UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

ESPACIOS DE BANACH

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR :

JUAN AGUSTIN CUADRA

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE

Licenciado en Matemática

MARZO DE 1979

San Salvador, El Salvador Centro América

ej. 2

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TRABAJO DE GRADUACION

ESPACIOS DE BANACH

MARZO DE 1979

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR — Dr. EDUARDO BADIA SERRA

SECRETARIO GENERAL — Dr. JORGE FERRER DENNYS

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO — Ing. EDUARDO CASTILLO URRUTIA

SECRETARIO — Ing. JUAN MIGUEL IGLESIAS CARRANZA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO — Ing. GABRIEL MELENDEZ MAYORGA

TRABAJO DE GRADUACION

ASESOR Licenciado JOSE JAVIER RIVERA LAZO

Trabajo desarrollado por

JUAN AGUSTIN CUADRA

previo a la opción de su

Título de

LICENCIADO EN MATEMATICA

INDICE

Página

CAPITULO III

ALGUNOS TEOREMAS EN ESPACIOS NORMADOS.

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo no es exactamente un estudio exclusivo - sobre los espacios de Banach; es más bien una investigación bibliográfica sobre espacios métricos y espacios normados, presentando - en los capítulos II y III, correspondiente a los espacios normados, algunos teoremas importantes en espacios de Banach.

En el Capítulo I se presentan conceptos generales sobre espacios métricos, haciendo énfasis en los espacios completos y espacios compactos.

En el Capítulo II, además de los conceptos generales sobre - espacios normados, se presentan teoremas importantes tales como: - la caracterización de funciones lineales continuas y la construcción del espacio de aplicaciones lineales continuas. Se ha incluido además en este capítulo, en forma breve, las aplicaciones inversibles en los espacios de Banach.

El Capítulo III se ha dedicado al estudio de tres teoremas - importantes: el teorema de la función abierta, el teorema de Banach Steinhaus y el teorema de Hahn - Banach; los dos primeros en espacios de Banach y el tercero en un espacio normado cualquiera. Estos teoremas son fundamentales en el análisis funcional, razón por la cual, este capítulo puede ser de gran ayuda para las personas que se inicien en el estudio de esta rama de la matemática.

CAPITULO I

ESPACIOS METRICOS

1. DISTANCIAS. ESPACIOS MÉTRICOS.

DEFINICION. Sea E un conjunto no vacío. Una distancia en E es una aplicación d de E x E en $\mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:

P1) $d(x, y) \geq 0$; para todo (x, y) de E x E.

P2) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

P_3) $d(x, y) = d(y, x)$.

P4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

La función d es tambien llamada métrica y el número $d(x, y)$ es llamado distancia entre los puntos x e y.

PROPOSICION 1.1. Si d es una distancia en E entonces

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

DEMOSTRACION:

1º) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d(x, y) + d(z, y)$

$$\Longrightarrow d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y).$$

2º) $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) = d(x, z) + d(x, y)$

$$\Longrightarrow -d(x, y) \leq d(x, z) - d(z, y).$$

Por lo tanto $-d(x, y) \leq d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$.

DEFINICION. Un espacio métrico es un conjunto E provisto de una distancia.

Ejemplos de distancias

1º) En la recta real $\mathbb{R}$ o el plano complejo $\mathbb{C}$ la función $d(x,y) = |x-y|$ es una distancia; llamaremos a esta distancia la métrica natural de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$; cuando $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se consideren como espacios métricos sin dar explícitamente la distancia, entenderemos que están provistos de la métrica natural.

2º) En $\mathbb{R}$ la función $d(x, y) = |F(x) - F(y)|$, donde F es una función real de variable real estrictamente monótona, es una distancia.

En efecto:

P1) "$d(x, y) \geq 0$"; evidente.

P2) "$d(x, y) = |F(x) - F(y)| = 0 \iff x = y$".

a) "$\Longrightarrow$"

$$|F(x) - F(y)| = 0 \Longrightarrow F(x) - F(y) = 0$$
$$\Longrightarrow F(x) = F(y)$$
$$\Longrightarrow x = y.$$

b) "$\Longleftarrow$"

$$x = y \Rightarrow F(x) = F(y) \Rightarrow F(x) - F(y) = 0$$
$$\Rightarrow |F(x) - F(y)| = 0.$$

P3) $d(x, y) = |F(x) - F(y)| = |F(y) - F(x)| = d(y, x)$.

P4) $$\begin{aligned} d(x, z) = |F(x) - F(z)| &= |F(x) - F(y) + F(y) - F(z)| \\ &\leq |F(x) - F(y)| + |F(y) - F(z)| \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

3º) Sea G un grupo conmutativo

$$P : G \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \rightsquigarrow P(x).$$

Una aplicación con las siguientes propiedades:

a) $P(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

b) $P(-x) = P(x).$

c) $P(x + y) \leq P(x) + P(y).$

Si para todo (x, y) de $G \times G$ definimos $d(x, y) = P(x - y)$. d es una distancia.

En efecto: P1 y P2 evidentes.

P3) $d(x, y) = P(x - y) = P[-(x - y)]$, por b)

$$= P(y - x)$$

$$= d(y, x).$$

P4) $d(x, z) = P(x - z) = P(x - y + y + z)$

$$\leq P(x - y) + P(y - z), \text{ por c)}$$

$$= d(x, y) + d(y, z).$$

4º) Sean $X = (x1, x2, \dots, x_n)$ y $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ puntos del espacio $\mathbb{R}^n$ o del espacio $\mathbb{C}^n$. La función

I) $d(X, Y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{1/2}$, es una distancia.

Llamaremos a esta métrica la métrica natural de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$; salvo mención expresa de lo contrario, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ estarán provistos siempre de la métrica natural.

Sobre $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ las funciones:

II) $d(X, Y) = \sup |x_i - y_i|$

III) $d(X, Y) = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i - y_i|$

son tambien distancias.

5º) Sea E un conjunto cualquiera, y definamos $d(x, y) = 0$ si $x = y$, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.

Evidentemente d es una métrica, y se le denomina la métrica discreta.

2. Bolas, esferas, diámetro.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico y d su distancia, x_0 un punto de E y $r > 0$ un número real. Llamaremos bola abierta de centro x_0 y radio r al conjunto $B(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x_0, x) < r\}$.

Bola cerrada de centro x_0 y radio r al conjunto

$B'(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x_0, x) \leq r\}$.

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de E; la distancia de A a B se define : $d(A, B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} d(x, y)$.

Cuando A se reduce a un solo punto x_0

$$d(A, B) = d(x_0, B) = \inf_{y \in B} d(x_0, y).$$

Para cada conjunto no vacío A de E, el diámetro de A se define:

$$\delta(A) = \sup_{x \in A,\, y \in A} d(x, y).$$

Un conjunto acotado en E es un conjunto no vacío cuyo diámetro es finito.

PROPOSICION 1.2. La reunión de dos conjuntos acotados A, B es acotado.

DEMOSTRACION:

Si $A \subset B$ o $B \subset A$, la conclusión en inmediata.

Supongamos no es ese el caso y sean $a \in A$, $b \in B$; entonces si $x \in y$ son dos puntos cualesquiera de $A \cup B$, o bien x e y pertenecen ambos a A, en cuyo caso $d(x,y) \leq \delta(A)$ o pertenecen ambos a B y $d(x,y) \leq \delta(B)$, o por ejemplo $x \in A$ e $y \in B$, y entonces

$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y)$, por lo tanto:

$$d(x, y) \leq \delta(A) + d(a, b) + \delta(B) \qquad (1)$$

$\delta(A) + \delta(B) + d(a, b)$ es cota superior para $d(x, y)$; x, y puntos cualesquiera de $A \cup B$, luego

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(a, b) \qquad (2)$$

Y puesto que (2) es cierto para cada $a \in A$, $b \in B$, tendremos que

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B). \qquad (3)$$

3. Conjuntos abiertos. Conjuntos cerrados. Vecindarios.

Conjuntos abiertos.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico. $A \subset E$ es abierto si para cada $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

PROPOSICION 1.3. Toda bola abierta es un conjunto abierto.

DEMOSTRACION:

Sea $x1 \in B(x_0, r)$, $d(x_0, x1) < r$.

Pongamos $r_1 = r - d(x_o, x1)$; $r1 > 0$.

Demostremos que $B(x1, r_1) \subset B(x_o, r)$.

En efecto: sea $y \in B(x1, r_1)$

$d(x_o, y) \leq d(x_o, x_1) + d(x_1, y) < d(x_o, x_1) + r_1 = r$

por lo tanto $y \in B(x_o, r)$.

PROPOSICION 1.4. Sea E un espacio métrico. Entonces

a) E y ϕ son abiertos.

b) La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierto.

c) Toda reunión de una familia finita o infinita de conjuntos abiertos es abierto.

DEMOSTRACION:

a) Para todo x, $x \in \phi$ es falso; por lo tanto podemos concluir que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset \phi$ y ϕ es abierto.
Evidentemente E es abierto.

b) Sean $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$ abiertos de E.

Sea $x \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$; para cada i existe $r_i > 0$ tal que $B(x, ri) \subset O_i$;
pongamos $r = \min_{i=1,2,\ldots,n} \{r_i\}$.

La bola $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i$, por lo tanto, la intersección es un abierto.

c) Sea x un punto de una reunión de abiertos; x pertenece al menos a un conjunto abierto O_i, el cual contiene una bola abierta de centro x, por lo tanto la reunión es un abierto.

PROPOSICION 1.5. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$. Entonces A es abierto si y solo si A es reunión de bolas abiertas.

DEMOSTRACION:

"$\Longrightarrow$"

Sea $x \in A$; por ser A abierto existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$; y podemos poner $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$.

"$\Longleftarrow$"

Si $A = \bigcup_{i=I} B_i$; B_i bolas abiertas, entonces A es abierto por proposiciones 1.3 y 1.4 - c).

PROPOSICION 1.6. (PROPIEDAD DE SEPARACION DE HAUSDORFF).

Sea E un espacio métrico, a y b puntos de E, $a \neq b$. Entonces existen A, B abiertos en E tales que: $a \in A$, $b \in B$ y $A \cap B = \phi$.

DEMOSTRACION:

Sea $r = d(a, b)$ y sean $A = B(a, \frac{r}{2})$, $B = B(b, \frac{r}{2})$. A y B son abiertos y además $A \cap B = \phi$; y a que si tuvieran un punto común c, tendríamos $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ lo cual es absurdo.

CONJUNTOS CERRADOS.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$. A es cerrado si su complemento es abierto.

PROPOSICION 1.7. Una bola cerrada es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACION:

$x \notin B'(a, r) \Longrightarrow d(a, x) > r \Longrightarrow d(a, x) - r > 0.$

Pongamos $r_1 = d(a, x) - r.$

$B(x, r_1) \cap B'(a, r) = \phi$ ya que si existiera un c que pertenece a la intersección tendríamos:

$d(a, x) \leq d(a, c) + d(c, x) \leq r + d(c, x) < r + r_1 = d(a, x)$

lo cual es absurdo. Por lo tanto $B(x, r_1) \subset \complement B'(a, r)$, y $B'(a, r)$ es un conjunto cerrado.

PROPOSICION 1.8. Sea E un espacio métrico. Entonces

a) E y ϕ son cerrados.

b) Toda reunión de un número finito de conjuntos cerrados es cerrado.

c) Toda intersección de una familia finita o infinita de conjuntos cerrados es cerrado.

DEMOSTRACION. Tómese complementos en cada uno de los literales de la proposición 1.4.

VECINDARIOS.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico. $V \subset E$ es un vecindario de un punto $a \in E$ si existe un abierto "O" tal que $a \in O$ y $O \subset V$.

PROPOSICION 1.9.

a) Toda parte que contiene un vecindario de a es un vecindario de a.

b) Toda intersección de un número finito de vecindarios de a es un ve cindario de a.

c) "Propiedad de separación de Hausdorff".

Sean $a \neq b$ puntos de E, existe V_1 vecindario de a y V_2 vecindario de b tal que $V_1 \cap V_2 = \phi$.

DEMOSTRACION:

a) Trivial.

b) Sean $V_1, V_2, \ldots, V_n$ vecindarios de a; existen abiertos $O_1, O_2, \ldots, O_n$, tales que $a \in O_i$ y $O_i \subset V_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ es un abierto; además $a \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$ y $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ es un vecindario de a.

c) Por proposición 1.6 existen V_1 y V_2 abiertos $a \in V_1$ y $b \in V_2$ tal que $V_1 \cap V_2 = \phi$

V_1 y V_2 son vecindarios de a ya que V_i es abierto incluido en V_1 y V_2 es abierto incluido en V_2; con lo cual V_1 y V_2 son los vecindarios buscados.

PROPOSICION 1.10. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$. Entonces A es abierto si y solo si A es vecindario de cada uno de sus puntos.

DEMOSTRACION:

"$\Longleftarrow$"

Si A es vecindario de cada uno de sus puntos, para cada $x \in A$ existe O_x abierto tal que $x \in O_x$ y $O_x \subset A$. De esta relación deducimos que

$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup O_x \subset A$. Por lo que $A = \bigcup_{x \in A} O_x$ es un abierto, por proposición 1.4 -c).

" $\Longrightarrow$ "

Sea $x \in A$; A es vecindario de x ya que podemos tomar A como el abierto buscado que contiene a x y que está incluido en A mismo.

DEFINICION. Sea $(V_i)_{i \in I}$ una familia de vecindarios de x_0 en E. Diremosque esta familia es un sistema fundamental de vecindarios de x_0 si todo vecindario de x_0 contiene a alguno de los V_i.

EJEMPLO. En un espacio métrico las bolas abiertas de centro a, o las bolas $B(a, \frac{1}{n})$. (n entero> 0), forman 2 sistemas fundamentales de vecindarios.

4. INTERIOR, EXTERIOR, FRONTERA Y ADHERENCIA.

INTERIOR.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$. Un punto $x \in E$ se dice que es interior a A Si A es un vecindario de x. El conjunto de todos los puntos interiores a A se denomina el interior de A, y lo denotaremos por $\mathring{A}$.

PROPOSICION 1.11. $\mathring{A}$ es el mayor conjunto abierto de E contenido en A.

DEMOSTRACION:

Probaremos que $\mathring{A}$ es abierto.

Sea $x \in \mathring{A}$; existe O_x abierto tal que $x \in O_x$ y $O_x \subset A$.

Para cada $y \in O_x$, A es vecindario; por lo tanto $y \in \mathring{A}$, de donde resulta que $O_x \subset \mathring{A}$, lo cual demuestra que $\mathring{A}$ es abierto por ser vecindario de cada uno de sus puntos.

Sea B un abierto incluido en A. Para cada $x \in B$, A es vecindario de x, por lo tanto $x \in \mathring{A}$ y $B \subset \mathring{A}$.

COROLARIO 1. Si A es abierto, $A = \mathring{A}$.

DEMOSTRACION:

1º) $\mathring{A} \subset A$ por definición.

2º) A es un abierto incluido en A por lo tanto $A \subset \mathring{A}$.

COROLARIO 2. Si $A \subset B$ entonces $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

DEMOSTRACION:

$\mathring{A} \subset A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$, por ser $\mathring{B}$ el más grande de los abiertos incluidos en B.

PROPOSICION 1.12. Para cada par de conjuntos A, B, $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

DEMOSTRACION:

1º) $A \cap B \subset A \Longrightarrow \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \mathring{A}$ (1)

$A \cap B \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \mathring{B}$ (2)

De (1) y (2) : $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$

2º) $\left.\begin{array}{l}\mathring{A} \subset A \\ \mathring{B} \subset B\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B.$

$\mathring{A} \cap \mathring{B}$ es un abierto contenido en $A \cap B$, luego por proposición 1.11 $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.

EXTERIOR.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$. Llamaremos exterior de A al interior de su complemento.

Un punto perteneciente al exterior de A se dice que es exterior a A.

FRONTERA.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$. Llamaremos frontera de A, y la denotaremos por $F_r(A)$, al conjunto de los puntos de E que no pertenecen ni a su interior, ni a su exterior.

$$F_r(A) = \complement\,(\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}).$$

PROPOSICION 1.13. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$. Entonces x pertenece a la frontera de A si y solo si todo vecindario de x contiene a la vez puntos de A y de su complemento.

DEMOSTRACION:

" $\Longleftarrow$ "

Si todo vecindario V de x tiene puntos de A y de $\complement A$, entonces V no está contenido en ninguno de ellos dos; luego $x \notin \overset{\circ}{A}$ y $x \notin \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$, por lo tanto x está sobre la frontera.

" $\Longrightarrow$ "

Sea $x \in F_r(A)$, V un vecindario de x.

Si $V \cap A \neq \phi$ y $V \cap \complement A = \phi$ entonces x sería interior a A.

Si $V \cap A = \phi$ y $V \cap \complement A \neq \phi$ entonces x sería exterior a A.

Por lo tanto V tiene puntos comunes con A y con $\complement A$.

ADHERENCIA.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$. La adherencia de A es el complemento del exterior de A. Denotaremos la adherencia de A por $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \complement(\overset{\circ}{\widehat{\complement A}}).$$

Un punto perteneciente a la adherencia de A, se dice que es adherente a A.

PROPOSICION 1.14. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si para todo V vecindario de x, $V \cap A \neq \phi$.

DEMOSTRACION:

"$\Longrightarrow$"

Sea $x \in \overline{A}$, V un vecindario; si $V \cap A = \phi$ entonces $V \subset \complement A$ y x estaría en $\overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$ = exterior de A, lo cual es contrario a la hipótesis $x \in \overline{A}$.

"$\Longleftarrow$"

Si x es tal que cada uno de sus vecindarios tiene puntos comunes con A, x no puede estar en el exterior de A, puesto que el exterior sería un vecindario de x que no tiene puntos comunes con A. Por lo tanto x está en $\complement(\overset{\circ}{\widehat{\complement A}}) = \overline{A}$.

PROPOSICION 1.15. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$. Entonces A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

DEMOSTRACION;

"$\Longrightarrow$"

A cerrado $\Longrightarrow$ $\complement A$ es abierto.

$$\Longrightarrow \overset{\circ}{\widehat{CA}} = CA \quad \text{Por corolario 1. Proposición 1.11}$$

$$\Longrightarrow \bar{A} = C(\overset{\circ}{\widehat{CA}}) = C(CA) = A.$$

"$\Longleftarrow$" $A = C(\overset{\circ}{\widehat{CA}}) \Longrightarrow CA = \overset{\circ}{\widehat{CA}} \Longrightarrow CA$ es abierto $\Longrightarrow A$ es cerrado.

CONJUNTOS DENSOS.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$. A se dice denso en E si $\bar{A} = E$.

5. SUBESPACIOS. MÉTRICA INDUCIDA.

DEFINICION. Sea F un subconjunto no vacío de un espacio métrico E. La restricción a $F \times F$ de la función distancia definida sobre $E \times E$ hace de F mismo un nuevo espacio métrico. Llamaremos a F un subespacio métrico de E, y diremos que está provisto de la métrica inducida.

PROPOSICION 1.16. Sea E un espacio métrico, $\phi \neq F \subset E$ y $A \subset F$. Entonces A es abierto (cerrado) en el espacio métrico F si y solo si $A = F \cap A_1$; donde A_1 es un abierto (cerrado) en E.

DEMOSTRACION:

Designemos por B las bolas en E, por $\mathcal{B}$ las bolas en F.

1º) Sea A una parte de F, intersección de F y de un abierto A_1 de E; si a es un punto de F que está en A, entonces a está en A_1 y existe una bola $B(a, r)$ contenida en A_1, por ser A_1 abierto en E; luego $\mathcal{B}(a, r) = B(a, r) \cap F$ está contenida en A; por lo tanto A es un abierto en F.

Recíprocamente, sea A un abierto de F', entonces A es una reunión de una familia $B(a_i, r_i)$, $i \in I$, de bolas abiertas, $a_i \in A$, $r_i > 0$.

$$A = \bigcup_{i \in I} B(a_i, r_i) = \bigcup_{i \in I} [B(a_i, r_i) \cap F]$$

$$= [\bigcup_{i \in I} B(a_i, r_i)] \cap F$$

$$= A_1 \cap F.$$

A_1 es un abierto en E, con lo cual la propiedad relativa a los abiertos queda demostrada.

2º) Sea A_1 una parte cerrada de E, C_1 su complemento en E; sean $C = C_1 \cap F$ y $A = A_1 \cap F$

$A \cup C = F$ y $A \cap C = \phi$.

Como $C = C_1 \cap F$ es un abierto en F, entonces $A = A_1 \cap F$ es cerrado en F, por ser A el complemento de C en F.

Recíprocamente sea A una parte cerrada de F y sea C su complemento en F; C es abierto en F, entonces existe un abierto C_1 de E tal que $C = C_1 \cap F$.

Sea A_1 el complemento de C_1; A_1 es cerrado en E, A_1 y C_1 son complementarios en E, por lo que $A_1 \cap F$ y $C_1 \cap F$ serán complementarios en F.

Como $C_1 \cap F = C$, tendremos que $A = A_1 \cap F$, con A_1 cerrado en E, lo cual demuestra la propiedad relativa a los cerrados.

PROPOSICION 1.17. Sea E un espacio métrico, $\phi \neq F \subset E$ y $V \subset F$. Entonces V es un vecindario de $x \in F$ si y solo si $V = V_1 \cap F$; donde V_1 es un vecindario de x en E.

DEMOSTRACION:

Sea V_1 un vecindario en E de $x \in F$; existe A_1 abierto en E tal que $x \in A_1$ y $A_1 \subset V_1$.

$V = V_1 \cap F$ contiene al abierto $A = A_1 \cap F$ de F y como $x \in A$, entonces $V = V_1 \cap F$ es un vecindario de A en F. Recíprocamente, sea V un vecindario de x en F; existe un abierto A de F tal que $x \in A$ y $A \subset V$; además existe A_1 abierto en E tal que $A = A_1 \cap F$.

Ahora bien $V_1 = A_1 \cup V$ es un vecindario de x en E; puesto que V_1 contiene al abierto A_1 y $x \in A_1$.

Finalmente tenemos que:

$V_1 \cap F = (A_1 \cup V) \cap F = (A_1 \cap F) \cup (V \cap F) = A \cup V = V.$

Lo cual demuestra la proposición.

PROPOSICION 1.18. Sea E un espacio métrico, $\phi \neq F \subset E$.

a) Si F es abierto de E, entonces todo subconjunto A de F abierto en el espacio métrico F, es también abierto en el espacio métrico E.

b) Si F es un cerrado de E, entonces todo subconjunto A de F cerrado en el espacio métrico F, es también cerrado en el espacio métrico E.

c) Si F es un vecindario de x en E, entonces toda parte A de F vecindario de x en F, es también vecindario de x en E.

DEMOSTRACION:

a) Si A es abierto en F, existe A_1 abierto en E tal que $A = A_1 \cap F$; como A_1 y F son abiertos en E entonces A es abierto en E.

b) y c) demostraciones análogas.

6. Aplicaciones continuas.

DEFINCION. Sea E y E' dos espacios métricos, d y d' las distancias respectivas. Una aplicación f de E en E' se dice que es continua en $x_0 \in E$ si, para cada vecindario V' de $f(x_0)$, existe un vecindario V de x_0 tal que: $f(V) \subset V'$. Se dice que f es continua en E (o simplemente continua) si es continua en cada punto de E.

PROPOSICION 1.19. Sea $f : E \longrightarrow E'$, $x_0 \in E$. Entonces f es continua en x_0 si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$ entonces $d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

DEMOSTRACION:

Supongamos f continua en x_0 y sea $\varepsilon > 0$; para la bola $B(f(x_0), \varepsilon)$ existe un vecindario V de X_0 tal que $f(V) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$, por continuidad de f en X_0; por ser V vecindario de x_0, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset V$, evidentemente $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ lo cual demuestra la proposición en un sentido.

Recíprocamente, sea V' vecindario de $f(x_0)$; existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \varepsilon) \subset V'$; para este ε existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta)$ entonces $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$. Tomando $V = B(x_0, \delta)$, queda demostrada la proposición en el otro sentido.

PROPOSICION 1.20. Sea E y E' dos espacios métricos y f una aplicación continua de E en E'. Entonces f es continua en $x_0 \in E$ si y solo si para cada vecindario V' de $f(x_0)$, $f^{-1}(V')$ es un vecindario de x_0.

DEMOSTRACION:

Sea f continua en x_0 y sea V' un vecindario de $f(x_0)$; existe V vecindario de x_0 tal que $f(V) \subset V'$, por ser f continua en x_0; luego $V \subset f^{-1}(V')$.

$V \subset f^{-1}(V') \Longrightarrow f^{-1}(V')$ es un vecindario de x_0.

Recíprocamente, sea V' un vecindario de $f(x_0)$; por hipótesis $f^{-1}(V')$ es un vecindario de x_0, luego tomando $V = f^{-1}(V')$ tenemos:

$f(V) = f(f^{-1}(V')) \subset V'$, lo cual demuestra que f es continua.

PROPOSICION 1.21. Sean E y E' espacios métricos y f una aplicación de E en E'. Entonces las propiedades siguientes son equivalentes:

a) f es continua.

b) Para cada conjunto A de E, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

c) Para cada conjunto cerrado A' de E', $f^{-1}(A')$ es un conjunto cerrado en E.

d) Para cada conjunto abierto A' de E', $f^{-1}(A')$ es un conjunto abierto en E.

DEMOSTRACION:

a) $\Longrightarrow$ b)

Sea $x \in \overline{A}$, V' un vecindario de $f(x)$; $f^{-1}(V')$ es un vecindario de x, luego $f^{-1}(V') \cap A \neq \phi$.

$f^{-1}(V') \cap A \neq \phi \Longrightarrow V' \cap f(A) \neq \phi \Longrightarrow f(x) \in \overline{f(A)} \Longrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

b) $\Longrightarrow$ c)

Sea A' cerrado en E' y pongamos $A = f^{-1}(A')$; demostraremos que A es cerrado.

$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(A'))} \subset \overline{A'} = A'.$

$f(\overline{A}) \subset A' \Longrightarrow \overline{A} \subset f^{-1}(A') = A.$

Como además $A \subset \overline{A}$, entonces A es cerrado.

c) $\Longrightarrow$ d)

Sea A' abierto en E'.

A' abierto en $E' \Longrightarrow \complement A'$ es cerrado en E'

$\Longrightarrow f^{-1}(\complement A')$ es cerrado en E.

$\Longrightarrow \complement f^{-1}(\complement A')$ es abierto en E.

Pero $\complement f^{-1}(\complement A') = f^{-1}(A')$.

d) $\Longrightarrow$ a)

Sea $x_0 \in E$, V' un vecindario de $f(x_0)$; existe B' abierto en E' tal que $f(x_0) \in B'$ y $B' \subset V'$.

$f^{-1}(B')$ es abierto en E, además $x_0 \in f^{-1}(B')$ y $f^{-1}(B') \subset f^{-1}(V')$, por lo tanto $f^{-1}(V')$ es un vecindario de x_0, y por proposición 1.20 f es continua.

PROPOSICION 1.22. Sean E, E' y E'' espacios métricos, $f : E \longrightarrow E'$ y $g : E' \longrightarrow E''$ aplicaciones continuas.

Entonces la aplicación $h = g \circ f : E \longrightarrow E''$ es continua.

DEMOSTRACION:

Sea W un vecindario de $h(x_0) = g(f(x_0))$.

Por proposición 1.20 y por continuidad de g y f tenemos que $g^{-1}(W)$ es un vecindario de $f(x_o)$ en E' y $f^{-1}(g^{-1}(W))$ es un vecindario de x_o en E; pero $f^{-1}(g^{-1}(W)) = h^{-1}(W)$; por lo tanto h es continua.

Continuidad Uniforme.

DEFINICION. Sean E y E' espacios métricos, d y d' sus distancias respectivas. Una aplicación f de E en E' se dice que es uniformemente continua si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

De la definición anterior y la proposición 1.19 se sigue que una función uniformemente continua es continua.

El recíproco, en general, no es cierto. (Por ejemplo la función $x \to \frac{1}{x}$ es continua en (0, 1) pero no es uniformemente continua ya que la diferencia $\left| \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right| = \left| - \frac{h}{x(x+h)} \right|$ puede hacerse tan grande como se quiera; tomando x valores cercanos a ceros).

7. Homeomorfismos. Distancias equivalentes.

DEFINICION. Una aplicación f de un espacio métrico E en un espacio métrico E' se dice que es un homeomorfismo si: 1º) Es una biyección y 2º) f y f^{-1} son ambas continuas.

Dos espacios métricos E y E' son homeomorfos si existe un homeomorfismo de E sobre E'.

DEFINICION. Sean d_1 y d_2 dos distancias en un conjunto E, E_1 y E_2 los espacios métricos respectivos. Si la aplicación Identidad $x \longrightarrow x$ de

E_1 sobre E_2 es un homeomorfismo diremos que d_1 y d_2 son distancias equivalentes.

PROPOSICION 1.23. Las distancias d_1 y d_2 son equivalentes si y solo si la familia de conjuntos abiertos son los mismos en E_1 y E_2.

DEMOSTRACION:

Denotaremos por I la función Identidad.

"$\Longrightarrow$"

Sea A_2 abierto en E_2; por ser I continua $I^{-1}(A_2) = A_2$ es abierto en E_1.

Similarmente: si A_1 es abierto en E_1, por ser I^{-1} continua $I(A_1) = A_1$ es un abierto en E_2.

Por lo tanto la familia de abiertos de E_1 es igual a la familia de abiertos en E_2.

"$\Longleftarrow$" Sea A_2 un abierto de E_2 ; $A_2 = I^{-1}(A_2)$ es abierto en E_1, por lo tanto I es continua.

Sea A_1 abierto en E_1; $I(A_1) = A_1$ es abierto en E_2, luego I^{-1} es continua.

8. PRODUCTO DE DOS ESPACIOS MÉTRICOS.

Sean E_1 y E_2 dos espacios métricos, d_1 y d_2 sus métricas respectivas, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ puntos de $E = E_1 \times E_2$.

La aplicación d' de $E \times E$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$d'(X, Y) = \max \left[d_1(x_1, y_1),\ d_2(x_2, y_2) \right] \qquad (1)$$

es una distancia en E.

δ'

En efecto:

$P_1)$ Evidentemente $d(X, Y) \geq 0$.

$P_2)$ $d'(X, Y) = 0 \iff \max [d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)] = 0$

$\iff d_1(x_1, y_1) = 0$ y $d_2(x_2, y_2) = 0$

$\iff x_1 = y_1$ y $x_2 = y_2$

$\iff (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

$\iff X = Y$

$P_3)$ $d'(X, Y) = \max [d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)]$

$= \max [d_1(y_1, x_1), d_2(y_2, x_2)]$

$= d'(Y, X)$.

$P_4)$ Sean $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$, $Z = (z_1, z_2)$ puntos de E.

$d'(X, Z) = \max [d_1(x_1, z_1), d_2(x_2, z_2)]$

$\leq \max [d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1), d_2(x_2, y_2) + d_2(y_2, z_2)]$

$\leq \max [d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)] + \max [d_1(y_1, z_1) + d_2(y_2, z_2)]$

$= d'(X, Y) + d'(Y, Z)$.

El espacio métrico obtenido tomando d' como distancia en $E = E_1 \times E_2$ se denomina el producto de los espacios métricos E_1, E_2.

Se puede comprobar fácilmente que las aplicaciones d'', d''' definidas por

$$d''(X, Y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \qquad (2)$$

$$d'''(X, Y) = \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2)]^2} \qquad (3)$$

son también distancias en $E = E_1 \times E_2$.

Abreviadamente las distancias (1), (2) y (3) pueden escribirse:

$$d' = \max(d_1, d_2), \quad d'' = d_1 + d_2 , \quad d''' = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} .$$

Evidentemente d', d" y d'" satisfacen la desigualdad

$$d'(X, Y) \leq d'''(X, Y) \leq d''(X, Y) \leq 2\, d'(X, Y) . \qquad (4)$$

PROPOSICION I.24. Las distancias d', d" y d'" son equivalentes en $E = E_1 \times E_2$.

DEMOSTRACION:

Denotaremos por E', E", E'" los espacios métricos correspondientes a las métricas d', d" y d'" respectivamente.

Demostraremos que la aplicación identidad I de E' en E" es un homeomorfismo.

En efecto: sea $\xi > 0$.

$d''(X, Y) \leq 2\, d'(X, Y)$; luego tomando $\delta = \frac{\xi}{2}$ tenemos:

$$d'(X, Y) < \delta \Longrightarrow d''(I(X), I(Y)) = d''(X, Y) < \xi .$$

Lo cual prueba que I es uniformemente continua, y por lo tanto continua.

Así mismo: $d'(X, Y) \leq d''(X, Y)$, luego tomando $\delta = \xi$ tenemos:

$$d''(X, Y) < \delta \Longrightarrow d'(I^{-1}(X), I^{-1}(Y)) = d'(X, Y) < \xi .$$

Por lo tanto I^{-1} de E" en E' es continua.

Con lo anterior queda comprobado que I es un homeomorfismo y por lo tanto d' y d" son equivalentes.

En forma similar se demuestran las equivalencias de d" con d'" y d'" con d'.

Por ser d', d" y d''' equivalentes en $E = E_1 \times E_2$, para cuestiones referentes a abiertos (o sucesiones y funciones uniformemente continuas), es equivalente tomar en E cualquiera de ellas. Si no se dice nada en contra, se considerará en E la distancia d'.

PROPOSICION 1.25. Sea E un espacio métrico, d la distancia en E. Entonces la aplicación d de E x E en $\mathbb{R}$ es uniformemente continua.

DEMOSTRACION:

Sea $\varepsilon > 0$.

Probaremos primero que $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$.

En efecto:

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y, y')$$

$$\Longrightarrow d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') + d(y, y') \qquad (1)$$

$$d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y')$$

$$\Longrightarrow -[d(x', x) + d(y, y')] \leq d(x, y) - d(x', y') \qquad (2)$$

Por lo tanto: $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$.

Luego tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ tenemos:

$$d(x, x') < \delta \text{ , } d(y, y') < \delta \Longrightarrow |d(x, y) - d(x', y')| < \varepsilon$$

Con lo cual queda demostrado que d es uniformemente continua.

9. SUCESIONES. LÍMITES.

LÍMITES DE FUNCIONES.

DEFINICION. Sean E, E' espacios métricos, d y d' sus distancias respectivas, $A \subset E$, $b \in \bar{A}$, $b \notin A$, $\ell \in E'$.

$f : A \longrightarrow E'$; $g : A \cup \{b\} \longrightarrow E'$ aplicaciones tales que

$g(x) = f(x)$ para $x \in A$ y $g(b) = \ell$.

Diremos que $f(x)$ tiende a ℓ cuando $x \in A$ tiende a b si g es continua en b. Escribiremos $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in A}} f(x) = \ell$.

PROPOSICION 1.26. $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in A}} f(x) = \ell$ si y solo si para cada vecindario V' de ℓ en E', existe un vecindario V de b en E tal que $f(V \cap A) \subset V'$.

DEMOSTRACION:

"$\Longrightarrow$" Sea V' vecindario de ℓ en E'; por ser g continua en b existe V_1 vecindario de b en $A \cup \{b\}$ tal que $g(V_1) \subset V'$; pero V_1 es de la forma $V \cap (A \cup \{b\})$ con V vecindario de b en E, por lo tanto $g(V \cap (A \cup \{b\})) \subset V'$, lo cual implica que $g(V \cap A) \subset V'$; finalmente tenemos que $f(V \cap A) = g(V \cap A) \subset V'$.

"$\Longleftarrow$" Demostremos que g es continua en b.

Sea V' vecindario de ℓ en E'; entonces existe V vecindario de b en E tal que $g(V \cap A) = f(V \cap A) \subset V'$; además $\ell = g(b) \in V'$, luego $g(V \cap A) \cup g(b) \subset V'$.

$g(V \cap A) \cup g(b) \subset V' \Longrightarrow g((V \cap A) \cup \{b\}) \subset V' \Longrightarrow g(V \cap (A \cup \{b\})) \subset V'$.

Como $V \cap (A \cup \{b\})$ es un vecindario de b en $A \cup \{b\}$ concluimos que g es continua en b; por lo tanto $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in A}} f(x) = \ell$.

PROPOSICION 1.27. $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in A}} f(x) = \ell$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para $x \in A$ se tiene $d(x, b) < \delta$ implica que $d'(f(x), \ell) < \varepsilon$.

DEMOSTRACION:

" $\Longrightarrow$ " Sea $\varepsilon > 0$; por ser g continua en b existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x, b) < \delta$ entonces $d'(g(x), \ell) < \varepsilon$, por proposición 1.19.

En particular para x en A tendremos que si $d(x, b) < \delta$ entonces $d'(f(x), \ell) = d'(g(x), \ell) < \varepsilon$.

" $\Longleftarrow$ " Sea $\varepsilon > 0$; existe $\delta > 0$ tal que para x en A se tiene que si $d(x, b) < \delta$ entonces $d'(f(x), \ell) = d'(g(x), \ell) < \varepsilon$; además $d'(g(b), \ell) = 0$; luego, para $x \in A \cup \{b\}$, si $d(x, b) < \delta$ entonces $d'(g(x), \ell) < \varepsilon$; por lo tanto g es continua en b.

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de E y $b \in E$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a "b" Si para cada vecindario V de b, existe un entero n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n \in V$. Escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$; el elemento $b \in E$ se llama el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PROPOSICION 1.28. Sea E un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de E, $b \in E$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} d(b, x_n) = 0$.

DEMOSTRACION:

" $\Longrightarrow$ " Supongamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ y sea $\varepsilon > 0$; la bola $B(b, \varepsilon)$ es un vecindario de b, luego tendremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(b, \varepsilon)$ si $n \geq n_0$; dicho de otra forma $d(x_n, b) < \varepsilon$ si $n \geq n_0$, lo cual prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, b) = 0$.

" $\Longleftarrow$ " Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} d(b, x_n) = 0$.

Sea V un vecindario de b; existe una bola $B(b, \xi)$ tal que $B(b, \xi) \subset V$. Para este $\xi > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $d(b, x_n) < \xi$ si $n \geq n_o$, es decir, $x_n \in B(b, \xi) \subset V$ si $n \geq n_o$, con lo cual queda probado que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

PROPOSICION 1.29. Si una sucesión de un espacio métrico E tiene límite, este es único.

DEMOSTRACION:

Supongamos que una sucesión $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de elementos de E admite dos límites distintos p, q de E.

Por la propiedad de separación de Hausdorff existen V_1 vecindario de p y V_2 vecindario de q tal que $V_1 \cap V_2 = \phi$.

Por converger la sucesión a p existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_1$ si $n \geq n_o$ y por converger a q existe $m_o \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_2$ si $n \geq m_o$.

Sea $k = \max\{n_o, m_o\}$; entonces si $n \geq k$ se tendrá que $x_n \in V_1 \cap V_2$, lo cual es una contradicción.

PROPOSICION 1.30. Sea E un espacio métrico, $A \subset E$, $b \in E$. Entonces $b \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión de elementos de A que convergen hacia b.

DEMOSTRACION:

" $\Longleftarrow$ " Si existe una sucesión de elementos de A que convergen hacia b, entonces todo vecindario V de b contiene al menos un punto de la sucesión y por consecuencia un punto de A, y por la proposición 1.14 concluimos que b es un punto adherente de A.

" $\Longrightarrow$ " Si $b \in \overline{A}$, entonces $A \cap B(b, \frac{1}{n}) \neq \phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- - - -

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in A \cap B(b, \frac{1}{n})$; $x_n \in A$ para todo n. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ así formada converge hacia b; en efecto $d(b, x_n) < \frac{1}{n}$, luego $\lim_{n\to\infty} d(b, x_n) = 0$ y por proposición 1.28 tendremosque $\lim_{n\to\infty} x_n = b$.

COROLARIO. Sea E un espacio métrico. Entonces $A \subset E$ es cerrado si y solo si A contiene todos los límites de sus sucesiones convergentes en E.

DEMOSTRACION:

" $\Longrightarrow$ " Si A es cerrado, $A = \overline{A}$. Sea b límite de una sucesión en A convergente en E; entonces $b \in \overline{A} = A$.

" $\Longleftarrow$ " Sea $b \in \overline{A}$; entonces existe una sucesión en A tal que b es el límite de dicha sucesión. Por hipótesis se tiene que A contiene todos los límites de sus sucesiones convergentes, por lo tanto $b \in A$.

Con lo anterior hemos demostrado que $\overline{A} \subset A$, y como $A \subset \overline{A}$, tendremos que $\overline{A} = A$ y por lo tanto A es cerrado.

PROPOSICION 1.31. Una aplicación f de un espacio métrico E en un espacio métrico F es continua en $b \in E$, si y solo si la imagen por f de toda sucesión de puntos de E convergente hacia b es una sucesión de puntos de F convergente hacia $f(b)$.

DEMOSTRACION:

" $\Longrightarrow$ " Sea $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ una sucesión de puntos de E convergente hacia $b \in E$ y sea V un vecindario de $f(b)$ en F.

Por ser f continua, $f^{-1}(V)$ es un vecindario de b.

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(V)$ si $n \geq n_0$; por lo tanto $f(x_n) \in V$ si $n \geq n_0$; esto prueba que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(b)$.

" $\Longleftarrow$ " Supongamos ahora que para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(b)$, y supongamos que f no es continua en b; luego existe V vecindario de f(b) tal que $f^{-1}(V)$ no es vecindario de b; entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ la bola $B(b, \frac{1}{n})$ no está incluída completamente en $f^{-1}(V)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in B(b, \frac{1}{n})$ y $x_n \notin f^{-1}(V)$.

La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ así formada converge hacia b, pero $f(x_n)$ no converge hacia $f(b)$ lo cual es una contradicción; por lo tanto f es continua en $b \in E$.

10. ESPACIOS COMPLETOS.

SUCESIONES DE CAUCHY.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico. Una sucesión de Cauchy en E es una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de E tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p \geq n_0$ y $q \geq n_0$ entonces $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

PROPOSICION 1.32. Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

DEMOSTRACION:

Si $b = \lim_{n\to\infty} x_n$; para cada $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $p \geq n_0$ y $q \geq n_0$ se tendrá que

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, b) + d(b, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

DEFINICION. Sea E un conjunto y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de E. Se llama subsucesión (o sucesión parcial) de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a toda sucesión de la forma $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, donde $k \longrightarrow n_k$ es una aplicación creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

PROPOSICION 1.33. Toda sucesión parcial de una sucesión de Cauchy es -- también una sucesión de Cauchy. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

DEMOSTRACION:

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy: existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $p \geq N$ y $q \geq N$ entonces $d(x_p, x_q) < \xi$.

Sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión parcial de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Para todo k, $n_k \geq k$, luego $n_N \geq N$, por lo tanto si $n_p \geq n_N \geq N$ y $n_q \geq n_N \geq N$ tendremos que $d(x_{n_p}, x_{n_q}) < \xi$, con lo cual se demuestra la primera parte.

Demostremos la segunda parte. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy; existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p \geq n_0$ y $q \geq n_0$ entonces $d(x_p, x_q) < 1$.

Como $n_0 \geq n_0$ entonces para todo $p \geq n_0$ tendremos que $d(x_{n_0}, x_p) < 1$, es decir $x_p \in B(x_{n_0}, 1)$ para todo $p \geq n_0$, y por consiguiente la sucesión está contenida en la bola $B(x_{n_0}, R)$, donde

$R = \max\{d(x_{n_0}, x_0), d(x_{n_0}, x_1), \ldots, d(x_{n_0}, x_{n_0-1}), 1\}$.

DEFINICION. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de un espacio métrico E; diremos que $b \in E$ es un punto adherente de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si para todo vecindario V de b existe una infinidad de índices $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$.

PROPOSICION 1.34. Si en un espacio métrico E, una sucesión de Cauchy $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ admite un punto adherente b, esta sucesión es convergente hacia b.

DEMOSTRACION:

Sea $\varepsilon > 0$; existe n_0 tal que si $p \geq n_0$ y $q \geq n_0$ entonces $d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como b es un punto adherente a la sucesión, la bola $B(b, \frac{\varepsilon}{2})$ debe contener al menos un x_p, para $p \geq n_0$; es decir $d(x_p, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ para algún $p \geq n_0$, y deducimos que para $n \geq n_0$,

$d(x_n, b) \leq d(x_n, x_p) + d(x_p, b) < \varepsilon$.

ESPACIOS MÉTRICOS COMPLETOS.

DEFINICION. Decimos que un espacio métrico E es completo, si toda sucesión de Cauchy de E es convergente.

EJEMPLO: la recta real $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo.

PROPOSICION 1.35. Sea E un espacio métrico, F una parte de E. Si F es completo, entonces F es cerrado en E.

DEMOSTRACION:

Sea b un punto de E, adherente a F. Por la proposición 1.30, existe una sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ de puntos de F que converge hacia b, entonces es una sucesión de Cauchy en E y por consiguiente en F. Como F es completo, la sucesión tiene un límite $b' \in F$, además $b' \in E$. Por -

proposición 1.29 $b = b'$, lo cual prueba que $b \in F$ y claramente F es cerrado.

PROPOSICION 1.36. Si E es un espacio métrico completo, toda parte cerrada F de E es también completa.

DEMOSTRACION:

Sea $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ una sucesión de Cauchy en F; la sucesión es también de Cauchy en E, y como E es completo la sucesión tiene que converger hacia un punto $b \in E$. Como todos los x_n son elementos de F, b es necesariamente adherente a F, (por proposición 1.30), y como F es cerrado, $b \in F$. Luego tenemos que la sucesión de Cauchy converge hacia un elemento de F, por lo tanto F es completo.

PROLONGACIÓN DE APLICACIONES UNIFORMEMENTE CONTINUAS.

PROPOSICION 1.37. Sean f y g dos aplicaciones continuas de un espacio métrico E en un espacio métrico F. Entonces el conjunto

$A = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado en E.

DEMOSTRACION:

Probaremos que $\complement A$ es abierto.

Sea $a \in \complement A$, entonces $f(a) \neq g(a)$. Sea $r = d(f(a), g(a))$, $r > 0$.

Por ser f y g continuas en a, para las bolas $B(f(a), \frac{r}{2})$ y $B(g(a), \frac{r}{2})$ existen V y W vecindarios de a en E tal que

$F(V) \subset B(f(a), \frac{r}{2})$ y $g(W) \subset B(g(a), \frac{r}{2})$.

$U = V \cap W$ es un vecindario de a. Para $x \in U$, $d(f(x), f(a)) < \frac{r}{2}$ y $d(g(x), g(a)) < \frac{r}{2}$; entonces para $x \in U$, $f(x) \neq g(x)$; ya que si no fuera así se tendría que:

$$d(f(a), g(a)) \leq d(f(a), f(x)) + d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(a))$$

$$< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r .$$

Lo cual contradice el hecho: $d(f(a), g(a)) = r$.

Hemos encontrado U vecindario de $a \in \complement A$ tal que $U \subset \complement A$; por lo tanto $\complement A$ es abierto y A es cerrado.

COROLARIO. Sean f y g dos aplicaciones continuas de un espacio métrico E en un espacio métrico F; si $f(x) = g(x)$ para todos los puntos x de un subconjunto denso A de E entonces $f = g$.

DEMOSTRACION:

El conjunto de las x tales que $f(x) = g(x)$ es cerrado y además contiene a A, por lo tanto $f(x) = g(x)$ para $x \in \overline{A} = E$.

PROPOSICION 1.38. Sean E y F espacios métricos, E_1 un subespacio denso de E, f una aplicación de E_1 en F; supongamos f uniformemente continua sobre E_1 y F completo. Entonces existe una aplicación $\hat{f}$ y solo una de E en F, que es continua y que prolonga f; además, $\hat{f}$ es uniformemente continua.

DEMOSTRACION:

1º) Unicidad. Supongamos que existen dos funciones $\hat{f}$ y $\hat{g}$ que prolongan f y son uniformemente continuas.

Para $x \in E_1$, $\hat{f}(x) = \hat{g}(x) = f(x)$, y como E_1 es denso en E concluimos por el corolario anterior que $\hat{f}(x) = \hat{g}(x)$ para todo $x \in E$.

2º) Existencia. Sea $x \in E$; como E_1 es denso en E existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E_1 tal $\lim_{n\to\infty} x_n = x$; la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

es una sucesión de Cauchy en E (por proposición 1.32).

"La sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en F".

En efecto: sea $\varepsilon > 0$; como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que $x' \in E_1$, $x'' \in E_1$, $d(x', x'') < \delta$ implica que $d(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p \geq n_0$ y $q \geq n_0$; entonces $d(x_p, x_q) < \delta$ y por lo tanto $d(f(x_p), f(x_q)) < \varepsilon$, con lo cual probamos que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Como F es completo existe $L \in F$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Si $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión de elementos de E_1 que converge hacia x, la sucesión $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ será de Cauchy en F; luego existe $L_1 \in F$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = L_1$.

Probemos que $L_1 = L$. Sea $\varepsilon > 0$.

$d(L_1, L) \leq d(L_1, f(x'_n)) + d(f(x'_n), f(x_n)) + d(f(x_n), L)$.

Como $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = L_1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x'_n), L_1) < \frac{\varepsilon}{3}$ si $n \geq n_0$.

Como $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x_n), L) < \frac{\varepsilon}{3}$ si $n \geq m_0$.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones convergentes hacia x, y f es uniformemente continua puede encontrarse $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq p_0$ $d(x_n, x'_n) < \delta$ y además $d(f(x_n), f(x'_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por lo tanto para $n \geq \max\{n_0, m_0, p_0\}$, $d(L_1, L) < \varepsilon$, con lo cual probamos que $L = L_1$.

Hemos demostrado que para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E_1 convergente hacia x, la sucesión de los $f(x_n)$ converge hacia un único valor en F, al cual lo llamaremos $\hat{f}(x)$; es decir: $\hat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de E_1 tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Se ha definido así una aplicación $\hat{f}$ de E en F. Esta aplicación prolonga trivialmente f; en efecto si $x \in E_1$, podemos considerar la sucesión $x, x, \ldots, x, \ldots$ la cual converge hacia x, luego $\hat{f}(x) = \lim f(x) = f(x)$.

Nos resta probar que $\hat{f}$ es uniformemente continua.

Sea $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, δ el número que le es asociado por la continuidad uniforme de f; sean x e y dos puntos cualesquiera de E tales que $d(x, y) < \frac{\delta}{2}$.

Demostraremos que $d(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) < \varepsilon$, lo cual probará la continuidad uniforme de $\hat{f}$.

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de E_1 tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$.

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\delta}{4}$ si $n \geq n_0$ y $d(y_n, y) < \frac{\delta}{4}$ si $n \geq m_0$.

Luego para $n \geq \max\{n_0, m_0\}$ tendremos:

$d(x_n, y_n) < \frac{\delta}{2} + d(x, y) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$, y por consiguiente

$d(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$d(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) \leq d(\hat{f}(x), f(x_n)) + d(f(x_n), f(y_n)) + d(f(y_n), \hat{f}(y))$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \hat{f}(x)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \hat{f}(y)$, existen $r_0 \in \mathbb{N}$ y $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(\hat{f}(x), f(x_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$ si $n \geq r_0$ y $d(f(y_n), \hat{f}(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ si $n \geq s_0$, luego para $n \geq \max\{ n_0, m_0, r_0, s_0 \}$ $d(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) < \varepsilon$

COMPLETACIÓN DE UN ESPACIO MÉTRICO.

DEFINICION. Sean E y E' dos espacios métricos, d y d' sus distancias respectivas. Una biyección J de E en E' se denomina una *isometría* si:
$d'(J(x), J(y)) = d(x, y)$ para todo $x, y \in E$.

Si J es una isometría de E en E', J^{-1} es también una isometría de E' en E. Si existe una isometría de E en E', los espacios E y E' se dicen isométricos o metricamente isomorfos, y desde el punto de vista de la teoría de espacios métricos pueden considerarse iguales.

DEFINICION. Un espacio métrico $\hat{E}$ es una completación de un espacio métrico E si $\hat{E}$ es completo y E es isométrico a un subconjunto denso de $\hat{E}$.

PROPOSICION 1.39. Todo espacio métrico E tiene una completación, la cual es única en el sentido siguiente: si E_1 y E_2 son dos completaciones de E entonces E_1 y E_2 son isométricos.

DEMOSTRACION:

1º) <u>Existencia</u>. Designaremos por C(E) el conjunto de las sucesiones de Cauchy de elementos de E y sea $\sim$ la relación definida en C(E) por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

"La relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $C(E)$".

En efecto:

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ya que $d(x_n, x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ y como

$\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ concluimos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces

$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0$ luego,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) &\leq \lim \left[d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n)\\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $\hat{E}$ el conjunto cociente de $C(E)$ por la relación de equivalencia $\sim$; un elemento de $\hat{E}$ es entonces una clase de sucesiones de Cauchy de E dos a dos equivalentes.

Sea α y β dos puntos de $\hat{E}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de las las clases α y β respectivamente. En virtud de la desigualdad: $|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$, $\{d(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de números reales positivos, entonces estas distancias tienen un límite, el cual denotaremos por $e(\alpha, \beta)$, es decir $e(\alpha, \beta) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$, donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a la clase α y

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Pertenece a la clase β.

" $e(\alpha, \beta)$ es independiente de las sucesiones de Cauchy tomadas en las clases α y β ".

En efecto: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0$, luego por la desigualdad

$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)$, tendremos

que $\lim_{n\to\infty} [d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)] = 0$; es decir

$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$.

"La aplicación e de $\hat{E} \times \hat{E}$ en $\mathbb{R}$ es una función distancia".

En efecto: sean α , β y γ puntos de $\hat{E}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \alpha$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \beta$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \gamma$.

P_1) $e(\alpha, \beta) \geq 0$, para todo $(\alpha, \beta) \in \hat{E} \times \hat{E}$, ya que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \geq 0$.

P_2) $e(\alpha , \beta) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$

$$\iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\iff \alpha = \beta .$$

P_3) $e(\alpha , \beta) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = e(\beta , \alpha)$

P_4) $e(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} [d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)]$

$$= \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} d(z_n, y_n).$$

$$= e(\alpha, \gamma) + e(\gamma, \beta).$$

Por lo tanto $\hat{E}$ provisto de la función e es un espacio métrico.

Sea $x \in E$; la sucesión $x, x, \ldots, x, \ldots$ es una sucesión de Cauchy; denotaremos por $\overset{\circ}{x}$ su clase de equivalencia y por $E^* = \{\overset{\circ}{x} \mid x \in E\}$.

Demostremos que E^* es isométrico a E y que E^* es denso en $\hat{E}$.

1) La aplicación $x \longrightarrow \overset{\circ}{x}$ de E en E^* es biyectiva.

a) Inyectividad: sean p y q puntos de E; $p \neq q$.

$\lim_{n\to\infty} d(p, q) \neq 0$, por lo tanto las sucesiones: $p, p, p, \ldots, p, \ldots$

y $q, q, q, \ldots, q, \ldots$ no son equivalentes es decir $\overset{\circ}{p} \neq \overset{\circ}{q}$.

b) La aplicación $x \longrightarrow \overset{\circ}{x}$ de E en E^* es sobre por construcción de E^*.

2) Para todo p y q elementos de E tenemos:

$$e(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) = \lim_{n\to\infty} d(p, q) = d(p, q).$$

Por lo tanto E y E^* son isométricos.

Demostremos ahora que E^* es denso en $\hat{E}$.

Sea $\alpha \in \hat{E}$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de E perteneciente a la clase α.

$$\lim_{n\to\infty} e(\alpha, \overset{\circ}{x}_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n)\right] = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(x_m, x_n) = 0$$

lo cual demuestra que la sucesión $(\overset{\circ}{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha \in \hat{E}$; por lo tanto E^* es denso en $\hat{E}$.

Demostremos finalmente que $\hat{E}$ es completo.

Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\hat{E}$. Como E^* es denso en $\hat{E}$, para cada α_n existe $\overset{\circ}{x}_n$ en E^* tal que $e(\alpha_n, \overset{\circ}{x}_n) < \frac{1}{n}$.

"La sucesión de los $\overset{\circ}{x}_n$ es de Cauchy".

En efecto: $e(\overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{x}_m) \leq e(\overset{\circ}{x}_n, \alpha_n) + e(\alpha_n, \alpha_m) + e(\alpha_m, \overset{\circ}{x}_m)$.

Sea $\xi > 0$; existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_1} < \frac{\xi}{3}$, luego para $n \geq n_1$ y $m > n_1$ tendremos que:

$e(\overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{x}_m) \leq \frac{\xi}{3} + e(\alpha_n, \alpha_m) + \frac{\xi}{3}$.

Como $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $m \geq n_0$ entonces $e(\alpha_n, \alpha_m) < \frac{\xi}{3}$, por lo tanto para n y $m \geq \max\ \{n_0, n_1\}$, $e(\overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{x}_m) < \xi$.

Por ser $(\overset{\circ}{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en E^* tendremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E, por ser E^* isométrico a E.

Sea α la clase de equivalencia a la cual pertenece $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; como vimos en la demostración de la densidad de E^* en $\hat{E}$, $\lim_{n\to\infty} \overset{\circ}{x}_n = \alpha$.

"Demostremos que los α_n también convergen a α".

$e(\alpha_n, \alpha) \leq e(\alpha_n, \overset{\circ}{x}_n) + e(\overset{\circ}{x}_n, \alpha)$.

Sea $\xi > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_1} < \frac{\xi}{2}$. Para $n > n_1$,

$e(\alpha_n, \overset{\circ}{x}_n) < \frac{\xi}{2}$.

Además como $\overset{\circ}{x}_n \longrightarrow \alpha$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$e(\overset{\circ}{x}_n, \alpha) < \frac{\xi}{2}$.

Por lo tanto para $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, $e(\alpha_n, \alpha) < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi$; es decir: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, con lo cual hemos demostrado que $\hat{E}$ es completo.

2º) <u>Unicidad</u>. Sean E_1 y E_2 dos completaciones de E, denotemos por d la distancia en E_2 y por e la distancia en E_1.

Podemos considerar a E como subespacio denso de E_2.

Existe una isometría J de $E \subset E_2$ en un subconjunto denso F de E_1, J es uniformemente continua, ya que: $e(J(x), J(y)) = d(x, y)$. Luego por proposición 1.38, existe $\hat{J}$ de E_2 en E_1, extensión de J, $\hat{J}$ continua.

"$\hat{J}$ preserva las distancias".

En efecto:

$$\begin{aligned}
e(\hat{J}(x), \hat{J}(y)) &= e(\lim_{n\to\infty} J(x_n), \lim_{n\to\infty} J(y_n)); \quad \text{donde } x_n \longrightarrow x \text{ y } y_n \longrightarrow y \\
&= \lim_{n\to\infty} e(J(x_n), J(y_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \\
&= d(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) \\
&= d(x, y).
\end{aligned}$$

Por preservar la distancia se tiene que $\hat{J}$ es inyectiva; luego $\hat{J}$ es una isometría de E_2 en $\hat{J}(E_2)$; como E_2 es completo $\hat{J}(E_2)$ también lo será; y por proposición 1.35 $\hat{J}(E_2)$ es cerrado en E_1; y además $\hat{J}(E_2)$ contiene a F denso en E_1, por lo tanto $\hat{J}(E_2) = E_1$, con lo cual concluimos que $\hat{J}$ es una isometría de E_2 en E_1.

11. ESPACIOS COMPACTOS.

Sea E un espacio métrico. Un recubrimiento de E es un conjunto de partes de E, tal que todo punto de E pertenece al menos a alguna de las partes. Un subrecubrimiento de un recubrimiento es un recubrimiento formado de partes pertenecientes al primer recubrimiento. Un recubrimiento es finito si él está formado de un número finito de partes de E. Un recubrimiento de E se dice que es abierto si todas las partes pertenecientes al recubrimiento son abiertos de E.

DEFINICION. Un espacio métrico E se dice compacto si todo recubrimiento abierto de E admite un subrecubrimiento finito.

El conjunto de intervalos $]n-1, n+1[$ donde $n \in Z$ forman un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}$, y como de este recubrimiento no puede extraerse un subrecubrimiento finito de $\mathbb{R}$, concluimos que $\mathbb{R}$ no es compacto.

PROPOSICION 1.40. Un espacio métrico E es compacto si y solo si para todo conjunto de partes cerradas de E de intersección vacía, existe un número finito de esas partes de intersección vacía.

DEMOSTRACION:

" $\Longrightarrow$ " Sea $\{O_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados de E tal que $\bigcap_{i\in I} O_i = \phi$

$\bigcap_{i\in I} O_i = \phi \Longrightarrow \complement(\bigcap_{i\in I} O_i) = \bigcup \complement O_i = E.$

$\complement O_i$ es abierto para todo $i \in I$; por ser E compacto existe $J \subset I$, J finito tal que $\bigcup_{i\in J} \complement O_i = E$. Luego $\bigcap_{i\in J} O_i = \phi$.

" $\Longleftarrow$ " Sea $\{O_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de E, $\bigcup_{i\in I} O_i = E$.

$\bigcup_{i\in I} O_i = E \Longrightarrow \bigcap \complement O_i = \phi$; $\complement O_i$ es cerrado para todo $i \in I$.

Existe J finito tal que $\bigcap_{i\in J} \complement O_i = \phi$; luego $\bigcup_{i\in J} O_i = E$, y por lo tanto E es compacto.

COROLARIO 1. Si E es un espacio compacto, y si $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados de intersección vacía, entonces existe un entero n, tal que F_n es vacío.

DEMOSTRACION:

Si $\bigcap_{i\in \mathbb{N}} F_i = \phi$ entonces existe J finito, $J \subset \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i\in J} F_i = \phi$;

como la sucesión de los F_n es decreciente, existe $i_0 \in J$, tal que

$F_{i_0} \subset F_i$ para todo $i \in J$; por lo tanto $F_{i_0} \subset \bigcap_{i\in J} F_i = \phi$.

El corolario anterior es equivalente al siguiente:

COROLARIO 2. Si E es un espacio métrico compacto y si $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados, cada uno de ellos distinto de vacío, entonces su intersección es no vacía.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico, A una parte de E; diremos que A es compacto, si A provisto de la métrica inducida es un espacio compacto.

PROPOSICION 1.41. La unión de un número finito de partes compactas de un espacio métrico E es también compacta.

DEMOSTRACION:

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ partes compactas de E y sea R un recubrimiento abierto de $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Si $O_i \in R$ entonces $O_i \cap A_1$ es un abierto de A_1, y la familia de $(O_i \cap A_1)$ con O_i en R es un recubrimiento abierto de A_1.

Como A_1 es compacto; un número finito de $O_i \cap A_1$ será suficiente para recubrir A_1, y por lo tanto un número finito de O_i cubren A_1. Lo mismo sucede para $A_2, A_3, \ldots, A_n$.

Los n sistemas finitos de abiertos de R recubrirán A, y por lo tanto A es compacto.

PROPOSICION 1.42. Un intervalo cerrado acotado $[a, b]$ de la recta real $\mathbb{R}$ es un espacio compacto.

DEMOSTRACION:

Sea R un recubrimiento abierto de $[a, b]$ y sea c el punto medio de $[a, b]$.

Si no es posible tomar un número finito de partes de R, que recubran todo el intervalo $[a, b]$, tampoco será posible para al menos alguno de los subintervalos $[a, c]$, $[c, b]$, por ejemplo $[c, b]$. Llamaremos $[a_1, b_1]$ a este subintervalo.

Partimos $[a_1, b_1]$ en dos y tomamos el subintervalo $[a_2, b_2]$ dos veces más pequeño y con la misma propiedad de $[a_1, b_1]$.

Formamos así una sucesión infinita $[a_0, b_0] = [a, b]$, $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ de subintervalos de $[a, b]$ con la misma propiedad:

"Ninguno de ellos puede ser recubierto por un número finito de partes pertenecientes a R".

La sucesión creciente mayorada de los a_n admitirá un límite α, la sucesión decreciente minorada de los b_n admitirá un límite β, y como la longitud de $[a_n, b_n]$ es $\frac{b-a}{2^n}$, necesariamente $\alpha = \beta$.

De acuerdo a la definición de límite de una sucesión, todo intervalo abierto que contenga al punto $\alpha = \beta$ contiene, para n bastante grande a_n y b_n, y por lo tanto contiene al intervalo $[a_n, b_n]$.

Existe necesariamente un abierto del recubrimiento R, que contiene al punto α, llamemosle O; como O es abierto, existe un intervalo abierto $]a', b'[$ contenido en O y que a su vez contiene a α; entonces, para n bastante grande, el intervalo $[a_n, b_n]$ estará contenido en $]a', b'[$ y por lo tanto en O, llegamos asi a una contradicción: $[a_n, b_n]$ no debe ser recubrierto por un número finito de partes de R, y ahora tenemos que es recubierto por una sola de ellas, O. Esta contradicción prueba que $[a, b]$ es compacto.

PROPOSICION 1.43. Sea E un espacio métrico, F una parte compacta de E; entonces F es cerrado en E.

DEMOSTRACION:

Probaremos que $\complement F$ es abierto.

Sea $b \in \complement F$; para todo $x \in F$, existen dos abiertos O_x y O'_x tales que $x \in O_x$, $b \in O'_x$ y $O_x \cap O'_x = \phi$. Los O_x forman un recubrimiento abierto de F, luego podemos extraer un sub recubrimiento finito (O_{x_i}). Entonces la intersección finita de los O'_{x_i} correspondientes es un abierto O' que contiene a "b" y $O' \cap F = \phi$. Tenemos así que todo punto de $\complement F$

pertenece a un abierto incluido en $\complement F$, por lo tanto $\complement F$ es abierto y F es cerrado.

PROPOSICION 1.44. Toda parte cerrada de un espacio métrico compacto es compacta.

DEMOSTRACION:

Sea E un espacio métrico compacto, F una parte cerrada de E y sea $(F_i)_{i\in I}$ una familia cualquiera de subconjuntos de F, cerrados en F, y supongamosque $\bigcap_{i\in I} F_i = \phi$.

Como los F_i son cerrados en F y F es cerrado en E, los F_i serán cerrados en E (por proposición 1.18); como E es supuesto compacto, existe un número finito de los F_i cuya intersección es vacía; esto prueba, de acuerdo a la proposición 1.40, que F es un compacto.

PROPOSICION 1.45. Sea E un espacio métrico, $\{x_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de E y $b \in E$. Entonces b es adherente a la sucesión $\{x_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ si y solo si podemos extraer de esta sucesión una sucesión parcial convergente hacia b.

DEMOSTRACION:

" $\Longrightarrow$ " Si b es un punto adherente a la sucesión, para cada bola $B(b,\frac{1}{n})$ existe una infinidad de valores enteros p tales que $x_p \in B(b, \frac{1}{n})$. Tomemos un entero p_1 tal que $x_{p_1} \in B(b, 1)$. Luego tomemos $p_2 > p_1$, tal - que $x_{p_2} \in B(b, \frac{1}{2})$, en seguida un entero $p_3 > p_2$ tal que $x_{p_3} \in B(b, \frac{1}{3})$, y así sucesivamente; de la sucesión inicial se ha formado la sucesión parcial $(x_{p_k})_{k\in \mathbb{N}}$, la cual evidentemente converge hacia b.

" $\Longleftarrow$ " Si de la sucesión inicial puede extraerse una sucesión parcial $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge hacia b, entonces para todo vecindario V de b existirá una infinidad de k tales que $x_{n_k} \in V$; luego b es un punto adherente a la sucesión inicial.

LEMA 1. Sea E un espacio métrico en el cual toda sucesión admite al menos un punto adherente; sea R un recubrimiento abierto de E. Entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que toda bola de centro cualquier punto y radio $r \leq \varepsilon$, está contenida toda entera en al menos uno de los abiertos de R.

DEMOSTRACION:

Supongamos que no es así. Entonces para todo entero n, es posible encontrar un punto a_n de E tal que la bola $B(a_n, \frac{1}{n})$ en ninguno de los abiertos del recubrimiento está contenida.

Formamos así una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ de elementos de E. Esta sucesión admite al menos un punto adherente b. Como R es un recubrimiento, existe un abierto de R, supongamos O, que contiene a "b"; O contiene una bola abierta de centro b y radio α.

Por ser b un punto adherente a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces existe una infinidad de valores de n, luego al menos uno, tal que se tiene a la vez $d(a_n, b) \leq \frac{\alpha}{2}$ y además $\frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{n}$. "La bola de centro a_n y radio $\frac{1}{n} \leq \frac{\alpha}{2}$ está toda entera contenida en la bola $B(b, \alpha)$"; en efecto: si $x \in B(a_n, \frac{1}{n})$ entonces $d(x, b) \leq d(x, a_n) + d(a_n, b) < \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{2}$

$$\leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha \ ;$$

por consiguiente la bola $B(a_n, \frac{1}{n})$ estará contenida en O, abierto del recubrimiento; esto es contrario a la hipótesis hecha sobre la sucesión de los a_n. Con lo cual llegamos a una contradicción.

LEMA 2. Sea E un espacio métrico en el cual toda sucesión admite al menos un punto adherente. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos recubrir E por un número finito de bolas de radio ε.

DEMOSTRACION:

Sea a_0 un punto de E; si $B(a_0, \varepsilon) = E$, entonces el lema está demostrado. Si no es así, existirá al menos un punto a_1 que no pertenece a $B(a_0, \varepsilon)$.

Si ahora $B(a_0, \varepsilon) \cup B(a_1, \varepsilon) = E$, entonces el lema está demostrado, y así sucesivamente. De esta forma podemos formar una sucesión $B(a_0, \varepsilon), B(a_1, \varepsilon), \ldots, B(a_n, \varepsilon), \ldots$ de bolas abiertas de radio ε. Si este proceso fuera ilimitado, podríamos formar una sucesión infinita de puntos $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ en donde la distancia entre dos de ellas cualesquiera es $\geq \varepsilon$. Esta circunstancia es imposible de dar ya que esta sucesión infinita poseerá al menos un punto adherente b, y por consiguiente existirá una infinidad de valores de n; luego al menos dos valores distintos p y q, tales que $d(b, a_p) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ y $d(b, a_q) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Deducimos que $d(a_p, a_q) \leq \frac{2}{3}\varepsilon$, lo cual es contradictorio a la hipótesis $d(a_p, a_q) \geq \varepsilon$. Resulta entonces que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$E = \bigcup_{i=0}^{n} B(a_i, \varepsilon).$$

PROPOSICION 1.46. (Propiedad de Bolzano - Weierstrass). Sea E un espacio métrico. Entonces E es compacto si y solo si toda sucesión de elementos de E admite al menos un punto adherente.

DEMOSTRACION:

" $\Longrightarrow$ " Supongamos E compacto y sea $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ una sucesión de elementos de E. Llamemos A_n al conjunto $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, y $\overline{A}_n$ su adherencia; entonces los $\overline{A}_n$ forman una sucesión decreciente de conjuntos cerrados y ninguno de ellos es vacío, luego su intersección no es vacío. Sea b un punto de esta intersección. Decir que $b \in \overline{A}_n$, es decir que todo vecindario de b contiene al menos un punto de A_n, y como es verdadero para todo n, esto prueba que b es un punto adherente a la sucesión.

" $\Longleftarrow$ " Sea R un recubrimiento cualquiera de E; por el lema 1, existe un número $\xi > 0$ tal que toda bola de radio $\leq \xi$ está contenida toda entera en al menos uno de los abiertos del recubrimiento R. De acuerdo al lema 2, podemos recubrir E todo entero por un número finito de bolas $B_0, B_1, \ldots, B_n$ de radio ξ. Como cada una de las B_i está contenida toda entera en un abierto O_i del recubrimiento R, obtenemos con ello un número finito de abiertos $O_0, O_1, \ldots, O_n$ de R con los cuales se recubre E.

PROPOSICION 1.47. Sea E un espacio métrico compacto. Entonces una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E es convergente hacia $b \in E$ si y solo si la sucesión admite a b como el único punto adherente.

DEMOSTRACION:

" $\Longrightarrow$ " Si la sucesión converge hacia b, entonces b es un punto adheren te a la sucesión; supongamos existe $c \neq b$ que también es adherente a la sucesión; existen vecindarios U de b y V de c que no tienen puntos comunes. Por ser b el límite de la sucesión debemos tener que $x_n \in U$ para todos los n, salvo por un número finito, y por ser c adherente a la sucesión, existirá una infinidad de índices n para los cuales $x_n \in V$; lo cual es absurdo.

" $\Longleftarrow$ " Supongamos que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ es una sucesión de elementos de E que admite a "b" como el único punto adherente. Si esta sucesión no es convergente hacia b, existirá al menos un abierto O que contiene a "b" y una sucesión parcial x_{n_k} de la sucesión inicial, tal que todos los x_{n_k} están en el complemento de O. Como $\complement O$ es cerrado, por proposición 1.44, se tendrá que es compacto.

La sucesión parcial de los x_{n_k}, deberá tener sobre $\complement O$ al menos un punto adherente, y por consiguiente también la sucesión inicial. Lo cual contradice la hipótesis de que la sucesión admite a "b" como el único punto adherente.

NOTA: El resultado es evidentemente falso para los números reales por ser $\mathbb{R}$ no compacto. Por ejemplo: la sucesión $1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots$ admite 0 como el único punto adherente, pero la sucesión no es convergente.

PROPOSICION 1.48. Sean E y E_1 espacios métricos, f una aplicación continua de E en E_1. Si E es compacto entonces $f(E)$ también lo es.

DEMOSTRACION:

Supongamos E compacto, y sea R un recubrimiento abierto de $f(E)$. Las imagenes recíprocas $f^{-1}(O_i)$ con O_i en R forman un recubrimiento abierto de E.

En efecto: si x es un punto cualquiera de E, su imagen f(x) pertenece a algunos de los abiertos, sea O_i, y por consecuencia $x \in f^{-1}(O_i)$; los $f^{-1}(O_i)$ son abiertos por ser f continua.

Como E se supone compacto, bastará un número finito de abiertos $f^{-1}(O_i)$, por ejemplo $f^{-1}(O_1), f^{-1}(O_2), \ldots, f^{-1}(O_n)$, para recubrir E; pero esto significa que los abiertos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ forman un recubrimiento abierto de f(E). En efecto: $E = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(O_i) \Longrightarrow f(E) = f(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(O_i))$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(O_i)) \subset O_i$$

Hemos demostrado que de cualquier recubrimiento abierto de f(E) puede extraerse un subrecubrimiento finito por lo tanto concluimos que f(E) es compacto.

COROLARIO. Toda función continua f sobre un compacto E, con valores en un espacio métrico F es acotada.

En efecto: f(E) es un compacto de F; entonces es acotado.

PROPOSICION 1.49. Toda aplicación continua de un espacio compacto no vacío en $\mathbb{R}$ admite un máximo y mínimo.

DEMOSTRACION:

Sea f una aplicación continua de un espacio compacto E en $\mathbb{R}$. Por proposición 1.48 f(E) es un compacto no vacío de $\mathbb{R}$, luego f(E) es acotado; y por proposición 1.43 f(E) es cerrado en $\mathbb{R}$, por lo tanto $\sup_{x \in E} f(x)$

luego $K \subset f^{-1}(]-M, M[)$

e $\inf_{x \in E} f(x)$ que son puntos adherentes de $f(E)$ pertenecen a $f(E)$, con lo cual se concluye que $\sup_{x \in E} f(x)$ es un máximo e $\inf_{x \in E} f(x)$ es un mínimo.

COROLARIO 1. Sea E compacto, f de E en $\mathbb{R}$ continuo, si para todo x de E, $f(x) > 0$, entonces existe un número fijo $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq \delta$, para todo x de E.

DEMOSTRACION:

Por proposición anterior $f(E)$ tiene un máximo y un mínimo, luego, si $f(x) > 0$ para todo $x \in E$, su mínimo δ será un valor de la función en un punto "c" conveniente, entonces $\delta > 0$, y tendremos tambien que $f(x) \geq \delta$, para todo $x \in E$.

COROLARIO 2. Sea E un espacio métrico, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y sea K un compacto de E. Entonces existe un vecindario de K sobre el cual f es acotada.

DEMOSTRACION:

$f(K)$ es compacto en $\mathbb{R}$ y por lo tanto acotado; existe entonces un número $M > 0$ tal que $f(K) \subset]-M, M[$, luego $K \subset f^{-1}(]-M, M[)$.

$f^{-1}(]-M, M[)$ es un abierto por ser f continua, con lo cual $f^{-1}(]-M, M[)$ es el vecindario buscado.

CAPITULO II
ESPACIOS NORMADOS

1. NORMA. ESPACIO NORMADO.

DEFINICION. Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo K de los números reales o de los números complejos. Llamaremos norma sobre el espacio vectorial E a toda aplicación de E en $\mathbb{R}$ (indicada corrientemente por $x \longrightarrow \|x\|$) que tiene las siguientes propiedades:

I) $\|x\| \geq 0$ para cada $x \in E$.

II) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.

III) $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$, $\lambda \in K$.

IV) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ "Desigualdad triangular.

Un espacio normado es un espacio vectorial E sobre el cual se ha definido una norma.

PROPOSICION 2.1. a) $\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|$

b) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$.

a) Se demuestra fácilmente por IV) e inducción.

Demostración de b): $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, por tanto

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \qquad (1)$$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \text{ , luego}$$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \qquad (2)$$

Multiplicando (2) por (-1) tenemos que $\|x\| - \|y\| \geq -\|y - x\|$; pero

$\|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \; \|x - y\|$, por lo tanto

$$\|x\| - \|y\| \geq -\|x - y\| \qquad (3)$$

De (1) y (3) concluimos finalmente que:

$$\big| \, \|x\| - \|y\| \, \big| \leq \|x - y\| \, .$$

PROPOSICION 2.2. Si $x \longrightarrow \|x\|$ es una norma en el espacio vectorial E, entonces $d(x, y) = \|x - y\|$ es una distancia en E tal que $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ y $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x, y)$.

DEMOSTRACION:

$P_1)$ "$d(x, y) \geq 0$"

$d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ por I)

$P_2)$ "$d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$."

$d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y.$

P3) "$d(x, y) = d(y, x)$"

$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| . \|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x).$

$P_4)$ "$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$"

$d(x, z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x, y) + d(y, z).$

Por lo tanto: $d(x, y) = \|x - y\|$ es una distancia en E.

$d(x + z, y + z) = \|(x+z) - (y + z)\| = \|x+z-y-z\| = \|x-y\| = d(x, y)$

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| &= \|\lambda(x - y)\| \\ &= |\lambda| . \|x - y\| \\ &= |\lambda| . d(x, y). \end{aligned}$$

EJEMPLOS DE NORMAS.

1º) En $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, la función $x \longrightarrow |x|$ es una norma, se le denomina norma natural; a partir de ella se define la métrica natural.

2º) Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, las tres funciones siguientes son normas:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow \begin{cases} \operatorname{Max}_{i=1}^{n} |x_i| & (1) \\ \sum_{i=1}^{n} |x_i| & (2) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} & (3);\ \text{norma natural} \end{cases}$$

Es evidente que (1) y (2) son normas; demostraremos que (3) tambien lo es.

I) Evidentemente $\|X\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ es ≥ 0 .

II) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = 0$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow |x_i| = 0 \quad \text{para todo } i$$

$$\Longleftrightarrow X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

III) $\|\lambda X\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^2 \right)^{1/2}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^2 \, |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$= |\lambda| . \|X\| .$$

IV) Sean $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dos elementos de $\mathbb{E}^n$.

LEMA. (DESIGUALDAD DE CAUCHY - SCHWARZ).

$$" \sum_{i=1}^{n} |x_i| \; |y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \right)^{1/2} " .$$

DEMOSTRACION:

Si $X = 0$ ó $Y = 0$, la desigualdad se reduce a $0 \leq 0$, lo cual es verdadero; por lo tanto supongamos que $X \neq 0$, $Y \neq 0$.

Para m y n números reales cualesquiera se tiene $0 \leq (m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$ o equivalentemente

$$2\,mn \leq m^2 + n^2 \tag{1}$$

Como m y n son números reales arbitrarios, tomemos:

$$m = \frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}} \quad y \quad n = \frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \right)^{1/2}}$$

Entonces para cualquier k se tiene que

$$2\,\frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}}\cdot\frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}}\leq\frac{|x_k|^2}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}+\frac{|y_k|^2}{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}\qquad(2)$$

Sumando en (2) con respecto a k se tiene:

$$\frac{2\sum_{k=1}^{n}|x_k|\,|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}}\leq\frac{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}+\frac{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2}{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}=2$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k|\,|y_k|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}$$

lo cual, también puede escribirse en la forma

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\,|y_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Demostraremos ahora la desigualdad triangular:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Por la desigualdad de Cauchy - Schwarz, tenemos:

$$2\sum_{i=1}^{n}|x_i|\,|y_i|\leq 2\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ |y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

$$+ 2\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\Big)^{1/2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}(|x_i|^2 + |y_i|^2 + 2\ |x_i|\ |y_i|) \leq \left[\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\Big)^{1/2}\right]^2$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}(|x_i| + |y_i|)^2 \leq \left[\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\Big)^{1/2}\right]^2$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |\ x_i + y_i\ |^2 \leq \left[\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\Big)^{1/2}\right]^2$$

$$\Longrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\Big)^{1/2} .$$

Por lo tanto queda demostrado que la aplicación (3) es una norma, y se le denomina la norma natural de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.

3º) Sobre el espacio vectorial L1 de sucesiones complejas $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ tales que la serie de módulos sea convergente: $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty$, la función $X \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ es una norma.

En efecto:

I) $||X|| \geq 0$ trivial.

II) $||X|| = 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad |x_n| = 0 \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$\Longleftrightarrow \quad X = \{0, 0, 0, \dots\}$$

III) $$\|\lambda X\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda\, x_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda||x_n|$$

$$= |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

$$= |\lambda|\, \|X\| \text{ .}$$

IV) Sean $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $Y = \{y_0, y_1, \dots y_n , \dots\}$ sucesiones complejas tales que: $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$ y $\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|$ son convergentes.

$$\|X + Y\| = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=0}^{\infty} (|x_i| + |y_i|)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| + \sum_{i=0}^{\infty} |y_i|$$

$$= \|X\| + \|Y\| \text{ .}$$

4º) Sobre el espacio vectorial L^{∞} de sucesiones complejas $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, acotadas, la función $X \longrightarrow \sup_{n\geq 0} |x_n|$; es una norma; en efecto:

I) $\sup_{n\geq 0} |x_n| \geq 0$, por lo tanto $\|X\| \geq 0$.

II) $\|X\| = 0 \Longleftrightarrow \sup_{n\geq 0} |x_n| = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad |x_n| = 0 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Longleftrightarrow \quad X = \{0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$$

III) $$\|\lambda X\| = \sup_{n \geq 0} |\lambda\, x_n| = \sup_{n \geq 0} |\lambda|\, |x_n|$$

$$= |\lambda| \sup_{n \geq 0} |x_n|$$

$$= |\lambda|\ \|X\| .$$

IV) $$\|X + Y\| = \sup_{n \geq 0} |x_n + y_n|$$

$$\leq \sup_{n \geq 0} (|x_n| + |y_n|)$$

$$= \sup_{n \geq 0} |x_n| + \sup_{n \geq 0} |y_n|$$

$$= \|X\| + \|Y\| .$$

Bolas abiertas. Bolas cerradas.

En un espacio vectorial normado E, llamaremos bola abierta (bola cerrada) de radio $r > 0$, sin precisar el centro, la bola que tiene por centro el origen del espacio vectorial, y por radio r, y la denotaremos por $B(r)$ $(B'(r))$.

$$B(r) = \{x \in E \mid d(x, 0) < r\} = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$$

$$B'(r) = \{x \in E \mid d(x, 0) \leq r\} = \{x \in E \mid \|x\| \leq r\} .$$

En particular la bola unitaria abierta (cerrada) será la bola abierta (cerrada) de centro 0 y radio 1.

DEFINICION. Sean E un espacio vectorial, a y b puntos de E. Llamaremos segmento cerrado, o simplemente segmento de extremos a y b, y lo denotaremos por $[a, b]$ al conjunto: $\{ta + (1 - t)b \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

Una parte A de E se dice convexa si, para cualquier par de puntos x, y de A, todo el segmento $[x, y]$ está contenido en A.

PROPOSICION 2.3. Toda bola es un conjunto convexo.

DEMOSTRACION:

Si $\|x\| \leq r$ y $\|y\| \leq r$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\|tx + (1 - t)y\| &\leq \|tx\| + \|(1 - t)y\| \\
&= |t|\ \|x\| + |1 - t|\ \|y\| \\
&\leq t\,r + (1 - t)r \\
&= [t + (1 - t)]\,r \\
&= r.
\end{aligned}$$

2. Normas equivalentes.

DEFINICION. Sobre un espacio vectorial, dos normas se dicen equivalentes si las métricas correspondientes son equivalentes.

PROPOSICION 2.4. (TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE NORMAS). En un espacio vectorial E, dos normas, denotadas $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$, son equivalentes, si y solo si existen dos números $k' > 0$ y $k'' > 0$ tales que:

$\|x\|_2 \leq k' \|x\|_1$ y $\|x\|_1 \leq k'' \|x\|_2$.

DEMOSTRACION:

Denotamos por E_1 y E_2 los espacios correspondientes a las métricas, definidas por $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ respectivamente. Por ser las métricas equivalentes, la aplicación identidad I de E_1 en E_2 es un homeomorfismo, es decir:

1º) I es biyectiva y

2º) I e I^{-1} son ambas continuas.

Por ser I continua en el origen, para $\xi = 1$, existe $k > 0$ tal que si $\|x\|_1 < \frac{1}{k}$ entonces $\|x\|_2 \leq 1$.

Sea $x \in E$, $x \neq 0$

$$\left\| \frac{x}{2\|x\|_1 k} \right\|_1 = \frac{\|x\|_1}{2\|x\|_1 k} < \frac{1}{k} \text{ , luego:}$$

$$\left\| \frac{x}{2\|x\|_1 k} \right\|_2 \leq 1, \text{ es decir } \|x\|_2 \leq 2k\|x\|_1 .$$

Tomando $k' = 2k$, queda demostrado que $\|x\|_2 \leq k' \|x\|_1$.

Similarmente se demuestra; por ser I^{-1} continua de E_2 en E_1, que existe $k'' > 0$ tal que: $\|x\|_1 \leq k'' \|x\|_2$.

COROLARIO 1. Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ las tres normas siguientes son equivalentes:

i) $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ ii) $\max_{i=1}^{n} |x_i|$ iii) $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$

En efecto, se tienen las desigualdades:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \max_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \leq \max_{i=1}^{n} |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \qquad (2)$$

las cuales demuestran el corolario.

COROLARIO 2. En un espacio E, dos normas equivalentes dan las mismas partes acotadas.

DEMOSTRACION:

Sean $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ dos normas equivalentes en E, y $A \subset E$ acotado por la norma $\| \ \|_1$; es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in A$, $\|x\|_1 \leq M$. Por ser $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ equivalentes existe $k' > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq k' \|x\|_1 \leq k'M$; por lo tanto A es acotado para $\| \ \|_2$. Similarmente se demuestra, que si una parte de E es acotado para $\| \ \|_2$ lo es también para $\| \ \|_1$.

PROPOSICION 2.5. Sea E un espacio vectorial normado. La aplicación $\| \ \|$ de E en $\mathbb{R}$, provisto $\mathbb{R}$ de su métrica natural, es continua.

DEMOSTRACION:

Sea $\xi > 0$; por proposición 2.1 se tiene que $\left| \|x\| - \|x_0\| \right| \leq \|x-x_0\|$; luego basta tomar $\delta = \xi$ para que $\|x-x_0\|<\delta \Longrightarrow \left| \|x\| - \|x_0\| \right| < \xi$ con lo cual queda demostrado que $\| \ \|$ es continua.

3. Aplicaciones lineales y continuas.

DEFINICION. Sean E y F dos espacios vectoriales normados sobre el mismo cuerpo K, de los números reales o complejos. Sea f una aplicación de E en F; diremos que f es lineal si:

1º) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

2º) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$\lambda \in K$; $x, y \in E$.

PROPOSICION 2.6. Sean E y F espacios vectoriales normados, f una aplicación lineal de E en F; si E es el espacio $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ provisto de una de sus normas usuales, entonces f es uniformemente continua y por consiguiente continua.

DEMOSTRACION:

Sea $\varepsilon > 0$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Por el corolario 1 de la proposición 2.4 las tres normas que hemos definido sobre E son equivalentes; luego puede trabajarse con cualquiera de ellas; en nuestro caso $\|X\| = \max\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

Sea $e_1, e_2, \dots, e_n$ la base canónica de E.

$$\begin{aligned}
\|f(X) - f(Y)\| = \|f(X - Y)\| &= \|f(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)e_i)\| \\
&= \|\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\, f(e_i)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|(x_i - y_i)\, f(e_i)\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\ \|f(e_i)\| \\
&\leq \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\| \\
&= \|X - Y\| \,.\, K
\end{aligned}$$

Luego tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, tenemos que:

$$\|X - Y\| < \delta \implies \|f(X) - f(Y)\| < \xi .$$

Lo cual comprueba que f es uniformemente continua.

NOTA: Si E es de dimensión infinita, no toda aplicación lineal f es continua.

En efecto: Sea E el espacio vectorial, sobre el cuerpo de los reales, - de los polinomios con coeficientes reales.

Pongamos $\|P\| = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|$. (1)

Demostremos que (1) es una norma:

I) $\|P\| \geq 0$ ya que $\max\limits_{0 \leq x \leq 1} |P(x)| \geq 0$

II) $\|P\| = 0 \iff \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |P(x)| = 0$

$$\iff P(x) = 0, \text{ para todo } x \in [0, 1] .$$

Si $P(x) \neq 0$ para algún $x \in \mathbb{R}$, entonces, el polinomio P tendría una - infinidad de raíces, a saber, los $x \in [0, 1]$, locual nopuede ser. Luego $P(x) = 0$, para todo $x \in [0, 1] \iff P(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\iff P = 0 .$$

III) $\|\lambda P\| = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |(\lambda P)(x)| = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |\lambda P(x)|$

$$= \max_{0 \leq x \leq 1} |\lambda|\ |P(x)|$$

$$= |\lambda| \max_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|$$

$$= |\lambda| \, \|P\| .$$

IV) $$\|P + Q\| = \max_{0\leq x\leq 1} |(P + Q)(x)| = \max_{0\leq x\leq 1} |P(x) + Q(x)|$$

$$\leq \max_{0\leq x\leq 1} (|P(x)| + |Q(x)|)$$

$$\leq \max_{0\leq x\leq 1} |P(x)| + \max_{0\leq x\leq 1} |Q(x)|$$

$$= \|P\| + \|Q\| .$$

Definamos $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(P) = P(3)$." f es lineal sobre E."

En efecto:

1º) $f(P + Q) = (P + Q)(3) = P(3) + Q(3) = f(P) + f(Q)$

2º) $f(\lambda P) = (\lambda P)(3) = \lambda P(3) = \lambda f(P)$

$$P, Q \in E, \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Demostremos que f es discontinua. Para ello consideremos la sucesión de polinomios definida por:

$$Pn(x) = (\frac{x}{2})^n .$$

Evidentemente $\|P_n\| = \dfrac{1}{2^n}$, luego la sucesión de los Pn converge hacia 0 en E; por otra parte: $P_n(3) = (\frac{3}{2})^n$; con lo cual tenemos que la sucesión de valores $f(P_n) = (\frac{3}{2})^n$ tiende hacia $+\infty$, lo cual prueba que f es discontinua.

PROPOSICION 2.7. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces los siguientes enunciados son equivalen tes.

a) f es continua en el origen.

b) Existe una constante $k \geq 0$ tal que $\|f(x)\| \leq k \|x\|$; para todo $x \in E$.

c) f es uniformemente continua sobre E.

d) f es continua en E.

DEMOSTRACION:

"a) $\Longrightarrow$ b)" Si f es continua en el origen, existe una constante $k' > 0$ tal que si $\|x\| < \dfrac{1}{k'}$ entonces $\|f(x)\| \leq 1$.

Sea $x \in E$, $x \neq 0$.

$$\left\| \frac{x}{2k' \|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{2k' \|x\|} < \frac{1}{k'} \text{ , luego:}$$

$$\left\| f\left(\frac{x}{2k' \|x\|} \right) \right\| \leq 1; \text{ es decir } \|f(x)\| \leq 2k' \|x\| .$$

Tomando $k = 2k'$, queda demostrado b).

"b) $\Longrightarrow$ c)" Supongamos existe $k \geq 0$ tal que

$\|f(x)\| \leq k \|x\|$ para todo $x \in E$, y sea $\varepsilon > 0$

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq k \|x - y\| .$$

Tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k + 1}$ tenemos que:

$$\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

lo cual prueba que f es uniformemente continua.

"c) $\Longrightarrow$ d) " Obvio.

"d) $\Longrightarrow$ a) " Obvio.

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LÍNEAL CONTINUA.

DEFINICION. Sean E y F dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K, f una aplicación lineal de E en F. Llamaremos núcleo de f al conjunto de las x de E tal que $f(x) = 0$. Es entonces la imagen recíproca $f^{-1}(\{0\})$.

Llamaremos IMAGEN de f, al conjunto $f(E) = \{f(x) \in F \mid x \in E\}$.

"El núcleo de f es un subespacio vectorial de E".

En efecto: si x e y pertenecen al núcleo tenemos que:

1º) $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0$, luego $x + y$ está en el núcleo.

2º) Si $\lambda \in K$, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$, luego λx está en el núcleo.

"Si E y F son normados, y f es continua, el núcleo de f es un subespacio vectorial cerrado".

En efecto $\{0\}$ es un cerrado de F, luego por proposición 1.21 $f^{-1}(\{0\})$ es un cerrado de E.

4. ESPACIO DE APLICACIONES LINEALES CONTINUAS.

DEFINICION. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f: E \longrightarrow F$ lineal y continua. Por proposición 2.7, existe una constante $k \geq 0$ tal que: $\|f(x)\| \leq k \|x\|$, para todo $x \in E$.

Sea $A = \{k \in \mathbb{R} \mid \|f(x)\| \leq k \|x\| , \forall x \in E\}$.

Llamaremos norma de f, y la denotaremos por $\|f\|$, al ínfimo del conjunto A.

En particular se tiene que

$$" \|f(x)\| \leq \|f\| \, \|x\| , \text{ para todo } x \in E "$$

En efecto: sea $x \neq 0$

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq k , \text{ para todo } k \in A.$$

$$\Longrightarrow \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \text{ es una cota inferior de } A$$

$$\Longrightarrow \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \inf A = \|f\|$$

$$\Longrightarrow \|f(x)\| \leq \|f\| \, \|x\| .$$

PROPOSICION 2.8.

$$" \|f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| ".$$

DEMOSTRACION:

1º) $" \|f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} "$

Sea $\|x\| \neq 0$; $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \|f\| \Longrightarrow \|f\|$ es cota superior de

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}, \quad \text{para } \|x\| \neq 0$$

$$\Longrightarrow \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \|f\|$$

Supongamos que $M = \sup_{\|x\| \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, entonces

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq M , \text{ para todo } x \in E, \|x\| \neq 0 .$$

$$\Longrightarrow \|f(x)\| \leq M \|x\| , \forall x \in E, \|x\| \neq 0 .$$

Para $\|x\| = 0$, es evidente que $\|f(x)\| \leq M \|x\|$

Por lo tanto: $\|f(x)\| \leq M \|x\|$, para todo $x \in E$.

$$\Longrightarrow M \in A \Longrightarrow \|f\| \leq M$$

$$\therefore \|f\| = M.$$

2º) " $\sup_{\|x\| \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\|$ "

Sea $\|x\| \neq 0$, $y = \dfrac{x}{\|x\|}$, entonces $\|y\| = 1$

$$y \quad \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|f(\|x\| y)\|}{\| \|x\| y \|} =$$

$$= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|x\| \; \|f(y)\|}{\|x\| \; \|y\|}$$

$$= \sup_{\|y\| = 1} \frac{\|f(y)\|}{\|y\|}$$

$$= \sup_{\|y\| = 1} \|f(y)\| \quad .$$

3º) " $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$ "

$$\|f(x)\| \leq \|f\| \; \|x\| \leq \|f\| , \quad \text{para } \|x\| \leq 1$$

$$\Longrightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| < \|f\| \qquad \text{(a)}$$

Por otra parte, ya demostramos que $\|f\| = \sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\|$, y como

$\sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$, concluimos que

$$\|f\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \qquad \text{(b)}$$

De las desigualdades (a) y (b) concluimos:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| .$$

DEFINICION. Sean E y F espacios vectoriales normados. Llamaremos $\mathbb{L}(E; F)$ al conjunto de aplicaciones lineales continuas de E en F.

PROPOSICION 2.9. El conjunto $\mathbb{L}(E; F)$, admite una estructura de espacio vectorial normado, con la norma dada por:

$\|f\| = \inf \{k \geq 0 \mid \|f(x)\| \leq k \|x\|, \text{ para todo } x \in E\}$, $f \in \mathbb{L}(E; F)$.

Además, si G es un tercer espacio vectorial normado, y si

$$f \in \mathbb{L}(E; F) \quad y \quad g \in \mathbb{L}(F; G) ,$$

sabemos que $g \circ f \in \mathbb{L}(E; G)$ y se tiene la desigualdad

$\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

DEMOSTRACION:

Mostremos primeramente que $\mathbb{L}(E; F)$ posee una estructura de espacio vectorial sobre K. Sean f_1 y f_2 dos aplicaciones lineales continuas de E en F, definiremos $f_1 + f_2$ por la relación:

$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Verifiquemos que esta nueva aplicación es lineal y continua. Evidentemente es lineal, y por proposición 2.7, la desigualdad

$$\|(f_1 + f_2)(x)\| = \|f_1(x) + f_2(x)\| \leq \|f_1(x)\| + \|f_2(x)\|$$

$$\leq (\|f_1\| + \|f_2\|) \|x\| .$$

Muestra que $f_1 + f_2$ es continua, dicho de otra forma:

$f_1 + f_2 \in \mathcal{L}(E; F)$; además, por definición de norma de una función se tiene que: $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$ (a)

Tenemos sobre $\mathcal{L}(E; F)$ una estructura de adición.

Esta adición hace de $\mathcal{L}(E; F)$ un grupo abeliano. El elemento neutro de ese grupo es lo que llamamos la aplicación nula o aplicación "O", es decir la aplicación que hace corresponder a todo elemento de E, el valor 0 en F.

Sea λ un escalar; para $f \in \mathcal{L}(E; F)$, definiremos λf por:

$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$.

Evidentemente esta aplicación es lineal; verifiquemos que es continua, es decir que $\lambda f \in \mathcal{L}(E; F)$.

En efecto, la desigualdad:

$$\|(\lambda f)(x)\| = \|\lambda(f(x)\| = |\lambda| \ \|f(x)\| \leq |\lambda| \ \|f\| \ \|x\|$$

nos indica que λf es continua.

Además, tenemos que:

$$\|\lambda f\| = \sup_{\|x\| = 1} \|(\lambda f)(x)\| = \sup_{\|x\| = 1} |\lambda| \ \|f(x)\| = |\lambda| \sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\|$$

Es decir: $\|\lambda f\| = |\lambda| \ \|f\|$ (b)

Hemos definido así sobre $\mathcal{L}(E; F)$ una multiplicación por los escalares; fácilmente se ve que esta multiplicación posee, unido a la adición de elementos de $\mathcal{L}(E; F)$, todas las propiedades requeridas para hacer de $\mathcal{L}(E; F)$ un espacio vectorial sobre K.

Mostremos ahora que la aplicación $f \longrightarrow \|f\|$ es una norma.

I) Evidentemente $||f|| \geq 0$.

II) Por la relación $||f(x)|| \leq ||f|| \; ||x||$, para todo $x \in E$ tenemos:

$$||f|| = 0 \Longrightarrow ||f(x)|| = 0,$$
$$\Longrightarrow f(x) = 0,$$
$$\Longrightarrow f = 0.$$

$f = 0 \Longrightarrow ||f(x)|| = ||0|| = 0 \leq k \; ||x||$, para todo $k \geq 0$ y para todo $x \in E$.

$\Longrightarrow ||f|| = 0.$

Las propiedades III) $||\lambda f|| = |\lambda| \; ||f||$ y IV) $||f_1 + f_2|| \leq ||f_1|| + ||f_2||$ ya están demostradas, y son las relaciones (b) y (a) respectivamente.

Tenemos así que $\mathcal{L}(E; F)$ es un espacio vectorial normado.

Si tomamos ahora $f \in \mathcal{L}(E; F)$ y $g \in \mathcal{L}(F, G)$, la composición $g \circ f$ es trivialmente lineal y continua, es decir $g \circ f \in \mathcal{L}(E; G)$.

Por otra parte $||(g \circ f)(x)|| = ||g(f(x))|| \leq ||g|| \; ||f(x)|| \leq ||g|| \cdot ||f|| \cdot ||x||$, de donde concluimos que $||g \circ f|| \leq ||g|| \cdot ||f||$.

PROPOSICION 2.10. Sea E un espacio vectorial normado y sea $v \in \mathcal{L}(E; E)$; entonces las aplicaciones:

$p_v : (E; E) \longrightarrow \mathcal{L}(E; E)$, tal que $P_v(u) = u \circ v$, y

$q_v : (E, E) \longrightarrow \mathcal{L}(E; E)$, tal que $q_v(u) = v \circ u$

son lineales y continuas.

DEMOSTRACION:

Mostremos primeramente que p_v es lineal.

$$p_v(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2) \circ v = u_1 \circ v + u_2 \circ v = p_v(u_1) + p_v(u_2)$$

$$p_v(\lambda u) = (\lambda u) \circ v = \lambda(u \circ v) = \lambda p_v(u)$$

Verifiquemos ahora que p_v es continua.

En efecto, la desigualdad

$$\|p_v(u)\| = \|u \circ v\| \leq \|u\| \; \|v\|$$

nos indica que p_v es continua y además

$$\|p_v\| \leq \|v\| .$$

En forma similar se demuestra que q_v es lineal y continua.

DUAL DE E.

DEFINICION. Sea E un espacio vectorial normado; llamaremos dual de E y lo denotaremos por E^* al conjunto de formas lineales continuas sobre E, es decir a las aplicaciones lineales continuas de E en el cuerpo de los escalares.

NOTA: Salvo mención expresa de lo contrario, $L(E; F)$ y E^* estarán siempre provistos de la estructura de espacio vectorial normado obtenida de la proposición 2.9.

5. PROLONGACIÓN DE APLICACIONES LINEALES CONTINUAS.

PROPOSICION 2.11. Si E es un espacio vectorial normado, sobre el cuerpo K de los números reales o complejos, entonces las funciones siguientes:

$$+ : E \times E \longrightarrow E : (x, y) \rightsquigarrow x + y$$

$$. : K \times E \longrightarrow E : (\lambda, x) \rightsquigarrow \lambda x$$

son continuas.

DEMOSTRACION:

Sea $\xi > 0$.

1º) $\|(x+y) - (a+b)\| = \|(x-a) + (y-b)\| \leq \|x-a\| + \|y-b\|$

tomando $\delta = \frac{\xi}{2}$ tenemos:

$\|x-a\| < \delta$, $\|y-b\| < \delta \Longrightarrow \|(x+y)-(a+b)\| < \xi$.

Por lo tanto la función+ (suma) es continua.

2º) $\|\lambda x - \alpha a\| = \|\lambda x - \alpha x + \alpha x - \alpha a\|$

$$= \|(\lambda - \alpha)x + \alpha(x-a)\|$$

$$\leq \|(\lambda - \alpha)x\| + \|\alpha(x-a)\|$$

$$= |\lambda - \alpha|\ \|x\| + |\alpha|\ \|x-a\| .$$

Tomando $\delta_1 = \dfrac{\xi}{2(|\alpha|+1)}$, tenemos:

$\|x-a\| < \delta_1 \Longrightarrow |\alpha|\ \|x-a\| < \frac{\xi}{2}$. (1)

Además: $\big|\ \|x\| - \|a\|\ \big| \leq \|x-a\| < \delta_1 \Longrightarrow \|x\| < \|a\| + \delta_1$.

Tomando $\delta_2 = \dfrac{\xi}{2(\ \|a\| + \delta_1)}$, tenemos:

$|\lambda - \alpha| < \delta_2 \Longrightarrow |\lambda - \alpha|\ \|x\| < \dfrac{\xi}{2(\ \|a\| + \delta_1)} .(\ \|a\| + \delta_1) = \frac{\xi}{2}$ (2)

Luego, con $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tenemos:

$\|x-a\| < \delta$, $|\lambda - \alpha| < \delta \Longrightarrow \|\lambda x - \alpha a\| < \xi$; (3)

Con lo cual queda probado que la función "·" (producto) es continua.

PROPOSICION 2.12. Sean E y F espacios vectoriales normados, E_1 un subespacio vectorial denso de E, y f_1 una aplicación lineal continua de E_1 en F. Si F es completo, existe una aplicación y solo una, f, de E en F, que prolonga f_1 y que es continua; esta aplicación es lineal, y la norma de f en $\mathcal{L}(E; F)$ es igual a la norma de f_1 en $\mathcal{L}(E_1; F)$.

DEMOSTRACION:

Como f_1 es lineal y continua, también será uniformemente continua (proposición 2.7); entonces, de acuerdo a la proposición 1.38, existe una aplicación continua f y solo una de E en F, que prolonga f_1.

Mostremos en principio que f es lineal. Sean x e y dos elementos de E, λ un escalar; sea $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ y $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ dos sucesiones de elementos de E_1 convergentes hacia x e y respectivamente.

Como las aplicaciones + de E x E en E y . de K x E en E son continuas, la sucesión de los $x_n + y_n$ converge hacia $x + y$, y la sucesión de los λx_n converge hacia λx.

Por lo tanto tenemos:

1º) $f(x + y) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n + y_n)$ (por $x_n + y_n \longrightarrow x + y$, y f es la prolongación continua de f_1).

$= \lim_{n\to\infty} [f_1(x_n) + f_1(y_n)]$ (porque f_1 es lineal)

$= \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) + \lim_{n\to\infty} f_1(y_n)$ (porque en F la operación + (suma) es continua).

$= f(x) + f(y)$ (por ser f la prolongación continua de f_1).

2º) $f(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} f_1(\lambda x_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda f_1(x_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lambda f(x)$

1º) y 2º) prueban que f es lineal.

Mostremos ahora que la norma de f en $\mathbb{L}(E; F)$ es igual a la norma de f_1 en $\mathbb{L}(E_1;F)$.

$$\|f_1(x)\| = \|f(x)\| \leq \|f\| \ \|x\| , \qquad \text{para todo } x \in E_1$$

$$\Longrightarrow \|f_1\| \leq \|f\| .$$

Si $x \in E$ es el límite de una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E_1, entonces $f(x)$ es el límite de los $f_1(x_n)$. De la desigualdad $\|f_1(x_n)\| \leq \|f_1\| \ \|x_n\|$, y de la continuidad de la norma (proposición 2.5), deducimos entonces, aplicando límites:

$\|f(x)\| \leq \|f_1\| \ \|x\|$, lo cual prueba que $\|f\| \leq \|f_1\|$, por lo tanto $\|f\| = \|f_1\|$.

COROLARIO. En las condiciones enunciadas del teorema, es decir si E_1 es denso en E, y F completo, podemos identificar los espacios vectoriales normados $\mathbb{L}(E; F)$ y $\mathbb{L}(E_1; F)$.

En efecto: a toda aplicación lineal continua f de E en F, hacemos corresponder su restricción f_1 a E_1, el teorema nos dice precisamente que la correspondencia así definida $f \to f_1$ de $\mathbb{L}(E; F)$ en $\mathbb{L}(E_1; F)$, es una biyección, conservando la estructura de espacio vectorial, y conservando las normas.

Esto significa claramente que los dos espacios vectoriales normados $\mathbb{L}(E; F)$ y $\mathbb{L}(E_1; F)$ pueden ser identificados.

6. Espacios de Banach.

DEFINICION. Llamaremos Espacio de Banach a un espacio vectorial normado completo, sobre el cuerpo K de los reales o complejos.

$\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, con sus normas usuales, son de Banach.

PROPOSICION 2.13. Si E y F son espacios vectoriales normados y si F es de Banach, entonces $\mathbb{L}(E; F)$ es de Banach.

DEMOSTRACION:

Sea $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{L}(E; F)$. Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ y $m \geq n_0 \implies \|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

Para x fijo en E, tenemos:

$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\| \; \|x\|$, lo cual prueba, que la sucesión de los $f_n(x)$ es de Cauchy en F. Como F es completo, esta sucesión converge hacia un elemento de F, que nosotros llamaremos $f(x)$.

Tenemos así la aplicación:

$$f : E \longrightarrow F : x \rightsquigarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Demostremos que f es lineal. Sean x e y elementos de E, λ un escalar; tenemos:

1º) $f(x + y) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x + y)$ (Por definición de f)

$= \lim\limits_{n\to\infty} [f_n(x) + f_n(y)]$ (Por ser f_n lineal)

$= \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) + \lim\limits_{n\to\infty} f_n(y)$ (Por ser + continua).

$= f(x) + f(y).$

2ª) $f(\lambda x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\lambda x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda f_n(x) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lambda f(x).$

Con lo cual probamos que f es lineal.

Demostremos que f es continua.

Para $n \geq n_0$ y $m \geq n_0$ se tiene que $\|f_n - f_m\| < \xi$, de donde deducimos:

$$\|f_n\| < \|f_m\| + \xi \qquad (1)$$

tenemos tambien:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\| \; \|x\| < \xi \; \|x\| \qquad (2)$$

$$\|f_n(x)\| < (\|f_m\| + \xi) \; \|x\| \qquad (3)$$

Fijando $m \geq n_0$ en (3) tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| \leq (\|f_m\| + \xi) \; \|x\| \text{ ; es decir}$$

$\|f(x)\| \leq (\|f_m\| + \xi) \; \|x\|$, lo cual prueba que f es continua, por lo tanto $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

Finalmente demostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

En efecto; para $n \geq n_0$ y $m \geq n_0$

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \xi \; \|x\|$$

Para $m \geq n_0$, y x fijos:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \xi \; \|x\| .$$

Es decir: $\|f(x) - f_m(x)\| \leq \xi \ \|x\|$; por consiguiente:

$$\|f - f_m\| \leq \xi .$$

Lo cual muestra que: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f.$

Por lo tanto concluimos que $\mathbb{L}(E; F)$ es completo.

7. PRODUCTO DE ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS.

Sean E_1 y E_2 dos espacios vectoriales normados, $\|\ \|_1$ y $\|\ \|_2$ sus normas respectivas. Sobre el producto $E_1 \times E_2$ definimos las tres normas siguientes, las cuales son equivalentes.

1) $\|(x_1, x_2)\| = \max\ (\|x_1\|_1, \|x_2\|_2)$

2) $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$

3) $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2}$

Salvo mención expresa de lo contrario, $E_1 \times E_2$ estará siempre provisto de una de las tres normas precedentes, y el mismo símbolo $\|\ \|$ designará las normas en E_1, E_2 y $E_1 \times E_2$.

PROPOSICION 2.14. Sean E, F_1, F_2 espacios vectoriales normados.

$$f_1 : E \longrightarrow F_1$$

$$f_2 : E \longrightarrow F_2$$

$$f : E \longrightarrow F_1 \times F_2 \ ; \ f(x) = (f_1(x), f_2(x)) .$$

Entonces:

1º) f es lineal si y solo si f_1 y f_2 son lineales.

2º) f es continua si y solo si f_1 y f_2 son continuas.

DEMOSTRACION

1º) " $\Longrightarrow$ " Supongamos f lineal.

$$(f_1(x+y),\ f_2(x+y)) = f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$= (f_1(x),\ f_2(x)) + (f_1(y),\ f_2(y))$$
$$= (f_1(x) + f_1(y),\ f_2(x) + f_2(y))$$

Por lo tanto;

$$f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y) \quad y \quad f_2(x+y) = f_2(x) + f_2(y)\ .$$

$$(f_1(\lambda x),\ f_2(\lambda x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda(f_1(x),\ f_2(x))$$
$$= (\lambda f_1(x),\ \lambda f_2(x))$$

Luego: $f_1(\lambda x) = \lambda f_1(x)$ y $f_2(\lambda x) = \lambda f_2(x)$.

" $\Longleftarrow$ " Supongamos f_1 y f_2 lineales.

$$f(x+y) = (f_1(x+y),\ f_2(x+y)) = (f_1(x) + f_1(y),\ f_2(x) + f_2(y))$$
$$= (f_1(x),\ f_2(x)) + (f_1(y),\ f_2(y))$$
$$= f(x) + f(y).$$

$$f(\lambda x) = (f_1(\lambda x),\ f_2(\lambda x)) = (\lambda f_1(x),\ \lambda f_2(x))$$
$$= \lambda(f_1(x),\ f_2(x))$$
$$= \lambda f(x)$$

2º) " $\Longrightarrow$ " Supongamos f continua, y sea $\varepsilon > 0$

$$\| f_1(x) - f_1(x_0)\| \leq \|(f_1(x) - f_1(x_0),\ f_2(x) - f_2(x_0))\|$$
$$= \|(f_1(x)\ ,\ f_2(x)) - (f_1(x_0),\ f_2(x_0))\|$$
$$= \|f(x) - f(x_0)\|.$$

Por ser f continua, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \xi .$$

Luego, también tendremos:

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f_1(x) - f_1(x_0)\| < \xi ,$$

lo cual prueba que f_1 es continua; en forma similar se demuestra que f_2 también es continua.

" $\Longleftarrow$ " Supongamos f_1 y f_2 continuas, y sea $\xi > 0$

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x_0)\| &= \|(f_1(x), f_2(x)) - (f_1(x_0), f_2(x_0))\| \\ &= \|(f_1(x) - f_1(x_0), f_2(x) - f_2(x_0))\| \\ &\leq \|f_1(x) - f_1(x_0)\| + \|f_2(x) - f_2(x_0)\|\end{aligned}$$

por ser f_1 y f_2 continuas existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que:

$$\|x - x_0\| < \delta_1 \Longrightarrow \|f_1(x) - f_1(x_0)\| < \frac{\xi}{2}$$

$$\|x - x_0\| < \delta_2 \Longrightarrow \|f_2(x) - f_2(x_0)\| < \frac{\xi}{2}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tendremos:

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \xi .$$

Lo cual prueba que f es continua.

PROPOSICION 2.15. Sean E, F_1 y F_2 espacios vectoriales normados.

$$\begin{aligned} f &: F_1 \times F_2 \longrightarrow E \text{ lineal} \\ f_1 &: F_1 \longrightarrow E : f_1(x) = f(x, 0) \\ f_2 &: F_2 \longrightarrow E : f_2(y) = f(0, y) . \end{aligned}$$

Entonces:

1º) f_1 y f_2 son lineales.

2º) f es continua $\Longleftrightarrow$ f_1 y f_2 son continuas.

$$f \text{ continua} \Longrightarrow \|f\| \leq \|f_1\| + \|f_2\| \text{ y } \|f_1\| \leq \|f\|,$$

$$\|f_2\| \leq \|f\| .$$

DEMOSTRACION:

Mostremos primero que f_1 y f_2 son lineales.

$$f_1(x+y) = f(x + y, 0) = f((x, 0) + (y, 0))$$

$$= f(x, 0) + f(y, 0)$$

$$= f_1(x) + f_1(y).$$

$$f_1(\lambda x) = f(\lambda x, 0) = f(\lambda x, \lambda 0)$$

$$= \lambda f(x, 0)$$

$$= \lambda f_1(x).$$

Por lo tanto f_1 es lineal. Similarmente se demuestra la linealidad de f_2.

Mostremos ahora, que: "f es continua $\Longleftrightarrow$ f_1 y f_2 son continuas".

" $\Longrightarrow$ " $\|f_1(x)\| = \|f(x, 0)\| \leq \|f\| \; \|(x, 0)\| = \|f\| \; \|x\|$.

Por lo tanto f_1 es continua y además $\|f_1\| \leq \|f\|$.

Similarmente se demuestra que f_2 es continua y que $\|f_2\| \leq \|f\|$.

" $\Longleftarrow$ " Supongamos f_1 y f_2 continuas.

$$\|f(x, y)\| = \|f((x, 0) + (0, y))\| = \|f(x, 0) + f(0, y)\|$$

$$= \|f_1(x) + f_2(y)\|$$

$$\leq \|f_1(x)\| + \|f_2(y)\|$$

$$\leq \|f_1\| \, \|x\| + \|f_2\| \, \|y\|$$

$$\leq (\|f_1\|+\|f_2\|) \max \{\|x\|, \|y\|\}$$

$$\leq (\|f_1\|+\|f_2\|)\|(x, y)\|.$$

Por lo tanto f es continua, y además

$$\|f\| \leq \|f_1\| + \|f_2\| .$$

8. Aplicaciones bilineales continuas.

DEFINICION. Sean E, F, G, espacios vectoriales normados. La aplicación $f : E \times F \longrightarrow G$ se dice bilineal si, siempre que se fije una de las variables, ella es lineal con respecto a la otra.

Es decir, si f es bilineal tendremos:

1º) Fijando z en F.

$$f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$$

$$f(\lambda x, z) = \lambda f(x, z).$$

2º) Fijando x en E.

$$f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$$

$$f(x, \lambda z) = \lambda f(x, z) .$$

Si f es bilineal, fácilmente se demuestran las fórmulas siguientes:

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)$$

$$f(\lambda x, \mu y) = \lambda \mu f(x, y).$$

El prototipo de aplicaciones bilineales es el producto usual de números reales o complejos, aplicación bilineal de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Entre otros ejemplos tenemos:

1º) El producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^3$, aplicación bilineal de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

2º) La multiplicación por los escalares $(\lambda, x) \rightsquigarrow \lambda x$, aplicación bilineal de $K \times E$ en E.

PROPOSICION 2.16. Sean E, F, G, espacios vectoriales normados, $f : E \times F \longrightarrow G$ una aplicación bilineal; entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

a) f es continua en el origen.

b) Existe $k \geq 0$ tal que $\|f(x, y)\| < k \|x\| \|y\|$.

c) f es continua.

DEMOSTRACION:

"a) $\Longrightarrow$ b)" Por ser f continua en el origen, para $\varepsilon = 1$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|x\| < \delta$, $\|y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x, y)\| \leq 1$.

Sean $x \neq 0$, $y \neq 0$; $x \in E$, $y \in F$.

$$\left\| \frac{\delta x}{2\|x\|} \right\| = \frac{\delta \|x\|}{2\|x\|} < \delta , \quad \left\| \frac{\delta y}{2\|y\|} \right\| = \frac{\delta \|y\|}{2\|y\|} < \delta ,$$

luego $$\left\| f\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}, \frac{\delta y}{2\|y\|} \right) \right\| \leq 1 , \text{ es decir:}$$

$$\|f(x, y)\| \leq \frac{4}{\delta^2} \|x\| \|y\| .$$

Tomando $k = \frac{4}{\delta^2}$ queda demostrado b).

"b) $\Longrightarrow$ c)" Sea $(a, b) \in E \times F$, y sea $\xi > 0$.

$$f(x - a, y) + f(a, y - b) = f(x, y) + f(-a, y) + f(a, y) + f(a, -b)$$

$$= f(x, y) - f(a, y) + f(a, y) - f(a, b)$$

$$= f(x, y) - f(a, b) .$$

Luego $\|f(x, y) - f(a, b)\| = \|f(x - a, y) + f(a, y - b)\|$

$$\leq \|f(x - a, y)\| + \|f(a, y - b)\|$$

$$\leq k \|x - a\| \ \|y\| + k \|a\| \ \|y - b\|$$

Tomando $\delta_2 = \dfrac{\xi}{2(k\|a\|+1)}$, tenemos

$$\|y - b\| < \delta_2 \Longrightarrow k \ \|a\| \ \|y - b\| < \frac{\xi}{2}$$

Además $\big|\|y\| - \|b\|\big| \leq \|y - b\| < \delta_2 \Longrightarrow \|y\| < \|b\| + \delta_2$

Tomando $\delta_1 = \dfrac{\xi}{2k(\|b\| + \delta_2)}$ tenemos:

$$\|x - a\| < \delta_1 \Longrightarrow k \|x - a\| \ \|y\| < k \frac{\xi}{2k(\|b\| + \delta_2)}(\|b\| + \delta_2) = \frac{\xi}{2} .$$

Finalmente tomando $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, tenemos:

$$\|x - a\| < \delta , \ \|y - b\| < \delta \Longrightarrow \|f(x, y) - f(a, b)\| < \xi .$$

Lo cual prueba que f es continua en (a, b).

"c) $\Longrightarrow$ a)" Obvio.

Notemos por el contrario, que una aplicación bilineal distinta a la apli_ cación nula, no es uniformemente continua.

En efecto: existe un punto $(a, b) \in E \times F$ tal que $f(a, b) \neq 0$.

Consideremos entonces en $E \times F$ las sucesiones de puntos

$$X_n = (na, nb); \quad Y_n = ((n + \frac{1}{n})a, (n + \frac{1}{n})b).$$

$$\begin{aligned} \|X_n - Y_n\| &= \|(na, nb) - ((n + \frac{1}{n})a, (n + \frac{1}{n})b)\| \\ &= \|(na, nb) - (na + \frac{a}{n}, nb + \frac{b}{n})\| \\ &= \|(-\frac{a}{n}, -\frac{b}{n})\| \\ &= \| -\frac{1}{n}(a, b)\| \\ &\leq \frac{1}{n}(\|a\| + \|b\|) . \end{aligned}$$

Luego, cuando $n \to +\infty$, $\|X_n - Y_n\| \to 0$.

Consideremos ahora la diferencia

$$\begin{aligned} f(X_n) - f(Y_n) &= f(na, nb) - f((n + \frac{1}{n})a, (n + \frac{1}{n})b) \\ &= n^2 f(a, b) - (n + \frac{1}{n})^2 f(a, b) \\ &= [n^2 - (n + \frac{1}{n})^2] f(a, b) \\ &= -(2 + \frac{1}{n^2}) f(a, b) . \end{aligned}$$

Vemos que cuando $n \to +\infty$, $\|f(X_n) - f(Y_n)\| \to 2\|f(a, b)\| \neq 0$ lo cual nos indica que f no es uniformemente continua.

DEFINICION. Sean E, F, G, espacios vectoriales normados, $f : E \times F \longrightarrow G$ bilineal y continua. Por proposición 2.16, existe una constante $k \geq 0$

tal que:

$$\|f(x, y)\| \leq k \ \|x\| \ \|y\|, \quad \text{para todo } x \in E, \ \text{para todo } y \in F.$$

Llamaremos norma de f, y la denotaremos por $\|f\|$, al ínfimo de las $k \geq 0$, que satisfacen la desigualdad anterior.

Si f es bilineal tenemos también que:

1) $\|f(x, y)\| \leq \|f\| \ \|x\| \ \|y\|$.

2) $$\|f\| = \sup_{\substack{\|x\| \neq 0 \\ \|y\| \neq 0}} \frac{\|f(x, y)\|}{\|x\| \ \|y\|} = \sup_{\substack{\|x\| = 1 \\ \|y\| = 1}} \|f(x, y)\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \|f(x, y)\| .$$

DEFINICION. Sean E, F y G espacios vectoriales normados. Llamaremos $L_2(E, F; G)$ al conjunto de aplicaciones bilineales continuas del producto $E \times F$ en G.

PROPOSICION 2.17. El conjunto $L_2(E, F; G)$, admite una estructura de espacio vectorial normado, con la norma dada por:

$$\|f\| = \inf \{k \geq 0 \mid \|f(x, y)\| \leq k \|x\| \ \|y\|, \text{ para todo } x \in E, \text{ para todo } y \in F\},$$
$$f \in L_2(E, F; G).$$

Si además G es un espacio de Banach; $L_2(E, F; G)$ es también de Banach.

La demostración es idéntica a las dadas en las proposiciones 2.9 y 2.13.

9. SERIES EN ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS.

DEFINICION. Sea $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ una sucesión de elementos de un espacio vectorial normado E.

$$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=0}^{n} x_i \ , \quad S_n \in E \ .$$

S_n se llama la suma parcial de índice n de la serie.

Decimos que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ es convergente, y de suma S, si la sucesión de las S_n es convergente, y de límite S.

Escribimos $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} x_i = S.$

Si la serie es convergente, la suma $\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i$ se llama residuo de índice n, y lo denotaremos por R_n; de donde $S = S_n + R_n$.

PROPOSICION 2.18. Sea E un espacio de Banach, y $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ una serie; si la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|$ es convergente, entonces $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ es convergente.

DEMOSTRACION:

Verificaremos que la sucesión de los $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ es de Cauchy en E.

Sea $\xi > 0$.

Por ser la sucesión $\|x_0\|, \|x_0\| + \|x_1\|, \ldots, \|x_0\| + \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|, \ldots$ Convergente en $\mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0 \ , \quad m \geq n_0 \implies \left| \sum_{i=0}^{n} \|x_i\| - \sum_{i=0}^{m} \|x_i\| \right| < \xi \qquad n > m \ .$$

$$\implies \left| \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| \right| < \xi \implies \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| < \xi$$

$$\implies \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| < \xi$$

$$\Longrightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \right\| < \xi$$

$$\Longrightarrow \| S_n - S_m \| < \xi$$

$\Longrightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy; y por ser E completo $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, es decir $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ es convergente.

DEFINICION. Decimos que una serie de elementos de un espacio de Banach es normalmente convergente, o absolutamente convergente, si la serie de normas es convergente.

Decimos que una serie es semi-convergente, si ella es convergente, sin ser normalmente convergente.

PROPOSICION 2.19. Sea E un espacio vectorial normado. Si para toda serie $\sum x_i$ de elementos de E, $\sum \|x_i\|$ convergente implica $\sum x_i$ convergente, entonces E es completo.

DEMOSTRACION:

Sea $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ una sucesión de Cauchy en E.

Existen $p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$, elementos de $\mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq p_0 \text{ , } m \geq p_0 \Longrightarrow \|x_m - x_n\| < 1$$

$$n \geq p_1 \text{ , } m \geq p_1 \Longrightarrow \|x_m - x_n\| < \frac{1}{2}$$

$$n \geq p_2 \text{ , } m \geq p_2 \Longrightarrow \|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^2}$$

$$\vdots$$

$$n \geq p_k \text{ ; } m \geq p_k \Longrightarrow \|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^k}$$

Formemos la sucesión

$$y_0 = x_{p_0} \quad , \quad y_1 = x_{p_1} - x_{p_0} \quad , \quad y_2 = x_{p_2} - x_{p_1} \quad , \ldots, \quad y_n = x_{p_n} - x_{p_{n-1}} , \ldots$$

Tenemos:
$$\|y_0\| = \|x_{p_0}\|$$

$$\|y_1\| = \|x_{p_1} - x_{p_0}\| < 1$$

$$\|y_2\| = \|x_{p_2} - x_{p_1}\| < \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\|y_n\| = \|x_{p_n} - x_{p_{n-1}}\| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Luego:
$$\sum_{i=0}^{n} \|y_i\| < \|x_{p_0}\| + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < \|x_{p_0}\| + 2.$$

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \|y_i\|$ existe, y por hipótesis $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} y_i$ también existe, es decir $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n}$ existe.

Tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, que admite una sucesión parcial $(x_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, digamos a un punto $x \in E$. Este x es un punto adherente a la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y por proposición 1.34 se tiene que: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, con lo cual queda demostrado que E es completo.

CAMBIO DE ORDEN DE LOS TÉRMINOS DE UNA SERIE. SERIES CONMUTATIVAMENTE CONVERGENTES.

Sea $x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$ una serie de vectores de E.

Cambiar el orden de los términos de la serie, es considerar una biyección $n \longrightarrow p_n$ de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$, y reemplazar la serie dada por la nueva serie: $x_{p_0} + x_{p_1} + x_{p_2} + \ldots. + x_{p_n} + \ldots.$

PROPOSICION 2.20. Si la serie $x_0 + x_1 + x_2 + \ldots. + x_n + \ldots$ en el espacio vectorial normado E es convergente así como la serie de normas $\|x_0\| + \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\| + \ldots$, entonces un cambio de orden en los términos no altera la convergencia de la serie y no altera su suma.

DEMOSTRACION:

Sea S la suma de la serie dada, y sea $\varepsilon > 0$, existen $n_1 \in \mathbb{N}$ y $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_1 \implies \Big\| \sum_{i=0}^{n} x_i - s \Big\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geq n_2,\ m \geq n_2 \implies \Big| \sum_{i=0}^{n} \|x_i\| - \sum_{i=0}^{m} \|x_i\| \Big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad n > m.$$

Sea $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$.

Existe $m' \in \mathbb{N}$ tal que $\{0, 1, 2, \ldots, n_0\} \subset \{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{m'}\}$.

Entonces para $n' \geq m'$ tenemos:

$$\Big\| \sum_{i=0}^{n'} x_{p_i} - S \Big\| = \Big\| \sum_{i=0}^{n'} x_{p_i} - \sum_{i=0}^{n_0} x_i + \sum_{i=0}^{n_0} x_i - S \Big\|$$

$$\leq \left\| \sum_{i=0}^{n'} x_{p_i} - \sum_{i=0}^{n_0} x_i \right\| + \left\| \sum_{i=0}^{n_0} x_i - S \right\|$$

$$< \sum_{i=n_0+1}^{p} \|x_i\| + \frac{\varepsilon}{2} \;;\ \text{donde}\quad p = \max\{p_i\}\ ,\ 0 \leq i \leq n'$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{p} \|x_i\| - \sum_{i=0}^{n_0} \|x_i\| \right| + \frac{\varepsilon}{2} \;;\quad n_0 < n' \leq p$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Lo cual prueba claramente que la serie modificada es convergente y de la misma suma S.

COROLARIO. Si una serie de términos reales positivos es convergente, ella continuará siendo convergente y conservará su suma si modificamos el orden de los términos.

DEFINICION. Decimos que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ es conmutativamente convergente y de suma S, si cualquiera que sea el orden dado a sus términos, es decir para toda biyección $p : n \longrightarrow p_n$ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n}$ es convergente, y su suma es S.

Será conveniente adoptar la notación siguiente.

Para toda parte finita J de $\mathbb{N}$, S_J designará $\sum_{i\in J} x_i$.

Esto parecería ser contradictorio con la notación

$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$; pero no es así ya que S_n es una abreviación de $S_{\{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n\}}$ ó S_J con $J = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

PROPOSICION 2.21. En un espacio vectorial normado E, la serie $\sum_{i=0}^{\infty} xi$ es conmutativamente convergente, y de suma S, si y solo si, para cualquier $\xi > 0$, existe J finito, $J \subset \mathbb{N}$ tal que, para todo K finito, $K \subset \mathbb{N}$ y $K \supset J$, se tiene:

$$\|S_K - S\| \leq \xi \ .$$

DEMOSTRACION:

" $\Longrightarrow$ "Supongamos que la conclusión no es cierta. Entonces existe un $\xi > 0$ tal que, para todo J finito, $J \subset \mathbb{N}$, existe K finito, $K \subset \mathbb{N}$ y $K \supset J$ tal que $\|S_K - S\| > \xi$.

Sea $J_0 = \{0\}$, existe K_0 finito, $K_0 \subset \mathbb{N}$ y $K_0 \supset J_0$, tal que $\|S_{K_0} - S\| > \xi$. Tomemos enseguida $J_1 = K_0 \cup \{1\}$, existe K_1 finito, $K_1 \subset \mathbb{N}$ y $K_1 \supset J_1$, tal que $\|S_{K_1} - S\| > \xi$.

Y así, paso a paso, construimos para $n \geq 1$, $J_n = K_{n-1} \cup \{n\}$, existiendo para cada J_n, un K_n finito; $K_n \subset \mathbb{N}$ y $K_n \supset J_n$ con la propiedad $\|S_{K_n} - S\| > \xi$.

Tenemos que: $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$, y además $K_n \supset \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Sea r_n el número de elementos de K_n. Tenemos que $r_0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n \leq \dots$. Podemos entonces construir, paso a paso, biyecciones de $\{0, 1, 2, \dots, r_{n-1}\}$ en K_n, prolongando cada una la biyección precedente. Definimos así una biyección p de $\mathbb{N}$ en $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathbb{N}$.

Esta biyección p define entonces un nuevo orden en los elementos de la serie; y $\|S_{K_n} - S\| > \xi$ es equivalente a escribir

$\|S_{p\{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ r_{n-1}\}} - S\| > \xi$, entonces la serie no es convergente para este orden de los términos, lo cual demuestra la implicación.

" $\Longleftarrow$ " Sea $p : n \longrightarrow p_n$ una biyección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, y sea $\xi > 0$.

Por hipótesis existe J finito, $J \subset \mathbb{N}$, tal que para todo K finito, $K \subset \mathbb{N}$ y $K \supset J$, se tiene $\|S_K - S\| \leq \xi$.

Tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $J \subset \{p_0, p_1, \dots, p_{n_0}\}$ tendremos:

$n > n_0 \implies \|\sum_{i=0}^{n} x_{p_i} - S\| \leq \xi$. Lo cual demuestra que la serie es conmutativamente convergente y de suma S.

DEFINICION. Sea E un espacio vectorial normado, y sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia de elementos de E. Esta familia se dice sumable (o que la serie $\sum_{i\in I} x_i$ es sumable) y de suma S, si para cualquier $\xi > 0$, existe una parte finita J de I tal que, para toda parte finita $K \supset J$, $\|S_K - S\| \leq \xi$.

NOTA: Si I es numerable, "sumable" es entonces equivalente a "conmutativamente convergente". Pero I puede ser no numerable.

De hecho si $\sum_{i\in I} x_i$ es sumable, los x_i no pueden ser distintos de cero, más que para una infinidad numerable de los índices i de I.

En efecto para $n \geq 1$, existe una parte finita J_n de I tal que, si K_n finito contiene a J_n, se tiene: $\|S_{K_n} - S\| \leq \frac{1}{n}$.

Sea J la reunión de los J_n, J es una parte numerable de I.

Sea $i \notin J$. Para todo n, se tiene a la vez que:

$\|S_{J_n} - S\| \leq \frac{1}{n}$ y $\|S_{J_n \cup \{i\}} - S\| \leq \frac{1}{n}$, entonces

$$\|x_i\| = \|S_{J_n \cup\{i\}} - S_{J_n}\| = \|S_{J_n \cup\{i\}} - S + S - S_{J_n}\|$$

$$\leq \|S_{J_n \cup\{i\}} - S\| + \|S - S_{J_n}\|$$

$$\leq \frac{2}{n} \quad ; \text{ para todo } n.$$

$$\Longrightarrow \|x_i\| = 0 \Longrightarrow x_i = 0.$$

PROPOSICION 2.22. (CRITERIO DE CAUCHY PARA LA SUMABILIDAD).

Sea E un espacio de Banach, $(xi)_{i \in I}$ una familia de elementos de E. Entonces $\sum_{i \in I} x_i$ es sumable, si y solo si, para todo $\xi > 0$, existe un subconjunto finito J de I tal que, para toda parte finita H de I disjunta de J, se tenga que $\|S_H\| \leq \xi$.

DEMOSTRACION:

"$\Longrightarrow$" Supongamos que $\sum_{i \in I} x_i$ es sumable. Para $\xi > 0$ dado, existe J finito, $J \subset I$, tal que para todo K finito, $K \supset J$, se tiene que $\|S_K - S\| \leq \frac{\xi}{2}$.

Sea H finito, $H \subset I$ y $H \cap J = \phi$, tenemos:

$$\|S_J - S\| \leq \frac{\xi}{2} \quad y \quad \|S_{J \cup H} - S\| \leq \frac{\xi}{2} .$$

Por lo tanto: $\|S_H\| = \|S_{JUH} - S_J\| = \|S_{JUH} - S + S - S_J\|$

$$\leq \|S_{JUH} - S\| + \|S - S_J\|$$

$$\leq \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi .$$

"$\Longleftarrow$" Demostremos primero que los x_i son distintos de cero únicamente para una cantidad infinita numerable de valores de $i \in I$.

En efecto: para n entero ≥ 1, denotemos por J_n el subconjunto finito de I tal que, $\|S_H\| \leq \frac{1}{n}$ para H finito, $H \subset I$ y $H \cap J_n = \phi$, en particular tenemos que para $i \notin J_n$, $\|x_i\| \leq \frac{1}{n}$.

Si i no pertenece a la reunión de los J_n la cual es numerable entonces, $\|x_i\| \leq \frac{1}{n}$ para todo n, lo cual implica que $x_i = 0$. Suprimiendo todos los $x_i = 0$, podemos suponer I equipotente a $\mathbb{N}$ y aún más, para simplificar supondremos $I = \mathbb{N}$.

Sea $\xi > 0$; por hipótesis existe J finito, $J \subset I$ tal que, para todo H finito, $H \subset I$ y $H \cap J = \phi$, se tiene que $\|S_H\| \leq \frac{\xi}{2}$.

Demostremos ahora que la sucesión de los $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ es de Cauchy en E.

En efecto: sea $p = \max \{n \mid n \in J\}$, entonces $n \geq p$,

$m \geq p \implies \|S_n - S_m\| \leq \frac{\xi}{2} < \xi$, $n > m$.

Ya que $J \cap \{m + 1, m + 2, \ldots, n\} = \phi$.

Por ser $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en E completo, existe S en E tal que

$\lim_{n\to+\infty} S_n = S$.

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|S_n - S\| < \frac{\xi}{2}$ para $n \geq n_0$; sea ahora K un subconjunto finito de I que contiene a J; existe un $n \geq n_0$ tal que $K \subset \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, entonces $[\{0, 1, 2, \ldots, n\} - K] \cap J = \phi$.

Luego:

$$\|S_K - S\| = \|S_K - S_{\{1,2,\ldots,n\}} + S_{\{1,2,\ldots,n\}} - S\|$$

$$\leq \|S_K - S_{\{1,2,\ldots,n\}}\| + \|S_n - S\|$$

$$< \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2}$$

$$= \xi .$$

Concluimos con ello que $\sum_{i \in I} x_i$ es sumable y de suma S.

10. EFECTO, SOBRE UNA SERIE, DE UNA APLICACIÓN LINEAL CONTINUA.

PROPOSICION 2.23. Sean E y F espacios vectoriales normados, y f una aplicación lineal continua de E en F. Si $\sum_{i=0}^{\infty} xi$ es una serie convergente de E, entonces la serie $\sum_{i=0}^{\infty} f(x_i)$ es convergente en F; además

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(x_i) = f\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i \right) .$$

El mismo enunciado para la convergencia conmutativa, y la convergencia absoluta si E y F son de Banach; además

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|f(x_i)\| \leq \|f\| \sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\| .$$

DEMOSTRACION:

1º) Por ser f lineal tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) .$$

Cuando n tiende hacia $+\infty$, $\sum_{i=0}^{n} x_i$ tiende hacia la suma S, entonces por ser f continua $f(\sum_{i=0}^{n} x_i)$ tenderá hacia $f(S)$, y por consiguiente, tambien $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$ tenderá hacia $f(S)$, lo cual significa que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} f(x_i)$ es convergente y que tiene por suma $f(S)$.

2º) Tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} \|f(x_i)\| \leq \sum_{i=0}^{n} \|f\| \, \|x_i\| = \|f\| \sum_{i=0}^{n} \|x_i\| .$$

Entonces, si $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ es absolutamente convergente, también $\sum_{i=0}^{\infty} f(x_i)$ será absolutamente convergente.

11. APLICACIONES INVERSIBLES EN LOS ESPACIOS DE BANACH.

PROPOSICION 2.24. Sean E y F espacios vectoriales normados, f una aplicación lineal biyectiva de E en F. Entonces f^{-1} es una aplicación lineal.

DEMOSTRACION:

Sean m, n puntos de F, λ un escalar; como f es sobre existen x e y en

E tales que: $f(x) = m$ y $f(y) = n$.

1º) $f^{-1}(m + n) = f^{-1}(f(x) + f(y)) = f^{-1}(f(x + y)) = x + y$

$$= f^{-1}(m) + f^{-1}(n).$$

2º) $f^{-1}(\lambda\, m) = f^{-1}(\lambda f(x)) = f^{-1}(f(\lambda x)) = \lambda\, x = \lambda f^{-1}(m)$.

DEFINICION. Sea f una aplicación lineal continua de un espacio vectorial normado E en un espacio vectorial normado F; decimos que f es inversible si es una biyección, y si la biyección recíproca f^{-1}, que es evidentemente lineal, es también continua. Tenemos además antre las dos biyecciones recíprocas la relación

$$1 = \|I\| = \|f \circ f^{-1}\| \leq \|f\| \ \|f^{-1}\| \ , \quad \text{ó}$$

$$\|f^{-1}\|^{-1} \leq \|f\| \qquad (I = \text{identidad}).$$

PROPOSICION 2.25. Sea f una aplicación lineal continua inversible de un espacio de Banach E en un espacio de Banach F, y sea g una aplicación lineal continua de E en F que verifica la relación

$$\|g\| < \|f^{-1}\|^{-1} \quad .$$

Entonces la aplicación lineal continua $f + g$ de E en F es también inversible, además:

$$\|(f + g)^{-1}\| \leq \frac{1}{\|f^{-1}\|^{-1} - \|g\|} \quad .$$

DEMOSTRACION:

Mostremos primero el caso particular en el cual $F = E$ y $f = I$.

Entonces g es una aplicación lineal continua de E en E, que verifica

$$\|g\| < \|I^{-1}\|^{-1} = 1 .$$

Demostremos que $I + g$ es biyectiva y que:

$(I + g)^{-1} = I - g + g^2 - g^3 + \dots + (-1)^n g^n + \dots\dots,$ es su inversa.

Donde g^n es la composición de n aplicaciones identicas a g.

"La serie $I - g + g^2 - g^3 + \dots\dots + (-1)^n g^n + \dots,$ es absolutamente convergente en el espacio de Banach $\mathcal{L}(E; E)$".

En efecto: $\|g^2\| = \|g \circ g\| \leq \|g\| \; \|g\| = \|g\|^2$, asimismo $\|g^n\| \leq \|g\|^n$,

y como por hipótesis $\|g\| < 1$, entonces

$$\|I\| + \|-g\| + \|g^2\| + \|-g^3\| + \dots + \|(-1)^n g^n\| + \dots\dots$$

$$\dots\dots \leq 1 + \|g\| + \|g\|^2 + \|g\|^3 + \dots + \|g\|^n + \dots\dots = \frac{1}{1 - \|g\|}$$

lo cual prueba que la serie es absolutamente convergente.

Entonces de acuerdo a la proposición 2.18, la serie será también convergente en $\mathcal{L}(E; E)$; es decir existe $w \in \mathcal{L}(E; E)$ tal que

$$w = I - g + g^2 - g^3 + \dots + (-1)^n g^n + \dots$$

Por proposición 2.10 tenemos que la aplicación p_f de $\mathcal{L}(E; E)$ en $\mathcal{L}(E; E)$ tal que $p_f(g) = g \circ f$ es lineal continua, y como además la serie $I - g + g^2 - g^3 + \dots + (-1)^n g^n + \dots$, es convergente, tenemos entonces por la proposición 2.23.

$$w \circ (I + g) = p_{I+g}(w) = p_{I+g}(I) - p_{I+g}(g) + p_{I+g}(g^2) - p_{I+g}(g^3) + \dots$$

$$= I \circ (I + g) - g \circ (I + g) + g^2 \circ (I + g) - g^3 \circ (I + g) + \dots$$

$$= I + g - (g + g^2) + (g^2 + g^3) - (g^3 + g^4) + \dots$$

$$= I \, .$$

El mismo razonamiento muestra que $(I + g) \circ w = I$. Entonces $I + g$ es una biyección, y $w = I - g + g^2 - g^3 + \dots + (-1)^n g^n + \dots$, es su biyección recíproca; como además $w \in \mathcal{L}(E; E)$, $I + g$ es inversible, y el teorema está demostrado en este caso. Así mismo, tenemos que:

$$\|w\| = \|(I + g)^{-1}\| \leq 1 + \|g\| + \|g\|^2 + \dots + \|g\|^n + \dots = \frac{1}{1 - \|g\|} \, .$$

Demostremos ahora el caso general, E y F cualesquiera, f inversible, y $\|g\| < \|f^{-1}\|^{-1}$. Como f es inversible, podemos escribir

$$f + g = f \circ (I + f^{-1} \circ g)$$

aquí $f^{-1} \circ g$ y $I + f^{-1} \circ g$ son aplicaciones lineales continuas de E en E; $\|f^{-1} \circ g\| \leq \|f^{-1}\| \, \|g\| < \|f^{-1}\| \|f^{-1}\|^{-1} = 1$. Entonces de acuerdo al caso particular que hemos demostrado, $I + f^{-1} \circ g$ es inversible, y su inversa está dada por:

$$(I + f^{-1} \circ g)^{-1} = I - f^{-1} \circ g + (f^{-1} \circ g) \circ (f^{-1} \circ g) - (f^{-1} \circ g) \circ (f^{-1} \circ g) \circ (f^{-1} \circ g) + \dots$$

Tenemos entonces que $f + g$ aparece, como la composición de las aplicaciones inversibles f y $(I + f^{-1} \circ g)$, entonces $f + g$ es inversible, y su aplicación recíproca es:

$$(f + g)^{-1} = \left[f \circ (I + f^{-1} \circ g)\right]^{-1}$$

$$= (I + f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1}$$

$$= f^{-1} - (f^{-1} \circ g) \circ f^{-1} + (f^{-1} \circ g) \circ (f^{-1} \circ g) \circ f^{-1} - (f^{-1} \circ g) \circ (f^{-1} \circ g) \circ (f^{-1} \circ g) \circ f^{-1} + \ldots$$

Tenemos además que:

$$\|(f+g)^{-1}\| = \|(I + f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1}\|$$

$$\leq \|(I + f^{-1} \circ g)^{-1}\| \; \|f^{-1}\|$$

$$\leq \frac{\|f^{-1}\|}{1 - \|f^{-1} \circ g\|}$$

$$\leq \frac{\|f^{-1}\|}{1 - \|f^{-1}\| \; \|g\|} = \frac{1}{\|f^{-1}\|^{-1} - \|g\|} \quad .$$

COROLARIO. Sea M el conjunto de elementos inversibles de $\mathbb{L}(E; F)$, y sea N el conjunto de elementos inversibles de $\mathbb{L}(F; E)$, entonces:

1º) M y N son abiertos de $\mathbb{L}(E; F)$ y $\mathbb{L}(F; E)$ respectivamente.

2º) La aplicación $\psi : M \longrightarrow N$, tal que $\psi(f) = f^{-1}$ es un homeomorfismo.

DEMOSTRACION:

1º) Sea $f \in M$, demostremos que la bola abierta $B(f, \|f^{-1}\|^{-1})$ está contenida en M.

En efecto, si $g \in B(f, \|f^{-1}\|^{-1})$, entonces $\|g - f\| < \|f^{-1}\|^{-1}$

luego, por el teorema anterior tendremos que:

$f + (g - f) = g$, es inversible, por lo tanto

$B(f, \|f^{-1}\|^{-1}) \subset M$.

Con igual razonamiento se demuestra que N es abierto.

2º) Es evidente que la aplicación ψ está bien definida, y es biyectiva. Demostremos que es continua. Sea $f \in M$, y $\xi > 0$. Tenemos:

$g^{-1} - f^{-1} = -f^{-1} \circ (g - f) \circ g^{-1}$, luego

$$\|\psi(g) - \psi(f)\| = \|g^{-1} - f^{-1}\| = \|-f^{-1} \circ (g - f) \circ g^{-1}\|$$

$$\leq \|f^{-1}\| \; \|g - f\| \; \|g^{-1}\| .$$

Tomemos $\|g - f\| < \dfrac{\|f^{-1}\|^{-1}}{2}$, entonces por el teorema anterior

$$\|g^{-1}\| = \|[f + (g-f)]^{-1}\| \leq \frac{1}{\|f^{-1}\|^{-1} - \|g-f\|}$$

$$< \frac{1}{\|f^{-1}\|^{-1} - \dfrac{\|f^{-1}\|^{-1}}{2}}$$

$$= \frac{2}{\|f^{-1}\|^{-1}}$$

$$= 2\|f^{-1}\| .$$

Luego:

$$\|\psi(g) - \psi(f)\| < 2\|f^{-1}\|^2 \|g - f\| .$$

Finalmente, tomando

$$\delta = \min \left\{ \frac{\xi}{2\|f^{-1}\|^2} , \frac{\|f^{-1}\|^{-1}}{2} \right\}$$

tendremos:

$$\|g - f\| < \delta \Longrightarrow \|\psi(g) - \psi(f)\| < \xi .$$

Lo cual demuestra que ψ es continua en $f \in M$. Con igual razonamiento se demuestra que ψ^{-1} es continua, por lo tanto ψ es un homeomorfismo.

CAPITULO III

ALGUNOS TEOREMAS EN ESPACIOS NORMADOS

1. Teorema de Banach - Steinhaus.

DEFINICION. Sea E un espacio métrico. Llamamos $G\delta$ (G delta), a toda intersección numerable de conjuntos abiertos de E.

PROPOSICION 3.1. (TEOREMA DE BAIRE). Si E es un espacio métrico completo, la intersección de toda colección numerable de abiertos densos de E es denso en E.

DEMOSTRACION:

Sean $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n, \dots$ abiertos densos de E, $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

Sea $W \neq \phi$ un abierto cualquiera de E, debemos demostrar que $V \cap W \neq \phi$.

Como V_1 es denso, $V_1 \cap W$ es un abierto distinto de vacío, existe entonces una bola cerrada $B'(x_1, r_1)$ tal que

$$B'(x_1, r_1) \subset V_1 \cap W \; ; \quad 0 < r_1 < 1 \tag{1}$$

Como V_2 es denso, $V_2 \cap B(x_1, r_1)$ es abierto distinto de vacío, existe entonces una bola cerrada $B'(x_2, r_2)$ tal que:

$$B'(x_2, r_2) \subset V_2 \cap B(x_1, r_1); \quad 0 < r_2 < \frac{1}{2} \tag{2}$$

Así sucesivamente para $n \geq 3$, $V_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$ es un abierto distinto de vacío, luego existirá $B'(x_n, r_n)$ tal que:

$$B'(x_n, r_n) \subset V_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}); \quad 0 < r_n < \frac{1}{n} \tag{3}$$

Este proceso produce una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en E. (x_n, centro de las bolas).

Si $i \geq n$ y $j \geq n$, la construcción demuestra que x_i y x_j pertenecen ambos a $B'(x_n, r_n)$, entonces:

$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_n) + d(x_n, x_j) \leq 2r_n < \frac{2}{n}$, por lo tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.- Como E es completo, existe $x \in E$ tal que $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

Puesto que $x_i \in B'(x_n, r_n)$, si $i \geq n$, necesariamente $x \in B'(x_n, r_n)$ y por (3) $x \in V_n$. Esto es verdadero para todo n, luego $x \in V$; además $B'(x_n, r_n) \subset W$, por lo tanto $x \in W$, lo cual completa la prueba.

COROLARIO 1. En un espacio métrico completo, la intersección de cualquier colección numerable de $G\delta$ densos es también un $G\delta$ denso.

DEMOSTRACION:

Todo $G\delta$ es intersección numerable de abiertos, por lo tanto podemos escribir $G_{\delta_j} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_{(i,j)}$, donde $O_{(i,j)}$ es abierto.

Luego: $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} G_{\delta_j} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_{(i,j)}\right) = \bigcap_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} O_{(i,j)}$

como el conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es numerable, tendremos que $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} G\delta_j$ es un $G\delta$.

Como G_{δ_j} es denso para todo $j \in \mathbb{N}$, $O_{(i,j)}$ es abierto denso para todo $(i, j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, por lo tanto $\bigcap_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} O_{(i,j)}$ es denso.

Tomando complemento, la proposición 3.1 es equivalente el siguiente corolario.

COROLARIO 2. Si E es un espacio métrico completo, la reunión de toda colección numerable de cerrados sin interior es también sin interior.

DEMOSTRACION:

Sean $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ cerrados sin interior (F_i es sin interior, si $\overset{\circ}{F}_i = \phi$).

Demostremos primero que "F es sin interior si y solo si $\complement F$ es denso".

" $\Longrightarrow$ " Si $\complement F$ no fuera denso, existiría un abierto $W \neq \phi$ tal que $W \cap \complement F = \phi$, por lo tanto $W \subset F$ y $\overset{\circ}{F} \neq \phi$.

" $\Longleftarrow$ " Si F contiene un abierto $A \neq \phi$, entonces $A \cap \complement F = \phi$, luego $\complement F$ no es denso.

$\complement F_i$ es abierto denso para todo $i \in \mathbb{N}$; luego

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \complement F_i \quad \text{es denso} \quad \Longrightarrow \complement\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \complement F_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \quad \text{es sin interior}$$

$$\Longrightarrow \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i}} = \phi .$$

PROPOSICION 3.2. (TEOREMA DE BANACH - STEINHAUS).

Sean E y F espacios vectoriales normados, E de Banach. Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una colección de aplicaciones lineales continuas de E en F.

Entonces:

1º) Existe $M < \infty$ tal que $\|f_i\| \leq M$ para todo $i \in I$, ó

2º) Existe $T \subset E$, T un $G\delta$ denso en E, tal que para todo

$x \in T$, $\sup_{i \in I} \|f_i(x)\| = \infty$.

DEMOSTRACION:

Pongamos: $\psi(x) = \sup\limits_{i\in I} \|f_i(x)\| \qquad (x \in E)$

y sea $V_n = \{x \mid \psi(x) > n\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Puesto que cada aplicación f_i es continua y además $\| \ \| : F \longrightarrow R^+$ es continua, entonces cada aplicación $h_i = \| \ \| \circ f_i : E \longrightarrow R^+$ tal que $h_i(x) = \|f_i(x)\|$ es continua.

Luego, $B_{n_i} = \{x \mid \|f_i(x)\| > n\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$, es abierto por ser la imagen recíproca mediante una función continua del abierto $]n, +\infty[$.

Demostremos ahora que

$$V_n = \{x \mid \sup_{i\in I} \|f_i(x)\| > n\} = \bigcup_{i\in I} B_{n_i} = \bigcup_{i\in I} \{x \mid \|f_i(x)\| > n\}$$

con lo cual quedará probado que cada V_n es abierto.

En efecto:

1º) Sea $x \in V_n$; $x \in V_n \Longrightarrow \sup\limits_{i\in I} \|f_i(x)\| > n$

$$\Longrightarrow \exists i_0 \in I, \text{ tal que } \|f_{i_0}(x)\| > n$$

$$\Longrightarrow x \in B_{n_{i_0}}$$

$$\Longrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} B_{n_i} .$$

2º) Sea $x \in \bigcup\limits_{i\in I} B_{n_i}$; $x \in \bigcup\limits_{i\in I} B_{n_i} \Longrightarrow \exists\, i_0 \in I$ tal que $x \in B_{n_{i_0}}$

$$\Longrightarrow \|f_{i_0}(x)\| > n.$$

Como además $\sup_{i \in I} \|f_i(x)\| > \|f_{i_0}(x)\| > n$, entonces $x \in V_n$.

Si alguno de los V_n, digamos V_{n_0} no es denso en E, entonces existe un $x_0 \in E$ y un $r > 0$ tal que $B'(x_0, r) \cap V_{n_0} = \phi$.

Sea x tal que $\|x\| \leq r$; $x_0 + x \in B'(x_0, r)$ ya que $\|(x_0 + x) - x_0\| < r$; luego $x_0 + x \notin V_{n_0}$, lo cual significa que $\psi(x_0 + x) \leq n_0$, ó

$$\|f_i(x + x_0)\| \leq n_0 \tag{1}$$

Para todo $i \in I$ y para todo x con $\|x\| \leq r$. Puesto que $x = (x + x_0) - x_0$, tenemos:

$$\|f_i(x)\| \leq \|f_i(x + x_0)\| + \|f_i(x_0)\| \leq 2\, n_0 \ . \tag{2}$$

Sea x tal que $\|x\| = 1$; $\|rx\| \leq r$, luego por (2)

$$\|f_i(rx)\| \leq 2\, n_0 \ , \quad \text{para todo } i \in I$$

es decir:

$$\|f_i(x)\| \leq \frac{2\, n_0}{r} \ , \quad \text{para todo } i \in I, \ \|x\| = 1$$

por lo tanto $\sup_{\|x\|=1} \|f_i(x)\| \leq \dfrac{2\, n_0}{r}$, para todo $i \in I$

con lo cual concluimos que $\|f_i\| \leq \dfrac{2\, n_0}{r} = M$, para todo $i \in I$.

La otra posibilidad es que todo V_n sea denso en E; en tal caso $\cap V_n$ es un G_δ denso en E, y además para todo $x \in \cap V_n$, $\psi(x) > n$, para todo n, entonces $\psi(x) = \infty$; es decir $\sup_{i\in I} \|f_i(x)\| = \infty$ lo cual completa la prueba.

2. TEOREMA DE LA FUNCIÓN ABIERTA.

PROPOSICION 3.3. (TEOREMA DE LA FUNCION ABIERTA).

Sean U y V las bolas unitarias abiertas de los espacios de Banach E y F respectivamente. Para cada aplicación lineal continua f de E sobre F corresponde un $\delta > 0$ tal que:

$$\delta V \subset f(U) \tag{1}$$

(otra forma de establecer (1) es: para todo y con $\|y\| < \delta$ corresponde un x; con $\|x\| < 1$ tal que $f(x) = y$).

DEMOSTRACION:

Por ser f sobre, dado $y \in F$, existe un $x \in E$ tal que $f(x) = y$; si $\|x\| < k$, entonces $y \in f(kU)$; ya que $x = k(\frac{x}{k})$ y $\left\|\frac{x}{k}\right\| < 1$.

Por lo tanto $F = \bigcup_k f(kU)$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Tenemos también que

$F = \bigcup \overline{f(kU)}$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ y como F es completo, por el corolario 2 al teorema de Baire, existe un abierto $W \neq \phi$ en la adherencia de algún $f(kU)$; ya que si $\overset{\circ}{\overline{f(kU)}} = \phi$, para todo k.

$\overset{\circ}{F} = F = \phi$. $W \subset \overline{f(kU)}$, para algún k, significa que todo punto de W es el límite de alguna sucesión $\{f(x_i)\}$ donde $x_i \in kU$; consideraremos de ahora en adelante k y W fijos.

Sea $y_0 \in W$; existe $\eta > 0$ tal que $B(y_0, \eta) \subset W$; si y es tal que $\|y\| < \eta$ se tiene que $y + y_0 \in W$; luego para cualquiera de tales "y" existirán sucesiones $\{x'_i\}$ y $\{x''_i\}$ en kU tal que

$$\lim_{i\to\infty} f(x'_i) = y_0 \qquad y \qquad \lim_{i\to\infty} f(x''_i) = y_0 + y \tag{2}$$

Poniendo $x_i = x''_i - x'_i$ tenemos que $\|x_i\| < 2k$ y $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = y$; es decir, dado y, con $\|y\| < \eta$, existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en E tal que $\|x_i\| < 2k$ y $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = y$.

Demostremos que:

"Para todo $y \in F$ y para cada $\xi > 0$ existe un $x \in E$ tal que

$$\|x\| \leq \delta^{-1} \|y\| \quad y \quad \|y - f(x)\| < \xi, \text{ con } \delta = \frac{\eta}{4k} \text{"} \tag{3}$$

En efecto: sea $0 \neq y \in F$; $\left\| \dfrac{\eta y}{2\|y\|} \right\| < \eta$; luego existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en E tal que $\|x_i\| < 2k$ y $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = \dfrac{\eta y}{2\|y\|}$.

Por lo tanto existe $z \in \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\|z\| < 2k \quad y \quad \left\| \frac{\eta y}{2\|y\|} - f(z) \right\| < \frac{\xi\eta}{2\|y\|}$$

$$\|z\| < 2k \quad y \quad \frac{\eta}{2\|y\|} \left\| y - f\left(\frac{2\|y\| z}{\eta}\right) \right\| < \frac{\xi\eta}{2\|y\|}$$

$$\|z\| < 2k \quad y \quad \left\| y - f\left(\frac{2\|y\| z}{\eta}\right) \right\| < \xi$$

$$\|z\| < 2k \implies \left\| \frac{2\,\|y\|\, z}{n} \right\| < \frac{4k}{n}\, \|y\| = \delta^{-1} \|y\|$$

Luego, haciendo $x = \dfrac{2\,\|y\|\, z}{n}$, tenemos:

$$\|x\| < \delta^{-1} \|y\| \quad \text{y} \quad \|y - f(x)\| < \xi \;.$$

Fijemos $y_0 \in \delta V$ y fijemos $\xi > 0$. Por (3) existe x_1 con $\|x_1\| \leq \delta^{-1} \|y_0\| < 1$, y

$$\|y_0 - f(x_1)\| < \frac{1}{2} \delta \xi \tag{4}$$

Supongamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Son escogidos tal que

$$\|y_0 - f(x_1) - f(x_2) - \ldots - f(x_n)\| < 2^{-n} \delta \xi \tag{5}$$

Usando (3) con $y = y_0 - f(x_1) - f(x_2) - \ldots - f(x_n)$, obtenemos un x_{n+1} tal que $\|y - f(x_{n+1})\| < 2^{-n-1} \delta \xi$, y

$$\|x_{n+1}\| < \delta^{-1} \|y\| < \delta^{-1} 2^{-n} \delta \xi = 2^{-n} \xi \,. \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

Sea $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$

"Demostremos que $\{S_n\}$ es de Cauchy"

En efecto: sean $n > m$

$$\|S_n - S_m\| = \| x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_n\|$$

$$\leq \|x_{m+1}\| + \|x_{m+2}\| + \ldots + \|x_n\|$$

$$< 2^{-m}\xi + 2^{-m-1}\xi + \ldots + 2^{-n+1}\xi$$

$$= 2^{-m}\left(\xi + \frac{\xi}{2} + \ldots + \frac{\xi}{2^{n-m-1}}\right) < 2^{-m}(2\xi) = 2^{-m+1}\xi \leq \xi$$

lo cual prueba que $\{S_n\}$ es de Cauchy.

Puesto que E es completo, existe un $x \in E$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = x$.

$\|S_n\| < \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|$ (Para todo $n \in \mathbb{N}$).

Luego: $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n\| < \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|$

ó $\|x\| = \|\lim\limits_{n\to\infty} S_n\| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\| < 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=2}^{n} \|x_i\|$; $(\|x_1\| < 1)$

$$\leq 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} 2^{-i+1}\xi = 1 + \xi .$$

Puesto que f es continua $\lim\limits_{n\to\infty} f(S_n) = f(x)$, y además por (5)

$\lim\limits_{n\to\infty} f(S_n) = y_0$. Por lo tanto $y_0 = f(x)$.

De donde deducimos que: $f((1 + \xi)U) \supset \delta V$, ó

$$f(U) \supset (1 + \xi)^{-1}\delta V, \quad \text{para todo } \xi > 0 . \qquad (7)$$

Demostremos que: " $\bigcup\limits_{\xi>0} (1 + \xi)^{-1}\delta V = \delta V$ ", con lo cual quedará proba-

do (1).

1º) " $\bigcup\limits_{\xi>0} (1 + \xi)^{-1}\delta V \subset \delta V$ ".

Sea $y \in \bigcup_{\xi>0} (1+\xi)^{-1} \delta V$

$y \in \bigcup_{\xi>0} (1+\xi)^{-1} \delta V \Longrightarrow$ existe $\xi_0 > 0$ y $x \in V$ tal que:

$y = (1+\xi_0)^{-1} \delta x$; $(1+\xi_0)^{-1} < 1$, por lo tanto

$\|y\| = \|(1+\xi_0)^{-1} \delta x\| < \delta \|x\| < \delta$, es decir $y \in \delta V$.

2º) " $\delta V \subset \bigcup_{\xi>0} (1+\xi)^{-1} \delta V$ ".

Sea $y \in \delta V$. Si $y = 0$, evidentemente $y \in \bigcup_{\xi>0} (1+\xi)^{-1} \delta V$.

Supongamos $y \neq 0$, entonces existe $x_0 \in V$, $x_0 \neq 0$, tal que $y = \delta x_0$.

$$\|x_0\| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{\|x_0\|} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{\|x_0\|} - 1 > 0.$$

Si tomamos un $\xi < \frac{1}{\|x_0\|} - 1$, $\xi > 0$, tendremos que

$(1+\xi) < \frac{1}{\|x_0\|}$; es decir $(1+\xi)\|x_0\| < 1$.

Luego podemos escribir $y = (1+\xi)^{-1} \delta ((1+\xi) x_0)$, con

$\xi < \frac{1}{\|x_0\|} - 1$, con lo cual se demuestra que $y \in \bigcup_{\xi>0} (1+\varepsilon)^{-1} \delta V$.

Demostraremos en el siguiente corolario que bajo las hipótesis de la proposición anterior, la imagen por f de todo abierto en E es un abierto en F, lo cual explica el nombre del teorema.

COROLARIO 1. Sean E y F espacios de Banach, f una aplicación lineal continua de E sobre F, A un abierto de E. Entonces f(A) es abierto en F.

DEMOSTRACION:

Sea $y_0 \in f(A)$; existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Por ser A abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset A$, luego

$$f(B(x_0, r)) \subset f(A) \tag{1}$$

Por la proposición anterior sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que $\delta V \subset f(U)$; en donde U, V son dos bolas unitarias abiertas en E y F respectivamente.

Demostremos que: $B(y_0, r\delta) \subset f(A)$, con lo cual quedará probado que f(A) es abierto.

En efecto:
$$\begin{aligned} f(B(x_0, r)) &= f(x_0 + rU) \\ &= f(x_0) + rf(U) \\ &\supset f(x_0) + r\delta V \\ &= B(f(x_0), r\delta) \\ &= B(y_0, r\delta). \end{aligned}$$

Luego, por (1); $B(y_0, r\delta) \subset f(A)$.

COROLARIO 2. Si E y F son espacios de Banach y si f es una aplicación lineal continua biyectiva de E en F, entonces f^{-1} es una aplicación lineal continua de F en E.

DEMOSTRACION:

Sea O un abierto de E, por el corolario anterior f(O) es abierto en F, luego por proposición 1.21 f^{-1} es continua.

La linealidad de f^{-1} ya fue demostrada (ver proposición 2.24).

3. Teorema de Hahn - Banach.

Recordemos que una forma lineal sobre un espacio vectorial V es una aplicación lineal f de V en el campo "K" de los escalares.

Si $K = \mathbb{C}$, decimos que V es un espacio vectorial complejo y que f es una forma lineal compleja.

Sea V un espacio vectorial complejo y f una forma lineal compleja sobre V; decimos que la aplicación g de V en $\mathbb{R}$ es la parte real de f, si g(x) es la parte real del número complejo f(x) para todo $x \in V$; fácilmente se demuestra que g es lineal.

PROPOSICION 3.4. Sea V un espacio vectorial complejo.

a) Si g es la parte real de la forma lineal compleja f sobre V, entonces:

$$f(x) = g(x) - i\, g(ix) \qquad (x \in V) \tag{1}$$

(b) Si g de V en $\mathbb{R}$ es lineal y si f está definida por (1) entonces f es una forma lineal compleja sobre V.

(c) Si V es un espacio vectorial normado y f y g están relacionadas como en (a), entonces $\|f\| = \|g\|$.

DEMOSTRACION:

Si α y β son números reales y $z = \alpha + i\beta$, la parte real de iz es $-\beta$. Esto nos da la identidad

$$z = \mathrm{Re}(z) - i\, \mathrm{Re}(iz) \tag{2}$$

para todo número complejo z; puesto que

$$Re(i\ f(x)) = Re\ f(ix) = g(ix), \qquad (3)$$

entonces, haciendo $z = f(x)$ en (2) tendremos:

$$\begin{aligned} f(x) &= Re\ f(x) - i\ Re\ (i\ f(x)) \\ &= g(x) - i\ g(ix). \end{aligned}$$

Con las hipótesis de (b) es evidente que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ demostremos que $f[(\alpha + i\ \beta)x] = (\alpha + i\ \beta)f(x)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

En efecto:

$$\begin{aligned} f[(\alpha + i\ \beta)x] &= g[(\alpha + i\ \beta)x] - i\ g\ [i(\alpha + i\ \beta)x] \\ &= g(\alpha\ x + i\ \beta\ x) - i\ g(\alpha\ i\ x - \beta\ x) \\ &= g(\alpha\ x) + g(i\ \beta\ x) - i\ g(\alpha\ i\ x) + i\ g(\beta\ x) \\ &= \alpha\ g(x) + \beta\ g(i\ x) - i\ \alpha\ g(i\ x) + \beta\ i\ g(x) \\ &= (\alpha + \beta\ i)g(x) - i(\alpha + i\ \beta)\ g(i\ x) \\ &= (\alpha + \beta\ i)\ [g(x) - i\ g(i\ x)] \\ &= (\alpha + \beta\ i)\ f(x). \end{aligned}$$

Puesto que $|g(x)| \leq |f(x)|$, tendremos que $||g|| \leq ||f||$.

Además para cada complejo $z = \alpha + i\ \beta \neq 0$, $(\alpha , \beta \in \mathbb{R})$, existe el complejo $\delta = \frac{1}{|z|}(\alpha - i\ \beta)$, tal que

$$\delta\ z = |z| \quad y \quad |\delta| = 1$$

haciendo $z = f(x)$, tenemos:

$$|f(x)| = \delta f(x) = f(\delta x) = g(\delta x) = |g(\delta x)| \leq ||g||\ ||\delta x|| = ||g||\ ||x|| .$$

Lo cual prueba que $||f|| \leq ||g||$.

PROPOSICION 3.5. (TEOREMA DE HAHN - BANACH).

Si M es un subespacio de un espacio vectorial normado E y si f es una forma lineal continua sobre M, entonces f puede ser extendida a una forma lineal continua $\hat{f}$ sobre E tal que $||\hat{f}|| = ||f||$.

DEMOSTRACION:

Asumiremos primero que E es un espacio vectorial normado real y, consecuentemente f es una forma lineal continua real sobre M. Si $||f|| = 0$, la extensión buscada es $\hat{f} = 0$. Si $||f|| \neq 0$, demostraremos dos casos: 1º) $||f|| = 1$ y 2º) $||f|| \neq 1$.

1º) $||f|| = 1$.

Sea $x_0 \in E$, $x_0 \notin M$, y sea M_1 el espacio vectorial generado por M y x_0 , entonces $M_1 = \{ x + \lambda x_0 \mid x \in M, \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Para todo $x \in M$, para todo $y \in M$, se tiene:

$$f(x)-f(y)=f(x-y)\leq |f(x-y)|\leq ||x-y||\leq ||x - x_0||+||y - x_0||$$

ó

$$f(x) - ||x - x_0|| \leq f(y) + ||y - x_0|| . \qquad (1)$$

Tenemos que, para cualquier $y \in M$, $f(y) + ||y - x_0||$ es cota superior de los números $f(x) - ||x - x_0||$ para todo $x \in M$; luego

$$\sup_{x\in M} \{f(x) - ||x - x_0||\} \leq f(y) + ||y - x_0|| \quad (y \in M) \qquad (2)$$

Hagamos

$$\alpha = \sup_{x\in M} \{f(x) - ||x - x_0||\} \qquad (3)$$

y definamos f_1 de M_1 en $\mathbb{R}$ tal que $f_1(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda\alpha$.
Trivialmente se demuestra que f_1 es lineal; además para $x \in M$, $x = x + 0\,x_0$, luego

$$f_1(x) = f_1(x + 0\,x_0) = f(x) = 0\,\alpha = f(x) \tag{4}$$

Demostremos ahora, que f_1 es continua y que $\|f_1\| = 1$.

En efecto:

$$f(x) - \|x - x_0\| \leq \alpha \leq f(x) + \|x - x_0\| \qquad (x \in M)$$

ó

$$|f(x) - \alpha| \leq \|x - x_0\| \qquad (x \in M) \tag{5}$$

Reemplazando x por $-\frac{x}{\lambda}$ y multiplicando ambos miembros de (5) por $|\lambda|$, $\lambda \neq 0$, se tiene que:

$$|- f(x) - \lambda\,\alpha| \leq \|- x - \lambda\,x_0\| \qquad (x \in M) \quad (0 \neq \lambda \in \mathbb{R})$$

ó

$$|f_1(x + \lambda\,x_0)| = |f(x) + \lambda\,\alpha| \leq \|x + \lambda\,x_0\| \quad (x \in M),\ (0 \neq \lambda \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

De (6) concluimos que f_1 es continua y que además $\|f_1\| \leq 1$.

Por otra parte tenemos:

$$\|f_1\| = \sup_{\substack{x \in M_1 \\ x \neq 0}} \frac{\|f_1(x)\|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in M} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 1,$$

con lo cual tenemos que $\|f_1\| = 1$.

Hemos probado que existe una forma lineal continua f_1 sobre M_1, la cual es una extensión de f, y además $\|f_1\| = \|f\|$.

Sea P la colección de todos los pares ordenados (M', f'), donde

M' es un subespacio de E, $M' \supset M$, y donde f' es una extensión lineal real de f a M', con $||f'|| = 1$.

Ordenaremos P parcialmente estableciendo que: $(M', f') \leq (M'', f'')$, si $M' \subset M''$ y $f''(x) = f'(x)$ para todo $x \in M'$. Evidentemente los axiomas del orden parcial son satisfechos; P es no vacío puesto que contiene a (M, f).

Sea $\Omega \subset P$, Ω totalmente ordenado, probaremos que Ω tiene cota superior.

Sea $M_2 = \cup M'$, donde $(M', f') \in \Omega$.

"M_2 es un subespacio de E".

En efecto: sean x, y elementos de M_2; existen M' y M'' tal que $x \in M'$ y $y \in M''$; por ser Ω totalmente ordenado, ó bien:

i) $(M', f') \leq (M'', f'')$, ó

ii) $(M'', f'') \leq (M', f')$.

En el primer caso x, y pertenecen ambos a M'', luego

$$x + y \in M'' \quad y \quad \alpha x \in M'', \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

En el segundo caso x e y pertenecen a M', luego

$$x + y \in M' \quad y \quad \alpha x \in M', \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

En ambos casos $x + y \in M_2$, $\alpha x \in M_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lo cual prueba que M_2 es un subespacio de E.

Definamos $f_2 : M_2 \longrightarrow \mathbb{R} : x \rightsquigarrow f_2(x) = f'(x)$, para $x \in M'$, y donde f' está en el par (M', f').

f_2 está bien definida; ya que si $x \in M'$ y $x \in M''$, por ser Ω totalmente ordenado, o bien

$(M', f') \leq (M'', f'')$ ó $(M'', f'') \leq (M', f')$.

En ambos casos $f''(x) = f'(x) = f(x)$.

Así mismo, por ser Ω totalmente ordenado, se demuestra trivialmente que f_2 es lineal.

Por otra parte si $x \in M_2$, existe M', M' en el par (M', f') tal que $x \in M'$, luego

$$||f_2(x)|| = ||f'(x)|| \leq ||x||$$

de donde concluimos que $||f_2|| = 1$.

(M_2, f_2) es cota superior de Ω; luego por el lema de Zorn existe $(\hat{M}, \hat{f})$ en P, tal que $(\hat{M}, \hat{f})$ es maximal; $||\hat{f}|| = 1$, ya que $(\hat{M}, \hat{f}) \in P$.

Si $\hat{M} \neq E$, existe $x_0 \in E$, $x_0 \notin \hat{M}$. Y por la primera parte de este caso existe f_1 extensión de $\hat{f}$ a $M_1 = \{x + \lambda x_0 \mid x \in \hat{M}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ con $||f_1|| = 1$; lo cual contradice el hecho que $(\hat{M}, \hat{f})$ sea maximal. Por lo tanto $\hat{M} = E$, y la prueba está completa para el caso, en el cual los escalares son reales y $||f|| = 1$.

2º) $||f|| \neq 1$.

Definamos $F = \dfrac{f}{||f||}$.

$||F|| = 1$; luego por el caso 1º) existe $\hat{F}$ de E en $\mathbb{R}$ tal que:

$\hat{F}(x) = F(x)$ para todo $x \in M$ y $||\hat{F}|| = ||F|| = 1$.

" $\hat{f} = ||f|| \hat{F}$ es la extensión buscada".

En efecto:

a) $\hat{f}(x) = ||f|| \hat{F}(x) = ||f|| F(x) = \dfrac{||f|| f(x)}{||f||} = f(x)$ para todo $x \in M$.

b) $\|\hat{f}\| = \big\| \|f\| \hat{F} \big\| = \|f\| \|\hat{F}\| = \|f\|$.

Consideremos ahora que f es una forma lineal compleja en el subespacio M del espacio vectorial normado complejo E; sea g la parte real de f; usando el teorema de Hahn - Banach, parte real, puede entenderse g a una forma lineal real $\hat{g}$ en E, con $\|\hat{g}\| = \|g\|$.

Y definamos $F(x) = \hat{g}(x) - i\,\hat{g}(i\,x) \qquad (x \in E)$;

Por proposición anterior, F es una forma lineal compleja; además si $x \in M$, $F(x) = \hat{g}(x) - i\,\hat{g}(i\,x) = g(x) - i\,g(i\,x) = f(x)$, y $\|F\| = \|\hat{g}\| = \|g\| = \|f\|$. Lo cual completa la prueba.

PROPOSICION 3.6. Sea M un subespacio vectorial de un espacio vectorial normado E, y sea $x_0 \in E$. Entonces $x_0 \in \overline{M}$ si y solo si no existe una forma lineal continua f sobre E tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in M$, y $f(x_0) \neq 0$.

DEMOSTRACION:

"$\Longrightarrow$" Si $x_0 \in \overline{M}$ y f es una forma lineal continua, y si $f(x) = 0$ para todo $x \in M$, entonces la continuidad de f demuestra que también debemos tener $f(x_0) = 0$.

"$\Longleftarrow$" Inversamente supongamos que $x_0 \notin \overline{M}$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| > \delta$, para todo $x \in M$.

$-\lambda^{-1} x \in M$, para todo $x \in M$ y para todo escalar $\lambda \neq 0$, luego $\|-\lambda^{-1} x - x_0\| > \delta$, para todo $x \in M$ y para todo escalar $\lambda \neq 0$, es decir $\|\lambda^{-1} x + x_0\| > \delta$, para todo $x \in M$ y para todo escalar $\lambda \neq 0$.

Sea M' el espacio generado por M y x_0, y definamos $f(x + \lambda x_0) = \lambda$, don de $x \in M$ y λ es un escalar.

Trivialmente se demuestra que f es lineal, además

$\delta \|f(x + \lambda x_0)\| = \delta|\lambda| < |\lambda| \; \|x_0 + \lambda^{-1} x\| = \|\lambda x_0 + x\|, \quad \lambda \neq 0$;

es decir $\|f(x + \lambda x_0)\| < \frac{1}{\delta} \|\lambda x_0 + x\|$, lo cual demuestra que f es continua en M' y que $\|f\| \leq \frac{1}{\delta}$. También $f(x) = 0$, para $x \in M$ y $f(x_0) = 1$. Finalmente el teorema de Hahn - Banach nos permite extender f de M' a E, lo cual completa la prueba.

PROPOSICION 3.7. Si E es un espacio vectorial normado y si $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe una forma lineal continua f sobre E, de norma 1, tal que $f(x_0) = \|x_0\|$.

DEMOSTRACION:

Sea $M = \{\lambda x_0\}$, y definamos $f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$.

"f es lineal".

En efecto:

1º) $f[(\lambda_1 + \lambda_2)x_0] = (\lambda_1 + \lambda_2)\|x_0\| = \lambda_1 \|x_0\| + \lambda_2 \|x_0\|$.

2º) $f[\alpha (\lambda x_0)] = f(\alpha \lambda x_0) = \alpha \lambda \|x_0\| = \alpha (\lambda \|x_0\|) = \alpha f(\lambda x_0)$.

Además $\|f(\lambda x_0)\| = \big\|\lambda \|x_0\| \big\| = \|\lambda x_0\|$, lo cual prueba que f es continua y además $\|f\| = 1$. También tenemos que $f(x_0) = \|x_0\|$; finalmente el teorema de Hahn - Banach nos permite extender f de M a E, lo cual completa la prueba.

B I B L I O G R A F I A

1) Schwartz, Laurent. ANALYSE. DEUXIEME PARTIE, TOPOLOGIA GENERALE ET ANALYSE FUNCTIONNELLE, Editorial Hermann, París, 1970.

2) Dieudonne, Jean. FUNDAMENTOS DE ANALISIS MODERNO, Editorial Reverte, Barcelona. 1966.

3) Rudin, W. REAL AND COMPLEX ANALISIS, Editorial Mc Graw - Hill, New York, 1966.

4) Cotlar, Mischa y Cignoli, Roberto. NOCIONES DE ESPACIOS NORMADOS, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1967.

5) Lipschutz, Seymour, TOPOLOGIA GENERAL, Editorial Mc Graw - Hill. Versión Latinoamericana de Editorial Norma, 1970.