UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

ESPACIOS TOPOLOGICOS IRREDUCIBLES
ESPACIOS TOPOLOGICOS NOETHERIANOS

AGOSTO 1982

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR INTERINO: DR. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO GENERAL: LIC. RICARDO ERNESTO CALDERON

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO: ING. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

SECRETARIO: ARQ. JOSE ALBERTO CALEDONIO R.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO: ING. CARLOS MAURICIO CANJURA

ASESOR DEL SEMINARIO: LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

TRABAJO PRESENTADO POR:

MARCELINO ALFONSO LARA

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

DEDICATORIA

A la memoria de Carmen Flores v. de Alvarez

A mis hijos:

Roxana Esmeralda

Eduardo Alfonso

P R O L O G O

Una de las estructuras más importantes en Matemática es la estructura topológica. Se pretende que este trabajo pueda servir de motivación para hacer estudios más avanzados ó investigación en este campo.

Los objetivos específicos del presente trabajo son:

1) Estudiar condiciones equivalentes para que un espacio topológico sea irreducible.
2) Demostrar que la irreducibilidad se preserva por continuidad.
3) Probar que un espacio topológico es unión de sus componentes irreducibles.
4) Conocer condiciones equivalentes para que un espacio topológico sea noetheriano.
5) Demostrar que en un espacio topológico noetheriano el conjunto de componentes irreducibles es finito.

Esperando que el presente trabajo cumpla con los objetivos planteados, deseo expresar mi gratitud a todas las personas que contribuyeron para que esta publicación se realizara.

INDICE

CAPITULO I

DEFINICIONES Y PROPIEDADES BASICAS

1- Conjuntos
- a- Familias.............................. 1
- b- Operaciones.......................... 1
- c- Conjuntos ordenados.................. 2

2- Espacios Topológicos
- a- Definición........................... 3
- b- Subconjuntos de un Espacio Topológico. 4
- c- Topología Inducida................... 8
- d- Continuidad.......................... 9

3- Ideales primos
- a- Definiciones......................... 10
- b- Propiedades.......................... 11

CAPITULO II

ESPACIOS IRREDUCIBLES

1- Espacios Irreducibles.................. 13
2- Subespacios Irreducibles............... 17
3- Componentes Irreducibles............... 23
4- Ejemplo de un Espacio Irreducible...... 32

CAPITULO III

ESPACIOS NOETHERIANOS

1- Espacios Noetherianos.................. 36
2- Propiedades de un Espacio Noetheriano.... 36
3- Ejemplo de un Espacio Noetheriano....... 44

CAPITULO I

DEFINICIONES Y PROPOSICIONES BÁSICAS.

DEFINICIONES 1.1

Sean I, A conjuntos no vacíos y $f: I \to A$ una función tal -- que $f(i) = a_i$, para todo $i \in I$.

Se dice que *f es una familia de elementos de A, con índices en el conjunto* I.

Se escribe $(a_i)_{i \in I}$

DEFINICION 1.2

Sean I, A conjuntos no vacíos. Se llama familia de partes - o subconjuntos de A, a la función $f: I \to P(A)$ tal que ---- $f(i) = A_i$, para todo $i \in I$.

Se escribe $(A_i)_{i \in I}$

DEFINICION 1.3

Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X.

Suponemos que $I \neq \Phi$.

a) Se llama *reunión* de la familia $(A_i)_{i \in I}$ y se denota por - $\bigcup_{i \in I} A_i$, al conjunto A tal que $x \in A$ si y sólo si existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$.

Así,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \in X \ / \text{ existe } i \in I \text{ tal que } x \in A_i \}$$

b) Se llama *intersección* de la familia $(A_i)_{i\in I}$ y se denota por $\bigcap_{i\in I} A_i$ al conjunto A tal que $x\in A$ si y sólo si $x\in A_i$ para todo $i\in I$.

Así,

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{ x\in X \ / \ x\in A_i, \text{ para todo } i\in I\}$$

CONVENCION:

Si $I = \Phi$, entonces se tiene:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \Phi \quad \text{y} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = X$$

DEFINICION 1.4

Se dice que una familia de conjuntos $(A_i)_{i\in I}$ es *una partición* de un conjunto E, si:

1) $A_i \neq \Phi$, para cada $i\in I$.

2) $\bigcup_{i\in I} A_i = E$

3) $A_i \cap A_j = \Phi$, con $i \neq j$.

DEFINICION 1.5

Se llama *conjunto ordenado* a un par (A,R), donde A es un conjunto y R una relación de orden en A.

DEFINICION 1.6

Sea $(A,\leq)$ un conjunto ordenado y X un subconjunto de A. Un elemento $k\in A$ es *cota superior* de X si, para todo $x\in X$, se tiene $k \geq x$.

DEFINICION 1.7

Se dice que un conjunto ordenado $(A,\leq)$ está *totalmente ordenado* por la relación " $\leq$ " si, para todo par a, b de elementos de A, se cumple $a \leq b$ ó $b \leq a$.

DEFINICION 1.8

Sea $(A,\leq)$ un conjunto ordenado. Un elemento a de A se llama elemento *maximal* de $(A,\leq)$ si, para todo $x \in A$ tal que $x \geq a$, se tiene $x = a$; y se llama elemento *minimal* de $(A,\leq)$ si, para todo $x \in A$ tal que $x \leq a$, se tiene $x = a$.

PROPOSICION 1.9 (Lema de Zorn)

Si en un conjunto ordenado $(A,\leq)$ todo subconjunto totalmente ordenado tiene cota superior, existe un elemento maximal de A.

DEFINICION 1.10

Sea E un conjunto y $T \subset P(E)$. Se dice que *T es una topología en E* si:

i) $\Phi \in T$ y $E \in T$

ii) Toda reunión de elementos de T es un elemento de T.

iii) Toda intersección *finita* de elementos de T pertenece a T.

NOTAS:

1) Si T es una topología en E, el par (E,T) se llama *espacio topológico*, y E conjunto subyacente al espacio (E,T)

Se acostumbra designar al espacio topológico por su respectivo conjunto subyacente.

2) Si (E,T) es un espacio topológico, los elementos de T se llaman *conjuntos abiertos* ó simplemente *abiertos* para la topología T.

DEFINICION 1.11

Sea (E,T) un espacio topológico. Un conjunto $F \subset E$, se llama *cerrado* si $\complement_E F$ es abierto.

PROPOSICION 1.12

Sea (E,T) un espacio topológico, entonces:

i) E y ϕ son cerrados

ii) Toda intersección de cerrados es un cerrado.

iii) Toda reunión *finita* de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

DEFINICION 1.13

Sea (E,T) un espacio topológico y $x \in E$. Se dice que $V \subset E$ es un vecindario de x, si existe un conjunto $O \in T$, O abierto, tal que $x \in O \subset V$.

NOTA

Todo abierto que contiene a x es un vecindario de x.

NOTACION:

Denotamos por $\mathcal{N}(x)$ al conjunto de todos los vecindarios de x, en el espacio (E,T).

DEFINICION 1.14

Un espacio topológico (E,T) se llama *Separado* ó de Hausdorff, si para todo $x,y \in E$, $x \neq y$, existen $V_x \in \mathbb{N}(x)$ y $V_y \in \mathbb{N}(y)$ tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

NOTA

En la definición anterior los vecindarios pueden suponerse abiertos.

PROPOSICION 1.15

En un espacio topológico separado, toda parte reducida a un punto es un conjunto cerrado.

DEFINICION 1.16

Un espacio topológico X se llama compacto si:

i) X es separado

ii) Si de todo cubrimiento abierto de X, se puede extraer un cubrimiento finito de X.

NOTA

Un espacio topológico que cumple únicamente la condición ii), se llama q-compacto.

DEFINICION 1.17

Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Un punto $x \in E$ se dice que es adherente a A, si *todo* vecindario de x contiene al menos un punto de A (que puede ser x mismo).

El conjunto de todos los puntos adherentes a A, se llama *la adherencia de* A (ó la cerradura de A) y se denota por $\overline{A}$.

PROPOSICION 1.18

$\overline{A}$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a A, es decir, si B es cerrado tal que $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset B$.

PROPOSICION 1.19

Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Entonces:

a) $A \subset \overline{A}$

b) A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.

PROPOSICION 1.20

Sea E un espacio topológico y $A,B \in P(E)$. Entonces:

a) $A \subset B \rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (unión finita)

d) $\overline{\phi} = \phi$

DEFINICION 1.21

Sea E un espacio topológico y $A,B \in P(E)$. Se dice que A es denso en B si $B \subset \overline{A}$. En particular, A es denso en E si $\overline{A} = E$.

DEFINICION 1.22

Sea E un espacio topológico. Una *separación* de E es un par O_1, O_2 de abiertos no vacíos, tales que:

$O_1 \cap O_2 = \Phi$ y $O_1 \cup O_2 = E$.

DEFINICION 1.23

Un espacio topológico E se llama *conexo*, si *no* existe una - separación de E. En caso contrario se llama disconexo.

PROPOSICION 1.24

Sea E un espacio topológico. Definimos una relación " $\sim$ " - en E de la siguiente forma:

" $x \sim y$ si existe un conjunto conexo que contiene a ambos - elementos ". La relación " $\sim$ " es de equivalencia en E.

DEFINICION 1.25

Las clases de equivalencia inducidas por la relación de --- equivalencia, definida en la proposición anterior, se lla-- man *componentes conexas* del espacio topológico E.

PROPOSICION 1.26

Sea E un espacio topológico. Entonces:

i) Las componentes conexas de E forman una partición de E.

ii) Si para $x \in E$, $C(x)$ denota la componente conexa que con-- tiene a x, entonces $C(x) = \bigcup_{i \in I} A_i$, donde los A_i son *todos* los conjuntos conexos que contienen a x.

iii) $C(x)$ es conexo, para cada $x \in E$.

iv) $C(x)$ es cerrado, para cada $x \in E$.

PROPOSICION 1.27

Sea (E,T) un espacio topológico y $S \subset E$. Entonces:
$TS = \{ O \cap S \ / \ O \in T \}$ es una topología en S.

DEFINICION 1.28

La topología T_S de la proposición anterior se llama topología inducida en S por la topología T.
El espacio topológico (S,T_S) se llama subespacio del espacio topológico (E,T).

NOTA

Se acostumbra decir "el subespacio S de E", en lugar de "el subespacio (S,T_S) de (E,T).

DEFINICION 1.29

Sea E un espacio topológico y $S \subset E$ un subespacio de E, entonces $U \subset S$ es abierto, en S sí existe un abierto $O \subset E$, - tal que $U = O \cap S$.

PROPOSICION 1.30

Sea E un espacio topológico y S un subespacio de E. Un conjunto $A \subset S$ es cerrado en S si y sólo si, existe un conjunto cerrado $F \subset E$, tal que $A = F \cap S$.

NOTAS

Sea $A \subset S$. Entonces:

a) Si A es abierto en E, entonces es tambien abierto en S.

($A = A \cap S$).

b) Si S es abierto de E, y A es abierto de S, entonces A es abierto de E, como intersección de dos abiertos de E.

c) Si A es cerrado en E, entonces es cerrado en S.

($A = A \cap S$)

d) Si S es cerrado en E y A es cerrado en S, entonces A es cerrado en E, como intersección de dos cerrados de E.

PROPOSICION 1.31

Sea E un espacio topológico y S un subespacio de E. Entonces para $A \subset S$ se tiene:

$\overline{A}_S = \overline{A} \cap S$, donde $\overline{A}_S$ es la adherencia de A para la topología inducida y $\overline{A}$ es la adherencia de A en relación a E.

PROPOSICION 1.32

Sea X un espacio topológico.

$S \subset X$ un subespacio. Entonces A es cerrado en $S \leftrightarrow A = \overline{A} \cap S$, $\overline{A}$ es la adherencia de A con relación a X.

PROPOSICION 1.33

Sean X, Y espacios topológicos y $f: X \to Y$ una función. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

a) f es contínua en X.

b) Si $0 \subset Y$ es abierto, entonces $f^{-1}(0)$ es abierto.

c) Si $F \subset Y$ es cerrado, entonces $f^{-1}(F)$ es cerrado.

DEFINICION 1.34

Sean $+$ y $\cdot$ leyes de composición interna definidas sobre un conjunto A. Diremos que las mismas determinan sobre A una estructura de anillo ó también que A es (respecto de $+$ y $\cdot$) un *anillo* si existe $o \in A$ tal que:

i) $(A, +, o)$ es un grupo conmutativo.

ii) $(A, \cdot)$ es un semigrupo.

iii) $\cdot$ es distributiva con respecto a $+$.

Diremos también que:

a) A es un *anillo conmutativo* si $(A, \cdot)$ es un semigrupo conmutativo.

b) A es un *anillo con identidad* (UNITARIO) si existe $1 \in A$ tal que $1 \neq 0$ y $(A, \cdot, 1)$ es un semigrupo con identidad.

DEFINICION 1.35

Diremos que un subconjunto C de un anillo A es:

a) Un *ideal a la izquierda de* A si satisface:

i) $C \neq \Phi$

ii) $x \in C,\ y \in C \rightarrow x - y \in C$

iii) $x \in A,\ c \in C \rightarrow x.c \in C$

b) Un ideal a la derecha de A si satisface i) y ii) y además:

iv) $c \in C,\ x \in A \rightarrow c.x \in C$

c) Un *ideal de* A, si es ideal a la izquierda y a la derecha de A.

DEFINICION 1.36

Sea A un anille unitario y conmutativo y $E \subset A$. Denotaremos por E' al menor ideal que contiene a E, es decir,

$$E' = \bigcap_{i \in I} M_i \text{ , con } E \subset M_i \text{ , } M_i \text{ ideal, para todo } i.$$

OBSERVACION

De acuerdo a la definición, si I es un ideal tal que $E \subset I$ - se tiene entonces que $E' \subset I$.

DEFINICION 1.37

Sea A un anillo unitario y conmutativo. Un ideal I de A es primo si:

i) $I \neq A$

ii) Para todo x, y tal que $xy \in I$, entonces $x \in I$ ó $y \in I$.

DEFINICION 1.38

Sea llama nilradical de A, a la intersección de todos los - ideales primos de A. Lo denotaremos $\mathfrak{N}$.

PROPOSICION 1.39

Si M y N son ideales en un anillo A, su suma M + N es el -- conjunto de todos los $x + y$ donde $x \in M$, $y \in N$. Es el menor --- ideal que contiene a M y N.

PROPOSICION 1.40

La intersección de una familia cualquiera $(A_i)_{i \in I}$ de idea-- les es un ideal.

LEMA 1.41

Sean M,N ideales, I ideal primo, tales que $M\cap N\subset I$. Entonces $M\subset I$ ó $N\subset I$.

PRUEBA

Supongamos que $M\not\subset I$ y $N\not\subset I$, entonces existen $x\in M$, $y\in N$ tales que $x\notin I$, $y\notin I$, luego por ser I primo $xy\notin I$.

Tenemos entonces $xy\in M\cap N$ y $xy\notin I$, es decir, $M\cap N\not\subset I$, lo que contradice la hipótesis. De donde $M\subset I$ ó $N\subset I$.

CAPITULO II

Espacios Irreducibles

DEFINICION 2.1

Se dice que un *espacio topológico es irreducible* si toda intersección finita de abiertos no vacíos es no vacío.

PROPOSICION 2.2

Un espacio topológico irreducible es no vacío.

DEMOSTRACION

Sea X un espacio topológico irreducible. Sea $(A_i)_{i \in I}$ la familia de abiertos no vacíos de X tal que $I = \Phi$; luego por la convención de la definición 1.3 tenemos:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = X$$

PROPOSICION 2.3

Sea X un espacio topológico. Entonces X es irreducible sí y sólo si X es no vacío y $A_1 \cap A_2 \neq \Phi$ para todo par de abiertos no vacíos A_1, A_2 de X.

DEMOSTRACION

" $\rightarrow$ "

X es irreducible, luego $X \neq \Phi$ por la proposición 2.2

X es irreducible, luego $A_1 \cap A_2 \neq \Phi$ por la definición 2.1

" $\leftarrow$ "

Sea $(A_i)_{i \in I}$, I finito, una familia de abiertos no vacíos de X. Probemosque $\bigcap_{1}^{n} A_i \neq \Phi$

PRUEBA

a) Si $n = 2$, entonces $A1 \cap A_2 \neq \Phi$, por hipótesis.

b) Si $n = k$, entonces $\bigcap_{1}^{k} A_i \neq \Phi$ (hipótesis inductiva).

Si $n = k+1$, entonces $\bigcap_{1}^{k+1} A_i = \bigcap_{1}^{k} A_i \cap A_{k+1} \neq \Phi$; ya que $\bigcap_{1}^{k} A_i$ es abierto no vacío de X, lo mismo que A_{k+1}. Hemos probado entonces que si $n = k+1$ se tiene $\bigcap_{1}^{k+1} \neq \Phi$.

PROPOSICION 2.4

Sea X un espacio topológico. Entonces X es irreducible sí y sólo si X es no vacío y $C_1 U C_2 \neq X$ para todo par C_1, C_2 de cerrados distintos de X

DEMOSTRACION

" $\Rightarrow$ "

X es irreducible, entonces X es no vacío por la proposición 2.2

Sean C_1 y C_2 dos cerrados distintos de X, entonces C_1^c y C_2^c son abiertos no vacíos de X. Luego, por ser X irreducible, tenemos $C_1^c \cap C_2^c \neq \Phi$.

De donde $C_1 U C_2 \neq X$

" $\Leftarrow$ "

Sean A1 y A2 un par de abiertos no vacíos de X. Basta probar por la proposición 2.3, que $A_1 \cap A2 \neq \Phi$.

PRUEBA

Si A_1 y A_2 son abiertos no vacíos de X, entonces A_1^c y A_2^c -- son cerrados distintos de X.

Utilizando la hipótesis tenemos $A_1^c \cup A_2^c \neq X$.

De donde $A_1 \cap A_2 \neq \Phi$.

PROPOSICION 2.5

Si X es un espacio topológico, $X \neq \Phi$. Entonces las condiciones que siguen son equivalentes:

1) X es irreducible.

2) Todo abierto no vacío de X es denso en X.

3) Todo abierto de X es conexo.

DEMOSTRACION

1) $\rightarrow$ 2)

Sea O un abierto no vacío de X. Probemos que $\overline{O} = X$. (Definición 1.21)

PRUEBA

Sea $x \in X$. Luego:

Si $x \in O$, entonces $x \in \overline{O}$. Por a) de la proposición 1.19

Si $x \notin O$. Sea O_x un abierto de X tal que $x \in O_x$. Pero por la -- proposición 2.3, por ser X irreducible, resulta que $O_x \cap O$ - es no vacío. Luego, aplicando la definición 1.17, tenemos -

que $x \varepsilon \overline{O}$.

2) $\rightarrow$ 1)

Sean O_1 y O_2 abiertos no vacíos de X. Probemos que $O_1 \cap O_2 \neq \Phi$ (Proposicón 2.3)

PRUEBA

Sea $x \varepsilon O1$, luegó $x \varepsilon \overline{O2}$. Ya que por hipótesis $X = \overline{O}_2$
Entonces $O_1 \cap O_2 \neq \Phi$, por ser O_1 vecindario de x (Definición 1.17)

3) $\rightarrow$ 1)

Supongamos que X no es irreducible, entonces existen O_1 y - O2 abiertos no vacíos de X tales que $O_1 \cap O2 = \Phi$. Pero entonces resulta que $O_1 \cup O_2$ es un abierto no conexo de X (Definición 1.23)

1) $\rightarrow$ 3)

Supongamos que O es un abierto no conexo de X, entonces --- existen O_1 y O2 abiertos no vacíos de O tal que $O_1 \cap O2 = \Phi$. Pero O_1 y O_2 son abiertos no vacíos de X, por b) de la proposición 1.30. Luego X no es irreducible.

PROPOSICION 2.6

Un espacio separado es irreducible sólo si se reduce a un - punto.

DEMOSTRACION

Supongamos que X es un espacio topológico separado queposee más de un punto.

Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Entonces, por la definición 1.14, existen O_x y O_y abiertos no vacíos de X tales que $O_x \cap O_y = \Phi$. Luego X no es irreducible (Proposición 2.3)

DEFINICION 2.7

Sea X un espacio topológico.

$E \subset X$ es llamado irreducible sí el subespacio E de X es irreducible.

PROPOSICION 2.8

$E \subset X$, $E \neq \Phi$, es irreducible sí y sólo si para todo par de abiertos U, V de X que encuentran a E, $U \cap V$ intersecta también a E.

DEMOSTRACION

" $\Rightarrow$ "

Sea U y V dos abiertos de X tales que $U \cap E$ y $V \cap E$ son abiertos no vacíos de E (Definición 1.29)

Entonces $(U \cap E) \cap (V \cap E) \neq \Phi$, por ser E irreducible.

Es decir, $(U \cap V) \cap E \neq \Phi$.

" $\Leftarrow$ "

Sean A_1 y $A2$ abiertos no vacíos de E. Probemos que $A_1 \cap A2 \neq \Phi$.

PRUEBA

Por ser A_1 y $A2$ abiertos de E existen U y V abiertos de X tales que:

$A_1 = U \cap E$ y $A_2 = V \cap E$.

Entonces $A_1 \cap A2 = (U \cap E) \cap (V \cap E)$

$A_1 \cap A2 = (U \cap V) \cap E \neq \Phi$. Por hipótesis.

Luego, $A_1 \cap A_2 \neq \phi$.

PROPOSICION 2.9

Todo subespacio irreducible es conexo.

DEMOSTRACION

Sea X un espacio topológico, $E \subset X$, E irreducible. Supongamosque E no es conexo, entonces existen O_1 y O_2 abiertos de E tales que $O_1 \cap O_2 = \Phi$ y $O_1 \cup O_2 = E$.
Entonces, aplicando la definición 2.1, resulta que E no es irreducible.

PROPOSICION 2.10

Sea X un espacio topológico.
$E \subset X$, $E \neq \Phi$, es irreducible sí y sólo si para todo par de cerrados F, G de X tales que $E \subset F \cup G$, se tenga que $E \subset F$ ó $E \subset G$.

DEMOSTRACION

" $\rightarrow$ "

$$
\begin{aligned}
E \subset F \cup G &\rightarrow E \cap (F \cup G)^c = \Phi \\
&\rightarrow E \cap F^c \cap G^c = \Phi \\
&\rightarrow (E \cap F^c) \cap (E \cap G^c) = \Phi \\
&\rightarrow E \cap F^c = \Phi \text{ ó } E \cap G^c = \Phi. \text{ Por ser E irreducible (Proposición 2.3)} \\
&\rightarrow E \subset F \text{ ó } E \subset G
\end{aligned}
$$

" $\leftarrow$ "

Supongamos que E no es irreducible, es decir, existen A_1 y

A_2 abiertos no vacíos de E tales que $A1 \cap A2 = \Phi$.

Pero $A_1 = E \cap O_1$, con O_1 abierto no vacío de X.

$A_2 = E \cap O2$, con O_2 abierto no vacío de X.

Entonces $A_1 \cap A_2 = E \cap (O_1 \cap O2) = \Phi$.

$E \cap (O_1 \cap O_2) = \Phi \rightarrow E c (O_1 \cap O_2)^c$

$\rightarrow E c O_1^c \cup O_2^c$

Pero O_1^c y O_2^c son cerrados de X que cumplen con la hipótesis, luego $E c O_1^c$ ó $E c O_2^c$

$\rightarrow$ $E \cap O_1 = \Phi$ ó $E \cap O2 = \Phi$, es decir,

$A_1 = \Phi$ ó $A_2 = \Phi$ $(\rightarrow \leftarrow)$

PROPOSICION 2.11

Sea $E \subset X$, E irreducible. Si $(F_i)_{i \leq n}$ es una familia finita de cerrados en X tal que $E c \bigcup_1^n F_i$, existe un índice i tal que $E \subset F_i$.

DEMOSTRACION

a) Si n = 1, entonces $E \subset F_1$.

b) Si n = k, entonces existe $i \leq k$ tal que

$E \subset F_i$ (hipótesis inductiva)

Probemos que si n = k+1, entonces existe $i \leq k+1$ tal que $E \subset F_i$.

PRUEBA

$$E \subset \bigcup_{1}^{k+1} F_i$$

$$E \subset \bigcup_{1}^{k} F_i \cup F_{k+1}$$

Por la proposición 2.10 $E \subset \bigcup_{1}^{k} F_i$ ó $E \subset F_{k+1}$

Si $E \subset \bigcup_{1}^{k} F_i$, entonces por la hipótesis inductiva existe $i \leq K$ tal que $E \subset F_i$

Si $E \not\subset \bigcup_{1}^{k} F_i$, entonces $E \subset F_{k+1}$

PROPOSICION 2.12

En un espacio topológico X, para que un conjunto E sea irreducible es necesario y suficiente que su adherencia $\overline{E}$ lo sea.

DEMOSTRACION

" $\Rightarrow$ "

Sean F y G dos cerrados de X tales que $\overline{E} \subset F \cup G$. Probemos, por la proposición 2.10, que $\overline{E} \subset F$ ó $\overline{E} \subset G$.

PRUEBA

$\overline{E} \subset F \cup G$ y $E \subset \overline{E}$ (Proposición 1.19 a)). Luego $E \subset F \cup G$. Pero E es irreducible, entonces por la proposición 2.10, $E \subset F$ ó $E \subset G$. Aplicando ahora la proposición 1.18 se tiene que $\overline{E} \subset F$ ó $\overline{E} \subset G$, por ser F y G cerrados.

" ← "

Sean F y G dos cerrados de X tales que $E \subset F \cup G$. Pero $F \cup G$ es cerrado, luego $\overline{E} \subset F \cup G$. Entonces por hipótesis se tiene $\overline{E} \subset F$ ó $\overline{E} \subset G$. De donde $E \subset F$ ó $E \subset G$

" ← " (Otra forma)

Sean O_1 y o2 abiertos de X tales que $O_1 \cap E \neq \Phi$ y $O2 \cap E \neq \Phi$. Probemos que $(O_1 \cap O2) \cap E \neq \Phi$ (Proposición 2.8)

PRUEBA

$O_1 \cap E \neq \Phi$ y $O_1 \cap E \subset O_1 \cap \overline{E} \rightarrow O_1 \cap \overline{E} \neq \Phi$

$O_2 \cap E \neq \Phi$ y $O_2 \cap E \subset O_2 \cap \overline{E} \rightarrow O_2 \cap \overline{E} \neq \Phi$

Luego por hipótesis $(O_1 \cap O_2) \cap \overline{E} \neq \Phi$

De donde $(O_1 \cap O_2) \cap E \neq \Phi$, ya que si $x \varepsilon (O_1 \cap O_2) \cap \overline{E}$, entonces $O_1 \cap O_2$ es un vecindario de x y x es un punto adherente de E.

PROPOSICION 2.13

a) Si X es un espacio irreducible, todo abierto no vacío O de X es irreducible.

b) Sea $(O_\alpha)_{\alpha \varepsilon A}$ un recubrimiento no vacío de un espacio topológico X formado por abiertos tal que $O_\alpha \cap O_\beta \neq \Phi$ para todo α, β. Si los O_α son irreducibles, X es irreducible.

DEMOSTRACION

a) Sea O un abierto no vacío de X. Por 2) de la proposición

2.5 resulta que $\overline{O} = X$. Luego, por la proposición 2.12, tenemos que O es irreducible.

b) Por la proposición 2.5 basta probar que para todo abierto V de X, $V \neq \phi$, V es denso en X.

PRUEBA

Sea V un abierto de X, $V \neq \Phi$. Existe al menos un índice γ tal que $V \cap O_\gamma \neq \phi$.

Como $O_\alpha \cap O_\gamma \neq \phi$ para todo α (por hipótesis).

Y además $V \cap O_\gamma$ es denso en O_γ (Por ser los O_α irreducibles), es decir, $O_\gamma = \overline{V \cap O_\gamma}$.

Se tiene entonces que si $x \in O_\alpha \cap O_\gamma$, todo vecindario de x posee al menos un punto de $V \cap O_\gamma$.

De donde $(O_\alpha \cap O_\gamma) \cap V \neq \phi$ para todo α. Luego $O_\alpha \cap V \neq \phi$ para todo α.

$O_\alpha \cap V$ es denso en O_α, para todo α.

$\rightarrow \quad O_\alpha \subset \overline{O_\alpha \cap V} \subset \overline{O}_\alpha \cap \overline{V}$

$\rightarrow \quad O_\alpha \subset \overline{O}_\alpha \cap \overline{V}$

$\rightarrow \quad \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} (\overline{O}_\alpha \cap \overline{V})$

$\rightarrow \quad \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} \overline{O}_\alpha \cap \overline{V}$

$\rightarrow \quad \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \subset \overline{V}$

$\rightarrow \quad X \subset \overline{V}$, es decir, V es denso en X.

PROPOSICION 2.14

Sean X, Y dos espacios topológicos.

$f: X \to Y$ una función contínua.

Entonces para toda parte *irreducible* E de X, f(E) es irreducible en Y.

DEMOSTRACION

Sean O y V dos abiertos de Y que intersectan a f(E). Probemos por la proposición 2.8 que $O \cap V$ intersecta también a f(E).

PRUEBA

Si O y V son abiertos de Y que intersectan a f(E), por la proposición 1.33 $f^{-1}(O)$ y $f^{-1}(V)$ son dos abiertos de X que encuentran a E. Por ser E irreducible $f^{-1}(O) \cap f^{-1}(V)$ encuentra a E. Luego $f(f^{-1}(O) \cap f^{-1}(V) \cap E) \neq \Phi$.

Pero $f(f^{-1}(O) \cap f^{-1}(V) \cap E) \subset f(f^{-1}(O)) \cap f(f^{-1}(V)) \cap f(E)$

$$= O \cap V \cap f(E)$$

Entonces $(O \cap V) \cap f(E) \neq \Phi$.

DEFINICION 2.15

Se llama componente irreducible de un espacio topológico X toda parte irreducible maximal de X. Es decir, $E \subset X$ irreducible es una componente irreducible si para todo A irreducible de X que cumple $E \subset A$ se tiene $A = E$.

PROPOSICION 2.16

Sea X un espacio topológico. Toda componente irreducible - $E \subset X$ es cerrada en X.

DEMOSTRACION

Sea $E \subset X$ una componente irreducible.

Sabemos que $E \subset \overline{E}$ luego, por hipótesis, $E = \overline{E}$. Entonces E es cerrado en X.

PROPOSICION 2.17

Sea X un espacio topológico.

a) Toda parte irreducible de X está contenida en una componente irreducible.

b) X es unión de sus componentes irreducibles.

DEMOSTRACION

a) Sea $M \subset X$ una parte irreducible.

Sea $I = \{F \subset X \,/\, F$ es irreducible y $M \subset F\}$

$I \neq \emptyset$, ya que $M \in I$.

Sea $G \subset I$ totalmente ordenado por inclusión.

Sea $E = \bigcup_{F \in G} F$, luego $M \subset E$

Probemos que E es irreducible.

PRUEBA

Sean U y V dos abiertos de X que encuentran a E, entonces existen F_1 y F_2 en G tales que F_1 encuentra a U y F_2 encuentra a V. Pero como G es totalmente ordenado, supongamos que $F_1 \subset F_2$, entonces F_2 encuentra a U y a V; como F_2 es irreducible $U \cap V$ encuentra a F_2, luego $U \cap V$ encuentra a E.

Por la proposición 2.8, hemos probado que E es irreducible. Observemos que E es una cota superior de G, luego por el lema de Zorn (Proposición 1.9) existe $\mathcal{M}$ maximal de I tal que $M \subset \mathcal{M}$

Probemos ahora que $\mathcal{M}$ es maximal de X.

PRUEBA

Sea T en X irreducible tal que $\mathcal{M} \subset T$. Resulta entonces $M \subset T$, es decir, $T \in I$. Luego por ser $\mathcal{M}$ maxinal de I tenemos $\mathcal{M} = T$.

b) Probemos que $X \subset \bigcup F$, F componente irreducible de X.

PRUEBA

Sabemos que $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$, pero por la proposición 2.8 $\overline{\{x\}}$ es irreducible para cada $x \in X$. Entonces $\{x\} \subset F$, F componente irreducible, por la parte a). Luego $\bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup F$, F componente --- irreducible de X. De donde $X \subset \bigcup F$.

COROLARIO

Toda componente conexa de un espacio topológico X es unión de componentes irreducibles de X.

DEMOSTRACION

Sea C una componente conexa de X.

Sabemos que $C = \bigcup_{x \in C} \{x\}$; pero $\{x\}$ es irreducible, luego por a)

de la proposición anterior se tiene $\overline{\{x\}} \subset F_x$ componente irreducible de X. Luego $C \subset \bigcup_{x \in C} F_x$.
Por otro lado sabemos que todo subespacio irreducible es conexo (Proposición 2.9), luego $F_x \subset C$, para cada $x \in C$, ya que C es conexo maximal que contiene a x.

PROPOSICION 2.18

Sea X un espacio topológico, $(P_i)_{i \leq n}$ un recubrimiento finito de X formado por conjuntos cerrados irreducibles. Entonces las componentes irreducibles de X son elementos maximales del conjunto de los P_i.

DEMOSTRACION

Podemos limitarnos al caso en que los P_i son tales que $P_i \not\subset P_j$, $\forall i, j \leq n$, $i \neq j$. Ya que si $P_i \subset P_j$, para todo $A \subset X$ que cumple $A \subset P_i$, se tiene $A \subset P_j$.
Si E es una parte irreducible de X, se tiene que $E \subset \bigcup_1^n P_i$, luego $E \subset P_i$ para algún i. Por la proposición 2.11. En particular si E es componente irreudcible entonces $E = P_i$, algún i.

COROLARIO

Sea X un espacio topológico, E un subespacio de X con sólo un número finito de componentes irreducibles diferentes Q_i, $i \leq n$; entonces las componentes irreducibles de $\overline{E}$ en X son las adherencias $\overline{Q}_i$ y se tiene $\overline{Q}_i \neq \overline{Q}_j$, $i \neq j$.

DEMOSTRACION

$E = \bigcup_1^n Q_i$, Q_i componente irreducible, $Q_i \neq Q_j$ si $i \neq j$, Entonces, por e) de la proposición 1.20 $\overline{E} = \bigcup_1^n \overline{Q}_i$. Además $\overline{Q}_i$ es irreducible por la proposición 2.12.

Luego en virtud de la proposición 2.18 las componentes irreducibles de $\overline{E}$ son los $\overline{Q}_i$.

Probemos ahora que $\overline{Q}_i \neq \overline{Q}_j$, $i \neq j$.

PRUEBA

Q_i es cerrado en E entonces, por la proposición 1.32, $\overline{Q}_i \cap E = Q_i$, con $\overline{Q}_i$ adherencia de Q_i en X.

Supongamos que $\overline{Q}_i = \overline{Q}_j$, $i \neq j$. Entonces $\overline{Q}_i \cap E = \overline{Q}_j \cap E$. Luego $Q_i = Q_j$, $i \neq j$ $(\rightarrow \leftarrow)$.

PROPOSICION 2.19

Sea X un espacio topológico que tiene sólo un número finito de componentes irreducibles A_i distintas, $i \leq n$.

Sea $O_i = \complement \bigcup_{i \neq j} A_j$

Entonces, los O_i son abiertos no vacíos de X, irreducibles, 2 a 2 disjuntos, y tales que su reunión es denso en X.

DEMOSTRACION

a) $O_i = \complement \bigcup_{i \neq j} A_j = \bigcap_{i \neq j} \complement A_j$ es un abierto de X, ya que, por la proposición 2.16, toda componente irreducible es cerrada.

b) Probemos que $O_i \subset A_i$.

PRUEBA

Supongamos que $O_i \not\subset A_i$, entonces existe x tal que,

$x \in O_i$ y $x \notin A_i$

$x \in O_i$ y $x \in \bigcup_{i \neq j} A_j$

$x \in O_i$ y $x \notin \complement \bigcup_{i \neq j} A_j$

$x \in O_i$ y $x \notin O_i$ $(\rightarrow \leftarrow)$

c) probemos que O_i es no vacío.

PRUEBA

Por hipótesis $A_i \not\subset \bigcup_{i \neq j} A_j$, luego existe x tal que:

$x \in A_i$ y $x \notin \bigcup_{i \neq j} A_j$

$x \in A_i$ y $x \in \complement \bigcup_{i \neq j} A_j$

$x \in A_i$ y $x \in O_i$

d) Por a) y b) tenemos que $O_i \subset A_i$ y O_i es abierto de X, luego es abierto de A_i. Por a) de la proposición 1.30.

e) Por d) y c) sabemos que O_i es un abierto no vacío de A_i. Luego O_i es denso en A_i, por ser A_i irreducible (Proposición 2.5), es decir $A_i = \overline{O}_i$. Entonces o_i es irreducible por la proposición 2.12.

f) Supongamos que $O_i \cap O_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, entonces existe $x \in X$ - tal que:

$x \in O_i \cap O_j$

$\rightarrow$ $x \in O_i$ y $x \in O_j$

$\rightarrow$ $x \in \complement \bigcup_{i \neq k} A_k$ y $x \in A_j$, por b)

$\rightarrow$ $x \notin \bigcup_{i \neq k} A_k$ y $x \in A_j$

$\rightarrow$ $x \notin A_k$, $i \neq k$ y $x \in A_j$

En particular $x \notin A_j$, ya que $i \neq j$ y $x \in A_j$ $(\rightarrow \leftarrow)$

De donde $O_i \cap O_j = \Phi$, $i \neq j$.

g) Por e) tenemos que $A_i = \overline{O_i}$, para $i \leq n$

$\rightarrow$ $\bigcup_1^n A_i = \overline{\bigcup O_i}$

$\rightarrow$ $X = \bigcup_1^n O_i$, por c) de la proposición 1.20

PROPOSICION 2.20

Sea O un abierto de un espacio topológico X. La aplicación $V \mapsto \overline{V}$ es una biyección del conjunto de las partes irreducibles de O, cerradas en O, sobre el conjunto de las partes irreducibles de X, cerradas en X y que intersectan a O.

DEMOSTRACION

Sea X un espacio topológico y O un abierto de X.

Sea $\mathcal{O} = \{V \subset O / V$ es irreducible y cerrado en $O\}$

Probemos que si $V \in \mathcal{O}$, entonces:

i) $\overline{V}$ es irreducible de X

ii) $\overline{V}$ es cerrado en X

iii) $\overline{V}$ intersecta a O

PRUEBA

i) Sean O_1 y O_2 dos abiertos no vacíos de $\overline{V}$. Entonces -- existen B1 y B2 abiertos de X tales que $O_1 = \overline{V}\cap B_1$ y $O_2 = \overline{V}\cap B_2$.

Luego, por definición de adherencia, $V\cap B_1 \neq \Phi$ y $V\cap B_2 \neq \Phi$.

Además $V\cap B_1$ y $V\cap B_2$ son abiertos de V, pero V es irreducible; entonces $(V\cap B_1)\cap(V\cap B_2) \neq \Phi$.

Se tiene también que

$\Phi \neq (V\cap B1)\cap(V\cap B2) \subset (\overline{V}\cap B1)\cap(\overline{V}\cap B2)$, es decir, $\Phi \neq O_1\cap O_2$

Aplicando entonces la proposición 2.3 se tiene que $\overline{V}$ es irreducible.

ii) $\overline{V}$ es cerrado en X, por definición de adherencia.

iii) Como V es cerrado en O, aplicando la proposición 1.32, tenemos que $V = \overline{V}\cap O$.

Como V es irreducible, por la proposición 2.2, se tiene que $V \neq \Phi$. Luego $\overline{V}\cap O \neq \Phi$.

Si hacemos $\mathcal{Z} = \{Z\subset X/\ Z$ es irreducible, cerrado, y $Z\cap O \neq \Phi\}$, entonces hemos probado que $f: \mathcal{O} \to \mathcal{Z}$ está bien definida.

$$V \rightsquigarrow \overline{V}$$

Probemos ahora que $g: \mathcal{Z} \to \mathcal{O}$ está bien definida, es decir,

$$Z \rightsquigarrow Z\cap O$$

si $Z\in\mathcal{Z}$, entonces:

i) $Z\cap O$ es irreducible en O

ii) $Z\cap O$ es cerrado en O.

PRUEBA

i) Sean Z_1 y Z_2 dos abiertos no vacíos de $Z\cap O$. Entonces existen $B1$ y $B2$ abiertos de X tales que

$Z_1 = (Z\cap O)\cap B1$ y $Z_2 = (Z\cap O)\cap B2$

$Z_1 = Z\cap(O\cap B1)$ y $Z_2 = Z\cap(O\cap B2)$

Pero $(O\cap B1)$ y $(O\cap B2)$ son abiertos de X (Intersección finita de abiertos). Luego Z_1 y Z_2 son abiertos de Z.

Entonces, por ser Z irreducible, $Z_1\cap Z_2 \neq \Phi$.

De donde $Z\cap O$ es irreducible.

ii) Como Z es cerrado en X, entonces $Z\cap O$ es un cerrado de O.

Probemos que g es la función inversa de f, es decir,

$g\circ f = f\circ g = I$

i) $(g\circ f)_{(V)} = g(f(V)) = g(\overline{V}) = \overline{V}\cap O = V$ (Proposición 1.32)

Luego $(g\circ f)_{(V)} = V$

ii) $(f\circ g)_{(Z)} = f(g(Z)) = f(Z\cap O) = \overline{Z\cap O}$

Probemos que $\overline{Z\cap O} = Z$

PRUEBA

Z es irreducible y $Z\cap O$ es un abierto no vacío de Z (Por ser O un abierto de X) entonces, por la proposición 2.5, $Z\cap O$ es denso en Z; es decir $Z = \overline{Z\cap O}$

De donde $(f \circ g)_{(Z)} = Z$.

Un ejemplo de espacio topológico irreducible.

PROPOSICION 2.21

Sea A un anillo unitario y conmutativo, X el conjunto de ideales primos de A. Para cada subconjunto E de A definimos $V(E) = \{I \in X / E \subset I\}$. Entonces $\mathcal{F} = \{V(E) / E \subset A\}$ satisface los axiomas de los conjuntos cerrados en un espacio topológico. (Proposición 1.12)

DEMOSTRACION

i) Probemos que ϕ, $X \in \mathcal{F}$ [i) de proposición 1.12]

$V(A) = \{I \in X / A \subset I\} = \phi$

$V(\phi) = \{I \in X / \phi \subset I\} = X$

ii) Sea $\{V(E_i)\}_{i \in j}$ una familia de elementos de $\mathcal{F}$, $E_i \subset A$.

Probemos que $\bigcap_{i \in j} V(E_i) \in \mathcal{F}$ [ii) de proposición 1.12]

PRUEBA

$$\begin{aligned}
\text{Sea } I \in \bigcap_{i \in j} V(E_i) \quad &\leftrightarrow \quad I \in V(E_i), \text{ para todo } i \in J \\
&\leftrightarrow \quad E_i \subset I \\
&\leftrightarrow \quad \bigcup_{i \in j} E_i \subset J \\
&\leftrightarrow \quad I \in \{S \in X / \bigcup_{i \in j} E_i \subset S\} \\
&\leftrightarrow \quad I \in V(\bigcup_{i \in j} E_i)
\end{aligned}$$

iii) Sean E1, E2 e A. Probemos que $V(E1) \cup V(E_2) \in \mathcal{F}$

[iii) de la proposición 1.12]

Con este objeto necesitamos probar antes el siguiente lema.

LEMA 2.22

Sea $E \subset A$ y E' el menor ideal que contiene a E (Definición 1.36). Entonces $V(E) = V(E')$.

DEMOSTRACION

" $\subset$ "

Sea $I \in V(E)$, entonces por definición $E \subset I$; pero por ser E' el menor ideal que contiene a E tenemos que $E' \subset I$. Luego - $I \in V(E')$

" $\supset$ "

Sea $I \in V(E')$, entonces $E' \subset I$. Además, por definición $E \subset E'$; luego $E \subset I$, es decir, $I \in V(E)$.

PRUEBA DE iii)

a) Por el lema 2.22 se tiene que si E_1, $E2 \subset A$ entonces $V(E1) \cup V(E2) = V(E_1') \cup V(E_2')$

b) Probemos ahora que $V(E_1') \cup V(E_2') = V(E_1' \cap E_2')$

PRUEBA "$\subset$"

$$
\begin{aligned}
I \in V(E_1') \cup V(E_2') &\rightarrow E_1' \subset I \quad ó \quad E_2' \subset I \\
&\rightarrow E_1' \cap E_2' \subset I \\
&\rightarrow I \in V(E_1' \cap E_2')
\end{aligned}
$$

" $\supset$ "

$I \in V(E1' \cap E_2') \rightarrow E_1' \cap E_2' \subset I$

Aplicando el lema 1.40 tenemos que $E'_1 \subset I$ ó $E'_2 \subset I$. Entonces $I \in V(E'_1)$ ó $I \in V(E'_2)$.
De a) y b) concluimos que $V(E1) \cup V(E2) = V(E'_1 \cap E'_2)$

DEFINICION 2.23

Con la topología definida en 2.21, A es llamado "espectro primo" de A y se denota Spec(A).

NOTA

Observemos que si $E \subset A$, entonces $V(E)$ es un cerrado de F. Luego, por la definición 1.11, *los abiertos* de la topología espectral son de la forma $V^c(E)$.

PROPOSICION 2.24

Spec (A) es irreducible sí y sólo sí el nilradical de A es un ideal primo.

DEMOSTRACION

" $\Rightarrow$ "

Sea N el nilradical de A. Probemos que si $xy \in N$, entonces $x \in N$ ó $y \in N$, que es equivalente a probar que, si $x \notin N$ y $y \notin N$ entonces $xy \notin N$.

PRUEBA

Sean $x, y \in A$ tales que $x \notin N$ y $y \notin N$, Entonces existen J, I ideales primos tales que $x \notin J$ y $y \notin I$.
Luego $J \in V^c(\{x\})$ y $I \in V^c(\{y\})$. Sabemos que $V^c(\{x\})$ y $V^c(\{y\})$ son abiertos no vacíos, pero por hipótesis Spec(A)

es irreducible, entonces por la proposición 2.3, $V^c(\{x\}) \cap V^c(\{y\}) \neq \Phi$. Entonces existe $T \in V^c(\{x\}) \cap V^c(\{y\})$ tal que $x \notin T$ y $y \notin T$. Luego $xy \notin T$, por ser T ideal primo. De donde $xy \notin \mathbb{N}$, por ser $\mathbb{N}$ la intersección de todos los ideales primos de A.

" $\Leftarrow$ "

Sean V_1, V_2 abiertos no vacíos de $\mathbb{F}$. Entonces existen E_1 y $E_2 \subset A$ tales que

$$V_1 = V^c(E_1)$$
$$V_2 = V^c(E_2)$$

Sean $I_1 \in V_1$ y $I_2 \in V_2$, entonces $E_1 \not\subset I_1$ y $E_2 \not\subset I_2$. Luego, por definición de $\mathbb{N}$, $E_1 \not\subset \mathbb{N}$ y $E_2 \not\subset \mathbb{N}$ lo que es equivalente a $\mathbb{N} \in V_1$ y $\mathbb{N} \in V_2$, es decir, $\mathbb{N} \in V_1 \cap V_2$. Aplicando la proposición 2.3 se tiene entonces que Spec(A) es irreducible.

CAPITULO III

ESPACIOS TOPOLÓGICOS NOETHERIANOS

DEFINICION 3.1

Un espacio topológico X es llamado noetheriano si todo conjunto no vacío de cerrados de X, ordenado por inclusión, posee un elemento minimal.

PROPOSICION 3.2

Sea X un espacío topológico. Entonces:

a) X es noetheriano sí y sólo si todo conjunto no vacío de abíertos, ordenado por inclusión, posee un maximal.

b) X es noetheriano sí y sólo si toda sucesión decreciente de cerrados es estacionaria.

c) X es noetheriano sí y sólo si toda sucesión creciente de abíertos es estacionaria.

DEMOSTRACION

a) " $\Rightarrow$ "

Sea $E = \{O_i\}_{i\in I}$ un conjunto no vacío de abiertos de X, ordenado por ínclusión. Entonces el conjunto $E^c = \{O_i^c\}_{i\in I}$ es no vacío de cerrados de X, ordenado por inclusión. Luego, por hipótesis, existe $N\in E^c$ tal que $N \subset O_i^c$ para todo $i\in I$, lo que implica $O_i \subset N^c$, para todo $i\in I$.

De donde N^c es maximal de E.

" ← "

Similar a la anterior.

b) " → "

Sea $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de X. Por hipótesis existe C_k tal que si $C_i \subset C_k$, algún $i\in\mathbb{N}$ - se tiene entonces que $C_i = C_k$. Además como la sucesión es decreciente se tiene que, para todo $i \geq k$, $C_k = C_i$. Luego $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es estacionaria.

" ← "

Supongamos que X no es noetheriano, entonces existe -- $J = \{C_i\}_{i\in I}$ un conjunto no vacío de cerrados de X, ordenado por inclusión, que no posee elemento minimal. Luego:

$C_1 \in J$ → existe $C_2 \in J$ tal que $C_2 \subset C_1$, ya que C_1 no es minimal.

→ existC C3εJ tal que $C3 \subset C_2$, ya que C_2 no es minimal.

→ existe $C_4 \in J$ tal que $C_4 \subset C_3$, ya que C_3 no es minimal.

.

.

.

→ existe $C_i \in J$ tal que $C_i \subset C_{i-1}$, ya que C_{i-1} no es minimal.

tenemos entonces que

$\ldots \subset C_i \subset C_{i-1} \subset \ldots \subset C_2 \subset C_1$

es una sucesión decreciente de cerrados no estacionaria.

c) " → "

Sea $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de abiertos de X. Por hipótesis existe $i_0 \in\mathbb{N}$ tal que para todo $i\in\mathbb{N}$ se tiene -

$O_i \subset O_{i_o}$. Como la sucesión es creciente se tiene que para todo $i \geq i_o$, $O_{i_o} = O_i$. Luego $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es estacionaria

" $\Leftarrow$ "

Supongamos que X no es noetheriano, entonces existe $M = \{O_i\}_{i \in I}$ un conjunto no vacío de abiertos de X, ordenado por inclusión, que no posee elemento maximal.

Luego:

$O_1 \in M \rightarrow$ Existe $O_2 \in M$ tal que $O_1 \subset O_2$, ya que O_1 no es maximal.

$\rightarrow$ Existe $O_3 \in M$ tal que $O_2 \subset O_3$, ya que O_2 no es maximal.

$\rightarrow$ Existe $O_4 \in M$ tal que $O_3 \subset O_4$, ya que O_3 no es maximal.

.
.
.

$\rightarrow$ Existe $O_i \in M$ tal que $O_{i-1} \subset O_i$, ya que O_{i-1} no es maximal.

Tenemos entonces que

$O_1 \subset O_2 \subset O_3 \subset \ldots \subset O_{i-1} \subset O_i \subset \ldots$

es una sucesión creciente de abiertos no estacionaria.

PROPOSICION 3.3

a) Todo subespacio de un noetheriano es noetheriano.

b) Sea $(A_i)_{i \in I}$ un recubrimiento finito de un espacio topológico X. Si los A_i son noetherianos, X es noetheriano.

DEMOSTRACION

a) Sea X un espacio topológico noetheriano y $A \subset X$ un subespacio de X.

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ un conjunto no vacío de cerrados de A ordenado por inclusión. Entonces $A_i = C_i \cap A$, donde cada C_i es un cerrado de X. Para todo $i \in I$.

Tenemos entonces que $\{C_i\}_{i \in I}$ es un conjunto no vacío de cerrados de X, luego por ser X noetheriano existe C_k -- tal que si $C_i \subset C_k$, algún $i \in I$, entonces $C_i = C_k$.
Por otro lado $A_i \subset A_k$, algún $i \in I$

$\rightarrow \quad C_i \cap A \subset C_k \cap A$

$\rightarrow \quad C_i \subset C_k$

$\rightarrow \quad C_i = C_k$

$\rightarrow \quad C_i \cap A = C_k \cap A$

$\rightarrow \quad A_i = A_k$, algún $i \in I$.

De donde A_k es minimal de $\{A_i\}_{i \in I}$. Luego A es noetheriano.

b) Sea $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de X.
Por hipótesis $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, I finito, A_i es noetheriano.
Sea $E_i = (G_n \cap A_i)_{n \in \mathbb{N}}$, $i \in I$.
Luego para cada $i \in I$, E_i es una sucesión decreciente de cerrados de A_i, pero A_i es noetheriano, entonces cada E_i es estacionario.
Luego para cada i existe n_{o_i} tal que para todo $n \geq n_{o_i}$:
$G_n \cap A_i = G_{n_{o_i}} \cap A_i$
Llamando $n_o = \max_{i \in I} \{n_{o_i}\}$ se tiene que para todo $n \geq n_o$:
$G_n \cap A_i = G_{n_o} \cap A$, para todo i.
Pero $G_n = \bigcup_{i \in I} (G_n \cap A_i)$

Luego $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estacionaria.

De donde X es noetheriano.

PROPOSICION 3.4

Sea X un espacio topolótico, entonces las proposiciones -- que siguen son equivalentes:

i) X es noetheriano

ii) Todo abierto de X es q- compacto.

iii) Todo subespacio de X es q- compacto.

DEMOSTRACION

i) → iii)

Basta probar que todo noetheriano es q- compacto ya que, - por a) de la proposición 3.3, todo subespacio de un noetheriano es noetheriano.

PRUEBA

Sea $(O_i)_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X, es decir,

$X = \bigcup_{i\in I} O_i$, O_i abierto.

Sea $\mathcal{O} = \{\bigcup_{i\in H} O_i / H \subset I,\ H \text{ finito}\}$ un conjunto de abiertos de X no vacío, ordenado por inclusión.

Entonces, por hipótesis, $\mathcal{O}$ admite un elemento maximal,

$V = \bigcup_{i\in H} O_i$

Por definición $V \cup O_i = V$, para todo i. Además si $x\in X$, entonces existe O_k abierto de X tal que $x\in O_k$, luego $x\in V\cup O_k = V$.

Es decir, $V = X$.

De donde X es q-compacto

Hemos probado entonces que todo noetheriano es q-compacto.

iii) $\rightarrow$ ii)

Inmediato

ii) $\rightarrow$ i)

Sea $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de abiertos de X. Luego $V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i$ es abierto, entonces q-compacto (Por hipótesis). Luego existe $I \subset \mathbb{N}$, I finito tal que $V = \bigcup_{i\in I} O_i$. Pero por ser $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ creciente, existe $n_0 \in I$ tal que $V = O_{n_0}$. Entonces para todo $i \geq n_0$, $O_i = O_{n_0}$, es decir, $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es estacionaria.

De donde X es noetheriano.

LEMA 3.5

"Principio de recurrencia noetheriano"

Sea E un conjunto ordenado tal que toda parte no vacía admite un elemento minimal. Sea $F \subset E$ con la propiedad siguiente:

Si $a\in E$ es tal que la relación $x < a$ implique $x\in F$, entonces $a\in F$. Se tiene entonces $F = E$.

DEMOSTRACION

Supongamos $E \neq F$. Luego $H = \{x\in E / x\notin F\} \neq \phi$.

Entonces, por hipótesis, existe $a\in H$, a minimal. Luego

$x < a \rightarrow x\notin H \rightarrow x\in F$

Además, por hipótesis, se tiene también que para todo x:

$(x < a \rightarrow x \in F) \rightarrow a \in F$. De donde $a \in F$ $(\rightarrow \leftarrow)$.

PROPOSICION 3.6

Si X es noetheriano, entonces X es unión finita de cerrados irreducibles.

DEMOSTRACION

Sea $E = \{A \subset X / A$ es cerrado$\}$ ordenado por inclusión.

$F = \{A \subset X / A$ es unión finita de partes cerradas irreducibles$\}$

Tenemos entonces que $F \subset E$.

Sea $J \in E$ tal que $A \subset J$ entonces $A \in F$. Probemos que $J \in F$. (lema 3.5)

PRUEBA

a) Si J es irreducible entonces $J \in F$.

b) Si J no es irreducible entonces, por la proposición 2.4, existen C_1, C_2 cerrados distintos de J tales que $C_1 \cup C_2 = J$

Tenemos pues que $C_1, C_2 \subset J$; luego C_1 y C_2 son unión finita de partes cerradas irreducibles. Entonces J es también unión finita de cerrados irreducibles. De donde $J \in F$.

Aplicando el lema 3.5 tenemos entonces que $E = F$.

Además $X \in E$, luego $X \in F$.

PROPOSICION 3.7

Si X es noetheriano, entonces el conjunto de componentes irreducibles es finito.

DEMOSTRACION

Por la proposición 3.6 sabemos que si X es noetheriano entonces $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, I finito, con A_i cerrado irreducible. Tenemos entonces que $(A_i)_{i \in I}$ es un recubrimiento finito de X formado por conjuntos cerrados irreducibles. Luego, aplicando la proposición 2.18, se tiene que las componentes irreducibles de X son los elementos maximales del conjunto de los A_i.

De donde el conjunto de las componentes irreducibles de X es finito.

PROPOSICION 3.8

Si X es noetheriano, entonces el conjunto de componentes conexas es finito.

DEMOSTRACION

Por la parte b) de la proposición 2.17 y por la proposición 3.7 se tiene que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, I finito, con A_i componente irreducible.

Además, por el corolario de la proposición 2.17, cada componente conexa de un espacio topológico es unión de componentes irreducibles. Luego el conjunto de las componentes conexas es también finito, ya que el conjunto de uniones posibles de un conjunto de partes finito es también finito.

PROPOSICION 3.9

Un espacio noetheriano separado es finito necesariamente.

DEMOSTRACION

Sea X un espacio noetheriano separado.

Sean $E = \{A \subset X / A$ es cerrado$\}$

$F = \{A \subset X / A$ es finito$\}$

Tenemos entonces que $F \subset E$, ya que en un espacio separado todo conjunto finito A es unión finita de cerrados, así $A = \bigcup_{i \in I} \{X_i\}$, I finito. Donde cada $\{X_i\}$ es cerrado (Proposición 1.15).

Sea $B \in E$ tal que $(A \subset B \rightarrow A \in F)$. Probemos entonces por el lema 3.5 que $B \in F$.

Sea $M = B - \{X\}$, $x \in B$. Luego $(M \subset B \rightarrow M \in F)$ es decir M es finito. Entonces $B = M \cup \{x\}$. De donde $B \in F$. Luego B es finito.

Aplicando entonces el lema 3.5 tenemos que $E = F$.

De donde X es finito.

Un ejemplo de espacio topológico noetheriano

DEFINICION 3.10

Un anillo A se dice que es noetheriano si cada sucesión creciente de ideales $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ es estacionaria, es decir, existe un n tal que $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots$, ó equivalentemente, cada subconjunto no vacío de ideales de A, ordenados por inclusión, tiene un elemento maximal

PROPOSICION 3.11

Si A es un anillo noetheriano, entonces Spec(A) es un espa_
cio topológico noetheriano.

DEMOSTRACION

De acuerdo a la proposición 2.21, si $E \subseteq A$ entonces $V(E)$ es un cerrado de $\mathcal{F}$.

Sea $\{V(E_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de elementos de $\mathcal{F}$, es decir, $V(E_{i+1}) \subset V(E_i)$ para todo i.

Probemos que $\{V(E_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es estacionaria, es decir, existe r tal que "para todo $i \geq r$: $V(E_r) = V(E_i)$"

PRUEBA

Por el lema 2.22 podemos asumir que cada E_i es un ideal. - Formemos entonces la siguiente sucesión:

$T_1 = E_1$

$T_2 = E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 / x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}$

$T_3 = E_1 + E_2 + E_3$

.

.

.

$T_n = \sum_{i=1}^{n} E_i$

Tenemos entonces que:

$T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_i \subset T_{i+1} \subset \ldots$

Luego, por hipótesis, existe r tal que para todo $n \geq r$ se tiene $T_r = T_n$.

Si $i \geq r$ tenemos que "$V(E_i) \subset V(E_r)$". Probemos entonces que "para todo $i \geq r$: $V(E_r) \subset V(E_i)$"

Sea $J \in V(E_r)$, entonces $E_r \subset J$. También $V(E_r) \subset V(E_i)$, para todo $i \leq r$, es decir, $E_r \subset J \rightarrow E_i \subset J$ para todo $i \leq r$. Luego $T_r \subset J$. Por ser T_r el menor ideal que contiene a todos los E_i, con $i \leq r$. Además si $i \geq r$, $T_i = T_r$. De donde $T_i \subset J$, para todo $i \geq r$. (*)

Por otro lado $E_i \subset T_i$ para todo i. (**)

Comparando (**) y (*) tenemos que $E_i \subset J$, para todo $i \geq r$; es decir, $J \in V(E_i)$.

BIBLIOGRAFIA

1- TOPOLOGIA
Kuratowski

2- ELEMENTOS DE ANALISIS, II TOMO
J. Dieudonné

3- ALGEBRA CONMUTATIVA, CAP. II
Bourbaki

4- NOTAS DE TOPOLOGIA GENERAL
Mauricio Marroquín Escoto

5- ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. I, II.
Enzo R. Gentile

6- GENERAL TOPOLOGY
John L. Kelley

7- INTRODUCCION AL ALGEBRA CONMUTATIVA
M.F. Atiyah
I.G. Macdonald