$

Luego podemos construir $B(z, r-d(x, z))$.

Sea $y \in B(z, r-d(x, z)) \implies d(z, y) < r-d(x, z) \qquad (*)$

como,

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ por definición de distancia

$d(x, y) < d(x, z) + r-d(x, z)$ por $(*)$

$d(x, y) < r \implies y \in B(x, r)$

de donde,

$B(z, r-d(x, z)) \subset B(x, r)$

PROPOSICION 1.1.9

Toda reunión de abiertos de E es un abierto en E.

Demostración

Sea $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia de abiertos de E, queremos mostrar que $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ es un abierto. Sea $x \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ entonces $\exists \lambda_o \in L$ tq $x \in A_{\lambda_o}$, como A_{λ_o} es un abierto $\exists\, r > 0$ tq $B(x, r) \subset A_{\lambda_o} \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ por lo que, $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ es un abierto en E.

PROPOSICION 1.1.10

La intersección finita de abiertos de E es un abierto.

Demostración

Sean $A1, A2, \ldots, A_n$ abiertos de E y $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Sea

$x \in A \Longrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Longrightarrow x \in A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Como cada A_i es un abierto $\exists\, r_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ tq $B(x, r_i) \subset A_i$.

Sea $r = \min \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ es claro entonces que, $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Luego A es un abierto.

Nota:

En general, la intersección infinita de abiertos no es un abierto.

Ejemplo

La intersección infinita de los intervalos abiertos $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ de $\mathbb{R}$, es el conjunto formado por un solo elemento $\{0\}$ que no es un abierto en $\mathbb{R}$.

DEFINICION 1.1.11

Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. El punto x se llama *punto de acumulación* de A, si $\forall\ r > 0$, la $B(x, r)$ contiene puntos de A diferentes de x.

Ejemplo

En $\mathbb{R}$, 0 es punto de acumulación del conjunto,

$$A = \{x \in \mathbb{R} /\ x = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

"*Nótese*" además que $0 \notin A$.

DEFINICION 1.1.12

Sea A subconjunto de un espacio métrico E. Diremos que A es *cerrado* en E, si contiene todos sus puntos de acumulación.

PROPOSICION 1.1.13

Sea E un espacio métrico y $A \subset E$. A es cerrado en E sí y sólo sí $\complement A$ es abierto en E.

Demostración

" $\Longrightarrow$"

Sea A cerrado y $x \in \complement A \Longrightarrow x$ no es punto de acumulación de $A \Longrightarrow \exists\ r > 0$ tq $B(x, r) \cap A = \emptyset \Longrightarrow B(x, r) \subset \complement A$. Luego $\complement A$ es -- abierto.

"<=="

Sea $\complement A$ abierto y x punto de acumulación de A. Supongamos que $x \in \complement A \Longrightarrow \exists\ r > 0$ tq $B(x, r) \subset \complement A$, por ser $\complement A$ abierto $\Longrightarrow B(x, r) \cap A = \phi \Longrightarrow$ x no es punto de acumulación, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis.

PROPOSICION 1.1.14

E y ϕ son cerrados.

Demostración

Inmediata a partir de proposición 1.1.13.

PROPOSICION 1.1.15

Toda intersección de cerrados en E es un cerrado en E.

Demostración

Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de cerrados de E. Probaremos que $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un cerrado. Sabemos que

$$\complement(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \complement A_i$$

por lo que nos bastaría mostrar que $\bigcup_{i \in I} \complement A_i$ es un abierto, lo cual es evidente a partir de la proposición 1.1.9. Así, por la proposición 1.1.13 $\bigcap_{i \in I} A_i$ es cerrado.

PROPOSICION 1.1.16

Toda unión finita de cerrados en E es un cerrado en E.

Demostración

Ejercicio.

Ejemplo

i) Todo intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es un cerrado en $\mathbb{R}$.

ii) Toda bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un cerrado en $\mathbb{R}^n$.

iii) Los intervalos $]a,b]$ y $[a,b[$ no son abiertos ni cerrados.

1.2 CONJUNTOS COMPACTOS

DEFINICION 1.2.1

Sea E un espacio métrico y $X \subset E$. Llamaremos *cubrimiento abierto* de X, a toda familia $(O_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos abiertos de E tal que:

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in L} O_\lambda$$

DEFINICION 1.2.2

Se dice que un subconjunto K de un espacio métrico E es *compacto*, si todo cubrimiento abierto de K, contiene un subcubrimiento finito.

Es decir, que si $(O_\lambda)_{\lambda \in L}$ es un cubrimiento abierto de K, existe un número finito de índices λ tal que,

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in H} O_\lambda, \quad H \subset L \text{ y finito.}$$

Ejemplo

Sea $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ subconjunto de $\mathbb{R}$ y finito. Entonces K es compacto.

En efecto: Sea $(O_\lambda)_{\lambda \in L}$ un cubrimiento abierto de K. Para $x_1 \in K$ existe $\lambda_1 \in L$ tq $x_1 \in O_{\lambda_1}$, similarmente para $x_2 \in K$ existe

$\lambda_2 \in L$ tq $x_2 \in O_{\lambda_2}$ y así podemos seleccionar "m" elementos de la familia $(O_\lambda)_{\lambda \in L}$ de tal forma que,

$$K \subset \bigcup_{\lambda=1}^{m} O_\lambda$$

Luego K es compacto.

<u>Ejemplo</u>

Sea $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^k$ tq $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}^k$. Entonces el conjunto $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\ell\}$ es compacto en $\mathbb{R}^k$.

<u>Prueba</u>

Sea $(O_\lambda)_{\lambda\in L}$ un cubrimiento abierto de S.

Así,

$S \subset \bigcup_{\lambda\in L} O_\lambda$, como $\ell \in S$ entonces existe $\lambda_0 \in L$ tq $\ell \in O_{\lambda_0}$, O_{λ_0} es abierto,entonces existe $r > 0$ tq $B(\ell, r) \subset O_{\lambda_0}$.

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $x_n \in B(\ell, r) \subset O_{\lambda_0}$ siempre que $n > N$.

Es decir que tenemos un conjunto de puntos $\{x1, x_2, \dots, x_N\}$ que caen fuera de O_{λ_0}, a este conjunto podemos hacerle el mismo tratamiento del ejemplo anterior.

Así,

$O_{\lambda_0}, O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \dots, O_{\lambda_N}$ es un cubrimiento finito de S. Luego S es compacto en $\mathbb{R}^k$.

PROPOSICION 1.2.3

Todo subconjunto compacto de un espacio métrico E es un conjunto cerrado.

Demostración

Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico E. Mostraremos que el complemento de K es abierto en E.

Sea $p \in \complement_E K$. Si $q \in K$, existen bolas abiertas $B(p, r)$, $B(q, r)$ con $r < \frac{1}{2} d(p, q)$ tq $B(p, r) \cap B(q, r) = \Phi$.

Sea $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia de bolas abiertas que cubren a K. Como K es compacto existen un número finito de puntos $q_1, q_2, \ldots, q_n$ en K tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(q_i, r_i) \quad \text{con} \quad r_i < \frac{1}{2} d(p, q_i)$$

Si tomamos $r^* = \text{Min}\{r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$ la bola $B(p, r^*)$ es tal que $B(p, r^*) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B(q_i, r_i)) = \bigcup_{i=1}^{n} (B(p, r^*) \cap B(q_i, r_i)) = \Phi$

Luego,

$B(p, r^*) \cap K = \Phi$, así $B(p, r^*) \subset \complement_E K$ de donde por definición 1.1.8 resulta que $\complement_E K$ es abierto. Por la proposición 1.1.13 se sigue que K es cerrado.

PROPOSICION 1.2.4

Todo subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto.

Demostración

Sea K un conjunto compacto y $F \subset K$ cerrado. Sea $(O_\lambda)_{\lambda \in L^*}$ una familia de abiertos tales que

$$F \subset \bigcup_{\lambda \in L^*} O_\lambda$$

Como F es cerrado, entonces $\complement F$ es abierto.

Luego tenemos que $\complement F \cup (\bigcup_{\lambda \in L^*} O_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L} O_\lambda$ (donde $L = L^* \cup \{\lambda' / O_{\lambda'} = \complement F\}$).

es un cubrimiento abierto de K, es decir $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} O_\lambda$, por ser K compacto podemos extraer un cubrimiento finito,

$$F \subset K \subset \bigcup_{\lambda \in H^*} O_\lambda \qquad H^* \subset L \text{ y finito.}$$

Si $\complement F$ es un elemento de $(O_\lambda)_{\lambda \in H^*}$, $H^* \subset L$ y finito, $\exists\ \lambda' \in H^*$ tq $O_{\lambda'} = \complement F$.

Si tomamos $H = H^* - \{\lambda'\}$ se tiene que $\bigcup_{\lambda \in H} O_\lambda$ es un cubrimiento abierto de F, es decir:

$$F \subset \bigcup_{\lambda \in H} O_\lambda \qquad H \subset L \text{ y finito.}$$

Luego F es compacto.

PROPOSICION 1.2.5

Si F es cerrado y K compacto $F \cap K$ es compacto.

Demostración

Por la proposición 1.2.3 K es cerrado, luego $F \cap K$ es cerrado por la proposición 1.1.15, además $(F \cap K) \subset K$ de donde por la proposición 1.2.4 $F \cap K$ es compacto.

PROPOSICION 1.2.6

Si A es un subconjunto infinito de un conjunto compacto K, A tiene un punto de acumulación.

Demostración

Si ningún punto de K es punto de acumulación de A, para todo $q \in K$ y $r > 0$, la bola $B(q, r)$ tendría a lo sumo un punto de A (ese punto es q si se tiene que $q \in A$).

Es claro que en ese caso A no podría ser recubierto por una colección finita de abiertos y como $A \subset K$ tampoco K puede ser recubierto por una colección finita de abiertos, lo que contradice la hipótesis de que K es compacto. Luego A tiene al menos un punto de acumulación.

SUCESIONES DE CAUCHY, COMPLETITUD DE $\mathbb{R}$.

DEFINICION 1.2.7

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a \leq b$ entonces a los conjuntos,

i) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}/ \ a \leq x \leq b\}$

ii) $[a,b[\ = \{x \in \mathbb{R}/ \ a \leq x < b\}$

iii) $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}/ \ a < x \leq b\}$

iv) $]a,b[\ = \{x \in \mathbb{R}/ \ a < x < b\}$

se les llama intervalos.

Observación

También puede definirse semilarmente los intervalos $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ y $]-\infty, +\infty[$.

DEFINICION 1.2.8

Llamaremos longitud de un intervalo I, al número b-a.

NOTACION

$|I| = b-a.$

PROPOSICION 1.2.9

Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos de la forma, $I_n = [a_n, b_n]$ tales que $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y que sus longitudes $|I_n|$ tiendan a cero (es decir que $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$) entonces $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{u\}$.

Demostración

Como la sucesión $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, se tiene que $\forall\, n$,

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \qquad (1)$$

Mostraremos que $a_n < b_m$ para cualquier n y m. Consideraremos dos casos, ya que si $n = m$ el resultado se sigue inmediatamente de (1).

i) Si $m < n$,

$a_n < b_n$ por (1)

pero,

$b_n \leq b_m$ por ser $n > m$

Luego,

$a_n < b_m$

ii) Si $n < m$,

$a_n \leq a_m$ por ser $n < m$

Pero, $a_m < b_m$ por (1)

Luego, $a_n < b_m$

Por i) y ii) se sigue que $a_n < b_m$ (*) para cualquier n y m.

Formemos el conjunto S con todos los valores a_n, así

$$S = \{x \in \mathbb{R} / \ x = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots.\}$$

Por (*) se puede notar que cada b_m es cota superior de S. Así por ser S acotado superiormente $\exists\ u \in \mathbb{R}$ tq $u = \text{Sup } S$.

Entonces,

$$a_n \leq u \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad \text{por ser u cota superior de S}$$

también,

$$u \leq b_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad \text{por ser u la menor cota superior.}$$

Luego,

$$u \in I_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Así,

$$u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Mostraremos que para otro número diferente de u podemos encontrar un intervalo, al cual dicho número ya no pertenece.

Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \neq u$ entonces $|x-u| > 0$.

Como la longitud $|I_n|$ tiende a cero, tendremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tq $|x-u| > b_n - a_n$ para $n \geq N$; por lo que $x \notin I_n$ para $n \geq N$.

Luego,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{u\}$$

<u>DEFINICION 1.2.10</u>

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, si $\forall\ \varepsilon > 0$,

$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tq si $p, q \geq n_0$ entonces $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

PROPOSICION 1.2.11

Sea E un espacio métrico. Toda sucesión convergente de puntos de E es una sucesión de Cauchy.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$ y $a \in E$ tq $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq N$ implica que,

$$d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por la propiedad iv) de distancia (desigualdad triangular) tenemosque si $n \geq N$ y $m \geq N$ entonces,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Luego,

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

DEFINICION 1.2.12

Se dice que un espacio métrico E es *completo*, si toda sucesión de Cauchy en E es convergente (a un punto de E).

PROPOSICION 1.2.13

Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente ($\mathbb{R}$ es completo).

Demostración

Sea $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de números reales, luego para $\varepsilon = 1/2$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall$ $n, m \geq N_1$ se tiene que $|U_n - U_m| \leq \frac{1}{2}$.

Como se cumple $\forall\, m \geq N_1$, se cumplirá especialemnte para N_1 y tendremos,

$$|U_n - U_{N_1}| \leq \frac{1}{2} \qquad \text{si } n \geq N_1$$

$$-\frac{1}{2} \leq U_n - U_{N_1} \leq \frac{1}{2} \qquad n \geq N_1$$

$$U_{N_1} - \frac{1}{2} \leq U_n \leq U_{N_1} + \frac{1}{2} \qquad n \geq N_1$$

de donde $U_n \in \left[U_{N_1} - \frac{1}{2}, \quad U_{N_1} + \frac{1}{2} \right]$ si $n \geq N_1$.

Si hacemos $I_1 = \left[U_{N_1} - \frac{1}{2}, \quad U_{N_1} + \frac{1}{2} \right]$ tendremos que $|I_1| < 1$ y

$U_n \in I_1 \quad \forall\, n > N_1$.

Similarmente existe un intervalo cerrado I'_2 con $|I'_2| < 1/2$ y un $N'_2 \in \mathbb{N}$ tq $U_n \in I'_2$ siempre que $n \geq N'_2$.

Tomemos,

$$I_2 = I_1 \cap I'_2 \qquad \text{y} \qquad N_2 = \text{máx}\,\{N_1, N'_2\}$$

entonces,

$$N_1 < N2 \qquad \text{y además } I_2 \subset I_1$$

también,

$$|I_2| < \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad U_n \in I_2 \quad \text{siempre que } n \geq N_2.$$

Por el mismo proceso, existe un intervalo cerrado I'_3 con $|I'_3| < 1/3$ y un $N'_3 \in \mathbb{N}$ tq $U_n \in I'_3$ siempre que $n \geq N'_3$.

Tomemos,

$$I_3 = I_2 \cap I'_3 \qquad \text{y} \qquad N_3 = \max\,\{N_2, N'_3\}$$

entonces,

$$N_2 < N_3 \qquad \text{y además } I_3 \subset I_2$$

también,

$$|I_3| < \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad U_n \in I_3 \qquad \text{siempre que } n \geq N_3.$$

Siguiendo el proceso inductivo, podemos obtener sucesiones $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que,

$$I_{k+1} \subset I_k \qquad \text{y} \qquad N_k < N_{k+1} \qquad \text{para } k \in \mathbb{N}$$

también,

$$|I_k| < \frac{1}{k} \quad \text{con } U_n \in I_k \quad \text{siempre que } n \geq N_k$$

Luego por la proposición 1.2.9 resulta que,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{u\}$$

Mostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = u$.

Sea $\varepsilon > 0$. Existe un $k \in \mathbb{N}$ tq $|I_k| < \varepsilon$ para $n \geq N_k$. Tenemos que $U_n \in I_k$ y como $u \in I_k$

$$d(U_n, u) = |U_n - u| < |I_k| < \varepsilon \qquad \text{para } n \geq N_k$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} U_n = u$$

<u>Nota:</u>

Por la proposición anterior $(\mathbb{R}, d)$ (en donde "d" es la distancia usual) es un espacio métrico *completo*.

1.3 CONJUNTOS CONEXOS

DEFINICION 1.3.1

Sea E un espacio métrico y $D \subset E$. Diremos que D es *conexo*, si no existen subconjuntos abiertos A, B de E tales que:

i) $A \cap D$ y $B \cap D$ son disjuntos y no vacíos.

ii) $(A \cap B) \cup (B \cap D) = D$.

En caso contrario diremos que D es *disconexo* ó *no-conexo*.

Ejemplo

El conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ es disconexo.

En efecto:

Podemos tomar $A = \{x \in \mathbb{R} / \ x < 3/2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / \ x > 3/2\}$ y se satisface que:

i) $A \cap \mathbb{N} = \{1\}$, $B \cap \mathbb{N} = \{2, 3, \ldots.\}$ son disjuntos y no vacíos.

ii) $(A \cap \mathbb{N}) \cup (B \cap \mathbb{N}) = \{1\} \cup \{2, 3, \ldots.\} = \mathbb{N}$

Ejemplo

El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / \ x$ es racional positivo$\}$ es disconexo. $(S \subset \mathbb{R})$

En efecto:

Tomemos $A = \{x \in \mathbb{R} / \ x < \Pi\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / \ x > \Pi\}$ y se satisface que:

i) $A \cap S = \{x \in \mathbb{R} / \ 0 \leq x < \Pi, \ x$ racional$\}$

$B \cap S = \{x \in \mathbb{R} / \ \Pi < x < +\infty, \ x$ racional$\}$

son disjuntos y no vacíos.

ii) $(A \cap S) \cup (B \cap S) = S$.

PROPOSICION 1.3.2

El intervalo cerrado $I = [0,1]$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$.

Demostración

Haremos la prueba por contradicción, supongamos que A y B son conjuntos abiertos que forman una disconexión de I.
Entonces $A \cap I$ y $B \cap I$ son no vacíos, disjuntos y la unión de ellos es I.
Como A y B son abiertos, los conjuntos $A \cap I$ y $B \cap I$ no pueden consistir de un solo punto, ya que si $A \cap I$ es un solo punto "c" este debe ser cualquiera de los extremos de I. Luego existe $r > 0$ tq $B(c, r) \subset A$ y además $B(c, r) \cap I$ es diferente de vacío y la intersección es $[c, c+r[$ que consta evidentemente de más del punto c. Similarmente con $B \cap I$.

Supongamos que existen puntos $a \in A$ y $b \in B$ tales que $0 < a < b < 1$. Tomemos $d = \text{Sup}\{x \in A / \ x < b\}$, luego $0 < d < 1$, de aquí se sigue que $d \in A \cup B$. Si $d \in A$ entonces $d \neq b$ y como A es abierto existe $a_1 \in A$, $d < a_1$ tq el intervalo $[d, a_1]$ está contenido en $\{x \in A / \ x < b\}$, lo que contradice la definición de d.

Similarmente si $d \in B$, entonces como B es abierto existe un punto $b_1 \in B$, $b_1 < d$ tal que el intervalo $[b_1, d]$ está contenido en $B \cap I$ contrario a la definición de d. Entonces la hipótesis de que I es disconexo nos lleva a contradicción.
Luego

$[0,1]$ es *conexo.*

PROPOSICION 1.3.3

Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.

Demostración

"$\Longrightarrow$"

A) Sea C un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ y supongamos que $C \neq \phi$. Note que (por ser $\mathbb{R}$ "denso"), C satisface la propiedad de que si $a, b \in C$, $a < b$ entonces existe $d \in \mathbb{R}$ tq $a < d < b$ y además $d \in C$, si $d \notin C$ entonces los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}/ \ x > d\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}/ \ x < d\}$ forman una disconexión de C.

i) Supongamos que C es acotado.

Sea $a = \inf C$ y $b = \sup C$. Probaremos que C debe tener cualquiera de las formas siguientes:

$[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$

De cierto, si $a \in C$ y $b \in C$ debemos tener que $[a,b] \subset C$ por A) y también que $C \subset [a,b]$ se sigue del hecho de que a y b son el infimo y supremo de C respectivamente.

Si $a \in C$ y $b \notin C$. Sea b' cualquier número real tq $a \leq b' < b$. Como $b = \operatorname{Sup} C$, entonces existe $b'' \in C$ tq $a \leq b' < b''$. Por tal razón $b' \in C$ y como b' es un número real arbitrario que satisface $a \leq b' < b$, deducimos fácilmente que $C = [a,b[$.

Similarmente si:

$a \notin C$ y $b \in C$ entonces $=]a,b]$

$a \notin C$ y $b \notin C$ entonces $=]a,b[$

ii) Ahora supongamos que C es acotado inferiormente. Tomemos $a = \inf C$, de modo que $C \subset [a, +\infty[$. Si $a \in C$ y x es un número real -- tq $a \leq x$. Entonces como C no es acotado superiormente existe $d \in C$ -- tq $x \leq d$ de donde se sigue que $x \in C$ por la misma propiedad.

Como x es un número real arbitrario tenemos que $[a, +\infty[\subset C$ por lo que $C = [a, +\infty[$. Similarmente, si $a \notin C$ se concluye que $C =]a, +\infty[$.

iii) Si C es acotado superiormente, pero no lo es inferiormente y $b = \sup C$ entonces por un procedimiento similar seguido en (ii) obten - dremos que $C =]-\infty, b]$, si $b \in C$ ó $C =]-\infty, b[$ si $b \notin C$.

iv) Finalmente si C no es acotado inferiormente ni acotado su periormente, entonces obtenemos el caso en que $C =]-\infty, +\infty[\; = \mathbb{R}$.

Por i), ii), iii) y iv) se obtiene que C es un intervalo.

Nota: que el iv) caso nos dice que $\mathbb{R}$ es conexo.

"$\Longleftarrow$"

Esta parte de la prueba puede ser elaborada (con las modifica - ciones del caso), similarmente a la prueba de la proposición 1.3.2.

CAPITULO II

2.1 PROPIEDADES LOCALES DE FUNCIONES CONTINUAS

DEFINICION 2.1.1

Sean X y Y espacios métricos. Supongamos además que $E \subset X$, $f: E \to Y$ una función y P punto de acumulación de E. Diremos que $\lim_{x \to P} f(x) = q$ (ó $f(x) \to q$ cuando $x \to P$) si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tq $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$ siempre que $0 < d_X(x, p) < \delta$.

OBSERVACIONES

1) Los símbolos d_Y y d_X indican las distancias en Y y en X respectivamente.

2) Si X y Y son reemplazados por $\mathbb{R}$, las distancias en X y en Y serían reemplazadas por valor absoluto.

3) Se dan por conocidas las propiedades siguientes:

   a) $\lim_{x \to P} (f(x) + g(x)) = A+B$

   b) $\lim_{x \to P} (f.g)(x) = A.B$

   c) $\lim_{x \to P} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$

   siempre que límite de f y g existan.

4) Nótese que $P \in X$, pero P no necesariamente es punto de E y aún en el caso de que $P \in E$, $f(P) \neq \lim_{x \to P} f(x)$

DEFINICION 2.1.2

Sean X y Y espacios métricos, $E \subset X$, $P \in E$ y $f: E \to Y$ una función. Diremos que f es *continua* en P, si $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que,

$$d_Y(f(x), f(P) < \varepsilon \quad \text{siempre que } d_X(x, P) < \delta$$

Utilizando el concepto de Bolas, podemos dar otra definición de continuidad.

DEFINICION 2.1.3

Sean X y Y espacios métricos, $E \subset X$, $P \in E$ y $f: E \to Y$ -- una función. Diremos que f es continua en P, si $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $f(x) \in B(f(P), \varepsilon)$ siempre que $x \in B(P, \delta)$.

OBSERVACIONES

1) Las definiciones anteriores son equivalentes ya que decir $f(x) \in B(f(P), \varepsilon)$ es lo mismo que $|f(x) - f(P)| < \varepsilon$ y esto no es más que $d_Y(f(x), f(P))$. Similarmente $x \in B(P, \delta)$ es lo mismo que $d_X(x,P) < \delta$

2) f debe estar definida en P.

3) $\lim\limits_{x \to P} f(x) = f(P)$

4) Para probar la continuidad de una función basta verificar 2) y 3).

DEFINICION 2.1.4

Si f es continua en todo punto de E diremos que f es continua en E.

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función identidad. Entonces f es continua.

En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$, tomemos d la distancia usual en $\mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}$ y consideremos,

$$d_{\mathbb{R}}(f(x),\ f(P)) < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(P)| < \varepsilon$$

$$|x - P| < \varepsilon \qquad \text{por ser f la identidad.}$$

Luego bastaría hacer $\delta = \varepsilon$, para que,

$$\lim_{x \to P} f(x) = f(P)$$

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = x^2$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$ y d la distancia usual en $\mathbb{R}$.

Consideremos,

$$d_{\mathbb{R}}(f(x),\ f(a)) < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$|x^2 - a^2| < \varepsilon$$

$$|x-a|\,|x+a| < \varepsilon$$

Si $a = 0$ tendríamos que $x^2 < \varepsilon$ bastaría entonces tomar $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ para que f sea continua.

Si $a \neq 0$ entonces debemos obtener una expresión que acote superiormente a $|x+a|$.

Hagamos $\delta_1 = |a|$ y tendremos que $|x-a| < |a|$ de donde,

$$\big|\, |x| - |a| \,\big| < |a|$$

$$-|a| < |x| - |a| < |a|$$

$$0 < |x| < 2|a|$$

además,

$$|x+a| < |x| + |a| < 3|a|$$

Entonces,

$$d_{\mathbb{R}}(f(x), f(a)) < 3|a||x-a| < \varepsilon \qquad \text{para } \delta_2 = \frac{\varepsilon}{3|a|}$$

Bastaría definir $\delta = \text{Min}\ \{\delta_1, \delta_2\}$ para que $d_{\mathbb{R}}(f(x), f(x)) < \varepsilon$ siempre que $d_{\mathbb{R}}(x, a) < \delta$.

Ejemplo

Sea $f: [\mathbb{R} - \{0\}] \to \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = 1/x$ entonces f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$, $a \in [\mathbb{R} - \{0\}]$ y d la distancia usual en $\mathbb{R}$.

Consideremos,

$$d_{\mathbb{R}}(f(x), f(a)) = |f(x) - f(a)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|a|\ |x|}$$

En este caso debemos encontrar una expresión que acote inferiormente $|x|$, para que el lado derecho de la ecuación quede mayorizado. Para eso hagamos $\delta_1 = \frac{1}{2}|a|$ y tendremos entonces:

$$\big|\ |x| - |a|\ \big| < |x-a| < \frac{1}{2}|a|$$

de donde,

$$\frac{1}{2}|a| < |x| < \frac{3}{2}|a|$$

entonces,

$$d_{\mathbb{R}}(f(x), f(a)) = \frac{|x-a|}{|a|\ |x|} < \frac{2|x-a|}{|a|^2} < \varepsilon \qquad \text{para } \delta_2 = \frac{|a|^2\varepsilon}{2}$$

Bastaría definir $\delta = \text{Mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$ para que $d_{\mathbb{R}}(f(x), f(a)) < \varepsilon$, siempre que $d_{\mathbb{R}}(x, a) < \delta$.

DISCONTINUIDADES

DEFINICION 2.1.5

Sean X y Y espacios métricos, $E \subset X$, $a \in E$ y $f: E \to Y$ una función. Diremos que f es *discontinua* en "a" o que f tiene una discontinuidad en "a" si y solamente si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E, que converge al valor "a" tal que la sucesión de imagenes $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(a)$.

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

entonces f es discontinua en "0".

En efecto:

La sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ es una sucesión convergente a "0". Como la sucesión $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(0) = 0$.

Luego f es discontinua en "0".

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{sí } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{sí } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Entonces f es discontinua en el conjunto de los irracionales.

En efecto:

Sea k un número irracional y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números racionales que convergen a k. Como $f(x_n) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge,$f(k) = 0$.

Luego f es discontinua en los irracionales. Si f y g son funciones cuyo dominio y rango es $\mathbb{R}$, entonces podemos definir, como una propiedad "*local*", la suma $(f+g)$, la diferencia $(f-g)$, el producto $(f.g)$ y la composición $(g\circ f)$ de funciones, para valores $x \in [D(f) \cap D(g)]$.

En los cursos básicos de cálculo se establece fácilmente que si f y g son continuas en un punto "a" también lo son: $f-g$, $f+g$, $f.g$, $f\circ g$.

En esta sección únicamente probaremos la continuidad para la composición de funciones $(f\circ g)$.

PROPOSICION 2.1.6

Sean X, Y y Z espacios métricos, $E \subset X$, $f\colon E \to Y$ y $g\colon f(E) \to Z$ funciones. Sea además $h\colon E \to Z$ una función definida por

$$h(x) = g(f(x)), \qquad x \in E$$

Si f es continua en un punto $a \in E$ y g es continua en $f(a) \in f(E)$, entonces h es continua en a.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en $f(a)$ existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$d_Z(g(y), g(f(a))) < \varepsilon$ siempre que $d_Y(y, f(a)) < \delta_1$, $y \in f(E)$.

Además f es continua en a, luego para $\varepsilon 1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon_1$ siempre que $d_X(x, a) < \delta$, $x \in E$.

Si hacemos $\delta_1 = \varepsilon_1$ tendríamos que,

$$dZ(h(x), h(a)) = d_Z(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$$

si $\quad d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon_1, \quad$ si $\quad d_X(x, a) < \delta.$

Luego $d_{Z(h(x),} h(a)) < \varepsilon$ siempre que $d_X(x, a) < \delta$.

Luego h es continua en a.

2.2 PROPIEDADES GLOBALES DE FUNCIONES CONTINUAS

DEFINICION 2.2.1

Sean X y Y espacios métricos, $E \subset X$ y $f\colon E \to Y$ una función. Si $B \subset Y$, entonces la *imagen inversa* de B por f es el conjunto de los -- $x \in E$ tales que $f(x) \in B$.

Simbolicamente

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/ \ f(x) \in B\}$$

Ejemplo

Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \mathbb{N}$ y $f\colon A \to B$ una función definida por $f(x) = x^2$.

Si $c_1 = \{y \in \mathbb{N}/ \quad 1 \leq y \leq 15\}$

$$f^{-1}(c_{1}) = \{x \in A/ \quad f(x) \in c_1\} = \{1, 2, 3\}$$

Si $c_2 = \{y \in \mathbb{N}/ \quad y \text{ es par}\}$

$$f^{-1}(c2) = \{x \in A/ \quad f(x) \in c_2\} = \{2, 4\}$$

Si $c_3 = \{y \in \mathbb{N} /\ \ y \text{ es impar}\}$

$$f^{-1}(c_3) = \{1,3,5\}$$

Si $c_4 = \{3,5,7\}$

$$f^{-1}(c_4) = \Phi$$

PROPOSICION 2.2.2

Sean X y Y espacios métricos, $f: X \to Y$ una función y V un abierto en Y. Entonces f es continua en X si y solamente si $f^{-1}(V)$ es un abierto en X.

Demostración

"$\Longrightarrow$"

Supongamos que f es continua en X y V es un abierto en Y. Debemos mostrar que $\exists\ r > 0$ tq $B(P, r) \subset f^{-1}(V)$ para $P \in f^{-1}(V)$. Para eso supongamos que $P \in X$ y $f(P) \in V$, es decir que $P \in f^{-1}(V)$. Como V es un abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(P), \varepsilon) \subset V$, por ser f continua en P, existe $r > 0$ tal que $f(x) \in B(f(P), \varepsilon)$ siempre que $x \in B(P, r)$, de donde $B(P, r) \subset f^{-1}(V)$ ya que:

$$x \in B(P, r) \Longrightarrow f(x) \in B(f(P), \varepsilon) \qquad \text{y así,}$$

$$x = f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(B(f(P), \varepsilon)) \subset f^{-1}(V)$$

Luego $f^{-1}(V)$ es un abierto.

"$\Longleftarrow$"

Supongamos que $f^{-1}(V)$ es un abierto en X para todo abierto V en Y.

Fijemos $P \in X$ y sea $\varepsilon > 0$, tomemos $V = B(f(P), \varepsilon)$ entonces V es un abierto, por ser una bola abierta, como $f^{-1}(V)$ es un abierto existe $r > 0$ tal que $B(P, r) \subset f^{-1}(V)$.

De donde $f(x) \in V = B(f(P), \varepsilon)$ siempre que $x \in B(P, r)$. Luego f es continua en P, como $P \in X$ es arbitrario tenemos que f es continua en X.

Nota:

La proposición anterior es una caracterización de funciones continuas muy utilizada.

PROPOSICION 2.2.3

Sean X y Y espacios métricos, $f: X \to Y$ una función y E un cerrado en Y. Entonces f es continua si y solamente si $f^{-1}(E)$ es un cerrado en X.

Demostración

Como E es cerrado, $\complement E$ es un abierto, luego $f^{-1}(\complement E) = \complement(f^{-1}(E))$ es un abierto. De donde $f^{-1}(E)$ es un cerrado.
Por la proposición 2.2.2 f es continua si y solo si $f^{-1}(E)$ es un cerrado.

Nota:

Obsérvese que con las proposiciones 2.2.2 y 2.2.3 lo que se ha probado es que la imagen inversa de abiertos (o cerrados) es un abierto (o cerrado) si f es continua, pero nada se dice con respecto a la imagen directa de abiertos o cerrados. En general, una función continua no necesariamente envía abiertos (o cerrados) a abiertos (o cerrados).

Por ejemplo, la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

es continua en $\mathbb{R}$.

Si $G =]-1,1[$ entonces $f(G) = \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ el cual no es un abierto en $\mathbb{R}$.

Si $H = \{x \in \mathbb{R} / \; x \geq 1\}$ que es un cerrado, entonces $f(H) =]0, 1/2]$ el cual no es un cerrado.

CONTINUIDAD Y COMPACTOS

PROPOSICION 2.2.4

Sean X y Y espacios métricos. Si X es compacto y $f: X \to Y$ una función continua entonces $f(X)$ es compacto.

Demostración

Sea $(O_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia de abiertos que cubren a $f(X)$, es decir que $f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in L} O_\lambda$. Como f es continua $f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in L} O_\lambda)$ es una familia de abiertos que recubren a X, por ser X compacto existe $J \subset L$ y finito tal que $X \subset f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in J} O_\lambda)$ $J \subset L$ y finito.

Además sabemos que $f(f^{-1}(E)) \subset E$ para $E \subset Y$, luego se obtiene que

$$f(X) \subset f(f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in J} O_\lambda)) \subset \bigcup_{\lambda \in J} O_\lambda \qquad J \subset L \text{ y finito}$$

De donde $f(X)$ es compacto.

Nota:

1) Obsérvese que en la prueba anterior hemos utilizado la relación

$f(f^{-1}(E)) \subset E$ que es válida para $E \subset Y$.

2) Si $D \subset X$, entonces $f^{-1}(f(D)) \supset D$. La igualdad no necesariamente es cierta en ambos casos.

CONTINUIDAD Y CONEXOS

PROPOSICION 2.2.5

Sea f una función contínua de un espacio métrico X a un espacio métrico Y. Si $E \subset X$ es conexo entonces $f(E)$ es conexo.

Demostración

Para probarlo supongamos que $f(E)$ es no conexo.

Luego existen A y B abiertos en Y tales que:

i) $A \cap f(E) \neq \phi$, $\qquad B \cap f(E) \neq \phi$

ii) $[A \cap f(E)] \cap [B \cap f(E)] = \phi$

De donde

$$(A \cap B) \cap f(E) = \phi$$

$$f^{-1}(A \cap B) \cap f^{-1}(f(E)) = \phi \qquad \text{aplicando } f^{-1}$$

Tenemos además que $f^{-1}(f(E)) \supset E$ para $E \subset X$.

Luego,

$$[f^{-1}(A \cap B) \cap E] \subset [f^{-1}(A \cap B) \cap f^{-1}(f(E))] = \phi$$

así,

$$f^{-1}(A \cap B) \cap E = \phi \qquad (1)$$

iii) $[A \cap f(E)] \cup [B \cap f(E)] = f(E)$

De donde,

$$(A\cup B) \cap f(E) = f(E)$$

$$f^{-1}(A\cup B) \cap f^{-1}(f(E)) = f^{-1}(f(E)) \qquad \text{aplicando } f^{-1}$$

$$f^{-1}(A\cup B) \cap [f^{-1}(f(E)) \cap E] = f^{-1}(f(E)) \cap E$$

Pero además $f^{-1}(f(E)) \supset E$ para $E \subset X$

Luego,

$$f^{-1}(A\cup B) \cap E = E \qquad (2)$$

Como f es continua, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos en X por la proposición 2.2.2. Probaremos que tales conjuntos forman una disconexión de E.

i) $E\cap f^{-1}(A) \neq \Phi, \qquad E\cap f^{-1}(B) \neq \Phi$

ya que,

$$A\cap f(E) \neq \Phi$$

luego, existe al menos un punto en la intersección, este punto es de la forma $f(x)$ con $x \in E$.

$f(x) \in A\cap f(E) \implies f(x) \in A \wedge f(x) \in f(E)$

$\implies x \in f^{-1}(A) \wedge x \in E \implies x \in E\cap f^{-1}(A)$

Luego $E\cap f^{-1}(A) \neq \Phi$. Similarmente $E\cap f^{-1}(B) \neq \Phi$.

ii) $$\begin{aligned}[E\cap f^{-1}(A)] \cap [E\cap f^{-1}(B)] &= E\cap [f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)]\\ &= E\cap f^{-1}(A\cap B)\\ &= \Phi \qquad \text{por } (1)\end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned}[E\cap f^{-1}(A)] \cup [E\cap f^{-1}(B)] &= E\cap [f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)]\\ &= E\cap f^{-1}(A\cup B)\\ &= E \qquad \text{por } (2)\end{aligned}$$

Luego, por lo anterior, E es no conexo, de donde debemos tener que f(E) es conexo.

CONTINUIDAD DE LA FUNCION INVERSA

PROPOSICION 2.2.6

Sean X y Y espacios métricos, X compacto y $f: X \to Y$ continua e inyectiva. Entonces la función inversa $f^{-1}: Y \to X$ definida por:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad x \in X$$

es una función continua.

Demostración

Para probar que f^{-1} es continua utilizaremos la proposición 2.2.2, para eso bastaría probar que f(V) es un abierto de Y para todo abierto V en X. Sea $V \subset X$ un abierto, $\complement V$ es un cerrado y como X es compacto, por la proposición 1.2.4 $\complement V$ es compacto. Así $f(\complement V)$ es un subconjunto compacto de Y por la proposición 2.2.4 y por la proposición 1.2.3 cerrado en Y.

Como $f(\complement V) = \complement(f(V))$ por ser f inyectiva, se obtiene entonces que f(V) es un abierto. Así f^{-1} es continua.

2.3 CONTINUIDAD UNIFORME

DEFINICION 2.3.1

Sean X y Y espacios métricos y $f: X \to Y$ una función. Diremos que f es uniformemente continua en X, si $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$d_Y(f(P), f(q)) < \varepsilon \qquad \forall\, P, q \in X, \quad \text{para los cuales } d_X(P,q) < \delta$$

OBSERVACIONES

1) Nótese que la continuidad se definió sobre un punto, a diferencia, la continuidad uniforme se define sobre un conjunto.

2) Si una función es uniformemente continua en A, entonces f es continua en A.

PROPOSICION 2.3.2

Sean X y Y espacios métricos, X compacto y $f\colon X \to Y$ una función continua. Entonces f es uniformemente continua.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$, como f es continua, podemos asociar a cada punto $P \in X$ un número positivo $\Phi(P)$ tal que:

$$q \in X, \quad d_X(P, q) < \Phi(P) \quad \text{entonces } d_Y(f(P), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Tomemos $$J(P) = \{q \in X / \ d_X(P, q) < \frac{1}{2}\Phi(P)\}. \tag{2}$$

Como $P \in J(P)$, la familia de los $J(P)$ es un cubrimiento abierto de X y como X es compacto, existen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en X tal que:

$$X \subset J(P_1) \cup J(P_2) \cup \ldots \cup J(P_n) \tag{3}$$

Hagamos,
$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\Phi(P_1), \ \Phi(P_2), \ldots, \Phi(P_n)\} \tag{3'}$$

Entonces $\delta > 0$, ya que el mínimo de un conjunto "finito" de números positivos es positivo.

Ahora tomemos P y q puntos de X, tales que $d_X(P, q) < \delta$. (4)

Por (3) existe un índice m, $1 \leq m \leq n$ tal que $P \in J(P_m)$, entonces,

$$d_X(P, P_m) < \frac{1}{2}\,\phi(P_m) \qquad (5)$$

de donde por (1),

$$d_Y(f(P), f(P_m) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (6)$$

También tenemos que,

$$d_X(q, P_m) \leq d_X(P, q) + d_X(P, P_m)$$

$$< \delta + \frac{1}{2}\,\phi(P_m) \qquad \text{Por (4) y (5)}$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\phi(P_m) + \frac{1}{2}\,\phi(P_m) = \phi(P_m) \qquad \text{Por (3')}$$

es decir que,

$$d_X(q, P_m) < \phi(P_m)$$

de donde por (1),

$$d_Y(f(q), f(P_m)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (7)$$

finalmente,

$$d_Y(f(P), f(q)) \leq d_Y(f(P), f(P_m)) + d_Y(f(q), f(P_m))$$

$$< \varepsilon \qquad \text{por (6) y (7)}$$

Luego f es uniformemente continua.

FUNCIONES MONOTONAS

DEFINICION 2.3.3

Sea $S \subset \mathbb{R}$ y $f: S \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es *creciente* en S si para todo par de puntos $x, y \in S$, $x < y$ entonces $f(x) \leq f(y)$.

Si $x < y$ entonces $f(x) < f(y)$, diremos entonces que f es *estrictamente creciente*.

Similarmente a la definición anterior, puede definirse cuando una función es decreciente o estrictamente decreciente.

Ejemplo

La función lineal $f(x) = mx+b$, $m, b \in \mathbb{R}$, $m > 0$, es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

En efecto:

Supongamos que $x_1 < x_2$ y consideremos,

$$x_1 < x_2$$

$$m\,x_1 < m\,x_2$$

$$m\,x_1 + b < m\,x_2 + b$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Luego f es estrictamente creciente.

Ejemplo

La función $f: [-5, 0[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es estrictamente decreciente en $[-5, 0[$.

En efecto:

Para $x_1 < x_2$, $\quad x_1, x_2 \in [-5, 0[$

$x_1 x_1 > x_1 x_2$ multiplicando por x_1

$x_1 x_2 > x_2 x_2$ multiplicando por x_2

luego,

$$x_1 x_1 > x_2 x_2$$

$$x_1^2 > x_2^2$$

Luego f es estrictamente decreciente.

PROPOSICION 2.3.4

Sea $S \subset \mathbb{R}$ y $f: S \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente en S. Entonces f^{-1} existe y es estrictamente crecienteen $f(S)$.

Demostración

Como f es estrictamente creciente, f es inyectiva en S, luego - existe f^{-1}.

Para probar que f^{-1} es estrictamente creciente tomemos $y_1 < y_2$ puntos de $f(S)$ y $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

Es claro que no podemos tener que $x_1 \geq x_2$ ya que en ese caso

$f(x!) \geq f(x_2)$ por ser f estrictamente creciente.

$$f(f^{-1}(y\ )) \geq f(f^{-1}(y\ ))$$

$$y_1 \geq y_2$$

Luego debemos tener que $x_1 < x_2$. Así f^{-1} es estrictamente creciente.

CAPITULO III

3.1 DERIVADA DE UNA FUNCION REAL

DEFINICION 3.1.1

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y $c \in]a,b[$. Entonces diremos que f es *diferenciable* en c, cuando el límite,

$$(1) \qquad \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existe. Este límite, es llamado la derivada de f en c y es denotado por $f'(c)$.

Notas:

1) Observe que podemos asociar a la función f, una función f' cuyo dominio es el conjunto de puntos x, para los cuales existe el límite (1). f' es llamada la derivada de f.

2) Otras notaciones para $f'(c)$,

$$f'(c) = D\,f(c) = \frac{df}{dx}(c)$$

3) El proceso el cual produce f' es llamado *Diferenciación*.

PROPOSICION 3.1.2

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable para $c \in]a,b[$, entonces f es continua en c.

Demostración

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.(x-c)$$

tomando límite cuando $x \to c$ obtenemos,

$$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.(x-c)$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \lim_{x \to c} (x-c)$$

$$= f'(c).0 = 0$$

De donde,

$$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = 0$$

así,

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Como $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a f(c). tenemos que f es continua en f(c).

Nota:

Obsérvese que la continuidad es una condición necesaria para -- que f sea diferenciable, pero no basta que f sea continua para que sea diferenciable.

En efecto:

La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_o^+$ definida por $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero no es diferenciable en ese punto, ya que

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ y $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$ es decir, que no existe $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

PROPOSICION 3.1.3

Sean $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en un punto $c \in]a,b[$. Entonces $f+g$, $f.g$ y f/g son diferenciables en c y además,

a) $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

b) $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + g'(c)f(c)$

c) $(f/g)'(c) = \dfrac{f'(c)g(c) - g'(c)f(c)}{g^2(c)}$, $\qquad g(c) \neq 0$

<u>Demostración</u>

a) Es inmediato a partir de la definición 3.1.1.

b) Tomemos $h = fg$,

$$\begin{aligned} h(x) - h(c) &= f(x)g(x) - f(c)g(c) \\ &= f(x)g(x) - g(x)f(c) + g(x)f(c) - f(c)g(c) \\ &= g(x)\,[f(x) - f(c)] + f(c)\,[g(x) - g(c)] \end{aligned}$$

$$\frac{h(x) - h(c)}{x - c} = g(x)\left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right] + f(c)\left[\frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right]$$

$$\lim_{x \to c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \left[\lim_{x \to c} g(x) . \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right] + f(c) \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

$$h'(c) = g(c)\,f'(c) + f(c)\,g'(c)$$

c) Tomemos $h = f/g$,

$$h(x) - h(c) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)} \qquad g(c) \neq 0 \neq g(x)$$

$$= \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(x)} + \frac{f(c)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)}$$

$$= \frac{g(c)\,[f(x) - f(c)]}{g(x)g(c)} - \frac{f(c)\,[g(x) - g(c)]}{g(x)g(c)}$$

$$\frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \frac{1}{g(x)\,g(c)}\left[g(c)\left\{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right\} - f(c)\left\{\frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right\}\right]$$

tomando límite cuando $x \to c$ obtenemos,

$$h'(c) = \frac{1}{g^2(c)} [g(c)\,f'(c) - f(c)\,g'(c)]$$

$$= \frac{f'(c)\,g(c) - g'(c)\,f(c)}{g^2(c)}$$

DEFINICION 3.1.4

Sea X un espacio métrico, $f: X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que tiene un *máximo local* (*o mínimo local*) en P, $P \in X$, si existe $\delta > 0$ -- tal que $f(x) \leq f(P)$ (ó $f(x) \geq f(P)$) para todo $x \in X$, que satisface $d(P, x) < \delta$.

Ejemplo

La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_o^+$ definida por $f(x) = |x|$ tiene un mínimo local en $x=0$.

TEOREMA DE ROLLE

PROPOSICION 3.1.5

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f tiene un máximo local en - un punto $c \in]a,b[$ y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Demostración

Escojamos δ como en la definición 3.1.4 tal que,

$$a < c-\delta < c < c+\delta < b$$

Si $c-\delta < x < c$ entonces,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Tomando límite cuando $x \to c$ obtenemos que,

(2) $$f'(c) \geq 0$$

Si $c < x < c+\delta$ entonces,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Tomando límite cuando $x \to c$ obtenemos que,

(3) $$f'(c) \leq 0$$

Por (2) y (3) debemos tener que $f'(c) = 0$.

PROPOSICION 3.1.6 (Teorema de Rolle)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, f diferenciable en $]a,b[$ y además $f(a)= f(b)$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que,

$$f'(c) = 0$$

Demostración

Supongamos que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a,b[$. Como f es una función continua definida sobre un compacto, alcanza su máximo "M" y su mínimo "m" en $[a,b]$. Ningún valor extremo (m ó M) se obtiene en puntos interiores de $[a,b]$, ya que si se obtiene un extremo en un punto interior, debería obtenerse que f' es cero en ese punto, luego los valores m y M se obtienen en los extremos del intervalo $[a,b]$. Como $f(a) = f(b)$ entonces $m = M$ y concluimos que f es constante en $[a,b]$. Esto contradice nuestra suposición de que f' nunca es cero en $[a,b]$. Entonces debe existir $c \in]a,b[$ tal que $f'(c)= 0$.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

PROPOSICION 3.1.7

Sean $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y diferenciables en $]a,b[$, entonces existe $x \in]a,b[$ para el cual,

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x) = [g(b) - g(a)]\, f'(x)$$

Demostración

Hagamos $h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t)$. Así, h es continua en $[a,b]$, ya que f y g son continuas, por la misma razón h es diferenciable en $]a,b[$. Además $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$. - Por el Teorema de Rolle, existe $x \in]a,b[$ tal que $h'(x) = 0$. Como, $h'(t) = [f(b) - f(a)]g'(t) - [g(b) - g(a)]f'(t)$ tendríamos que, $h'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x) = 0$ de donde,

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x)$$

PROPOSICION 3.1.8 (Teorema del Valor Medio)

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable en $]a,b[$, entonces existe $x \in]a,b[$ para el cual,

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x)$$

Demostración

El resultado es inmediato haciendo $g(x) = x$ en la proposición 3.1.7.

REGLA DE L'HOSPITAL

PROPOSICION 3.1.9

Supongamos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables en $]a,b[$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a,b[$, donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Supongamos que,

(1) $$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

si,

(2) $$f(x) \to 0 \quad y \quad g(x) \to 0 \quad \text{cuando } x \to a.$$

Entonces,

(3) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Demostración

Consideremos el caso en que $-\infty \leq A < \infty$. Escojamos un número real q tal que $A < q$. Como $\mathbb{R}$ es denso, existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $A < r < q$. - Por (1) existe $c \in]a,b[$, tal que $a < x < c$ entonces,

(4) $$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$$

Si $a < x < y < c$ entonces por la proposición 3.1.7 existe $t \in]a,b[$ tal que,

(5) $$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r$$

Si se toma la hipótesis (2) y tomamos límite cuando $x \to a$ obtenemos

(6) $$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q, \qquad a < y < c$$

De igual manera, si $-\infty < A \leq \infty$ y escogemos p de tal forma que $p < A$. Por la densidad de $\mathbb{R}$, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $p < s < A$. Por (1) existe $c_1 \in]a,b[$ tal que $a < x < c_1$ entonces

(7) $$s < \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si $a < x < y < c_1$ entonces por la proposición 3.1.7 existe un $t_1 \in]a,b[$ tal que,

(8) $$s < \frac{f'(t_1)}{g'(t_1)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}$$

Si tomamos la hipótesis (2) y tomamos límite cuando $x \to a$ obtenemos,

(9) $$p < s \leq \frac{f(y)}{g(y)} \qquad a < y < c_1$$

Como p y q son números reales arbitrarios y cambiando x por y, de (6) y (9) obtenemos que,

$$A < \frac{f(x)}{g(x)} < A \qquad \text{de donde} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

<u>Nota</u>:

Obsérvese que si en la proposición 3.1.9 cambiamos la hipótesis (2) por,

(2') $\quad g(x) \to \infty \qquad$ cuando $\quad x \to a$

(que es una hipótesis más débil).

La veracidad del teorema se mantiene.

En efecto:

Supongamos la hipótesis (2') y tomemos "y" fijo en (5), podemos escoger un punto $c_1 \in]a,y[$ tal que,

$$g(x) > g(y) \qquad y \qquad g(x) > 0 \qquad \text{si } a < x < c_1.$$

Multiplicando (5) por $\left[\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}\right]$ obtenemos,

$$(10) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} < r - r\,\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad a < x < c_1$$

tomando límite cuando $x \to a$ tendremos que,

$$(11) \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} < r$$

Por (2') existe un punto c_2, $a < c_2 < c_1$ tal que,

$$(12) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} < q \qquad a < x < c_2$$

De manera similar, si $-\infty < A \leq \infty$ y escogemos p de tal forma que $p < A$, podemos encontrar un punto c3 tal que,

$$(13) \qquad p < \frac{f(x)}{g(x)} \qquad a < x < c_3$$

De (13) y (12) se sigue que,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

OBSERVACION

Resultados similares a la proposición 3.1.9 y la nota anterior, obtendríamos si $x \to b$ (o si $g(x) \to -\infty$).

TEOREMA DE TAYLOR

DEFINICION 3.1.10

Si f tiene derivada f' en un intervalo $]a,b[$ y si f' es diferenciable en $]a,b[$, denotaremos la derivada de f' por f" y le llamaremos segunda derivada de f.

Continuando este proceso, podemos obtener funciones,

$$f,\ f^{(1)},\ f^{(2)},\ \ldots\ldots,\ f^{(n)}$$

Cada una de las cuales es la derivada de la anterior. $f^{(n)}$ es llamada la n-esima derivada de f.

PROPOSICION 3.1.11

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n-1)}$ continua en $[a,b]$ y $f^{(n)}(t)$ exista para todo $t \in]a,b[$. Tomemos $\alpha \neq \beta$ puntos de $[a,b]$ y definamos,

$$(1) \qquad P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k$$

Entonces existe un punto x entre α y β tal que,

$$(2) \qquad f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n$$

Demostración

Sea M el número definido por,

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta-\alpha)^n$$

y hagamos,

$$(3) \qquad g(t) = f(t) - P(t) - M(t-\alpha)^n, \qquad a \leq t \leq b$$

Tenemos que demostrar que $n!M = f^{(n)}(x)$ para algún x entre α y β. Sustituyendo (1) en (3) obtenemos,

$$(4) \qquad g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k - M(t-\alpha)^n$$

Derivando n-veces (4) obtenemos,

$$(5) \qquad g^{n}(t) = f^{(n)}(t) - Mn! \qquad a < t < b$$

Por tanto, la demostración estará completa si podemos probar que $g^n(x) = 0$ para algún x entre α y β.

Como $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ tenemos que,

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \ldots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

La elección de M demuestra que $g(\beta) = 0$ de modo que, por el teorema del valor medio, existe x_1 entre α y β tal que $g'(x_1) = 0$. Como $g'(\alpha) = 0$, deducimos del mismo modo que $g''(x_2) = 0$ para x_2 entre α y x_1. Aplicando n-veces este procedimiento, llegamos a la conclusión de que $g^{(n)}(x_n) = 0$ para algún x_n entre α y x_{n-1}, es decir, x_n entre α y β.

Luego $f^{(n)}(x) = n!M$ para algún x entre α y β.

3.2 DIFERENCIACION EN $\mathbb{R}^n$

TRANSFORMACIONES LINEALES

La sección de transformaciones lineales, se considerará como un tópico ya revisado en cursos anteriores de ALGEBRA, por lo cual, solamente se darán definiciones y proposiciones SIN PRUEBA. Si se quisiera profundizar sobre este tema, puede consultarse cualquier libro de "Algebra Lineal" o el libro "Principles of Mathematical Analysis" de Walter Rudin.

DEFINICION 3.2.1

a) Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es un *espacio vectorial* si $(x+y) \in X$ y $cx \in X$. Para todo $x \in X$, $y \in X$ y para todo escalar c.

b) Si $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ y $c_1, \ldots, c_k$ son escalares, el vector

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k$$

se le llama *combinación lineal* de $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ y si E es el conjunto de todas las combinaciones lineales de S, diremos -- que S *genera* a E, o que E es el sistema de generadores de S.

c) Se dice que un conjunto constituído por los vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es *linealmente independiente*, si la relación $c_1x_1 + \ldots + c_kx_k = 0$ implica que $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. En otro caso, se dice que -- $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es *linealmente dependiente*.

Observe que ningún conjunto independiente contiene el vector nulo.

d) Si un espacio vectorial X contiene un conjunto independiente de r -- vectores, pero no contiene un conjunto independiente de r+1 vectores, diremos que X tiene *dimensión* r y escribiremos, dim X = r.

e) Un subconjunto independiente de vectores de un espacio vectorial X -- que *genera* a X, se dice que es una *Base* de X.

El ejemplo más conocido de base es el conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$, siendo e_k el vector en $\mathbb{R}^n$ cuya coordenada k-ésima es 1 y cuyas otras -- coordenadas son todas cero. A la base anterior se le llama base *natural* ó *canónica* de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSICION 3.2.2

Sea r un entero positivo. Si un espacio vectorial X está engendrado por un conjunto r de vectores, dim $X \leq r$.

PROPOSICION 3.2.3

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

PROPOSICION 3.2.4

Supongamos que X es un espacio vectorial y que dim X = n.

a) Un conjunto E de n-vectores en Y *genera* a X si y solo si E es *indepen diente.*

b) X tiene una base y toda base consta de n-vectores.

c) Si $1 \leq r \leq n$ y $\{y_1, \ldots, y_r\}$ es un conjunto independiente en X, este tiene una base que contiene a $\{y_1, \ldots, y_r\}$.

DEFINICION 3.2.5

Se dice que una función A de un espacio vectorial X a un espacio vectorial Y es una *Transformación lineal,* si

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2, \qquad A(cx) = c\,Ax$$

Para todo $x, x_1, x_2 \in X$ y todo escalar c.

Si A es lineal, escribiremos Ax en lugar de A(x).

A las transformaciones lineales de X en X, generalmente se les llama *Operadores Lineales* en X.

Si A es un operador lineal en X tal que:

i) Es inyectivo

ii) Aplica X sobre X

entonces decimos que A es *regular o invertible.* En este caso, podemos definir un operador, también lineal A^{-1} en X, tal que:

$$A^{-1}(Ax) = A(A^{-1}x) = x \qquad \text{para todo } x \in X.$$

PROPOSICION 3.2.6

Un operador lineal A en un espacio vectorial de dimensión finita, es inyectivo si y solo si el campo de variabilidad (Rango de A) de A, es todo X.

DEFINICION 3.2.7

a) Sea L(X,Y) el conjunto de todas las transformaciones lineales de X a Y. En lugar de L(X,X) escribiremos L(X). Si $A_1, A_2 \in L(X,Y)$ y

c_1, c_2 son escalares, definiremos $c_1A_1 + c_2A_2$ por,

$$(c_1A_1 + c_2A_2)(x) = c_1A_1x + c_2A_2x, \qquad x \in X$$

Es claro entonces que $c_1A_1 + c_2A_2 \in L(X, Y)$.

b) Si X, Y, Z son espacios vectoriales, $A \in L(X, Y)$ y $B \in L(Y, Z)$ definiremos su producto BA por,

$$(BA)x = B(Ax), \qquad x \in X$$

entonces $BA \in L(X, Z)$.

c) Para $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, definiremos la *norma de* A ($\|A\|$), como el supremo de todos los números $|Ax|$, donde x tiene como campo de variabilidad todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ con $|x| \leq 1$.

Obsérvese que la desigualdad,

$$|Ax| \leq \|A\||x|$$

se cumple para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además, si λ es tal que $|Ax| \leq \lambda|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $\|A\| < \lambda$.

PROPOSICION 3.2.8

a) Si $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, entonces $\|A\| < \infty$ y A es una función uniformemente continua de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

b) Si $A, B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y c es un escalar, entonces

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \qquad \|cA\| = |c|\,\|A\|.$$

Con la distancia entre A y B, definida por $\|A-B\|$, $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un espacio métrico.

c) Si $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ entonces

$$\|BA\| \leq \|B\|\;\|A\|$$

PROPOSICION 3.2.9

Sea Ω el conjunto de todos los operadores lineales *invertibles* en $\mathbb{R}^n$.

a) Si $A \in \Omega$, $\|A^{-1}\| = 1/\alpha$, $B \in L(\mathbb{R}^n)$ y $\|B-A\| = \beta < \alpha$ entonces $B \in \Omega$.

b) Ω es un subconjunto abierto de $L(\mathbb{R}^n)$ y la función $A \to A^{-1}$ es continua en Ω.

DEFINICION 3.2.10

Supongamos que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_m\}$ son bases de los espacios vectoriales X y Y respectivamente. Cada $A \in L(X, Y)$ determinará un conjunto de números a_{ij} tales que

$$A_{x_j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i, \qquad 1 \leq j \leq n$$

Es conveniente colocar estos números en un arreglo de m filas y n columnas,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A lo cual llamaremos *matriz* A.

DIFERENCIACION

INTRODUCCION

Para llegar a la derivada de una función cuyo dominio es $\mathbb{R}^n$ (o un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$), revisaremos nuevamente el caso cuando $n=1$, veremos como puede interpretarse la derivada en ese caso y llegar de ese modo a una extensión natural para el caso $n > 1$.

Si $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ es una función y si $x \in]a,b[$, entonces $f'(x)$ es usualmente definida por el número real,

$$(1) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dado por cierto que dicho límite existe. Así,

$$(2) \qquad f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h)$$

donde el "residuo" $r(h)$ es pequeño en el sentido que,

$$(3) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Note que (2), expresa la diferencia $f(x+h) - f(x)$, como la suma de una función lineal que lleva h a $f'(x)h$ más un pequeño residuo.

Podemos entonces considerar la derivada de f en x, no como un número real, sino como un operador lineal sobre $\mathbb{R}$ que lleva h a $f'(x)h$.

Consideremos la función $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}^m$. En tal caso, $f'(x)$ se define como un vector $y \in \mathbb{R}^m$ (si existe), para el cual,

$$(4) \qquad \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - y \right| = 0$$

La ecuación anterior podemos reescribirla de la siguiente forma:

$$(5) \qquad f(x+h) - f(x) = hy + r(h)$$

en donde $r(h)/h \to 0$ cuando $h \to 0$. El significado del têrmino del lado derecho de (5) es de nuevo una función lineal de h. Todo vector $y \in \mathbb{R}^m$, induce a una transformación lineal de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^m$, asociando a cada $h \in \mathbb{R}$ al vector $hy \in \mathbb{R}^m$. Esta identificación de $\mathbb{R}^m$ con $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, nos permite considerar $f'(x)$ como un miembro de $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Así, si $f: \left]a,b\right[\to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y si $x \in \left]a,b\right[$, entonces $f'(x)$ es la transformación lineal de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}m$ que satisface,

(6) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0 \text{ (cero vector)}$$

ó, equivalentemente a,

(7) $$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0$$

DEFINICION 3.2.11

Supongamos que E es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f: E \to \mathbb{R}^m$ una función y $x \in E$. Si existe una transformación lineal A de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ tal que,

(8) $$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0$$

entonces decimos que f es diferenciable y escribimos,

$$f'(x) = A.$$

Si f es diferenciable en todo punto $x \in E$, diremos que f es diferenciable en E.

En (8) se sobreentiende que $h \in \mathbb{R}^n$. Si $|h|$ es suficientemente pequeño, entonces $x+h \in E$, ya que E es abierto. Así, $f(x+h)$ está definido, además

$f(x+h) \in \mathbb{R}^m$ y como $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $Ah \in \mathbb{R}^m$. Así,

$$f(x+h) - f(x) - Ah \in \mathbb{R}^m$$

La norma en el numerador de (8) es la de $\mathbb{R}^m$. En el denominador tenemos la $\mathbb{R}^n$-norma de h.

PROPOSICION 3.2.12

Supongamos que E y f son como en la definición 3.2.11, $x \in E$ y se cumple (8) con $A = A_1$ y $A = A_2$. Entonces $A_1 = A_2$.

Demostración

Si $B = A_1 - A_2$ entonces,

$$\begin{aligned} |Bh| &= |A_1h - A_2h| \\ &= |f(x+h) - f(x) - A_2h - (f(x+h) - f(x) - A_1h)| \\ &\leq |f(x+h) - f(x) - A_2h| + |f(x+h) - f(x) - A_1h| \end{aligned}$$

Dividiendo por $|h|$ y tomando límite cuando $h \to 0$ obtenemos,

$$(9) \qquad \frac{|Bh|}{|h|} \to 0 \qquad \text{cuando } h \to 0$$

Para $h \neq 0$ fijo, se deduce que,

$$(10) \qquad \frac{|B(th)|}{|th|} \to 0 \qquad \text{cuando } t \to 0$$

La linealidad de B muestra que (10) es independiente de t. Así, pues $Bh = 0$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$, de donde $A_1 = A2$.

Notas:

1) La ecuación (8) puede ser reescrita de la forma siguiente,

(11) $$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h)$$

en donde el residuo $r(h)$ satisface,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0$$

Podemos interpretar (11) diciendo que para x fijo y h suficientemente pequeño $f(x+h) - f(x)$ es aproximadamente igual a $f'(x)h$, esto es, el valor de una transformación lineal aplicada a h.

2) Supongamos que f y E son como en la definición 3.2.11 y f diferenciable en E. Para cada $x \in E$, $f'(x)$ es una función, esto es, una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Pero f' es también una función, f' aplica E en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

3) Una ojeada a (11) muestra que f es continua en todo punto, en el cual f es diferenciable.

4) La derivada definida por (8) ó (11) es a menudo llamada la *Derivada total de f en x ó Derivada de f en x*, para distinguirla de la derivada parcial, la cual definiremos más adelante.

Ejemplo

Hemos definido la derivada de funciones que van de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, por transformaciones lineales que van de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

¿CUAL ES LA DERIVADA DE TAL TRANSFORMACION LINEAL? La respuesta es muy simple.

Si $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $x \in \mathbb{R}^n$ entonces,

(12) $\quad A'(x) = A$

Note que x aparece en el lado izquierdo de (12), pero no aparece en el lado derecho. Ambos lados de la ecuación (12) son miembros de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, - considerando que Ax en $\mathbb{R}^m$.

La prueba de (12) es fácil ya que,

$$A(x+h) - Ax = Ah$$

Por la linealidad de A. Con $f(x) = Ax$, el numerador de (8) es cero para todo $h \in \mathbb{R}^n$. En (11), $r(h) = 0$. De donde

$$A'(x) = A$$

<u>PROPOSICION 3.2.13</u> (Regla de la Cadena)

Supongamos que E es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f: E \to \mathbb{R}^m$ una función, f diferenciable en $x_o \in E$, g es una función definida sobre un conjunto abierto que contiene a f(E) hacia $\mathbb{R}^k$ y además g diferenciable en -- $f(x_o)$. Entonces la función $F: E \to \mathbb{R}^k$ definida por,

$$F(x) = g(f(x))$$

es diferenciable en x_o y además,

(13) $\quad F'(x_o) = g'(f(x_o))\, f'(x_o)$.

<u>Demostración</u>

Hagamos $y_o = f(x_o)$, $\quad A = f'(x_o)$, $\quad B = g'(y_o)$ y definamos

$$U(h) = f(x_o+h) - f(x_o) - Ah$$

$$V(k) = g(y_o+k) - g(y_o) - Bk$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}^m$, para los cuales $f(x_o+h)$ y $g(y_o+k)$ estan -- bien definidos. Entonces de (8) obtenemos que,

(14) $\quad U(h) = \varepsilon(h)|h|, \qquad V(k) = N(k)|k|$

en donde $\varepsilon(h) \to 0$ cuando $h \to 0$ y $N(k) \to 0$ cuando $k \to 0$.

Dado h, hagamos $k = f(x_o+h) - f(x_o)$ entonces,

$$|k| = |Ah + U(h)| \leq |Ah| + \varepsilon(h)|h|$$

(15) $$|k| \leq \left\{\|A\| + (h)\right\}|h|$$

y,

$$\begin{aligned} F(x_o+h) - F(x_o) - BAh &= g(y_o+k) - g(y_o) - BAh \\ &= g(y_o+k) - g(y_o) - Bk + Bk - BAh \\ &= B(k-Ah) + V(k) \\ &= B\,U(h) + V(k) \end{aligned}$$

Tomando valor absoluto y dividiendo por $|h|$, $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{|F(x_o+h) - F(x_o) - BAh|}{|h|} &= \frac{|B\,U(h) + V(k)|}{|h|} \\ &\leq \|B\| \frac{|U(h)|}{|h|} + \frac{|V(k)|}{|h|} \\ &\leq \|B\|\ \varepsilon(h) + \frac{|k|}{|h|}|N(k)| \qquad \text{Por (14)} \\ &\leq \|B\|\ \varepsilon(h) + \left\{\|A\| + \varepsilon(h)\right\} N(k) \qquad \text{Por (15)} \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \to 0$, tenemos que $\varepsilon(h) \to 0$. También $k \to 0$ por (15), así $N(k) \to 0$. De donde se sigue que,

$$F'(x_o) = BA = g'(f(x_o))\, f'(x_o)$$

DERIVADAS PARCIALES

Consideremos una función F que aplica un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$

en $\mathbb{R}^m$. Tomemos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{u_1, \ldots, u_m\}$ como las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Las componentes de F son las funciones $f_1, \ldots, f_m$ definidas por,

$$(16) \qquad F(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i, \qquad x \in E$$

ó, equivalentemente por $f_i(x) = f(x).u_i \quad 1 \leq i \leq m$.

Para $x \in E$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, definimos

$$(17) \qquad (D_j f_i)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t}$$

con tal que los límites existan. Escribiendo $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ en lugar de $f_i(x)$ vemos que $D_j f_i$ es la derivada de f_i con respecto a x_j, conservando las otras variables fijas. La notación

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

es a menudo utilizada en lugar de $D_j f_i$ y $D_j f_i$ es llamada la *Derivada Parcial* de f_i con respecto a x_j.

Obsérvese que pueden existir todas las derivadas parciales de F en un punto, pero aún así, no existir la derivada en ese punto. Si una función F es diferenciable entonces existen las derivadas parciales.

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida por,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Encuentre $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto (0, 0). Muestre que la derivada de f no existe con respecto al vector $V = (a,b)$, $ab \neq 0$.

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t\, e_1) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t\, e_2) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{0}{t}}{t} = 0$$

Luego las derivadas parciales existen y son iguales a cero.

Ahora evaluemos la derivada de f, la cual de existir debe ser igual a cero.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(a,b)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(ta,\ tb)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{a}{b}}{t}$$

y este límite no existe, es decir no existe la derivada de f en (0,0). -- Luego en la función anterior, aunque las derivadas parciales existen, no existe la derivada de f.

PROPOSICION 3.2.14

Supongamos f aplica un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y f dife-- renciable en un punto $x \in E$. Entonces la derivada parcial $(D_j f_i)(x)$ existe y,

$$f'(x)e_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x)u_i \qquad 1 \leq j \leq n \tag{18}$$

Demostración

Fijemos j. Como f es diferenciable en x,

$$f(x+t\,e_j) - f(x) = f'(x)(t\,e_j) + r(t\,e_j)$$

en donde $|r(t\,e_j)|/t \to 0$ cuando $t \to 0$. Por la linealidad de $f'(x)$ obtenemos,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\,e_j) - f(x)}{t} = f'(x)\,e_j$$

Si representamos f en término de sus componentes como en (16) entonces la ecuación anterior se transforma en,

$$\lim_{t \to 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(x + t\,e_j) - f_i(x)}{t}\,u_i = f'(x)\,e_j$$

Como el límite de cada sumando existe cuanto $t \to 0$, existen cada una de -- las derivadas parciales $(D_j f_i)(x)$. Luego,

$$\sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x)u_i = f'(x)e_j, \qquad 1 \leq j \leq n$$

Algunas consecuencias de la proposición anterior son:

i) Tomemos $[f'(x)]$ como la representación matricial de $f'(x)$ con respecto a las bases canónicas.

ii) $f'(x)\, e_j$ es la j-ésima columna de $[f'(x)]$, (18) muestra que el número $(D_j f_i)(x)$ ocupa el lugar de la i-ésima fila y j-ésima columna de $[f'(x)]$. Así

$$[f'(x)] = \begin{bmatrix} (D_1 f_1)(x) & \dots & (D_n f_1)(x) \\ \vdots & & \vdots \\ (D_1 f_m)(x) & \dots & (D_n f_m)(x) \end{bmatrix}$$

Si $h = \sum h_j e_j$ es cualquier vector en $\mathbb{R}^n$, entonces de (18) obtenemos que,

$$f'(x)h = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (D_j f_i)(x) h_j \right\} u_i$$

Ejemplo

Sea γ una función diferenciable del segmento $]a,b[\subset \mathbb{R}$ en un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$, en otras palabras, γ es una curva diferenciable en E. Sea f una función real diferenciable definida en E. Así, f es una función diferenciable de E en $\mathbb{R}$.

Definamos,

$$g(t) = f(\gamma(t)) \qquad a < t < b$$

La regla de la cadena dice que,

$$g'(t) = f'(\gamma(t))\, \gamma'(t) \qquad a < t < b \tag{19}$$

Como $\gamma'(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ y $f'(\gamma(t)) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, (19) define a $g'(t)$ como un operador lineal en $\mathbb{R}$. Esto concuerda con el hecho de que g es una función de $]a,b[$ en $\mathbb{R}$.

Sin embargo $g'(t)$ puede ser considerado como un número real.

Con respecto a la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, $[\gamma'(t)]$ es la matriz de orden n por 1 (una matríz columna) que contiene a $\gamma_i'(t)$ en la i-ésima fila, siendo $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ las componentes γ. Para cada $x \in E$, $[f'(x)]$ es la matriz de orden 1 por n (una matriz fila) que contiene a $(D_j f)(x)$ en la j-ésima columna. Por lo tanto $[g'(t)]$ es la matriz de orden 1 por 1, cuyo único término es el número real,

$$(20) \qquad g'(t) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)$$

Este es un caso particular de la regla de la cadena que se encuentra frecuentemente, al que podemos expresar también de la siguiente forma:

Podemos asociar a cada $x \in E$, un vector, el cual es llamado "*gradiente*" de f en x, definido por,

$$(\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x) e_i$$

Como,

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t) e_i$$

(20) puede ser reescrito de la sofma siguiente,

$$(21) \qquad g'(t) = (\nabla f)(\gamma(t)).\gamma'(t)$$

que es el producto escalar de los vectores

$$(\nabla f)(\gamma(t)) \quad \text{y} \quad \gamma'(t).$$

Tomemos $x \in E$ fijo y $u \in R^n$ un vector unitario (es decir $\|u\| = 1$) y particularicemos γ tal que

(22) $\gamma(t) = x + tu \qquad -\infty < t < \infty$

Entonces $\gamma'(t) = u$ para todo t. Por lo tanto de (21) se obtiene que

$$g'(0) = (\nabla f)(x).u$$

Por otro lado de (22) obtenemos que,

$$g(t) - g(0) = f(x+tu) - f(x)$$

Dividiendo por t la ecuación anterior y tomando límite cuando $t \to 0$ obtenemos

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} = g'(0)$$

(23) $$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} = (\nabla f)(x).u$$

El límite (23) es llamado la *Derivada Direccional* de f en x, en la dirección del vector u y puede ser denotada por $(D_u f)(x)$.

Si fijamos f y x, pero hacemos varias u, entonces (23) muestra que $(D_u f)(x)$ logra su *máximo* cuando u es obtenido al multiplicar $(\nabla f)(x)$ por un escalar, es decir, cuando los vectores u y $(\nabla f)(x)$ son paralelos.

Si $u = \sum u_i e_i$ entonces (23) muestra que $(D_u f)(x)$ puede expresarse en término de las derivadas parciales de f en x, por la fórmula,

$$(D_u f)(x) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x).u_i$$

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + 3xy^2$,

$u = (1/\ 5,\ \ 2/\ 5)$ y $z = (x,y)$.

Encuentre la derivada direccional de f en z en la dirección de u.

Solución

Como para encontrar $(D_u f)(z)$ es necesario evaluar,

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(z+tu) - f(z)}{t}$, resolveremos por partes el problema.

Encontremos,

$$f(z+tu) = \left(x + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2 + 3\left(x + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)\left(y + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\frac{f(z+tu) - f(z)}{t} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + 12xy + 3y^2) + \frac{t}{5}\left(1 + 12x + 12y + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(z+tu) - f(z)}{t} = \frac{2x + 12xy + 3y^2}{\sqrt{5}}$$

Luego,

$$(D_u f)(z) = \frac{2x + 12xy + 3y^2}{\sqrt{5}} \qquad (*)$$

DEFINICION 3.2.15

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es llamado *Convexo*, si para todo par de puntos $x, y \in A$ tenemos que,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A \qquad 0 < \lambda < 1$$

Ejemplo

La bola $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ es convexa.

(*) *Resolver el problema utilizando la ecuación* (23).

En efecto:

Si y , $z \in B(x, r)$ debemos probar que $\lambda y + (1-\lambda)z \in B(x,r)$ para $0 < \lambda < 1$.

Como,

$$y \in B(x, r) \implies |y-x| < r$$

$$z \in B(x, r) \implies |z-x| < r$$

Consideremos,

$$\begin{aligned} |\lambda y + (1-\lambda)z-x| &= |\lambda y - \lambda x + \lambda x + (1-\lambda)z - x| \\ &= |\lambda(y-x) + (1-\lambda)(z-x)| \\ &\leq \lambda|y-x| + (1-\lambda)|z-x| \\ &< \lambda r + (1-\lambda)r = r \end{aligned}$$

Luego,

$$\lambda y + (1-\lambda)z \in B(x, r)$$

así,

$B(x, r)$ es convexa.

PROPOSICION 3.2.16

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $f: E \to \mathbb{R}^m$ una función, f diferenciable en E y existe un real M tal que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in E$.

Entonces

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a| \qquad \text{para todo } a, b \in E.$$

Demostración

Fijemos $a, b \in E$ y definamos $\gamma(t) = (1-t)a + tb$, para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) \in E$. Como E es convexo, $\gamma(t) \in E$ si $0 \leq t \leq 1$.

Hagamos,

$$g(t) = f(\gamma(t))$$

entonces por la Regla de la Cadena,

$$g'(t) = f'(\gamma(t))\, \gamma'(t)$$

$$= f'(\gamma(t))(b-a)$$

Así,

(24) $$|g'(t)| \leq \|f'((t))\| \, |b-a|$$

$$\leq M|b-a|$$

Por el Teorema del Valor Medio y (24)

$$|g(1) - g(0)| \leq M|b-a|$$

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$$

PROPOSICION 3.2.17

Si las hipótesis de la proposición anterior se mantienen, con $f'(x) = 0$ para todo $x \in E$, entonces f es constante.

Demostración

Ejercicio.

DEFINICION 3.2.18

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en E. Diremos que f es *continuamente diferenciable* en E, si f' es una función --continua.

Más claramente, se necesita que para cada $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, exista un $\delta > 0$, tal que $\|f'(y) - f'(x)\| < \varepsilon$ siempre que $|x-y| < \delta$ para $y \in E$.

Si lo anterior es cierto, decimos que f pertenece al conjunto de funciones continuamente diferenciables, el cual simbolizaremos por C', es decir, $f \in C'(E)$.

PROPOSICION 3.2.19

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: E \to \mathbb{R}^m$ una función. Entonces $f \in C'(E)$ si y solo si las derivadas parciales $D_j f_i$ existen y son continuas en E - para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Demostración

"$\Longrightarrow$"

Asumamos que $f \in C'(E)$. Por (18) tenemos que,

$$(D_j f_i)(x) = (f'(x)e_j).u_i$$

para todo i, j y todo $x \in E$. Entonces

$$(D_j f_i)(y) - (D_j f_i)(x) = [(f'(y) - f'(x))e_j].u_i$$

como $|u_i| = |e_j| = 1$ se sigue que

$$\begin{aligned}|(D_j f_i)(y) - (D_j f_i)(x)| &\leq |f'(y) - f'(x)| \\ &\leq \|f'(y) - f'(x)\|\end{aligned}$$

y como f' es continua, se sigue que $D_j f_i$ es continua.

"$\Longleftarrow$"

Para la conversa es suficiente considerar el caso $m=1$, ya que - toda función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, podemos descomponerla en m funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Fijemos $x \in E$ y sea $\varepsilon > 0$. Como E es abierto existe una bola abierta $B(x, r) \subset E$, también $D_j f$ es continua, luego r puede ser escogido de tal manera que,

(25) $$|(D_j f)(y) - (D_j f)(x)| < \frac{\varepsilon}{n}, \qquad y \in B(x,r), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Supongamos que $h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j$, $|h| < r$. Hagamos $V_o = 0$ y $V_k = h_1 e_1 + \ldots + h_k e_k$, para $1 \leq k \leq n$. Entonces,

$$(26) \qquad f(x+h) - f(x) = \sum_{j=1}^{n} [f(x+V_j) - f(x+V_{j-1})]$$

Como $|V_k| < r$ para $1 \leq k \leq n$ y como $B(x, r)$ es convexa, el segmento con extremos $x+V_{j-1}$ y $x+V_j$ permanece en $B(x, r)$. Como $V_j - V_{j-1} = h_j e_j$ se sigue que $V_j = V_{j-1} + h_j e_j$, el teorema del Valor Medio (Proposición 3.1.18) establece que el j-ésimo sumando en (26) es igual a,

$$h_j (D_j f)(x^*) \qquad \text{con } x^* \in]x+V_{j-1}, \quad x+V_j[$$

Si hacemos $x^* = x + V_{j-1} + \theta_j h_j e_j$, y tendríamos que para algún $\theta_j \in]0,1[$, $x + V_{j-1} + \theta_j h_j e_j$ permanece en el intervalo $]x+V_{j-1}, \quad x+V_j[$, de donde el j-ésimo sumando anterior se transforma en,

$$h_j (D_j f)(x+V_{j-1} + \theta_j h_j e_j)$$

Cuya diferencia con $h_j (D_j f)(x)$ es un número menor que $|h_j|\varepsilon/n$ por (25). Por (26) se sigue que,

$$\left|f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(x)\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |h_j|\varepsilon \leq |h|\varepsilon$$

para todo h, $|h| < r$.

Esto prueba que f es diferenciable en x y que $f'(x)$ es la función lineal que asigna el número $\sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(x)$ al vector $h = \sum h_j e_j$.

La matriz $[f'(x)]$ consiste de la fila $(D_1f)(x), \ldots, (D_nf)(x)$ y como $D_1f, \ldots, D_nf$ son funciones continuas en E, se concluye que $f \in C'(E)$.

PRINCIPIO DE CONTRACCION

En esta sección introduciremos el Teorema del Punto Fijo, el cual es válido en espacios métricos completos. Dicho teorema será utilizado en la prueba del teorema de la función inversa.

DEFINICION 3.2.20

Sea X un espacio métrico, con distancia "d". Si $\psi: X \to X$ es una función y existe un número $c < 1$ tal que,

(27) $\qquad d(\psi(x), \psi(y)) \leq c\, d(x,y)$

para todo $x, y \in X$, entonces diremos que ψ es una *CONTRACCION* de X en X.

Nota:

Observe que toda función contracción es una función continua.

PROPOSICION 3.2.21

Si X es un espacio métrico completo y ψ es una contracción de X en X, entonces existe uno y solo un $x \in X$, tal que $\psi(x) = x$.

Nota:

A este punto x se le llama *punto fijo* de la función ψ, además obsérvese que probar la unicidad es trivial, ya que si $\psi(x) = x$ y $\psi(y) = y$ entonces de (27) resulta que,

$$d(x, y) \leq c\, d(x, y)$$

Lo cual es cierto solamente si $d(x, y) = 0$, de donde $x = y$.

La existencia del punto fijo es la parte esencial de la proposición, la - prueba se basará en un método para localizar el punto fijo.

Demostración

Escojamos arbitrariamente $x_0 \in X$ y definamos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente forma,

$$x_{n+1} = \psi(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Escojamos $c < 1$ tal que (27) se mantiene. Para $n \geq 1$ obtenemos,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\psi(x_n), \psi(x_{n-1})) \leq c\, d(x_n, x_{n-1})$$

Pero,

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(\psi(x_{n-1}), \psi(x_{n-2})) \leq c\, d(x_{n-1}, x_{n-2})$$

Por inducción,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n\, d(x_1, x_0) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Si $n < m$ se sigue que,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d(x_i, x_{i-1}) \\ &\leq (c^n + c^{n+1} + \ldots + c^{m-1})\, d(x_1, x_0) \\ &\leq \left[\frac{d(x_1, x_0)}{1-c}\right] c^n \end{aligned}$$

Así, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, existe $x \in X$ para el cual,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

Además ψ es continua, por ser contracción entonces,

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA

El teorema de la función inversa establece, hablando groseramente, que una función f continuamente diferenciable es invertible (tiene inversa), en un vecindario de un punto x, en el cual la transformación lineal $f'(x)$ es invertible.

TEOREMA 3.2.22

"Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: E \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable, $f'(a)$ es invertible para algún $a \in E$ y $b = f(a)$. Entonces,

a) Existen conjuntos abiertos U y V en $\mathbb{R}^n$ tal que $a \in U$, $b \in V$, f es inyectiva en U y $f(U) = V$;

b) Si g es la inversa de f (la cual existe por (a)) definida en V por

$$g(f(x)) = x, \qquad x \in U$$

entonces $g \in C'(V)$".

Consideraciones

Si escribimos la ecuación $y = f(x)$ en sus componentes, llegamos a la siguiente interpretación del teorema.

El sistema de n-ecuaciones,

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad 1 \leq i \leq n$$

puede ser resuelto para $x_1, \ldots, x_n$ en término de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, si -

restringimos a x, y suficientemente cercanos de a y b, la solución es única y continuamente diferenciable.

Demostración

a) Hagamos $f'(a) = A$ y escojamos λ de tal forma que,

(28) $$2\lambda \|A^{-1}\| = 1$$

Como f' es continua en a, existe una bola abierta $U \subset E$, con centro en a, tal que

(29) $$\|f'(x) - A\| < \lambda, \qquad x \in U$$

Asociemos a cada $y \in \mathbb{R}^n$, una función definida por,

(30) $$\psi(x) = x + A^{-1}(y - f(x)), \qquad x \in E$$

Nótese, que $f(x) = y$ si y sólo si, x es un punto fijo de ψ.

Como,

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= I - A^{-1}f'(x) \\ &= A^{-1}(A - f'(x)) \end{aligned}$$

tendríamos que,

$$\begin{aligned} \|\psi'(x)\| &= \|A^{-1}(A - f'(x))\| \\ &= \|A^{-1}\| \, \|A - f'(x)\| \\ &= \frac{1}{2\lambda} \|A - f'(x)\| && \text{Por (28)} \\ &< \frac{1}{2} && \text{Por (29)} \end{aligned}$$

Entonces por la proposición 3.2.16 se obtiene que,

(31) $$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| < \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \qquad \text{para } x_1, x_2 \in U$$

Así de (31), ψ es una contracción de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ completo, como producto es espacios completos), luego por la proposición 3.2.21, se deduce que ψ tiene un único punto fijo en U, para el cual $f(x) = y$, $x \in U$.

Así, f es inyectiva en U.

Ahora, hagamos $V = f(U)$ y escojamos $y_o \in V$. Entonces $y_o = f(x_o)$ para algún $x_o \in U$. Sea $r > 0$ y $B(x_o, r)$ una bola abierta tan pequeña -- que $\overline{B}(x_o, r) \subset U$. Mostraremos que $y \in V$ siempre que $|y-y_o| < \lambda r$. Esto probará por supuesto, que V es un abierto.

Fijemos y, $|y-y_o| < \lambda r$, con ψ como en (30),

$$|\psi(x_o) - x_o| = |A^{-1}(y-y_o)| < \|A^{-1}\|\lambda r = \frac{r}{2}$$

Si $x \in \overline{B}(x_o, r)$, se sigue que,

$$\begin{aligned} |\psi(x) - x_o| &\leq |\psi(x) - (x_o)| + |\psi(x_o) - x_o| \\ &< \frac{1}{2}|x-x_o| + \frac{r}{2} \qquad \text{por (31)} \\ &\leq r \end{aligned}$$

Por lo que $\psi(x) \in B(x_o, r)$. Nótese además, que (31) se mantiene si $x_1, x_2 \in \overline{B}(x_o, r)$.

Así, ψ es una contracción de $\overline{B}$ en $\overline{B}$. Siendo $\overline{B}$ un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$, $\overline{B}$ es completo. Por la proposición 3.2.21 ψ tiene un único punto fijo $x \in \overline{B}$. Para tal x, $f(x) = y$. Así, $y \in f(\overline{B}) \subset f(U) = V$, con lo cual hemos probado la parte a) del teorema.

b) Escojamos $y \in V$, $y+k \in V$. Entonces existen $x \in U$, $x+h \in U$, tal que $y = f(x)$, $y+k = f(x+h)$. Con ψ como en (30),

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h + A^{-1}(f(x) - f(x+h))$$

$$= h - A^{-1}k$$

Por (31), $|h - A^{-1}k| \leq \frac{1}{2}|h|$. Luego,

$$\frac{1}{2}|h| \leq |A^{-1}k| \leq \frac{3}{2}|h|$$

De donde,

(32) $\quad |h| \leq 2\|A^{-1}\|\,|k| = \lambda^{-1}|k|$

Por (28), (29) y la proposición 3.2.9, $f'(x)$ tiene inversa, sea T la inversa.

Como,

$$\begin{aligned} g(y+k) - g(y) - Tk &= g(f(x+h)) - g(f(x)) - Tk \\ &= h - Tk \\ &= -T\,(f(x+h) - f(x) - f'(x)h) \end{aligned}$$

De (32) se obtiene que,

$$\frac{|g(y+k) - g(y) - Tk|}{|k|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda} \cdot \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|}$$

Cuando $k \to 0$, en (32), $h \to 0$. Así, también tiende a cero el lado derecho de la ecuación anterior. Por lo que, el lado izquierdo también tiende a cero. Hemos probado que $g'(y) = T$. Pero T se escogió como la inversa de $f'(x) = f'(g(y))$.

Así,

(33) $\quad g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}, \qquad y \in V$

Puede notar que g es una función continua de V sobre U, (por ser g diferenciable), $f'(x)$ es una función continua de U hacia el conjunto Ω de todos los elementos invertibles de $L(R^{n})$ y que la inversa es una - función continua de Ω en Ω por la proposición 3.2.9.

Como g es diferenciable y continua entonces

$$g \in C'(V).$$

TEOREMA DE LA FUNCION IMPLICITA

Si f es una función real continuamente diferenciable en el plano cartesiano, entonces la ecuación $f(x, y) = 0$, puede ser resuelta para "y" en término de "x", en un vecindario de cualquier punto (a, b) en el cual $f(a, b) = 0$ y $\partial f/\partial y \neq 0$. Similarmente, puede ser resuelta para x en término de y, en un vecindario de (a, b) si $\partial f/\partial x \neq 0$ en (a, b).

NOTACION

Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, escribiremos (x, y) en lugar del punto (o vector),

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

En lo que sigue, la primera componente en (x, y), ó en símbolos similares, siempre será un vector en $\mathbb{R}^n$ y la segunda componente un vector en $\mathbb{R}^m$. Toda $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ puede dividirse en dos transformaciones lineales A_x y A_y, definidas por,

(34) $\quad A_x h = A(h, 0), \qquad A_y k = A(0, k)$

Para cualquier $h \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}^m$. Entonces $A_x \in L(\mathbb{R}^n)$, $A_y \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ y,

(35) $A(h, k) = A_x h + A_y k$

La versión lineal del teorema de la *función implícita*, resulta ahora más comprensible.

PROPOSICION 3.2.23

Si $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ y si A_x es invertible, entonces a cada $k \in \mathbb{R}^m$, le corresponde un único $h \in \mathbb{R}^n$ tal que, $A(h, k) = 0$.

Este h puede ser encontrado en función de k, por la fórmula,

(36) $h = -(A_x)^{-1} A_y k$

Demostración

De (35) se deduce que $A(h, k) = 0$ si y solamente si,

$$A_x h + A_y k = 0$$

$$A_x h = -A_y k$$

$$h = -(A_x)^{-1} A_y k$$

TEOREMA 3.2.24

"Sea $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ abierto y $f: E \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable, tal que $f(a, b) = 0$ para algún punto $(a, b) \in E$.

Hagamos $A = f'(a, b)$ y asumamos que A_x es invertible.

Entonces existen conjuntos abiertos $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ y $W \subset \mathbb{R}^m$, con $(a, b) \in U$ y $b \in W$, con la propiedad siguiente:

A cada $y \in W$, le corresponde un único x tal que,

(37) $(x, y) \in E$ y $f(x, y) = 0$.

Si x se define por $g(y)$, entonces $g: W \to \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable, $g(b) = a$,

(38) $\quad f(g(y), y) = 0, \qquad\qquad y \in W$

y,

(39) $\quad g'(b) = -(Ax)^{-1} \, Ay$"

CONSIDERACIONES

La función g es "*implícitamente*" definida por (38), de allí el nombre del teorema.

La ecuación $f(x, y) = 0$, puede ser escrita como un sistema de n ecuaciones con n+m variables:

$$
(40) \qquad
\begin{aligned}
&f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\
&\vdots \\
&f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0
\end{aligned}
$$

La hipótesis que Ax es invertible significa que la matriz de orden nxn,

$$
\begin{bmatrix}
D_1f_1 & \cdots & D_nf_1 \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
D_1f_n & \cdots & D_nf_n
\end{bmatrix}
$$

evaluada en (a, b), define un operador lineal invertible en R^n; en otras - palabras, los vectores columna deben ser independientes ó equivalentemente el determinante de la matriz debe ser distinto de cero. Si además, (40) - se mantiene cuando $x = a$ y $y = b$, entonces la conclusión del teorema es -- que (40) puede ser resuelto para $x_1, \ldots, x_n$ en término de $y_1, \ldots, y_m$.

para todo "y" cercano a "b" y que tales soluciones, son funciones continuamente diferenciables.

Demostración

Definamos F por,

(41) $F(x, y) = (f(x, y), y), \qquad (x, y) \in E$

Entonces $F: E \to R^{n+m}$ es una función continuamente diferenciable. Exigimos que $F'(a, b)$ sea un elemento invertible de $L(R^{n+m})$.

Como $f(a, b) = 0$, obtenemos que,

$$f(a+h, \; b+k) = f'(a,b)(h,k) + f(a,b) + r(h,k)$$
$$= A(h,k) + r(h,k)$$

en donde $r(h, k)$ es el residuo que resulta de la definición de $f'(a, b)$.

Como,

$$F(a+h, \; b+k) - F(a, b) = (f(a+h), b+k), k)$$
$$= (A(h,k), k) + (r(h,k), 0)$$

se sigue que $F'(a, b)$ es el operador lineal en R^{n+m}, que lleva (h, k) a $(A(h,k), k)$. Si la imagen de este vector es cero, entonces $A(h,k) = 0$ y $k = 0$, así $A(h,0)= 0$ y de la proposición 3.2.23 se sigue que $h = 0$. Se deduce entonces que $F'(a, b)$ es inyectiva, de donde se obtiene que también tiene inversa.

El teorema de la función inversa puede ser aplicada a F. Luego, existen conjuntos abiertos U y V en R^{n+m}, con $(a,b) \in U$, $(0, b) \in V$, tal que F es inyectiva de U en V.

Sea W el conjunto de todos los $y \in R^m$ tal que $(0, y) \in V$. Note que $b \in W$.

Es claro que W es abierto, por ser V abierto.

Si $y \in W$, entonces $(0, y) = F(x, y)$ para algún $(x, y) \in U$. Por (41), $f(x, y) = 0$ para dicho x.

Supongamos, que para el mismo y, existe x' tal que $(x', y) \in U$ y $f(x', y) = 0$.

Entonces,

$$F(x', y) = (f(x', y), y) = (f(x, y), y) = F(x, y)$$

Como F es inyectiva en U se sigue que $x' = x$. Lo cual prueba la primera parte del teorema.

Para la segunda parte, definamos $g(y)$, para $y \in W$, de modo que $(g(y), y) \in U$ y (38) se mantenga. Entonces,

(42) $\quad F(g(y), y) = (0, y), \qquad y \in W$

Si G es la función de V en U, inversa de F, entonces G es continuamente diferenciable, por el teorema de la función inversa y (42)

(43) $\quad (g(y), y) = G(0, y), \qquad y \in W$

De donde g es continuamente diferenciable, ya que G lo es.

Finalmente, encontremos $g'(b)$, hagamos $(g(y), y) = \Phi(y)$. Entonces,

(44) $\quad \Phi(y)k = (g'(y)k, k), \qquad y \in W, \quad k \in R^m$

por (38), $f(\Phi(y)) = 0$ en W. Entonces por la regla de la cadena obtenemos que,

$$f'(\Phi(y))\,\Phi'(y) = 0.$$

Cuando $y = b$, entonces $\Phi(y) = (g(b), b) = (a, b)$ y $f'(\Phi(y)) = f'(a, b) = A$.

Así,

(45) $\quad A\Phi'(b) = 0$

Luego,

$$\begin{aligned} Axg'(b)k + Ayk &= A(g'(b)k,\ k) && \text{por } (35) \\ &= A\varphi'(b)k && \text{por } (44) \\ &= 0 && \text{por } (45) \end{aligned}$$

Para todo $k \in \mathbb{R}^m$, luego se satisface para $k = I \in \mathbb{R}^m$. Así,

(46) $\quad Ax\ g'(b) + Ay = 0$

De donde por ser Ax invertible tenemos que,

$$g'(b) = -(Ax)^{-1}Ay$$

lo cual completa la prueba.

<u>Ejemplo</u>

Tomemos $n = 2$, $m = 3$ y consideremos la función $F = (f_1, f_2)$ de $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^2$ definida por,

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2e^{x_1} + x_2y_1 - 4y_2 + 3$$

$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3$$

Si $a = (0, 1)$ y $b = (3, 2, 7)$ entonces $F(a, b) = 0$.

Con respecto a las bases canónicas, la matriz de la transformación $A = F'(a,b)$ es

$$A = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \partial f_1/\partial y_1 & \partial f_1/\partial y_2 & \partial f_1/\partial y_3 \\ \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \partial f_2/\partial y_1 & \partial f_2/\partial y_2 & \partial f_2/\partial y_3 \end{bmatrix}_{(a,b)}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{x_1} & y_1 & x_2 & -4 & 0 \\ \\ -x_2 \operatorname{sen} x - 6x_1 & \cos x_1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(a,b)}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Ay = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El $\det(Ax) = 20 \neq 0$, luego Ax es invertible. Como Ax es invertible, el Teorema de la función implícita asegura la existencia de una función g continuamente diferenciable, definida en un vecindario de $(3, 2, 7)$ tal que $g(3, 2, 7) = (0, 1)$ y $F(g(y), y) = 0$.

Utilizaremos la ecuación (29) para evaluar $g'(3, 2, 7)$.

$$[Ax]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Por (39),

$$g'(3, 2, 7) = -[Ax]^{-1}\, Ay$$

$$= -\frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

En término de las derivadas parciales, la conclusión es que,

$$\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y_2} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y_3} = -\frac{3}{20}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y_1} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y_2} = \frac{6}{5}, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y_3} = \frac{1}{10}$$

en el punto (3, 2, 7).

CAPITULO IV

4.1 SUMAS E INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

En este capítulo definiremos el integral de Riemann-Stieltjes, - de funciones *acotadas* sobre intervalos compactos de $\mathbb{R}$. El tipo de integración que consideraremos, es más general que el considerado en cursos básicos de Cálculo. Supondremos que las funciones que definamos, *serán acotadas,* hipótesis que no volveremos a mencionar.

DEFINICION 4.1.1

Sea $J = [a,b]$ un intervalo finito. Un conjunto de puntos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, que satisfacen las desigualdades $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ se llama una *Partición* de J. El intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es el intervalo k-ésimo de P.

DEFINICION DE NORMA

Llamaremos "*norma*" de P al número

$$\|P\| = \max \{x_k - x_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\}$$

DEFINICION 4.1.2

Sea $P = \{x_0, x1, \ldots, x_n\}$ y $P' = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$, dos particiones de J.

Diremos que P *es más fina* que P' (o que P *es un afinamiento* de P') si $P' \subset P$.

DEFINICION 4.1.3

Si P es una partición de J, entonces la suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a α, es el número real $S(P, f, \alpha)$ definido por,

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

en donde $x_k \leq t_k \leq x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Notas:

1) f y α, son funciones definidas en el intervalo J y además son acotadas en dicho intervalo.
2) Si $\alpha(x) = x$, $S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[x_k - x_{k-1}]$

   que es la ya conocida suma de Riemann.

DEFINICION 4.1.4

Diremos que f es *Riemann-Stieltjes integrable* con respecto a α en J, si existe un número real A que posee la propiedad siguiente: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ P_\varepsilon$, P_ε partición de J, tal que si P es un afinamiento de P_ε ($P_\varepsilon \subset P$) entonces tenemos que,

$$|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$$

OBSERVACIONES

1) Cuandoexiste A es único y es denotado por,

$$A = \int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

   Entonces decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α en J.

2) A la función f la llamaremos *integrando* a la función α *integrador*.
3) Algunas veces para indicar que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α, escribiremos $f \in R(\alpha)$.

<u>Ejemplo</u>

Si α es constante en $[a,b]$, entonces $f \in R(\alpha)$ y el valor del integral es cero.

En efecto:

$$A = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[S-S] = 0$$

<u>Ejemplo</u>

Si $f(x) = x$ y $\alpha(x) = x^2$. Encuentre $\int_0^1 f\,d\alpha$.

<u>Solución</u>

$$\int_0^1 x\,d(x^2) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - (x_{k-1})]$$

Luego,

$$\alpha(x_k) = \alpha\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2}$$

$$\alpha(x_{k-1}) = \alpha\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{k^2 - 2k + 1}{n^2}$$

$$\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) = \frac{2k - 1}{h^2}$$

Como $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$, podemos tomar $t_k = \frac{k}{n}$, así,

$$f(t_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}$$

Luego,

$$\int_0^1 x\,d(x^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(\frac{2k-1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} (2k^2 - k)$$

$$= \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6n^3}$$

$$= \frac{2}{3}, \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

P o lo que,

$$\int_0^1 x\, d(x^2) = \frac{2}{3}$$

CRITERIO DE CAUCHY PARA INTEGRABILIDAD

PROPOSICION 4.1.5

La función f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α en $J = [a,b]$, si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición Q_ε de J, tal que si P y Q son afinamientos de Q_ε y si $S(P, f, \alpha)$, $S(Q, f, \alpha)$ son las correspondientes sumas de Riemann-Stieltjes entonces,

$$|S(P, f, \alpha) - S(Q, f, \alpha)| < \varepsilon$$

Demostración

"$\Longrightarrow$"

Si $f \in R(\alpha)$, existe una partición P_ε tal que si P y Q son afinamientos de P_ε, cualquier suma de Riemann-Stieltjes satisface,

$$|S(P, f, \alpha) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |S(Q, f, \alpha) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Así,

$$|S(P, f, \alpha) - S(Q, f, \alpha)| \leq |S(P, f, \alpha) - A| + |S(Q, f, \alpha) - A|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

"<=="

Para la otra implicación, supongamos que el criterio se satisface y mostremos que $f \in R(\alpha)$.

Sea Q1 una partición de J, tal que si P y Q son afinamientos de Q_1, entonces,

$$|S(P, f, \alpha) - S(Q, f, \alpha)| < 1, \qquad \text{para } \varepsilon_1 = 1$$

De igual forma, escojamos Q_2 un afinamiento de Q_1, tal que si P y Q son afinamientos de Q_2, entonces,

$$|S(P, f, \alpha) - S(Q, f, \alpha)| < \frac{1}{2}, \qquad \text{para } \varepsilon_2 = 1/2$$

Por inducción, podemos escoger Q_n un afinamiento de Q_{n-1} tal que si P y Q son afinamientos de Q_n, entonces,

$$|S(P, f, \alpha) - S(Q, f, \alpha)| < \frac{1}{n}, \qquad \text{para } \varepsilon_n = 1/n$$

Consideremos la sucesión $(S(Q_n, f, \alpha))_{n\in\mathbb{N}}$, así obtenida.

Como Q_n es un afinamiento de Q_m cuando $n \geq m$, se tendrá que,

$$|S(Q_n, f, \alpha) - S(Q_m, f, \alpha)| < \frac{1}{n}, \qquad \text{para } \varepsilon_n = 1/n$$

De donde la sucesión $(S(Q_n, f, \alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, como es una sucesión de números reales, por la proposición 1.2.13, la sucesión converge a un número real A.

Entonces, si $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que $2/N < \varepsilon$ y,

$$|S(Q_N, f, \alpha) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Así tendríamos que,

$$|S(P, f, \alpha) - A| \leq |S(P, f, \alpha) - S(Q_N, f, \alpha)| + |S(Q_N, f, \alpha) - A|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Para cualquier afinamiento P de Q_N.

PROPIEDADES DEL INTEGRAL R-S

PROPOSICION 4.1.6

Si f, g $\in R(\alpha)$ en J, entonces $(c_1 f + c_2 g) \in R(\alpha)$ y tenemos que,

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) d\alpha = c_1 \int_a^b f\, d\alpha + c_2 \int_a^b g\, d\alpha, \qquad c_1 \neq 0 \neq c_2$$

Demostración

Sea $h = c_1 f + c_2 g$ y P una partición de J. Calculemos la suma de Riemann-Stieltjes para h en J,

$$S(P, h, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} h(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

$$= c_1 \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] + c_2 \sum_{k=1}^{n} g(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

$$= c_1\, S(P, f, \alpha) + c_2\, S(P, g, \alpha)$$

Sea P'_ε una partición de J tal que P es más fina que P'_ε y

$$\left|S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2|c_1|}.$$

Sea P''_ε partición de J tal que P es un afinamiento de P''_ε y

$$\left|S(P, f, \alpha) - \int_a^b g\, d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2|c_2|}.$$

Sea $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ entonces P es más fina que P_ε y se cumple que,

$$\left|S(P,f,\alpha)-c_1\int_a^b f\, d\alpha - c_2\int_a^b g\, d\alpha\right| \leq \left|c_1 S(P,f,\alpha)-c_1\int_a^b f\, d\alpha\right| + \left|c_2 S(P,g,\alpha)-c_2\int_a^b g\, d\alpha\right|$$

$$\leq |c_1|\left|S(P,f,\alpha)-\int_a^b f\, d\alpha\right| + |c_2|\left|S(P,g,\alpha)-\int_a^b g\, d\alpha\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

PROPOSICION 4.1.7

Si $f \in R(\alpha_1)$ y $f \in R(\alpha_2)$ entonces $f \in R(\alpha)$, para $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ y tenemos que,

$$\int_a^b f\, d\alpha = c_1\int_a^b f\, d\alpha_1 + c_2\int_a^b f\, d\alpha_2$$

Demostración

Similar a la anterior.

PROPOSICION 4.1.8

Supongamos $c \in\,]a,b[$. Si dos de las tres integrales existen en (1), entonces existe también la tercera y tenemos,

$$(1) \qquad \int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha$$

Demostración

Sea P una partición del intervalo $[a,b]$ tal que $c \in P$. Definamos,

$$P' = P \cap [a,c] \qquad y \qquad P'' = P \cap [c,b]$$

particiones de los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente. La suma de Riemann-Stieljes para dichas particiones están relacionadas por la ecuación,

$$S(P, f, \alpha) = S(P', f, \alpha) + S(P'', f, \alpha)$$

Supongamos $\int_a^c f\, d\alpha$ y $\int_c^b f\, d\alpha$ existen, entonces para $\varepsilon > 0$;

i) Existe P'_ε tal que, $\left|S(P_1, f, \alpha) - \int_a^c f\, d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $P'_\varepsilon \subset P_1$

ii) Existe P''_ε tal que, $\left|S(P_2, f, \alpha) - \int_c^b f\, d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $P''_\varepsilon \subset P_2$

Consideremos la partición de $[a,b]$. $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P'_\varepsilon$. Si P es más fina que P_ε, entonces se cumple que,

$$\left|S(P,f,\alpha) - \int_a^c f\, d\alpha - \int_c^b f\, d\alpha\right| = \left|[S(P',f,\alpha) - \int_a^c f\, d\alpha] + [S(P'',f,\alpha) - \int_c^b f\, d\alpha]\right|$$

$$\leq \left|S(P',f,\alpha) - \int_a^c f\, d\alpha\right| + \left|S(P'',f,\alpha) - \int_c^b f\, d\alpha\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Luego, $\int_a^b f\, d\alpha$ existe y,

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha.$$

DEFINICION 4.1.9

Si $a < b$, definimos $\int_b^a f\, d\alpha = -\int_a^b f\, d\alpha$ siempre que $\int_a^b f\, d\alpha$ exista. Además definimos $\int_a^a f\, d\alpha = 0$.

La ecuación (1) de la proposición anterior se transforma en,

$$\int_a^b f\, d\alpha + \int_b^c f\, d\alpha + \int_c^a f\, d\alpha = 0.$$

INTEGRACION POR PARTES

PROPOSICION 4.1.10

Si $f \in R(\alpha)$ en J, entonces $\alpha \in R(f)$ en J y tenemos,

$$\int_a^b f\, d\alpha + \int_a^b \alpha\, df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$, como $f \in R(\alpha)$ entonces existe una partición P_ε de J, tal que para cualquier partición P' más fina que P_ε tenemos,

$$\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \varepsilon$$

Consideremos la suma Riemann-Stieltjes para la integral $\int_a^b \alpha\, df$,

$$S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)[f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)f(x_{k-1})$$

en donde P, es más fina que P_ε.

Hagamos A = $f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$, a dicho número también lo podemos expresar como la suma,

$$A = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\alpha(x_{k-1})$$

$$A-S(P,\alpha,f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\alpha(x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)f(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)f(x_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)[\alpha(x_k)-\alpha(t_k)] + \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})[\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

Combinando las dos sumas del miembro de la derecha podemos obtener la suma de Riemann-Stieltjes, $S(P'',f,\alpha)$, en donde P" es la partición de J obtenida al tomar juntos los puntos x_k y t_k.

Así, P" es más fina que P y por consiguiente más fina que P_ε. Luego,

$$\left|S(P'',f,\alpha) - \int_a^b f\, d\alpha\right| < \varepsilon$$

Es decir,

$$\left|A - S(P,\alpha,f) - \int_a^b f\, d\alpha\right| < \varepsilon$$

así,

$$\int_a^b \alpha\, df = A - \int_a^b f\, d\alpha$$

<u>Ejemplo</u>

Evaluar el integral $\int_0^1 x\, d(x^2)$ utilizando la proposición anterior.

Solución

$$\int_0^1 x\, d(x^2) = 1 - \int_0^1 x^2\, dx = 1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

MODIFICACION DEL INTEGRAL (RS → R)

PROPOSICION 4.1.11

Consideremos a $f \in R(\alpha)$ en J y supongamos que α tiene derivada α' continua en J. En tal caso, la integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,\alpha'(x)dx$ existe y tenemos,

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)dx$$

Demostración

Hagamos $g(x) = f(x)\alpha'(x)$, $x \in J$ y consideremos la suma de Riemann,

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)[x_k - x_{k-1}]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\alpha'(t_k)[x_k - x_{k-1}], \quad P \text{ partición de } J.$$

Escribamos la suma de Riemann-Stieltjes, utilizando la misma partición P, y haciendo la misma elección de t_k.

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función α obtenemos,

$$\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) = \alpha'(u_k)[x_k - x_{k-1}], \qquad x_{k-1} \le u_k \le x_k$$

y por lo tanto,

$$S(P,f,\alpha) - S(P,g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha'(u_k) - \alpha'(t_k)][x_k - x_{k-1}]$$

Como f es acotada $\exists$ $M \in \mathbb{R}^+$ tal que, $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in J$.

La continuidad de α' en J, (J compacto) implica la continuidad uniforme en J, es decir que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $\delta > 0$, tal que,

$$0 < |x-y| < \delta \implies |\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$$

Si tomamos una partición P'_ε de norma $\|P'_\varepsilon\| < \delta$, entonces para cualquier partición P más fina que P'_ε tendremos,

$$|\alpha'(u_k) - \alpha'(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$$

Para tal partición P tenemos entonces que,

$$|S(P,f,\alpha) - S(P,g)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por otra parte, sabemos que $f \in R(\alpha)$ en J, luego, existe una partición P''_ε de J tal que, si P es más fina que P''_ε tendremos,

$$\left|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\, d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ y P más fina que P_ε, tendremos entonces que,

$$\left|S(P,g) - \int_a^b f\, d\alpha\right| \leq |S(P,g)-S(P,f,\alpha)| + \left|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\, d\alpha\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

<u>Ejemplo</u>

Sea $f(x) = 2x-1$ y $\alpha(x) = \frac{1}{2}x$, definidas en $J = [1,4]$.

Encuentre $\int_1^4 f(x)\, d\alpha(x)$.

<u>Solución</u>

Por la proposición 4.1.11,

$$\int_1^4 (2x-1)\,d\left(\frac{1}{2}x\right) = \int_1^4 (2x-1)\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[x^2 - x\Big]_1^4 = 6$$

4.2 EXISTENCIA DEL INTEGRAL

<u>DEFINICION 4.2.1</u>

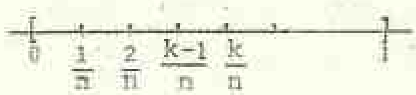
Sea f una función definida en J y P una partición arbitraria de J. Diremos que f es de *variación acotada* en J, si existe un número $M > 0$ tal que,

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| \leq M$$

<u>Ejemplo</u>

La función definida por $f(x) = x^2$ en $[0,1]$ es de variación acota da.

En efecto:



$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| &= \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} |2k-1| \\
&\leq \frac{1}{n^2}\left(n(n+1) + n\right) \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

PROPOSICION 4.2.2

Si f es monótona en J, entonces f es de variación acotada en J.

Demostración

Supongamos f es monótona creciente en J, entonces $f(x_k) - f(x_{k-1}) \geq 0$. De donde tenemos que,

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k)-f(x_{k-1}) \right| = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k)-f(x_{k-1})] = f(b)-f(a) = M$$

para cualquier partición P de J.

CRITERIO DE RIEMANN PARA INTEGRABILIDAD

PROPOSICION 4.2.3

Sea $J = [a,b]$ y α monótona creciente en J. Una función $f: J \to \mathbb{R}$ es integrable con respecto a α en J si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de J tal que, si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es un afinamiento de P_ε, entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] < \varepsilon$$

en donde $M_j = \text{Sup}\{f(x)/ \ x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ y

$$m_j = \inf\{f(x)/ \ x \in [x_{j-1}, x_j]\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Demostración

" $\Longrightarrow$"

Sea $\varepsilon_1 > 0$, $f \in R(\alpha)$. Sea además P_{ε_1}, una partición de J tal que si P es más fina que P_{ε_1}, entonces,

$$\left|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \varepsilon_1$$

para cualquier suma de Riemann-Stieltjes correspondiente a P. Escojamos y_j y z_j en $[x_{j-1}, x_j]$ tal que,

$$M_j - \varepsilon_1 < f(y_j), \qquad f(z_j) < m_j + \varepsilon_1$$

De donde se obtiene que,

$$M_j - m_j < f(y_j) - f(z_j) + 2\varepsilon_1$$

y entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \leq \sum_{j=1}^{n} f(y_j)[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})]$$

$$- \sum_{j=1}^{n} f(z_j)[\alpha(x_j)-\alpha(x_{j-1})] + 2\varepsilon_1[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

Puede notarse que el lado derecho de la inecuación tiene dos sumas de Riemann-Stieltjes correspondientes a P, las cuales no pueden diferir en más de $2\varepsilon_1$.

Si hacemos $\varepsilon = 2\varepsilon_1(1+\alpha(b)-\alpha(a))$ tendremos que,

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)[\alpha(x_j)-\alpha(x_{j-1})] < \varepsilon$$

"<===="

Sea $\varepsilon > 0$, P_ε una partición de J, tal que para cualquier partición más fina que P_ε tengamos que,

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] < \varepsilon$$

Sea $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ un afinamiento de P, podemos entonces estimar la diferencia $S(P,f,\alpha) - S(Q,f,\alpha)$. Como todo punto de P es punto de Q, podemos expresar las sumas de la forma,

$$S(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{m} f(u_k)[\alpha(y_k) - \alpha(y_{k-1})]$$

$$S(Q,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{m} f(v_k)[\alpha(y_k) - \alpha(y_{k-1})]$$

Sin embargo, para escribir $S(P,f,\alpha)$ en términos de Q, se deben permitir repeticiones de puntos u_k y no exigir que u_k pertenezca al intervalo $[y_{k-1}, y_k]$.

Más aún, u_k y v_k si deben pertenecer a algún intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ y en ese caso,

$$|f(u_k) - f(v_k)| \leq M_j - m_j.$$ Multiplicando por $\alpha(y_k)-\alpha(y_{k-1}) \geq 0$

y sumando obtenemos,

$$|S(P,f,\alpha) - S(Q,f,\alpha)| \leq \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] < \varepsilon.$$

Finalmente, sean P y P' afinamientos de P_ε y sea Q un afinamiento de P y P'. Como el argumento anterior se aplica a P y P', deducimos que cualquier suma $S(P,f,\alpha)$ y $S(P',f,\alpha)$ pueden diferir a lo sumo 2ε.

Así, por la proposición 4.1.5, $f \in R(\alpha)$.

INTEGRABILIDAD DE FUNCIONES CONTINUAS

PROPOSICION 4.2.4

Si f es continua y α es monótona creciente en J, entonces

$f \in R(\alpha)$ en J.

Demostración

Como f es continua sobre un compacto, f es uniformemente conti - nua en J, para $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $x, y \in J$ y $0 < |x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Sea P_ε una partición de J tal que $\operatorname{Sup}\{z_k - z_{k-1}\} < \delta$. Si P es un afinamiento de P_ε, entonces también $\operatorname{Sup}\{x_j - x_{j-1}\} < \delta$ y así, $M_j - m_j < \varepsilon$, de donde se sigue que,

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \leq \varepsilon\, [\alpha(b) - \alpha(a)]$$

como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, por la proposición 4.2.3 $f \in R(\alpha)$.

PROPOSICION 4.2.5

Sea α monótona creciente en $J = [a,b]$.

a) Si $f\colon J \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ es integrable con respecto a α en J.

b) Si f y g son integrables, entonces fg es integrable con respecto a α en J.

Demostración

Sean M_j y m_j como en la proposición 4.2.3, observe que,

$$M_j - m_j = \operatorname{Sup}\{f(x) - f(y) / \quad x, y \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

a) Para probar esta parte nótese que,

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x)-f(y)|$$

y por la proposición 4.2.3 $|f|$ es integrable, cuando f lo es.

b) Para esta parte observemos que si $|f(x)| \leq k \quad \forall\, x \in J$, entonces,

$$|f^2(x) - f^2(y)| \leq 2k|f(x) - f(y)|$$

Por la proposición 4.2.3, se sigue que f^2 es integrable, cuando f lo es.

Para probar lo que deseamos, bastaría observar que,

$$fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

de donde $fg \in R(\alpha)$.

PROPOSICION 4.2.6

Sea α monótona creciente en J y $f \in R(\alpha)$. Entonces,

$$\left|\int_a^b f\, d\alpha\right| \leq \int_a^b |f|\, d\alpha$$

Demostración

Como $f \in R(\alpha)$ se sigue de la proposición 4.2.5 a), $|f| \in R(\alpha)$. Si P es una partición de J y $\{z_j\}$ es un conjunto de puntos intermedios, - entonces para $j = 1,2, \ldots, n$ obtenemos,

$$-|f(z_j)| \leq f(z_j) \leq |f(z_j)|$$

Multiplicando por $\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1}) \geq 0$ y sumando obtenemos,

$$-S(P, |f|, \alpha) \leq S(P,f,\alpha) \leq S(P, |f|, \alpha)$$

De donde,

$$|S(P,f,\alpha)| \leq S(P, |f|, \alpha)$$

y así,

$$\left|\int_a^b f\, d\alpha\right| \leq \int_a^b |f|\, d\alpha$$

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

PROPOSICION 4.2.7

Si α es monótona creciente en J y f continua de J en $\mathbb{R}$, entonces existe un número c $\in$ J tal que,

$$\int_a^b f\, d\alpha = f(c)\int_a^b d\alpha = f(c)[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Demostración

Si $m = \inf\{f(x)/\ x \in J\}$ y $M = \operatorname{Sup}\{f(x)/\ x \in J\}$, se tiene que,

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq \int_a^b f\, d\alpha \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

De donde,

$$m \leq \frac{\int_a^b f\, d\alpha}{\alpha(b) - \alpha(a)} \leq M$$

Por el "Teorema del Valor Intermedio de Bolzano" (apéndice), existe c $\in$ J tal que,

$$f(c) = \frac{\int_a^b f\, d\alpha}{\alpha(b) - \alpha(a)}$$

PROPOSICION 4.2.8

Supongamos que f es continua en J, α creciente y derivable en un punto c $\in$ J. Entonces la función F, definida para x en J por,

$$F(X) = \int_a^x f\, d\alpha$$

tiene derivada en c y $F'(c) = f(c)\alpha'(c)$.

Demostración

Si $h > 0$ es tal que $c+h$ pertenece a J, entonces por la proposición 4.1.8 y la proposición 4.2.7 tenemos,

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f\, d\alpha - \int_a^{c} f\, d\alpha = \int_c^{c+h} f\, d\alpha$$

$$F(c+h) - F(c) = f(c_1)[\alpha(c+h) - \alpha(c)]$$

Para $c \leq c1 \leq c+h$. Dividiendo por h y tomando límite cuando $h \to 0^+$ obtenemos,

$$F'(c) = f(c)\alpha'(c)$$

Un resultado similar se obtiene para $h < 0$, luego,

$$F'(c) = f(c)\alpha'(c)$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

PRUPOSICION 4.2.9

Sea f una función continua en $J = [a,b]$. Una función F en J satisface,

(2) $$F(x) - F(a) = \int_a^x f, \qquad \text{para } x \in J.$$

Si y solo si,

$$F' = f \qquad \text{en } J.$$

Demostración

"$\Longrightarrow$"

Supongamos que (2) se mantiene y $c \in J$, por la proposición anterior, $F'(c) = F(c)$.

"$\Longleftarrow$"

Sea F_a definida para $x \in J$ por,

$$F_a(x) = \int_a^x f$$

La proposición anterior garantiza que $F_a' = f$ en J. Si F es tal que $F' = f$, entonces existe una constante c tal que,

$$F(x) = F_a(x) + c, \qquad x \in J.$$

Como $F_a(a) = 0$, entonces $c = F(a)$. De donde,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f$$

<u>PROPOSICION 4.2.10</u>

Si f es creciente y α continua en $J = [a,b]$, entonces existe un punto $c \in J$ tal que,

$$\int_a^b f\, d\alpha = f(a) \int_a^c d\alpha + f(b) \int_c^b d\alpha$$

<u>Demostración</u>

Por la proposición 4.1.10 tenemos que,

$$\int_a^b f\, d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha\, df$$

$$= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \alpha(c)[f(b)-f(a)] \quad \text{proposición 4.2.7}$$

$$= f(a)[\alpha(c) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(c)]$$

$$= f(a) \int_a^c d\alpha + f(b) \int_c^b d\alpha$$

TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

PROPOSICION 4.2.11

Sea ψ una función definida del intervalo $[c,d]$ a $\mathbb{R}$, con derivada continua y supongamos que $a = \psi(c)$ y $b = \psi(d)$. Si f es continua en el rango de ψ, entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\psi(t))\,\psi'(t)dt$$

Demostración

Sea $I = \psi([c,d])$ y F la función definida por,

$$F(s) = \int_a^s f(x)dx, \qquad \text{para } s \in I$$

y consideremos la función H definida por,

$$H(t) = F(\psi(t)) \qquad \text{para } c \leq t \leq d.$$

Observe que $H(c) = F(\psi(c)) = F(a) = 0$.

Como $F(s) - F(a) = \int_a^s f(x)dx$ se sigue del teorema fundamental del cálculo que $F' = f$, diferenciando H por la regla de la cadena obtenemos que,

$$H'(t) = F'(\psi(t))\,\psi'(t) = f(\psi(t))\,\psi'(t).$$

Por el teorema fundamental del cálculo, obtenemos que,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = H(d) = \int_c^d f(\psi(t))\,\psi'(t)dt$$

4.3 INTEGRALES IMPROPIAS E INFINITAS

DEFINICION 4.3.1

Si f es una función no acotada en $[a,b]$, ó si los límites de integración son infinitos, entonces el símbolo $\int_a^b f(x)dx$ es llamado *Integral Impropia.*

INTEGRAL CON LIMITES INFINITOS

DEFINICION 4.3.2

Sea f una función acotada y Riemann integrable en $[a,b]$, $b > a$. Entonces el símbolo $\int_a^{\infty} f(x)dx$ es definido así,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Si dicho límite existe, diremos que el integral es convergente y en caso contrario diremos que es divergente.

Ejemplo

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty} [2\sqrt{b} - 2\sqrt{a}] = \infty$$

Luego $\int_a^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ diverge.

Ejemplo

$$\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{4(x^2+1)^2}\Big|_1^b = \frac{1}{8}$$

Luego $\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$ es convergente.

PROPOSICION 4.3.3

Si f es continua para $x \geq a$ y $\lim_{b \to \infty} \int_a^b |f(x)|dx$ existe, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ también existe. La función f es llamada *absolutamente* convergente en el intervalo infinito.

Demostración

Como $f(x) = [f(x) + |f(x)|] - |f(x)|$ para $x \geq a$ y por hipótesis sabemos que $\int_a^\infty |f(x)|dx$ converge. Entonces bastará demostrar que la $\int_a^\infty (f(x) + |f|)dx$ es convergente.

Dado que,

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

integrando la desigualdad y aplicando límite cuando $b \to \infty$ obtenemos,

$$0 \leq \lim_{b \to \infty} \int_a^b (f(x) + |f(x)|)dx \leq 2 \lim_{b \to \infty} \int_a^b |f(x)|dx$$

De donde la integral $\int_a^\infty (f(x) + |f(x)|)dx$ es convergente. Por ser la integral de Riemann lineal, obtenemos que $\int_a f(x)dx$ es convergente.

TEST DE CONVERGENCIA DE INTEGRALES CON LIMITES INFINITOS

PROPOSICION 4.3.4

Sea f una función continua para $x \geq a$ y $a > 0$.

Si existe un número positivo A tal que $|f(x)x^k| < A$, $x \geq a$ entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge absolutamente, si $k > 1$.

Si $|f(x)\ x^k| \geq A$ y $k \leq 1$ entonces, $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Demostración

Como $|f(x)\ x^k| < A$ entonces,

$$\int_a^b |f(x)|dx| < A \int_a^b \frac{dx}{x^k} = \frac{A}{1-k}\left(\frac{1}{b^{k-1}} - \frac{1}{a^{k-1}}\right)$$

Cuando $b \to \infty$, el miembro de la derecha converge al valor $\frac{A}{(k-1)a^{k-1}}$ para $k > 1$.

Luego $\int_a^\infty |f(x)|dx$ existe y por la proposición 4.3.3 el $\int_a^\infty f(x)dx$ converge absolutamente.

Dado que $|f(x)\ x^k| \geq A$ y f es continua para $x \geq a$, entonces f no puede variar de signo. Supongamos que $f(x) > 0$, $x > a$, entonces,

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x)dx \geq A \int_a^b \frac{1}{x^k}dx = \begin{cases} \frac{A}{1-k}(b^{1-k} - a^{1-k}) & k < 1 \\ A(\operatorname{Ln} b - \operatorname{Ln} a) & k = 1 \end{cases}$$

Como en ambos casos el miembro de la derecha diverge cuando $b \to \infty$, entonces, $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Supongamos que $f(x) < 0$ para $x \geq a$ entonces,

$$\int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx$$

y aplicamos el razonamiento anterior. Luego $\int_a f(x)dx$ diverge.

PROPOSICION 4.3.5

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\ x^k = L$ cuando $k > 1$ entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge absolutamente.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\, x^k = L \neq 0$ y $k \leq 1$ entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge.

Demostración

Por la proposición anterior y propiedades del valor absoluto.

Ejemplo

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^6)^{1/3}}$$

Evaluemos,

$$\lim_{x\to\infty} x^2 . \frac{1}{(1+x^6)^{1/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1/x^6+1)^{1/3}} = 1$$

Como $k = 2 > 1$, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^6)^{1/3}}$ converge absolutamente.

Ejemplo

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x^2}}$$

Evaluemos,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 2x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $k = 1$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x^2}}$ diverge.

PROPOSICION 4.3.6

Si $f(x) = P_1(x)/P_2(x)$, en donde, $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son polino - mios y $P_2(x) \neq 0$, para $x \geq a$, entonces la condición suficiente y necesaria para que $\int_a^\infty f(x)dx$ sea convergente es que el grado de $P_2(x)$ exceda al grado de $P_1(x)$ en no menos de dos.

Demostración

"$\Longleftarrow$"

a) Supongamos que el grado de $P_2(x)$ excede al grado de $P_1(x)$ en 2 ó más.

Es decir que,

$$P_1(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_n, \qquad a_1 \neq 0$$

$$P_2(x) = b_1x^{n+2} + b_2x^{n+1} + \dots + b_{n+2}, \qquad b_1 \neq 0$$

Encontremos,

$$\lim_{x\to\infty} x^2f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^{n+2} + a_2x^{n+1} + \dots + a_nx^2}{b_1x^{n+2} + b_2x^{n+1} + \dots + b_n+2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_1 + a^2/x + \dots + a_n/x^n}{b_1 + b_2/x + \dots + b^{n+2}/x^{n+2}}$$

$$= \frac{a_1}{b_1}$$

Como el límite existe y $k = 2 > 1$ entonces por la proposición anterior $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

"$\Longrightarrow$"

Supongamos que el grado de $P_2(x)$ excede en 1 al grado de $P_1(x)$, - entonces,

$$\lim_{x\to\infty} x\,f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^{n+1} + a_2x^n + \dots + a_nx}{b_1x^{n+1} + b_2x^n + \dots + b_{n+1}} = \frac{a_1}{b_1}$$

Como el límite existe y $k=1$ por la proposición anterior, $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge, lo cual contradice nuestra hipótesis. Luego el grado de $P_2(x)$, debe de exceder en 2 ó más al grado de $P_1(x)$.

PROPOSICION 4.3.7

Si f es una función continua para $x \geq a$ y existe un número positivo A tal que,

$$|e^{kx} f(x)| < A, \qquad \text{cuando } x \geq a$$

entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ es absolutamente convergente si $k > 0$.
Si $|e^{kx} f(x)| \geq A$ entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge si $k \leq 0$.

Demostración

Como $|e^{kx} f(x)| < A$ entonces,

$$\int_a^b |f(x)|dx < A \int_a^b |e^{-kx}|dx$$

$$= \frac{A}{k} e^{-ka} \qquad \text{para } k > 0.$$

Luego,

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^\infty |f(x)|dx < \frac{A}{k} e^{-ka}$$

Así,

$$\int_a^\infty |f(x)|dx \quad \text{existe y} \quad \int_a^\infty f(x)dx \quad \text{es absolutamente convergente.}$$

Dado que $|e^{kx} f(x)| \geq A$ y $f(x)$ es continua para $x \geq a$, Entonces $f(x)$ no varía de signo.

Consideremos $f(x) > 0$, para $x \geq a$.

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x)dx \geq A\int_a^b e^{-kx}\,dx = \begin{cases} \frac{A}{k}[e^{-ka} - e^{-kb}] & k < 0 \\ A[b-a] & k = 0 \end{cases}$$

Luego $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge,ya que el miembro de la derecha tiende en ambos casos) a infinito cuando $b \to \infty$.

PROPOSICION 4.3.8

Si $\lim\limits_{x\to\infty} e^{kx} f(x) = L$ y $k > 0$ entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ es absolutamente convergente.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} e^{kx} f(x) = L \neq 0$ y $k \leq 0$ entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ es divergente.

Demostración

Ejercicio.

INTEGRALES CON INTEGRANDOS QUE SE VUELVEN INFINITOS

DEFINICION 4.3.9

Sea f una función que se vuelve infinita en un punto $x = c$, $a < c < b$. Diremos,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

existe, si existen las dos integrales de la derecha.

Si f es infinita en $x = a$, entonces diremos,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Ejemplo

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^1 = \infty$$

Luego,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} \quad \text{diverge.}$$

Ejemplo

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} -2\sqrt{2-x}\Big|_0^{2-\varepsilon} = 2\sqrt{2}$$

Luego,

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} \quad \text{converge.}$$

Ejemplo

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\delta\to 0} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^3}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2x^2}\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0} -\frac{1}{2x^2}\Big|_\delta^1 \quad \text{diverge.}$$

PROPOSICION 4.3.10

Si $f(x)$ es continua para $a < x \leq b$. Si existe un número positivo A tal que $|f(x)(x-a)^k| < A$ para $0 < k < 1$ y $a < x \leq b$ entonces,

$\int_a^b f(x)dx$ es absolutamente convergente.

Si $|f(x)(x-a)^k| \geq A$ para $k \geq 1$ y $a < x \leq b$ entonces $\int_a^b f(x)dx$ es divergente.

Demostración

Como $|f(x)(x-a)^k| < A$ entonces,

$$\int_a^b |f(x)|dx < A \int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)^k}dx = \frac{A(b-a)^{1-k}}{1-k}$$

Luego,

$$\int_a^b |f(x)|dx < \frac{A(b-a)^{1-k}}{1-k}$$

así,

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{es absolutamente convergente.}$$

La segunda parte se prueba siguiendo un razonamiento similar, al de la proposición 4.3.4

PROPOSICION 4.3.11

Si $\lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^k f(x) = L$ entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge absolutamente si $0 < k < 1$.

Si $\lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^k f(x) = L \neq 0$ entonces $\int_a^b f(x)dx$ diverge si $k \geq 1$.

Demostración

Ejercicio

Ejemplo

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$$

Evaluemos,

$$\lim_{x \to 1^+} (x-1)^{1/2} \frac{\quad}{(x-1)^{1/2}(x^2+x+1)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} \quad \text{converge absolutamente.}$$

APENDICE

CONJUNTO ORDENADO

DEFINICION 1

Sea A un conjunto. Un *orden* en A, es una relación, denotada por "<", con las siguientes propiedades:

i) Si $x, y \in A$ entonces una y solo una de las aseveraciones siguientes es cierta:

$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x$$

ii) Si $x, y, z \in A$ y si $(x < y)$ y $(y < z)$ entonces $x < z$.

La relación "$x < y$" se lee x es menor que y ó x es anterior a y. La expresión $x \leq y$ indicará $x < y$ ó $x = y$.

DEFINICION 2

Un *conjunto ordenado* es un conjunto A en el cual se ha definido - un *orden*.

DEFINICION 3

Sea A un conjunto ordenado y $E \subset A$. Si existe $\beta \in A$ tal que $x \leq \beta$, para todo $x \in E$, diremos entonces que E es *acotado superiormente* y β será una *cota superior* de E.

DEFINICION 4

Sea A un conjunto ordenado, $E \subset A$ y E acotado superiormente. - Supongamos que existe un $\alpha \in A$ con las siguientes propiedades:

i) α es cota superior de E.

ii) Si $\gamma < \alpha$ entonces γ no es cota superior de E.

Entonces α es llamado *supremo* de E y escribimos

$$\alpha = \text{Sup } E$$

Similarmente, podemos definir el *infimo* de E, el cual se denota por

$$\alpha = \text{Inf } E$$

OBSERVACION

Note que el "Sup E" es la *menor* de las cotas superiores y el Inf E es la *mayor* de las cotas inferiores.

Si existen el inf E y el Sup E entonces son únicos.

AXIOMA 5 (Axioma del extremo superior)

Si A es un conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente entonces A posee *supremo*.

Similarmente, podemos definir el axioma del extremo inferior.

DEFINICION 6

a) Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces existe un entero positivo n tal que,

$$nx > y$$

b) Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces existe $P \in Q$ tal que,

$$x < P < y$$

OBSERVACIONES

La parte a) es comúnmente llamada la *propiedad arquimideana* de R. La parte b) establece la *"densidad"* de Q, es decir, que entre dos números reales cualesquiera existe un número racional.

FUNCIONES

DEFINICION 7

Dados dos conjuntos A y B, el conjunto de pares (x, y) tales que $x \in A$, $y \in B$, se llama *producto cartesiano* de A y B.

DEFINICION 8

Una *relación* R, será un conjunto de pares ordenados y si $(x,y) \in R$ diremos que x esta R-relacionado con y y escribiremos

$$x \; R \; y.$$

DEFINICION 9

Una relación F se llama "*función*" cuando;

$(x, y) \in F$ y $(x, z) \in F$ implique $y = z$.

Notas:

1) Dada una función $f: A \to B$ diremos que A es el *dominio* de f y B el *codominio* de f.

2) Al conjunto de $y \in B$ tales que $f(x) = y$, para $x \in A$, es llamado *imagen* de A y será designado por $f(A)$.

DEFINICION 10

Sea $f: A \to B$ una función. Diremos que f es "*inyectiva*" en A si y sólo si, para $x_1, x_2 \in A$ se tiene que,

$f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

DEFINICION 11

Sea $f: A \to B$ una función. Diremos que f es "*sobreyectiva*" en A si $f(A) = B$.

DEFINICION 12

$f: A \to B$ es "*biyectiva*" si es inyectiva y sobreyectiva.

DEFINICION 13

Si $f(A)$ es la imagen de A por f, se cumplen las siguientes propiedades:

1) $A \neq \Phi \implies f(A) \neq \Phi$

2) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

4) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

DEFINICION 14

Si f^{-1} es la imagen inversa, se cumplen las siguientes propiedades:

1) $A \neq \Phi \implies f^{-1}(A) \neq \Phi$

2) $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

3) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

4) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

TEOREMA 15

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función y $H \subset A$ conexo. Si f es continua en H y k es cualquier número real que satisface,

$$\inf \{f(x) / \ x \in H\} < k < \operatorname{Sup} \{f(x) / \ x \in H\}$$

entonces existe un punto x^* en H para el cual

$$f(x^*) = k.$$

BIBLIOGRAFIA

1) THE ELEMENTS OF REAL ANALYSIS
Robert G. Bartle
Editorial Wiley, 1976, Second Edition.

2) PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS
Walter Rudin
McGraw-Hill, 1976, Third Edition.

3) PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS
Walter Rudin
McGraw-Hill, 1974, Second Edition.

4) METHODS OF REAL ANALYSIS
Richard R. Goldberg
John Wiley Sons, 1976.

5) ANALISIS MATEMATICO
Tom M. Apostol
Editorial Reverté, S.A., 1972.

6) INTRODUCTION TO REAL ANALYSIS
Casper Goffman
Harper & Row, 1969.

7) FOUNDATIONS OF MODERN ANALYSIS
Jean Dieudonne
Academic Press, 1969.

8) MODERN MATHEMATICAL ANALYSIS
Protter-Morrey
Addison-Wesley, 1966.

9) CALCULO SUPERIOR
Creighton Buck
McGraw-Hill, 1969.

10) NOTAS DE TOPOLOGIA GENERAL
Mauricio M. Escoto
Publicación del Depto. de Matemática, 1975.

11) CALCULUS ON MANIFOLDS
Michael Spivak
W.A. Benjamin, Inc., 1965.