UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

# INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Trabajo de graduación previo a la opción
del título de

LICENCIADO EN MATEMATICA

presentado por

ANA MIRIAM SALGUERO RODRIGUEZ
MARIO ROBERTO NAJARRO SANDOVAL

JUNIO DE 1979

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTROAMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA



# INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Trabajo de graduación previo a la opción
del título de

LICENCIADO EN MATEMATICA



presentado por

ANA MIRIAM SALGUERO RODRIGUEZ
MARIO ROBERTO NAJARRO SANDOVAL

JUNIO DE 1979

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTROAMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR: Dr. EDUARDO BADIA SERRA

SECRETARIO: Dr. JORGE FERRER DENIS

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO: Ing. EDUARDO CASTILLO URRUTIA

SECRETARIO: Ing. JUAN MIGUEL IGLESIAS C.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO: Ing. GABRIEL MELENDEZ MAYORGA

TRABAJO DE GRADUACION

ASESOR: Lic. MAURO HERNAN HENRIQUEZ

COORDINADOR: Lic. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

# I N D I C E

## INTRODUCCION

El presente trabajo, no es un estudio exhaustivo de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, sino una breve introducción, que pretende proporcionar al lector principiante en esta rama de la matemática, una motivación para que profundice en el estudio de dicha disciplina.

En el Capítulo I desarrollamos métodos para encontrar Ecuaciones Diferenciales, las formas de sus soluciones, así como la interpretación geométrica y analítica de éstas.

Tanto en el Capítulo I como en el II planteamos el Problema de Cauchy para Ecuaciones de Primer y Segundo Orden respectivamente, describiendo su método de solución, el cual queda justificado con el teorema de "Existencia y Unicidad"; así como una aplicación de dicho problema para encontrar una solución particular de la Ecuación de Onda con condiciones iniciales.

En el Capítulo II, también se estudian las Ecuaciones de Segundo Orden, introduciendo los operadores factorizables, los cuales nos proporcionan algunas formas de solución que involucran funciones arbitrarias; una clasificación de las Ecuaciones Casilineales en Hiperbólicas, Parabólicas y Elípticas, reduciéndolas a su forma normal; así mismo contiene un breve estudio de los Operadores Adjunto y Auto-Adjunto, sus propiedades y la prueba de algunos teoremas, que permiten deducir la Identidad de Lagrange y la Fórmula de Green.

Finalmente, el Capítulo III está dedicado a encontrar soluciones de Ecuaciones Elípticas, que satisfagan condiciones de frontera; en particular, el estudio de la Ecuación de Laplace, las propiedades de su solución, manifiesta en el Teorema del "Principio máximo-mínimo para Funciones Armónicas", como la aplicación del Método de Separación de Variables a dicha Ecuación.

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a aquellas personas que de una u otra manera colaboraron para que este trabajo se realizara.

# CAPITULO I

## INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE PRIMER ORDEN.

### 1.1 Clasificación y Notación.

DEFINICION 1.1.1: Una relación que involucra dos o más variables independientes, junto con derivadas parciales de una o más variables dependientes, con respecto a las variables independientes, se llama "Ecuación Diferencial Parcial". (E.D.P.).

La forma general de una E.D.P. de n variables independientes $x_1, \ldots, x_n$ y una variable dependiente u es:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_1 x_n}, \ldots\ldots) = 0,$$

donde $u_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}$, $u_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$, etc.

DEFINICION 1.1.2: El "Orden" de una E.D.P. es el orden de la derivada parcial de mayor orden que aparece en la ecuación.

DEFINICION 1.1.3: Una E.D.P. es

a) LINEAL, si es lineal en su variable (s) dependiente y en la derivadas parciales que aparecen en la ecuación;

b) QUASILINEAL, si es lineal en, por lo menos, las derivadas parciales de mayor orden que aparecen en la ecuación;

c) CASILINEAL, si es quasilineal y los coeficientes de las derivadas de mayor orden, son funciones exclusivamente de las variables independientes.

EJEMPLOS 1.1.4:

a) $x^2 + y^2 + 3u_x + y^2u_y = u$,

b) $u_x^2 + xy^2u_{yy} + u^2u_{xx} = x^2y^2$,

c) $xu_{xx} + (x^2 + y)u_{xy} - u_y^2 = u^3$,

d) $(u_{xy})^2 + u_{xx} - u^2 = 0$.

a) Lineal, b) Quasilineal, c) Casilineal, d) no es lineal, ni quasilineal y consecuentemente ni casilineal.

1.1.5: FORMA GENERAL DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (en dos variables independientes y una variable dependiente).

LINEALES:

- Primer Orden:

  $P(x,y)u_x + Q(x,y)u_y + R(x,y)u = S(x,y)$;

- Segundo Orden:

  $A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u = R(x,y)$.

QUASILINEALES:

- Primer Orden:

  $P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y = R(x,y,u)$;

- Segundo Orden:

  $P(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + 2Q(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy} + R(x,y,u,u_x,u_y)u_{yy} = S(x,y,u,u_x,u_y)$.

CASILINEALES: $\begin{cases} \text{Primer Orden:} \\ P(x,y)u_x + Q(x,y)u_y = R(x,y,u); \\ \text{Segundo Orden:} \\ P(x,y)u_{xx} + 2Q(x,y)u_{xy} + R(x,y)u_{yy} = S(x,y,u_x,u_y). \end{cases}$

NOTACION: $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

## 1.2 FORMACION DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.

### 1.2.1 ELIMINACION DE CONSTANTES ARBITRARIAS.

En las ecuaciones diferenciales ordinarias asociamos a una "primitiva" con n constantes esenciales arbitrarias, una ecuación diferencial de orden n; ésta la obtenemos eliminando las n constantes, entre las n+1 ecuaciones siguientes: la primitiva y sus n primeras derivadas. En las E.D.P., de una relación de la forma $\phi(x,y,u,c) = 0$ obtenemos, al eliminar la constante, dos ecuaciones diferenciales de orden 1, y si el número de constantes arbitrarias excede al número de variables independientes, el orden de la ecuación que resulte, o de las que resulten, será siempre mayor que 1.

### 1.2.2 ELIMINACION DE FUNCIONES ARBITRARIAS.

Una forma más general de obtener E.D.P. es por eliminación de funciones arbitrarias. Para el caso consideremos $u = f(x,y,z)$, $v = g(x,y,z)$, funciones diferenciables en las variables independientes x, y, z. Encontremos una E.D.P. de más bajo orden, que sea satisfecha por la clase de todas las funciones definidas por una relación de la forma $F(u,v) = 0$, donde F es arbitraria y $F_u$, $F_v$ no son cero ambas.

Sea $z = z(x,y)$.

Diferenciando la relación $F(u,v) = 0$ con respecto a x y y obtenemos:

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \qquad y$$

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0.$$

Eliminando $\frac{\partial F}{\partial u}$ y $\frac{\partial F}{\partial v}$ de (1) y (2) tenemos:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + p\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

Escribiendo:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

la ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}p + \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}q = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$ , una E.D.P. lineal de primer orden.

EJEMPLO 1.2.3. Eliminar las constantes arbitrarias a y b que aparecen en la relación $Z = e^{ax+by}$ y obtener una E.D.P. de más bajo orden.

Derivando parcialmente con respecto a x y y se tiene:

$Z_x = ae^{ax+by}$ ó $\frac{Zx}{Z} = a$ ,

$Z_y = be^{ax+by}$ ó $\frac{Zy}{Z} = b$ ;

pero $ax + by = \ln Z$; entonces $xp + yq = Z \ln Z$ es la ecuación buscada.

EJEMPLOS 1.2.4. Eliminar las funciones arbitrarias que aparecen en las siguientes relaciones:

i) $ze^{-x^2} + \psi(x^2 + y^2) = 0$,

ii) $F(x^2 + y^2 + z^2, z) = 0$

y obtener las E.D.P. correspondientes.

i) $ze^{-x^2} + \psi(x^2 + y^2) = 0$.

Sea $u = x^2 + y^2$; entoncez $z = -e^{x^2}\psi(u)$.

Derivando parcialmente con respecto a x y y tenemos:

$$z_x = -2xe^{x^2}\psi(u) - 2xe^{x^2}\frac{d\psi}{du} \qquad (1),$$

$$z_y = -2ye^{x^2}\frac{d\psi}{du} \qquad (2).$$

Eliminando $\frac{d\psi}{du}$ en (1) y (2) se tiene:

$$\frac{z_x}{2xe^{x^2}} - \frac{z_y}{2ye^{x^2}} = ze^{-x^2} \quad \text{ó} \quad yz_x - xz_y = 2xyz.$$

ii) $F(x^2 + y^2 + z^2, z) = 0$.

Escribimos la relación en la forma $F(u,v) = 0$, con
$u = x^2 + y^2 + z^2$ y $v = z$.

Diferenciando parcialmente con respecto a x y y tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\,\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial u}(2x + 2zp) + \frac{\partial F}{\partial v}(o + p) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\,\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial u}(2y + 2zq) + \frac{\partial F}{\partial v}(o + q) = 0.$$

Eliminando $\frac{\partial F}{\partial u}$ y $\frac{\partial F}{\partial v}$:

$$\begin{vmatrix} 2x + 2zp & p \\ 2y + 2zq & q \end{vmatrix} = (2x + 2zp)q - (2y + 2zq)p = 2xq - 2yp = 0$$

## 1.3 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.

DEFINICION 1.3.1: Una E.D.P. lineal de primer orden, en dos variables independientes x,y y variable dependiente z, es una ecuación de la forma:

$$A(x,y)Z_x + B(x,y)Z_y + C(x,y)Z = G(x,y). \qquad (1)$$

Siempre supondremos que las funciones A, B, C y G tienen derivadas contínuas en alguna región del plano xy.

Para expresar la ecuación (1), introduciremos también la notación operacional $LZ = G$, con $L = A\,\frac{\partial}{\partial x} + B\,\frac{\partial}{\partial y} + C$. Se acostumbra referirse a L como "OPERADOR DIFERENCIAL PARCIAL".

Si en la ecuación $LZ = G$, se tiene $G(x,y) = 0$, la ecuación correspondiente $LZ = 0$ se llama ecuación homogénea, mientras que si $G(x,y) \neq 0$, $LZ = G(x,y)$ se llama ecuación no homogénea.

TEOREMA 1.3.2: El Operador Diferencial Parcial L es lineal; es decir, para funciones diferenciables $z_1, z_2$ y constantes arbitrarias $c_1, c_2$, se verifica: $L(c_1z_1 + c_2z_2) = c_{1Lz1} + c2Lz_2$.

DEMOSTRACION:

$$
\begin{aligned}
L(c_1z_1 + c_2z_2) &= (A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C)(c_1z_1 + c_2z_2) \\
&= A \frac{\partial}{\partial x}(c_1z_1 + c_2z_2) + B \frac{\partial}{\partial y}(c_1z_1 + c_2z_2) + C(c_1z_1 + c_2z_2) \\
&= A(c_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z_2}{\partial x}) + B(c_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + c_2 \frac{\partial z_2}{\partial y}) + C(c_1z_1 + c_2z_2) \\
&= (Ac_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + Bc_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + Cc_1z_1) + (Ac_2 \frac{\partial z_2}{\partial x} + Bc_2 \frac{\partial z_2}{\partial y} + Cc_2z_2) \\
&= c_1Lz_1 + c_2Lz_2.
\end{aligned}
$$

DEFINICION 1.3.3: Se llama SOLUCIONEN R de la ecuación (1), a una función $z = \psi(x,y)$ definida en la región R del plano xy, con primeras derivadas continuas, tal que si $\psi$, $\psi_x$ y $\psi_y$ son sustituídas en (1), tal ecuación se transforma en una identidad sobre R.

TEOREMA 1.3.4: Si $Z_h$ es la solución general de $LZ = 0$ y $Z_p$ es una solución particular de $LZ = G$, entonces $Z = Z_h + Z_p$ es la solución general de la ecuación no homogénea.

DEMOSTRACION:

$LZ = L(Z_h + Z_p) = LZ_h + LZ_p = 0 + G = G$; luego $Z = Z_h + Z_p$ es una solución de $LZ = G$.

Probemos ahora que $Z = Z_h + Z_p$ es la solución general. Sea $v$ una solución cualquiera de $LZ = G$ y sea $w = v - Z_p$; entonces: $Lw = L(v - Z_p) = Lv - LZ_p = G - G = 0$; de allí que $w$ es solución de $LZ = 0$; pero $Z_h$ es la solución general de la homogénea, entonces $w = Z_h$ para alguna elección de la función arbitraria contenida en $Z_h$; es decir, $v - Z_p = Z_h$. Esto completa la prueba.

TEOREMA 1.3.5: Sea $Z = Z(x,y)$, $A(x,y)Z_x + B(x,y)Z_y + C(x,y)Z = 0$. Si $Z = Z(\xi,\eta)$ donde $\xi = \xi(x,y)$ y $\eta = \eta(x,y)$ es una transformación en alguna región del plano xy tal que $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$, entonces la solución general de la ecuación dada es de la forma $Z = u(x,y)f(x,y)$.

DEMOSTRACION:

$Z_x = Z_\xi \xi_x + Z_\eta \eta_x$ y $Z_y = Z_\xi \xi_y + Z_\eta \eta_y$. Sustituyendo en la ecuación dada:

$$A(\xi,\eta)(Z_\xi \xi_x + Z_\eta \eta_x) + B(\xi,\eta)(Z_\xi \xi_y + Z_\eta \eta_y) + C(\xi,\eta)Z = 0 \quad ó$$

$$[AZ_\xi \xi_x + BZ_\xi \xi_y] + [AZ_\eta \eta_x + BZ_\eta \eta_y] + CZ = 0 \quad ó$$

$$(A\xi_x + B\xi_y)Z_\xi + (A\eta_x + B\eta_y)Z_\eta + CZ = 0.$$

Puesto que la transformación es arbitraria, elijamos $\eta$ de tal forma que satisfaga el requerimiento $A\eta_x + B\eta_y = 0$. Esto se puede obtener si asumimosque $A(x,y) \neq 0$ y consideramos la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}$, cuya solución es $\eta(x,y) = C$, donde $\eta_y \neq 0$ y C es una constante arbitraria. La función $\eta(x,y)$ determinada de esta manera satisface nuestro requerimiento. En efecto $\eta_x dx + \eta_y dy = 0$ ó $\frac{dy}{dx} = -\frac{\eta_x}{\eta_y}$;

Pero $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$; luego $\frac{B}{A} = -\frac{\eta_x}{\eta_y}$ ó $A\eta_x + B\eta_y = 0$.

Si además elegimos $\xi(x,y) = x$, resulta que

$\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$; es decir $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$. Si al escribir la ecuación $(A\xi_x + B\xi_y)Z_\xi + (A\eta_x + B\eta_y)Z_\eta + CZ = 0$ consideramos las propiedades de la transformación construída, nos queda $AZ_\xi + CZ = 0$ ó $AZ_\xi = -CZ$ ó $\frac{Z_\xi}{Z} = -\frac{C}{A}$. Fijando $\eta$ e integrando con respecto a $\xi$ obtenemos:

$\ln Z = -\int \frac{C}{A} d\xi + k(\eta)$, de donde $Z = f(\eta)e^{-\int\frac{C}{A}d\xi}$ con $f(\eta) = e^{k(\eta)}$, f arbitraria.

Sea $\psi(\xi,\eta) = e^{-\int\frac{C}{A}d\xi}$ y hagamos $u(x,y) = \psi(x,\eta(x,y))$. Entonces $Z = u(x,y)f(\eta(x,y))$. Es fácil verificar que $u(x,y)$ es una solución particular de la ecuación dada. Aun queda por demostrar que $Z = u(x,y)f(\eta)$ es la solución general en R de la ecuación dada. En efecto:

$Z_x = u_x f(\eta) + uf'(\eta)\eta_x$ ; $Z_y = u_y f(\eta) + uf'(\eta)\eta_y$.

Luego:

$AZ_x + BZ_y + CZ = A(u_x f(\eta) + uf'(\eta)\eta_x) + B(u_y f(\eta) + uf'(\eta)\eta_y +$

$+ Cuf(\eta) = (Au_x + Bu_y + Cu)f(\eta) + (A\eta_x + B\eta_y)f'(\eta) = 0$; entonces $Z = u(x,y)f(u)$ es una solución.

Ahora verifiquemos que la solución es general; es decir que todas las soluciones de la ecuación están representadas en $Z = u(x,y)f(\eta(x,y))$. Nos conformaremos con demostrar que si v es una solución en R para la ecuación dada y si $P_o$ es un punto de R, que entonces existe un vecindario de $P_o$ sobre el cual $v = u(x,y)f(\eta(x,y))$.

Como u y v son soluciones para la ecuación dada, $Av_x + Bv_y + Cv = 0$ y $Au_x + Bu_y + Cu = 0$ se satisfacen simultáneamente sobre un vecindario de $P_o$. Multiplicando la primera ecuación por u, la segunda por v y luego restando resulta:

$A(uv_x - vu_x) + B(uv_y - vu_y) = 0$. Dividiendo por $u^2$:

$$A\left(\frac{uv_x - vu_x}{u^2}\right) + B\left(\frac{uv_y - vu_y}{u^2}\right) = 0.$$

Haciendo $w = \frac{v}{u}$, derivando parcialmente con respexto a x y y, y luego sustituyendo en la ecuación anterior tenemos:

$Aw_x + Bw_y = 0$. También sabemos $A\eta_x + B\eta_y = 0$. Puesto que $A^2 + B^2 \neq 0$ en R, se sigue que el Jacobiano $\frac{\partial(w,\eta)}{\partial(x,y)} = w_x\eta_y - \eta_x w_y = 0$, lo que unido al hecho de que $\eta_y \neq 0$, (Ver Teorema 3 - "Elements of Partial Differenttial Equations", Ian N. Sneddon, Pág. 20-21), implica que existe un vecindario de $P_o$ y una función f con derivada contínua tal que:

$w(x,y) = f[\eta(x,y)]$ sobre el vecindario; esto es $v = u(x,y)f(\eta(x,y))$.

EJEMPLO 1.3.6: Encontrar la solución general de la siguiente ecuación:

$xyp - x^2q + yz = 0$.

SOLUCION:

$A(x,y) = xy$; $B(x,y) = -x^2$; $C(x,y) = y$

Para encontrar $\eta(x,y) = c$, consideremos la ecuación

$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)} = \frac{-x^2}{xy} = -\frac{x}{y}$. Entonces $ydy = -xdx$, de donde

$\eta(x,y) = x^2 + y^2 = c$.

Sea $\xi(x,y) = x$.

Los coeficientes C y A, en términos de $\xi$ y $\eta$ toman la forma

$A(\xi,\eta) = \xi(\eta - \xi^2)^{1/2}$, $C(\xi,\eta) = \sqrt{\eta - \xi^2}$, con lo que la ecuación $AZ_\xi + CZ = 0$ se transforma en $\xi(\eta - \xi^2)^{1/2} Z_\xi + (\eta - \xi^2)^{1/2} Z = 0$.

$\int \frac{C(\xi,\eta)}{A(\xi,\eta)} d\xi = \int \frac{\sqrt{\eta - \xi^2}}{\xi\sqrt{\eta - \xi^2}} d\xi = \int \frac{d\xi}{\xi} = \ln \xi$. Entonces

$\psi(\xi,\eta) = e^{-\int\frac{C}{A} d\xi} = e^{-\ln \xi}$; pero $\xi(x,y) = x$; de allí que

$u(x,y) = \psi(x,\eta(x,y)) = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$, con lo cual $z = \frac{1}{x} f(x^2 + y^2)$.

## 1.4 ECUACIONES QUASILINEALES DE PRIMER ORDEN.

Una ecuación quasilineal de primer orden en dos variables independientes x,y y una variable dependiente z es una expresión de la forma

$P(x,y,z)Z_x + Q(x,y,z)Z_y = R(x,y,z)$ (1).

Lagrange redujo el problema de hallar la solución general de (1) al de resolver un sistema auxiliar, (denominado Sistema de Lagrange) de ecuaciones diferenciales ordinarias

$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ ó $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}$, (2)

demostrando el siguiente

TEOREMA 1.4.1: $F(u,v) = 0$, F arbitraria es la solución general de (1) con tal que $u = u(x,y,z) = a$ y $v = v(x,y,z) = b$ sean dos soluciones funcionalmente independientes de (2). Aquí a y b son constantes arbitrarias.

DEMOSTRACION:

Tomando las diferenciales de $u = a$ y $v = b$ se tiene:

$u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0, \quad v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0.$

Haciendo $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \lambda$ , con $\lambda$ un número arbitrario resulta que

$dx = \lambda P$, $dy = \lambda Q$ y $dz = \lambda R$.

Entonces:

$u_x \lambda P + u_y \lambda Q + u_z \lambda R = 0$ y $v_x \lambda P + v_y \lambda Q + v_z \lambda R = 0$; especialmente para $\lambda = 1$:

$u_x P + u_y Q + u_z P = 0$ y $v_x P + v_y Q + v_z R = 0.$

Resolviendo para P las dos últimas ecuaciones:

$$P = \frac{-Qu_y - Ru_z}{u_x} = \frac{-Qv_y - Ru_z}{v_x} \quad ; \quad \text{luego}$$

$$v_x(-Qu_y - Ru_z) = u_x(-Qv_y - Rv_z) \quad \text{ó} \quad Q(u_y v_x - v_y u_x) = R(v_z u_x - u_z v_x)$$

$$\text{ó} \quad Q\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)} = R\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)} = \frac{Q}{R}\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)} \qquad (2)$$

Similarmente, al resolverlas para Q obtenemos:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,y)} = \frac{P}{R}\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)} \qquad (3)$$

En la Sección 1.2.2 demostramos que de la relación $F(u,v) = 0$ se deduce una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\, p + \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\, q = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \qquad (4)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (4) se tiene $pZ_x + QZ_y = R$. Esto completa la prueba.

Una técnica útil para integrar un sistema de ecuaciones de primer orden es la de los multiplicadores. Del Algebra sabemos que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ para valores arbitrarios de los multiplicadores $\lambda, \mu$. Por consiguiente, de las ecuaciones (2) resulta que $\frac{\lambda dx + \mu dy + \nu dz}{\lambda P + \mu Q + \nu R} = \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ para multiplicadores arbitrarios $\lambda$, $\mu$, $\nu$. De esta manera podemos formar ecuaciones diferenciales relacionadas entre sí, algunas de las cuales pueden ser integradas fácilmente; en particular, si $\lambda, \mu, \nu$ son escogidos de tal forma que si $\lambda P + \mu Q + \nu R = 0$, entonces $\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0$. Ahora si existe una función $u$ tal que $du = \lambda dx + \mu dy + \nu dz$, entonces $u(x,y,z) = C_1$ es una integral del sistema de Lagrange.

EJEMPLOS 1.4.2: Encuentra la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $yp - xq = x^3y + xy^3$

b) $x^2p + y^2q = axy \quad a \neq 0$ etc.

c) $x(y-z)p + y(z-x)q = z(x-y)$

SOLUCION:

(a) $yp - xq = x^3y + xy^3$

El sistema auxiliar es $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{x^3y + xy^3}$.

De $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$ se tiene $u = x^2 + y^2 = C_1$

De $\frac{dx}{y} = \frac{dz}{x^3y + xy^3}$ ó $dx = \frac{dz}{x^3 + xy^2}$ ó

$dx = \frac{dz}{x^3 + x(c_1 - x^2)} = \frac{dz}{c_1 x}$ se obtiene $c_1x^2 - 2z = c_2$ ó

$v = (x^4 + x^2y^2 - 2z) = c_2.$

Luego la solución general es $F(x^2 + y^2, x^4 + x^2y^2 - 2z) = 0$, donde F es arbitraria.

Observe, u y v son integrales funcionalmente independientes en cualquier región que no contenga al origen; en efecto:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -4(x^3y - xy^3)$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)} = -4x,$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} = -4y.$$

(b) $x^2p + y^2q = axy \quad a \neq 0$, etc.

El sistema auxiliar es $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{axy}$ .

De $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$ se obtiene $u = \frac{x - y}{xy} = c_1$

De $\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{axy}$ ó $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{dx}$ ó $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{a\left(\frac{y}{1 - c_1 y}\right)} =$

$= \frac{(1 - c_1 y)}{ay} dz$ se obtiene $v = \frac{-axy}{x-y} \ln\left(\frac{y}{x}\right) - z = c2.$

La solución general es $F(\frac{x-y}{xy}, -\frac{axy}{x-y}\ln(\frac{y}{x}) - z) = 0$, donde $F$ es arbitraria.

(c) $x(y - z)p + y(z - x)q = z(x - y)$.

El sistema de Lagrange es: $\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$. Usando la técnica de los multiplicadores resulta que:

$$\frac{\lambda dx + \nu dy + \mu dz}{\lambda x(y-z) + \nu y(z-x) + \mu z(x-y)} = \frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$$

Para $\lambda = \nu = \mu = 1$, se obtiene que $x(y-z) + y(z-x) + z(x-y) = 0$, entonces $du = dx + dy + dz$, de donde $u(x,y,z) = x+y+z = c_1$.

Para $\lambda = yz$, $\nu = xz$, $\mu = xy$ tenemos:

$xyz(y-z) + xyz(z-x) + xyz(x-y) = 0$, entonces $dv = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$; de donde $v(x,y,z) = xyz = c_2$.

Luego la solución general es $F(x + y + z, xyz) = 0$ con $F$ arbitraria.

## 1.5 APLICACION DEL METODO DE LAGRANGE PARA ENCONTRAR FACTORES INTEGRANTES.

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria no exacta

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (1).

Supongamos que existe un factor integrante $u = u(x,y)$ tal que $uP(x,y)dx + uQ(x,y)dy = 0$ es exacta; es decir, tal que

$\frac{\partial(uP)}{\partial y} = \frac{\partial(uQ)}{\partial x}$ ó $P\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial Q}{\partial x}$ ó

$Pu_y + uP_y = Qu_x + uQ_x$ ó $Qu_x - Pu_y = u(P_y - Q_x)$.

Esta última ecuación es quasilineal con variables independientes x,y y variable dependiente u; y su correspondiente sistema auxiliar es:

$$\frac{dx}{Q} = \frac{dy}{-P} = \frac{du}{u(P_y - Q_x)} .$$

De $\frac{dx}{Q} = \frac{du}{u(P_y - Q_x)}$ ó $\frac{(P_y - Q_x)}{Q} = \frac{du}{u}$ se obtiene,

si $\frac{P_y - Q_x}{u} = f(x)$, función sólo de x, el factor integrante $u = e^{\int f(x)dx}$.

De $\frac{dy}{-P} = \frac{du}{u(P_y - Q_x)}$ ó $\frac{(P_y - Q_x)}{-P}\, dy = \frac{du}{u}$ se obtiene, si $\frac{P_y - Q_x}{-P} = g(y)$, función sólo de y, el factor integrante $u = e^{\int g(y)dy}$.

Lo mismo podríamos hacer con una ecuación lineal ordinaria de primer orden:

$y' + P(x)y = Q(x)$ ó $dy + P(x)y\, dx = Q(x)dx$ ó

$(P(x)y - Q(x))dx + dy = 0.$

Evidentemente esta última ecuación no es exacta; entonces si $u = u(x)$ es un factor integrante para ella, se cumple:

$$\frac{\partial(u(P(x)y - Q_x))}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ó \quad (P(x)y - Q(x))\,\frac{\partial u}{\partial y} + u\,\frac{\partial(P(x)y - Q(x))}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$ó \quad (P(x)y - Q(x))\,\frac{\partial u}{\partial y} + u\left[\frac{\partial P}{\partial y} + P - \frac{\partial Q}{\partial y}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ó$$

$$(P(x)y - Q(x))\,\frac{\partial u}{\partial y} + uP(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ó$$

$(Q(x) - P(x)y)u_y + u_x = uP(x)$. Esta última ecuación es quasilineal y su sistema de Lagrange es:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{Q(x) - P(x)y} = \frac{du}{uP(x)} .$$

De $dx = \frac{du}{uF(x)}$ se obtiene $u = ke^{\int p(x)dx}$, donde k es una constante.

## 1.6 INTERPRETACION GEOMETRICA PARA LA SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL QUASILINEAL.

DEFINICION 1.6.1: Sea f una función definida en la región R del plano xy. Al conjunto $T = \{(x,y,z)/z = f(x,y),\ (x,y) \in R\}$ se llama SUPERFICIE.

DEFINICION 1.6.2: Se llama SUPERFICIE UNIFORME S, al conjunto de puntos $(x,y,z) \in T$ tal que $z = \psi(x,y)$, donde $\psi$ es la solución de una ecuación cuasilineal.

DEFINICION 1.6.3: El vector $V(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ se llama VECTOR CARACTERISTICO asociado a la ecuación $P(x,y,z)Z_x + Q(x,y,z)Z_y = R(x,y,z)$.

Se verifica fácilmente que el vector característico V en un punto de S, está en el plano tangente a S en ese punto.

DEFINICION 1.6.4: Una curva uniforme C en T tal que el vector característico V en cada punto de C es tangente a C se llama CURVA CARACTERISTICA.

TEOREMA 1.6.5. Una curva uniforme C es curva característica sí y sólo sí el sistema de Lagrange se satisface a lo largo de C.

DEMOSTRACION:

C es una curva característica $\Longleftrightarrow$ $V = (P,Q,R)$ es tangente a C,

$V(x,y,z) \in C \iff$

$(dx,dy,dz) = kV = K(P,Q,R) = (kP,\ kQ,\ kR)$

$\iff\ dx = kP,\quad dy = kQ,\quad dz = kR.$

$\iff\ \dfrac{dx}{P} = k,\quad \dfrac{dy}{Q} = k,\quad \dfrac{dz}{R} = k \iff \dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$

$V(x,y,z) \in C.$

COROLARIO 1.6.6: Si u y v son solución del sistema de Lagrange, entonces la intersección de las superficies representadas por u y v es una curva característica.

TEOREMA 1.6.7: Si S es una superficie integral de la ecuación quasilineal $P(x,y,z)Z_x + Q(x,y,z)Z_y = R(x,y,z)$ y C es una curva característica que intercepta a S en un punto $(x_o,y_o,z_o)$, entonces C no intercepta a S ó C está contenida en S.

DEMOSTRACION.

Sea $Z = \psi(x,y)$ la ecuación de la superficie integral S y sea C una curva característica que ~~intercepta a S en el punto $(x_o,y_o,z_o)$~~ o C no intercepta a S o bien C está contenida en S. Ahora, en un vecindario de $x = x_o$ existe una solución única $y = y(x)$ para la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q(x,y,\psi(x,y))}{P(x,y,\psi(x,y))}$ tal que $y_o = y(x_o)$.

La curva C' definida por las ecuaciones $y = y(x)$, $z = \psi[x,y(x)]$ pasa por el punto $(x_o,y_o,z_o)$ y está en la superficie S.

También

$Z_x = \psi_x + \psi_y \dfrac{dy}{dx}$ ; pero $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q}{P}$, luego

$Z_x = \psi_x + \psi_y \dfrac{Q}{P} = \dfrac{P\psi_x + Q\psi_y}{P} = \dfrac{R}{P}.$

Así que, las funciones que definen a C' satisfacen el sistema de Lagrange; además $y(x_o) = y_o$ y $Z(x_{o}) = Z_o$. Pero las funciones que definen a la curva característica C satisfacen exactamente las mismas condiciones y sólo puede haber un conjunto de funciones $y(x)$, $Z(x)$ con estas propiedades. Por consiguiente, la característica C y la curva C' contenida en S, son la misma.

El teorema anterior nos permite escoger de la familia de curvas características, una sub-familia que genere la superficie integral S.

## 1.7 JUSTIFICACION GEOMETRICA AL METODO DE LAGRANGE PARA RESOLVER ECUACIONES QUASILINALES.

Sea S una superficie integral de la ecuación quasilineal y sea C la curva uniforme que resulta de la intersección de las superficies u y v del sistema de Lagrange. Justificaremos geométricamente que la curva C es una curva característica y que ésto, junto con el hecho de que $\nabla\phi$ ($\phi$ es la función arbitraria en la solución de la quasilineal) es perpendicular a S, en cada uno de sus puntos, implican que la ecuación quasilineal se cumple. Como C resulta de intercecptar u y v, entonces para cada punto $(x,y,z) \in C$, $\nabla u$ y $\nabla v$ son dos vectores perpendiculares a u y v respectivamente en cada punto de C; esto significa que el vector $\nabla u \times \nabla v$ tiene la dirección de la recta tangente a C en cada uno de sus puntos y consecuentemente, paralelo al vector característico $V$. En efecto, si diferenciamos las ecuaciones $u = c1$ y $v = c2$ con respecto a x tenemos:

$$u_x + u_y \frac{dy}{dx} + u_z \frac{dz}{dx} = 0 \ , \quad v_x + v_y \frac{dy}{dx} + v_z \frac{dz}{dx} = 0, \quad ó$$

$$u_x + u_y \frac{Q}{P} + u_z \frac{R}{P} = 0 \quad , \quad v_x + v_y \frac{Q}{P} + v_z \frac{R}{P} = 0, \quad ó$$

$$Pu_x + Qu_y + Ru_z = 0 \ , \quad Pv_x + Qv_y + Ru_z = 0.$$

En forma vectorial:

$$(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})\circ(u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}) = 0 \quad ó \quad V\circ\nabla u = 0.$$

En forma similar la otra ecuación queda $V\circ\nabla v = 0$.

Lo anterior dice que $V$ es perpendicular a $\nabla u$ y $\nabla v$; entonces $\nabla u \times \nabla v$ es paralelo a $V$ a lo largo de $C$. Como $\nabla u \times \nabla v$ tiene la dirección de la recta tangente a $C$ en cada punto de $C$, entonces lo mismo ocurre a $V$, luego $C$ es curva característica. Ya que $V$ es tangente a $C$ en cada punto de $C$ y como $\nabla F$ es perpendicular en cada punto de $S$, además $C$ está contenida en $S$, entonces $\nabla F$ es perpendicular a $C$; luego $\nabla F$ es perpendicular a $V$; por lo tanto $V\circ\nabla F = 0$ ó
$(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})\circ(Z_x\vec{i} + Z_y\vec{j} - k) = 0$ ó $PZ_x + QZ_y - R = 0$.

## 1.8 PROBLEMA DE CAUCHY PARA ECUACIONES QUASILINEALES DE PRIMER ORDEN.

El problema de Cauchy consiste en encontrar, para una ecuación quasilineal dada, una superficie integral que contenga una curva dada. En general, puede o no puede existir solución al problema de Cauchy; también existe la posibilidad de infinitas soluciones. Sobre este particular nos ocuparemos posteriormente. Ahora describiremos un método para resolver tal problema, para la ecuación

$P(x,y,z)Z_x + Q(x,y,z)Z_y = R(x,y,z)$.

Sea $\Gamma$ una curva uniforme definida paramétricamente por

$x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ para $a < t < b$.

Asumamos también que $\Gamma$ es una curva no característica.

Para encontrar una superficie integral de $P(x,y,z)Z_x + Q(x,y,z)Z_y = R(x,y,z)$ que contenga a $\Gamma$, se procede como sigue:

Sean $u = c_1$, $v = c_2$ dos integrales independientes del sistema de Lagrange $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$.

Se escriben las ecuaciones

$u[f(t), g(t), h(t)] = c_1$ , $v[f(t), g(t), h(t)] = c_2$ .

Se elimina t del par de ecuaciones para obtener una relación funcional $F(c1, c2) = 0$ entre c1 y c2. Entonces la solución al problema de Cauchy es

$F[u(x,y,z), v(x,y,z)] = 0$.

EJEMPLO:

Encontrar la superficie integral para la ecuación $xp - yq = 0$, que pasa por la curva definida por $x = y = z = t$.

El sistema de Lagrange asociado con la ecuación dada es:

$\frac{dx}{x}$ $\frac{dy}{-y}$, $\frac{dz}{dx} = 0$.

De $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$ obtenemos $u(x,y,z) = xy = c1$ ,

De $\frac{dz}{dx} = 0$ obtenemos $v(x,y,z) = z = c_2$.

$u[f(t),\ g(t),\ h(t)] = t^2 = c_1$ ,

$v[f(t),\ g(t),\ h(t)] = t = c_2$

Eliminando t de las dos ecuaciones anteriores, resulta que $c_2^2 = c_1$ ó $v^2 = u$. De allí que $z^2 = xy$ es la superficie integral que contiene a la curva dada.

## 1.9 TEOREMA SOBRE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION AL PROBLEMA DE CAUCHY.

TEOREMA 1.9.1: Sea T una región del expacio xyz y R la proyección de T sobre el plano xy. Asumamos que se cumple:

(1) Los coeficientes P, Q, R en la ecuación
$P(x,y,z)Z_x + Q(x,y,z)Z_y = R(x,y,z)$ son funciones contínuas, de x, y, z; además P, Q no son idénticamente cero en T;

(2) $\Gamma$ es una curva no característica dada, en T, y definida paramétricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, donde las funciones f, g, h tienen inversas y sus primeras derivadas son contínuas;

(3) $[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 \neq 0$ , $a < t < b$ ;

(4) $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ es un punto sobre $\Gamma$ que corresponde a $t = t_0$.

(5) $P(x_0,y_0,z_0)g'(t_0) - Q(x_0,y_0,z_0)f'(t_0) \neq 0$.

Entonces existe un vecindario N de $(x_0,y_0)$ en R, un vecindario $|t-t_0| < \delta$ de $t_0$ y una función única $Z = \psi(x,y)$ tal que $\psi$ es una solución en N de $PZ_x + QZ_y = R$ y $h(t) = \psi[f(t),g(t)]$ se cumple idénticamente en t para $|t - t_0| < \delta$ .

DEMOSTRACION:

Con las hipótesis sobre P, Q y R, existe una solución

$y = y(x,c_1,c_2)$ $\qquad$ $z = z(x,c_1,c_2)$ $\qquad$ (1)

del sistema

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

donde las funciones y y z son contínuas y tienen primeras derivadas parciales contínuas con respecto a los parámetros c1, c2 en un rango de valores de estos parámetros que incluye a $y_0$, $z_0$. Además

$y(x_0,c_1,c_2) = c_1$ $\qquad$ $z(x_0,c_1,c_2) = c_2$ $\qquad$ (2)

para cada par de valores de c1 y c2.

De (2) se obtiene

$$\frac{\partial y}{\partial c_1} = 1 \ , \ \frac{\partial y}{\partial c_2} = 0 \ , \qquad \frac{\partial z}{\partial c_1} = 0 \ , \ \frac{\partial z}{\partial c_2} = 1 \qquad \text{en } x = x_0$$

Entonces el Jacobiano $\frac{\partial(y,z)}{\partial(c_1,c_2)} \neq 0$ en alguna vecindad de $(x_0,y_0,z_0)$. Esto quiere decir que las ecuaciones (1) pueden ser resueltas para c1, c2 y obtener las funciones

$c_1 = u(x,y,z)$ , $\qquad$ $c_2 = v(x,y,z)$ $\qquad$ (3)

y las funciones u y v tienen la propiedad de que

$y_0 = u(x_0,y_0,z_0)$ $\qquad$ $Z_0 = u(x_0,y_0,z_0)$ .

El Jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}$ es diferente de cero en alguna vecindad de $(x_0,y_0,z_0)$ puesto que es el recíproco de $\frac{\partial(y,z)}{\partial(c_1,c_2)}$ Con u y v construídas de esta manera, definamos las funciones c1(t) y c2(t) por

$c_1(t) = u[f(t), g(t), h(t)]$ $\qquad$ $c_2(t) = v[f(t), g(t), h(t)]$.

Entonces $c1(t_o) = y_o$ y $c_2(t_o) = Z_o$. Además c1 y c2 tienen primeras derivadas con respecto a t contínuas en alguna vecindad de $t = t_o$, y, por la regla de la Cadena

$$\frac{dc_1}{dt} = \nabla u . \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \frac{\partial c_2}{\partial t} = \nabla v . \frac{d\vec{r}}{dt}$$

donde $\frac{d\vec{r}}{dt} = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$.

Es de observar que $\frac{d\vec{r}}{dt}$ es tangente a $\Gamma$. Ahora al menos uno de los valores $c_1'(t_o)$, $c_2'(t_o)$ es diferente de cero. Pues, supóngase que $c_1'(t_o) = c_2'(t_o) = 0$. Entonces en $t = t_o$, $x = x_o$, $y = y_o$, $z = z_o$ el vector $\frac{d\vec{r}}{dt}$ es perpendicular al vector $\nabla u$ y también perpendicular al vector $\nabla v$. Puesto que el Jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} \neq 0$, en $(x_o, y_o, z_o)$ el vector $\nabla u \times \nabla v$ tiene una componente en x distinta de cero, y consecuentemente no es el vector cero en ese punto. También por la hipótesis (3), $\frac{d\vec{r}}{dt}$ no es el vector cero en $t = t_o$. Así que $\frac{d\vec{r}}{dt}$ tiene la misma dirección que $\nabla u \times \nabla v$. Pero $\nabla u \times \nabla v$ tiene la misma dirección que el vector característico V. Entonces $\Gamma$ es característica en $(x_o, y_o, z_o)$. Esto sin embargo es imposible por la hipótesis (5), la cual afirma que $V \times \frac{d\vec{r}}{dt} . \vec{k} \neq 0$ en ese punto. Así, al menos una de las derivadas $c_1'(t_o)$, $c_2'(t_o)$ debe ser diferente de cero. Asumamos que $c'(t_o) \neq 0$. Por un teorema básico del Cálculo la ecuación $c_1 = c_1(t)$ puede ser resuelta en una vecindad de $t_o$ para obtener la función inversa $t = t(c_1)$ y además $t(y_o) = t_o$. Sustituyamos t(c1) por t en la ecuación c2 = c2(t). Entonces

$$c_2 = c_2[t(c_1)] = \psi(c_1).$$

Con la función $\psi$ construída de esta manera consideremos la ecuación

$v(x,y,z) - \psi[u(x,y,z)] = 0.$ (4)

Claramente, si en esta relación x,y,z son reemplazadas por f(t), g(t), h(t), resulta una identidad en t. En particular esto implica que la ecuación es satisfecha por $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Observe que el miembro izquierdo de (4) tiene derivada contínua en una vecindad de $(x_0,y_0,z_0)$. Ahora se asegura que

$v_z - \psi'(u)u_z \neq 0$ (5)

en $(x_0,y_0,z_0)$. Para demostrar esto consideremos que

$$\psi'(c_1) = \frac{dc_2}{dc_1} = \frac{\frac{dc_2}{dt}}{\frac{dc_1}{dt}} = \frac{\nabla v\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}}{\nabla u\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}}.$$

Si $v_z - \psi'(u)u_z = 0$ en $(x_0,y_0,z_0)$, entonces $v_z\nabla u.\frac{d\vec{r}}{dt} - u_z\nabla v.\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$. Usando el triple producto $(\nabla u \times \nabla v) \times \frac{d\vec{r}}{dt}$, la ecuación precedente toma la forma

$(\nabla u \times \nabla v) \times \frac{d\vec{r}}{dt}.\vec{k} = 0.$

Entonces

$V \times \frac{d\vec{r}}{dt}.\vec{k} = 0$, lo cual contradice la hipótesis (5). Así pues (5) se cumple. Esto quiere decir que (4) puede ser resuelta en una vecindad de $(x_0,y_0,z_0)$ para obtener una función $z = \psi(x,y)$ con derivadas parciales contínuas tal que $z_0 = \psi(x_0,y_0)$. En efecto existe una vecindad de $t_0$ tal que

$h(t) = \psi[f(t),g(t)]$ se cumple identicamente en t. La prueba de que $\psi$ es solución de la ecuación $P(x,y,z)Z_x + Q(x,y,z)Z_y = R(x,y,z)$ en una vecindad de $(x_0,y_0,z_0)$ se sigue del Teorema 1.4.1.

Bajo la hipótesis de que $\Gamma$ es no característica puede haber al máximo una solución al problema de Cauchy en una vecindad de $(x_0,y_0,z_0)$. Pero si dos superficies integrales de la ecuación $P(x,y,z)Z_x + Q(x,y,z)Z_y = R(x,y,z)$ contienen a $\Gamma$ cerca de $(x_0,y_0,z_0)$, entonces en una vecindad suficientemente pequeña de $(x_0,y_0,z_0)$, $\Gamma$ es la única curva de intersección de estas superficies. Pero entonces $\Gamma$ es una característica.

## 1.10 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES LINEALES EN n VARIABLES INDEPENDIENTES.

Sean $x1,\ldots,x_n$ variables independientes en una región R del espacio n-dimensional y sea

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad (1)$$

una ecuación lineal con coeficientes Pi los cuales tienen derivada contínua y además no son simultáneamente igual a cero en R. Una función $u = \psi(x1,\ldots,x_n)$ se llama solución de (1) en R, si $\psi$ tiene derivadas contínuas y cumple idénticamente (1) en R. El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{P_n} \qquad (2)$$

es llamado el "sistema subsidiario de (1)". Si $x_n$ se toma como variable independiente, entonces (2) puede escribirse en la forma

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{P_1}{P_n}, \ldots\ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{P_{n-1}}{P_n} \qquad (3)$$

La solución general del sistema (3) es de la forma $x_i = x_i(x_n, c1, \ldots, c_{n-1})$ $i = 1, \ldots, n-1$ donde los $c_i$ son constantes arbitrarias. Si estas ecuaciones son resueltas para los $c_j$s, la solución general de (2) puede escribirse como $u_i(x1, \ldots, x_n) = c_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, donde las n-1 funciones $u_i$ son funcionalmente independientes en R. Cada relación $u_i = c_i$ se llama un "integral de las ecuaciones subsidiarias" (2).

TEOREMA 1.10.1: Cada función $u_j(x_1, \ldots, x_n)$ satisface (1) en R.

DEMOSTRACION:

Diferenciando la ecuación $u_j = c_j$ tenemos

$$0 = du_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left( \frac{P_i}{P_n} \right) dx_n = \frac{dx_n}{P_n} \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

TEOREMA 1.10.2: Si $u_1, \ldots, u_{n-1}$ son las n-1 integrales (funcionalmente independientes en R) de las ecuaciones subsidiarias (2), la solución general de (1) es $u = f(u_1, \ldots, u_{n-1})$, f arbitraria.

DEMOSTRACION:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} P_i \left[ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial u_j} \left( \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Falta probar que cualquier solución u de (1) en R es de la forma ya indicada.

Sea entonces u una solución de (1) en R. Las n ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \qquad j=1,\ldots\ldots,n-1$$

se cumplen simultáneamente en R y como los $P_i$ tienen valores distintos de cero en cada punto de R, se sigue que el Jacobiano $\frac{\partial(u,u_1,\ldots u_{n-1})}{\partial(x_1,\ldots.x_n)} = 0$. Esto implica que, localmente al menos, existe una función f tal que $u = f(u_1,\ldots,u_n)$.

TEOREMA 1.10.3: Sea v una solución particular de la ecuación lineal

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Ru = 0 \qquad (4)$$

donde $R(x_1,\ldots,x_n)$ tiene derivada contínua en R. Sean $u_1,\ldots,u_{n-1}$ las n-1 integrales funcionalmente independientes de las ecuaciones subsidiarias (2). Entonces la solución general de (4) es $u = vf(u_1,\ldots,u_{n-1})$, f arbitraria.

DEMOSTRACION:

$u_{x_i} = v_{x_i} f + vf_{x_i}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Ru = \sum_{i=1}^{n} P_i \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} f + v \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + R(vf)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial v}{\partial x_i} f + v \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + R(vf)$$

$$= f \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial f}{x_i} + R(vf)$$

$$= f\ (-Rv) + R(vf) = 0.$$

Ahora probaremos que $u = vf$ es solución general.

Sea u una solución arbitraria de (4) y $W = \frac{u}{v}$ ; entonces

$$W_{x_i} = \frac{vu_{x_i} - uv_{x_i}}{v^2} \text{ ; de allí que}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial w}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial\left(\frac{u}{v}\right)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} P_i \left[\frac{vu_{x_i} - uv_{x_i}}{v^2}\right]$$

$$= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{u}{v^2} \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$= \frac{1}{v}(-Ru) - \frac{u}{v^2}(-Rv) = 0.$$

De este modo W es una solución de (1); por lo tanto es $W = f(u_1, \ldots, u_{n-1})$ para algún f y así $u = vf$.

## 1.11 ECUACIONES QUASILINEALES EN n VARIABLES INDEPENDIENTES.

Una ecuación quasilineal de primer orden en n variables independientes $x_1, x2, \ldots, x_n$ y variable dependiente u tiene la forma

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = R$$

TEOREMA 1.11.1: Si $u_i(x_1, \ldots, x_n, z) = c_i$ $i=1,\ldots,n$ son soluciones funcionalmente independientes del sistema

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}, \qquad \text{y} \qquad z = z(x_1, \ldots, x_n),$$

entonces la relación $\phi(u_1, \ldots, u_n) = 0$, con $\phi$ arbitraria, es la solución ge neral de la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = R$$

DEMOSTRACION:

Si hacemos $\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R} = \lambda$ (1)

resulta que $dx_i = \lambda P_i \quad i=1,\ldots,n; \quad dz = \lambda R$ (2)

Diferenciando $u_i(x_1,\ldots,x_n,z) = c_i$ se obtiene

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial z} dz = 0 \qquad i=1,\ldots,n. \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3) y tomando $\lambda = 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + R\frac{\partial u_i}{\partial z} = 0, \qquad i=1,\ldots,n \qquad (4)$$

Resolviendo las n ecuaciones anteriores para $P_i$ se tiene:

$$P_i = \frac{-R \dfrac{\partial(u_1,\ldots\ldots\ldots\ldots,u_n)}{\partial(x_1,\ldots x_{i-1},z,x_{i+1}\ldots x_n)}}{\dfrac{\partial(u_1,\ldots\ldots\ldots\ldots,u_n)}{\partial(x_1,\ldots\ldots\ldots\ldots x_n)}} \qquad (5)$$

Diferenciando con respecto a $x_i$ la relación $\phi(u1,\ldots,u_n) = 0$ obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\phi}{\partial u_j} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} \right] = 0 \qquad i=1,\ldots,n$$

o en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial u_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{; de donde}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n} & & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ó}$$

$$\frac{\partial(u_1,\ldots\ldots,u_n)}{\partial(x_1,\ldots\ldots,x_n)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial(u_1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_{j-1},z,x_{j+1},\ldots x_n)} = 0 \qquad (6)$$

Sustituyendo (5) en (6):

$$\frac{\partial(u1,\ldots\ldots\ldots,u_n)}{\partial(x_1,\ldots\ldots\ldots,x_n)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_j} \left[\frac{P_j}{R} \frac{\partial(u_1,\ldots\ldots,u_n)}{\partial(x1,\ldots\ldots,x_n)}\right] = 0 \;;$$

luego

$$-R + \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial z}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial z}{\partial x_j} = R.$$

TEOREMA 1.11.2: Si $\psi(x_1,\ldots,x_n,u)$ es una solución de

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + R \frac{\partial w}{\partial u} = 0 \qquad (7)$$

tal que $\frac{\partial w}{\partial u} \neq 0$ y $w = 0$ define implícitamente a $u = \phi(x_1,\dots,x_n)$ como función con derivadas contínuas, entonces u es una solución de

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = R. \tag{8}$$

DEMOSTRACION:

De diferenciar $w = \phi(x_1,\dots,x_n,u)$ con respecto a $x_j$ tenemos:

$$\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_j} = -\frac{\partial w}{\partial x_j} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial x_j}}{\frac{\partial w}{\partial u}} .$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} P_i \left( \frac{-\frac{\partial w}{\partial x_j}}{\frac{\partial w}{\partial u}} \right) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial w}{\partial x_j}}{\frac{\partial w}{\partial u}} = \frac{R\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u}}$$

Según el teorema anterior, el problema de resolver la ecuación (8) se reduce a resolver la ecuación (7), cuya solución general es de la forma

$w = f(w_1,\dots,w_n)$, donde f es arbitraria y $w_1,\dots,w_n$ son integrales funcionalmente independientes del sistema

$$\frac{dx1}{P_1} = \dots\dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{R} .$$

$f(w_1,\dots,w_n) = 0$ es la solución general de (8).

EJEMPLOS:

Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones:

a) $u_x - u_y + 7u_z + u = 0$

b) $xu_x + yu_y + zu_z = nu$ n cte.

SOLUCION:

(a) La ecuación es de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Ru = 0.$$

La solución general tiene la forma $u = vf(u_1, u2)$.

Resolvamos $u_x - u_y + 7u_z = 0$

El sistema de Lagrange es:

$$dx = -dy = \frac{dz}{7}$$

De $dx = -dy$ obtenemos $x + y = c_1$.

De $dx = \frac{dz}{7}$ obtenemos $z - 7x = c_2$.

Definamos $u(x,y,z) = u^*(\alpha,\beta,\gamma)$

Sea $\alpha = x$ ,

$\beta = x + y$

$\gamma = z - 7x.$

Entonces:

$$u_x = u^*_\alpha \alpha_x + u^*_\beta \beta_x + u^*_\gamma \gamma_x = u^*_\alpha + u^*_\beta - 7u^*_\gamma,$$

$$u_y = u^*_\alpha \alpha_y + u^*_\beta \beta_y + u^*_\gamma \gamma_y = u^*{}_\beta,$$

$$u_z = u^*_\alpha \alpha_z + u^*_\beta \beta_z + u^*_\gamma \gamma_z = u^*{}_\gamma;$$

de donde

$$u_x - u_y + 7u_z + u = ( u^*_\alpha + u^*_\beta - 7U^*_\gamma ) - u^*_\beta + 7u^*_\gamma + u^* = 0 \qquad ó$$

$$-u^* = u^*_\alpha .$$

Integrando esta última expresión obtenemos:

$$u^*(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-\alpha} e^{g(\beta,\gamma)} \qquad ó$$

$$u(x,y,z) = e^{-x} e^{g(x+y,\ z-7x)}$$

(b) La ecuación es de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = R.$$

Según el Teorema 1.11.2, resolver la ecuación dada es equivalente a resolver la ecuación.

$$xw_x + yw_y + zw_z + nu \frac{\partial w}{\partial u} = 0 \qquad (*)$$

cuyo sistema subsidiario es

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{nu}.$$

De $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ obtenemos $\frac{y}{x} = c_1$,

De $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$ obtenemos $\frac{z}{x} = c_2$,

De $\frac{dx}{x} = \frac{du}{nu}$ obtenemos $\frac{u}{x^n} = c_3$.

La solución general de (*) es entonces

$$w = f\left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x^n}\right].$$

$w = 0$ define implícitamente a $u$ como una función de $\frac{y}{x}$ y $\frac{z}{x}$; en efecto

$u = x^n f\left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right]$ y consecuentemente es la solución general de (b).

Otra manera de resolver la ecuación (b) es la siguiente:

Sabemos ya que $c_1 = \frac{y}{x}$ , $c_2 = \frac{z}{x}$ .

Hagamos $u(x,y,z) = u^*(\alpha,\beta,\gamma)$, donde

$\alpha = x,$

$\beta = \frac{y}{x},$

$\gamma = \frac{z}{x}.$

Entonces:

$$u_x = u^*_\alpha \alpha_x + u^*_\beta \beta_x + u^*_\gamma \gamma_x = u^*_\alpha - \frac{y}{x^2} u^*_\beta - \frac{z}{x^2} u^*_\gamma ,$$

$$u_y = \frac{1}{x} u^*_\beta ,$$

$$u_z = \frac{1}{x} u^*_\gamma .$$

Sustituyendo en (b);

$$x(u^*_\alpha - \frac{y}{x^2}u^*_\beta - \frac{z}{x^2}u^*_\gamma) + y\ (\frac{1}{x}u^*_\beta) + z(\frac{1}{x}u^*_\gamma) = nu^* \quad ó$$

$xu^*_\alpha = nu^*$ ; de donde

$u^*(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha^n f(\beta,\gamma)$ ó

$u(x,y,z) = x^n f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$.

# CAPITULO II

## ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

### 2.1 ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN EN DOS VARIABLES INDEPENDIENTES.

Definición 2.1.1:

Se llama Ecuación Lineal de Segundo Orden en dos Variables Independientes $x,y$ y variable dependiente $z$, a la ecuación de la forma:

$$AZ_{xx} + 2BZ_{xy} + CZ_{yy} + DZ_x + EZ_y + FZ = G \qquad (1)$$

donde los coeficientes y la función G, son funciones que toman valores reales y tienen segundas derivadas contínuas en una región R del plano xy.

Notación:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x},\ D_y = \frac{\partial}{\partial y},\ D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ D_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2},\ D_xD_y = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

Definición 2.1.2:

Se llama Operador Diferencial Parcial Lineal de Segundo Orden, en dos variables independientes $x,y$ a la expresión:

$$L = AD_x^2 + 2BD_xD_y + CD_y^2 + DD_x + ED_y + F$$

tal que $LZ = G$ reproduce la ecuación (1).

Características de L:

i) El dominio de L es el conjunto de todas las funciones $z$, con segundas derivadas contínuas en R, tal que $LZ = G$.

ii) El rango de L es el conjunto de todas las funciones W, contínuas en R, tal que $W = LZ$.

iii) L es lineal.

Definición 2.1.3:

La ecuación $LZ = G$ se llama E.D.P no homogénea; si $G(x,y) = 0$, la correspondiente ecuación homogénea es $LZ = 0$.

Definición 2.1.4:

Una solución en R de $LZ = G$, es una función $Z = \phi(x,y)$, con segundas derivadas continuas tal que, si $\phi$ y sus derivadas se sustituyen en $LZ = G$, resulta una identidad en x, y sobre R. La función $Z = \phi(x,y)$ se llama "Superficie Integral" en el espacio xyz.

Observaciones:

i) Si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_q$ son soluciones de la ecuación $LZ = 0$ y $C_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, q$; entonces $C_1Z_1 + C_2Z_2 + \ldots + C_qZ_q$ es también solución de $LZ = 0$.

ii) Si $Z_p$ es solución particular de $LZ = G$ entonces $C_1Z_1 + C_2Z_2 + \ldots + C_qZ_q + Z_p$ es solución de $LZ = G$.

Teorema 2.1.5:

Si $Z_h$ es la solución general de $LZ = 0$ y $Z_p$ es una solución particular de $LZ = G$, entonces $Z = Z_h + Z_p$ es la solución general de la ecuación $LZ = G$.

Demostración:

Similar a la del Teorema (1.3.6) del Capítulo 1.

OPERADORES FACTORIZABLES CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Teorema 2.1.6:

Sea L un operador lineal de segundo orden tal que

$$L = L_1L_2 = (a_1D_x + b_1D_y + c_1)(a_2D_x + b_2D_y + c_2) \tag{2}$$

donde los coeficientes son constantes, $D_xD_y = D_yD_x$, $L1L_2 = L_2L_1$; por tanto, si $Z_1$ es solución de $L_1Z = 0$ y $Z_2$ es solución de $L_{2Z} = 0$, entonces:

$$Z = Z_1 + Z_2$$

es solución de $LZ = 0$

Prueba:

Trivial.

Teorema 2.1.7:

Sea L el operador de la ecuación (2) y sean f,g funciones arbitrarias; entonces se cumple:

i) Si $a_1a_2 \neq 0$ y $L_1 \neq L_2$, entonces la solución general de $LZ = 0$ es

$$Z_h = e^{-\frac{c_1}{a_1}x} f(b_1x - a_1y) + e^{-\frac{c_2}{a_2}x} g(b_2x - a_2y); \tag{3}$$

ii) Si $a1a2 \neq 0$ y $L1 = L_2$, entonces la solución general de $LZ = 0$ es

$$Z_h = e^{-\frac{c_1}{a_1}x} \left[ x\, f(b_1x - a_{1y)} + g(b_1x - a_{1y)} \right]; \tag{4}$$

iii) Si uno de los coeficientes $a1,a2$ es cero y $L_1 \neq L2$, entonces la solución general de $LZ = 0$ es

$$Z_h = e^{-\frac{c_1}{b_1} y} f(b_1 x) + e^{-\frac{c_2}{a_2} x} g(b2x - a_2 y) \tag{5}$$

cuando $a1 = 0$.

Prueba: (Para i)

Como $L = L1L2$ y tomando a $Z$ como solución de $LZ = 0$, entonces

$$LZ = L_1 L_2 Z = 0$$

$$= (a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2) Z = 0$$

pero

$$(a_1 D_x + b_1 D_y + c_1) Z = 0$$

se puede escribir:

$$a_1 Z_x + b_1 Z_y + c_1 Z = 0 \tag{6}$$

La ecuación anterior es E.D.P. lineal homogénea de primer orden; entonces su solución general tiene la forma:

$$Z_{h_1} = u(x,y)\ f(\eta(x,y)) \tag{7}$$

donde $f$ es una función arbitraria, $u$ es una solución particular de (6) y $\eta$ es la solución de una de las ecuaciones diferenciales ordinarias del sistema de Lagrange para la ecuación (6). Por lo tanto si el sistema de Lagrange de (6) es

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{b_1} = \frac{dz}{-c_1 z}$$

y tomando la primera ecuación

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{b_1}$$

resulta que

$$\eta(x,y) = b_1x - a_1y. \tag{8}$$

De considerar la transformación

$$\alpha = x$$

$$\beta = b_1x - a_1y$$

resulta que

$$y = \frac{b_1\alpha - \beta}{a_1}$$

La transformación anterior permite encontrar una solución particular de (6); en efecto:

Sea $Z(x,y) = Z^*(\alpha,\beta)$; entonces

$$Z_x = Z^*_\alpha \alpha_x + Z^*_\beta \beta_x$$

$$= Z^*_\alpha + b_1 Z^*_\beta$$

$$Z_y = Z^*_\alpha \alpha_y + Z^*_\beta \beta_y$$

$$= -a_1 Z^*_\beta$$

Sustituyendo en la ecuación (6) resulta

$$a_1 Z^*_\alpha + c_1 Z^* = 0,$$

cuya solución general es

$$Z^* = e^{-\frac{c_1}{a_1}\alpha + g(\beta)}$$

Como se trata de encontrar una solución particular, se puede hacer $g(\beta) = 0$ y

$$Z^* = e^{-\frac{c_1}{a_1}\alpha} \;;$$

luego

$Z(x,y) = e^{-\frac{c_1}{a_1}x}$ es una solución particular de (6)

y en este caso

$$Z_{h_1} = e^{-\frac{c_1}{a_1}x} f(b_1x - a_1y).$$

De la misma forma se puede encontrar la solución general de

$$(a_2D_x + b_2D_y + c_2)Z = 0,$$

$$Z_{h_2} = e^{-\frac{c_2}{a_2}x} g(b_2x - a_2y).$$

Luego, por el teorema (2.1.6), la solución general de $LZ = 0$ es

$$Z_h = e^{-\frac{c_1}{a_1}x} f(b1x - a_1y) + e^{-\frac{c_2}{a_2}x} g(b2x - a_2y).$$

Prueba: (Para ii)

Como $L_1 = L2$ entonces $LZ = 0$ se escribe

$$(a_1D_x + b_1D_y + c_1)(a_1D_x + b_1D_y + c_1)Z = 0. \tag{9}$$

Haciendo

$$u = (a_1D_x + b_1D_y + c_1)Z,$$

la ecuación (9) puede escribirse así:

$$a_1u_x + b_1u_y + c_1u = 0 \tag{10}$$

de esta forma, la ecuación (10) es una E.D.P. cuasilineal y el correspondiente sistema de Lagrange es:

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{b_1} = \frac{du}{-c_1u} \tag{11}$$

De resolver el sistema anterior resulta

$$b1x - a_1y = K_1$$

$$u = e^{-\frac{c_1}{a_1}x} \tag{12}$$

La ecuación (12) resulta ser una solución particular de la ecuación (10).

Tomando $\eta(x,y) = b1x - a1y$ y considerando la ecuación (10) como una E.D.P. lineal de primer orden, entonces la solución general es de la forma:

$$u = v(x,y)\; g(\eta(x,y)), \tag{13}$$

donde $g$ es una función arbitraria y $v$ es una solución particular de la ecuación (10). Resulta entonces que

$$u = e^{-\frac{c_1}{a_1}x}\, g(b_1x - a_1y). \tag{14}$$

Pero $u = (a1D_x + b1D_y + c1)Z$, entonces (14) se transforma

$$a_1Z_x + b_1Z_y + c_1Z = e^{-\frac{c_1}{a_1}x}\, g(b_1x - a_1y). \tag{15}$$

En (15), la solución general de $LZ = 0$ es de la forma

$$Z_h = e^{-\frac{c_1}{a_1}x} g(b1x - a_1y)$$

y una solución particular de $LZ = e^{-\frac{c_1}{a_1}x} g(b1x - a1y)$ es

$$Z_p = \frac{xe^{-\frac{c_1}{a_1}x}}{a_1} g(b_1x - a_1y),$$

haciendo $g(b_1x - a_1y)/a_1 = f(b_1x - a_1y)$, entonces

$$Z_p = xe^{-\frac{c_1}{a_1}x} f(b_1x - a_1y)$$

por lo tanto la solución general de $L_1L_2Z = 0$ es

$$Z = Z_h + Z_p$$

$$Z = e^{-\frac{c_1}{a_1}x} \left[ x\, f(b1x - a1y) + g(b1x - a1y) \right]$$

Teorema 2.1.8:

Sea L el operador homogéneo de la forma

$$AD_x^2 + 2BD_xD_y + CD_y^2 \tag{16}$$

Si $A \neq 0$ y r1, r2 son las raíces del polinomio

$Ar^2 + 2Br + C$, entonces

$$L = A(D_x - r_{1Dy})(D_x - r_{2Dy}) \tag{17}$$

y la solución general de $LZ = 0$ es

$$Z = f(r_1x + y) + g(r_2x + y)\,. \tag{18}$$

Prueba:

Primero hay que probar que la ecuación (16) se puede expresar como en la ecuación (17). Como $r_1$ y r2 son raíces de $Ar^2 + 2Br + C$, entonces

$$Ar_1^2 + 2Br1 + C = 0 \quad y \quad Ar_2^2 + 2Br_2 + C = 0 \tag{19}$$

de esta forma

$$Ar_1^2 + 2Br_1 + C = Ar_2^2 + 2Br_2 + C$$

$$A(r_1^2 - r_{2)}^2 + 2B(r1 - r2) = 0$$

de donde

$$2B = -A(r_1 + r_2) \tag{20}$$

sustituyendo el resultado anterior en una de las ecuaciones (19) se tiene

$$Ar_1^2 - A(r_1 + r_2)r_1 + C = 0$$

luego

$$C = Ar_1r_2 \tag{21}$$

pero

$$A(D_x - r_1D_y)(D_x - r_2D_y) = AD_x^2 - A(r_2 + r_1)D_xD_y + Ar_1r_2D_y^2$$

sustituyendo las ecuaciones (20) y (21) en la ecuación anterior, resulta que

$$A(D_x - r_{1Dy})(D_x - r_{2Dy}) = AD_x^2 + 2BD_xD_y + CD_y^2$$

Ahora hay que probar que $Z = f(u_1) + g(u_2)$, con $u_1 = r_1x + y$ y $u_2 = r_2x + y$, es solución de $LZ = 0$.

Como $LZ = 0$ y esta ecuación se puede escribir así

$$AZ_{xx} + 2BZ_{xy} + CZ_{yy} = 0$$

entonces, de $Z = f(u1) + g(U2)$ se puede encontrar $Z_{xx}$, $Z_{xy}$ y $Z_{yy}$ y sustituyendo en la E.D.P. anterior se tiene

$$A\left[r_1^2 f''(u_1) + r_2^2 g''(u_2)\right] + 2B\left[r_1 f''(u_1) + r_2 g''(u_2)\right] +$$

$$C\left[f''(u_1) + g''(u_2)\right] = 0$$

$$\left[Af''(u_1)r_1^2 + 2Bf''(u_1)r_1 + Cf''(u_1)\right] + \left[Ar_2^2g''(u_2) + 2Br_2g''(u_2) + Cg''(u_2)\right] = 0$$

$$f''(u_1)(Ar_1^2 + 2Br_1 + c) + g''(u_2)(Ar_2^2 + 2Br_2 + C) = 0 \qquad (22)$$

pero $r_1$ y $r_2$ son raíces de $Ar^2 + 2Br + C$, en este caso la ecuación (22) se satisface, lo cual significa que $Z = f(u_1) + g(u2)$ satisface la ecuación $LZ = 0$.

Finalmente hay que probar que la solución general de $LZ = 0$, es de la forma $Z = f(r1x + y) + g(r2x + y)$. Como $LZ = 0$ s e puede factorar así;

$$A(D_x - r_{1Dy})(D_x - r_2D_y)Z = 0$$

entonces

$$Z_x - r_1 Z_y = 0 \tag{23}$$

tiene asociado el siguiente sistema de Lagrange

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-r_1} = \frac{dZ}{0}$$

tomando x como variable independiente, resulta $r_1 x + y = K1$, $Z = K$, entonces la solución general de la ecuación (23) es

$$Z_1 = f(r_1 x + y).$$

También de la misma forma se puede obtener la solución general para $Z_x - r_2 Z_y = 0$, la cual tendría la forma

$$Z_2 = g(r_2 x + y).$$

Luego por el Teorema (2.1.6) resulta que la solución general de $LZ = 0$ es

$$Z = f(r_1 x + y) + g(r_2 x + y).$$

METODOS SIMBOLICOS PARA OBTENER SOLUCIONES PARTICULARES PARA ECUACIONES NO-HOMOGENEAS.

Teorema 2.1.9:

Sea L el operador lineal de la ecuación (1), donde los coeficientes son constantes reales y $L = P(D_x, D_y)$ es un polinomio en los operadores $D_x$, $D_y$; además $G(x,y)$ es una función tal que

$P(D_x, D_y)Z = G(x,y)$, de donde

a) Si $P(D_x, D_y)Z = e^{ax+by}$, entonces su solución particular es

$$Zp = \frac{e^{ax+by}}{P(a,b)}, \quad P(a,b) \neq 0 ;$$

b) Si $P(D_x^2, D_y^2)Z = \text{sen}\,(ax+by)$, entonces su solución particular es

$$Z_p = \frac{\text{sen}\,(ax+by)}{P(-a^2, -b^2)}, \quad P(-a^2, -b^2) \neq 0;$$

c) Si $P(D_x, D_y)Z = \cos\,(ax+by)$, entonces su solución particular es

$$Zp = \text{Re}\left[\frac{e^{i(ax+by)}}{P(ia, ib)}\right], \quad P(ia, ib) \neq 0;$$

d) Si $P(D_x, D_y)Z = \text{sen}\,(ax+by)$, entonces su solución particular es

$$Zp = \text{Im}\left[\frac{e^{i(ax+by)}}{P(ia, ib)}\right].$$

Prueba: (Para literal a)

Dado que

$$L = AD_x^2 + 2BD_xD_y + CD_y^2 + DD_x + ED_y + F = P(D_x, D_y)$$

entonces

$$P(a,b) = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + Da + Eb + F = M$$

por lo tanto

$$LZp = L\left(\frac{e^{ax+by}}{M}\right)$$

$$= \frac{1}{M} L(e^{ax+by})$$

$$= \frac{1}{M}\,(Aa^2e^{ax+by} + 2Babe^{ax+by} + Cb^2e^{ax+by} + Dae^{ax+by} + Ebe^{ax+by} + Fe^{ax+by})$$

$$= \frac{e^{ax+by}}{M}\,(Aa2 + 2Bab + Cb2 + Da + Eb + F)$$

$$= e^{ax+by}\ .$$

Es decir Zp satisface la ecuación $P(D_x, D_y)Z = e^{ax+by}$.

Prueba: (Para literal c)

Sea $R = -Aa^2 - 2Bab - Cb2 + F$ y sea $I = Da + Eb$, entonces

$$P(ia, ib) = A(ia)2 + 2B(ia)(ib) + C(ib)2 + D(ia) + E(ib) + F$$

$$= (-Aa2 - 2Bab - Cb^2 + F) + i(Da + Eb)$$

$$= R + iI.$$

Pero

$$e^{i(ax+by)} = \cos\,(ax + by) + i\,\mathrm{sen}\,(ax + by)$$

entonces

$$\frac{e^{i(ax+by)}}{P(ia,\ ib)} = \left[\cos\,(ax+ by) + i\,\mathrm{sen}\,(ax+ by)\right] / (R + iI)$$

$$= \left[\frac{R\cos\,(ax+ by) + I\,\mathrm{sen}\,(ax + by)}{R^2 + I^2}\right] +$$

$$i\left[\frac{R\,\mathrm{sen}\,(ax + by) - I\cos\,(ax + by)}{R^2 + I^2}\right]$$

Ya que

$$Zp = \operatorname{Re} \frac{e^{i(ax+by)}}{P(ia,\ ib)}$$

entonces

$$Zp = \left[ \frac{R \cos (ax+by) + I \operatorname{sen} (ax+by)}{R^2 + I^2} \right]$$

Luego

$$LZp = L \left[ \frac{R \cos (ax+by) + I \operatorname{sen} (ax+by)}{R^2 + I^2} \right]$$

$$= \frac{R}{R^2+I^2} L (\cos (ax+by)) + \frac{I}{R^2+I^2} L(\operatorname{sen}(ax+by)$$

$$= \frac{R^2 \cos (ax+by) + I^2 \cos (ax+by)}{R^2 + I^2}$$

$$= \cos (ax+by)$$

ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN EN "n" VARIABLES INDEPENDIENTES.

Definición 2.1.10:

Se llama Ecuación Lineal de Segundo Orden en n variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a la expresión de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = G \tag{24}$$

donde los coeficientes $A_{ij}$, $B_i$, c son constantes reales y $A_{ij} = A_{ji}$; $i,j = 1, 2, \ldots .n$.

Notación:

$D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

en este caso, el operador lineal de la ecuación (24) se puede escribir así:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i\, D_{x_i} + c$$

Casos en que L es Factorizable:

a) Si $L = L_1 L2 = (a_1 D_{x_1} + \ldots\ldots + a_n D_{x_n} + c)(b_1 D_{x_1} + \ldots\ldots + b_n D_{x_n} + d)$ con $L_1 \neq L2$, $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, entonces la solución general para $LZ = 0$ es

$$Z_h = e^{-\frac{c}{a_1} x_1} f(a_2x_1 - a_1x_2,\ a_3x_1 - a_1x_3, \ldots, a_nx_1 - a_1x_n) +$$

$$e^{-\frac{d}{b_1} x_1} g(b_2x_1 - b_1x_2,\ b_3x_1 - b_1x_3, \ldots + b_nx_1 - b_1x_n);$$

b) Si $L = L_1 L2$, $L1 = L2$, $a1 \neq 0$, $b1 \neq 0$, entonces la solución general de $LZ = 0$ es

$$Z_h = e^{-\frac{c}{a_1} x_1} \Big[ x_1\ f(a_2x_1 - a_1x_2, \ldots\ldots, a_nx_1 - a_1x_n) +$$

$$g(b_2x_1 - b_1x_2, \ldots\ldots, b_nx_1 - b_1x_n)\ ;$$

c) Si $L = L_1 L2$, con $a_1 = 0$, entonces la solución general de $LZ = 0$ es

$$Z_h = e^{-\frac{c}{a_2} x_2} f(a_2x_1,\ a_3x_1, \ldots\ldots, a_nx_1) +$$

$$e^{-\frac{d}{b_1} x_1} g(b_2x_1 - b_1x_2\ , \ldots\ldots, b_nx_1 - b_1x_n).$$

Ejemplos:

Encontrar la solución general en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2s + 3t - q = 6 \cos (2x - 3y) - 30 \operatorname{sen} (2x - 3y)$.

b) $s + ap + bq + abz = e^{mx+ny}$.

c) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 2u_{yz} - 2u_{xz} + u_{zz} = x \cos x + y \cos y + z \cos z$.

d) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - u_{zz} - 2u_{z} - u = e^{2x} + 2 \cos y + z + 2$.

Solución:

Para a) hay que encontrar la solución general para $LZ = 0$ y una particular para $LZ = G$.

Pero $2s + 3t - q = 0$, se puede escribir así:

$$Dy(2D_x + 3D_y - 1)Z = 0$$

y la solución general es

$$Z_h = f(x) + e^{\frac{x}{2}} g(3x - 2y).$$

Ahora, una solución particular para

$$P(D_x, D_y)Z = 6 \cos (2x - 3y), \text{ es}$$

$$Zp_1 = 6 \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i(2x-3y)}}{P(2i,-3i)} \right]$$

$$= 6 \operatorname{Re} \left[ \frac{\cos (2x-3y) + i \operatorname{sen} (2x-3y)}{39 + 3i} \right]$$

$$= \frac{13}{85} \cos (2x - 3y) + \frac{1}{85} \operatorname{sen} (2x - 3y)$$

De la misma forma se puede obtener una solución particular para $P(D_x, D_y)Z = -30 \operatorname{sen} (2x - 3y)$, tal solución es:

$$Zp_2 = -30 \operatorname{Im} \left[ \frac{e^{i(2x-3y)}}{39+3i} \right]$$

$$= -\frac{1}{17} \left[ 13 \operatorname{sen} (2x - 3y) - \cos (2x - 3y) \right]$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$Zp = Zp_1 + Zp_2$$

$$= \frac{18}{85} \cos (2x - 3y) - \frac{64}{85} \operatorname{sen} (2x - 3y)$$

Luego, la solución general de $LZ = G$ es

$$Z = Z_h + Z_p$$

$$= f(x) + e^{\frac{x}{2}} g(3x - 2y) + \frac{18}{85} \cos (2x - 3y) - \frac{64}{85} \operatorname{sen} (2x - 3y)$$

Para b) como s + ap + bq + abz = 0, se puede escribir

$$D_y(D_x+b) + a(D_x+b)Z = 0$$

$$(D_x+b)(D_y+a)Z = 0$$

Luego la solución general de la ecuación anterior es

$$Z_h = e^{-bx}f(-y) + e^{-ay}g(x)$$

Una solución particular de

$$(D_xD_y + aD_x + bD_y + ab)Z = e^{mx+ny}$$

es

$$Zp = \frac{e^{mx+ny}}{P(m,n)}$$

$$= \frac{e^{mx+ny}}{mn+am+bn+ab}$$

Luego la solución general de $LZ = e^{mx+ny}$ es

$$Z = Z_h + Z_p$$

$$= e^{-bx}f(-y) + e^{-ay}g(x) + \frac{e^{mx+ny}}{mn+an+bn+ab}$$

Para c) como

$$(D_x^2 + 2D_xD_y + D_y^2 - 2D_yD_z - 2D_xD_z + D_z^2)u = x \cos x + y \cos y + z \cos z$$

se puede escribir así

$$(D_x + D_y - D_z)2u = x \cos x + y \cos y + z \cos z$$

y la solución general de la homogénea es

$$u_h = xf(x-y, -x-z) + g(x-y, -x-z)$$

entonces, si hacemos

$$u_x = x \cos x,\ u_y = y \cos y,\ u_z = -z \cos z$$

e integrando con respecto a x,y y z, se tiene la siguiente solución particular

$$u_p = x \text{ sen } x + \cos x + y \text{ sen } y + \cos y - z \text{ sen } z - \cos z$$

Luego, la solución general de la no-homogénea es

$$u = u_h + u_p$$

$$= xf(x-y,\ -x-z) + g(x-y,\ -x-z) + x \text{ sen } x + \cos x +$$
$$y \text{ sen } y + \cos y - z \text{ sen } z - \cos z.$$

Parad) la ecuación se puede escribir así:

$$(D_x^2 + 2D_xD_y + D_y^2 - D_z^2 - 2D_z - 1)u = e^{2^x} + 2 \cos y + z + 2$$

reordenando y agrupando términos se tiene

$$\left[ (D_x + D_y)^2 - (D_z + 1)^2 \right] u = e^{2x} + 2 \cos y + z + 2$$

$$(D_x + D_y + D_z + 1)(D_x + D_y - D_z - 1)u = e2^x + 2 \cos y + z + 2$$

Luego la solución general de la homogénea es

$$u_h = e^{-x}f(x-y,\ x-z) + e^x g(x-y,\ -x-z).$$

Hay que encontrar una solución particular de la no-homogénea, entonces

$$u_{p_1} = \frac{e^{2x}}{\Psi(2,0,0)}$$
$$= \frac{e^{2x}}{3}$$

$$u_{p_2} = 2 \text{ Re} \left[ \frac{e^{iy}}{(i+1)(i-1)} \right]$$

$$= -\text{Re}(e^{iy})$$

$= -\mathrm{Re}(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

$= -\cos y$

Se trata de encontrar también una solución particular de

$(D_x + D_y + D_z + 1)(D_x + D_y - D_z - 1)u = z + 2$

haciendo $v = (D_x + D_y - D_z - 1)u$ , entonces

$$v = \frac{z + 2}{(D_x + D_y + D_z + 1)}$$

$$= \frac{z + 2}{(D_z+1)\left(1 + \frac{D_x + D_y}{D_z + 1}\right)}$$

$$= \frac{1}{(D_z+1)}\left[1 - \frac{D_x + D_y}{D_z + 1} + \left(\frac{D_x + D_y}{(D_z + 1}\right)^2 - \ldots\right](z + 2)$$

$$= (D_z + 1)^{-1}(z + 2)$$

$$= (1 - D_z + D_z^2 + \ldots)(z + 2)$$

$$= z + 1$$

Luego

$(D_x + D_y - D_z - 1)u = z + 1$

$$u = \frac{z + 1}{(D_z + 1)\left[1 + \frac{D_x + D_y}{D_z + 1}\right]}$$

$$= \frac{1}{(D_z+1)}\left[-1 + \frac{D_x + D_y}{D_z + 1}\right]^{-1} (z + 1)$$

$$= (D_z + 1)^{-1}(-1 - \frac{D_x+D_y}{D_z+1} + \ldots\ldots)(z + 1)$$

$$= (D_z+1)^{-1}(-z \ -1)$$

$$= (1 - D_z + D_z^2 + \ldots\ldots)(-z \ -1)$$

$u_{p_3} = -z$

La solución particular es

$u_p = u_{p_1} + u_{p_2} + u_{p_3}$

Luego la solución general de la ecuación no-homogénea es

$$u = e^{-x}f(x-y,\ x-z) + e^{x}g(x-y,\ -x-z) + \frac{e^{2x}}{3} - \cos y - z$$

SOLUCIONES DE TIPO EXPONENCIAL.

Proposición 2.1.11:

$Z = e^{hx+my}$ es la solución general de la ecuación homogénea (1) si y sólo si

$$Ah^2 + 2hmB + Cm^2 + Dh + Em + F = 0 \qquad (25)$$

Demostración: " $\Longrightarrow$ "

Como $Z = e^{hx+my}$ es solución de la homogénea (1), entonces Z satisface tal ecuación, es decir

$(Ah^2 + 2Bhm + Cm^2 + Dh + Em + F)e^{hx+my} = 0$

entonces

$(Ah^2 + 2Bhm + Cm^2 + Dh + Em + F) = 0$

" $\Longleftarrow$ "

Si escogemos h y m tal que

$Ah^2 + 2Bhm + Cm^2 + Dh + Em + F = 0$

entonces

$(Ah^2 + 2Bhm + Cm^2 + Dh + Em + F)e^{hx+my} = 0$

pero $e^{hx+my} = Z$, resulta entonces que

$AZ_{xx} + 2BZ_{xy} + CZ_{yy} + DZ_x + EZ_y + FZ = 0$

luego

$Z = e^{hx+my}$ es la solución general de la homogénea (1).

Ejemplos:

Construir soluciones de tipo exponencial en las siguientes ecuaciones:

a) $Z_{xx} - 2Z_{xy} + Z_y - Z = 0$

b) $U_{xx} - U_{yy} + K^2U = 0$, K es una constante

Solución:

Para a) supongamos que $Z = e^{hx+my}$ es solución de (a), hay que encontrar h y m tal que

$h^2 - 2hm + m - 1 = 0$, en este caso

$$m = \frac{1 - h^2}{1 - 2h}$$

luego la solución general es

$$Z = e^{hx + \frac{1-h^2}{1-2h}y}.$$

Una solución particular es cuando $h = 2$, es decir:

$$Z = e^{2x+y}.$$

Para b) supongamos que $U = e^{hx+my}$ es solución de la ecuación (b), entonces

$$h^2 + m^2 + K^2 = 0$$

$$m^2 = -(h^2 + K^2)$$

luego

$$m = \pm i\sqrt{h^2 + K^2}$$

Por lo tanto una solución general de (b) es

$$u = e^{hx \pm i\sqrt{h^2 + K^2}}.$$

## 2.2) ECUACIONES CASILINEALES EN DOS VARIABLES INDEPENDIENTES.

Definición 2.2.1:

La expresión

$$LZ = A(x,y)Z_{xx} + 2B(x,y)Z_{xy} + C(x,y)Z_{yy} + M(x,y,z,z_x,z_y) = 0 \qquad (1)$$

se llama "Ecuación Casilineal" en dos variables independientes x,y; donde A, B, C son funciones con segundas derivadas contínuas, definidas en una región R del plano xy, y además, no son simultáneamente iguales a cero.

La suma de términos:

$$AD_x^2 + 2BD_xD_y + CD_y^2 \qquad (2)$$

se llama "parte principal" del operador L en la ecuación (1).

La función $\Delta$ definida en R por:

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y) \qquad (3)$$

se llama discriminante del operador L.

Definición 2.2.2:

La ecuación (1) o el operador L se llama:

i) Hiperbólico en un punto (x,y), si $\Delta(x,y) > 0$.

ii) Parabólico en un punto (x,y), si $\Delta(x,y) = 0$

iii) Elíptico en un punto $(x,y)$, si $\Delta(x,y) < 0$.

El operador L (o la ecuación (1)) se llama:

i) Hiperbólico en R, si lo es en todo punto $(x,y) \in R$.

ii) Parabólico en R, si lo es en todo punto $(x,y) \in R$.

iii) Elíptico en R, si lo es en todo punto $(x,y) \in R$.

Teorema 2.2.3:

Sea L un operador hiperbóico (parabólico, elíptico) y T una transformación contínua e inyectiva que toma valores reales, entonces T(L) es hiperbólico (parabólico, elíptico).

Demostración:

Sean $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ (4)

funciones que toman valores reales y con segundas derivadas contínuas sobre R, de tal manera que $\frac{\partial(\xi,\eta)}{(x,y)} \neq 0$; estas funciones transforman la región R del plano xy en la región R' del plano $\xi\eta$, entonces

$$Z = Z(\xi,\eta)$$

$$Z_x = Z_\xi \xi_x + Z_\eta \eta_x$$

$$Z_{xx} = (Z_\xi)'\xi_x + Z_\xi \xi_{xx} + (Z_\eta)'\eta_x + Z_\eta \eta_{xx}$$

$$= (Z_{\xi\xi}\xi_x + Z_{\xi\eta}\eta_x)\xi_x + (Z_{\eta\xi}\xi_x + Z_{\eta\eta}\eta_x)\eta_x + Z_\xi \xi_{xx} + Z_\eta \eta_{xx}$$

$$= Z_{\xi\xi}\xi_x^2 + Z_{\xi\eta}\eta_x\xi_x + Z_{\eta\xi}\xi_x\eta_x + Z_{\eta\eta}\eta_x^2 + Z_\xi\xi_{xx} + Z_\eta\eta_{xx}$$

luego

$$AZ_{xx} = AZ_{\xi\xi}\xi_x^2 + AZ_{\xi\eta}\eta_x\xi_x + AZ_{\eta\xi}\xi_x\eta_x + AZ_{\eta\eta}\eta_x^2 + AZ_\xi\xi_{xx} + Az_\eta\eta_{xx}.$$

Similarmente:

$$CZ_{yy} = CZ_{\xi\xi}\xi_y^2 + CZ_{\xi\eta}\eta_y\xi_y + CZ_{\eta\xi}\xi_y\eta_y + CZ_{\eta\eta}\eta_y^2 + CZ_\xi\xi_{yy} + CZ_\eta\eta_{yy}.$$

Ahora:

$$Z_{xy} = (Z_\xi)'\xi_x + Z_\xi\xi_{xy} + (Z_\eta)'\eta_x + Z_\eta\eta_{xy}$$

$$= (Z_{\xi\xi}\xi_y + Z_{\xi\eta}\eta_y)\xi_x + (Z_{\eta\xi}\xi_y + Z_{\eta\eta}\eta_y)\eta_x + Z_\eta\eta_{xy} + Z_\xi\xi_{xy}$$

$$2BZ_{xy} = 2BZ_{\xi\xi}\xi_y\xi_x + 2BZ_{\xi\eta}\eta_y\xi_x + 2BZ_{\eta\xi}\xi_y\eta_x + 2BZ_{\eta\eta}\eta_y\eta_x + 2BZ_\eta\eta_{xy} + 2BZ_\xi\xi_{xy}.$$

Luego, sustituyendo los resultados anteriores en

$$AZ_{xx} + 2BZ_{xy} + CZ_{yy} + M(x,y,z,z_x,z_y) = 0$$

resulta que

$$(A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2)Z_{\xi\xi} + (2A\xi_x\eta_x + 2C\xi_y\eta_y + 2B\xi_y\eta_x + 2B\xi_x\eta_y)Z_{\xi\eta} +$$

$$+ (A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2)Z_{\eta\eta} + M'(\xi,\eta,z,z_\xi,z_\eta) = 0.$$

La ecuación anterior se puede escribir así:

$$Q(\xi)Z_{\xi\xi} + 2Q(\xi,\eta)Z_{\xi\eta} + Q(\eta)Z_{\eta\eta} + M'(\xi,\eta,z,z_{\xi},z_{\eta}) = 0. \qquad (5)$$

Donde la parte principal de L en R' es:

$$Q(\xi)\ \frac{\partial}{\partial\xi^2} + 2Q(\xi,\eta)\ \frac{\partial}{\partial\xi\,\partial\eta} + Q(\eta)\ \frac{\partial}{\partial\eta^2}$$

La función $\Delta'$ en R' es:

$$\Delta' = \left[\ Q(\xi,\eta)\ \right]^2 - Q(\xi)Q(\eta)$$

pero

$$\left[\ Q(\xi,\eta)\ \right]^2 = \left[\ A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y\ \right]^2$$

$$= A^2\xi_x^2\eta_x^2 + 2\left[\ B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y\ \right](A\xi_x\eta_x) +$$

$$+ \left[\ B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y\ \right]^2$$

$$= A^2\xi_x^2\eta_x^2 + 2AB\xi_x^2\eta_x\eta_y + 2AB\xi_x\xi_y\eta_x^2 + 2AC\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + B^2\xi_x^2\eta_y^2 +$$

$$+2B^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + B^2\xi_y^2\eta_x^2 + 2CB\xi_x\xi_y\eta_y^2 + 2CB\xi_y^2\eta_x\eta_y + C^2\xi_y^2\eta_y^2.$$

Por otra parte

$$Q(\xi)Q(\eta) = (A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2)(A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2)$$

$$= A^2\xi_x\eta_x^2 + 2AB\xi_x^2\eta_x\eta_y + AC\xi_x^2\eta_y^2 + 4B^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y +$$

$$+2BC\xi_x\xi_y\eta_y^2 + AC\xi_y^2\eta_x^2 + 2BC\xi_y^2\eta_x\eta_y + C^2\xi_y^2\eta_y^2 + 2AB\xi_x\xi_y\eta_x^2\ .$$

entonces:

$$\left[ Q(\xi,\eta) \right]^2 - Q(\xi)Q(\eta) = (B^2 - AC)\xi_x^2\eta_y^2 + 2B^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y +$$

$$+ (B^2 - AC)\xi_y^2\eta_x^2 + (2AC - 4B^2)\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y$$

$$= (B^2 - AC)\xi_x^2\eta_y^2 + (B^2 - AC)\xi_y^2\eta_x^2 +$$

$$+ (2B^2 + 2AC - 4B^2)\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y$$

$$= (B^2 - AC)\xi_x^2\eta_y^2 - 2(B^2 - AC)\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y +$$

$$+ (B^2 - AC)\xi_y^2\eta_x^2$$

$$= (\xi_x^2\eta_y^2 - 2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + \xi_y^2\eta_x^2)(B^2 - AC)$$

$$= (\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 \; (B^2 - AC)$$

$$\Delta' = \left[ \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \right]^2 \Delta$$

Según el resultado anterior, el operador L es hiperbólico (o parabólico, o elíptico) en R', si y solamente si L es hiperbólico (o parabólico, o elíptico) en R.

ECUACIONES CASILINEALES HIPERBOLICAS.

Teorema 2.2.4:

Sea L un operador hiperbólico sobre una región R, A ó C son distintos de cero en R, entonces existe una transformación (4), inyectiva y localmente contínua, tal que la ecuación (1) se transforma en:

$$z_{\xi\eta} + G(\xi,\eta,z,z_{\xi},z_{\eta}) = 0 \qquad (7)$$

y es llamada "Forma Normal" (o Canónica) de las ecuaciones hiperbólicas en dos variables independientes.

Demostración:

Evidentemente, (7) resulta de la ecuación (5) si la transformación es tal que

$Q(\xi) = Q(\eta) = 0.$

Consideremos la ecuación diferencial parcial de primer orden

$$Q(\psi) = A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = 0 \qquad (8)$$

llamada "Ecuación Característica" de L.

Asumamos que $A \neq 0$ en R y como $\Delta > 0$, entonces las raíces del polinomio

$Am^2 + 2Bm + C = 0$, son

$m_1 = \dfrac{-B + \sqrt{\Delta}}{A}$ , $m_2 = \dfrac{-B - \sqrt{\Delta}}{A}$ , las cuales son funciones contínuas que toman valores reales y la ecuación (8) se puede escribir así:

$$Q(\psi) = A(\psi_x - m_{1\psi y})(\psi_x - m_2\psi_y). \qquad (9)$$

Por lo tanto, si escogemos $\xi,\eta$ tales que

$$\xi_x - m_1\xi_y = 0 \quad \text{y} \quad \eta_x - m_2\eta_y = 0 \qquad (10)$$

entonces

$$Q(\xi) = A(\xi_x - m_1\xi_y)(\xi_x - m_2\xi_y) = 0$$

$$Q(\eta) = A(\eta_x - m_1\eta_y)(\eta_x - m_2\eta_y) = 0$$

luego $Q(\xi) = Q(\eta) = 0$.

Ahora, las ecuaciones subsidiarias de (10), son:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m_1} = \frac{d\xi}{0} \quad , \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m_2} = \frac{d\eta}{0}$$

$$\frac{dy}{dx} = -m_1, \quad \xi = C_2 \ , \quad \frac{dy}{dx} = -m_2 \quad , \quad \eta = K_2 \tag{11}$$

la solución de las ecuaciones (11) es

$$u(x,y) = C_1, \quad \xi = C_2 \quad , \quad v(x,y) = K1 \quad , \quad \eta = K_2$$

por lo tanto, podemos elegir:

$$u(x,y) = \xi \quad y \quad v(x,y) = \eta \tag{12}$$

las ecuaciones (12) satisfacen las ecuaciones (10) respetivamente, son contínuas, tienen segundas derivadas y

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m_1\xi_y & \xi_y \\ m_2\eta_y & \eta_y \end{vmatrix}$$

$$= \xi_y \eta_y (m_1 - m_2)$$

ya que $m_1 \neq m2$, $\eta_y \neq 0$ y $\xi_y \neq 0$, entonces $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$

Elegida la transformación de esta manera, se satisfacen las hipótesis del teorema (2.2.3) y en consecuencia la ecuación (5) se reduce a

$$2Q(\xi,\eta)Z \quad + M'(\xi,\eta,z,z_\xi, z_\eta) = 0. \tag{13}$$

Como

$$\Delta' = [\, Q(\xi,\eta)\, ]^2 - Q(\xi)Q(\eta)$$

$$= [\, Q(\xi,\eta)\, ]^2 \text{ ; ya que } Q(\xi) = Q(\eta) = 0,$$

pero

$$\Delta' = \left[ \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \right]^2 \Delta$$

entonces

$$[\, Q(\xi,\eta)\, ]^2 = \left[ \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \right]^2 \Delta \neq 0$$

luego $Q(\xi,\eta) \neq 0$, por lo tanto, la ecuación (13) se puede dividir por $2Q(\xi,\eta)$ y se obtiene:

$$Z_{\xi\eta} + G(\xi,\eta,z,z_\xi,z_\eta) = 0$$

Ejemplos:

Reducir a la forma normal y encontrar la solución general de la siguiente ecuación:

$$r - t + p + q + x + y + 1 = 0$$

Solución:

La ecuación se puede escribir así:

$$Z_{xx} - Z_{yy} + Z_x + Z_y + x + y + 1 = 0 \qquad (1)$$

La ecuación característica de L es:

$$Q(\psi) = \psi_x^2 - \psi_y^2$$

El discriminante de L es:

$$\Delta = B^2 - AC$$

$= 1 > 0$, entonces la ecuación (1) es hiperbólica. Como $A \neq 0$ y $\Delta > 0$ entonces

$$m_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{A} \quad , \quad m_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{A}$$

$$= 1 \quad , \quad = -1$$

luego

$$Q(\psi) = (\psi_x - m_1\psi_y)(\psi_x - m_2\psi_y) = 0$$

$$= (\psi_x - \psi_y)(\psi_x + \psi_y) = 0.$$

Pero $Q(\xi) = Q(\eta) = 0$, cuando

$$\xi_x - \xi_y = 0 \ , \qquad \eta_x + \eta_y = 0. \tag{2}$$

Los sistemas de Lagrange para las ecuaciones (2) son

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{d\xi}{0} \qquad , \qquad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{d\eta}{0}$$

y sus respectivas soluciones son

$$x + y = \xi(x,y) \ , \quad x - y = \eta(x,y) \tag{3}$$

por lo tanto:

$$Z_x = Z_\xi \xi_x + Z_\eta \eta_x$$
$$= Z_\xi + Z_\eta$$

$$Z_{xx} = Z_{\xi\xi}\xi_x + Z_{\xi\eta}\eta_x + Z_{\eta\xi}\xi_x + Z_{\eta\eta}\eta_x$$

$$= Z_{\xi\xi} + 2\, Z_{\xi\eta} + Z_{\eta\eta}$$

$$Z_y = Z_\xi \xi_y + Z_\eta \eta_y$$

$$= Z_\xi - Z_\eta$$

$$Z_{yy} = Z_{\xi\xi}\xi_y + Z_{\xi\eta}\eta_y - Z_{\eta\xi}\xi_y - Z_{\eta\eta}\eta_y$$

$$= Z_{\xi\xi} - 2\, Z_{\xi\eta} + Z_{\eta\eta}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1) se tiene

$$Z_{\xi\xi} + 2\, Z_{\xi\eta} + Z_{\eta\eta} - Z_{\xi\xi} + 2\, Z_{\xi\eta} - Z_{\eta\eta} + Z_\xi + Z_\eta + Z_\xi - Z_\eta + \frac{\xi-\eta}{2} +$$
$$+ \frac{\xi+\eta}{2} + 1 = 0$$

y se reduce a

$$4Z_{\xi\eta} + 2Z_{\xi} + \xi + 1 = 0$$

$$(4D_{\xi}D_{\eta} + 2D_{\xi})Z = -\xi - 1.$$

Resolviendo la ecuación homogénea primero, se tiene

$$2D_{\xi}(2D_{\eta} + 1)Z = 0$$

$2D_{\xi}Z = 0$, entonces $Z_1 = f(\eta)$

$(2D_{\eta} + 1)Z = 0$, entonces $Z_2 = e^{-2\eta}g(\xi)$

por lo tanto

$$Z_h = Z_1 + Z_2$$

$$= f(\eta) + e^{-2\eta}g(\xi).$$

Ahora una solución particular de

$$4D_{\xi}(D_{\eta} + \tfrac{1}{2})Z = -\xi - 1$$

se puede encontrar así

$$4D_{\xi}Z = (D_{\eta} + \tfrac{1}{2})^{-1}(-\xi - 1)$$

$$= \left[ (\tfrac{1}{2})^{-1} - (1)(\tfrac{1}{2})^{-(1+1)} D_{\eta} + \ldots\ldots \right](-\xi - 1)$$

$$= \left[ 2 + 4 D_{\eta} \right](-\xi - 1)$$

$$4D_{\xi}Z = -2\xi - 2$$

luego

$$Z_p = -\frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi + I(\eta).$$

La solución general es

$$Z = Z_h + Z_p$$

$$= f(\eta) + g(\xi)e^{-2\eta} + I(\eta) - \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi$$

$$= f(x-y) + g(x+y)e^{-2(x-y)} + I(x-y) - \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x+y).$$

ECUACIONES CASILINEALES PARABOLICAS.

Teorema 2.2.5:

Sea L un operador parabólico sobre una región R, A ó C distintos de cero en R; entonces existe una transformación (4), inyectiva y localmente contínua, tal que la ecuación (1) se transforma en:

$$Z_{\eta\eta} + G(\xi,\eta,z,z_\xi,z_\eta) = 0 \tag{14}$$

y es llamada "Forma Normal" (o Canónica) de las ecuaciones parabólicas en dos variables independientes.

Demostración:

Consideremos la ecuación característica de L:

$$Q(\psi) = A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + \psi_y^2 = 0$$

Como $\Delta = 0$ y asumiendo que $A \neq 0$ entonces las raíces del polinomio

$Am^2 + 2Bm + C = 0$

son reales e iguales; en este caso $m = -\frac{B}{A}$, entonces

$Q(\psi) = A(\psi_x - m\psi_y)^2 = 0$

pero

$Q(\xi) = A(\xi_x - m\xi_y)^2 = 0$

es decir

$$Q(\xi) = 0 \text{ si y sólo si } \xi_x - m\xi_y = 0 \tag{15}$$

la ecuación subsidiaria correspondiente es

$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{d\xi}{0}$

$\frac{dy}{dx} = -m \quad , \qquad \xi = C_2$

$u(x,y) = C_1 \; , \; \xi = C_2$

entonces podemos elegir:

$\xi(x,y) = u(x,y).$

Ahora la elección de $\eta$ debe ser tal que $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$

y como $\Delta = 0$, entonces siendo

$$\Delta' = \left[ \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \right]^2 \Delta$$

resulta que $\Delta' = 0$, y en este caso

$$[\, Q(\xi,\eta)\, ]^2 - Q(\xi)Q(\eta) = 0$$

pero $Q(\xi) = 0$, entonces $Q(\xi,\eta) = 0$. Luego la ecuación (5) se transforma en

$$Q(\eta)Z_{\eta\eta} + M'(\xi,\eta\ ,\ z,\ z_\xi,\ z_\eta) = 0. \tag{16}$$

Probemos ahora que $Q(\eta) \neq 0$.

Supongamos entonces que es igual a cero, en este caso

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m\xi_y & \xi_y \\ m\eta_y & \eta_y \end{vmatrix}$$

$= 0$; contradicción, ya que el Jacobiano debe ser diferente de cero, luego $Q(\eta) \neq 0$.

Como $Q(\eta) \neq 0$, entonces la ecuación (16) se puede dividir por $Q(\eta)$ y resulta:

$$Z_{\eta\eta} + G(\xi,\ \eta,\ z,\ z_\xi\ ,\ z_\eta) = 0$$

Ejemplo:

Reducir a la forma normal y encontrar la solución general de la siguiente ecuación:

$$y^2Z_{xx} - 2yZ_{xy} + Z_{yy} = Z_x + 6y \qquad (1)$$

Solución:

La ecuación característica de L es

$$Q(\psi) = y^2\psi_x^2 - 2y\psi_x\psi_y + \psi_y^2 = 0$$

La función discriminante de L es

$$\begin{aligned} \Delta &= B^2 - AC \\ &= y^2 - y^2 \\ &= 0, \text{ entonces la ecuación es Parabólica y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= -\frac{B}{A} \\ &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

es decir

$$Q(\psi) = y^2(\psi_x - \frac{1}{y}\psi_y)^2 = 0$$

de donde $Q(\xi) = 0$ si y sólo si

$$\xi_x - \frac{1}{y}\xi_y = 0. \qquad (2)$$

La ecuación subsidiaria de (2) es

$$\frac{dx}{1} = -\,ydy = \frac{d\xi}{0}$$

y su solución es

$$2x + y^2 = \xi(x,y).$$

Ahora $\eta$ debe ser tal que $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$; haciendo

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = 2$$

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = 2$$

$$2\eta_y - 2y\,\eta_x = 2. \qquad (3)$$

La ecuación subsidiaria de (3) es

$$-\frac{dx}{y} = dy = d\eta$$

tomando a x como variable independiente

$$-\frac{dx}{y} = dy$$

la solución es

$$2x + y^2 = K_1$$

la otra ecuación es

$$\frac{dx}{\sqrt{K1-2x}} = d\eta$$

y la solución es

$$y + \eta = K_2$$

pero $f(K_1, K2) = 0$ es solución de la ecuación (3), tomando a f por $K1 - K2 = 0$, entonces

$$\eta(x,y) = y^2 - y + 2x.$$

Por lo tanto

$$Z_x = Z_\xi \xi_x + Z_\eta \eta_x$$

$$= 2Z_\xi + 2Z_\eta$$

$$Z_{xx} = 2(Z_{\xi\xi}\xi_x + Z_{\xi\eta}\eta_x) + 2(Z_{\eta\xi}\xi_x + Z_{\eta\eta}\eta_x)$$

$$= 4Z_{\xi\xi} + 8Z_{\xi\eta} + 4Z_{\eta\eta}$$

$$Z_y = 2yZ_\xi + (2y - 1)Z_\eta$$

$$Z_{yy} = 4y^2 Z_{\xi\xi} + (8y^2 - 4y)Z_{\xi\eta} + (2y - 1)^2 Z_{\eta\eta} + 2Z_\xi + 2Z_\eta$$

$$Z_{xy} = 4y\, Z_{\xi\xi} + (8y - 2)Z_{\xi\eta} + (4y - 2)Z_{\eta\eta}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la ecuación (1) resulta:

$$y^2(4Z_{\xi\xi} + 8Z_{\xi\eta} + 4Z_{\eta\eta}) - 2y[\, 4yZ_{\xi\xi} + (8y-2)Z_{\xi\eta} + (4y - 2)Z_{\eta\eta}\,] +$$

$$4y^2 Z_{\xi\xi} + (8y^2-4y)Z_{\xi\eta} + (2y-1)^2 Z_{\eta\eta} + 2Z_\xi + 2Z_\eta = 2Z_\xi + 2Z_\eta + 6y$$

$$Z_{\eta\eta} = 6y$$

pero $y = \xi - \eta$, entonces

$$Z_{\eta\eta} = 6(\xi - \eta).$$

Ahora la solución general de la ecuación anterior es

$$Z = 3\xi\eta^2 - \eta^3 + f(\xi)$$

luego

$$Z(x,y) = 3(2x + y^2)(y^2 - y + 2x)^2 - (y^2 - y + 2x)^2 + f(2x + y^2)$$

es la solución general de la ecuación (1).

ECUACIONES CASILINEALES ELIPTICAS.

Teorema 2.2.6:

Sea L un operador elíptico con A, B, C funciones analíticas de las variables x,y en R, entonces existe una transformación (4), tal que la ecuación (1) se reduce a

$$Z_{\xi\xi} + Z_{\eta\eta} + G(\xi,\eta,z,z_\xi,z_\eta) = 0 \tag{17}$$

llamada "Forma Normal" para ecuaciones elípticas en dos variables independientes.

Demostración:

Sea $\psi = u + iv$ una solución de $\psi_x - m1\psi_y = 0$ tal que $u(x,y)$, y $v(x,y)$ son funciones que toman valores en los reales, con $u_y \neq 0$, $v_y \neq 0$ y sean $\xi = u(x,y)$, $\eta = v(x,y)$.

La ecuación característica de L es

$Q(\psi) = A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = 0$

la cual puede factorarse:

$$Q(\psi) = A(\psi_x - m_1\psi_y)(\psi_x - m_2\psi_y) = 0 \tag{18}$$

Como L es elíptico, entonces $\Delta = B^2 - AC < 0$ y en este caso las raíces de $Am^2 + 2Bm + C$, son funciones que toman valores complejos, donde

$$m_1 = \frac{-B + i\sqrt{-\Delta}}{A} \quad , \qquad m_2 = \frac{-B - i\sqrt{-\Delta}}{A}$$

entonces de la ecuación (18) se puede afirmar que

$$\begin{aligned}
0 &= \psi_x - m_1\psi_y \\
&= (u_x + iv_x) - m_1(u_y + i v_y) \\
&= (\xi_x + i \eta_x) - m_1(\xi_y + i \eta_y) \\
&= (\xi_x - m_1\xi_y) + i(\eta_x - m_1\eta_y) \\
&= \left[ \xi_x - \left(\frac{-B + i\sqrt{-\Delta}}{A}\right)_y \right] + i\left[\eta_x - \left(\frac{-B + i\sqrt{-\Delta}}{A}\right.\right]
\end{aligned}$$

$$= \xi_x + \frac{B}{A}\xi_y - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\xi_y + i\eta_x + i\frac{B}{A}\eta_y - i^2\frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\eta_y$$

$$0 + 0i = \left[\xi_x + \frac{B}{A}\xi_y + \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\eta_y\right] + i\left[\eta_x + \frac{B}{A}\eta_y - \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\xi_y\right]$$

$$0 = \xi_x + \frac{B}{A}\xi_y + \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\eta_y$$

$$0 = \eta_x + \frac{B}{A}\eta_y - \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\xi_y$$

$$\xi_x = -\frac{B}{A}\xi_y + \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\eta_y$$

$$\eta_x = -\frac{B}{A}\eta_y + \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\xi_y$$

y como $u_y \neq 0$, $v_y \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x$$

$$= \frac{-\sqrt{-\Delta}}{A}(\xi_y^2 + \eta_y^2)$$

$$\neq 0$$

Pero

$$Q(\psi) = A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = 0$$

entonces

$$Q(u + iv) = A\left[\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}\right]^2 + 2B\left[\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right] + C\left[\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right]^2 = 0$$

$$= A\left[\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial x}\right]^2 + 2B\left[\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial x}\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial y}\right] \quad \left[\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial y}\right]^2 = 0$$

$$= A\left[\xi_x + i\eta_x\right]^2 + 2B\left[(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y)\right] +$$

$$+ C\left[\xi_y + i\eta_y\right]^2 = 0$$

$$= (A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^{2)} + 2i(A\xi_x\eta_x + B\xi_x\eta_y + B\xi_y\eta_x + C\xi_\eta\eta_y) +$$

$$- (A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2) = 0$$

$$Q(\psi) = Q(\xi) + 2iQ(\xi,\eta) - Q(\eta) = 0 + 0i$$

$$(Q(\xi) - Q(\eta)) + i2Q(\xi,\eta) = 0 + 0i$$

por lo tanto $Q(\xi) = Q(\eta)$ y $Q(\xi,\eta) = 0$; en este caso la ecuación (5) se reduce a

$$Q(\xi)Z_{\xi\xi} + Q(\xi)Z_{\eta\eta} + M'(\xi,\eta,z,z_\xi, z_\eta) = 0$$

$$Q(\xi)(Z_{\xi\xi} + Z_{\eta\eta}) + M'(\xi,\eta,z,z_\xi,z_\eta) = 0. \tag{20}$$

Pero $Q(\xi) \neq 0$, ya que si $Q(\xi) = 0$,entonces

$$\Delta' = Q^2(\xi,\eta) - Q(\xi)Q(\eta) = 0$$

$$= \left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^2 \Delta = 0$$

luego $\Delta = 0$, contrario a la hipótesis de que $\Delta < 0$, entonces $Q(\xi) \neq 0$, por lo tanto, la ecuación (20) se puede dividir por $Q(\xi)$ y resulta

$$Z_{\xi\xi} + Z_{\eta\eta} + G(\xi,\eta,z,z_{\xi},z_{\eta}) = 0$$

Ejemplo:

Reducir a la forma normal y encontrar la solución general de la siguiente ecuación:

$$4x^2Z_{xx} + y^2Z_{yy} = xy^2$$

Solución:

La ecuación característica de L es

$$Q(\psi) = 4x^2\psi_x + y^2\psi_y = 0$$

La función discriminante de L es

$$\Delta = B^2 - AC$$

$$= -4x^2y^2 < 0,$$ entonces la ecuación es Elíptica.

$$m_1 = \frac{-B + i\sqrt{-\Delta}}{A} \quad , \quad m_2 = \frac{-B - i\sqrt{-\Delta}}{A}$$

$$= \frac{y}{2x}i \quad , \quad = -\frac{y}{2x}i$$

$$Q(\psi) = (\psi_x - \frac{y}{2x}i\psi_y)(\psi_x + \frac{y}{2x}i\psi_y) = 0$$

entonces

$$\psi_x - \frac{y}{2x}i\psi_y = 0 \qquad (2)$$

la ecuación subsidiaria de (2) es

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\frac{y}{2x} i} = \frac{d\psi}{0}$$

$$i \frac{dx}{2x} = - \frac{dy}{y} = \frac{d\psi}{0}$$

$$i \frac{1}{2} \ln x = - \ln y + K_2, \ \psi = K_2$$

$$\ln y + i \frac{1}{2} \ln x = K_1$$

entonces

$$\psi(x,y) = \ln y + i \frac{1}{2} \ln x = u(x,y) + iv(x,y)$$

luego

$$u(x,y) = \ln y \quad , \qquad v(x,y) = \frac{1}{2} \ln x$$

haciendo

$$\xi(x,y) = \ln y \quad , \qquad \eta(x,y) = \frac{1}{2} \ln x$$

entonces

$$Z_x = Z_\xi \xi_x + Z_\eta \eta_x$$

$$= \frac{1}{2x} Z_\eta$$

$$Z_{xx} = \frac{1}{2x} (Z_{\eta\xi} \xi_x + Z_{\eta\eta} \eta_x) - \frac{1}{2x^2} Z_\eta$$

$$= \frac{1}{4x^2} Z_{\eta\eta} - \frac{1}{2x^2} Z_\eta$$

$$Z_y = Z_\xi \xi_y + Z_\eta \eta_y$$

$$= \frac{1}{y} Z_\xi$$

$$Z_{yy} = \frac{1}{y} (Z_{\xi\xi} \xi_y + Z_{\xi\eta} \eta_y) - \frac{1}{y^2} Z_\xi$$

$$= \frac{1}{y^2} Z_{\xi\xi} - \frac{1}{y^2} Z_\xi$$

Sustituyendo en la ecuación (1) se tiene

$$4x^2 \left(\frac{1}{4x^2} Z_{\eta\eta} - \frac{1}{2x^2} \cdot Z_\eta\right) + y^2 \left(\frac{1}{y^2} Z_{\xi\xi} - \frac{1}{y^2} Z_\xi\right) = e^{2\eta} e^{2\xi}$$

$$Z_{\eta\eta} - 2Z_\eta + Z_{\xi\xi} - Z_\xi = e^{2\eta + 2\xi}$$

$$(D_\eta^2 + D_\xi^2 - 2D_\eta - D_\xi) Z = e^{2\eta + 2\xi}$$

Suponiendo una solución del tipo exponencial

$Z = e^{h\eta + m\xi}$ para $LZ = 0$ y

haciendo $D_\eta Z = h$, $D_\xi Z = m$, entonces $LZ = 0$ s e transforma en:

$$h^2 + m^2 - 2h - m = 0$$

de donde

$$(h^2 - 2h + 1) = m - m^2 + 1$$

$$(h - 1)^2 = m - m^2 + 1$$

$$h = \sqrt{m - m^2 + 1} + 1$$

por lo tanto

$$Z_h = e^{(\sqrt{m-m^2+1} + 1)\eta + m\xi}$$

Hay que encontrar Zp para $LZ = e^{2\eta+2\xi}$

Se sabe que si $LZ = e^{a\eta+b\xi}$, entonces

$$Zp = \frac{e^{a\eta+b\xi}}{P(a,b)}$$

En este caso

$$Zp = \frac{e^{2\eta+2\xi}}{P(2,2)}$$

$$= \frac{e^{2\eta+2\xi}}{2}$$

La solución general de (1) es

$$Z = Z_h + Z_p$$

$$= e^{(\sqrt{m-m^2+1} + 1)\eta + m\xi} + \frac{1}{2} e^{2\eta+2\xi}$$

$$= e^{\frac{(\sqrt{m-m^2+1} + 1)\ln x}{2} + m \ln y} + \frac{1}{2} e^{\ln x + 2 \ln y}.$$

## 2.3) PROBLEMA DE CAUCHY PARA ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN EN DOS VARIABLES INDEPENDIENTES.

El problema de Cauchy para una Ecuación Diferencial Parcial Lineal de Segundo Orden consiste en determinar una superficie integral, la cual pase através de una curva r dada, de tal manera que la normal a la superficie integral sea prescrita a lo largo de la curva.

El problema de Cauchy para Ecuaciones Lineales de Segundo Orden es como sigue:

Sea la ecuación:

$$LZ = AZ_{xx} + 2BZ_{xy} + CZ_{yy} + DZ_x + EZ_y + FZ = G \tag{21}$$

Asumamos que los coeficientes y G son funciones contínuas en una región R del plano xy. Sea $\Gamma_o$ una curva uniforme en R, definida paramétricamente por las ecuaciones

$$x = f(\tau) \quad , \quad y = g(\tau), \quad a < \tau < b \tag{22}$$

donde f y g tienen derivada contínua y

$$[f'(\tau)]^2 + [g'(\tau)]^2 \neq 0 \ , \quad a < \tau < b; \quad a, b \in R \tag{23}$$

Dadas las funciones h, H con derivadas contínuas, se determina una solución $Z = \psi(x,y)$ de la ecuación (1), tal que

$$\psi(f(\tau),g(\tau)) = h(\tau) \quad , \quad \psi_n(f(\tau),g(\tau)) = H(\tau) \tag{24}$$

donde $\psi_n$ denota la derivada en la dirección normal a $\Gamma_o$.

Las funciones f,g,h y H constituyen los "datos iniciales" del Problema de Cauchy.

Evidentemente la primera condición de (24) junto con la ecuación (22), expresan el hecho de que la superficie integral contiene a la curva

$\Gamma$; en efecto, $\Gamma$ se puede expresar como una curva en el espacio xyz, definida por las ecuaciones paramétricas,

$$x = f(\tau) \qquad y = g(\tau) \qquad z = h(\tau) \qquad a < \tau < b. \tag{25}$$

La segunda parte de la ecuación (24) prescribe la orientación de la normal a la superficie integral a lo largo de $\Gamma$. Para ver esto, diferenciando con respecto a $\tau$ la primera condición de (24) resulta:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} \qquad \text{ó}$$

$$h' = \psi_x f' + \psi_y g', \tag{26}$$

relación que se satisface a lo largo de $\Gamma_o$.

Por otra parte, la derivada en la dirección normal a cada punto de $\Gamma_o$ viene dada por:

$$\psi_n = (\psi_x\vec{i} + \psi_y\vec{j})\circ\{(-g'\vec{i} + f'\vec{j})/[(-g')^2 + (f')^2]^{1/2}\}$$

por lo tanto

$$H = (-\psi_x g' + \psi_y f')/[(-g')^2 + (f')^2]^{1/2} \tag{27}$$

Es de observar que el vector normal $\vec{n}$ a $\Gamma_o$ es $-g'\vec{i} + f'\vec{j}$ .

Ahora, resolviendo para $\psi_x$ y $\psi_y$ el sistema constituído por (26) y (27), se comprueba que tiene solución única ya que el determinante $[(-g')^2 + (f')^2]^{1/2} \neq 0$ por (23) y como H es una función dada, entonces H prescribe la relación (26), la cual se puede escribir así:

$$0 = (\psi_x \vec{i} + \psi_y \vec{j} - \vec{k}) \circ (f'\vec{i} + g'\vec{j} + h'\vec{k})$$

$$= \vec{N} \circ \vec{T}$$

pero $\vec{T} = (f',g',h')$ es el vector tangente a la superficie integral a lo largo de $\Gamma$, entonces N es el vector normal a la superficie integral a lo largo de $\Gamma$, es decir; H prescribe la orientación de la normal a la superficie integral a lo largo de $\Gamma$.

Observe que $\vec{N}$ es realmente el vector normal a la superficie integral a lo largo de $\Gamma$, puesto que $\psi_x, \psi_y, -1$ son los números directores de la normal a la superficie integral a lo largo de $\Gamma$.

En lugar de $\psi$ y $\rho_n$ pueden prescribirse los valores de $\psi, \psi_x$ y $\psi_y$ a lo largo de $\Gamma_o$. En este caso, las ecuaciones (24) son sustituídas por

$$(f(\tau),g(\tau)) = h(\tau) \qquad a < \tau < b \tag{28}$$

$$\psi_x(f(\tau),g(\tau)) = \rho(\tau) \;;\; \psi_y(f(\tau),g(\tau)) = \sigma(\tau), \qquad a < \tau < b$$

donde $h,\rho,\sigma$ son funciones uniformes dadas. Ahora los datos iniciales del problema consisten en las funciones $f,g,h,\rho,\sigma$. Sin embargo estas funciones no pueden asignarse arbitrariamente si la solución existe; hay que pedirles que cumplan a lo largo de $\Gamma_o$:

a) $\rho(\tau)f'(\tau) + \sigma(\tau)g'(\tau) = h'(\tau)$ (29)

llamada "condición despejada".

b) $\psi_n(\tau) = [-\rho(\tau)g'(\tau) + \sigma(\tau)f'(\tau)]/([f'(\tau)]^2 + g'(\tau)]^2)^{1/2}$ (30)

Ejemplo:

Sea $\Gamma_o$ un segmento del eje x definido por las ecuaciones paramétricas

$$x = \tau\ ,\ t = 0\quad ;\quad -a < \tau < 0. \tag{1}$$

Encontrar una solución $u = \psi(x,t)$ de

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \tag{2}$$

en una región que contenga a $\Gamma_o$ tal que

$$\psi(\tau,0) = h(\tau) \qquad \psi_n(\tau,0) = H(\tau) \tag{3}$$

SOLUCION:

(a) La solución general de la E.D.P. (2) en una región es

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t). \tag{4}$$

(b) Análisis de los datos iniciales (3):

Como $\psi$ y $\psi_n$ pueden prescribirse por $\psi, \psi_x$ y $\psi_y$, resulta que

$$\begin{aligned} h'(\tau) &= \rho(\tau)f'(\tau) + \sigma(\tau)g'(\tau) \\ &= \rho(\tau)\ (1) + \sigma(\tau)\ (0) \\ &= \rho(\tau) \\ &= \psi_x(\tau,0) \qquad \text{(condición despejada)} \end{aligned} \tag{5}$$

entonces $\psi_x$ es la derivada en la dirección de la tangente a la curva inicial y en este caso, está determinada por los valores de $\psi$ a lo largo de $\Gamma_o$; es decir, $\psi_x$ no puede ser escogida arbitrariamente.

Por otra parte

$$H(\tau) = [-\rho(\tau)g'(\tau) + \sigma(\tau)f'(\tau)]/[(f'(\tau))^2 + (g'(\tau))^2]^{1/2}$$

$$= [-\rho(\tau)(0) + \sigma(\tau)(1)]/1$$

$$= \sigma(\tau)$$

$$\psi_n = \psi_t(\tau,0); \tag{6}$$

por lo tanto, $\psi_t$ es la derivada en la dirección normal a $\Gamma_o$; en este caso $\psi_t$ se puede escoger arbitrariamente.

c) Encontrar una solución de (4) que satisfaga las condiciones iniciales prescritas; es decir, que

$\psi(\tau,0) = h(\tau)$ y $\psi_n(\tau,0) = H(\tau)$

se satisfagan a lo largo d e $\Gamma_o$.

De las ecuaciones (3) y utilizando (4) resulta:

$$\psi(\tau,0) = F(\tau) + G(\tau)$$

$$\left.\begin{aligned} h(\tau) &= F(\tau) + G(\tau) \\ H(\tau) &= \sigma(\tau) = \psi_t(\tau,0) \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\sigma(\tau) = F'(\tau) - G'(\tau). \tag{8}$$

Sea $\beta$ una primitiva de $\sigma$ , entonces la relación (8) implica

$$F(\tau) - G(\tau) = \beta(\tau) + C \tag{9}$$

donde C es una constante de integración, de (7) y (9) se tiene:

$F(\tau) = [h(\tau) + \beta(\tau) + C]/2$, $G(\tau) = [h(\tau) - \beta(\tau) - C]/2$;

entonces

$F(x+t) = [h(x+t) + \beta(x+t) + C]/2$

$G(x-t) = [h(x-t) - \beta(x-t) - C]/2$

Luego

$u(x,t) = [h(x+t) + \beta(x+t) + h(x-t) - \beta(x-t)]/2$;

h y $\beta$ tienen que ser funciones continuamente diferenciables. Estas dos funciones satisfacen todas las condiciones del problema.

Un caso particular es, si:

$h(\tau) = \tau^2$ , $H(\tau) = \tau = \sigma(\tau)$;

entonces

$h(x+t) = (x+t)^2$ , $h(x-t) = (x-t)^2$ .

Como $\beta(\tau)$ es la antiderivada de $\sigma(\tau)$, entonces $\beta(\tau) = \frac{\tau^2}{2}$

y

$\beta(x+t) = \frac{(x+t)^2}{2}$ , $\beta(x-t) = \frac{(x-t)^2}{2}$

por lo tanto

$$u(x,t) = [(x+t)^2 + \frac{(x+t)^2}{2} + (x-t)^2 - \frac{(x-t)^2}{2}]/2$$

$$= x^2 + xt + t^2.$$

$u(x,t)$ es la superficie integral que contiene a la curva uniforme $\Gamma$, definida por las ecuaciones paramétricas:

$x = \tau, \qquad t = 0 , \qquad u = \tau^2.$

TEOREMA DE CAUCHY-KOWALEWSKI.

El problema de Cauchy planteado en las ecuaciones del (22) al (24) es demasiado general y su solución no existe necesariamente. El siguiente teorema de Cauchy-Kowalewski, es un caso particular del problema de Cauchy antes planteado; este teorema, asegura la existencia y unicidad de la solución, solamente en el vecindario de algún punto.

TEOREMA 2.3.1: (Cauchy-Kowalewski)

Sean los coeficientes y G de la ecuación diferencial parcial (21), funciones en una región R del plano xy, el cual contiene el origen. Sea $C(x,y) \neq 0$ en R. Dadas las funciones arbitrarias $h(x)$, $\sigma(x)$, en el segmento de el eje x contenido en R, entonces existe un vecindario N de (0,0) y una solución única $z = \psi(x,y)$ de la ecuación (1) en N, tal que

$\psi(x,0) = h(x) \quad \psi_y(x,0) = \sigma(x)$

en el segmento de el eje x contenido en N.

DEMOSTRACION:

Sea $a = \frac{A}{C} \quad b = \frac{2B}{C} \quad d = \frac{D}{C} \quad e = \frac{E}{C} \quad f = \frac{F}{C} \quad g = \frac{G}{C}$

donde a,b,d,e,f y g son funciones reales de variables x,y en R. El problema de Cauchy se puede escribir, entonces, así:

$$Z_{yy} = -aZ_{xx} - bZ_{xy} - dZ_x - eZ_y - fZ + g$$

$$Z(x,0) = h(x) \qquad Z_y(x,0) = \sigma(x). \tag{31}$$

Consideremos ahora, el problema con valores iniciales para un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales lineales y de primer orden:

$$u_{1y} = u_3$$

$$u_{2y} = u_{3x} \tag{32}$$

$$u_{3y} = -au_{2x} - bu_{3x} - du_2 - eu_3 - fu_1 + g$$

$$u_1(x,0) = h(x) \qquad u_2(x,0) = h'(x) \qquad u_3(x,0) = \sigma(x).$$

Resolver el problema (32) es equivalente a resolver el problema de Cauchy (31); en este sentido, existe una solución única de (32), sí y solamente sí, existe una solución única de (31).

A fín de ver esto, primero supongamos que $Z = \psi(x,y)$ es una solución de (31). Sea

$$u_1(x,y) = \psi(x,y), \quad u_2(x,y) = \psi_x(x,y), \quad u_3(x,y) = \psi_y(x,y). \tag{33}$$

Ya que $Z = \psi(x,y)$ es solución de (31), esta ecuación queda

$$\psi_{yy} = -a\psi_{xx} - b\psi_{xy} - d\psi_x - e\psi_y - f\psi + g. \tag{34}$$

Utilizando las ecuaciones (33), (34) se transforma en

$u_{3y} = - au_{2x} - bu_{2y} - du_2 - eu_3 - fu_1 + g;$

por lo tanto $u_1$, $u_2$ y $u_3$ son solución de (32).

Inversamente, sean $u_1$, $u_2$ y $u_3$ soluciones de (32) y sea $\psi$ definida por

$$\psi(x,y) = u_1(x,y). \tag{35}$$

Probemos que

$$\psi_y = u_3 \quad y \quad \psi_x = u_2. \tag{36}$$

Supongamos que $\psi_y = u_3$ y probemos que $\psi_x = u_2$.

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\psi_x - u_2) &= \psi_{xy} - u_{2y} \\ &= u_{1xy} - u_{2y} \\ &= u_{1yx} - u_{2y} \\ &= u_{3x} - u_{3x} \\ &= 0, \end{aligned}$$

entonces

$\psi_x(x,y) - u_2(x,y) = q(x)$ para alguna función q.

Pero

$$q(x) = \psi_x(x,0) - u2(x,0)$$

$$= u1_x(x,0) - h'(x,0)$$

$$= h'(x,0) - h'(x,0)$$

$$= 0;$$

Luego

$$\psi_x(x,y) = u_2(x,y).$$

Ahora de la tercera ecuación diferencial de (32) y utilizando (35) y (36) se obtiene

$$\psi_{yy} = - a\psi_{xx} - b\psi_{xy} - d\psi_x - e\psi_y - f\psi + g$$

y como también

$$\psi(x,0) = u1(x,0) \;, \qquad \psi_y(x,0) = u_3(x,0)$$

$$= h(x) \qquad\qquad\qquad = \sigma(x)$$

luego, $\psi$ es una solución del problema de Cauchy.

DEFINICION 2.3.2:

Una curva uniforme $\Gamma_o$, cuya ecuación se puede escribir $\psi(x,y) = 0$, con $\psi_y \neq 0$, es una curva característica en el punto $(x_o,y_o)$, si y solamente si satisface la ecuación

$$Q(\psi) = A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = 0 \qquad (37)$$

en el punto $(x_o,y_o)$.

TEOREMA 2.3.3:

Si $\Gamma_o$ es curva no característica a un punto $(x_o, y_o)$, entonces existe una solución de la ecuación (21), la cual satisface las condiciones prescritas del teorema (2.3.1), un algún vecindario de $(x_o, y_o)$.

Prueba:

Primero eliminar $\tau$ de las ecuaciones paramétricas de $\Gamma_o$ y obtener la forma rectangular

$\phi(x,y) = 0.$

Sea $\xi = x - x_o \quad \eta = \phi(x,y)\ , \quad \eta_y \neq 0$ (38)

una transformación en la cual

$$\xi_x\, \eta_y - \xi_y\, \eta_x = (1)\ \eta_y - (0)\eta_y$$

$$\neq 0$$

en algún vecindario de $(x_o, y_o)$. Por consiguiente el mapeo que define la transformación es inyectivo en un vecindario de $(x_o, y_o)$, en el vecindario del origen en el plano $\xi\eta$. El punto $(x_o, y_o)$ es mapeado en el punto (0,0), y la parte de $\Gamma_o$ perteneciente al vecindario de $(x_o, y_o)$ es mapeado a un segmento de el eje $\xi$.

Por lo tanto la ecuación (21) es transformada en

$$Q(\xi)Z_{\xi\xi} + 2Q(\xi,\eta)Z_{\xi\eta} + Q(\eta)Z_{\eta\eta} + D_1 Z_\xi + E_1 Z_\eta + F_1 Z = G_1 \quad (39)$$

donde los coeficientes y G1 son funciones en un vecindario de (0,0).

Pero, ya que $C \neq 0$, entonces el coeficiente de $Z_{\eta\eta}$

$$Q(\eta) = A\phi_x^2 + 2B\phi_x\phi_y + C\phi_y^2 \neq 0 \quad \text{en } (0,0),$$

entonces por definición (2,3.2) $\Gamma_o$ es no característica en $(x_o, y_o)$.

Las condiciones iniciales transformadas son

$$\psi(\xi,0) = \bar{h}(\xi) , \qquad \psi_\eta (\xi,0) = \bar{\sigma}(\xi) \tag{40}$$

donde $\bar{h}$ y $\bar{\sigma}$ son funciones de $\xi$ en un vecindario de $\xi = 0$.

Ahora por el teorema (2.3.1) existe un vecindario de (0,0) y una solución única de la ecuación (39) en el vecindario de (0,0) la cual satisface las condiciones (40) en un segmento del eje $\xi$ el cual contiene a $\xi = 0$. Como la transformación (38) es inyectiva y $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$, entonces (38) es invertible; de esto se sigue que existe un vecindario de $(x_o, y_o)$ y una solución analítica única de la ecuación (21), la cual satisface las ecuaciones (24) en la parte de $\Gamma_o$ perteneciente al vecindario.

COROLARIO 2.3.4:

Si $\Gamma_o$ es una curva característica definida por las ecuaciones (22), entonces, en general, no existe solución del problema de Cauchy.

Demostración:

Sea $\Gamma_o$ definida por

$$x = f(\tau) , \qquad y = g(\tau) \qquad -a < \tau < a$$

Sean

$$\alpha(\tau) = f'(\tau)/\{[f'(\tau)]^2 + [g'(\tau)]^2\}^{1/2}$$

$$\beta(\tau) = g'(\tau)/\{[f'(\tau)]^2 + [g'(\tau)]^2\}^{1/2}$$

$$\vec{T}_o = (f'(\tau)\vec{i} + g'(\tau)\vec{j})/\{[f'(\tau)]^2 + [g'(\tau)]^2\}^{1/2}$$

$$\vec{n} = (-g'\vec{i} + f'\vec{j})/\{[f'(\tau)]^2 + [g'(\tau)]^2\}^{1/2}$$

donde $\vec{T}_o$ es el vector unitario tangente a $\Gamma_o$ y $\vec{n}$ es vector unitario normal a $\Gamma_o$.

Si $\psi(x,y)$ es una función continuamente diferenciable de $x$ y $y$ definida en una región que contiene a $\Gamma_o$, entonces la derivada direccional de $\psi$ en la dirección de $T_o$, o dicho de otro modo, la derivada tangencial de $\psi$ a lo largo de $\Gamma_o$ es

$$D_{T_o}\psi = (\psi_x\vec{i} + \psi_y\vec{j})\circ(\vec{T}_o)$$

$$= \alpha(\tau)\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta(\tau)\,\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad ;$$

entonces el operador tangencial $D_{T_o}$ es

$$D_{T_o} = \alpha\,\frac{\partial}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{41}$$

Como $\psi$ es una función de $\tau$ a lo largo de $\Gamma_o$ y dado que

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{d\tau}$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial x}\,f'(\tau) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,g'(\tau) \quad ,$$

entonces

$$D_{T_o}\psi = \{[f'(\tau)]^2 + [g'(\tau)]^2\}^{1/2}\frac{d\psi}{d\tau}\ .$$

Ahora el operador normal en la dirección $\vec{n}$ está definido por

$$D_n = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j})\circ(\vec{n})$$

$$= -\beta\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\frac{\partial}{\partial y}\ ; \tag{42}$$

Por lo tanto de las ecuaciones (41) y (42) se obtiene

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}D_{T_o} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\ , \tag{43}$$

y

$$D_y = \frac{D_n}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\ . \tag{44}$$

Sustituyendo (44) en (43) se tiene

$$D_x = \frac{1}{\alpha}D_{T_o} - \frac{\beta}{\alpha}(\frac{D_n}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x})\ ,$$

$$= \frac{1}{\alpha}D_{T_o} - \frac{\beta}{\alpha^2}D_n - \frac{\beta^2}{\alpha^2}D_x\ ,$$

$$(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2})D_x = \frac{1}{\alpha}D_{T_o} - \frac{\beta}{\alpha^2}D_n\ ,$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)D_x = \alpha D_{T_o} - \beta D_n\ ;$$

pero $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, entonces

$$D_x = \alpha D_{T_o} - \beta D_n\ . \tag{45}$$

De la misma forma

$$D_y = \beta D_{T_o} + \alpha D_n\ . \tag{46}$$

Utilizando (45) y (46), el operador L de la ecuación (21) puede escribirse así:

$$L = (A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2)D^2_{T_o} + 2[(C - A)\alpha\beta + B(\alpha^2 - \beta^2)]D_{T_o}D_\eta$$

$$+ (A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2)D^2_\eta + (D\alpha + E\beta)D_{T_o} + (E\alpha - D\beta)D_\eta + F; \qquad (47)$$

pero en $(x_o,y_o)$, $\tau = \tau_o$,

$$D_\eta = H \quad y \quad D_{T_o} = \{[f'(\tau_o)]^2 + [g'(\tau_o)]^2\}^{-1/2}\left[\frac{\partial}{\partial x}f'(\tau_o) + \frac{\partial}{\partial y}g'(\tau_o)\right]$$

$$= \gamma h'$$

donde $\gamma = \{[f'(\tau_o)]^2 + [g'(\tau_o)]^2\}^{-1/2}$ .

Ahora suponiendo que $\Gamma_o$ es característica en un punto $(x_o,y_o)$ correspondiente a $\tau = \tau_o$, entonces el coeficientes de $D^2_\eta$ es

$$A\beta^2 - 2B\alpha\beta + \beta^2 = 0$$

en el punto. La ecuación (47) en el punto $(x_o,y_o)$ donde $\tau = \tau_o$ queda:

$$(A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2)h'' + (D\alpha + E\beta)\gamma h' + \gamma^2 Fh = \gamma^2 G -$$

$$2[(C - A)\alpha\beta + B(\alpha^2 - \beta^2)]\gamma H' - (E\alpha - D\beta)\gamma^2 H.$$

Claramente la relación anterior, es una relación entre los datos iniciales los cuales deben satisfacerse a lo largo de la característica. Como h y H no pueden asignarse arbitrariamente, el problema de Cauchy no tiene propiamente solución.

Ejemplo: UNA APLICACION DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN.

Una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden que se estudia en matemática aplicada, es la "Ecuación de Onda". Derivaremos la Ecuación de Onda en una dimensión (la cual representa las vibraciones transversales de una cuerda elástica), así como también la solución general de dicha ecuación y la solución general para un caso particular, es decir, con condiciones iniciales. Esto último constituye precisamente la aplicación del Problema de Cauchy.

DERIVACION DE LA ECUACION DE ONDA: (para una cuerda elástica).

Considérese una cuerda elástica estirada bajo la acción de una tensión T y sujeta por sus extremos a dos puntos del eje x. (Fig. No. 1)

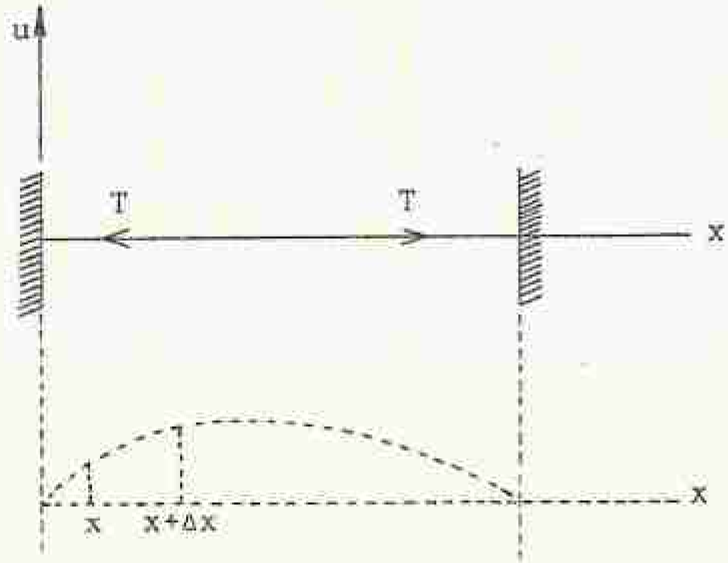


Fig. No. 1

El peso de la cuerda por unidad de longitud cuando ésta se encuentra estirada es $W(x)$.

Sobre la cuerda, además de las fuerzas elásticas y de inercia inherentes al sistema, puede actuar también una carga distribuida (fuerzas gravitatorias, resistencia del aire, etc.) cuyo valor por unidad de longitud suponemos viene dado por una función conocida de $x,u,t$ y de la velocidad transversal $\dot{u}$; supongamos que tal función es $f(x,u,\dot{u},t)$.

La cuerda es puesta en movimiento en $t = 0$; pulsándola por ejemplo, vibrará libremente en un plano vertical.

Para determinar la ecuación diferencial que rige este movimiento, consideraremos un elemento infinitesimal de la cuerda (de longitud $\Delta x$) como si fuera un cuerpo libre (Fig. 1). La masa de este elemento es $\Delta m = \frac{w(x)}{g} \Delta x$; g es la gravedad.

Supongamos que la separación de la cuerda de su posición de equilibrio durante el movimiento es tan pequeña, que el alargamiento que sufre ésta no ejerce ninguna influencia sobre las fuerzas de tensión T y éstas son iguales en los extremos.

Suponiendo también que la cuerda es perfectamente flexible, es decir, sólo puede transmitir la fuerza en sentido longitudinal, entonces las tensiones siguen la dirección de la tangente (en los extremos del segumento) a la curva, curva que adopta la cuerda al deformarse. (Fig. 2).

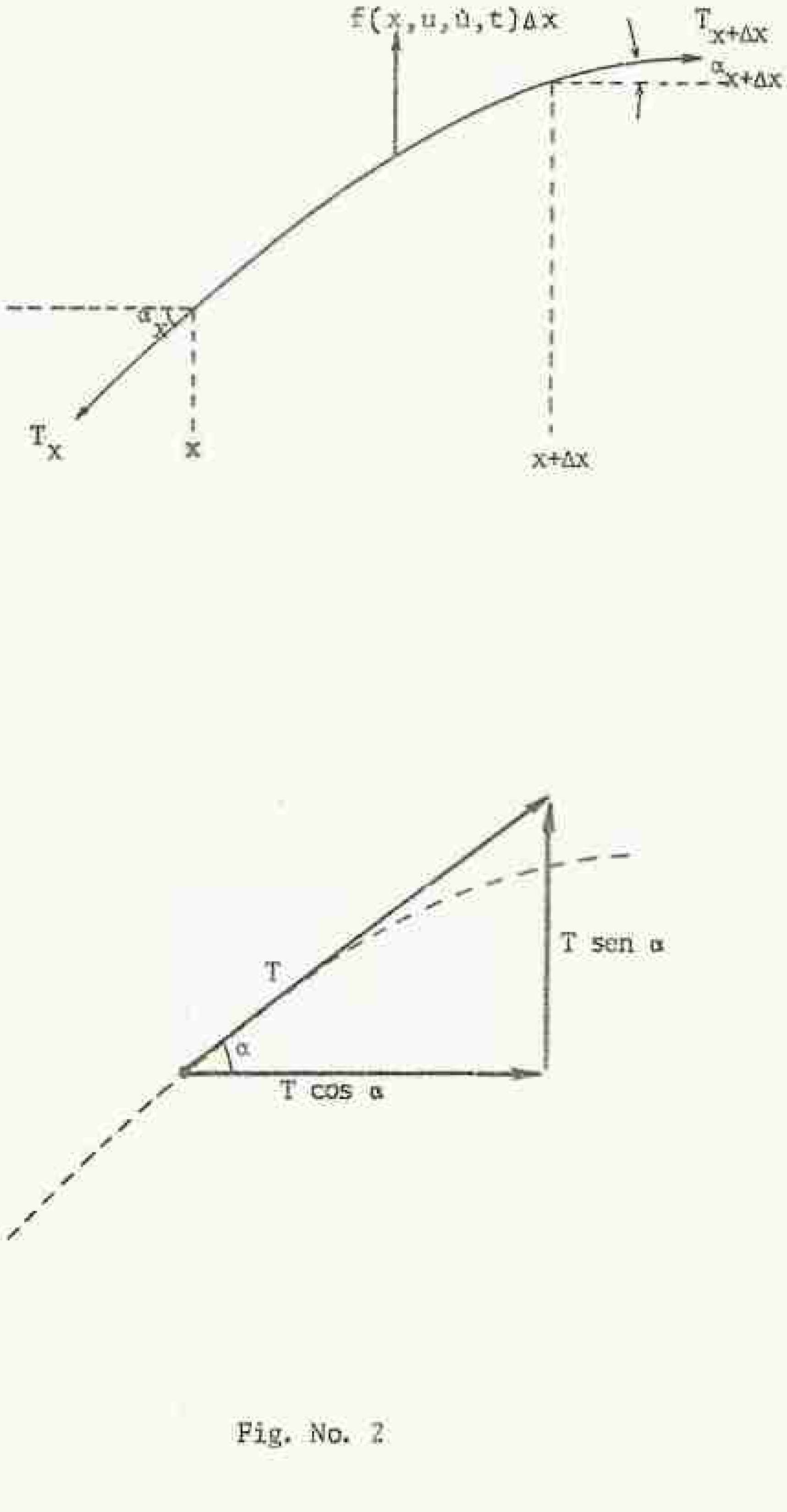
f(x,u,u̇,t)Δx
$T_{x+\Delta x}$
$\alpha_{x+\Delta x}$
$\alpha_x$
$T_x$
x
x+Δx
T
α
T sen α
T cos α

Fig. No. 2

Ahora la Ley de Newton aplicada al elemento de cuerda de longitud $\Delta x$, enuncia que la fuerza neta externa, debida a la tensión en los extremos y a $f(x,u,\dot{u},t)\Delta x$, es igual al producto de la masa del elemento por la aceleración de su centro de masa.

La aceleración que las fuerzas de tensión y la carga distribuida ejercen sobre $\Delta m$ es $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, siendo u la posición transversal del centro de masa para el elemento en un instante t.

Aplicando la anterior ley al elemento en la dirección del eje u, resulta

$$\frac{W(x)}{g}\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \text{ sen } \alpha \Big|_{x+\Delta x} - T \text{ sen } \alpha\Big|_{x} + f(x,u,\dot{u},t)\Delta x \; ; \qquad (1)$$

como $\alpha$ es pequeño sen $\alpha \doteq$ tg $\alpha$ ; entonces

$$\frac{W(x)}{g}\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \tan \alpha\Big|_{x+\Delta x} - T \tan \alpha\Big|_{x} + f(x,u,\dot{u},t)\Delta x \; ;$$

ahora

$$\frac{W(x)}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{(\text{tg } \alpha|_{x+\Delta x} - \text{tg } \alpha|_{x})}{\Delta x} + f(x,u,\dot{u},t) \; ;$$

pero en el límite cuando $\Delta x \to 0$, se tiene

$$\frac{W(x)}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial \text{ tg}\alpha}{\partial x} + f(x,u,\dot{u},t). \qquad (2)$$

Como tg $\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$, entonces la ecuación (2) se convierte en:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T\,g}{W(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{g}{W(x)} f(x,u,\dot{u},t) \qquad (3)$$

Entonces la deformación $u(x,t)$ de una cuerda tensa verifica la ecuación (3).

Pero en la mayoría de los casos, el peso $W(x)$ de la cuerda por unidad de longitud es una constante, y no existen fuerzas exteriores, es decir, $f(x,u,\dot{u},t)$ es nula.

Cuando sucede lo anterior, la ecuación (3) se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \qquad a^2 = \frac{T\,g}{W} \tag{4}$$

llamada "Ecuación de Onda Unidimensional"

SOLUCION DE LA ECUACION (4).

La ecuación (4) se puede escribir

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{5}$$

La ecuación característica del operador L es

$Q(\psi) = \psi_t^2 - a^2\psi_x^2.$

El discriminante de L es

$\Delta = -(-a^2)$

$= a^2 > 0$, entonces la ecuación (5) es hiperbólica.

Como

$m_1 = a \quad y \quad m_2 = -a$

entonces

$$Q(\psi) = (\psi_t - m_1\psi_x)(\psi_t - m_2\psi_x) = 0$$

$$= (\psi_t - a\psi_x)(\psi_t + a\,\psi_x) = 0$$

pero $Q(\xi) = (\xi_t - a\xi_x)(\xi_t + a\xi_x) = 0$

$$Q(\eta) = (\eta_t - a\eta_x)(\eta_t + a\eta_x) = 0.$$

Entonces escojamos $\eta$ y $\xi$ de tal manera que

$$\xi_t - a\xi_x = 0 \qquad \eta_t + a\eta_x = 0. \tag{6}$$

Los sistemas de Lagrange para las ecuaciones (6) son

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-a} = \frac{d\xi}{0} \qquad \frac{dt}{1} = \frac{dx}{a} = \frac{d\eta}{0}$$

$-at = x + K \quad \xi = K_1 \qquad at = x + C \quad \eta = C_1$ ó

$$x + at = K_1 \qquad x - at = C_1\ ;$$

luego

$$\xi(x,t) = x + at \quad y \quad \eta(x,t) = x - at. \tag{7}$$

Utilizando las ecuaciones (7) resulta

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$= u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x$$

$$= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t$$

$$= au_\xi - au_\eta$$

$$u_{tt} = a(u_{\xi\xi}\xi_t - u_{\xi\eta}\eta_t) - a(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t)$$

$$= a^2(u_{\xi\xi} - 2au_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}).$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la ecuación (5) se tiene

$$a^2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = 0$$

$$4u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_\xi = F(\eta)$$

$$u(\xi,\eta) = F(\eta) + G(\xi) \qquad (8)$$

Sustituyendo (7) en (8) se tiene

$$u(x,t) = F(x - at) + G(x + at) \qquad (9)$$

La ecuación (9) es la solución general de la ecuación (5).

SOLUCION GENERAL CON CONDICIONES INICIALES.

Para describir completamente el movimiento de la cuerda, es necesario especificar condiciones iniciales y de frontera apropiadas para el desplazamiento $u(x,t)$.

Supongamos que los extremos de la cuerda permanecen fijos, entonces las condiciones de frontera son:

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \quad ; \qquad t > 0 \qquad (10)$$

Las condiciones iniciales son: la posición inicial de la cuerda, es decir en $t = 0$, es

$$u(x, 0) = h(x) \quad ; \qquad 0 < x < \ell \tag{11}$$

y su velocidad inicial

$$u_t(x,0) = \sigma(x) \ ; \qquad 0 < x < \ell \tag{12}$$

Para que las ecuaciones (10) y (11) sean consistentes, es necesario exigir que

$$h(0) = h(\ell) = 0. \tag{13}$$

Por otra parte, las condiciones iniciales son suficientes (ver análisis de condiciones iniciales del ejemplo de página 88) e identificar el problema de la cuerda vibrante como el problema de Cauchy exactamente. Entonces de las ecuaciones (11), (12) y (9) se tiene que

$$u(x,0) = h(x) = F(x) + G(x) \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= u_t(x,0) \\ &= aG'(x) - aF'(x). \end{aligned} \tag{15}$$

Sea $\beta$ una primitiva de $\sigma$, entonces (15) implica que

$$aG(x) - aF(x) = \beta(x) + C \tag{16}$$

donde C es una constante de integración.

De (14) y (16) se tiene

$$F = \left[h - \frac{1}{a}\beta - \frac{C}{a}\right]/2, \qquad G = \left[h + \frac{1}{a}\beta + \frac{C}{a}\right]/2;$$

entonces

$$F(x - at) = \left[h(x - at) - \frac{1}{a}\beta(x - at) - \frac{C}{a}\right]/2$$

$$G(x + at) = \left[h(x + at) + \frac{1}{a}\beta(x + at) + \frac{C}{a}\right]/2$$

Luego

$$u(x,t) = [h(x-at) + h(x + at) - \frac{1}{a}\beta(x - at) + \frac{1}{a}\beta(x + at)]/2$$

donde h y $\beta$ son continuamente diferenciables y satisfacen las condiciones del problema en su totalidad.

Una expresión más elegante para u sería:

$$u(x,t) = \frac{h(x - at) + h(x + at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x_o}^{x-at}\sigma(S)\,dS + \frac{1}{2a}\int_{x_o}^{x+at}\sigma(S)\,dS$$

$$= \frac{h(x - at) + h(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sigma(S)\,dS.$$

ya que $\beta$ es la antiderivada de $\sigma$.

Un caso particular para la deformación transversal u de la cuerda, es cuando se conoce la ecuación h(x) que describe la configuración de la cuerda y la velocidad inicial en t = 0.

PROBLEMA DE CAUCHY PARA ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN EN n VARIABLES INDEPENDIENTES.

DEFINICION 2.3.5:

Sean $X = (x_1, \ldots, x_n)$ y $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ puntos (vectores) del espacio vectorial euclideano $\mathbb{R}^n$; entonces:

a) El Producto Escalar X por Y, viene dado por:

$$X \circ Y = x_1y_1 + \ldots\ldots + x_ny_n.$$

b) La longitud del vector X viene dado por:

$$|X| = (x_1^2 + \ldots\ldots + x_n^2)^{1/2} = (X \circ X)^{1/2}$$

DEFINICION 2.3.6:

Sea $X_o$ un vector dado de $\mathbb{R}^n$ y sea r un número real positivo; entonces el conjunto de todos los X en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$|X - X_o| = r$$

se llama "Esfera de radio r alrededor de $X_o$", y el conjunto de todos los puntos tal que

$$|X - X_o| < r$$

se llama "Interior de la Esfera" o "r vecindario de $X_o$"; este conjunto se simboliza por $N_r(X_o)$.

DEFINICION 2.3.7:

Sea S un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$. Un punto $X_o$ es llamado "punto interior" de S, si existe un vecindario $N_r(X_o)$ el cual consiste enteramente de puntos de S.

DEFINICION 2.3.8:

Un conjunto S se llama "abierto", si cada punto de S es un pun_ to interior de S.

DEFINICION 2.3.9:

Un "arco" en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de puntos definidos por las funciones

$x_i = g_i(S) \qquad i = 1, \ldots\ldots, n; \qquad a < S < b$

donde S es un número real y las funciones $g_i$ son continuas en (a,b).

El arco es "Uniforme" si las funciones $g_i$ son continuamente diferenciables en (a,b).

Si cada función $g_i$ tiene segunda derivada contínua, el arco se llama dos veces uniforme.

DEFINICION 2.3.10:

Una "Región en $\mathbb{R}^n$" es un conjunto abierto tal que, dados un par de puntos X, Y en el conjunto, existe un arco dos veces uniforme el cual pertenece al conjunto y une los puntos.

DEFINICION 2.3.11:

Se define una "Superficie en $\mathbb{R}^n$"por la ecuación:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{48}$$

donde F es una función que toma valores reales, que tienen derivadas parciales contínuas y además:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 \neq 0.$$

Tal superficie se llama "Superficie Uniforme".

DEFINICION 2.3.12:

Una superficie en $\mathbb{R}^n$ en (n - 1) parámetros reales $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$, se define por:

$$X_i = \psi_i(S_1, \ldots, S_{n-1}) \qquad i=1,\ldots, n , \tag{49}$$

donde las funciones $\psi_i$ son continuamente diferenciables y los Jacobianos

$$J_i = \frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}, \psi_{i+1}, \ldots, \psi_n)}{\partial(S_1, \ldots, S_{n-1})} \qquad i=1, \ldots, n \tag{50}$$

no son simultáneamente iguales a cero.

DEFINICION 2.3.13:

Sea $u = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ es una función diferenciable en las n variables $x_1, x2, \ldots x_n$, entonces el "gradiente de u", denotado por $\Delta u$, es el vector

$$\Delta u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) . \tag{51}$$

DEFINICION 2.3.14:

Sea S una superficie uniforme definida por la ecuación (48). "La Normal" en el punto $X_o$ de S es el vector

$$\gamma = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \tag{52}$$

donde $\nabla F$ y $|\nabla F|$ son valuados en $X = X_o$.

"El plano tangente" a S en $X_o$, es la superficie uniforme de todos los puntos X en $\mathbb{R}^n$ que satisfacen

$$(X - X_o)\circ\nabla F = 0. \tag{53}$$

DEFINICION 2.3.15:

Sea S una superficie definida paramétricamente por las ecuaciones (49) y sea

$$\gamma_i = (-1)^{n-i}\, J_i\ , \qquad i=1,\ldots\ldots, n \tag{54}$$

donde $J_1, \ldots, J_n$ son los Jacobianos definidos en (50); entonces, si $X_o$ es un punto en S correspondiente a los valores $S_{10}, \ldots, S_{n-1,0}$ de los parámetros S, "la normal a $X_o$" es el vector

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)/(\gamma_1^2 + \ldots\ldots + \gamma_n{}^2)^{1/2} \tag{54}$$

donde $\gamma_i$ son evaluados en $S_{10}, \ldots\ldots, S_{n-1,0}$.

La derivada de la función u en la dirección de la normal $\gamma$ a la superficie está definida por

$$\frac{\partial u}{\partial\gamma} = \Delta u \circ \gamma \tag{55}$$

llamada frecuentemente "derivada normal".

PROBLEMA DE CAUCHY PARA E.D.P. DE SEGUNDO ORDEN EN "n VARIABLES INDEPENDIENTES".

"El Problema de Cauchy" para ecuaciones lineales de segundo orden en n variables independientes es como sigue:

Sea

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = G \qquad (56)$$

una ecuación lineal de segundo orden; donde los coeficientes y G son contínuas en una región R.

Sea $S_o$ una superficie uniforme en R definida por las ecuaciones (49).

Dadas las funciones arbitrarias h,H con derivadas contínuas en los parámetros $S_1, \ldots, S_{n-1}$, determinar una solución u de la ecuación (56) tal que

$$u = h(S_1, \ldots, S_{n-1}) \qquad \frac{\partial u}{\partial \gamma} = H(S_1, \ldots, S_{n-1}) \qquad (57)$$

en S, donde $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$ es la derivada normal. Las funciones $\phi_i$, i=1, ...., n, h y H constituyen "los datos iniciales" del problema y $S_o$ es llamada "superficie inicial".

Si en lugar de la derivada normal, las n primeras derivadas parciales de u son prescritas en S, entonces las ecuaciones (56) son reemplazadas por

$$u = h(S_1, \ldots, S_{n-1}) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \rho_i(S_1, \ldots, S_{n-1}) \qquad i=1, \ldots, n \qquad (58)$$

donde $\rho_1, \ldots, \rho_n$ son funciones continuamente diferenciables. En este caso la derivada normal es conocida en virtud de las ecuaciones (51) y (54). Sin embargo, ahora los datos no pueden prescribirse en forma arbitraria, ya que

$$\frac{\partial u}{\partial S_K} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial S_K} \qquad K=1, \ldots\ldots, n-1$$

implica que las n-1 relaciones

$$\frac{\partial h}{\partial S_K} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \psi i}{\partial S_K}, \qquad K=1, \ldots., n-1 \tag{59}$$

deben satisfacerse entre los datos.

TEOREMA 2.3.16: (CAUCHY-KOWALEWSKI EN n VARIABLES).

Sean los coeficientes y G en la ecuación (56) analíticos en una región R la cual contiene el origen $(0, \ldots., 0)$. Asumamos que $A_{nn} \neq 0$ en R.

Sea $R_o$ la proyección de R en el plano $x_n = 0$ (o sea el conjunto de todos los puntos $X \in \mathbb{R}^n$ tal que $X = (x1, \ldots, x_{n-1}, 0)$).

Dadas las funciones arbitrarias h,H de las variables $x1, \ldots\ldots, x_{n-1}$, analíticas en $R_{o,}$ existe un vecindario $N_r(0, \ldots., 0)$ y una única solución u de la ecuación (56) en $N_r$ tal que

$$u(x_1, \ldots., x_{n-1}, 0) = h(x_1, \ldots., x_{n-1}) \tag{60}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n = 0} = H(x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}) \tag{61}$$

en la proyección de $N_r$ en el plano $x_n = 0$.

DEMOSTRACION:

Ver apéndice de Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems, de René Dennemeyer (Págs. 321-327).

## 2.4) OPERADOR ADJUNTO Y AUTO-ADJUNTO PARA ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN.

TEOREMA 2.4.1:

Sea L el operador lineal de segundo orden de la forma:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + C \qquad (64)$$

Asumamos que los coeficientes en L tienen segundas derivadas continuas con respecto a $x_1, \ldots, x_n$, en alguna región R del espacio n-dimensional. Asumamos también que $A_{ij} = A_{ji}$; $i,j=1,\ldots, n$, en R. Entonces para cualquier par de funciones u,v con segundas derivadas continuas en R, la siguiente identidad se satisface:

$$vLu - uL^*v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \left\{ v \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\} + uv \left( B_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \right) \right] \qquad (65)$$

donde:

$$L^*v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} (A_{ij} v) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i v) + Cv.$$

DEMOSTRACION:

Como:

$$vA_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\ \partial x_j} = vA_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial xj}\right)$$

$$= vA_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial vA_{ij}}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial A_{ij}v}{\partial x_i}\right)$$

$$= \left[vA_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial vA_{ij}}{\partial x_i}\right)\right] - \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial A_{ij}v}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(vA_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ij}v)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(vA_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ij}v) - u\frac{\partial^2}{\partial x_j\ \partial x_i}(A_{ij}v)$$

$$+ u\frac{\partial^2}{\partial x_j\ \partial x_i}(A_{ij}v)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(vA_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[u\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ij}v)\right] + u\frac{\partial^2}{\partial x_j\ \partial x_j}(A_{ij}v) \qquad (66)$$

para cada par de enteros i,j en el rango de 1...... n.

También

$$vB_i\frac{\partial u}{\partial x_i} = B_i v\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$= B_i v\frac{\partial u}{\partial x_i} + uB_i\frac{\partial v}{\partial x_i} + uv\frac{\partial B_i}{\partial x_i} - uB_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - uv\frac{\partial B_i}{\partial x_i}$$

$$= B_i\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + uv\frac{\partial B_i}{\partial x_i} - u\left(B_i\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\frac{\partial B_i}{\partial x_i}\right)$$

$$= B_i\left[\frac{\partial}{\partial x_i}uv\right] + uv\frac{\partial B_i}{\partial x_i} - u\frac{\partial}{\partial x_i}B_iv$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}(B_iuv) - u\frac{\partial}{\partial x_i}(B_iv) \tag{67}$$

para cada fijación del entero i, i=1,...., n.

Entoncesy puesto que $A_{ij} = A_{ji}$:

$$vLu = v\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}vA_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}vB_i\frac{\partial u}{x_i} + vcu \tag{68}$$

Sustituyendo (66) y (67) en (68) resulta

$$vLu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(vA_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[u\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ij}v)\right] + u\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_i}(A_{ij}v)\right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(B_iuv) - u\frac{\partial}{\partial x_i}(B_iv)\right] + vcu$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_i}(A_{ij}v) - \sum_{i=1}^{n}u\frac{\partial}{\partial x_i}(B_iv) + vcu\right]$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(vA_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[u\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ij}v)\right]\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(B_iuv)\right]$$

$$= u\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_i}(A_{ij}v) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(B_i v) + cv\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[v\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n}u\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ij}v) + B_i uv\right] \tag{69}$$

El operador lineal de segundo orden L* está definido por

$$L^*v = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}(A_{ij}v) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(B_i v) + cv \tag{70}$$

y es llamado "Operador Adjunto de L".

Entonces de (69) y (70) se tiene:

$$vLu - uL^*v = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[v\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n}u\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ij}v) + B_i uv\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[v\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right.$$

$$\left. - u\sum_{j=1}^{n}v\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij} + B_i\,uv\right]$$

$$vLu - uL^*v = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\right.$$

$$\left. + uv\left(B_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}\right)\right] \tag{71}$$

La ecuación (55) es llamada "Identidad de Lagrange".

DEFINICION 2.4.2:

Se llama "Campo Vectorial V" sobre $\mathbb{R}^n$ al conjunto de n-uplas ordenadas de funciones que toman valores en $\mathbb{R}$, es decir:

$$V = \{(V1(x), V_2(x), \ldots\ldots, V_n(x)) \text{ tal que } V_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i=1,2,\ldots, n\}$$

DEFINICION 2.4.3:

La "Divergencia" del campo vectorial es la función escalar

$$\nabla \circ V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

DEFINICION 2.4.4:

Sea R una región en el espacio n-dimensional y sea b(R) la frontera de R. Entonces R es llamada una "Región Regular" si

$$\int_R \nabla \circ V\, d\tau = \int_{b(R)} V \circ \vec{dS} \qquad \text{(Teorema de la Divergencia)} \qquad (72)$$

$$= \int_{b(R)} V \circ \gamma d\sigma$$

$$= \int_{b(R)} \sum_{i=1}^{n} V_i\ \gamma_i\ d\sigma \qquad (73)$$

se satisface para cualquier campo vectorial V cuyas componentes $V_i$ son funciones continuamente diferenciables en R y en la frontera b(R).

Aquí $d\tau = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ es el elemento de volumen en R, $d\sigma$ es el elemento de superficie en la frontera b(R) y $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ es el vector unitario normal exterior a b(R) en $d\sigma$.

TEOREMA 2.4.5:

Sea R una región regular y u,v un par de funciones con segundas derivadas continuas en R y sobre la frontera b(R). Asumamos también que cada coeficiente de (64) tiene esta misma propiedad, entonces se cumple

$$\int_R (vLu - uL^*v)d\tau = \int_{b(R)} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \; \gamma_i\right)d\sigma \qquad (74)$$

donde

$$P_i(x) = v \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} + uv\left(B_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij}\right)$$

$i=1,\ldots,n$ y $P(x) = (P_1(x), \ldots, P_n(x))$.

DEMOSTRACION:

Según la identidad de Lagrange sobre R se tiene

$$vLu - uL^*v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i}$$

$$= \nabla \cdot P \quad ; \qquad (75)$$

integrando (75) sobre R:

$$\int_R (vLu - uL^*v)d\tau = \int_R \nabla \circ P d\tau . \qquad (76)$$

Como R es regular, se puede aplicar el teorema de la divergencia sobre el miembro de la derecha en la ecuación (76); de lo que resulta:

$$\int_R (vLu - uL^*v)d\tau = \int_{b(R)} (\sum_{i=1}^{n} P_i \gamma_i)d\sigma \qquad (77)$$

La ecuación (77) se llama "Fórmula de Green" para el operador L.

TEOREMA 2.4.6:

Sea L el operador de la ecuación (64) y sea M el operador

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial}{\partial x_i} + G$$

donde los coeficientes de M y L tiene segundas derivadas continuas en R. Entonces M = L si y sólo si $E_{ij}(x) = A_{ij}(x)$,

$F_i(x) = B_i(x)$, $G(x) = C(x)$ en R, i, j = 1,....., n.

DEMOSTRACION:

L y M tienen el mismo dominio: la clase de todas las funciones u en R tal que Lu y Mu son funciones bien definidas en R.

Decir que M = L significa que Mu = Lu es una identidad en x sobre R para toda u del dominio.

Es claro que afirmar la igualdad de los coeficientes es suficiente para asegurar que $M = L$.

Supongamos ahora que $M = L$, entonces $Mu = Lu$ se satisface para cualquier polinomio en las variables $x_i, \ldots, x_n$. Elijamos $u = 1$; entonces

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, de ahí que $Mu = G$ y $Lu = C$; por lo tanto

$G = C$, $\forall x \in R$. Elijamos $u = x_1$; entonces

$Mu = F_1 + Gx_1$ y $Lu = B1 + Cx_1$; como $Mu = Lu$ y $G = C$, resulta ta que $F1 = B1$, para todo $x$ en $R$. De esta manera se puede establecer la identidad para el resto de coeficientes de M y L.

DEFINICION 2.4.7:

El operador L en la ecuación (64) se llama "Auto-Adjunto" si $L^* = L$.

TEOREMA 2.4.8:

El operador L en la ecuación (64) es auto-adjunto si y solamente si

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} = B_i, \quad i=1, \ldots, n \tag{79}$$

DEMOSTRACION:

Supongamos que L es auto-adjunto, entonces L = L*, luego

$$Lu = L^*v \tag{80}$$

se satisface para cualquier x en R, y cualquier función v del dominio de L.

Utilizando la identidad de Lagrange y haciendo u = v resulta

$$vLv - uL^*v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\left(v\frac{\partial v}{\partial x_j} - v\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + v^2\left(B_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}\right)\right]. \tag{81}$$

Sustituyendo (80) en (81) queda

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[v^2\left(B_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(B_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}\right)\frac{\partial v^2}{\partial x_i} + v^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial v^2}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}\right)\frac{\partial v^2}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}\right)\frac{\partial v^2}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial v^2}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v^2\frac{\partial B_i}{\partial x_i} \tag{82}$$

Por el teorema (2.4.6)

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij} = B_i. \tag{83}$$

Para que la igualdad (82) se cumpla se necesita que

$$\sum_{i=1}^{n} v^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} v^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} - B_i\right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i - B_i) = 0.$$

La otra implicación resulta inmediata de la ecuación (65).

COROLARIO 2.4.9:

Si L es un operador auto-adjunto, entonces L es de la forma

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}) + C \tag{84}$$

DEMOSTRACION:

Como L es auto-adjunto, entonces $L = L^*$ y $Lv = L^*v$.

Pero

$$L^*v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} (A_{ij}v) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (E_i u) + Cv$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ij}v) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i v) + Cv$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} + v \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij}\right] - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i v) + Cv;$$

como L es auto-adjunto, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} = B_i \text{ ; por lo tanto}$$

$$L^*v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{x_i} \left[ \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} + vB_i \right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (vB_i) + Cv \text{ ;}$$

$$Lv = L^*v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j}) + Cv$$

entonces

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}) + C$$

TEOREMA 2.4.10:

Si L es un operador auto-adjunto, entonces para cada par de funciones u,v con las mismas propiedades de continuidad asumidas anteriormente, la fórmula de Green toma la forma:

$$\int_R (vLu - uLv)d\tau = \int_{b(R)} (\sum_{i=1}^{n} P_i \gamma_i) d\sigma \text{ .} \qquad (85)$$

DEMOSTRACION:

Como L es auto-adjunto, entonces $Lv = L^*v$ y $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} = B_i$.

Utilizando el teorema (2.4.1), la ecuación (65) se transforma en:

$$vLu - uLv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum_{j=1}^{n} A_{ij} (v \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial v}{\partial x_j}) \right].$$

Haciendo

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) , \qquad i=1,\ldots\ldots, n$$

$$vLu - uLv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} P_i(x) , \qquad i=1,\ldots\ldots, n.$$

En el teorema (2.4.5), la ecuación (74) queda

$$\int_R (vLu - uLv)d\tau = \int_{b(R)} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \ \gamma_i\right)d\sigma$$

EJERCICIO:

Sea L el operador lineal de segundo orden

$$L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F \qquad (1)$$

donde los coeficientes son funciones con segundas derivadas continuas, en una región R del plano xy. Entonces:

a) Escribir una expresión para el operador adjunto $L^*$ de L.

SOLUCION

Como L, escrito en forma compacta es

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \ \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + F \qquad (2)$$

donde $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $A11=A, A12=A21 = B, A22 = C, B1 = D, B2 = E,$ entonces

$$L^* = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} A_{ij} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} B_i + F; \tag{3}$$

es decir

$$L^* = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} - D \frac{\partial}{\partial x} - E \frac{\partial}{\partial y} + F \tag{4}$$

b) Probar que la identidad de Lagrange, para cualquier par de funciones u,v con segundas derivadas continuas en R, se transforma en:

$$uLu - uL^*v = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{5}$$

donde

$$Q = A(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}) + B(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}) + (D - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y})uv$$

$$P = B(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}) + C(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}) + (\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} - E)uv.$$

PRUEBA:

Según la identidad de Lagrange para n = 2

$$vLu-uL^*v = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^{2} A_{ij} (v \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial v}{\partial x_j}) + uv(B_i - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[A_{i1} (v \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial v}{\partial x_1}) + A_{i2} (v \frac{\partial u}{\partial x_2} - u \frac{\partial v}{\partial x_2}) + uv(B_i - \frac{\partial A_{i1}}{\partial x_1} - \frac{\partial A_{i2}}{\partial x_2}) \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[A11(v\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{u\partial v}{\partial x_1}) + A_{12}(v\frac{\partial u}{\partial x_2} - u\frac{u\partial v}{\partial x_2}) + uv(B_1 - \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2}\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left[A_{21}(v\frac{\partial u}{\partial x_1} - u\frac{\partial v}{\partial x_1}) + A_{22}(v\frac{\partial u}{\partial x_2} - u\frac{\partial v}{\partial x_2}) + uv(B_2 - \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2})\right]$$

Regresando a las variables y constantes iniciales, la ecuación anterior se convierte en

$$vLu-uL^*v = \frac{\partial}{\partial x}\left[A(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}) + B(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}) + uv(D - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y})\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[B(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}) + C(v\frac{\partial v}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}) + uv(E - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y})\right]$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

c) Sea $\Gamma$ una curva cerrada perteneciente a R y R1 la región de R encerrada por $\Gamma$. Probar que

$$\int_{R1}\int (vLu - uL^*v)dxdy = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy \qquad (6)$$

PRUEBA:

De la ecuación (5) se obtiene:

$$\int_{R_1}\int (vLu - uL^*v)dxdy = \int_{R_1}\int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$= \int_{R_1}\int \nabla x(P\vec{i} + Q\vec{j}) \circ dxdy\vec{k} .$$

Por el teorema de Stokes para un plano, se tiene

$$\int_{R_1}\int (vLu - uL^*v)dxdy = \oint_{\Gamma} (P\vec{i} + Q\vec{j})\circ(dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

$$= \oint_{\Gamma} (Pdx + Qdy). \qquad (7)$$

En la ecuación anterior, se llama "Integral de Linea" al miembro de la derecha, el cual toma valores en el sentido positivo alrededor de $\Gamma$.

d) Probar directamente de la expresión para el operador adjunto de L, que el adjunto de el adjunto de L es L, es decir:

$$L^{**} = L \qquad (8)$$

PRUEBA:

Inmediato.

e) Probar que L es auto-adjunto si y solamente si, las ecuaciones

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = D \qquad \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = E$$

PRUEBA:

Inmediato por el teorema (2.4.8), donde $n = 2$.

f) Probar que el operador auto-adjunto de segundo orden en el caso para $n = 2$, tiene la forma:

$$L = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial}{\partial x} + C\frac{\partial}{\partial y}\right) + F \qquad (9)$$

PRUEBA:

Inmediato del corolario (2,4.9) para $n = 2$

g) Sea el operador Laplaciano

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{10}$$

Usar la ecuación (7) para obtener la relación

$$\int_{R_1}\int (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)dxdy = \oint_{\Gamma} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})ds \tag{11}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota la derivada direccional de u, en la dirección de la normal exterior $\vec{n}$ sobre $\Gamma$. La relación (11) es llamada "Forma Simétrica" del teorema de Green en el plano.

SOLUCION:

$$v\nabla^2 u - u\nabla^2 v = v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) - u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2})$$

$$= vLu - uLv;$$

pero $L = L^*$; entonces $Lv = L^*v$; por lo tanto

$$v\nabla^2 u - u\nabla^2 v = vLu - uL^*v.$$

Luego

$$\int_{R_1}\int (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)dxdy = \int_{R_1}\int (vLu - uL^*v)dxdy$$

$$= \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy), \text{ según (7).} \tag{12}$$

Tomando en cuenta que L es el operador Laplaciano, la ecuación (12) queda:

$$= \int_\Gamma (v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x})dx + (v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y})dy$$

$$= \int_\Gamma \left[ (v \frac{\partial u}{\partial x} dx + v \frac{\partial u}{\partial y} dy) - (u \frac{\partial v}{\partial x} dx + u \frac{\partial v}{\partial y} dy) \right]$$

$$= \int_\Gamma \left[ v(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}) \circ (dx\vec{i} + dy\vec{j}) - u(\frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j}) \circ (dx\vec{i} + dy\vec{j}) \right]$$

$$= \int_\Gamma \left[ v(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}) - u(\frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j}) \right] \circ (dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

$$= \int_\Gamma (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS.$$

# CAPITULO III

## ECUACIONES DIFERENCIALES ELIPTICAS

### 3.1 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA PARA ECUACIONES ELIPTICAS.

DEFINICION 3.1.1:

Sea $R$ una región acotada con frontera $S$. Llamaremos cierre de $R$ a la expresión $\bar{R} = R + S$ que es la unión de $R$ con su frontera $S$.

3.1.2: PROBLEMA DE DIRICHLET PARA UNA REGION R.

Sea $R$ una región acotada con frontera $S$, $\bar{R} = R + S$. Sea $L$ un operador diferencial parcial auto-adjunto lineal de 2o. orden elíptico. Sea $g$ una función dada contínua en $S$, $f$ una función dada contínua en $\bar{R}$. El problema de Dirichlet es aquel que consiste en determinar una solución de la ecuación

$$Lu = f \text{ en } R \tag{1}$$

tal que

a) $u$ sea contínua en $\bar{R}$.

b) $u = g$ en $S$.

La condición b) es llamada "la condición de frontera de Dirichlet".

3.1.3: PROBLEMA DE NEUMANN.

Consiste en determinar una solución de la ecuación (1), la cual tenga primer derivada contínua en R y satisfaga

$$\frac{\delta u}{\delta n} = g \text{ en } S \tag{2}$$

en donde $\frac{\delta u}{\delta n}$ denota la derivada en la dirección de la normal exterior a S.

(2) es llamada la condición de frontera de Neumann.

3.1.4: PROBLEMA MIXTO O DE ROBIN.

Consiste en determinar una solución de la ecuación (1), la cual tenga primer derivada contínua en R, y satisfaga

$$a\frac{\delta u}{\delta n} + bu = g \text{ en } S. \tag{3}$$

donde a,b y g son funciones contínuas dadas en S, a y b no desaparecen simultáneamente. (3) es la condición de frontera mixta.

Existe otra clase de problemas, y es cuando la frontera en la cual se busca una solución de la ecuación (1), es una región exterior a una superficie cerrada; en este caso el problema es llamado "Problema Exterior" en el cual se impone una condición al infinito, el cual rige el comportamiento de la solución a gran distancia del origen.

Los problemas descritos anteriormente, son problemas lineales con valores en la frontera. Consideremos varias combinaciones de ellos, y notemos algunas consecuencias de la linealidad.

TEOREMA 3.1.5. (PRINCIPIO DE SUPERPOSICION). Si $u_1,u_2$ son soluciones de los problemas de Dirichlet.

$Lu1 = f_1$ en R, $u_1 = g_1$ sobre S

$Lu2 = f_2$ en R, $u_2 = g_2$ sobre S

$c_1, c_2$ constantes, entonces la función $u = c1u1 + c_2u2$ es una solución al problema de Dirichlet:

$Lu = c_1f_1 + c_2f_2$ en R, $u = c_1g_1 + c_2g_2$ en S.

DEMOSTRACION.

Trivial.

TEOREMA 3.1.6:

Dado el problema de Dirichlet; y sea v una función contínua en R, tal que $Lv = f$ en R. Sea $g_1 = v$ sobre S. Si w satisface $Lw = 0$ en R y $w = g - g_1$ en S, entonces $u = v + w$ es una solución del problema de Dirichlet.

DEMOSTRACION.

Probemos que:

a) $Lu = f$ en R,

b) u es contínua en $\overline{R}$,

c) $u = g$ en S.

Sea $v = u + w$ entonces:

$Lv = L(v + w)$

$= Lv + Lw$, por ser L lineal;

$= f + 0$ , ya que w es solución de $Lw = 0$ en R;

$= f$ en R.

Como v es contínua en R, y w es contínua en R, por ser solución de $Lw = 0$, entonces $u = v + w$ es contínua en R.

Por otra parte, $v = g_1$ en S y $w = g - g_1$ en S, entonces $u = g_1 + g - g_1 = g$; como g es contínua en S, luego u es contínua en S; por lo tanto, $u = v + w$ es contínua en $\overline{R}$.

Por consiguiente:

$u = v + w$ es solución al problema de Dirichlet.

TEOREMA 3.1.7. Sea el Problema

$Lu = 0$ en R, $u = g_1$ sobre $S_1$ y $u = g2$ sobre $S_2$, donde la frontera de R es $S = S_1 \cup S_2$. Si $u_1$,u2 son soluciones de $Lu = 0$ y $u_1 = g_1$ sobre $S_1$, $u_1 = 0$ en $S_2$. $u2 = 0$ en $S_1$ y $u2 = g2$ sobre $S_2$, entonces $u = u_1 + u2$ satisface el problema original.

DEMOSTRACION.

Trivial.

TEOREMA 3.1.8. Dado el problema de Robin y si g no es identicamente cero, elijamos una función v con segunda derivada contínua tal que, v satisfaga la ecuación (3) sobre S.

Sea $f_1 = Lv$. Si w satisface $Lw = f - f_1$ en R y $\frac{\delta w}{\delta n} + bw = 0$, entonces $u = v + w$ es solución al problema original.

DEMOSTRACION:

Sea $u = v + w$ entonces

$$Lu = L(v + w)$$

$$= Lv + Lw$$

$$= f_1 + f - f_1 \text{ en } R$$

$$= f \text{ en } R.$$

También u es contínua en R ya que v y w lo son.

Por otra parte

$\frac{\delta w}{\delta n} + bw = 0$, luego

$$\frac{\delta}{\delta n}(u - v) + b(u - v) = 0$$

$$\frac{\delta u}{\delta n} + b\,u = \frac{\partial v}{\partial n} + bv$$

$$= g \text{ sobre } S;$$

entonces u es contínua sobre S. Luego u es contínua en $\overline{R}$.

Procedimientos análogos a los descritos en los teoremas anteriores, se usan para resolver el problema de Neumann.

3.2 ECUACION DE LAPLACE, FUNCIONES ARMONICAS Y PROPIEDADES.

DEFINICION 3.2.1.

Llamaremos Ecuación de Laplace, en dos variables independientes, a la ecuación diferencial de tipo elíptico

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0 \,. \tag{1}$$

La ecuación correspondiente en tres dimensiones es:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = 0 \tag{2}$$

llamada "Ecuación de Laplace en el Espacio".

DEFINICION 3.2.2.

La expresión $\Delta u$, la llamaremos Laplaciano de u, en dos o tres dimensiones.

DEFINICION 3.2.3.

La ecuación no homogenea correspondiente a (1) es llamada "Ecuación de Poisson en el plano", cuya forma es:

$$\Delta u = f(x,y) \tag{3}$$

FUNCIONES ARMONICAS.

DEFINICION 3.2.4.

Llamaremos Funciones Armónicas o Funciones Potenciales, a las soluciones de la Ecuación de Laplace.

DEFINICION 3.2.5

Una función u es armónica en un punto P en el espacio, si existe una esfera S, con centro en P, tal que u tenga segunda derivada contínua, y satisfaga la ecuación (2), en cada punto de S.

DEFINICION 3.2.6.

Una función u es armónica en una región R, si es armónica en cada punto de R.

MEDIOS ESFERICOS.

DEFINICION 3.2.7.

Sea P(x,y,z) un punto dado en R, y sea S(P,r) la esfera de centro en P, y radio r contenida en R. Si $\psi$ es una función contínua en R, el medio esférico de $\psi$ es la función $\overline{\psi}$ definida por:

$$\overline{\psi}(r) = \frac{1}{4\Pi r^2} \int\int_{S(P,r)} \psi(Q)\, ds \qquad (5)$$

donde Q es un punto variable en S(P,r), y ds es un elemento de superficie.

COMENTARIO 3.2.8.

Introduciendo las coordenadas esféricas r, $\theta$ y $\psi$ con origen en P, y definiendo las transformaciones.

$\xi = x + r \text{ sen } \theta \cos \psi, \quad \eta = y + r \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi, \quad \zeta = z + r \cos\theta$

para $0 \leq \theta \leq 2\Pi, \quad 0 \leq \psi \leq \Pi$

donde $(\xi,\eta,\zeta)$ son las coordenadas del punto variable Q en $S(P,r)$. Entonces el medio esférico puede ser reescrito así:

$$\overline{Q}(r) = \frac{1}{4\Pi} \int_0^{2\Pi}\int_0^{\Pi} Q(x+r \text{ sen } \theta \cos \psi, y+r \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi, z + r \cos \theta) \text{sen}\theta d\theta d\psi \tag{6}$$

donde $dS = r^2 \text{sen}\theta d\theta d\psi$.

Es claro que $\overline{\psi}$ es una función contínua de r en algún intervalo $0 < r \leq R$.

Por teorema de valores medios para integrales, la ecuación (6) se transforma en:

$$\overline{\psi}(r) = \frac{\psi(\overline{Q})}{4\Pi} \int_0^{2\Pi}\int_0^{\Pi} \text{sen}\theta d\theta d\psi = \psi(\overline{Q}) \tag{7}$$

donde $\overline{Q}$ es algún punto en $S(P,r)$. Por lo tanto de (7) se tiene:

$$\lim_{r \to 0} \overline{\psi}(r) = \psi(x,y,z)$$

ya que $\overline{Q} \longrightarrow P$ cuando $r \longrightarrow 0$.

Si definimos a $\overline{\psi}$ en $r = 0$ por $\overline{\psi}(0) = \psi(x,y,z)$, entonces $\overline{\psi}$ es contínua en el intervalo cerrado $[0,R]$; es decir:

$$\lim_{r \to 0} \overline{\psi}(r) = \overline{\psi}(0) = \psi(x,y,z). \tag{9}$$

De (7) se tiene que $\psi$ tiene derivada contínua en R, entonces $\overline{\psi}$ tiene primer derivada contínua en $0 < r < R$.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES ARMONICAS.

TEOREMA 3.2.9 (de valores Medios de Gauss). Sea u armónica en R. Si P es un punto dado en R, y S(P,r) es una esfera con centro en P tal que S(P,r) está contenida en R, entonces:

$$u(P) = \overline{u}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S(P,r)} u(Q)ds \tag{10}$$

DEMOSTRACION:

La prueba consiste en demostrar que $\overline{u}(r)$ es constante para $0 < r < R$.

Si en la ecuación (6) reemplazamos $\psi$ por u, y diferenciamos con respecto a r tenemos:

$$\frac{d\overline{u}}{dr} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\delta u}{\delta \xi} \frac{d\xi}{dr} + \frac{\delta u}{\delta \eta} \frac{du}{dr} + \frac{\delta u}{\delta \zeta} \frac{d\zeta}{dr}\right] \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\delta u}{\delta \xi} a + \frac{\partial u}{\delta \eta} b + \frac{\partial u}{\delta \zeta} c\right] \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi$$

donde $a = \operatorname{sen}\theta\cos\psi$, $b = \operatorname{sen}\theta\cos\psi$, $c = \cos\theta$, son los cosenos directores de la normal n en S(P,r).

Luego:

$$\frac{d\overline{u}}{dr} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\nabla u.u)\operatorname{sen}\theta d\theta d\theta\psi,$$

donde

$$\nabla u = \vec{i}\,\frac{\delta u}{\delta \xi} + \vec{j}\,\frac{\delta u}{\delta \eta} + k\,\frac{\delta u}{\delta \zeta}$$

es el vector gradiente de u.

Entonces por teorema de la divergencia

$$\frac{d\overline{u}}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2}\int\int_{S(P,r)} \nabla u.nds = \frac{1}{4\pi r^2}\int\int\int_{V(P,r)} \Delta u.dr = 0$$

donde $V(P,r)$ denota la región esférica cuya frontera es $S(P,r)$.

Por lo tanto $\frac{d\overline{u}}{dr} = 0$, entonces $\overline{u}$ tiene un valor constante para $0 < r < R$.

Como $\overline{u}$ es continua en $r = 0$, se tiene:
$\overline{u}(r) = \overline{u}(0) = u(x,y,z)$.

TEOREMA 3.2.10. (Principio Máximo-Mínimo para Funciones Armónicas).

Sea R una región acotada con frontera S, sea u una función que es continua en $\overline{R}$ y armónica en R. Si u no es constante en todas partes en $\overline{R}$; entonces el máximo M y el mínimo m de u en R, debe ser alcanzado en la frontera S, y la desigualdad $m < u(P) < M$, debe ser válida para cada punto P en R.

DEMOSTRACION:

Asumamos que el valor máximo M se alcanza en un punto P en R, y demostremos que u tiene el valor constante M en todos los puntos en $\overline{R}$.

Sea R cualquier otro punto en R, y unamos P con R por una línea poligonal que esté completamente en R. Sea d la distancia de esta línea a la frontera S, y escojamos $r_o$ tal que $0 < r_o < d$. $T_o$ denota la esfera alrededor de P de radio $r_o$. Entonces $T_o$ y su interior están dentro de R.

Por la ecuación (10) del teorema anterior, y por la hipótesis que $u(P) = M$, se tiene:

$$\frac{1}{4\pi r_o^2} \iint_{T_o} [M-u(Q)]\, ds = \frac{M}{4\pi r_o^2} \iint_{T_o} d\,s - \frac{1}{4\pi r_o^2} \iint_{T_o} u(Q)ds = 0$$

$$= M - \frac{1}{4\pi r_o^2} \iint_{T_o} u(Q)ds = 0\ ;$$

de donde

$$M = \frac{1}{4\pi r_o^2} \iint_{T_o} u(Q)ds.$$

La función $M - u$ es contínua y $M - u(Q) \geq 0$ es válida en cualquier punto, en particular para todos los puntos Q en $T_o$. El desaparecimiento del integral implica que u tiene el valor constante M en $T_o$. En efecto u debe ser constante en todos los puntos de R tanto como en $T_o$.

Para demostrar esto, escojamos un radio $r < r_o$ y apliquemos el mismo razonamiento usado por $T_o$ a la esfera $T_r$ alrededor de P con radio r. Entonces u tiene el valor constante M en $T_r$. Así u es igual a M en todos los puntos dentro y sobre $T_o$.

Sea $Q_1$ el punto de intersección de la línea poligonal con la esfera $T_o$. Entonces u(Q1) = M. Sea $T_1$ la esfera de radio $r_o$ alrededor de $Q_1$; entonces T1 y su interior están dentro de R, y por repetición de argumentos previos resulta que u tiene el valor constante M para todos los puntos dentro y sobre la esfera T1. Sea $Q_2$ el punto de intersección de la línea poligonal con la esfera T1; entonces u(Q2) = M, etc. Después de un número finito de pasos, el punto R se incluye dentro o sobre la superficie de una esfera $T_n$ tal que u tiene el valor constante M en todos los puntos dentro y sobre la esfera $T_n$.

Por tanto u(R) = M. Esto nos prueba que u tiene el valor constante M en todos los puntos de R; como u es contínua, entonces u tiene el valor constante M en todos los puntos de $\overline{R}$.

Por consiguiente, si el valor de u no es constante en R, entonces $u(P) < M$ debe ser válida en R. Como m es el mínimo de u en R, y notemos que -u es contínua en R y armónica en $\overline{R}$, entonces el máximo de -u es -m. Luego $-u(P) < -m$; de donde

$m < u(P) < M$.

COROLARIO 3.2.11.

Sea R una región acotada con frontera S. Sea u armónica en R y contínua en $\overline{R}$.

Sea M una constante tal que $|u(P)| \leq M$ es válida para todos los puntos P en la frontera S. Entonces, $|u(P)| \leq M$ es válida para todos los puntos en $\overline{R}$, incluyendo todos los puntos de R.

DEMOSTRACION:

Sea $M_1$ el valor máximo de u en S. Como u es contínua en S, $M1 \leq M$, por teorema anterior $u(P) \leq M1 \leq M$, de donde $u(P) \leq M$ es válida para todo punto P en R.

Sea m1 el valor mínimo de u en S; por razonamiento anterior se tiene que $m \leq u(P)$ es válido para todo punto P en R. Por hipótesis tenemos que $-M \leq u(P) \leq M$ se cumple para todos los puntos P en la frontera S; tomando $m = -M$ se sigue que $-M \leq u(P) \leq M$ es válido para todos los puntos en $\overline{R}$.

TEOREMA 3.2.12.

Sea R una región acotada con frontera S. Sean $u_1$,u2 funciones armónicas en R y contínuas en $\overline{R}$. Si $u1 = u2$ en S; entonces $u1 = u_2$ en $\overline{R}$.

DEMOSTRACION:

La función

$u = u_1 - u_2$

e sarmónica en R y contínua en $\overline{R}$. Por tanto u toma sus valores máximos y mínimos en S. Pero u = 0 en S. Así, u = 0 en $\overline{R}$; por consiguiente $u_1 = u_2$ en $\overline{R}$.

TEOREMA 3.2.13.

Si el Problema de Dirichlet tiene solución, esa solución es única.

DEMOSTRACION:

Supongamos que $u_1, u_2$ son soluciones al problema de Dirichlet, entonces

$Lu_1 = f$ en R, $u_1 = g$ en S

$Lu_2 = f$ en R, $u_2 = g$ en S.

Pero por teorema anterior si u1 = u2 en S entonces u1 = u2 en $\overline{R}$.

TEOREMA 3.2.14.

Sea f una función contínua dada en R, y sean $g_1$,g2, funciones contínuas dadas en la frontera S, tal que, $|g1(P) - g2(P)| < \varepsilon$ es válida para todos los puntos de S.

Si $u^1, u^2$ son soluciones a los problemas de Dirichlet

$Lu_1 = f$ en R, $\quad u_1 = g_1$ en S

$Lu2 = f$ en R, $\quad u_2 = g_2$ en S.

Entonces $|u1(P) - u2(P)| < \varepsilon$ es válida para cada punto P en R.

DEMOSTRACION:

Sea $v = u1-u2$; entonces v satisface las hipótesis del Corolario (3.2.11) al reemplazar M por $\varepsilon$. Luego $|v(P)| = |u1(P)-u_{2(P)}| < \varepsilon$, es cierto para todo punto P en R.

En muchas aplicaciones es de importancia el "Problema de Dirichlet Exterior para la ecuación de Laplace, el cual se establece así:

"Sea S una superficie cerrada, y sea R la región exterior a S. Sea g una función contínua dada en S. Encontrar una función u que sea armónica en R, contínua en $\overline{R}$ tal que u = g en S".

Los teoremas anteriores, no pueden aplicarse al problemas antes planteado, puesto que ellos consideran a R como una región acotada.

Como un contraejemplo para el teorema (3.2.13) consideremos el siguiente problema.

Sea S la esfera unitaria alrededor del origen y consideremos:

$g(P) = 1$ dentro de la esfera, $u(P) = 1$ fuera de la esfera,
$v(P) = 1$ dentro de la esfera, $v(P) = \frac{1}{r}$ fuera de la esfera,

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Entonces u(P) y v(P) son funciones armónicas fuera de la esfera unitaria.

En efecto:

Como u(P) = 1 fuera de la esfera, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\delta x^2} + \frac{\partial^2 u}{\delta y^2} + \frac{\partial^2 u}{\delta z^2} = 0 \text{ en } R;$$

también u(P) = g(P) dentro de la esfera.

$v(P) = \frac{1}{r}$ en R; entonces

$$\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} = 0 \qquad y$$

v(P) = g(P) en S.

Luego existen dos soluciones para el problema de Dirichlet Exterior.

Es claro que un requerimiento adicional debe ser impuesto, antes de obtener la unicidad de la solución para el problema de Dirichlet Exterior.

DEFINICION 3.2.15.

Sea $\psi$ una función definida en todos los puntos exteriores a alguna esfera S, alrededor del origen. Entonces $\psi$ desaparece uniformemente en el infinito, si dado $\varepsilon > 0$, existe un número $r_\varepsilon > 0$ tal que si $r \geq r_\varepsilon$ entonces:

$|\psi(P)| < \varepsilon$, es válido para cada punto P exterior a S. Simbólicamente se escribe:

$$\lim_{r\to\infty} \psi(P) = 0 \quad \text{uniformemente.}$$

Con el requisito adicional que la solución desaparezca en el infinito, la propiedad de unicidad es válida para el problema de Dirichlet Exterior.

TEOREMA 3.2.16.

Sea S una superficie cerrada simple, R la región exterior a S y sea g una función contínua dada en R. Debe haber al menos una función u que es contínua en $\overline{R}$ y armónica en R, tal que u = g en S, y $\lim_{r\to\infty} u(P) = 0$ uniformemente.

DEMOSTRACION:

Supongamos que u1,u2 son funciones con las propiedades descritas en el teorema y sea $v = u_1-u_2$; entonces v es contínua en $\overline{R}$, armónica en R, v = 0 en S y v desaparece uniformemente en el infinito.

Solo falta probar que v =0 en todos los puntos de R. Sea P un punto cualquiera y fijo en R, y $\varepsilon > 0$. Escojamos una esfera $S_r$ alrededor del origen con radio r suficientemente grande de modo que:

a) S esté contenida en $S_r$.

b) P contenido dentro de $S_r$.

c) $|v(Q)| < \varepsilon$ es válida para todos los puntos Q en $S_r$.

Denotemos por $R_r$ la región anular acotada por las superficies S y $S_r$. Puesto que $v = 0$ en S, y $|v(Q)| < \varepsilon$ es válido en la frontera completa $S + S_r$ de $R_r$. Luego por Corolario (3.2.11) resulta que $|v(P)| < \varepsilon$. La única forma en que la desigualdad anterior puede ser válida para cada alternativa de $\varepsilon > 0$, es cuando $v(P) = 0$ de donde $u_1 = u_2$.

EJERCICIO:

a) Sea $\psi$ una función armónica diferente de una constante. Bajo que condiciones $u = f(\psi)$ es función armónica.

SOLUCION:

Si u es armónica debe satisfacer $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

En efecto:

$$u_x = \frac{\delta u}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}$$

$$u_{xx} = \frac{\delta^2 u}{\delta\psi^2}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta x}\frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta\psi}\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}, \qquad (1)$$

$$u_{yy} = \frac{\delta^2 u}{\delta\psi^2}\left[\frac{\delta\psi}{\delta y}\right]^2 + \frac{\delta u}{\delta\psi}\left[\frac{\delta^2\psi}{\delta y^2}\right]; \qquad (2)$$

Luego, sumando (1) y (2) se tiene:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\delta^2 u}{\delta\psi^2}\left[\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta y}\right)^2\right] + \frac{\delta u}{\delta\psi}\left[\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2}\right]$$

Como $\psi$ es armónica, entonces

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} = 0 ;$$

Luego

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\delta^2 u}{\delta\psi^2}\left[\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta y}\right)^2\right].$$

Paraque $u_{xx} + u_{yy} = 0$ debe ser

$$\frac{\delta^2 u}{\delta\psi^2} = 0 \; ;$$

entonces $\frac{\delta u}{\delta\psi} = a$

$$u = a\psi + b \; ;$$

de donde $u = f(\psi) = a\,\psi + b$.

b) Sea R una región limitada con frontera S. Sea u una función armónica en R, contínua en $\overline{R}$ tal que $u > 0$ en S. Pruebe que $u > 0$ en R.

SOLUCION:

Como u es armónica en R, contínua en $\overline{R}$ y $u > 0$ en S, entonces por teorema (3.2.10) u alcanza su máximo y su mínimo en la frontera S, de donde

$u(P) < M$ con $M > 0$ en R.

$u(P) > m$ con $m > 0$ en R.

Luego $u > 0$ en todo punto de R.

3.3) SEPARACION DE VARIABLES EN LA ECUACION DE LAPLACE.

Un método aplicable a un número de ecuaciones homogéneas lineales clásicas de Física Matemática en varios sistemas coordenados es llamado Método de Separación de Variables, Método de Bernoulli o Método de Fourier.

Nuestro objetivo primeramente es encontrar una sucesión de soluciones particulares, las cuales satisfacen condiciones de frontera en una forma llamada "Separable". Consideremos la ecuación de Laplace en coordenadas polares r, θ.

$$\Delta u = \frac{\delta^2 u}{\delta r^2} + \frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 u}{\delta \theta^2} = 0 \qquad (1)$$

Supongamos una solución de la ecuación (1) de la forma:

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \ , \qquad (2)$$

llamada solución separable, y encontremos soluciones separables que satisfagan las funciones R y Θ.

Sustituyendo (2) en (1) se tiene:

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \ ; \qquad (3)$$

luego

$$r^2R''\Theta + rR'\Theta + R\Theta'' = 0$$

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} \ , \qquad (4)$$

donde $R' = \frac{dR}{dr}$, $\Theta' = \frac{d\Theta}{d\theta}$

Nótese que en la ecuación (4) hemos separado las variables.

Como (4) es una identidad con variables independientes r, $\theta$, resulta que cada miembro es igual a una constante; es decir,

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = \lambda = \frac{-\Theta''}{\Theta}$$

donde la constante $\lambda$ es llamada "Constante de Separación".

Luego, si (2) es una solución de la ecuación (1), las funciones R y $\Theta$ deben de satisfacer las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{5}$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \tag{6}$$

La ecuación (5) es del tipo de Euler; es decir, asumamos una solución de la forma $R = r^{\alpha}$, donde $\alpha$ es una constante a determinar.

Derivando con respecto a r y sustituyendo en (5) tenemos:

$$r^2\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - \lambda r^{\alpha} = 0$$

$$r^{\alpha}(\alpha^2 - \alpha + \alpha - \lambda) = 0$$

$\alpha^2 = \lambda$ entonces $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$

Luego

$$R = r^{\pm\sqrt{\lambda}}$$

Consideremos en las ecuaciones (5) y (6) dos casos:

1er. CASO: $\lambda = 0$

Si $\lambda = 0$, entonces (5) resulta

$$r^2R'' + rR' = 0$$

$$rR'' = - R'$$

$$\frac{R''}{R'} = - \frac{1}{r} ;$$

Luego

$$\ln R' = - \ln r + \ln D_o;$$

de donde

$$R' = \frac{D_o}{r}$$

$$\frac{dR}{dr} = \frac{D_o}{r}$$

$$dR = D_o \frac{dr}{r}$$

$$R = D_o \ln r + C_o.$$

2o. CASO: $\lambda \neq 0$

Si $\lambda \neq 0$, entonces una solución de la ecuación (5) es

$R = C_1 r^{\mu} + D_1 r^{-\mu}$ donde $\mu = \sqrt{\lambda}$

De manera similar para la ecuación (6):

1er. CASO: $\lambda = 0$.

$$\Theta'' = 0,$$

$$\Theta' = A_o,$$

$$\Theta = A_o\theta + B_o.$$

2o. CASO: $\lambda \neq 0$.

Asumamos una solución de la forma $\Theta = e^{r\theta}$, y sustituyendo en (6) resulta

$$r^2 e^{r\theta} + \lambda e^{r\theta} = 0$$

$$(r^2 + \lambda)e^{r\theta} = 0 \ ;$$

Luego

$$r = \pm i\sqrt{\lambda}$$

Por tanto

$$\Theta = e^{\pm i\mu\theta} \text{ donde } \mu = \sqrt{\lambda} \ .$$

Una solución de la ecuación (6) es:

$$\Theta = A_1\cos(\mu\theta) + B_1\operatorname{sen}(\mu\theta)$$

Luego la solución general de (5) y (6) es:

$$R = \begin{cases} C_o + D_o \log r \ , & \text{si } \lambda = 0 \\ C_1 r^{\mu} + D_1 r^{-\mu} \ , & \text{si } \mu = \sqrt{\lambda} \neq 0; \end{cases}$$

$$\Theta = \begin{cases} {}_o \quad {}_o & \text{si } \lambda = 0 \ , \\ A1 \cos \mu\theta, + B1 \operatorname{sen} \mu\theta, & \mu = \sqrt{\lambda} \neq 0 \ ; \end{cases}$$

donde las soluciones separables de la ecuación (1) son de la forma:

$$u(r,\theta) = (D_o \log r + C_o)(A_o\theta + B_o) + (C1 r^{\mu} + D1 r^{-\mu})(A1 \cos \mu\theta + B1 \operatorname{sen} \mu\theta) \quad (7)$$

donde las letras son constantes a determinar.

### 3.3.1 PROBLEMA DE DIRICHLET PARA UN CIRCULO.

Sea C un círculo de radio a alrededor del origen en el plano xy y R denote la región interior a C. Sea $f(\theta)$ una función contínua dada en C.

El problema es encontrar una solución u de la ecuación (1) en R, tal que u es valuada en forma individual y contínua en $\bar{R}$ y tal que:

a) $u(a,\theta) = f(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\Pi$

b) $u(r,\theta) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$

donde $a_o$, $a_n$, $b_n$, son los coeficientes de Fourier de f.

SOLUCION:

El requisito de valorización individual en $\bar{R}$, implica pedir para u una condición de periodicidad, es decir:

$$u(r,\theta + 2\Pi) = u(r,\theta), \qquad 0 \leq r \leq a, \qquad -\infty < \theta < \infty ; \tag{8}$$

La ecuación (8) es un requisito adicional a la condición (a), la cual se satisface si se le pide a la ecuación (7) que satisfaga

$$\Theta(\theta + 2\Pi) = \Theta(\theta), \qquad -\infty < \theta < \infty \tag{9}$$

esto es que $\Theta$ sea periódica.

Si en la ecuación (9) se sustituye $\theta$ por $-\Pi$, se tiene:

$$\Theta(-\Pi) - \Theta(\Pi) = 0, \qquad \Theta'(-\Pi) - \Theta'(\Pi) = 0. \tag{10}$$

Las ecuaciones (6) y (10) constituyen el Problema Regular de Sturm-Liouville. Un par de soluciones de la ecuación diferencial (6) es:

$u_\lambda = \cos\sqrt{\lambda}\,\theta$, $v_\lambda = \text{sen}\sqrt{\lambda}\,\theta$, $-\Pi \leq \theta \leq \Pi$;

por lo tanto los valores de $\lambda$ están restringidos a:

$\lambda = \lambda_n = n^2$ , $n = 0, 1, 2......$

En la ecuación (7), para que u sea periódica debe ser $A_o = 0$; también para que u sea finita debemos tomar $D_o = 0$. Luego la ecuación (7) se transforma en:

$$u_n(r,\theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \text{ sen } n\theta). \tag{11}$$

Las ecuaciones anteriores son llamadas "Armónicas Circulares".

En el presente problema la región que nos interesa incluye el valor $r = 0$; luego para conservar la continuidad de u, debe ser $D_n = 0$; luego

$$u_n(r,\theta) = r^n(A_n \cos n\theta + B_n \text{ sen } n\theta) \qquad n=0,1,2...... \tag{12}$$

Por el principio de superposición

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \text{ sen } n\theta) \ ; \tag{13}$$

utilizando la condición de frontera (a) se sigue que:

$$u(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n(A_n \cos n\theta + B_n \text{ sen } n\theta) = f(\theta) \ , \qquad 0 \leq \theta \leq 2\Pi \tag{14}$$

Asumamos que f es periódica, de período $2\Pi$, y tiene primer derivada contínua a tramos para todo $\theta$. Entonces el desarrollo en series de Fourier de f es:

$$f(\theta) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) , \tag{15}$$

donde:

$$a_o = \frac{1}{\Pi}\int_0^{2\Pi} f(\theta)d\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\Pi}\int_0^{2\Pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta \qquad n=1,2\ldots.$$

$$b_n = \frac{1}{\Pi}\int_0^{2\Pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta \qquad n=1,2\ldots.. \quad .$$

Comparando las ecuaciones (14) y (15) resulta que:

$$A_o = \frac{a_o}{2} \quad , \quad A_n = \frac{a_n}{a^n}, \qquad B_n = \frac{b_n}{a^n} \qquad n=1,2,\ldots. \quad .$$

Por lo tanto, la solución en series obtenidas por separación de variables es:

$$u(r,\theta) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta), \tag{16}$$

donde los coeficientes $a_o$, $a_n$ y $b_n$ son los coeficientes de Fourier para f.

De (16) se sigue:

$u(a,\theta) = f(\theta)$.

Probemos ahora que la sucesión en series de Fourier es convergente.

En efecto:

Como asumimos que f es contínua, con primer derivada, contínua a tramos y periódica con período $2\pi$; entonces la serie de Fourier

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$$

converge uniformemente a f en $[0, 2\pi]$.

Ahora el criterio de Cauchy establece que dado $\varepsilon > 0$, existe un entero $N_\varepsilon > 0$ tal que si n,m son enteros y $n \geq m \geq N_\varepsilon$ entonces:

$$\left| \frac{a_o}{2} + \sum_{k=m+1}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) \right| < \varepsilon . \tag{18}$$

Definamos la función v sobre $\overline{R}$ por:

$$v(r,\theta) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{r}{a}\right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) . \tag{19}$$

Dado que v es contínua en $\overline{R}$, armónica en R, y sobre la frontera C $|v(a,r)| < \varepsilon$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, entonces por Corolario (3.2.11),

$|v(r,\theta)| < \varepsilon$ sobre $\overline{R}$.

Ha sido probado que dado un $\varepsilon > 0$, existe un entero $N_\varepsilon > 0$ tal que para todos los enteros n,m, con $n \geq m \geq N_\varepsilon$,

$$\left| \frac{a_o}{2} + \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{r}{a}\right)^k (a_k \cos k\theta + b_n \operatorname{sen} k\theta) \right| < \varepsilon$$

para todos los puntos $(r,\theta)$ de $\overline{R}$. Pero esto es justamente el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de la serie (16) en R. Así la serie definida es una función contínua u en $\overline{R}$.

Además esta función asume valores en la frontera C, en el siguiente sentido contínuo,

$$\lim_{(r,\theta)\to(r,\theta_o)} u(r,\theta) = f(\theta_o) \qquad 0 \leq \theta_o \leq 2\pi \;;$$

de otra manera:

$$\lim_{(r,\theta)\to(a,\theta_o)} u(r,\theta) = u(a,\theta_o) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta_o + b_n \operatorname{sen} n\theta_o), \quad 0 \leq \theta_o \leq 2\pi$$

Finalmente probemos que u es armónica en R.

Puesto que la serie de Fourier de f converge, entonces existe una constante $M > 0$ tal que

$$|a_o| < M, \qquad |a_n| < M, \qquad |b_n| < M, \qquad n=1,2,\ldots.$$

Definamos la sucesión de funciones $\{u_n\}$ por:

$$u_n(r,\theta) = \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) \qquad n=1,2,\ldots.$$

$$\text{y} \quad u_o(r,\theta) = \frac{a_o}{2}\,;$$

observe que cada $u_n$ es contínua en $\overline{R}$ y armónica en R. Elijamos un valor $r_o$ tal que $0 < r_o < a$. Entonces

$$\left|\frac{\delta u_n}{\delta r}\right| = \left|\left(\frac{n}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\right|$$

$$\leq \left(\frac{n}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(|a_n| + |b_n|\right)$$

$$< 2M \left(\frac{n}{a}\right)\left(\frac{r_o}{a}\right)^n \qquad n=1,2,\ldots \qquad 0 \leq r \leq r_o \, .$$

La serie de constantes positivas

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2M\left(\frac{n}{a}\right)\left(\frac{r_o}{a}\right)^n$$

converge y domina, término a término la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta u_n}{\delta r} \qquad 0 \leq r \leq r_o \qquad 0 \leq \theta \leq 2\Pi \, .$$

Por lo tanto las series obtenidas, por diferenciación de la ecuación (16), término a término con respecto a $r$, converge uniformemente sobre el disco cerrado de radio $r_o$ alrededor del origen. Esto implica que la función $u$ tiene primera derivada contínua con respecto a $r$, y que $\frac{\delta u}{\delta r}$ puede ser calculada término a término por diferenciación de la serie para $u$ con respecto a $r$, donde $0 \leq r \leq r_o$. Una repetición de los argumentos anteriores prueba que $\frac{\delta^2 u}{\delta r^2}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta \theta^2}$ existen y son funciones contínuas. Por consiguiente:

$$\Delta u = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta u_n = 0, \qquad 0 \leq r \leq r_o, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\Pi.$$

Entonces $u$ es armónica en R.

## 3.4 FORMULA INTEGRAL DE POISSON PARA UN CIRCULO.

Sea u la solución al problema de Dirichlet dada en la ecuación (16); sustituyendo en esta ecuación los coeficientes de Fourier $a_o, a_n$ y $b_n$ por:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi \quad \text{y} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\operatorname{sen} n\psi d\psi$$

respectivamente, u se transforma en:

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\psi-\theta) + r^2} f(\psi)d\psi. \tag{20}$$

En efecto:

Sustituyendo $a_o, a_n, b_n$ en la ecuación (16) se tiene:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi \cos n\theta d\psi\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\operatorname{sen} n\psi \operatorname{sen} n\theta d\psi\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \left[\int_0^{2\pi} f(\psi)(\cos n\psi \cos n\theta + \operatorname{sen} n\psi \operatorname{sen} n\theta)d\psi\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \left[\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n(\psi-\theta)d\psi\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\psi-\theta)\right]d\psi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\psi - \theta) \right] d\psi \tag{21}$$

el cambio de suma e integración es válido en vista de la convergencia uniforme de la serie.

Ahora si x es un real tal que $|x| < 1$, entonces:

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\phi = \frac{1-x^2}{1-2x \cos\phi + x^2} \quad . \tag{22}$$

A fin de probar la igualdad anterior, sea $Z = xe^{i\phi}$;

entonces

$$\frac{1 + Z}{1 - Z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Z^n. \tag{23}$$

Si $R_e \zeta$ denota la parte real del número complejo $\zeta$, entonces:

$$R_e \left[\frac{1 + Z}{1 - Z}\right] = R_e \left[\frac{1 + xe^{n\phi}}{1 - xe^{\phi}}\right]$$

$$= R_e \left[\frac{1 + x \cos\phi + ix \operatorname{sen}\phi}{1 - x \cos\phi - ix \operatorname{sen}\phi}\right]$$

$$= \frac{1-x^2}{1 + 2x\cos\phi + x^2} \tag{24}$$

Por otra parte:

$$R_e \left[\frac{1 + Z}{1 - Z}\right] = R_e \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Z^n \right]$$

$$= R_e \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n (\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi)\right]$$

$$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\phi \qquad (25)$$

De (24) y (25) se sigue la ecuación (22);

al intercambiar en la ecuación (22) $x = r/a$, $\phi = \psi - \theta$ , resulta

$$1 + 2 \sum \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\psi - \theta) = \frac{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}{1 - 2(r/a)\cos(\psi - \theta) + (r/a)^2}$$

$$= \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\psi - \theta) + r^2} . \qquad (26)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (21) queda:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\psi - \theta) + r^2} f(\psi)d\psi. \qquad (27)$$

La ecuación (27) es llamada Integral de Poisson para un Círculo.

Así (27) nos da la solución al Problema de Dirichlet.

eda.

## BIBLIOGRAFIA


DENNEMEYER, René, "Introducction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems". Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1968.

GREENSPAN, Donald, "Introduction to Partial Differential Equations". Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1976.

HAASER, Norman B., LA SALLE, Joseph P., SULLIVAN, Joseph A., "Análisis Matemático 1". Editorial: Trillas, México, 1971.

HSU HWEI, P., "Análisis Vectorial", Fondo Educativo Interamericano.

JOHN, F., "Partial Differential Equations", Springer-Verlag, New York, 1971.

Mc QUISTAN Richmond B., "Campos Escalares y Vectoriales", Editorial: Limusa-Wiley, S.A., México, 1969.

SNEDDON, Ian N., "Elements of Partial Differential Equations", Mc Graw-Hill Book Company, México, 1957.