UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

ESTUDIO DE METODOS NUMERICOS MEDIANTE LA INTERPOLACION

PRESENTADO POR:

ADA ESTELA SALAZAR ORANTES

TRABAJO DE GRADUACION PREVIO AL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

MARZO DE 1984

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

ESTUDIO DE METODOS NUMERICOS MEDIANTE LA INTERPOLACION

TRABAJO DESARROLLADO POR:
ADA ESTELA SALAZAR ORANTES
PREVIO AL TITULO DE
LICENCIADO EN MATEMATICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : DR. MIGUEL ANGEL PARADA.

SECRETARIO GENERAL: DRA. ANA GLORIA CASTANEDA DE MONTOYA.

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO : ING. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO.

SECRETARIO: ING. MAURICIO ARTURO ORELLANA EGUIZABAL.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

DIRECTOR: LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO.

ASESOR : ING. GABRIEL MELENDEZ MAYORGA.

A mi madre

Celia Orantes de Salazar.

PROLOGO

El presente trabajo tiene como objetivo contribuir con los estudiantes de la Licenciatura en Matemática y con todos los demás estudiantes de áreas afines interesadas en los Métodos Numéricos y sus aplicaciones, para que cuenten con un material de apoyo. En particular, se estudian los métodos de Interpolación y las aplicaciones de éstos a la Diferenciación e Integración Numérica; así como los diferentes métodos para la solución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Cada método es ilustrado con ejemplos de aplicación.

Los métodos estudiados en el contenido de este trabajo, en la actualidad son muy usados para la resolución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, haciendo uso de las computadoras.

La presente investigación bibliográfica me causó una serie de dificultades, las cuales fuí superando con la consulta oportuna al Asesor, quien posee muchos conocimientos en la materia y supo cuidadosamente dirigirme, por lo cual aprovecho esta oportunidad para expresarle mis agradecimientos al Ing. Gabriel Meléndez Mayorga por su valiosa asesoría en la preparación del trabajo.

INDICE

		PAGINA
CAPITULO I	GENERALIDADES SOBRE INTERPOLACION	1
	1.1 DEFINICION	1
	1.2 INTERPOLACION DIRECTA	1
	1.3 INTERPOLACION INVERSA	1
	1.4 USOS DE LA INTERPOLACION	2
	1.5 ALGUNAS DE LAS FORMULAS QUE SE USAN EN LA INTERPOLACION	3
CAPITULO II	EL POLINOMIO INTERPOLADOR	5
	2.1 INTRODUCCION	5
	2.2 POLINOMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE	6
	2.3 INTERPOLACION ITERADA	14
	2.4 METODO DE NEVILLE	16
	2.5 METODO DE AITKEN	21
	2.6 INTERPOLACION INVERSA ITERADA	25
	2.7 VENTAJA Y DESVENTAJA DE LA INTERPOLACION LAGRANGIANA	27
	2.8 INTERPOLACION LAGRANGIANA A INTERVALOS IGUALES	28
CAPITULO III	LA INTERPOLACION CON LAS DIFERENCIAS FINITAS	36
	3.1 DEFINICION	36

3.2 METODO GENERAL PARA GENERAL FORMU LAS DE INTERPOLACION 39
3.3 OPERADORES SIMBOLICOS RELACIONA- DOS CON LAS DIFERENCIAS FINITAS 45
CAPITULO IV DIFERENCIACION E INTEGRACION NUMERICA 64
4.1 DIFERENCIACION NUMERICA 64
4.2 INTEGRACION NUMERICA 79
CAPITULO V METODOS NUMERICOS PARA LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES 91
5.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN 91
5.2 METODO DE EULER 92
5.3 METODO DE TAYLOR 98
5.4 METODO DE RUNGE KUTTA 105
5.5 METODO MEJORADO DE EULER O METODO DE HEUM 107
5.6 METODO MODIFICADO DE EULER O ME- TODO MEJORADO DEL POLINOMIO 110
5.7 METODOS DEL PREDICTOR-CORRECTOR 126
PROGRAMAS 145
BIBLIOGRAFIA 153

CAPITULO I

GENERALIDADES SOBRE INTERPOLACION

1.1 DEFINICION:

La interpolación consiste en aproximar el valor que una función f toma en el punto x conociendo los valores de f en los argumentos x_o, x1, x2,..., x_n; es decir, conociendo $f(x_i)$ ∀ i=0, 1,..., n.

La notación utilizada es $f(x_i) = y_i = f_i$ ∀ i = 0, 1,..., n. Decimos que P(x) interpola a f(x) en los argumentos $x_o, x_1, \ldots, x_n$ si $P(x_i) = f(x_i)$ ∀ i = 0, 1,..., n.

1.2 INTERPOLACION DIRECTA.

Dado los argumentos en un cierto intervalo I encontramos el valor de la función en un punto x, x ε I.

1.3 INTERPOLACION INVERSA.

Se trata de encontrar el valor de x correspondiente a un valor conocido de y = f(x) que se encuentra entre dos tabulados. En conclusión, la interpolación inversa no es más que la interpolación ordinaria aplicada a la función inversa - x = g(y).

Generalmente, la interpolación inversa es utilizada en la determinación de las raíces de una función dada; es decir, para determinar el valor de x cuando f(x) = 0.

1.4 USOS DE LA INTERPOLACION:

1.4.1 En las Tablas Matemáticas para hacer su uso más eficiente.

A principio de nuestro siglo las tablas matemáticas eran hasta veinte veces más grande que lo necesario; pero con el uso de la interpolación éstas son mucho más pequeñas y por tanto más baratas de obtener. El uso de las computadoras electrónicas reduce la necesidad de las tablas, pero siguen siendo útiles en el comercio y en probabilidades y estadística.

1.4.2 En Investigación Científica.

En muchas ocaciones al realizar un experimento obtenemos datos correspondientes a una función la cual desconocemos o no puede ser expresada mediante una fórmula. La aplicación de la interpolación nos permite trabajar con tales funciones.

1.4.3 Para la Resolución Numérica de las Ecuaciones Diferenciales.

Cuando usamos métodos numéricos en la solución de ecuaciones diferenciales, conociendo los valores de la solución en los puntos x_o, x1,..., x_n los métodos de solución proveen el valor en el próximo punto x_{n+1}, de esta manera se extiende la solución punto por punto. El punto x_{n+1} se encuentra afuera del intervalo que contiene los valores anteriores, por lo cual se llamaría con más precisión una extrapolación. La interpolación y la extrapolación son matemáticamente el mismo proceso y no haremos distinción alguna entre ellas.

1.5 ALGUNAS DE LAS FORMULAS QUE SE USAN EN LA INTERPOLACION.

1.5.1 Las Fórmulas de Diferencia Central de Stirling, Bessel y Everett.

Para ellas se requieren datos de ambos lados del argumento de interpolación en cantidades más o menos iguales, por esta razón no se aplican a argumentos que están muy cercanos al principio o al final de la tabla. Para estas fórmulas no es necesario determinar de antemano el grado del polinomio.

1.5.2 Fórmula Progresiva de Newton.

Se aplica para interpolaciones cercanas al principio de la tabla; por que los datos utilizados están colocados adelante del argumento de interpolación.

1.5.3 Fórmula Regresiva de Newton.

Es para interpolaciones cercanas al final de la tabla; los da tos están colocados después del argumento de interpolación - sobre la línea con pendiente hacia arriba y hacia la derecha.

1.5.4 Fórmula de Lagrange.

No requiere de cálculos previos en la tabla de diferencias; pero tiene la desventaja de determinar desde el comienzo el grado del polinomio aproximante.

1.5.5 El Método de Aitken y el de Neville.

Son muy usados en la interpolación inversa, donde los valores y_i son casi siempre espaciados desigualmente y no requiere de antemano el grado del polinomio aproximante.

CAPITULO II

EL POLINOMIO INTERPOLADOR

2.1 INTRODUCCION:

El método más común para aproximar el valor de una función es usando polinomios. Hay varias formas para lograr este propósito, pero el más flexible y de construcción más fácil es el polinomio de interpolación, aunque no siempre es el - más efectivo.

Existen polinomios interpoladores que usan diferencias y o- tros que usan ordenadas.

Los que usan diferencias se basan en el valor de la función en un punto y en las diferencias de la sucesión de valores de la función. Entre ellos tenemos: Newton, Gregory-Newton, Newton-Gauss, Sterling, Bessel, etc.

Los que usan ordenadas se basan directamente en los valores de la función interpolada. Entre ellos tenemos: Taylor, La grange, Neville y Aitken.

Aquí nos ocuparemos del estudio de polinomios interpoladores que usan ordenadas.

El polinomio de Taylor es de poco uso por que tiene la propie dad de que toda la información está concentrada en un punto, esto es en x_0. Para propósitos computacionales es más eficiente usar métodos que incluyan información en varios puntos como el polinomio de Lagrange.

2.2 POLINOMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE.

Determinemos un polinomio de grado uno que pase por los dos puntos diferentes (x_0, y_0) y (x_1, y_1). El problema es el mismo que el de aproximar una función f, en la cual $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$, por medio de un polinomio interpolador de primer grado que coincida con los valores de f en los puntos dados (Ver figura 2.1).

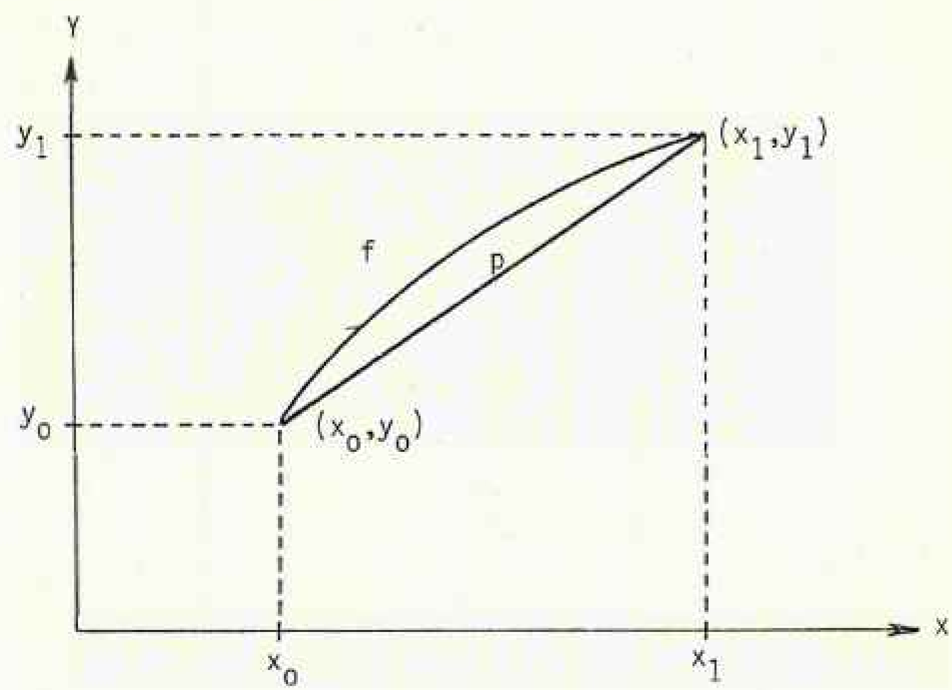


Figura 2.1

Como el polinomio que buscamos es lineal debe tener la forma $P(x) = a_o + alx$ y debe satisfacer:

$$y_o = P(x_o) = a_o + a_1x_o$$

$$y_1 = P(x_1) = a_o + a_1x_1$$

Resolviendo estas ecuaciones para a_o y al, obtenemos:

$$a_1 = \frac{y_o - y_1}{x_o - x_1}$$

Como $a_o = y_o - a_1 x_o$

Tenemos que:

$$a_o = y_o - \left(\frac{y_o - y_1}{x_o - x_1}\right) x_o$$

sustituyendo los valores de a_o y al en el polinomio tenemos:

$$P(x) = y_o - \left(\frac{y_o - y_1}{x_o - x_1}\right) x_o + \left(\frac{y_o - y_1}{x_o - x_1}\right) x$$

$$= \frac{y_o (x_o - x_o - x_1 + x)}{(x_o - x_1)} + \frac{y_1 (x_o - x)}{(x_o - x_1)}$$

$$= y_o \frac{(x - x_1)}{(x_o - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_o)}{(x_1 - x_o)}$$

Podemos observar que el polinomio obtenido, satisface

$P(x_o) = y_o$ y $P(x_1) = y_1$.

Esta técnica puede ser usada para aproximar valores de una - función entre dos valores tabulados. Este es un método de - interpolación usado frecuentemente en trigonometría o tablas logarítmicas; llamada Interpolación Lineal.

Determinemos ahora un polinomio de segundo grado pasando por tres puntos distintos (x_o, y_o), (x_1, y_1) y (x_2, y_2). (Ver - figura 2.2).

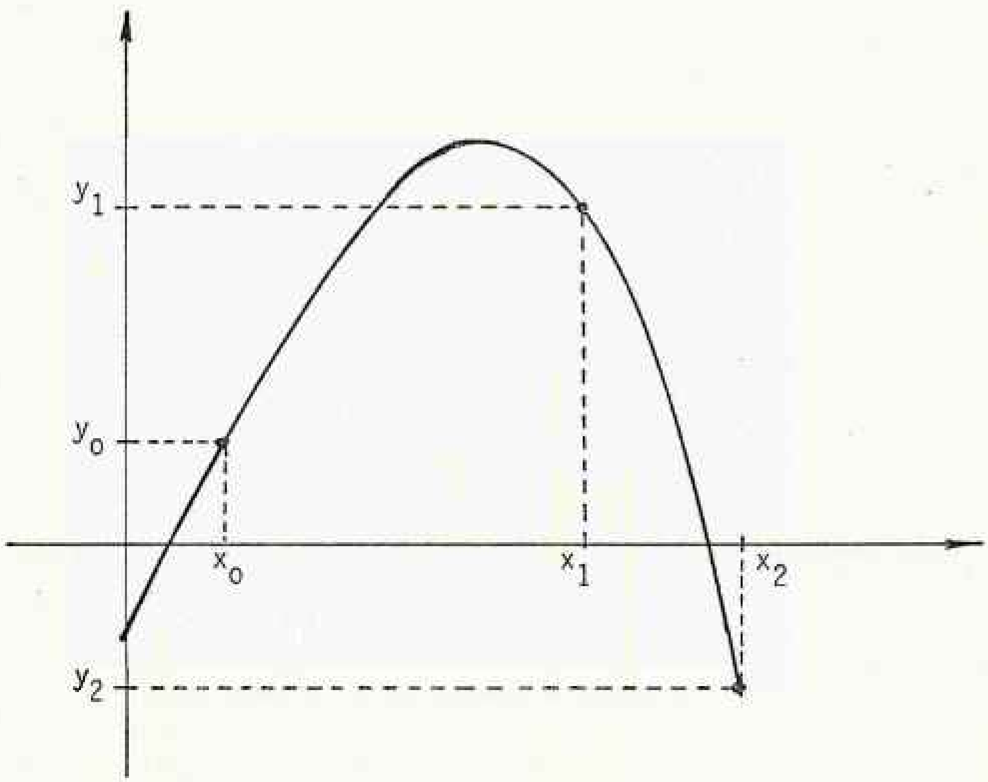


Figura 2.2

Sea $P(x) = a_o + a_1x + a_2x^2$ el polinomio donde a_o, a_1 y a_2 deben satisfacer:

$$y_o = P(x_o) = a_o + a_1x_o + a_2x_o^2$$

$$y_1 = P(x_1) = a_o + a_1x_1 + a_2x_1^2$$

$$y_2 = P(x_2) = a_o + a_1x_2 + a_2x_2^2$$

Resolviendo estas ecuaciones para $a_{o,}$ a1 y a2 tenemos:

$$a_o = -\frac{[\, y_ox_1x_2(x_2-x_1) + y_1x_ox_2(x_o-x_2) + y_2x_ox_1(x_1-x_o)]}{(x_2-x_1)(x_o-x_2)(x_1-x_o)}$$

$$a_1 = -\frac{[y_o(x_1^2-x_2^2) + y_1(x_2^2-x_0^2) + y_2(x_o^2-x_1^2)]}{(x_2-x_1)(x_o-x_2)(x_1-x_o)}$$

$$a_2 = -\frac{[\, y_o(x_2-x_1) + y_1(x_o-x_2) + y_2(x_1-x_o)\,]}{(x_2-x_1)(x_o-x_2)(x_1-x_o)}$$

sustituyendo estos valores en el polinomio tenemos:

$$P(x) = -\frac{[y_o(x2-x1)(x-x1)(x-x2)+y1(x_o-x2)(x-x_o)(x-x2)+y2(x1-x_o)(x-x_o)(x-x1)]}{(x_2-x_1)\ (x_o-x_2)\ (x_1-x_o)}$$

$$P(x) = y_o\ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} + y_1\ \frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)} + y_2\ \frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)}$$

Se observa también que el polinomio así obtenido, cumple con $P(x_o) = y_o$, $P(x_1) = y_1$ y $P(x_2) = y_2$.

Para generalizar este concepto busquemos un polinomio de grado n a lo sumo que pase por (n+1) puntos dados. Si esto es posible, tendremos que dada una función f, podemos encontrar un polinomio P que coincida con los valores de la función en ciertos puntos especificados, y el polinomio P se usa para aproximar a f en otros puntos del intervalo que contiene a los argumentos dados.

Este procedimiento de interpolación se describe en el siguiente teorema y el polinomio obtenido se llama POLINOMIO INTERPOLADOR DE LA FORMA DE LAGRANGE. (Ver figura 2.3)

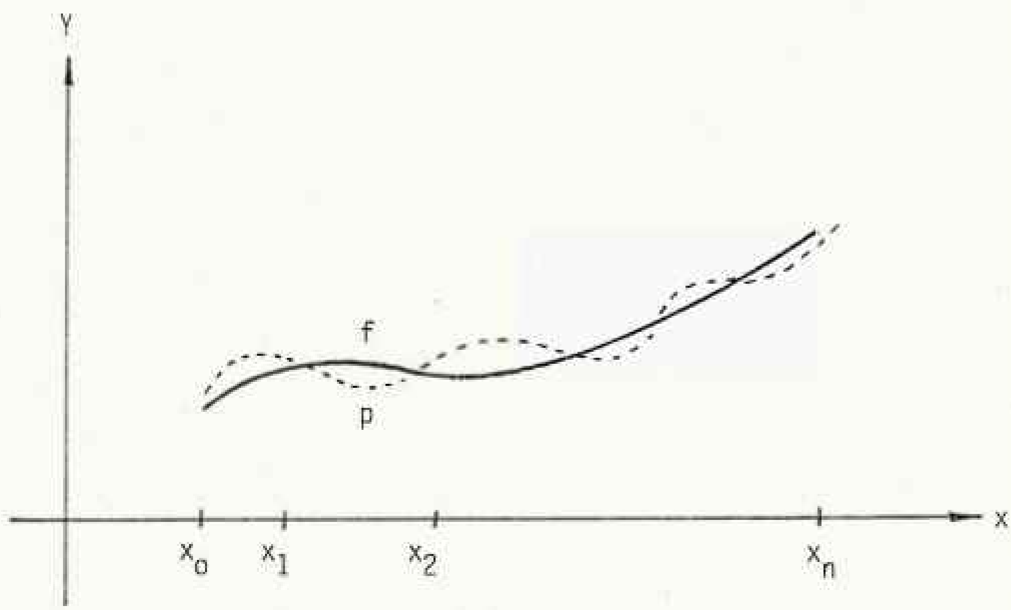


Figura 2.3

TEOREMA 2.1

Si $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n$ son $(n+1)$ puntos distintos y f es una función cuyos valores se dan en estos puntos, entonces existe un polinomio único P de grado n, a lo sumo, con la propiedad que $f(x_k) = P(x_k)$ para cada $k = 0, 1, \ldots, n$.

Este polinomio se determina por:

$$P(x) = f_oL_o(x) + f_1L_1(x) + \ldots + f_nL_n(x).$$

Es decir,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f_kL_k(x)$$

donde

$$L_k(x) = \frac{(x-x_o)(x-x_1) \ldots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \ldots (x-x_n)}{(x_k-x_o)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k-x_i)} \qquad \text{para cada } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Demostración:

La existencia del polinomio P quedará probada si podemos establecer que existe el polinomio $L_k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ - con las siguientes propiedades:

1) Cada L_k es un polinomio de grado $\leq n$;

2) Para $x = x_k$, L_k tiene un valor especial que es $L_k(x_k) = 1$; pero si $i \neq k$ entonces $L_k(x_i) = 0$.

Para demostrar la existencia de los L_k, obsérvese que en la expresión

$$\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

El numerador es el producto de n factores lineales y representa un polinomio de grado n. Además si $x = x_k$, la expresión tiene el valor de 1. Por otra parte si $x = x_i$, donde $i \neq k$, entonces el numerador que contiene a $(x-x_i)$ es cero, y el producto se anula. Luego los polinomios

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

tienen las propiedades requeridas.

Como $P(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$

tenemos que:

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x_i) = f(x_i) L_i(x_i) = f(x_i)$$

Además, cada L_k es un polinomio de grado n, luego P es un - polinomio de grado n a lo sumo y se satisface que

$f(x_k) = P(x_k) \quad \forall\ k = 0, 1, \ldots , n.$

Para probar la unicidad del polinomio de interpolación, supongamos que existe $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios que interpolan a f en los argumentos x_0, x1 ,..., x_n de grado menor o igual que n.

Su diferencia $D(x) = P(x) - Q(x)$ es también un polinomio de grado menor o igual que n.

Pero:

$$\begin{aligned} D(x_i) &= P(x_i) - Q(x_i) \\ &= f_i - f_i \\ &= 0 \qquad\qquad \text{para } i = 0, 1, 2, \ldots , n. \end{aligned}$$

El polinomio $D(x)$ tiene $(n+1)$ ceros y, por lo tanto, como es un polinomio de grado $\leq n$ debe ser idénticamente nulo. Es - decir que:

$$D(x) = 0 \quad \text{para todo } x$$

De donde:

$$P(x) - Q(x) = 0 \quad \forall x$$

Entonces:

$$P(x) = Q(x) \; \forall x$$

2.3 INTERPOLACION ITERADA.

La interpolación iterada es adecuada para la aplicación en - las computadoras digitales y es también conveniente para la computación manual, ya que, se utilizan los cálculos previos hasta obtener los resultados apropiados.

Los métodos que han llegado a tener uso frecuente son:

1) Método de Neville.
2) Método de Aitken.

DEFINICION 2.1

Sea f una función definida en los puntos $x_o, x_1, \ldots, x_n$; y sea $D = \{x_o, x1, \ldots, x_n\}$. Consideremos polinomios que in - terpolen a f en algunos de los puntos en D, pero no en todos.

Sea A un subconjunto cualquiera, no vacío, de D y denotemos por P_A al polinomio que interpola a f en los puntos $x_i \in A$.

Si A contiene (k+1) punto, P_A es el único polinomio de grado $\leq$ k que cumple

$$P_A(x_i) = f_i \quad , \text{ para todo } x_i \in A.$$

TEOREMA 2.2

Sea f una función definida en los puntos $x_o, x1, \ldots, x_k$ y $D = \{x_o, x1, \ldots, x_k\}$. Sean A y B dos subconjuntos de D y con k-1 elementos que tienen todos sus puntos en común, excepto los dos puntos $x_i \in A$ y $x_j \in B$. Si

$$P(x) = \frac{(x-x_j)P_A(x) - (x-x_i)P_B(x)}{(x_i - x_j)} \quad , \text{ para todo } x.$$

Entonces P es el polinomio de Lagrange de grado $\leq$ k que interpola a f en $x_o, x_1, \ldots, x_k$

Demostración:

P_A y P_B son polinomios de grado $\leq$ (k-1) por lo tanto P(x) es un polinomio de grado $\leq$ k. Si $0 \leq r \leq k$ y $r \neq i,j$ tenemos:

$$P(x_r) = \frac{(x_r-x_j)\, P_A(x_r) - (x_r-x_i)\, P_B(x_r)}{(x_i - x_j)}$$

$$= \frac{(x_r-x_j)\, f(x_r) - (x_r-x_i)\, f(x_r)}{(x_i - x_j)}$$

$$= \frac{(x_i - x_j)\, f(x_r)}{(x_i - x_j)}$$

$$= f(x_r)$$

para $x_r = x_i$ tenemos:

$$P(X_i) = \frac{(x_i - x_j)\, P_A(x_i) - (x_i - x_i)\, P_B(x_i)}{(x_i - x_j)}$$

$$= \frac{(x_i - x_j)\, f(x_i)}{(x_i - x_j)}$$

$$= f(x_i) \quad , \quad x_i \in A$$

y similarmente para $x_r = x_j$ tenemos que:

$$P(x_j) = f(x_j) \ , \ x_j \in B.$$

$\therefore$ P interpola a f en $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_k$

Este teorema nos permite generar polinomios de interpolación de grado más alto partiendo de polinomios de interpolación de grados más bajos.

2.4 METODO DE NEVILLE.

Mediante este método se genera un diagrama triangular de polinomios de donde se obtiene el polinomio interpolador.

Denotemos por $Q_{i,j}$ con $i \geq j$ al polinomio interpolador de gra do j que interpola a la función f en los (j+1) puntos, x_{i-j}, $x_{i-j+1},\ldots,x_i$. Es decir que $Q_{i,j} = P_A$ donde $A = \{x_{i-j}, x_{i-j+1},\ldots, x_i\}$.

Para construir la tabla 2.1 se coloca al principio del diagrama la columna de los x_i, los polinomios se colocan en columnas sucesivas de izquierda a derecha, el último polinomio es el polinomio de interpolación que buscamos.

x_o	$Q_{o,o}$					
x_1	$Q_{1,0}$	$Q_{1,1}$				
x_2	$Q_{2,0}$	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$			
x_3	$Q_{3,0}$	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$		
.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.		
x_n	$Q_{n,0}$	$Q_{n,1}$	$Q_{n,2}$	$Q_{n,3}$	. . .	$Q_{n,n}$

Tabla 2.1

Esta tabla se obtiene basada en el Teorema 2.2, y adicionalmente $Q_{i,0} = f(x_i)$ para cada $i = 0, 1, 2,\ldots, n$;que son los polinomios de grado cero, de los cuales partimos para obtener los de grado uno, usando la siguiente fórmula:

$$Q_{i,j}(x) = \frac{(x-x_i)Q_{i-1,j-1}(x) - (x-x_{i-j})Q_{i,j-1}(x)}{(x_{i-j} - x_i)} \qquad (2.1)$$

con $i = 1, 2, 3, \ldots$ y $j = 1, 2, \ldots, i$.

Por ejemplo $Q_{1,1}(x)$ se obtiene así:

$$Q_{1,1}(x) = \frac{(x-x_1)Q_{0,0}(x) - (x-x_0)\ Q_{1,0}(x)}{(x_0 - x_1)}$$

partiendo de los de grado uno se obtienen los de grado dos, por ejemplo $Q_{3,2}(x)$ se obtiene así:

$$Q_{3,2}(x) = \frac{(x-x_3)Q_{2,1}(x) - (x-x_1)Q_{3,1}(x)}{(x_1 - x_3)}$$

De esta manera se obtienen todas las columnas formadas por - los polinomios indicados en la Tabla 2.1.

Si por ejemplo, después de haber computado 3 filas, el polinomio de interpolación no es tan exacto como se desea, se agrega otro nodo x4, lo cual da origen a una nueva fila que - contiene:

$$x_4 \quad Q_{4,0} \quad Q_{4,1} \quad Q_{4,2} \quad Q_{4,3} \quad Q_{4,4}.$$

Si no damos un número determinado de nodos, la Tabla 2.1 se obtiene fila por fila y son los polinomios de la diagonal superior los que sirven como aproximaciones sucesivas al resultado, de modo que debemos de parar cuando tengamos la exactitud prevista.

Ejemplo 2.1

Aproximar $\sqrt{3}$ usando el método de Neville en la función $f(x) = 3^x$ para los valores $x_o = -2$, $x_{1=-1,}$ $x2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$.

Solución:

Por el proceso descrito para obtener la Tabla 2.1 y con la - fórmula 2.1 obtenemos la Tabla 2.2.

x_i	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
-2	1/9				
-1	1/3	2/3			
0	1	4/3	3/2		
1	3	2	11/6	16/9	
2	9	0	3/2	5/3	41/24

Tabla 2.2

Donde el valor aproximado es 1.7083333 y su verdadero valor es 1.7320508.

ALGORITMO 2.1

Algoritmo de interpolación iterada de Neville. Para evaluar en x al polinomio P que interpola a la función f en los (n+1) puntos distintos, x_o, x1,..., x_n.

Paso 1 hacer $Q_{0,0}(x) = f(x_o)$

Paso 2 tomar i = 1

Paso 3 hacer $Q_{i,0(x)} = f(x_i)$

Paso 4 calcular $Q_{i,j}(x) = \dfrac{(x-x_i)Q_{i-1,j-1}(x) - (x-x_{i-j})Q_{i,j-1}(x)}{(x_{i-j} - x_i)}$

para cada j = 1, 2,..., i.

Paso 5 agregar uno a i

Paso 6 si $i \leq n$ pasar a paso 3

Paso 7 $P(x) = Q_{n,n}(x)$ y el procedimiento termina.

El algoritmo puede ser modificado para permitir la suma de - nuevos nodos interpoladores,o sea el paso 5 puede ser reem - plazado por $|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon$. Donde ε es la tolerancia dada del error. Si la desigualdad es verdadera entonces $Q_{i,i}$ es una aproximación razonable para f(x). Si la desi -

gualdad es falsa, entonces i se incrementa para permitir un nuevo punto de interpolación x_i, antes de regresar al paso 3.

2.5 METODO DE AITKEN.

Para generar su diagrama triangular, igual al de la Tabla 2.1, se procede de la misma manera que el de Neville. Denotemos por $Q_{i,j}$ con $i \geq j$ el polinomio interpolador de grado j que interpola a la función f en los (j+1) punto x_o, $x1, \ldots, x_{j-1}, x_i$, es decir que $Q_{i,j} = P_A$ donde $A = \{x_o, x1, \ldots, x_{j-1}, x_i\}$ y usamos la siguiente fórmula:

$$Q_{i,j}(x) = \frac{(x-x_{j-1})\ Q_{i,j-1}(x) - (x-x_i)\ Q_{j-1,j-1}(x)}{(x_i - x_{j-1})} \qquad (2.2)$$

para $i = 1, 2, \ldots$ y $j = 1, 2, \ldots, i$.

Por ejemplo, $Q_{1,1}(x)$ se obtiene así:

$$Q_{1,1}(x) = \frac{(x-x_o)\ Q_{1,0}(x) - (x-x_1)\ Q_{0,0}(x)}{(x_1 - x_o)}$$

partiendo de los de grado uno se obtienen los de grado dos - por ejemplo $Q_{3,2}(x)$ se obtiene así:

$$Q_{3,2}(x) = \frac{(x-x1)\ Q_{3,1}(x) - (x-x3)\ Q_{1,1}(x)}{(x_3 - x_1)}$$

Ejemplo 2.2

Resolver el ejemplo 2.1 usando el método de Aitken.

Solución:

Por el proceso descrito para obtener la Tabla 2.1 y con la fórmula 2.2 obtenemos la Tabla 2.3

x_i	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
-2	1/9				
-1	1/3	2/3			
0	1	11/9	3/2		
1	3	68/27	37/18	16/9	
2	9	17/3	19/6	23/12	41/24

Tabla 2.3

El valor aproximado resulta ser 1.7083333 y el verdadero valor sabemos que es 1.7320508.

ALGORITMO 2.2

Algoritmo de interpolación iterada de Aitken. Para evaluar en x al polinomio P que interpola a la función f en los (n+1) puntos distintos, x_o, x1,..., x_n.

Paso 1 hacer $Q_{0,0}(x) = f(x_o)$

Paso 2 hacer ε = a la tolerancia requerida

Paso 3 hacer $i = 1$

Paso 4 hacer $Q_{i,0}(x) = f(x_i)$

Paso 5 calcular $Q_{i,j}(x) = \dfrac{(x-x_{j-1})Q_{i,j-1}(x) - (x-x_i)Q_{j-1,j-1}(x)}{(x_i - x_{j-1})}$

para cada $j = 1, 2, \ldots, i$.

Paso 6 preguntar si $|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon$ entonces ir al paso 8.

Paso 7 agregar uno a i e ir al paso 4.

Paso 8 El proceso se ha completado.

Ejemplo 2.3

Calcúlese un valor aproximado de la serie infinita

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ del siguiente modo: Hágase

$$f(\tfrac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

usando el Algoritmo de Neville.

Solución:

Usando el algoritmo 2.1 para cinco nodos obtenemos los datos de la Tabla 2.4.

x_i	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
1	1				
1/2	1.25	1.50			
1/3	1.3611111	1.5833334	1.6250003		
1/4	1.4236111	1.611111	1.63 88884	1.6435177	
1/5	1.4636111	1.62361	1.64 23587	1.644672	1.6449609

Tabla 2.4

Si calculamos la serie hasta para n = 634 se obtiene un valor de 1.6435182 y si observamos el dato obtenido para cuatro nodos con el algoritmo de Neville vemos que es 1.6435177, es decir, se han logrado cinco cifras decimales significativas. Queda de esta manera clara la utilidad de la interpolación. Si queremos obtener a partir de la serie infinita un valor aproximado de 1.6449609 tendríamos que sumar hasta el término con n = 1789 aproximadamente, mientras que con el algoritmo se logra con cinco nodos.

Ejercicios:

1) Sea f(x) = x4 calcular f(3) por interpolación en los pun

tos $x = -4, -2, 0, 2, 4$, usando el método de Neville y después el de Aitken.

2) Use el método de Neville y luego el Método de Aitken para aproximarf(-0.78) para la función $f(x) = x^2 e^x \cos x$ usando $x_0 = -1$ $x_1 = -0.9$, $x2 = -0.8$, $x3 = -0.7$, $x4 = -0.6$.

3) Encontrar un valor aproximado de $\sqrt{2}$ por interpolación, usando el Método de Neville, luego el Método de Aitken para los valores de la función $f(x) = 2^x$ en los puntos $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

2.6 INTERPOLACION INVERSA ITERADA.

Supongamos que $f \in C' [a,b]$ (se lee f pertenece al conjunto de funciones diferenciables continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$), $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$ y f tiene un cero r en $[a,b]$.

Sean $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (n+1) puntos distintos en $[a,b]$ con $f(x_k) = y_k$, para cada $k = 0, 1, \ldots, n$. Para aproximar r, construya el polinomio interpolador de grado n en los nodos $y_0, y_1, \ldots, y_n$ para la función inversa f^{-1} (Se ha pedido que $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$, para que f(x) sea solamente creciente o decreeiente y de esta manera asegurar la existencia de la inversa f^{-1} de f).

Como $y_k = f(x_k)$ y $f(r) = 0$, entonces $f^{-1}(y_k) = x_k$ y $f^{-1}(0) = r$. Cuando usamos la interpolación iterada para -

aproximar $f^{-1}(0) = r$ le llamamos Interpolación Inversa Iterada.

Ejemplo 2.4

Use la interpolación inversa iterada para encontrar una aproximación a la solución de $x - e^{-x} = 0$ usando los siguientes datos:

x	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

Solución:

Obtendremos primero $x-e^{-x}$ con los datos dados y encontraremos el siguiente resultado:

x	0.3	0.4	0.5	0.6
$x-e^{-x}$	-0.440818	-0.270320	-0.106531	0.051188

Usando la fórmula 2.1 obtenemos los datos de la tabla 2.5.

0.3			
0.4	0.5581544		
0.5	0.5650416	0.5672362	
0.6	0.5675448	0.5671460	0.5671552

Tabla 2.5

Donde la aproximación a la solución es 0.5671552. Si usamos la fórmula 2.2 obtenemos los datos de la Tabla 2.6

0.3			
0.4	0.5585473		
0.5	0.5637362	0.5671107	
0.6	0.5687881	0.5671575	0.5671422

Tabla 2.6

Donde la aproximación a la solución es 0.5671422.

2.7 VENTAJA Y DESVENTAJA DE LA INTERPOLACION LAGRANGIANA.

La ventaja del Método de Lagrange es su flexibilidad ya que no es necesario que los puntos estén igualmente espaciados. Esta propiedad nos permite realizar la "interpolación inversa".

La interpolación Lagrangiana también es conveniente cuando - hay muchas funciones diferentes a interpolarse, todas definidas en los mismos puntos x_o, x1,..., x_n, para evaluarse todos en el mismo x. En este caso los $L_k(x)$ se encuentran una sola vez.

Las desventajas de este método es que puede involucrar mucho trabajo de cómputo, si se desea calcular los polinomios - $L_i(x)$. Otra de las desventajas es que si por alguna razón - después de haber construido un polinomio de grado n nos damos cuenta que la aproximación no es adecuada y se requiere un polinomio de mayor grado, todo el trabajo previo no puede ser utilizado y se debe repetir completamente el proceso. - Las técnicas de la interpolación iterada (Neville, Aitken) superan esta última desventaja.

2.8 INTERPOLACION LAGRANGIANA A INTERVALOS IGUALES.

Consideremos el caso donde los puntos x_o, x_1, x2,...,x_n están distribuidos a intervalos iguales, es decir, $x_{k+1}-x_k=h$ $\forall_k$, donde h es una constante. Cuando esto ocurre, no se puede realizar la interpolación inversa; pero se puede simplificar los cálculos de la interpolación Lagrangiana. Para esto es conveniente que los puntos x_o, x1, x_2,...,x_n se cambien a 0, 1, 2, ..., n por medio de un cambio de variable de la forma.

$$S = \frac{x - x_o}{h}$$

Este cambio introduce un nuevo polinomio Q definido por:

$$Q(s) = P(x)$$

los valores de Q son iguales a los de P, en los puntos correspondientes. (Ver figura 2.4 y 2.5).

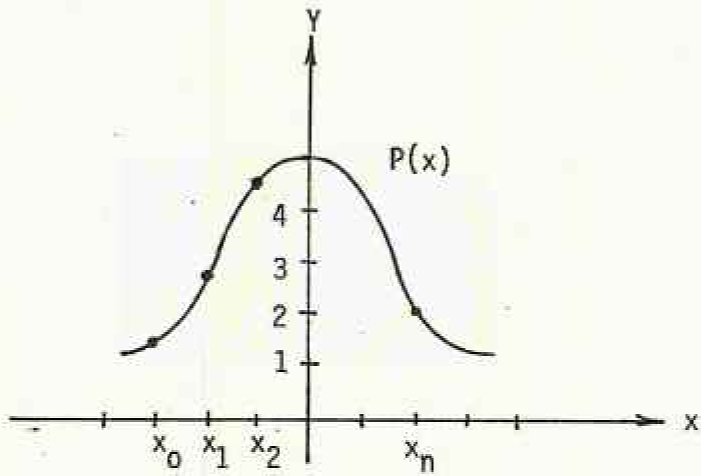


Figura 2.4

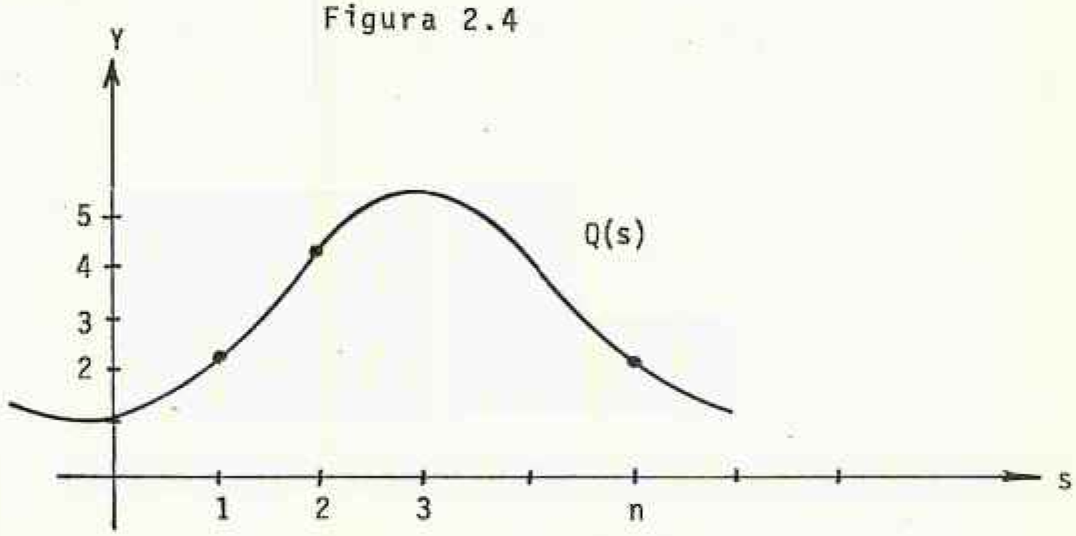


Figura 2.5

Generalmente cuesta bastante trabajo evaluar los polinomios de Lagrange $L_k(x)$ numéricamente. Si hacemos $\lambda_k(s) = L_k(x)$ - tenemos que:

$$P(x) = Q(s) = y_o\lambda_o(s) + y_1\lambda_1(s) +...+ y_n\lambda_n(s)$$

los valores de $\lambda_k(s)$ se pueden encontrar en tablas especiales para la interpolación. Esto se hace posible porque ahora dependen solamente de s mientras que $L_k(x)$ depende de x_o, x1, ... , x_n. Así el cálculo se reduce a una sencilla - combinación lineal de y_o, y_1, ..., y_n.

Se puede utilizar cualquier punto x_k como "punto base" definiendo

$$S = \frac{x - x_k}{h}$$

si $x = x_k$ entonces $s = 0$ Cuando el número de puntos es impar se puede tomar como punto base el punto central. Esta - forma conviene por que minimiza el valor absoluto de s necesario para alcanzar todo el intervalo $x_o \leq x \leq x_n$.

Mostraremos en el siguiente ejemplo cómo se hacen los cálculos con $\lambda_k(s)$.

Ejemplo 2.5

Aproximar f(x) mediante un polinomio P(x) que pasa por tres puntos equidistantes.

Suponiendo que estos tres valores de la variable independiente son $s = -1, 0, 1$.

Luego la fórmula de interpolación de Lagrange es:

$$Q(s) = y_{-1}\,\frac{(s-0)(s-1)}{(-1-0)(-1-1)} + y_o\,\frac{(s-(-1))(s-1)}{(0-(-1))(0-1)} + y_1\,\frac{(s-(-1))(s-0)}{(1-(-1))(1-0)}$$

$$= y_{-1}\,\frac{s(s-1)}{2} + y_o\,(1-s^2) + y_1\,\frac{s(s+1)}{2}$$

De donde se obtiene que:

$$\lambda_{-1}(s) = \frac{s(s-1)}{2}$$

$$\lambda_o(s) = 1 - s^2$$

$$\lambda_1(s) = \frac{s(s+1)}{2}$$

El polinomio interpolador de Lagrange puede escribirse de una gran variedad de formas, y en algunas de ellas se elimina la necesidad de trabajar con los polinomios $L_k(x)$ de Lagrange explícitamente, como lo veremos a continuación.

Utilicemos solamente tres puntos x_o, $x1$, $x2$ y escribamos:

$$x_1 = x_o + h$$

$$x_2 = x_1 + h = x_o + 2h$$

donde h es una constante. Evaluemos el polinomio interpolador en un punto x, donde:

$$x = x_o + \Delta x$$

El primer polinomio de Lagrange

$$L_o(x) = \frac{(x - x_1)\ (x - x_2)}{(x_o - x_1)\ (x_o - x_2)}$$

se puede escribir como:

$$L_o(x) = \frac{(\Delta x-h)(\Delta x-2h)}{(-h)(-2h)}$$

$$= \frac{\Delta x2 - 3h\Delta x + 2h2}{2h^2}$$

comos $= \frac{\Delta x}{h}$ tenemos:

$$L_o(x) = \frac{1}{2} s^2 - \frac{3}{2} s + 1$$

De la misma forma tenemos

$$L_1(x) = \frac{(x - x_o)\ (x - x_2)}{(x_1 - x_o)\ (x_1 - x_2)}$$

$$= \frac{\Delta x\ (\Delta x - 2h)}{h(-h)}$$

$$= 2s - s^2$$

y también

$$L2(x) = \frac{(x - x_o)\ (x - x_1)}{(x_2-x_o)\ (x_2-x_1)}$$

$$= \frac{\Delta x\ (\Delta x - h)}{(2h)h}$$

$$= \frac{1}{2}\ s^2 - \frac{1}{2}\ s$$

Para verificar estos cálculos basta con que s tome los valores 0, 1, 2. O sea

$$L_o(x) = \frac{(s - 1)\ (s - 2)}{(0 - 1)\ (0 - 2)}$$

$$= \frac{s^2 - 3s + 2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} s^2 - \frac{3}{2} s + 1$$

De igual manera tenemos:

$$L_1(x) = \frac{(s - 0)\ (s - 2)}{(1 - 0)\ (1 - 2)}$$

$$= \frac{s\ (s - 2)}{-1}$$

$$= \frac{s^2 - 2s}{-1}$$

$$= 2s - s2$$

y $$L2(x) = \frac{(s - 0)\ (s - 1)}{(2 - 0)\ (2 - 1)}$$

$$= \frac{s\ (s - 1)}{2}$$

$$= \frac{s^2 - s}{2}$$

$$= \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} s$$

El polinomio interpolador se puede escribir como:

$$P(x) = y_oL_o(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

$$= y_o \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{3}{2} s + 1\right) + y_1 (2s - s^2) + y_2 \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} s\right)$$

$$= y_o + \left[\frac{-3 y_o + 4 y_1 - y_2}{2}\right] s + \left[\frac{y_o - 2 y_1 + y_2}{2}\right] s^2$$

Podríamos tomar como punto base a x_1 de donde:

$$x = x1 + \Delta x$$

y los polinomios de Lagrange se convierten en:

$$L_o(x) = \frac{\Delta x(\Delta x - h)}{(-h)(-2h)}$$

$$= \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} s$$

$$L_1(x) = \frac{(\Delta x + h)(\Delta x - h)}{(h) (-h)}$$

$$= 1 - s^2$$

$$L_2(x) = \frac{(\Delta x + h) (\Delta x)}{(2h) (h)}$$

$$= \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} s$$

El polinomio interpolador lo escribiremos así:

$$P(x) = y_oL_o(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

$$= y_o\left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s\right) + y_1(1-s^2) + y_2\left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s\right)$$

$$= y_1 + \left[\frac{y_2 - y_o}{2}\right] s + \left[\frac{y_2 - 2y_1 + y_o}{2}\right] s^2$$

Podríamos utilizar el x_2 como punto base, el cual produce un tercer polinomio. La fórmula más conveniente es la que utiliza como base el x_k que sea el más cercano al valor de x, - así s se hace lo más pequeña posible.

Si se desea agregar un nuevo punto x_{n+1} para efectuar una interpolación más precisa, basta con agregar un solo término al polinomio en s. Los términos de menor grado quedan iguales, por lo que no habrá que repetir todo el trabajo para incluir el nuevo punto.

Estos polinomios son algunos de una clase muy extensa de polinomios, que se describirán más convenientemente en términos - de las diferencias finitas.

CAPITULO III

LA INTERPOLACION CON LAS DIFERENCIAS FINITAS

3.1 DEFINICION:

En este capítulo trataremos con funciones donde los valores de x1, x2, ..., x_n están equidistantes, como se usó en 2.8.

La teoría de las diferencias finitas se basa en la observación de que la diferencia $y_{j+1} - y_j$ de dos valores consecutivos ocurre muy a menudo en las fórmulas, y por lo tanto, se podría simplificar la forma de escribirlas, introduciendo un símbolo especial para las diferencias.

Las primeras diferencias ordinarias o diferencias finitas de la sucesión y_o, y_1, y2, ... se definen así: $y_1 - y_o$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$,...

Las segundas diferencias finitas se definen como la diferencia de las primeras diferencias o sea (y2 - y1) - $(y_1 - y_o)$ = y2 - 2y1 - y_o. Este proceso se continúa de la misma manera para definir las demás diferencias.

Para formar la tabla 3.1 de diferencias finitas se colocan - los valores de y_j en la primera columna, donde j puede ser negativa para permitir más flexibilidad en la notación, y las primeras diferencias en otra columna a la derecha de ésta y así sucesivamente.

δ^o	δ	δ^2	δ^3
y_{-2}			
	$y_{-1} - y_{-2}$		
y_{-1}		$y_o - 2y_{-1} + y_{-2}$	
	$y_o - y_{-1}$		$y_1 - 3y_o + 3y_{-1} - y_{-2}$
y_o		$y_1 - 2y_o + y_{-1}$	
	$y_1 - y_o$		
y_1			

Tabla 3.1

Hay varias notaciones para poder referirse a una diferencia en particular. Por ejemplo, las diferencias progresivas se denotan por el operador Δ; las diferencias regresivas mediante operador ∇ y las diferencias centrales que tiene como operador a δ.

Las difererencias finitas en forma progresiva se definen así:

$\Delta^o y_j = y_j$, para $j = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

la primera diferencia es:

$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$

la k-ésima diferencia está dada por:

$$\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

Las diferencias finitas en forma regresiva son:

$$\nabla^o y_j = y_j$$

la primera diferencia es:

$$\nabla y_j = y_j - y_{j-1}$$

la k-ésima diferencia es:

$$\nabla^k y_j = \nabla^{k-1} y_j - \nabla^{k-1} y_{j-1}$$

Las diferencias centrales se definen así:

$$\delta^o y_j = y_j$$

la primera diferencia es:

$$\delta y_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$$

Al igual que en los casos anteriores, podemos encontrar las diferencias centrales de orden superior por medio de las de orden inmediato inferior o sea que la k-ésima diferencia es:

$$\delta^k y_j = \delta^{k-1} y_{j+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} y_{j-\frac{1}{2}}$$

3.2 METODO GENERAL PARA GENERAR FORMULAS DE INTERPOLACION.

El diagrama de Frazer permite construir una gran variedad de fórmulas de interpolación polinomiales.

Este diagrama está formado por la tabla de diferencias finitas con sus elementos reunidos de la siguiente manera. (Ver tabla 3.2).

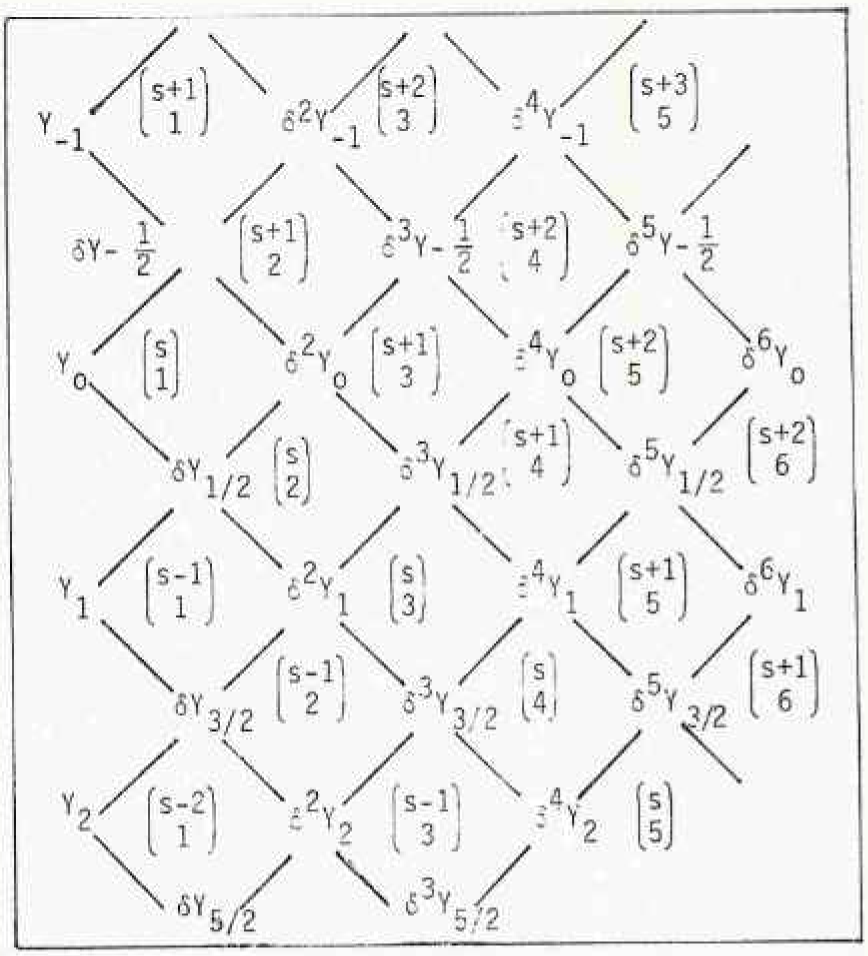


Tabla 3.2

Donde los "coeficientes binomiales" se definen como:

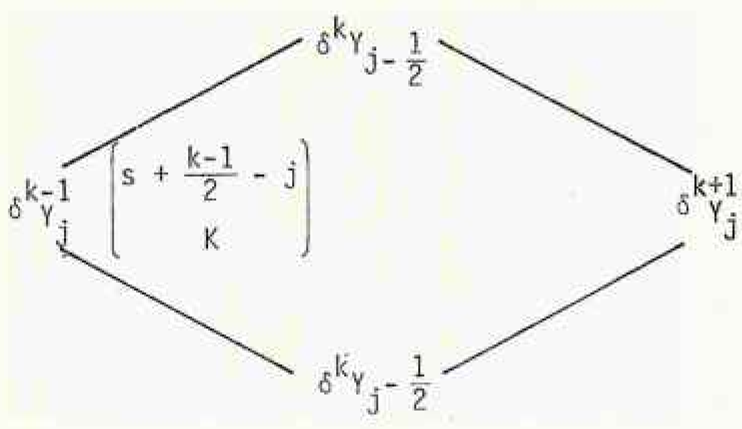
$$\binom{s}{o} = 1$$

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\ (s-2)\ \ldots\ (s\ -\ k+1)}{k\ !}\ ,\quad \text{para } k \geq 1$$

$$= \binom{s}{k-1}\ \frac{s\ -\ k+1}{k}$$

"s" no es necesario que sea un número entero. Esta es la generalización del concepto de número combinatorio para $s \in \mathbb{R}$.

Al lado izquierdo de cada paralelogramo que se forma en el diagrama, se han colocado estos coeficientes que indican que están asociados con las dos aristas izquierdas, como se muestra a continuación



también se asocia con cada segmento la diferencia finita que se encuentra a la derecha de este segmento.

Para construir una fórmula de interpolación,mediante el diagrama de Frazer, se procede de la siguiente manera:

Se comienza por el extremo izquierdo, escogiendo cualquier y_j que se encuentre en la primera columna y se toma cualquier trayectoria en el diagrama, siguiendo las aristas y terminando en cualquier diferencia.

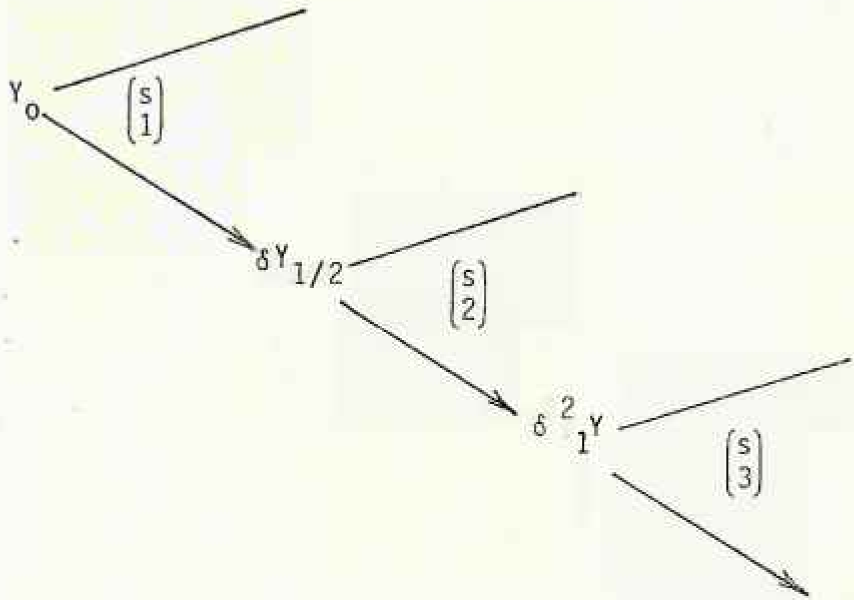
Para determinar la fórmula se hace así:

1) Se escribe el valor de la función donde la trayectoria se inicia.

2) Por cada segmento recorrido de izquierda a derecha en la trayectoria, se suma un término compuesto por la diferencia que se encuentra donde termina el segmento multiplicado por el coeficiente asociado con dicha arista. Si los segmentos se toman de derecha a izquierda los términos se restan en vez de sumarlos.

Cualquier fórmula derivada de este procedimiento que termina en la n-ésima diferencia, es algebráicamente equivalente a una fórmula Lagrangiana que use los puntos tabuladores involucrados en la diferencia final; como quedará demostrado próximamente.

Obtengamos algunas de las fórmulas más importantes. Tomemos la trayectoria indicada por las flechas.



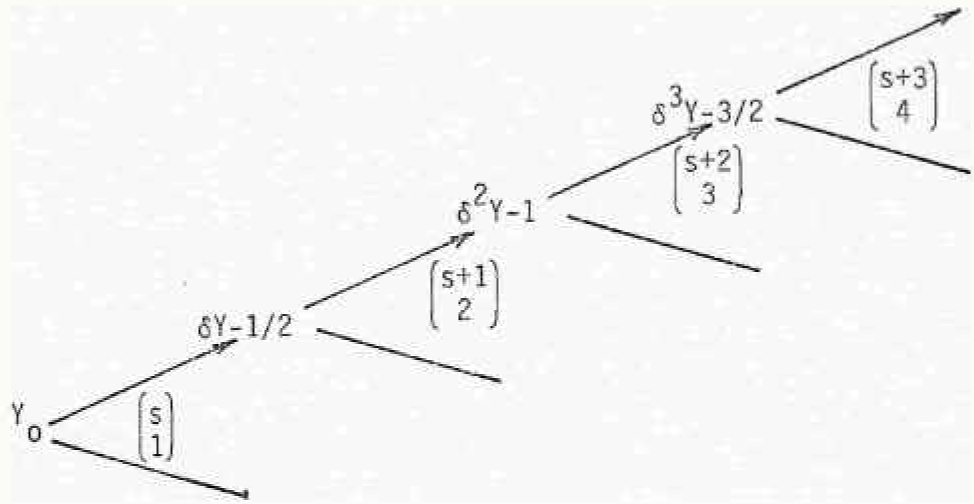
Obtenemos la fórmula (3.1) la cual es conocida como fórmula avanzada de Newton-Gregory.

$$f(x_o+sh) = y_o + \binom{s}{1} \delta y_{1/2} + \binom{s}{2}\delta^2 y_1 + \binom{s}{3}\delta^3 y_{3/2} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} \delta^k y_{k/2} \tag{3.1}$$

La fórmula (3.1) sirve para extrapolar al principio de la tabla, basta con darle a s valores negativos.

Tomemos otra trayectoria

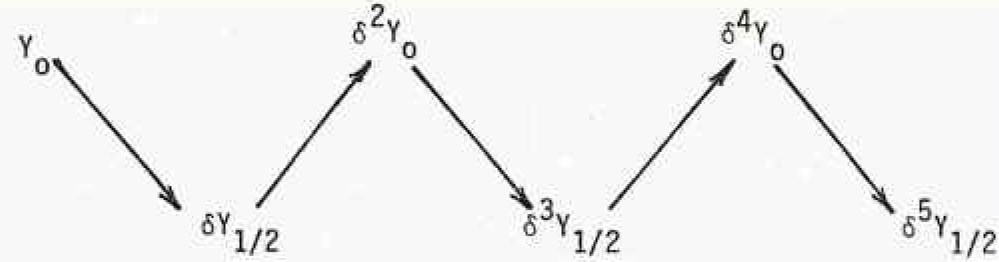


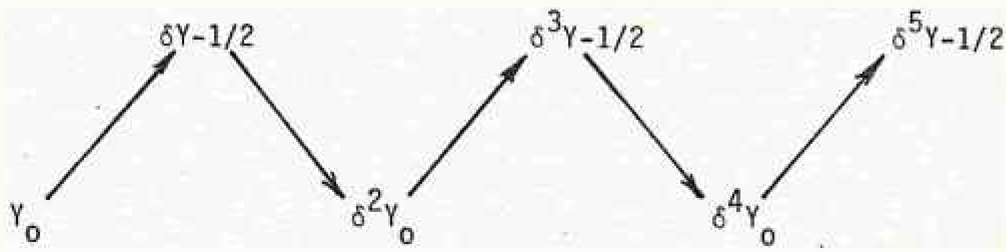
Se obtiene la fórmula (3.2) llamada Fórmula retardada de Newton-Gregory

$$f(x_0 + sh) = y_0 + \binom{s}{1} \delta y_{-\frac{1}{2}} + \binom{s+1}{2} \delta^2 y_{-1} \binom{s+2}{3} \delta^3 y_{-3/2} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{k} \delta^k y_{-k/_2} \qquad (3.2)$$

De las dos trayectorias que daremos a continuación obtenemos las fórmulas (3.3) y (3.4) llamadas progresiva y regresiva - de Gauss respectivamente, la primera sólo comprende diferencias $\delta^k y_0$ y $\delta^k y1/2$, mientras que la segunda solamente comprende las diferencias $\delta^k \; y_o$ y $\delta^k \; y_{-1/2}$.





$$f(x_o + sh) = y_o + \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \delta y_{1/2} + \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} \delta^2 \, y_o + \begin{pmatrix} s+1 \\ 3 \end{pmatrix} \delta^3 \, y_{1/2} + \ldots \qquad (3.3)$$

$$f(x_o + sh) = y_o + \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \delta y_{-1/2} + \begin{pmatrix} s+1 \\ 2 \end{pmatrix} \delta^2 \, y_o + \begin{pmatrix} s+1 \\ 3 \end{pmatrix} \delta^3 \, y_{-1/2} + \ldots \qquad (3.4)$$

Si tomamos el promedio de las fórmulas (3.3) y (3.4) obtenemos la fórmula (3.5), conocida como la fórmula de Stirling.

Para obtener la fórmula (3.5) sumemos la fórmula (3.3) y - (3.4).

$$2f(x + sh) = 2y_o + \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \left(\delta y_{1/2} + \delta y_{-1/2}\right) + \left[\begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s+1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \delta^2 y_o$$

$$+ \begin{pmatrix} s+1 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\delta^3 y_{1/2} + \delta^3 y_{-1/2}\right) + \ldots$$

$$f(x + sh) = y_0 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}s\\1\end{pmatrix}\left(\delta y_{1/2} + \;y_{-1/2}\right) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}s\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}s+1\\2\end{pmatrix}\delta^2 y_0$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}s+1\\3\end{pmatrix}\left(\delta^3 y_{1/2} + \delta^3 y_{-1/2}\right) + \dots$$

Definamos:

$$\frac{1}{2}\;(\delta y_{1/2} + \delta y_{-1/2}) = \mu\delta y_0$$

y

$$1/2\;(\delta^3\;y_{1/2} + \delta^3 y_{-1/2}) = \mu\delta^3 y_0 \qquad \text{etc.}$$

sustituyendo tenemos:

$$f(x + sh) = y_0 + \begin{pmatrix}s\\1\end{pmatrix}\delta\mu y_0 + \frac{s}{2}\begin{pmatrix}s\\1\end{pmatrix}\;\delta^2 y_0 + \begin{pmatrix}s+1\\3\end{pmatrix}\mu\delta^3 y_0 + \dots \quad (3.5)$$

Si en la fórmula (3.3), sustituimos $\delta^k\;y_{1/2}$ por $\delta^{k-1}y_1 - \delta^{k-1}y_0$, donde k es impar, después de simplificar obtenemos una fórmula donde aparecen unicamente las diferencias de orden par, como puede verse en la fórmula (3.6); llamada fórmula de Everett-Laplace.

$$f(x + sh) = (1 - s)y_0 + \begin{pmatrix}2-s\\3\end{pmatrix}\delta^2 y_0 + \dots + sy_1 + \begin{pmatrix}s+1\\3\end{pmatrix}\;\delta^2 y1 + \dots \qquad (3.6)$$

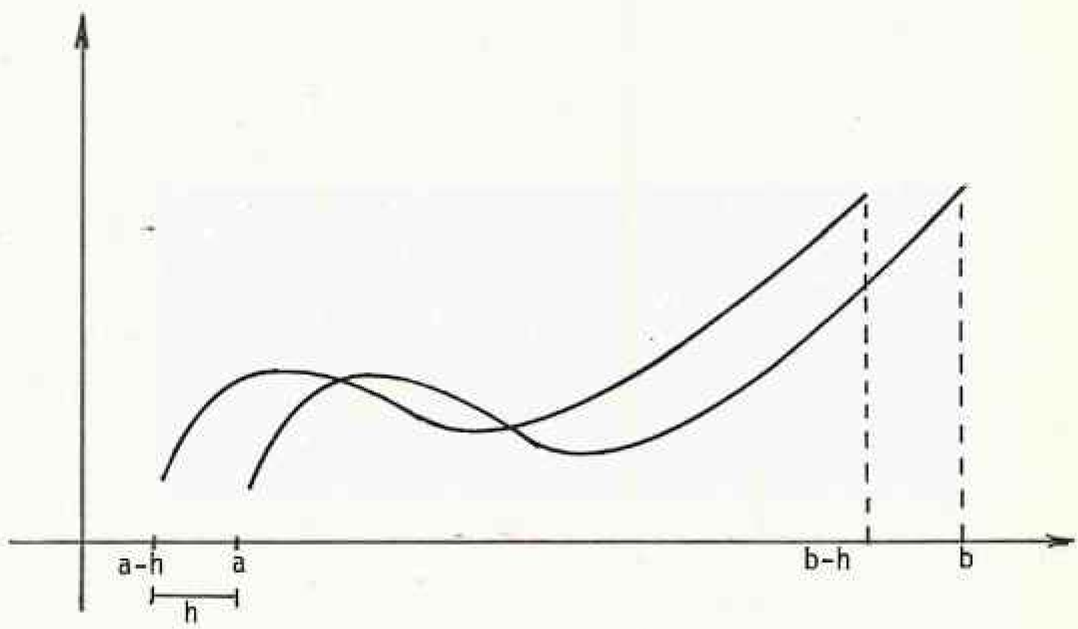
3.3 OPERADORES SIMBOLICOS RELACIONADOS CON LAS DIFERENCIAS FINITAS.

Las fórmulas obtenidas con diferencias finitas pueden representarse por medio de "operadores".

El operador desplazador es el operador fundamental entre todos los operadores, éste se representa simbólicamente con E y se define de la siguiente manera:

$$(Ef)(x) = f(x + h)$$

donde Ef es una función que toma los mismos valores de f; pero con los valores de x trasladados una distancia h. (Ver gráfica 3.1).



Gráfica 3.1

Si se aplica E repetidamente k veces se forma el operador iterado E^k. Se puede generalizar el concepto para cualquier exponentes $\in \mathbb{R}$ mediante la siguiente definición

$$(E^{s}\ f)(x) = f(x + sh) \quad , \quad \forall\ s \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.1

Si s es un número positivo tenemos

$$(E2f)(x) = f(x + 2h)$$

Si s es un número negativo tenemos

$$(E^{-2}f)(x) = f(x-2h)$$

Si s es fraccionario tenemos:

$$(E1/2f)(x) = f(x + \frac{1}{2}\ h)$$

esto puede realizarse con todos $\in \mathbb{R}$.

3.3.1 Relación de la diferencia central con el operador desplazador.

DEFINICION:

La definición general de la diferencia central es:

$$(\delta f)(x) = f(x + \frac{1}{2}\ h) - f(x - 1/2\ h)$$

En términos del operador desplazador se define así:

$$(\delta f)(x) = (E1/2\ f)(x) - (E^{-}1/2\ f)(x)$$

$$= (E^{1/2} - E^{-1/2})(f)(x)$$

de donde:

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$$

Todas las fórmulas clásicas de interpolación obtenidas en - la sección 3.2 se pueden escribir en términos de los operadores de diferencia central (δ) y del operador desplazador (E). Por ejemplo el término $\binom{s}{k} \delta^k y_{k/2}$ de la fórmula avanzada de Newton-Gregory se puede escribir así:

$$\binom{s}{k} \delta^k \; E^{k/2} f(x_o)$$

Como puede verse, los sub-índices de los y_j son los exponentes del operador desplazador.

Propiedades de los operadores

$$\delta^k y_j = \delta^k E^j f(x_o) \qquad (3.7)$$

$$E\delta = \delta E \qquad (3.8)$$

$$E^{1/2}\delta = E - 1, \qquad (3.9)$$

donde 1 es el operador identidad o sea que $1(f) = f$.

Demostración de estas propiedades:

Para (3.7), es decir

$$\delta^k\, y_j = \delta^k\, E^j\, f(x_o)$$

su demostración es realizada por inducción en k.

Para K = 1 probaremos que:

$$\delta y_j = \delta E^j\, f(x_o)$$

Tenemos por definición:

$$\begin{aligned}
\delta y_j &= \delta f(x_o + jh) \\
&= f(x_o + jh + 1/2\ h) - f(x_o + jh - 1/2\ h) \\
&= f(x_o + (j + 1/2)\, h) - f(x_o + (j - 1/2)h) \\
&= E^{j+1/2}\, f(x_o) - E^{j-1/2}\, f(x_o) \\
&= E^{1/2}\, E^j\, f(x_o) - E^{-1/2}\, E^j\, f(x_o) \\
&= (E^{1/2} - E^{-1/2})\, E^j\, f(x_o) \\
&= \delta E^j\, f(x_o)
\end{aligned}$$

Asumamos que es cierto para k, es decir:

$$\delta^k\, y_j = \delta^k\, E^j\, f(x_o)$$

Probemos que es cierto para k + 1, o sea que:

$$\delta^{k+1}\, y_j = \delta^{k+1}\, E^j\, f(x_o)$$

tenemos

$$\begin{aligned}\delta^{k+1} y_j &= \delta^k \, \delta y_j \\ &= \delta^k \, \delta \, E^j f(x_o) \\ &= \delta^{k+1} E^j f(x_o)\end{aligned}$$

$\therefore$ queda demostrado que $\delta^k y_j = \delta^k E^j f(x_o)$

Como caso particular tenemos que:

$$\delta^k y_{k/2} = \delta^k E^{k/2} f(x_o) \; .$$

Para (3.8), es decir

$$E\delta = \delta E$$

su demostración es:

$$\begin{aligned}E\delta &= E(E^{1/2} - E^{-1/2}) \\ &= E^{3/2} - E^{1/2} \\ &= E^{1/2} E - E^{-1/2} E \\ &= (E^{1/2} - E^{-1/2})E \\ &= \delta E\end{aligned}$$

$\therefore \; E\delta = \delta E$

Finalmente, para (3.9), o sea

$E^{1/2} \delta = E - 1$, donde 1 es el operador identidad o sea que $1(f) = f$, su demostración es:

$$E^{1/2}\,\delta = E^{1/2}\,(E^{1/2} - E^{-1/2})$$

$$= E - E^{\circ}$$

$$= E - 1$$

$$\therefore\; E^{1/2}\,\delta = E - 1$$

3.3.2 Relación de la Diferencia Avanzada con el Operador Desplazador.

DEFINICION.

La diferencia avanzada es igual al operador desplazador menos el operador identidad; simbólicamente la denotaremos por Δ, es decir

$$\Delta = E - 1$$

o sea que:

$$\Delta f(x) = (E - 1)\, f(x)$$

$$= Ef(x) - 1f(x)$$

$$= f(x + h) - f(x)$$

$$\therefore\; \Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$$

En términos dela diferencia central (δ), tenemos que:

$$\Delta = E^{1/2}\,\delta \quad \text{, como fué probado en (3.9)} \qquad (3.10)$$

La fórmula avanzada de Newton-Gregory se puede escribir en términos de los operadores δ y E como sigue:

$$f(x_0 + sh) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix} \delta^k \; y_{k/2}$$

o bien

$$f(x_0 + sh) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix} \delta^k \; E^{k/2} \; f(x_0)$$

sabemos que:

$$f(x_0 + sh) = E^s \; f(x_0)$$

luego

$$E^s \; f(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix} \delta^k \; E^{k/2} \; f(x_0)$$

de donde

$$E^s = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix} \delta^k \; E^{k/2}$$

Por definición de diferencia avanzada sabemos que

$$\Delta = E - 1$$

luego podemos escribir

$$E = 1 + \Delta$$

de donde

$$E^s = (1 + \Delta)^s$$

por el teorema del binomio tenemos:

$$(1 + \Delta)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} \Delta^k$$

$$\therefore \qquad E^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} \Delta^k \tag{3.11}$$

La fórmula (3.11) corresponde a la fórmula de Gregory-Newton. Esta representación E^s en términos de la diferencia avanzada (Δ) no puede aplicarse a cualquier función f, porque posiblemente no convergerá la suma. Para estos casos tenemos que verificar que la fórmula es correcta cuando f es un polinomio interpolador. Para hacer esto, es necesario el siguiente lema, el cual describe el efecto del operador de diferencia avanzada sobre los polinomios.

LEMA 3.1

Si f es un polinomio de grado n, entonces $\Delta^k f$ es idéntica - mente cero cuando k es mayor que n.

Demostración:

Si el polinomio de grado n es:

$$f(x) = a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$$

hagamos actuar el operador Δ, sobre este polinomio.

Sabemos que $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$

luego tenemos:

$$\Delta f(x) = a_n\ (x+h)^n + a_{n-1(x+h)}{}^{n-1} + \ldots + a1(x+h) + a_o - a_n x^n - a_{n-1x}{}^{n-1} - \ldots$$

$$- a_1 x - a_o$$

desarrollando el primer término tenemos:

$$= a_n(x^n + nx^{n-1}h + \ldots + h^n) + a_{n-1}(x+h)^{n-1} + \ldots + a_1(x+h) + a_o$$

$$- a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1\ x - a_o.$$

los $a_n x^n$ se anulan y obtenemos un nuevo polinomio de (n-1) gra do.

Si el operador Δ actúa sobre $\Delta f(x)$ tenemos:

$\Delta(\Delta f(x)) = \Delta 2 f(x)$ del cual obtenemos un polinomio de gra do (n-2).

Si de nuevo el operador Δ actúa sobre $\Delta 2f(x)$ tenemos:

$\Delta(\Delta 2f(x)) = \Delta 3f(x)$ y se obtiene un polinomio de grado $(n-3)$.

Cuando el operador Δ actúa sobre $\Delta^{n-1}f(x)$ tenemos:

$\Delta(\Delta^{n-1}f(x)) = \Delta^{n}f(x) = C$, donde C es una constante, o sea que la n-ésima diferencia de un polinomio de grado n es una constante.

Podemos observar que

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1}(f(x)) &= \Delta(\Delta^{n}f(x)) \\ &= \Delta\ C \\ \text{hagamos } g(x) &= C \\ \Delta g(x) &= g(x+h) - g(x) \\ &= C - C \\ &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\Delta^{n+1}(f(x)) = 0$$

o sea que la $(n+1)$-ésima diferencia es idénticamente cero.

Lo que podemos escribir como $\Delta^{k}f(x) = 0$, $\forall\ k > n$.

Por el lema 3.1 se tiene que:

$\begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \Delta^k f = 0$ cuando k es mayor que el grado de f y podemos definir $\left(\sum \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \Delta^k \right)(f)$ como la suma de la colección finita de los términos que no son cero. Es decir como

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \Delta^k \right)(f) = \begin{pmatrix} s \\ o \end{pmatrix} \Delta^{o} f + \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \Delta' f + \ldots + \begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix} \Delta^n f + \begin{pmatrix} s \\ n+1 \end{pmatrix} \Delta^{n+1} f$$

$$+ \begin{pmatrix} s \\ n+2 \end{pmatrix} \Delta^{n+2} f + \ldots$$

entonces los términos subsiguientes al (n+1) término son cero y tenemos:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \Delta^k \right)(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \Delta^k (f) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \Delta^k (f)$$

donde n es el grado del polinomio f.

La fórmula avanzada de Newton-Gregory es correcta cuando s es un entero. Si s es un número racional denotemos a $s = p/q$ donde p,q son números enteros, luego la fórmula será:

$$E^{p/q} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p/q \\ k \end{pmatrix} \Delta^k$$

la cual es equivalente con:

$$E^p = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p/q}{k} \Delta^k\right]^q$$

sustituyendo a E por su igual ($1+\Delta$) y aplicado a f tenemos:

$$(1+\Delta)^p(f) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p/q}{k} \Delta^k\right]^q (f)$$

$$= \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{p/q}{k} \Delta^k\right] \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{p/q}{k} \Delta^k\right] \cdots \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{p/q}{k} \Delta^k\right]}_{q \text{ veces.}} (f)$$

siempre que f sea un polinomio de grado menor o igual que n.

Con el miembro izquierdo obtenemos el siguiente resultado

$$(1+\Delta)^p(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} \Delta^k (f)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \Delta^k (f)$$

Si efectuamos las multiplicaciones indicadas en el miembro derecho obtenemos el mismo resultado.

La relación

$$P(x) = P(x_o + sh)$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \binom{s}{k} \delta^k y_{k/2}$$

$$= Q(s)$$

está establecida entre el polinomio $P(x)$ que toma los valores de $y = y_o, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ en $x = x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n$ con el polinomio $Q(s)$ que toma los valores $y = y_j$ en - $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n$. Queda demostrado que la fórmula de Newton-Gregory es algebráicamente equivalente al polinomio interpolador de Lagrange y también queda justificado el uso del diagrama de Frazer para generar otras fórmulas.

El polinomio interpolador $P(x)$ evaluado en x_o es igual a y_o o sea $P(x_o) = y_o$. Si evaluamos $Q(s)$ en cero será igual a y_o. En efecto, como

$$Q(s) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \delta^k y_{k/2}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
Q(o) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \cdot \delta^k y_{k/2} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta^0 y_{0/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta^1 y_{1/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta^2 y_{2/2} + \ldots \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta^0 y_o \\
&= (1)\ \delta^0 y_o \\
&= \delta^0 y_o
\end{aligned}$$

El polinomio interpolador $P(x)$ evaluado en x_1 es igual a y1 luego $Q(s)$ evaluado en 1 es igual a y1

$$Q(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{1}{k} \delta^k y_{1/2}$$

$$= \binom{1}{0} \delta^0 y_{o/2} + \binom{1}{1} \delta^1 y_{1/2} + \binom{1}{2} \delta^2 y_{1/2} + \cdots$$

$$= y_o + \delta^1 y_{1/2}$$

$$= y_o + (y_1 - y_o)$$

$$= y_1$$

3.3.3 Operador de Diferencia Retardada.

El operador de diferencia retardada se simboliza con ∇, y se define así:

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

El efecto que produce este operador en la función es el siguiente:

$$\nabla f(x) = (1 - E^{-}1) f(x)$$

$$= 1 f(x) - E^{-1} f(x)$$

$$= f(x) - f(x - h)$$

Si le aplicamos el operador desplazador tenemos:

$$\begin{aligned} E^{1/2}\,\nabla &= E^{1/2}\,(1 - E^{-1}) \\ &= E^{1/2} - E^{-1/2} \\ &= \delta \end{aligned}$$

En términos de diferencia central tenemos

$$\nabla = \delta\, E^{-1/2}$$

de donde

$$\nabla^k = \delta^k\, E^{-k/2}$$

La fórmula retardada de Newton-Gregory puede escribirse así:

$$E^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{k} \nabla^k \qquad (3.12)$$

Demostración de la fórmula (3.12)

Como

$$\begin{aligned} (E^s)\, f(x_0) &= f(x_0 + sh) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{k} \delta^k\, y_{-k/2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{k} \delta^k\, E^{-k/2}\, f(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{k} \nabla^k\, f(x_0) \\ \therefore\quad E^s &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{k} \nabla^k \end{aligned}$$

(3.13)

$$E^s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k$$

Demostración de la Fórmula (3.13).

Como

$$\binom{s+k-1}{k} = \frac{(s+k-1)\ (s+k-2)\ \dots\ (s+k-1-k+2)\ (s+k-1-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{(s+k-1)\ (s+k-2)\ \dots\ (s+1)\ (s)}{k!}$$

$$= \frac{s(s+1)\ \dots\ (s+k-2)\ (s+k-1)}{k!}$$

Multipliquemos cada factor por (-1) y todo el miembro multipliquemoslo por $(-1)^k$ para que no se altere, ya que tiene k términos

$$= \frac{(-1)^k\ (-s)\ (-s-1)\ \dots\ (-s-k+2)\ (-s-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \binom{-s}{k}$$

de donde

$$E^s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k$$

3.3.4 Efectos de los Errores en las Tablas de Diferencias Finitas.

En la práctica, los valores de la función y_j son conocidos - dentro de una cierta precisión de $\pm\ \varepsilon$. Cada término de la -

primera diferencia tendrá, por el efecto de la propagación del error, una precisión de $\pm 2\,\varepsilon$; cada término de la segunda diferencia tendrá una precisión de $\pm 2^2\,\varepsilon$ y así sucesivamente, la k-ésima diferencia tendrá una precisión de $\pm 2^k\,\varepsilon$. En la tabla 3.2 podemos observar el efecto causado por el error en un solo dato. Veamos cómo el valor de ε en la primera columna influye en la porción triangular mostrada en la tabla de diferencias 3.1. Como puede apreciarse, el error crece con el orden de las diferencias y en cada columna los coeficientes binomiales son factores del mismo.

Como los valores de estos errores son proporcionales a los coeficientes binomiales, es fácil detectar y corregir un valor incorrecto causado por un error de cálculo; como lo veremos en el ejemplo 3.2.

			0	
		0		ε
	0		ε	
0		ε		-4ε
	ε		-3ε	
ε		-2ε		6ε
	$-\varepsilon$		3ε	
0		ε		-4ε
	0		$-\varepsilon$	
		0		ε
			0	

Tabla 3.2

Ejemplo 3.2

Determinar el error en la tabla de diferencias 3.2 si $y = x^2$.

X	Y	δY	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$
0	0				
		1			
1	1		2		-1
		3		-1	
2	4		1		4
		4		3	
3	8		4		-6
		8		-3	
4	16		1		4
		9		1	
5	25		2		-1
		11			
6	36				

Tabla 3.2

Como el polinomio $f(x) = x2$ es de segundo grado la columna correspondiente a las terceras diferencias debería estar formada únicamente por ceros, si no existiera ningún error de cálculo; los coeficientes binomiales -1, 3, -3, 1 de la tercera columna indican que el error está en $x = 3$ y que tiene una magnitud igual a uno.

CAPITULO IV

DIFERENCIACION E INTEGRACION NUMERICA

4.1 DIFERENCIACION NUMERICA:

Interpretación geométrica del concepto de derivada en un punto. Recordemos que la derivada de la función $y = f(x)$, evaluada en el punto x_0, es interpretada geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Tal como se muestra en la figura 4.1

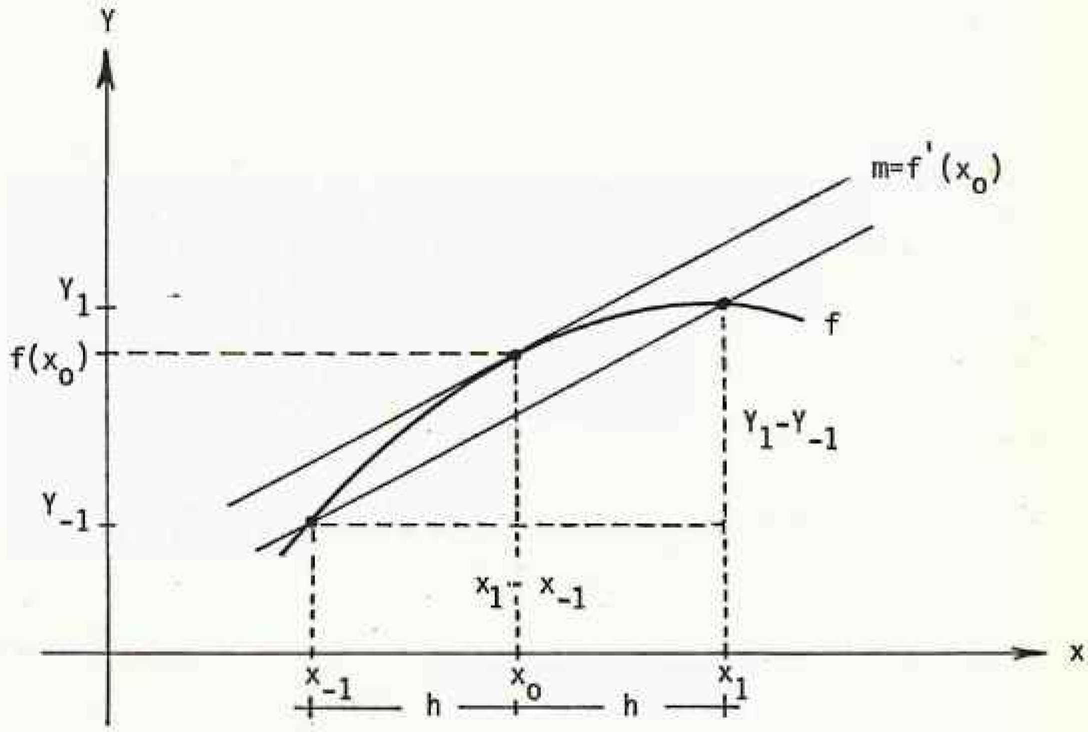


Figura 4.1

La pendiente de la recta tangente M, es el límite de la pendiente de la secante que corta la gráfica en los puntos que corresponden a $x_0 \pm h$, cuando h tiende a cero. Tenemos así que

$$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$$

la expresión anterior sería exacta si la función fuera lineal.

Desde el punto de vista del análisis numérico, la aproximación anterior tiene una desventaja; involucra la sustracción de dos cantidades cercanas y un pequeño error relativo en los números y_{-1}, y_1 puede convertirse en un error muy grande en su diferencia. Por otro lado, si para evitar en parte el problema anterior se decide tomar h no tan pequeño, la aproximación lineal a f no está muy relacionada con los valores de f cerca de x_0, si tomamos h muy pequeño se pierde mucha precisión por restar números cercanos.

Hay que buscar un valor de h óptimo para reducir el error que puede presentarse por las dos situaciones anteriores.

El operador de la derivada se representa simbólicamente por D y se define así:

$$(Df)(x) = f'(x)$$

Para poder aplicar el operador de la derivada a una función es necesario que la función sea diferenciable.

La k-ésima derivada de la función f se denota por $D^k f$.

Obtengamos fórmulas generales para la derivada haciendo uso de los operadores. Sabemos que la Fórmula de Taylor es:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h^k f^k(x_0)$$

esta puede abreviarse utilizando operadores de la siguiente manera:

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h^k D^k \qquad (4.1)$$

$$E = e^{hD} \qquad (4.2)$$

Las fórmulas (4.1) y (4.2) fueron obtenidas de la manera siguiente:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h^k f^k(x_0)$$

$$= f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

tenemos que

$$(D^n f)(x_0) = f^{(n)}(x_0) \quad , n=0, 1, 2, \ldots$$

$$\text{con } f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$$

sustituyendo por su igual tenemos

$$(Ef)(x_o) = (D^0f)(x_o) + h(Df)(x_o) + \frac{h^2}{2!}(D^2f)(x_o) + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}(D^kf)\ (x_o)$$

de donde

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\ D^k$$

o sea

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\ h^k\ D^k$$ queda demostrada de esta manera la fórmula (4.1)

Tenemos

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hD)^k}{k!}$$

la serie de potencias de e^t, donde $t \in \mathbb{R}$ es:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

De manera semejante, podemos escribir:

$E = e^{hD}$ queda justificada de esta manera la fórmula (4.2)

La representación de D en términos de diferencia avanzada es

$$D = -\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}\Delta^k \qquad (4.3)$$

la fórmula (4.3) se obtiene así:

$$E = e^{hD}$$

sustituyendo E por su igual

$$1 + \Delta = e^{hD}$$

aplicando ln a ambos miembros

$$hD = \ln(1 + \Delta)$$

$$D = \frac{1}{h}\ln(1 + \Delta)$$

como $\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots$

siempre que $|t| < 1$

entonces

$$D = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{1}{2}\Delta 2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \ldots\right]$$

$$D = -\frac{1}{h}\left[-\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1}{3}\Delta^3 + \frac{1}{4}\Delta^4 - \ldots\right]$$

$$D = -\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}\Delta^k$$

Queda demostrada de esta manera la fórmula (4.3).

La representación de la derivada en términos de diferencia retardada es:

$$D = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \nabla^k \tag{4.4}$$

la fórmula (4.4) se obtiene así:

$$E = e^{hD}$$

$$\frac{1}{E^{-1}} = e^{hD}$$

aplicando ln a ambos miembros tenemos

$$\ln \left(\frac{1}{E^{-1}}\right) = hD$$

sustituyendo E^{-1} por su igual tenemos

$$\ln \left(\frac{1}{1-\nabla}\right) = hD$$

$$\ln 1 - \ln(1-\nabla) = hD$$

$$D = \frac{-\ln (1-\nabla)}{h}$$

$$= -\frac{1}{h} \ln (1-\nabla)$$

$$= -\frac{1}{h} \left(-\nabla - \frac{\nabla^2}{2} - \frac{\nabla^3}{3} - \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{h} \left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \ldots \right)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \nabla^k$$

de esta manera queda demostrada la fórmula (4.4).

Las fórmulas (4.3) y (4.4) pueden emplearse para encontrar derivadas al principio o al final de una tabla de valores, respectivamente.

La derivada en términos del operador de la diferencia central es

$$D = \frac{1}{h} \left(\delta - \frac{1}{24} \delta^3 + \frac{3}{640} \delta^5 - \frac{5}{7168} \delta^7 + \ldots \right) \qquad (4.5)$$

o bien:

$$D = \frac{1}{h} \left(\mu\delta - \frac{1}{3!} \mu\delta^3 + \frac{2^2}{5!} \mu\delta^5 - \frac{2^2 \times 3^2}{7!} \mu\delta^7 + \ldots \right) \qquad (4.6)$$

La fórmula (4.5) se obtiene así:

$$E = e^{hD}$$

$$E^{1/2} = e^{\frac{hD}{2}}$$

$$E^{-1/2} = e^{-\frac{hD}{2}}$$

como $\delta = \Delta E^{-1/2}$

y $\Delta = E - 1$

sustituyendo tenemos

$$\delta = (E - 1)\ E^{-1/2}$$

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$$

sustituyendo cada término por su igual tenemos

$$\delta = e^{\frac{hD}{2}} - e^{-\frac{hD}{2}}$$

$$\frac{1}{2}\ \delta = \frac{1}{2}\ \left[e^{hD/2} - e^{-\frac{hD}{2}}\right]$$

El seno hiperbólico de t se representa simbólicamente por sen h(t) y se define así:

$$\text{sen h}(t) = \frac{1}{2}\ (e^{t} - \bar{e}^{t})$$

$$= \frac{t}{1!} + \frac{t^{3}}{3!} + \frac{t^{5}}{5!} + \ldots$$

de donde

$$\frac{\delta}{2} = \text{sen h}\ \left(\frac{hD}{2}\right)$$

$$\frac{hD}{2} = \text{sen h}^{-1}\ (\tfrac{\delta}{2})$$

$$D = \frac{2}{h}\ \text{sen h}^{-1}\ (\tfrac{\delta}{2}) \qquad (4.7)$$

La inversa del seno hiperbólico está dada por:

$$\text{sen } h^{-1}(u) = u - \frac{1^2}{3!} u^3 + \frac{1^2 \times 3^2}{5!} u^5 - \frac{1^2 \times 3^2 \times 5^2}{7!} u^7 + \ldots$$

de donde

$$D = \frac{2}{h} \left[\frac{\delta}{2} - \frac{1^2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 + \frac{1^2 \times 3^2}{5!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^5 - \frac{12 \times 32 \times 52}{7!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^7 + \ldots \right]$$

$$= \frac{1}{h} \left[\delta - \frac{1}{2^2 \, . \, 3!} \delta^3 + \frac{3^2}{24 \, . \, 5!} \delta^5 - \frac{32 \times 52}{26 \, . \, 7!} \delta^7 + \ldots \right]$$

$$= \frac{1}{h} \left[\delta - \frac{1}{24} \delta^3 + \frac{3}{640} \delta^5 - \frac{5}{7168} \delta^7 + \ldots \right]$$

La fórmula (4.5) no es satisfactoria porque $\delta^k y_j$ no se encuentran en las tablas de diferencias finitas cuando k es impar y j es un número entero. Por esta razón es necesario introducir un nuevo operador, el cual se usó en la fórmula (4.6). Este nuevo operador es llamado operador promedio, se representa simbólicamente por μ y se define así:

$$\mu = \frac{1}{2} (E^{1/2} + E^{-1/2})$$

Demostraremos las siguientes expresiones, las cuales ocupare mos para demostrar la fórmula (4.6)

$$\mu\,\delta = \frac{1}{2}\,(E - E^{-1}) \qquad (4.a)$$

$$\mu + \frac{1}{2}\,\delta = E^{1/2} \qquad (4.b)$$

$$\mu - \frac{1}{2}\,\delta = E^{-1/2} \qquad (4.c)$$

$$\mu = \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right)^{1/2} \qquad (4.d)$$

Demostración del (4.a)

$$\mu\,\delta = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{1/2}\right)\left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,(E - E^{-1})$$

Demostración del (4.b)

$$\mu + \frac{1}{2}\,\delta = \frac{1}{2}\,(E^{1/2} + E^{-1/2}) + \frac{1}{2}\,(E^{1/2} - E^{-1/2})$$

$$= \frac{1}{2}\,E^{1/2} + \frac{1}{2}\,E^{-1/2} + \frac{1}{2}\,E^{1/2} - \frac{1}{2}\,E^{-1/2}$$

$$= E^{1/2}$$

Demostración del (4.c)

$$\mu - \frac{1}{2}\,\delta = \frac{1}{2}\,(E^{1/2} + E^{-1/2}) - \frac{1}{2}\,(E^{1/2} - E^{-1/2})$$

$$= \frac{1}{2} E^{1/2} + \frac{1}{2} E^{-1/2} - \frac{1}{2} E^{1/2} + \frac{1}{2} E^{-1/2}$$

$$= E^{-1/2}$$

Demostración del (4.d)

Multipliquemos (4.b) con (4.c) y obtenemos

$$(\mu + \frac{\delta}{2}) \ (\mu - \frac{\delta}{2}) = E^{1/2} \ . \ E^{-1/2}$$

Efectuando ambos miembros tenemos:

$$\mu^2 - \frac{\delta^2}{4} = 1$$

$$\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$$

$$\mu = \left[1 + \frac{\delta^2}{4}\right]^{1/2}$$

La fórmula (4.6) se obtiene así:

$$D = 1D \qquad (4.8)$$

por (4.d) tenemos que

$$1 = \mu\left[1 + \frac{\delta^2}{4}\right]^{-1/2}$$

sustituyendo en (4.8) obtenemos

$$D = \mu \left[1 + \frac{\delta^2}{4}\right]^{-1/2} D$$

sustituyendo D por (4.7) tenemos

$$D = \frac{2}{h}\,\mu\left[1 + \frac{\delta^2}{4}\right]^{-1/2} \left[\text{sen } h^{-1}\ (\tfrac{\delta}{2})\right]$$

$$= \frac{2}{h}\,\mu\left[1 + \frac{\delta^2}{4}\right]^{-1/2}\left[\frac{\delta}{2} - \frac{12}{3!}\ (\tfrac{\delta}{2})^3 + \frac{12\ .\ 32}{5!}\ (\tfrac{\delta}{2})^5 - \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{h}\ \left[1 + \frac{\delta^2}{4}\right]^{-1/2}\left[\mu\delta - \frac{1^2}{2^2 3!}\ \mu\delta^3 + \frac{3^2}{2^4 5!}\ \mu\delta^5 - \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[1 - \frac{1}{23}\,\delta^2 + \frac{9}{24\ .\ 4!}\,\delta^4 + \ldots\right]\left[\mu\delta - \frac{1^2}{2^2.3!}\mu\delta^3 + \frac{1^2.3^2}{2^4.5!}\,\mu\delta^5 - \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{h}\ \left[\mu\delta - \frac{1}{3!}\,\mu\delta^3 + \frac{22}{5!}\,\mu\delta^5 - \frac{22\ x\ 32}{7!}\mu\delta^7 + \ldots\right]$$

En ciertos casos se requieren fórmulas con más flexibilidad, o sea para poder calcular la derivada de una función en un punto que no se encuentra en medio ni en los extremos de los puntos dados y queremos hacer uso de todos los datos disponibles. Para estos casos se usa la siguiente fórmula

$$D = \frac{1}{h}\ln E \tag{4.9}$$

de donde

$$D\,E^{s} = \frac{1}{h}\ (\ln\ E)\ E^{s}$$

$$= \frac{1}{h}\ (\ln\ (1 + \Delta))\ (1 + \Delta)^{s} \tag{4.10}$$

la fórmula (4.10) se puede expander y multiplicar las series de potencias correspondientes; para valores de $s = 1, 2, 3, \ldots$

Obtendremos DE^s para los cinco puntos siguientes

x_o, x_1, x_2, x_3, x_4.

Por (4.10) tenemos:

$$DE^o = \frac{1}{h} (\ln (1 + \Delta)) (1 + \Delta)^o$$

$$= \frac{1}{h} \ln (1 + \Delta)$$

$$= \frac{1}{h} \left[\Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 - \frac{1}{4} \Delta^4 + \ldots\right] \qquad (4.11)$$

$$DE^1 = \frac{1}{h} \left[\Delta + \frac{1}{2} \Delta^2 - \frac{1}{6} \Delta^3 + \frac{1}{12} \Delta^4 - \ldots\right] \qquad (4.12)$$

$$DE^2 = \frac{1}{h} \left[\Delta + \frac{3}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 - \frac{1}{12} \Delta^4 + \ldots\right] \qquad (4.13)$$

$$DE^3 = \frac{1}{h} \left[\Delta + \frac{5}{2} \Delta^2 + \frac{11}{6} \Delta^3 + \frac{1}{4} \Delta^4 - \ldots\right] \qquad (4.14)$$

$$DE4 = \frac{1}{h} \left[\Delta + \frac{7}{2} \Delta^2 + \frac{13}{3} \Delta^3 + \frac{25}{12} \Delta^4 + \ldots\right] \qquad (4.15)$$

De manera similar se puede obtener DE^s para cualquier número de puntos y para cualquier valor de s.

Estas fórmulas se pueden aplicar a f en x_o y si sustitui - mos $\Delta^k y_j$ por su valor en términos de los y_j obtenemos otras fórmulas que son más fáciles de usar. Tenemos que

$$DE^{s} f(x_s) = f'(x_s)$$

Las fórmulas de derivación, en términos de los valores de - la función son:

$$y'_0 = \frac{1}{12h} (- 25 y_0 + 48 y_1 - 36 y_2 + 16 y_3 - 3 y_4) \qquad (4.16)$$

$$y'_1 = \frac{1}{12h} (- 3 y_0 - 10 y_1 + 18 y_2 - 6 y_3 + y_4) \qquad (4.17)$$

$$y'_2 = \frac{1}{12h} (y_0 - 8 y_1 + 8 y_3 - y_4) \qquad (4.18)$$

$$y'_3 = \frac{1}{12h} (- y_0 + 6 y_1 - 18 y_2 + 10 y_3 + 3 y_4) \qquad (4.19)$$

$$y'_4 = \frac{1}{12h} (3 y_0 - 16 y_1 + 36 y_2 - 48 y_3 + 25 y_4) \qquad (4.20)$$

La dificultad que presentan estas fórmulas es que cada una de ellas se aplica únicamente a un punto determinado.

La fórmula (4.16) se obtiene así:

$$DE^{o} f(x_o) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_o - \frac{1}{2} \Delta^2 y_o + \frac{1}{3} \Delta^3 y_o - \frac{1}{4} \Delta^4 y_o\right]$$

Obtengamos por separado cada uno de sus términos

$$\Delta y_o = y_1 - y_o$$

$$\Delta^2 y_o = \Delta(\Delta y_o)$$

$$= \Delta(y_1 - y_o)$$

$$= y_2 - 2y_1 + y_o$$

luego

$$\frac{1}{2}\Delta^2 y_o = \frac{1}{2} y_2 - y_1 + \frac{1}{2} y_o$$

$$\Delta^3 y_o = \Delta^2 (\Delta y_o)$$

$$= \Delta (\Delta^2 y_o)$$

$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_o$$

luego

$$\frac{1}{3}\Delta^3 y_o = \frac{1}{3} y_3 - y_2 + y_1 - \frac{1}{3} y_o$$

$$\Delta^4 y_o = \Delta^3 (\Delta y_o)$$

$$= \Delta(\Delta^3 y_o)$$

$$= y_4 - 4y3 + 6y_2 - 4y_1 + y_o$$

luego

$$\frac{1}{4}\Delta^4 y_o = \frac{1}{4} y_4 - y_3 + \frac{3}{2} y_2 - y_1 + \frac{1}{4} y_o$$

Sustituyendo cada uno de sus términos por su igual y realizando las operaciones indicadas en la fórmula tenemos:

$$DE^{o}\, f(x_o) = \frac{1}{h}\left[-\frac{25}{12}\,y_o + 4\,y_1 - 3\,y_2 + \frac{4}{3}\,y_3 - \frac{1}{4}\,y_4\right]$$

$$= \frac{1}{12h}\left[-25\,y_o + 48\,y_1 - 36\,y_2 + 16\,y_3 - 3\,y_4\right]$$

De una manera semejante se pueden obtener las fórmulas (4.17) al (4.18).

4.2 INTEGRACION NUMERICA.

La integral definida de una función continua $f(x)$, positiva en el intervalo cerrado $[a,b]$, siendo $a < b$, se puede interpretar como el área bajo la curva de $f(x)$ y por encima del eje de las abscisas y comprendida entre dos rectas verticales que corresponden a los valores de $x = a$ y $x = b$. Ver figura 4.2.

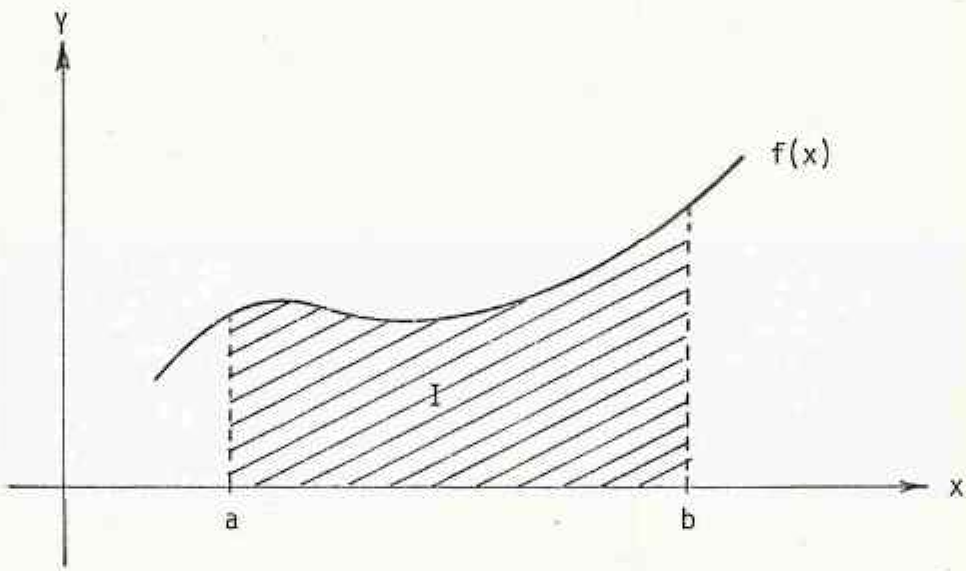


Figura 4.2

Simbólicamente se escribe así:

$$I = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

que se lee "integral de f respecto a x, entre a y b".

En análisis numérico la integral se calcula cubriendo el área por rectángulos angostos. La altura de cada rectángulo corresponde aproximadamente a un valor de f(x).

Cuando el número de rectángulos es suficientemente grande, la suma de sus áreas sirve como una proximación para I. - Ver figura 4.3.

Cuando los límites de integración a,b son fijos se dice que I es una integral definida.

O sea

$$I = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Cuando el límite superior de la integral no es fijo o sea que se representa por x que se considera como una variable, la función F(x) que así se define se llama integral indefinida de f; o sea

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

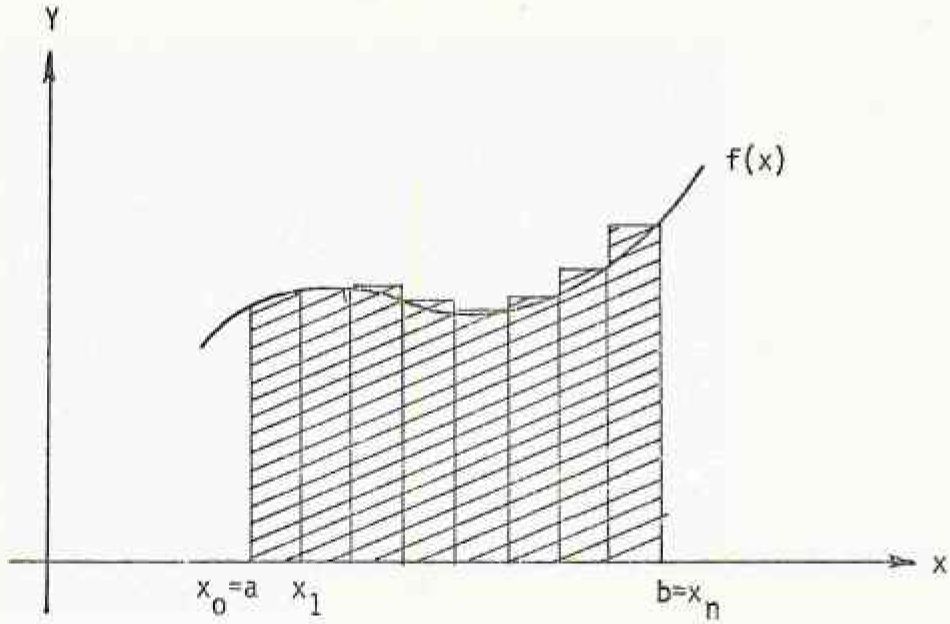


Figura 4.3

El teorema fundamental del cálculo dice:

Toda integral de una función continua f es una primitiva de f. En otras palabras, si

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad ,$$

entonces

$$F'(x) = f(x)$$

Este teorema se utiliza comúnmente para calcular integrales buscando antiderivadas.

El operador de la integral indefinida se representa simbólicamente por I y se define como:

$$(If)(x) = \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$$

$$= F(x+h) - F(x)$$

$$= \Delta F(x)$$

luego $If = \Delta F$

donde F es una integral indefinida de f.

Una manera de expresar el teorema fundamental del cálculo en término de los operadores simbólicos es

$$DI = \Delta \tag{4.21}$$

<u>Demostración del (4.21)</u>

$$If = \Delta F$$

apliquemos D a ambos miembros

$$DIf = D\Delta F$$

$$= \Delta DF$$

$$= \Delta f$$

luego $DI = \Delta$

Escribamos el teorema de una forma que será útil para los cálculos. Sea s un número entero.

$$\int_{x_o}^{x_o + sh} = \int_{x_o}^{x_o + h} + \int_{x_o + h}^{x_o + 2h} + \dots + \int_{x_o + (s-1)h}^{x_o + sh}$$

$$= I + IE + \dots + IE^{s-1}$$

$$= I\left(1 + E + \dots + E^{s-1}\right)$$

como

$$1^s - E^s = (1-E)\left[1 + E + E^2 + \dots + E^{s-1}\right]$$

despejando tenemos

$$\frac{1^s - E^s}{1 - E} = 1 + E + E^2 + \dots + E^{s-1}$$

de donde

$$\int_{x_o}^{x_o + sh} = I\left(\frac{1 - E^s}{1 - E}\right)$$

multipliquemos por (-1) el numerador y el denominador

$$= I\left(\frac{E^s - 1}{E - 1}\right) \tag{4.22}$$

como $D = \frac{1}{h}\ln E$

$$= \frac{1}{h}\ln(1 + \Delta)$$

entonces

$$I = \Delta D^{-1}$$

$$= \frac{h\Delta}{\ln\ (1 + \Delta)} \tag{4.23}$$

al sustituir esta última relación con (4.22) tenemos que

$$\int_{x_o}^{x_o + sh} = \frac{h\Delta}{\ln\ (1+\Delta)} \cdot \frac{E^s - 1}{E - 1}$$

sustituyendo E tenemos

$$\int_{x_o}^{x_o + sh} = \frac{h\Delta}{\ln(1 + \Delta)} \cdot \frac{(1 + \Delta)^s - 1}{(1 + \Delta) - 1}$$

$$= h\ \frac{(1 + \Delta)^s - 1}{\ln(1 + \Delta)} \tag{4.24}$$

Es bastante trabajoso calcular la serie de potencia de este operador para un valor general de s. Alternativamente podemos tomar s como un grupo pequeño de rectángulos contiguos, para calcular parte del área; se repite el cálculo grupo - por grupo, después se suman y se obtiene el resultado.

Calcularemos a continuación para $s = 1$ y $s = 2$.

Cuando $s = 1$ tenemos

$$\int_{x_o}^{x_o + h} = h \frac{(1 + \Delta) - 1}{\ln(1 + \Delta)}$$

$$= h \frac{\Delta}{\ln(1 + \Delta)}$$

$$= \frac{h\Delta}{\Delta \left(1 - \frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{3} \Delta^2 - \frac{1}{4} \Delta^3 + \ldots\right)}$$

$$= h \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{3} \Delta^2 - \frac{1}{4} \Delta^3 + \ldots} \qquad (4.25)$$

Si efectuamos la división nos da

$$\int_{x_o}^{x_o + h} = h \left(1 + \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{12} \Delta^2 + \frac{1}{24} \Delta^3 + \ldots\right)$$

cuando $s = 2$ tenemos

$$\int_{x_o}^{x_o + 2h} = h \frac{(1 + \Delta)^2 - 1}{\ln(1 + \Delta)}$$

$$= h \frac{\Delta (2 + \Delta)}{\ln(1 + \Delta)}$$

$$= h \frac{2 + \Delta}{1 - \frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{3} \Delta^2 - \frac{1}{4} \Delta^3 + \ldots}$$

$$= h \left(2 + 2\Delta + \frac{1}{3} \Delta^2 + \frac{7}{18} \Delta^4 + \ldots\right)$$

Los símbolos 1,2 son operadores que significan

$(1f)(x) = f(x)$ y $(2f)(x) = 2f(x)$

REGLA DE SIMPSON.

Esta regla es muy usada en la integración numérica, se requiere que n sea un número entero par. La expresión correspondiente a la fórmula de la Regla de Simpson viene dada por:

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(t)dt = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + \ldots + 2\,y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right] \tag{4.26}$$

Las fórmulas (4.27) y (4.28) dadas a continuación son llamadas Regla de Simpson para tres y cinco puntos respectivamente

$$\int_{x_0}^{x_2} f(t)dt = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2) \tag{4.27}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(t)dt = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + y_4) \tag{4.28}$$

Demostración de la fórmula (4.27)

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_0 + 2h} f(t)dt &= h\,(2 + 2\Delta + \tfrac{1}{3}\,\Delta^2)\,f(x_0)\\ &= h\,(2\,y_0 + 2\Delta y_0 + \tfrac{1}{3}\,\Delta^2\,y_0)\\ &= h\,\left[2\,y_0 + 2\,y_1 - 2\,y_0 + \tfrac{1}{3}\,(y_1 - 2\,y_1 + y_0)\right]\end{aligned}$$

$$= h \left(\frac{1}{3} y_o + \frac{4}{3} y_1 + \frac{1}{3} y_2\right)$$

$$= \frac{h}{3} (y_o + 4 y_1 + y_2)$$

de donde

$$\int_{x_o}^{x_2} f(t)dt = \frac{h}{3} (y_o + 4 y_1 + y_2)$$

Demostración de la fórmula (4.28)

$$\int_{x_o}^{x_4} f(t)dt = \int_{x_o}^{x_2} f(t)dt + \int_{x_2}^{x_4} f(t)dt$$

$$= \frac{h}{3} (y_o + 4 y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4 y_3 + y_4)$$

$$= \frac{h}{3} (y_o + 4 y_1 + 2 y_2 + 4 y_3 + y_4)$$

Hay otras fórmulas para la integración numérica que se pueden deducir de los operadores simbólicos.

Por ejemplo la fórmula (4.22) se puede expresar en términos de la diferencia retardada como lo veremos a continuación:

tenemos:

$$\int_{x_o}^{x_o + sh} = I \left(\frac{E^s - 1}{E - 1}\right)$$

sabemos que:

$$\nabla \quad = 1 - E^{-1}$$

$$E^{-1} = 1 - \nabla \qquad (4.29)$$

$$E \quad = \frac{1}{1-\nabla} \qquad (4.30)$$

como $E \quad = 1 + \Delta$

tenemos $1 + \Delta = \frac{1}{1-\nabla}$ $\qquad (4.31)$

de donde $\Delta = \frac{\nabla}{1-\nabla}$ $\qquad (4.32)$

En la fórmula (4.22) hagamos s = 1

$$\int_{x_0}^{x_0 + h} = I \left(\frac{E - 1}{E - 1}\right)$$

$$= I$$

Por (4.23) tenemos

$$I = \frac{h\Delta}{\ln (1 + \Delta)}$$

Sustituyendo (4.31) y (4.32) tenemos

$$= \frac{h\nabla}{(1 - \nabla) \ln (\frac{1}{1-\nabla})}$$

$$= \frac{-h\nabla}{(1 - \nabla) \ln(1 - \nabla)}$$

$$= \frac{-h\nabla}{(1 - \nabla)(- \nabla - \frac{\nabla^2}{2} - \frac{\nabla^3}{3} - \dots)}$$

$$= \frac{h\nabla}{(1 - \nabla)(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \dots)}$$

$$= \frac{h\nabla}{(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \dots) + (-\nabla^2 - \frac{\nabla^3}{2} - \frac{\nabla^4}{3} - \dots)}$$

$$= \frac{h\nabla}{\nabla\left[(1 + \frac{\nabla}{2} + \frac{\nabla^2}{3} + \dots) + (- \nabla - \frac{\nabla^2}{2} - \frac{\nabla^3}{3} - \dots)\right]}$$

$$= \frac{h}{(1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{6}\nabla^2 - \frac{1}{12}\nabla^3 - \frac{1}{20}\nabla^4 - \dots)}$$

de donde obtenemos

$$I = h\left[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2 + \frac{3}{8}\nabla^3 + \frac{251}{720}\nabla^4 + \dots\right] \qquad (4.33)$$

Si s = - 1 tenemos

$$I\ E^{-1} = \int_{x_{o-h}}^{x_o} = - \int_{x_o}^{x_o - h}$$

Pero

$$- \int_{x_o}^{x_o - h} = - I\ \frac{E^{-1} - 1}{E - 1}$$

por (4.23) y $E = 1 + \Delta$ tenemos

$$IE^{-1} = -\left[\frac{h\Delta}{\ln(1+\Delta)}\right]\left[\frac{(1+\Delta)^{-1} - 1}{(1+\Delta) - 1}\right]$$

$$= -h\,\frac{(1+\Delta)^{-1} - 1}{\ln(1+\Delta)}$$

despejando y sustituyendo por (4.31) tenemos

$$= -h\,\frac{1-\nabla-1}{\ln\left(\frac{1}{1-\nabla}\right)}$$

operando tenemos

$$= \frac{h\nabla}{-\ln(1-\nabla)}$$

$$= \frac{h\nabla}{-\left(-\nabla - \frac{\nabla^2}{2} - \frac{\nabla^3}{3} - \ldots\right)}$$

$$= \frac{h\nabla}{\nabla\left(1 + \frac{\nabla}{2} + \frac{\nabla^2}{3} + \ldots\right)}$$

$$= \frac{h}{1 + \frac{\nabla}{2} + \frac{\nabla^2}{3} + \ldots}$$

de donde

$$IE^{-1} = h\left(1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \ldots\right) \qquad (4.34)$$

CAPITULO V

METODOS NUMERICOS PARA LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

5.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN.

El estudio de la determinación de las soluciones de las ecuaciones diferenciales es de gran importancia en física, en ingeniería y en muchas ramas de la Matemática pura.

DEFINICION 5.1

Se denominan ecuaciones diferenciales aquellas ecuaciones cuyas incógnitas son funciones de una o varias variables; estas ecuaciones incluyen no sólo dichas funciones, sino también sus derivadas.

DEFINICION 5.2

Si las funciones desconocidas en una ecuación diferencial dependen de una sola variable independiente, las ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones diferenciales ordinarias.

DEFINICION 5.3

Una ecuación diferencial es de orden n si la n-ésima derivada ocurre; pero no efectúa ninguna otra derivada de orden - más alto.

Existen diversas clases de ecuaciones diferenciales, de gran importancia y amplitud cuyas soluciones pueden determinarse con facilidad, como por ejemplo:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = g(x)$$

La solución se puede encontrar efectuando n integraciones sucesivas. La mayor parte de las ecuaciones diferenciales que se presentan en la práctica son demasiado complicadas para que admitan una solución explícita.

Existen muchos métodos numéricos para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Entre estos métodos tenemos:

Método de Euler, Método de Runge-Kutta, Método de los Isoclinos, Método de Adams, Método Predictor-Corrector, etc. Alguno de los cuales serán tratados en este Capítulo.

Introducimos la siguiente notación:

$$y'(x) = G(x, y(x))$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$I = [a,b]$$

5.2 METODO DE EULER.

La idea ilustrada en una descripción gráfica de la solución de una ecuación diferencial de primer orden sugiere una manera de resolverla numéricamente, "flecha por flecha" (Ver Figura 5.1). Si h es tan pequeña que $f'(x)$ no cambia mucho en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_1 = x_0 = h$, tenemos aproximadamente

$$y_1 = y_0 + h\, f'(x_0)$$

$$= y_0 + h\, G\,(x_0, y_0)$$

Esto define el Método de Euler, con el cual se calcula el valor de f en cada punto en base de su valor en el punto anterior.

$$y_{n+1} = y_n + h\, G(x_n, y_n)$$

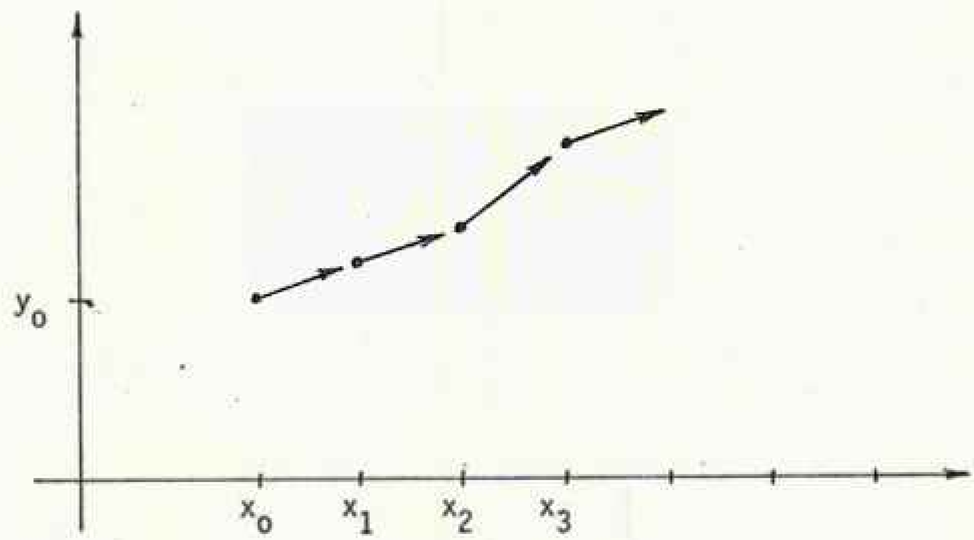


Figura 5.1

El valor de y_1 tendrá un error causado por la aproximación lineal a la solución en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$, y_2 tendrá un error causado en parte por la aproximación lineal sobre $x_1 \leq x \leq x_2$ y en parte por el error que ya tiene y_1. Así, el error se acumulará de punto en punto, originando una solución numérica más y más lejos de la verdadera solución.

Para que este método sea válido se debe aplicar en un intervalo corto, el cual se puede dividir en pocos subintervalos de longitud h.

La fórmula para este método es:

$$y_{i+1} = y_i + h\,G(x_i,\ y_i) \tag{5.1}$$

El procedimiento para obtener 5.1 es:

Si la función que buscamos y(x) es continua y dos veces diferenciable en el intervalo I, por el Teorema de Taylor tenemos que la función en x_{i+1} es:

$$y_{i+1} = y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2}\,y''(\xi_i)$$

donde $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$

la primera derivada de x_i es $y'(x_i) = G(x_i,\ y(x_i))$

sustituyendo tenemos

$$y_{i+1} = y(x_i) + h\,G(x_i,\ y(x_i)) + \frac{h^2}{2}\,y''(\xi_i)$$

si h es sumamente pequeña y como la segunda derivada es continua en I entonces, despreciando el término

$\frac{h^2}{2}\, y''(\xi_i)$ tenemos:

$$y_{i+1} \cong y_i + h\, G(x_i, y_i) \; .$$

ALGORITMO DE EULER 5.1

Este Algoritmo es para establecer una aproximación a la solución del problema de valores iniciales $y'(x) = G(x,y)$, $y(x_o) = y_o$ en el intervalo cerrado $I = [a,b]$

Paso 1 tomar $h = \frac{b-a}{n}$

$$x_o = a$$

$$y_o = y(x_o)$$

Paso 2 hacer $i = 1$

Paso 3 hacer $x_i = x_o + ih$

$$y_i = y_{i-1} + h\, G(x_{i-1}, y_{i-1})$$

Paso 4 Si $i < n$ aumentar una unidad a i y regresar al paso 3

Paso 5 Si $i = n$ el proceso se ha completado y y_i aproxima a $y(x_i)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo 5.1

Aplicar el Método de Euler a $y' = y-x$ con $y(o) = 2$ en el intervalo $[0,1]$ cuando $h = \frac{1}{4}$ y $h = \frac{1}{2}$

$y_{i+1} = y_i \; h \; G(x_i, y_i)$ o bien

$y_i = y_{i-1} + h \; G(x_{i-1}, y_{i-1})$ en este ejemplo

$y_i = y_{i-1} + h \; (y_{i-1} - x_{i-1})$

como $x_o = 0$, $x1 = h$, $x2 = 2h$ y en general $x_{i-1=(i-1)h,}$ sustituyendo cuando $h = \frac{1}{4}$ tenemos:

$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{4} \; (y_{i-1} - \frac{1}{4} \; (i-1))$

$y_i = \frac{5}{4} \; y_{i-1} - \frac{1}{16} \; (i-1)$

para $i = 1, 2, 3, 4$ tenemos

$y_1 = \frac{5}{4} \; y_o - \frac{1}{16} \; (1-1)$

$= 2.5$

$y_2 = \frac{5}{4} \; y_1 - \frac{1}{16} \; (2-1)$

$= 3.0625$

$y_3 = \frac{5}{4} \; y_2 - \frac{1}{16} \; (3-1)$

$= 3.7031$

$y_4 = \frac{5}{4} \; y_3 - \frac{1}{16} \; (4-1)$

$= 4.4414$

Para $h = \frac{1}{4}$ obtenemos la Tabla 5.1

x_n	Usando: Euler	Verdadero Valor	|Error|
0.00	2.0000	2.0000	0.0000
0.25	2.5000	2.5340	0.0340
0.50	3.0625	3.1487	0.0862
0.75	3.7031	3.8251	0.1220
1.00	4.4414	4.7183	0.2769

Tabla 5.1

Cuando $h = \frac{1}{2}$ tenemos

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}\left(y_{i-1} - \frac{1}{2}(i-1)\right)$$

$$y_i = \frac{3}{2}\, y_{i-1} - \frac{1}{4}(i-1)$$

$$y_1 = \frac{3}{2}\, y_o - \frac{1}{4}(1-1)$$

$$= 3$$

$$y_2 = \frac{3}{2}\, y_1 - \frac{1}{4}(2-1)$$

$$= 4.25$$

Para $h = \frac{1}{2}$ ver Tabla 5.2

x_n	Euler	Verdadero Valor	|Error|
0.0	2.	2	-
0.5	3.	3.1487	0.1487
1.0	4.25	4.7183	0.4683

Tabla 5.2

Conclusión los errores son mayores cuando los puntos están - más espaciados o sea cuando el valor de h e s mayor; como se puede observar en las Tablas 5.1 y 5.2.

5.3 METODO DE TAYLOR.

Este método se basa en la serie de Taylor y su desventaja radica en el cálculo de las derivadas.

El Método de Taylor de primer orden es el mismo Método de Euler visto anteriormente.

El Método de Taylor de segundo orden se expresa de la manera siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + h\ G(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} G'(x_i, y_i) \qquad (5.2)$$

La expresión (5.2) se obtiene así:

$$y_{i+1} = y_i\ h\ Y'_i + \frac{h^2}{2}\ y''_i + O(h^3) \qquad (5.3)$$

donde el término O(h3) es considerado como el error de truncamiento y que simbólicamente podemos escribir $O(h^{\gamma+1})$ donde γ indica el orden del método.

como $y' = G(x,y)$

$$y''(x) = \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$= G_x(x,y) + G_y(x,y)\, G(x,y)$$

sustituyendo en (5.3) tenemos:

$$y_{i+1} = y_i + h\, G(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left[G_x(x_i,y_i) + G(x_i,y_i)\, G_y(x_i,y_i) \right]$$

la cual se denota de la manera siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + h\, G(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} G'(x_i, y_i) .$$

El Método de Taylor de n-ésimo orden se expresa así:

$$y_{i+1} = y_i + h\, G(x_i,y_i) + \frac{h^2}{2} G'(x_i,y_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!} G^{n-1}(x_i,y_i). \quad (5.4)$$

<u>Ejemplo 5.2</u>

Resolver el problema de valores iniciales $y' = 1 - y$, $y(o)=0$ tomando $h = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en el intervalo $I = [0,1]$ por el Método de Taylor de segundo y cuarto orden.

Para Taylor de segundo orden tenemos:

$$y_i = y_{i-1} + h\, G(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{h^2}{2} G'(x_{i-1}, y_{i-1}) \qquad (5.5)$$

como $y' = 1 - y$ tenemos:

$$G(x_{i-1}, y_{i-1}) = 1 - y_{i-1}$$

$$G'(x_{i-1}, y_{i-1}) = y_{i-1} - 1$$

si $h = \frac{1}{2}$ tenemos:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}(1 - y_{i-1}) + \frac{1}{8}(y_{i-1} - 1)$$

$$= y_{i-1}(0.625) + 0.375$$

$$y_1 = y_o(0.625) + 0.375$$

$$= 0.375$$

$$y_2 = y_1(0.625) + 0.375$$

$$= 0.60938$$

Si $h = \frac{1}{4}$ tenemos:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{4}(1 - y_{i-1}) + \frac{1}{32}(y_{i-1} - 1)$$

$$y_i = y_{i-1}(0.78125) + 0.21875$$

$$y_1 = y_o(0.78125) + 0.21875$$

$$= 0.21875$$

$$y2 = y_{1(0.78125)} + 0.21875$$

$$= 0.38965$$

$$y_3 = y_2\ (0.78125) + 0.21875$$

$$= 0.52316$$

$$y_4 = y_3\ (0.78125) + 0.21875$$

$$= 0.62747$$

Para $h = \frac{1}{2}$ ver Tabla 5.3, para $h = \frac{1}{4}$ ver Tabla 5.4.

x_n	Método Taylor	Verdadero Valor	|Error|
0.0	0.	0.	0.
0.5	0.37500	0.39347	0.01847
1.0	0.60938	0.63212	0.02274

Tabla 5.3

x_n	Método Taylor	Verdadero Valor	|Error|
0.00	0.	0.	0.
0.25	0.21875	0.22120	0.00245
0.50	0.38965	0.39347	0.00382
0.75	0.52316	0.52763	0.00447
1.00	0.62747	0.63212	0.00465

Tabla 5.4

Para Taylor de cuarto orden tenemos:

$$y_i = y_{i-1} + h\,G(x_i,y_i) + \frac{h^2}{2}G'(x_i,y_i) + \frac{h^3}{6}G''(x_i,y_i) + \frac{h^4}{24}G'''(x_i,y_i) \tag{5.6}$$

donde tenemos que:

$$G(x_{i-1}, y_{i-1}) = 1 - y_{i-1}$$

$$G'(x_{i-1}, y_{i-1}) = y_{i-1} - 1$$

$$G''(x_{i-1}, y_{i-1}) = 1 - y_{i-1}$$

$$G'''(x_{i-1}, y_{i-1}) = y_{i-1} - 1$$

Para $h = \frac{1}{2}$ tenemos:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}(1 - y_{i-1}) + \frac{1}{8}(y_{i-1} - 1) + \frac{1}{48}(1 - y_{i-1}) + \frac{1}{384}(y_{i-1} - 1)$$

$$= y_{i-1}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{48} + \frac{1}{384}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{48} - \frac{1}{384}\right)$$

$$= y_{i-1}\left(\frac{233}{384}\right) + \frac{151}{384}$$

$$= y_{i-1}\,(0.60677) + 0.39323$$

$$y1 = y_0\,(0.60677) + 0.39323$$

$$= 0.39323$$

$$y_2 = y_1\,(0.60677) + 0.39323$$

$$= (0.39323)\,(0.60677) + 0.39323$$

$$= 0.63183$$

Para $h = \frac{1}{4}$ tenemos:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{4}(1 - y_{i-1}) + \frac{1}{32}(y_{i-1} - 1) + \frac{1}{384}(1 - y_{i-1}) + \frac{1}{6144}(y_{i-1} - 1)$$

$$= y_{i-1}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{32} - \frac{1}{384} + \frac{1}{6144}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{384} - \frac{1}{6144}\right)$$

$$= y_{i-1}\,(0.77881) + 0.22119$$

$$y_1 = y_o\,(0.77881) + 0.22119$$

$$= 0.22119$$

$$y2 = y_1\,(0.77881) + 0.22119$$

$$= (0.22119)\,(0.77881) + 0.22119$$

$$= 0.39345$$

$$y3 = y2\,(0.77881) + 0.22119$$

$$= (0.39345)\,(0.77881) + 0.22119$$

$$= 0.52761$$

$$y4 = y3\,(0.77881) + 0.22119$$

$$= (0.52761)\,(0.77881) + 0.22119$$

$$= 0.6321$$

Para $h = \frac{1}{2}$ ver Tabla 5.5, para $h = \frac{1}{4}$ ver Tabla 5.6.

x_n	Método Taylor	Verdadero Valor	|Error|
0.00	0.00000	0.00000	0.00000
0.50	0.39323	0.39347	0.00024
1.00	0.63183	0.63212	0.00029

Tabla 5.5

x_n	Método Taylor	Verdadero Valor	|Error|
0.00	0.00000	0.00000	0.00000
0.25	0.22119	0.22120	0.00001
0.50	0.39345	0.39347	0.00002
0.75	0.52761	0.52763	0.00002
1.00	0.63210	0.63212	0.00002

Tabla 5.6

Como podemos observar , en cualquier orden del Método de Taylor los errores son mayores cuando el valor de h es mayor, por lo tanto si queremos obtener un valor más exacto, el valor de h debe ser lo más pequeño posible.

Si comparamos el método de segundo orden con el de cuarto - orden teniendo h el mismo valor se observa que el de cuarto orden da mayor exactitud.

5.4 METODO DE RUNGE KUTTA.

Este método se aplica a las ecuaciones diferenciales de primer orden, se puede usar también para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de cualquier orden.

El método presenta las siguientes características: Es un método de auto-iniciación o sea que no utiliza la información de puntos previamente calculados por otros métodos; es un método directo o sea que no requiere iteraciones para llegar a un valor suficientemente preciso; es un método de un paso, porque para encontrar y_{i+1} necesitamos solamente la información del punto precedente, (x_i, y_i).

Este método tiene la ventaja de no evaluar ninguna derivada, sólo requiere varias evaluaciones de la función $G(x,y)$. Es un método de alta precisión.

Interpretación Geométrica:

Supóngase que tenemos una solución y_i en x_i podemos entonces dibujar la recta L1 que pasa por el punto (x_i, y_i) y que tiene como pendiente a

$$Y_i' = G(x_i, y_i)$$

la solución exacta es la curva $y = y(x)$, la cual se desconoce. Ver Figura 5.2.

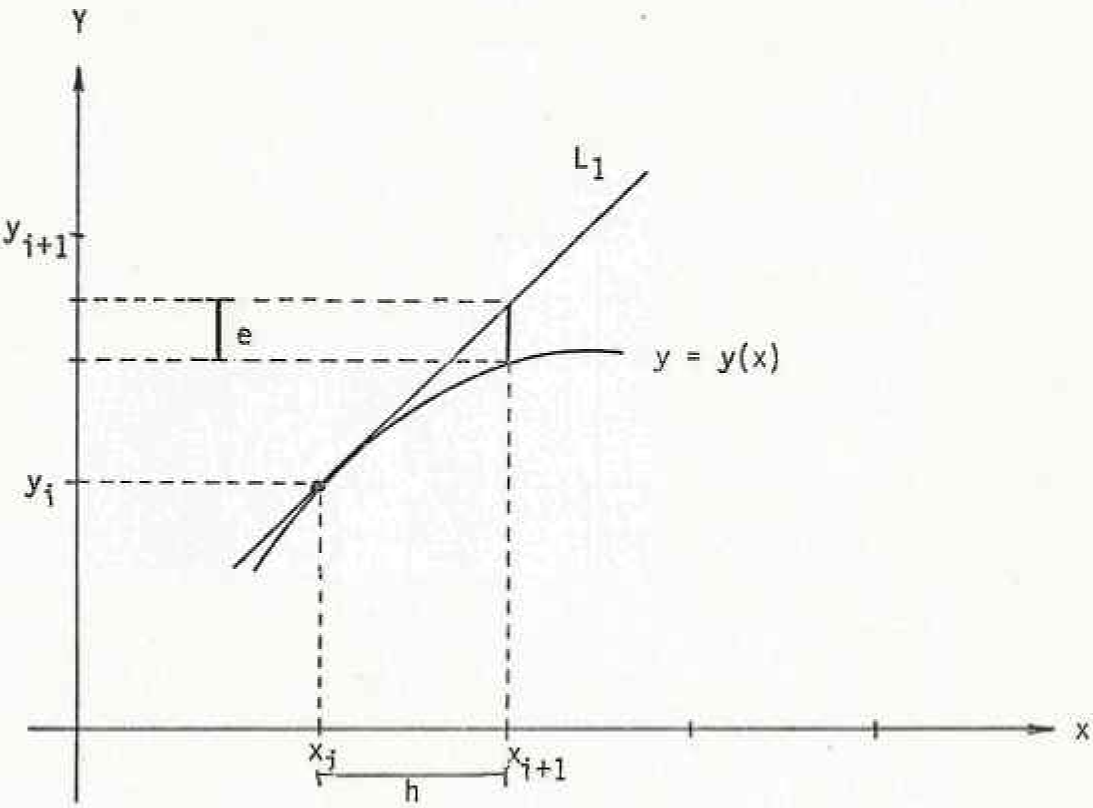


Figura 5.2

La ecuación de la línea L_1 es

$$y = y_i + y'_i \ (x - x_i)$$

pero

$$y'_i = G(x_i,\ y_i)$$

y $\quad x_{i+1} - x_i = h$

de donde

$$y_{i+1} = y_i + h\ G(x_i,\ y_i) \tag{5.7}$$

El error en x_{i+1} se denota por e.

La fórmula (5.7) pertenece al Método de Euler, y el cual decimos que es un Método de Runge-Kutta de primer orden.

El método de Runge-Kutta de primer orden puede mejorarse de muchas maneras, veremos a continuación dos de ellas. El Método de Euler y el Método Modificado de Euler.

5.5 METODO MEJORADO DE EULER O METODO DE HEUN.

Su fórmula es:

$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi\,(x_i,\, y_i) \qquad (5.8)$$

de donde

$$\phi\,(x_i,\, y_i) = \tfrac{1}{2}\, G(x_i,\, y_i) + \tfrac{1}{2}\, G(x_i + h\,,\, y_i + h\, y_i')$$

y

$$y_i' = G(x_i,\, y_i)$$

La fórmula (5.8) se obtiene geométricamente de la manera siguiente: (Ver Figura 5.3).

1. Usemos la Figura 5.2 para determinar el punto $(x_i + h,\, y_i + h\, y_i')$ que se encuentra en la recta L_1.
2. En ese punto, calculemos la pendiente de la curva $y = y(x)$, $G(x_i + h,\, y_i + h\, y_i')$, lo que nos iieva a la línea L_2.

3. Promediemos las dos pendientes de las rectas L1 y L2 y obtenemos la recta $\overline{L}$.

4. Tracemos la recta L, paralela a $\overline{L}$, que pase por el punto (x_i, y_i). El punto en que la recta L intersecta a la ordenada levantada en x_{i+1} es el punto (x_{i+1}, y_{i+1}).

5. La pendiente de la recta L que es la misma pendiente de la recta $\overline{L}$, es

$$\phi(x_i, y_i) = \frac{1}{2}\left[G(x_i, y_i) + G(x_i + h, y_i + h y_i')\right]$$

6. La ecuación de la recta L es

$$Y = y_i + (x - x_i)\ \phi\ (X_i, y_i)$$

de donde

$$y_{i+1} = y_i + h\ \phi(x_i, y_i)$$

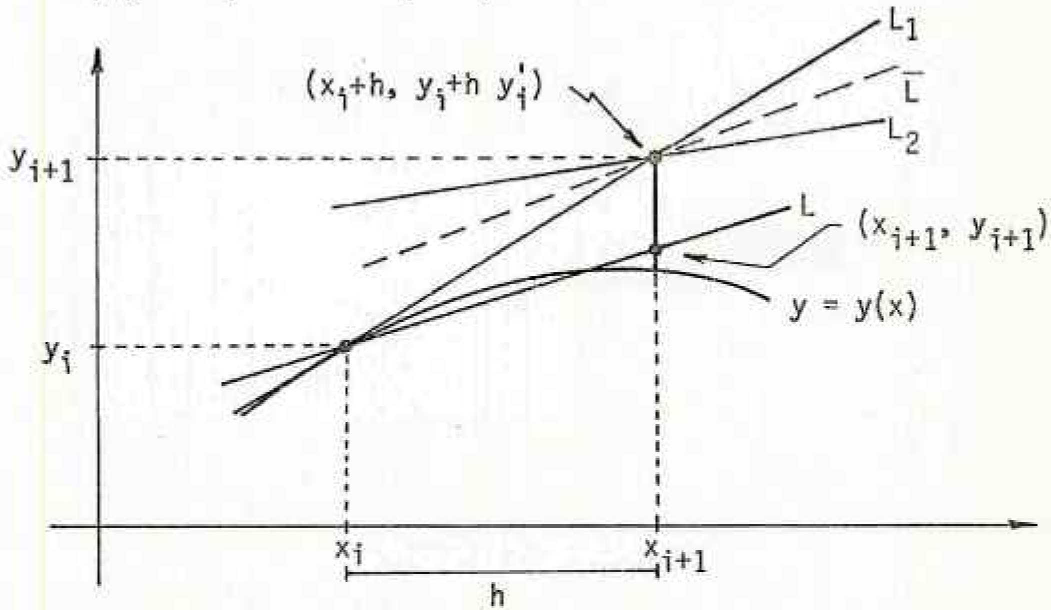


Figura 5.3

Veremos que el Método mejorado de Euler coincide con la Serie de Taylor.

La expansión de la función G(x,y) mediante la Serie de Taylor se puede escribir así:

$$G(x,y) = G(x_i, y_i) + (x - x_i) \frac{\partial G}{\partial x} + (y - y_i) \frac{\partial G}{\partial y} + \ldots \qquad (5.9)$$

donde las derivadas parciales son evaluadas en $x = x_i$ y $y = y_i$; al tomar $x = x_i + h$ y $y = y_i + h\, y_i'$

tenemos que $h = x - xi$, $y - y_i = h\, y_i'$, $y_i' = G(x_i, y_i)$

sustituyendo en (5.9) obtenemos

$$G(x_i + h, y_i + h\, y_i') = G + h\, G_x + h\, G\, G_y + O(h^2)$$

G y todos sus derivados son evaluados en x_i, y_i.

Sustituyendo este resultado en

$$\phi(x_i, y_i) = \frac{1}{2} \left[G(x_i, y_i) + G(x_i + h, y_i + h\, y_i') \right]$$

obtenemos

$$\phi(x_i, y_i) = \frac{1}{2} \left[G + G + hG_x + hGG_y + O(h2) \right]$$

$$= G + \frac{h}{2} (G_x + GG_y) + O(h2)$$

sustituyendo este resultado en (5.8) obtenemos

$$y_{i+1} = y_i + h \left[G + \frac{h}{2} (G_x + GG_y) + O(h^2) \right]$$

$$= y_i + hG + \frac{h^2}{2} (G_x + GG_y) + O(h^3)$$

Este resultado coincide con la Serie de Taylor hasta los términos en h2, luego el Método mejorado de Euler es un Método de Runge-Kutta de segundo orden. En este método se valúa $G(x,y)$ dos veces, una en (x_i, y_i) y la otra en $(x_i + h,$ $y_i + h\, y_i')$; mientras que en la Serie de Taylor requiere tres evaluaciones de funciones: G, G_x, G_y.

5.6 METODO MODIFICADO DE EULER O METODO MEJORADO DEL POLIGONO.

Hemos visto que en el método mejorado de Euler se promedian pendientes. Otra alternativa para mejorar el Método de Euler podría ser el de promediar puntos. Este nuevo enfoque nos conduce al método modificado de Euler, cuya fórmula es:

$$y_{i+1} = y_i + h\, \phi(x_i, y_i) \tag{5.10}$$

de donde

$$\phi(x_i, y_i) = G(x_i + \frac{h}{2}\, ,\ y_i + \frac{h}{2}\, y_i')$$

y

$$y_i' = G(x_i, y_i)$$

La fórmula (5.10) se obtiene geométricamente de la siguiente manera: (Ver Figura 5.4)

1. Tracemos la recta L_1 que pase por el punto (x_i, y_i) y tiene una pendiente dada por $G(x_i, y_i)$.

2. Levantemos una ordenada en $x_i + \frac{h}{2}$ hasta intersectar a la recta L1, el punto de intersección lo llamaremos P, cuya segunda componente es $y = y_i + \frac{h}{2} y'_i$

3. Calculemos la pendiente de la recta L2 que pasa por P, esta es

$$\phi(x_i, y_i) = G(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} y'_i)$$

donde

$$y'_i = G(x_i, y_i)$$

4. Tracemos la recta L_o paralela a L2 que pase por el punto (x_i, y_i).

5. Levantemos una ordenada en x_{i+1} que se intersecta con la recta L_o, la intersección será el punto (x_{i+1}, y_{i+1}).

6. La ecuación de la recta L_o es

$$y = y_i + (x - x_i) \phi (x_i, y_i)$$

de donde

$$y_{i+1} = y_{i+h} \phi (x_i, y_i)$$

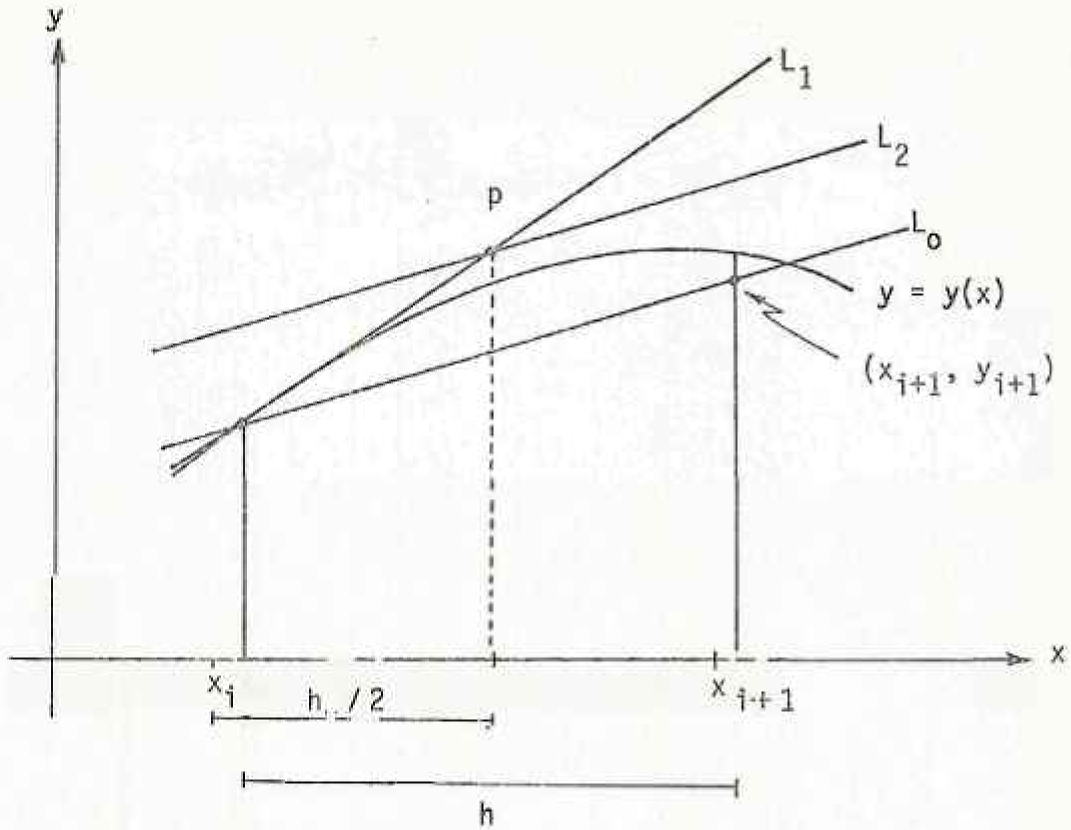


Figura 5.4

Veremos a continuación que el Método modificado de Euler coincide con la Serie de Taylor hasta los términos en h2.

La expansión de $G(x,y)$ mediante la Serie de Taylor es

$$G(x,y) = G(x_i, y_i) + (x - x_i)\frac{\partial G}{\partial x} + (y - y_i)\frac{\partial G}{\partial y} + \ldots \qquad (5.11)$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en $x = x_i$ y $y = y_i$. Si tomamos $x = x_i + \frac{h}{2}$ y $y = y_i + \frac{h}{2}y_i'$ obtenemos que $(x - x_i) = \frac{h}{2}$, $(y - y_i) = \frac{h}{2}y_i'$, $y_i' = G(x_i, y_i)$

sustituyendo en (5.11) obtenemos:

$$G(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} y_i') = G + \frac{h}{2} G_x + \frac{h}{2} GG_y + O\left[\frac{h2}{4}\right]$$

G y todos sus derivados son evaluados en x_i, y_i.

Pero

$$\phi(x_i, y_i) = G(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} y_i')$$

luego,

$$\phi(x_i, y_i) = G + \frac{h}{2} G_x + \frac{h}{2} GG_y + O\left[\frac{h^2}{4}\right]$$

$$= G + \frac{h}{2} (G_x + GG_y) + O\left[\frac{h^2}{4}\right]$$

sustituyendo este resultado en (5.10) obtenemos

$$y_{i+1} = y_i + h\left[G + \frac{h}{2} (G_x + GG_y) + O\left[\frac{h^2}{4}\right]\right]$$

$$= y_i + h\, G + \frac{h^2}{2} (G_x + GG_y) + O\left[\frac{h^3}{4}\right]$$

Este resultado coincide con la Serie de Taylor hasta los - términos en h2, luego el Método modificado de Euler es un - método de Runge-Kutta de segundo orden.

Al comparar estos dos métodos de segundo orden de Runge-Kutta, el mejorado y el modificado de Euler, se observa que los dos están dados por una expresión de la misma forma que es:

$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x_i, y_i) \tag{5.12}$$

y que la expresión ϕ en ambos casos es de la forma

$$\phi(x_i, y_i) = a_1 G(x_i, y_i) + a_2 G(x_i + b_1 h, y_i + b_2 h y_i') \qquad (5.13)$$

y que

$$y_i' = G(x_i, y_i) \qquad (5.14)$$

Por ejemplo, para el Método mejorado de Euler

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = b_2 = 1$$

mientras que para el Método modificado de Euler tenemos que

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 1$$

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$$

Las ecuaciones (5.12), (5.13) y (5.14) constituyen una fórmula del tipo Runge-Kutta.

Veamos cuál es el orden máximo que pueden tener los Métodos de Runge - Kutta y cuáles son los valores que permiten los parámetros a1, a2, b1, b2.

Para que coincida con la Serie de Taylor hasta los términos en h, sólo necesitamos de un parámetro.

Para que coincida hasta los términos en h2 necesitamos tres parámetros, considerando los términos hG, $h2G_x$ y $h2GG_y$. Como tenemos cuatro parámetros lo mejor que podemos obtener es una fórmula de segundo orden.

Como tenemos cuatro parámetros y sólo necesitamos satisfacer tres condiciones, se pueden derivar muchas fórmulas diferentes de segundo orden.

En el desarrollo en series para G(x,y) con respecto a x_i, y_i dado en (5.9) hagamos

$$x = x_i + b_1h$$
$$y = y_i + b_2hG$$

de donde

$$x - x_i = b_1h$$
$$y - y_i = b_2hG$$

entonces

$$G(x_i + b_1h,\ y_i + b_2hG) = G + b_1h\ G_x + b_2h\ G\ G_y + O(h^2)$$

donde las funciones del segundo miembro se valúan en x_i, y_i. Entonces (5.12) se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h\left[a_1G + a_2G\ (x_i + b_1\ h\ ,\ y_i + b2\ h\ G)\right] \\ &= y_i + h\left[a1G + a2\ (G + b1\ h\ G_x + b2\ h\ GG_y + O(h2)\right] \\ &= y_i + h\left[(a_1 + a2)G + h\ (a_2\ b1\ G_x + a2b2\ GG_y)\right] + O(h3) \end{aligned}$$

Comparando este resultado con la Serie de Taylor de segundo orden escrita de la manera siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + h \left[G + \frac{h}{2} (G_x + GG_y)\right] + O(h^3)$$

como queremos que coincidan sus términos, hagamos:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 \; b_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 \; b_2 = \frac{1}{2}$$

de esta manera tenemos tres ecuaciones con cuatro parámetros; para resolverlas hagamos:

$$a_2 = w \qquad \text{con} \quad w \neq 0$$

entonces $a_1 = 1-w$

$$b_1 = \frac{1}{2w}$$

$$b_2 = b_1$$

y las ecuaciones (5.12), (5.13), (5.14) se reducen a

$$y_{i+1} = y_i + h \Big[(1-w) \; G(x_i, y_i) + wG(x_i + \frac{h}{2w} \; , \; y_i + \frac{h}{2w} G(x_i, y_i))\Big] + O(h^3) \qquad (5.15)$$

Este es el método más general de Runge-Kutta de segundo orden. Si hacemos $w = \frac{1}{2}$ obtenemos el Método mejorado de Euler;

si w = 1 obtenemos el Método modificado de Euler. De la expresión (5.15) puede inferirse que en caso que las derivadas subsiguientes no tengan mayor variación y dado que el término dominante en la expresión del error es el que corresponde a h3, podemos asumir que el error por truncamiento es proporcional a h3, es decir podemos asumir que el error por truncamiento es $|e_t| = K\ h3$ donde K es una constante.

El Método de Runge-Kutta de cuarto orden se expresa de la siguiente forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_y) \qquad (5.16)$$

donde

$$k_1 = G(x_i, y_i) \qquad (5.17)$$

$$k_2 = G\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h\ k_1}{2}\right) \qquad (5.18)$$

$$k_3 = G\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h\ k_2}{2}\right) \qquad (5.19)$$

$$k_4 = G\left(x_i + h, y_i + h\ k_3\right) \qquad (5.20)$$

Hemos encontrado que la expresión general de las fórmulas de Runge-Kutta de 2° orden es

$$y_{i+1} = y_i + h\left[a_1\ G(x_i, y_i) + a_2\ G(x_i + b_1 h, y_i + b_1 h\ y_i')\right]$$

Por analogía podemos esperar que la expresión general para las fórmulas de Runge-Kutta de cuarto orden es:

$$y_{i+1} = y_i + h \left[a_1 G(x_i,y_i) + a_2 G(x_i + b_1 h, y_i + b_1 h y_i') \right.$$
$$\left. + a_3 G(x_i + b_2 h, y_i + b_2 h y'') + a_4 G(x_i+b_3 h, y_i+b_3 y''')\right]$$

Veamos como se obtuvo la fórmula (5.16). Pongamos esta fórmula de la manera siguiente:

$$y_{(x+h)} = y_{(x)} + \frac{h}{6} (a\ k_1 + b\ k_2 + c\ k_3 + d\ k_4) \tag{5.21}$$

$$k_1 = G(x,y)$$
$$k_2 = G(x + mh\ ,\ y + mh\ k_1)$$
$$k_3 = G(x + nh\ ,\ y + nh\ k_2)$$
$$k_4 = G(x + ph\ ,\ y + ph\ k_3)$$

Encontremos los coeficientes a, b, c, d, m, n y p. Para esto reproduzcamos la Serie de Taylor hasta h4

$$y_{(x+h)} = y_{(x)} + h\ y'(x) + \frac{1}{2} h^2\ y''(x) + \frac{1}{6} h^3\ y'''(x) + \frac{1}{24} h^4\ y^{IV}(x) + 0(h^5)$$

si $y' = G(x,y)$

$$y'' = G_x + G_y\ y'$$
$$= G_x + G_y\ G$$
$$y''' = G_{xx} + 2GG_{xy} + G2G_{yy} + G_y\ (G_x + GG_y)$$

$$y^{iv} = G_{xxx} + 3GG_{xxy} + 3G^2\, G_{xyy} + G^3\, G_{yyy}$$
$$+ G_y\, (G_{xx} + 2GG_{xy} + G2\, G_{yy})$$
$$+ 3\,(G_x + GG_y)\,(G_{xy} + GG_{yy}) + G_y^2\,(G_x + GG_y)$$

Expresemos la Serie de Taylor de una forma que facilite las comparaciones. Para esto hagamos

$$F_1 = G_x + GG_y$$
$$F_2 = G_{xx} + 2\, GG_{xy} + G^2\, G_{yy}$$
$$F_3 = G_{xxx} + 3\, GG_{xxy} + 3\, G^2\, G_{xyy} + G^3\, G_{yyy}$$

lo que permite escribir la Serie de Taylor como

$$y_{(x+h)} = y_{(x)} + hG + \frac{1}{2}h^2\, F_1 + \frac{1}{6}h^3\,(F_2 + G_y\, F_1)$$
$$+ \frac{1}{24}\, h^4 \Big[F_3 + G_y\, F_2 + 3(G_{xy} + GG_{yy})F_1$$
$$+ G_y^2\, F1\Big] + 0(h5) \qquad (5.22)$$

Si calculamos los valores de K por un procedimiento similar obtenemos:

$$k_1 = G$$
$$k_2 = G + mh\, F_1 + \frac{1}{2}m^2\, h^2\, F_2 + \frac{1}{6}m^3\, h^3\, F_3$$

$$k_3 = G + nh\ F_1 + \frac{1}{2}\ h^2\ (n^2\ F_2 + 2mn\ G_y\ F_1)$$

$$+ \frac{1}{6}\ h^3\ (n^3\ F_3 + 3\ m^2n\ G_y\ F_2 + 6mn^2\ (G_{xy} + GG_{yy})F_1$$

$$k_4 = G + Ph\ F_1 + \frac{1}{2}\ h^2\ (P^2\ F_2 + 2np\ G_y\ F_1)$$

$$+ \frac{1}{6}\ h^3\ \left[P^3F_3 + 3n^2P\ G_yF_2 + 6nP^2\ (G_{xy} + GG_{yy})F_1 + 6mn\ PG_y^2\ F_1)\right]$$

Combinando éstos como se sugiere en la Fórmula de Runge-Kutta tenemos:

$$y_{(x+h)} = y(x) + (a + b + c + d)\ hG + (bm + c\,n + dp)h^2\ F_1$$

$$+ \frac{1}{2}\ (bm2 + cn2 + dp2)h3\ F2 + \frac{1}{6}\ (bm3 + cn3 + dp3)h4\ F3$$

$$+ (emn + dnp)h^3\ G_y\ F_1 + \frac{1}{2}\ (cm^{2n} + dn2p)h4\ G_y\ F2$$

$$+ (emn2 + dnp^2)h^4\ (G_{xy} + GG_{yy})F_1 + dmnph^4\ G_y^2\ F_1 + O(h^5)$$

Al compararlo con la Serie de Taylor expresada en (5.22) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$a + b + c + d$	$= 1$	$bm^3 + cn^3 + dp^3$	$= \frac{1}{4}$
$bm + e\,n + dp$	$= 1/2$	$cm^2n + dn2p$	$= \frac{1}{12}$
$bm2 + en2 + dp2$	$= 1/3$	$cmn^2 + dnp2$	$= \frac{1}{8}$
$cmn + dnp$	$= 1/3$	$dmnp$	$= 1/24$

Estas ocho ecuaciones y siete incógnitas al resolverlas pre sentan una infinidad de soluciones y de ellas se escoge clásicamente la solución:

$m = n = 1/2$

$a = b = 1/6$

$b = e = 1/3$

$p = 1$

de donde al sustituir estos valores obtenemos (5.17), (5.18), (5.19), (5.20) y (5.16).

Ejemplo 5.3

Resolver $y' = 1-y$, $y(o) = 0$ por el Método de Runge-Kutta - de cuarto orden tomando $h = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ para el intervalo $I = [0,1]$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2\ k_2 + 2\ k_3 + k_4)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= h\ G(x_i\ ,\ y_i) \\ &= h\ (1 - y_i) \\ &= h - hy_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= h\ G(x_i + \frac{1}{2}h\ ,\ y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ &= h\ (1 - y_i - \frac{1}{2}(h - hy_i)) \\ &= h - hy_i - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^2\ y_i \end{aligned}$$

$$k_3 = h\ G(x_i + \frac{1}{2} h\ ,\ y_i + \frac{1}{2} k_2)$$

$$= h\ (1 - y_i - \frac{1}{2} (h - hy_i - \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{2} h^2\ y_i))$$

$$= h - hy_i - \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{2} h^2\ y_i + \frac{1}{4} h^3 - \frac{1}{4} h^3\ y_i$$

$$k_4 = h\ G(x_i + h\ ,\ y_i + k_3)$$

$$= h(1 - y_i - h + hy_i + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} h^2\ y_i - \frac{1}{4} h 3 + \frac{1}{4} h 3\ y_i)$$

$$= h - hy_i - h^2 + h^2\ y_i + \frac{1}{2} h^3 - \frac{1}{2} h^3\ y_i - \frac{1}{4} h^4 + \frac{1}{4} h^4\ y_i$$

Sumando k1, 2k2, 2k3, k4 tenemos:

$$h - h\ y_i$$

$$2h - 2h\ y_i - h^2 + h^2\ y_i$$

$$2h - 2h\ y_i - h^2 + h^2\ y_i + \frac{1}{2} h^3 - \frac{1}{2} h^3\ y_i$$

$$h - h\ y_i - h^2 + h^2\ y_i + \frac{1}{2} h^3 - \frac{1}{2} h^3\ y_i - \frac{1}{4} h^4 + \frac{1}{4} h^4\ y_i$$

$$6h - 6hy_i - 3h^2 + 3h^2\ y_i + h^3 - h^3 y_i - \frac{1}{4} h^4 + \frac{1}{4} h^4\ y_i$$

multiplicando la suma por $\frac{1}{6}$ tenemos:

$$h - h\ y_i - \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{2} h^2\ y_i + \frac{1}{6} h^3 - \frac{1}{6} h^3\ y_i - \frac{1}{24} h^4 + \frac{1}{24} h^4\ y_i$$

$$y_{i+1} = y_i \left(1 - h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{6} h^3 + \frac{1}{24} h^4\right) + \left(h - \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{6} h^3 - \frac{1}{24} h^4\right) \quad (5.23)$$

Para $h = \frac{1}{2}$ tenemos:

Partamos de la expresión (5.23)

$$y_{i+1} = y_i \left(1 - h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{6} h^3 + \frac{1}{24} h^4\right) + \left(h - \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{6} h^3 - \frac{1}{24} h^4\right)$$

$$= y_i \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{48} + \frac{1}{384}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{48} - \frac{1}{384}\right)$$

$$= y_i\ (0.60677) + 0.39323$$

$$y1 = y_o\ (0.60677) + 0.39323$$

$$= 0.39323$$

$$y_2 = y_1\ (0.60677) + 0.39323$$

$$= 0.63183$$

Cuando $h = \frac{1}{4}$ tenemos:

$$y_{i+1} = y_i \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{32} - \frac{1}{384} + \frac{1}{6144}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{384} - \frac{1}{6144}\right)$$

$$= y_i\ (0.77881) + 0.22119$$

$$y_1 = y_o\ (0.77881) + 0.22119$$

$$= 0.22119$$

$$y2 = y_1\ (0.77881) + 0.22119$$

$$= 0.39345$$

$$y_3 = y2\ (0.77881) + 0.22119$$

$$= 0.52761$$

$$y4 = y_3\ (0.77881) + 0.22119$$

$$= 0.6321$$

Para $h = \frac{1}{2}$ ver la Tabla 5.7 y para $h = \frac{1}{4}$ ver Tabla 5.8.

x_n	Método Runge-Kutta 4° Orden	Verdadero Valor	|Error|
x_o	0.00000	0.00000	0.00000
x_1	0.39323	0.39347	0.00024
x_2	0.63183	0.63212	0.00029

Tabla 5.7

x_n	Método Runge-Kutta 4° Orden	Verdadero Valor	|Error|
x_o	0.00000	0.00000	0.00000
x_1	0.22119	0.22120	0.00001
x_2	0.39345	0.39347	0.00002
x_3	0.52761	0.52763	0.00002
x_4	0.63210	0.63212	0.00002

Tabla 5.8

Si comparamos las tablas 5.5 con la 5.7 y la 5.6 con la 5.8 vemos que el Método de Runge-Kutta de cuarto orden coincide con el Método de Taylor del mismo orden. La ventaja que en_ contramos en el Método do Rungo-Kutta es que no requiere el cálculo de derivadas sólo requiere el cálculo de $G(x,y)$.

ALGORITMO 5.2 DEL METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN - PARA LA SOLUCION APROXIMADA AL PROBLEMA CON VALORES INICIA-LES.

Dado

$$y' = G(x,y) \;,\; a \leq x \leq b \quad ; \; y(a) = \alpha$$

escogor un número entero positivo N

Paso 1 Hacer $h = \frac{b-a}{N}$, $x_0 = a$ y $Y_0 = \alpha$.

Paso 2 Hacer $i = 0$

Paso 3 Hacer $K_1 = G(x_i, y_i)$

$$K_2 = G(x_i + \frac{h}{2} , Y_i + \frac{h}{2} K_1)$$

$$K_3 = G(x_i + \frac{h}{2} , Y_i + \frac{h}{2} K_2)$$

$$K_4 = G(x_i + h , Y_i + h K_3)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{6} (K_1 + 2K2 + 2K3 + K_4)$$

$$x_{i+1} = a + (i + 1)h$$

Paso 4 Si $i = N - 1$, ir al paso 6.

Paso 5 Agregar uno a i e ir al paso 3.

Paso 6 El procedimiento se ha completado, y Y_i se aproxima a $y(x_i)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, N$.

5.7 METODOS DEL PREDICTOR-CORRECTOR.

Estos métodos requieren de otros métodos para iniciarse, o sea que los primeros valores de la solución son obtenidos - por medio de cualquier otro método y luego comienza a funcionar el Método Predictor-Corrector.

Como su nombre lo indica primero "predecimos" un valor de Y_{i+1}. Después usamos una fórmula diferente para "corregir" este valor. La fórmula del Corrector se usa cuantas veces sea necesario para lograr la tolerancia dada, aunque veremosque existen consideraciones de eficiencia que sugieren seleccionar un tamaño de intervalo que evite tener que hacer muchas iteraciones.

Hay muchas fórmulas para el predictor y el corrector. Veremos para el predictor un método de segundo orden:

$$Y_{i+1}^{(o)} = Y_{i-1} + 2h\ G(x_i,\ y_i) \qquad (5.24)$$

El símbolo (o) colocado en la parte superior derecha de - Y_{i+1} indica que esta es nuestra primera "aproximación" a Y_{i+1}.

Geométricamente el predictor $Y_{i+1}^{(o)}$ se encuentra así: (Ver Figura 5.5).

1. Se determina la pendiente de la tangente en x_i, y_i.

2. Se traza la recta L1 con esa pendiente y que pase por el punto (x_i, y_i).

3. Se traza la recta L paralela a L1 y que pase por el punto (x_{i-1}, y_{i-1}).

4. Se levanta una ordenada en x_{i+1} hasta intersectar a la recta L. En esta intersección se encuentra el valor del predictor para $Y_{i+1}^{(o)}$.

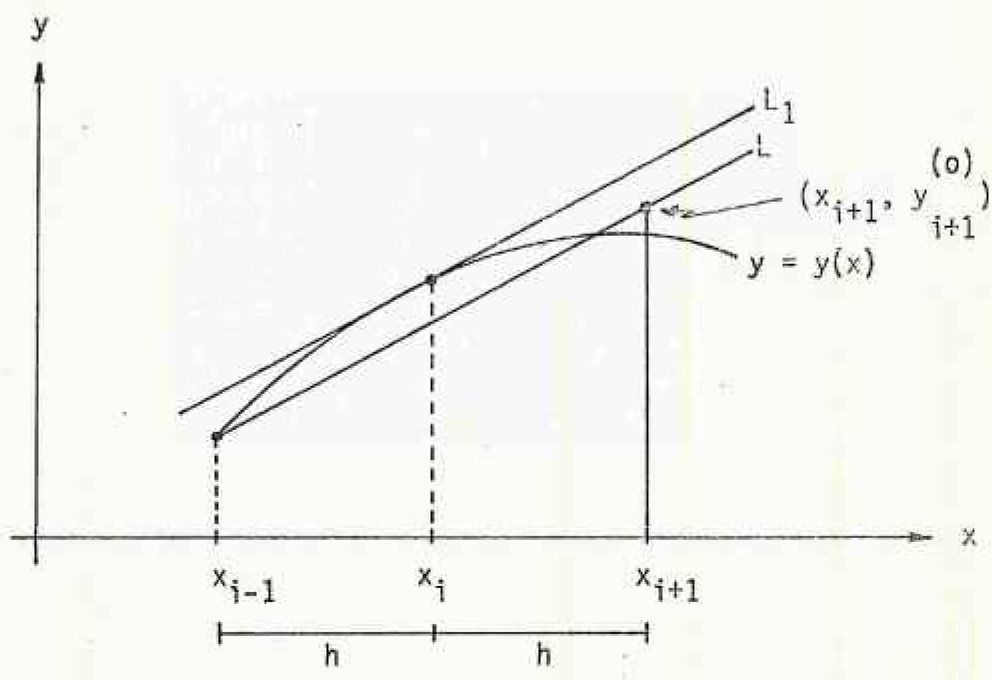


Figura 5.5

Como ya tenemos nuestro valor del predictor, necesitamos - ahora un método para mejorarlo (Ver Figura 5.6).

1. Se conoce aproximadamente y_{i+1}, luego podemos calcular una pendiente aproximada en $\left(x_{i+1}, Y_{i+1}^{(o)}\right)$ y trazar la - recta L2 con esa pendiente y en ese punto.

2. La recta L_1 de esta figura es la misma recta L_1 de la - figura 5.5 y tiene la pendiente dada por $G(x_i, y_i)$.

3. Obtengamos la recta $\overline{L}$ promediando las pendientes de las rectas L_1 y L_2. La pendiente de $\overline{L}$ es:

$$\frac{1}{2}\left[G(x_i, y_i) + G\left(x_{i+1}, Y_{i+1}^{(o)}\right)\right]$$

4. Tracemos la recta L, que pase por el punto (x_i, y_i) y que sea paralela a $\overline{L}$. La ecuación de la recta L es:

$$y = y_i + \frac{1}{2}(x - x_i)\left[G(x_i, y_i) + G\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(o)}\right)\right]$$

5. Levantemos una ordenada en x_{i+1}, donde se intersecta con L se encuentra una nueva aproximación a y_{i+1}. Llamamos a éste el valor corregido $y_{i+1}^{(1)}$ que está dado por la fórmula:

$$Y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[G(x_i, y_i) + G\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(o)}\right)\right]$$

Podemos obtener otro valor supuestamente mejor de $G(x_{i+1}, Y_{i+1})$ usando $Y^{(1)}_{i+1}$ y siguiendo el mismo procedimiento para obtener un nuevo valor de y_{i+1}. En general, la j-ésima aproximación a y_{i+1} está dada por

$$Y^{(j)}_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}\left[G(x_i, y_i) + G\left(x_{i+1}, Y^{(j-1)}_{i+1}\right)\right]$$

donde $j = 1, 2, 3, \ldots$ (5.25)

Las iteraciones se terminan cuando

$$\left| Y^{(k+1)}_{i+1} - Y^{(k)}_{i+1} \right| < \varepsilon$$

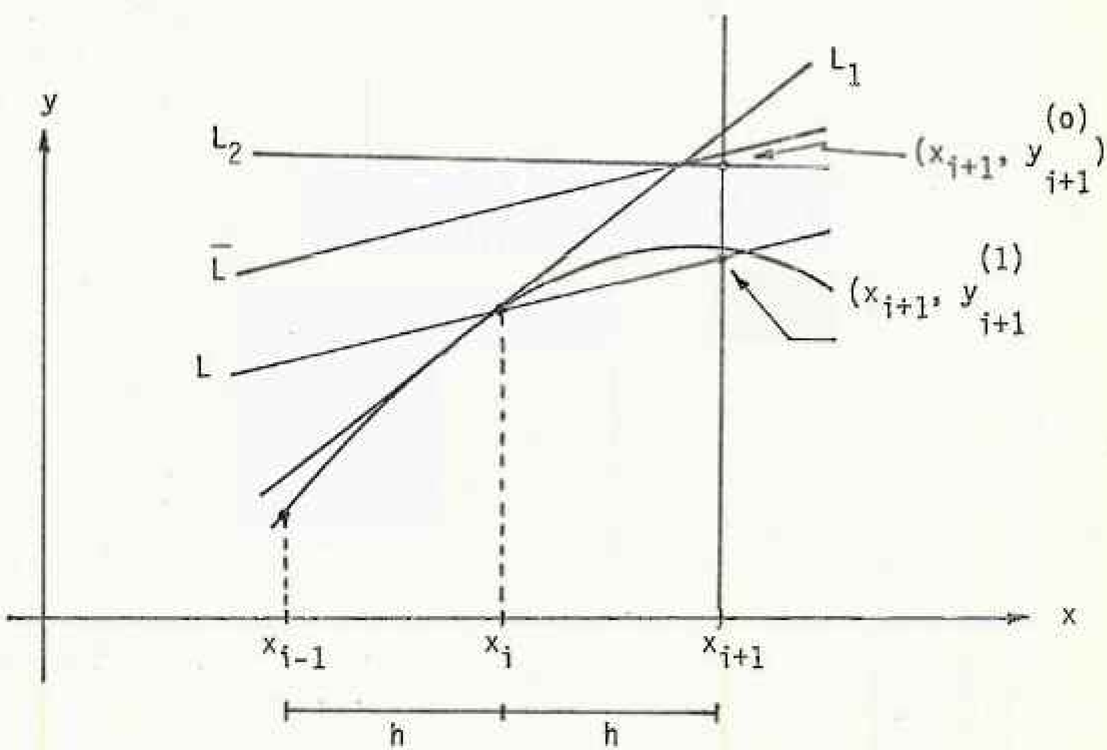


Figura 5.6

Las fórmulas (5.24) y (5.25) definen uno de los muchos métodos conocidos como Predictor-Corrector.

CONVERGENCIA DEL PROCESO.

Si tenemos

$$Y_{i+1}^{(j+1)} - Y_{i+1}^{(j)} = \frac{h}{2}\left[G\left(x_{i+1}, Y_{i+1}^{(j)}\right) - G\left(x_{i+1}, Y_{i+1}^{(j-1)}\right)\right]$$

por el teorema del valor medio tenemos

$$Y_{i+1}^{(j+1)} - Y_{i+1}^{(j)} = \frac{h}{2}\frac{\partial G(x_{i+1}, \eta_{i+1})}{\partial y}\left[Y_{i+1}^{(j)} - Y_{i+1}^{(j-1)}\right] \tag{5.26}$$

donde η_{i+1} es el valor intermedio entre $Y_{i+1}^{(j)}$, $Y_{i+1}^{(j+1)}$.

Supongamos que $\frac{\partial G}{\partial Y}$ está acotada, es decir, que hay algún valor M tal que

$$\left|\frac{\partial G}{\partial Y}\right| \leq M$$

Entonces (5.26) puede ser escrito en la forma

$$\left|Y_{i+1}^{(j+1)} - Y_{i+1}^{(j)}\right| \leq \frac{hM}{2}\left|Y_{i+1}^{(j)} - Y_{i+1}^{(j-1)}\right| \tag{5.27}$$

Análogamente

$$\left|Y_{i+1}^{(j)} - Y_{i+1}^{(j-1)}\right| \leq \frac{hM}{2}\left|Y_{i+1}^{(j-1)} - Y_{i+1}^{(j-2)}\right|$$

sustituyendo en (5.27) tenemos

$$\left| Y_{i+1}^{(j+1)} - Y_{i+1}^{(j)} \right| \leq \left(\frac{hM}{2}\right)^2 \left| Y_{i+1}^{(j-1)} - Y_{i+1}^{(j-2)} \right|$$

continuando de esta manera, llegamos finalmente a

$$\left| Y_{i+1}^{(j+1)} - Y_{i+1}^{(j)} \right| \leq \left(\frac{hM}{2}\right)^j \left| Y_{i+1}^{(1)} - Y_{i+1}^{(o)} \right|$$

tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} \left| Y_{i+1}^{(j+1)} - Y_{i+1}^{(j)} \right| = 0 \quad \text{ssi}$$

$$0 < \frac{hM}{2} < 1 \quad \text{es decir si} \quad h < \frac{2}{M}$$

Se ha demostrado que el método converge a algún valor definido, pero no necesariamente a la solución verdadera. La diferencia entre estos valores es el error por truncamiento lo cual veremos posteriormente. Primero veamos con mayor detalle la fórmula de corrección (5.25).

Consideremos el problema $Y'(x) = F(x)$; es decir, que la función G depende únicamente de una sola variable, o sea $G(x,y) = F(x)$. Claramente, la solución del problema es

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} F(x)dx \tag{5.28}$$

Entonces tenemos la siguiente fórmula para este caso particular donde G depende de una variable.

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}\left[F(x_i) + F(x_{i+1})\right]$$

con i = 0, 1,..., n-1

si i = 0 tenemos

$$y_1 - y_o = \frac{h}{2}\left[F(x_o) + F(x_1)\right] \tag{5.29}$$

si i = 1 tenemos

$$y_2 - y_1 = \frac{h}{2}\left[F(x_1) + F(X_2)\right] \tag{5.30}$$

si i = 2 tenemos

$$y_3 - y_2 = \frac{h}{2}\left[F(x_2) + F(x_3)\right] \tag{5.31}$$

si i = n-1 tenemos

$$y_n - y_{n-1} = \frac{h}{2}\left[F(x_{n-1}) + F(x_n)\right] \tag{5.32}$$

sumando (5.29), (5.30), (5.31), (5.32) y teniendo cuidado con las cancelaciones en el primer miembro, obtenemos:

$$y_n - y_o = \frac{h}{2}\left[F(x_o) + 2F(x1) + \ldots + 2F(x_{i-}1) + F(x_n)\right]$$

Esta es la fórmula trapecial para evaluar (5.28). Por lo tanto la fórmula de corrección es una generalización de la regla trapecial; la cual tiene un error de truncamiento que es $e_t = -\frac{h^3}{12}y'''(\eta)$ donde (η) indica un valor intermedio en el intervalo.

ANALISIS DEL ERROR EN LOS METODOS DEL PREDICTOR-CORRECTOR.

Obtengamos el error por truncamiento del predictor.

Sabemos que la Serie de Taylor para $y(x)$ con respecto al punto $x = x_i$ es

$$y(x) = y_i + (x - x_i)y_i' + \frac{(x - x_i)^2}{2} y''(x_i) + \frac{(x - x_i)^3}{6} y''' (\xi_i)$$

donde $x_i \leq \xi_i \leq x$

Haciendo $x = x_{i+1}$ obtenemos

$$y_{i+1} = y_i + h\, y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y'''(\xi_1) \qquad (5.32)$$

donde $x_i \leq \xi_1 \leq x_{i+1}$

Similarmente si $x = x_{i-1}$ obtenemos:

$$y_{i-1} = y_i - h\, y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' - \frac{h^3}{5} y''' (\xi_2) \qquad (5.33)$$

donde $x_{i-1} \leq \xi_2 \leq x_i$

Restando las ecuaciones (5.32) y (5.33) obtenemos

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2h\, y_i' + \frac{h^3}{6} \left[y'''(\xi_1) + y'''(\xi_2)\right]$$

que es igual a

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h\, y_i' + \frac{h^3}{3} \left[\frac{y'''(\xi_1) + y'''(\xi_2)}{2}\right]$$

Por el teorema del valor intermedio tenemos

$$\left[\frac{y'''(\xi_1) + y'''(\xi_2)}{2}\right] = y'''\ (\xi)$$

luego $y_{i+1} = y_{i-1} + 2h\ y'_i + \frac{h^3}{3}\ y'''\ (\xi)$

donde $x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}$

Hemos encontrado entonces, que el error por truncamiento del predictor es

$$e_t^p = \frac{h^3}{3}\ y'''(\xi) \qquad (5.34)$$

donde $x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}$

Si la tercera derivada es razonablemente constante, entonces podemos asumir que el error por truncamiento es Kh3.

El error por truncamiento del corrector es el mismo que el de la Regla Trapecial, luego tenemos

$$e_t^c = -\frac{h^3}{12}\ y'''(\eta)$$

donde $x_{i-1} \leq (\eta) \leq x_{i+1}$.

Como los errores por truncamiento del predictor y del corrector son del mismo orden, nos permiten desarrollar un método simple para estimar y''' por lo tanto e_t^c.

Sea $y(x_i)$ el valor verdadero de la solución en $x = x_i$.

Entonces

$$y(x_i) = y_i^{(o)} + \frac{h^3}{3} y'''(\xi)$$

y

$$y(x_i) = y_i^{(j)} - \frac{h^3}{12} y'''(\eta)$$

restando tenemos:

$$0 = y_i^{(j)} - y_i^{(o)} - \frac{h^3}{12} \left[4y'''(\xi) + y'''(\eta)\right]$$

si suponemos que y''' es razonablemente constante en $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$ tenemos

$$0 = y_i^{(j)} - y_i^{(o)} - \frac{5h^3}{12} y'''$$

de donde

$$y_i^{(j)} - y_i^{(o)} = \frac{5h3}{12} y'''$$

luego $$\frac{y_i^{(o)} - y_i^{(j)}}{5} = -\frac{h^3}{12} y'''$$

El error de truncamiento para el corrector es

$$e_t^c = \frac{1}{5}\left[y_i^{(o)} - y_i^{(j)}\right] \qquad (5.35)$$

Otras fórmulas de Predictor-Corrector.

Podemos obtener nuevos fórmulas del método Predictor-Corrector usando las fórmulas (4.33) y (4.34).

Inicialmente obtengamos una fórmula del predictor aplicando la fórmula (4.33) a $y'(xi)$.

Recordemos que

$$I\, y'(x) = y(x + h) - y(x)$$

Tenemos entonces que

$$y(x_i + h) - y(x_i) = h\left(1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2 + \ldots\right) y'(x_i)$$

de donde

$$y_{i+1} = y_i + h\left(y'_i + \frac{1}{2}\nabla y'_i + \frac{5}{12}\nabla^2 y'_i + \ldots\right) \qquad (5.36)$$

La fórmula (5.36) es la fórmula del predictor. Cada $\nabla^k y'_i$ depende de los $(k + 1)$ valores siguientes:

y'_{i-k} , y'_{i-k+1} , y'_{i-1} , y'_i los cuales pueden ser calculados por medio de la relación

$$y'_j = G(x_j, y_j) \ . \quad j = i-k,\ i-k+1,\ \ldots,\ i\ .$$

La fórmula para el Predictor, usando únicamente tres puntos es

$$y^{(o)}_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left[23\, y'_i - 16\, y'_{i-1} + 5\, y'_{i-2}\right] \qquad (5.37)$$

Esta fórmula se obtiene así:

$$y_{i+1}^{(o)} = y_i + h\left[y_i' + \frac{1}{2}\nabla y_i' + \frac{5}{12}\nabla^2 y_i'\right]$$

$$= y_i + h\left[y_i' + \frac{1}{2}\left(y_i' - y_{i-1}'\right) + \frac{5}{12}\left(\nabla y_i' - \nabla y_{i-1}'\right)\right]$$

$$= y_i + h\left[y_i' + \frac{1}{2}\left(y_i' - y_{i-1}'\right) + \frac{5}{12}\left(y_i' - 2y_{i-1}' + y_{i-2}'\right)\right]$$

$$= y_i + h\left[\frac{23}{12}y_i' - \frac{16}{12}y_{i-1}' + \frac{5}{12}y_{i-2}'\right]$$

$$= y_i + \frac{h}{12}\left[23y_{i-1}' - 16y_{i-1}' + 5y_{i-2}'\right]$$

Para obtener la fórmula del Corrector se aplica la fórmula (4.34) a $y'(x_{i+1})$

como

$$(I\ E^{-1})\ y'(x_{i+1}) = I\ (E^{-1}\ y'(x_{i+1})$$

$$= I\ y'(x_i)$$

$$= y(x_{i+1}) - y(x_i)$$

$$= y_{i+1} - y_i$$

$$y_{i+1} - y_i = h\left[1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \ldots\right] y'_{(x_{i+1})}$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left[y_{i+1}' - \frac{1}{2}\nabla y_{i+1}' - \frac{1}{12}\nabla^2 y_{i+1}' - \ldots\right] \qquad (5.38)$$

La fórmula (5.38) es la que se emplea para el Corrector.

La fórmula para el corrector, con tres puntos es

$$y_{i+1}^{(j)} = y_i + \frac{h}{12} \left[5\, y'_{i+1} + 8\, y'_i - y'_{i-1}\right] \qquad (5.39)$$

donde

$$y'_{i+1} = G\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(j)}\right)$$

$$y'_i = G(x_i, y_i)$$

$$y'_{i-1} = G(x_{i-1}, y_{i-1})$$

La fórmula (5.39) se obtiene así:

$$y_{i+1} = y_i + h \left(y_{i+1} - \frac{1}{2} \nabla y'_{i+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 y'_{i+1}\right)$$

$$= y_i + h \left[y'_{i+1} - \frac{1}{2} \left(y'_{i+1} - y'_i\right) - \frac{1}{12} \left(\nabla y'_{i+1} - \nabla y'_i\right)\right]$$

$$= y_i + h \left[y'_{i+1} - \frac{1}{2} y'_{i+1} + \frac{1}{2} y'_i - \frac{1}{12} \left(y'_{i+1} - y'_i - y'_i + y'_{i-1}\right)\right]$$

$$= y_i + h \left[\frac{5}{12}\, y'_{i+1} + \frac{8}{12}\, y'_i - \frac{1}{12}\, y'_{i-1}\right]$$

$$= y_i + \frac{h}{12} \left[5\, y'_{i+1} + 8\, y'_i - y'_{i-1}\right]$$

Presentamos a continuación una breve descripción de la forma en que debe usarse el método Predictor-Corrector.

Para obtener la máxima eficiencia debemos de iniciar la solución mediante el Método de Runge-Kutta de cuarto orden, luego usar el Método Predictor-Corrector con tres o cuatro puntos para los y_i subsecuentes. Esto se hace de la manera siguiente: Se aplica primero la fórmula del predictor para obtener una aproximación para y_{i+1}; a este valor se le aplica la fórmula del corrector, lo que da una nueva aproximación. Se continúa la aplicación del corrector hasta obtener una precisión deseada. Si ésta se obtiene con más de dos iteraciones entonces se reduce el tamaño del intervalo.

Ejemplo:

Resolver $y' = 1-y$ con $y(o) = 0$, $h = \frac{1}{4}$ en el intervalo cerrado $I = [0,1]$ usando el método Predictor-Corrector con 3 puntos e iniciarlo con el Método de Runge-Kutta de cuarto orden. (Ver Tabla 10.11)

Cuando usamos el Método de Runge-Kutta de cuarto orden obtuvimos los siguientes resultados:

$y_0 = 0 \qquad y_0' = 1-y_0 = 1 - 0 = 1$

$y_1 = 0.22119 \qquad y_1' = 1-y_1 = 1 - 0.22119 = 0.77881$

$y_2 = 0.39345 \qquad y_2' = 1-y_2 = 1 - 0.39345 = 0.60655$

Para obtener y3 y y4 usaremos el Método Predictor-Corrector con 3 puntos.

La fórmula para el Predictor con 3 puntos es:

$$y_{i+1}^{(o)} = y_i + \frac{h}{12} \left[23\, y_i' - 16\, y_i' + 5\, y_{i-2}'\right]$$

La fórmula para el Corrector con 3 puntos es:

$$y_{i+1}^{(j)} = y_i + \frac{h}{12} \left[5\, y_{i+1}' + 8\, y_i' - y_{i-1}'\right]$$

donde

$$y_{i+1}' = G\left(x_{i+1},\, y_{i+1}^{(j-1)}\right)$$

$$y_i' = G(x_i,\, y_i)$$

$$y_{i-1}' = G(x_{i-1},\, y_{i-1})$$

$$y_3^{(o)} = y_2 + \frac{1}{48} \left[23\, y_2' - 16\, y_1' + 5\, y_o'\right]$$

$$= 0.39345 + \frac{1}{48} \left[23\ (0.60655) - 16\ (0.77881) + 5\ (1)\right]$$

$$= 0.52865$$

si $y_3^{(o)} = 0.52865$, $y_3' = 1 - 0.52865 = 0.47135$

Usando el Corrector tenemos:

$$y_3^{(1)} = y_2 + \frac{1}{48}\left[5\,y_3' + 8\,y_2' - y_1'\right]$$

$$= 0.39345 + \frac{1}{48}\left[5\,(0.47135) + 8\,(0.60655) - 0.77881\right]$$

$$= 0.52742$$

$$y_3^{(1)} = 0.52742\ ,\ y_3' = 1 - 0.52742 = 0.47258$$

$$y_3^{(2)} = 0.39345 + \frac{1}{48}\left[5\,(0.47258) + 4.07359\right]$$

$$= 0.52754$$

$$y_3^{(2)} = 0.52754\ ,\ y_3' = 1 - 0.52754 = 0.47246$$

$$y_3^{(3)} = 0.39345 + \frac{1}{48}\left[5\,(0.47246) + 4.07359\right]$$

si $y_3^{(3)} = 0.52753\ ,\ y_3' = 1 - 0.52753 = 0.47247$

$$y_3^{(4)} = 0.39345 + \frac{1}{48}\left[5\,(0.47247 + 4.07359\right]$$

si $y_3 = 0.52753\ ,\ y_3' = 0.47247$

$$y_4^{(o)} = 0.52753 + \frac{1}{48}\left[23(0.47247) - 16(0.60655) + 5\,(0.77881)\right]$$

$$= 0.63286$$

si $y_4^{(o)} = 0.63286\ ,\ y_4' = 0.36714$

$$y_4^{(1)} = y_3 + \frac{1}{48}\left[5\,y_4' + 8\,y_3' - y_2'\right]$$

$$= 0.52753 + \frac{1}{48}\left[5\,(0.36714) + 8\,(0.47247) - 0.60655\right]$$

$$= 0.63188$$

si $y_4^{(1)} = 0.63188\ ,\ y_4' = 0.36812$

$$y_4^{(2)} = 0.52753 + \frac{1}{48}\left[5\,(0.36812) + 3.17321\right]$$

$$= 0.63198$$

$$y^{2}_{(4)} = 0.63198\ ,\ y_4' = 0.36802$$

$$y^{(3)}_{(4)} = 0.52753 + \frac{1}{48}\left[5\,(0.36802) + 3.17321\right]$$

$$= 0.63197$$

si $y^{(3)}_{(4)} = 0.63197\ ,\ y_4' = 0.36803$

$$y_4^{(4)} = 0.52753 + \frac{1}{48}\left[5\,(0.36803) + 3.17321\right]$$

$$= 0.63198$$

si $y_4^{(4)} = 0.63198\ ,\ y4' = 0.36802$

$$y_4^{(5)} = 0.52753 + \frac{1}{48}\left[5\,(0.36802) + 3.17321\right]$$

$$= 0.63197$$

x_n	Método del Predictor-Corrector Predictor	y_j	Verdadero Valor	|Error|
0.00		0.00000	0.00000	0.00000
0.25		0.22119	0.22120	0.00001
0.50		0.39345	0.39347	0.00002
0.75	0.52865	0.52753	0.52763	0.00010
1.00	0.63286	0.63198	0.63212	0.00014

Tabla 5.9

Cuando h = 0.1 ver Tabla 5.10.

x_n	Método Predictor-Corrector Predictor	y_j	Verdadero Valor	|Error|
0		0.00000	0.00000	0.00000
0.1		0.09517	0.09516	0.00001
0.2		0.18128	0.18127	0.00001
0.3	0.25919	0.25916	0.25918	0.00002
0.4	0.32966	0.32963	0.32968	0.00005
0.5	0.39343	0.39340	0.39347	0.00007
0.6	0.45113	0.45110	0.45119	0.00009
0.7	0.50334	0.50331	0.50341	0.00010
0.8	0.55058	0.55056	0.55067	0.00011
0.9	0.59333	0.59331	0.59343	0.00012
1.0	0.63201	0.63200	0.63212	0.00012

Tabla 5.10

Conclusión al comparar los métodos:

El Método de Runge-Kutta tiene la ventaja sobre el Método de Taylor de no usar derivadas; sólo evalúa la función G.

Estos dos métodos permiten cambiar el tamaño del intervalo con facilidad,por ser métodos que se inician por sí solos.

En el Método Predictor-Corrector el cambio del tamaño del intervalo no es muy fácil, porque requiere de otro método para iniciarse. La precisión deseada debe de obtenerse con dos iteraciones y esto se logra al reducir el tamaño del intervalo, como se puede observar en los resultados de los programas dados a continuación.

PROGRAMAS

```
LIST
ADAI
> 10 REM CORRIDA 1
  20 REM PROGRAMA PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS CON VALORES INICIALES
  30 REM DONDE LA PRIMERA DERIVADA DE Y ES IGUAL A X-Y+1, Y(O)=1.0=X<=1
  40 REM USANDO EL METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN
  50 REM X ES LA VARIABLE INDEPENDIENTE
  60 REM Y ES LA VARIABLE DEPENDIENTE
  70 REM A, B LOS EXTREMOS DEL INTERVALO CERRADO CON A<B
  80 REM N EL NUMERO DE PUNTOS DONDE SE DESEA CALCULAR LA SOLUCION DE Y1
  90 REM H EL INCREMENTO CONSTANTE DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
 100 REM U EL VALOR DE Y(O)
 110 REM V EL VERDADERO VALOR
 120 REM E EL ERROR
 130 PRINT
 140 PRINT SPA(5)!&
     "SOLUCION USANDO EL METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN "
 150 PRINT
 160 PRINT USING "#,50A"!&
     "--------------------------------------------------"
 170 PRINT USING "45A/"!"---------------------------------------------"
 180 PRINT
 190 PRINT TAB(46)!"VERDADERO"
 200 PRINT USING 210!"X","Y","VALOR","ERROR"
 210 IMAGE 3X,A,18X,A,25X,5A,23X,5A
 220 PRINT
 230 PRINT USING "#,50A"!&
     "--------------------------------------------------"
 240 PRINT USING "45A/"!"---------------------------------------------"
 250 LONG H,XO,YO,K1,K2,K3,K4,Y1,V,E
 260 DEF FNG(X,Y)=X-Y+1
 270 READ A,B,N,U
 280 H=(B-A)/N
 290 XO=A
 300 YO=U
 310 FOR I=0 TO N
 320    K1=FNG(XO,YO)
 330    K2=FNG(XO+H/2,YO+(K1*H)/2)
 340    K3=FNG(XO+H/2,YO+(K2*H)/2)
 350    K4=FNG(XO+H,YO+H*K3)
 360    Y1=YO+(K1+2*K2+2*K3+K4)*H/6
 370    V=XO+1/EXP(XO)
 380    E=ABS(V-YO)
 390    PRINT USING 400!XO,YO,V,E
 400    IMAGE 2X,D.D,10X,3(D.10DE13X)
 410    PRINT
 420    YO=Y1
 430    XO=A+(I+1)*H
 440 NEXT I
 450 PRINT
 460 PRINT USING "#,50A"!&
     "--------------------------------------------------"
 470 PRINT USING "45A/"!"---------------------------------------------"
 480 DATA 0,1,10,1
 490 END
>
```

RUN
ADA1

SOLUCION USANDO EL METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

X	Y	VERDADERO VALOR	ERROR
.0	1.0000000000E+00	1.0000000000E+00	0.0000000000E+00
.1	1.0048375067E+00	1.0048374175E+00	8.9246896096E-08
.2	1.0187309155E+00	1.0187307509E+00	1.6454214347E-07
.3	1.0408184345E+00	1.0408182160E+00	2.1845698939E-07
.4	1.0703203020E+00	1.0703200382E+00	2.6385168894E-07
.5	1.1065309481E+00	1.1065306480E+00	3.0010414775E-07
.6	1.1488119514E+00	1.1488116200E+00	3.3139440347E-07
.7	1.1965856296E+00	1.1965852828E+00	3.4680124372E-07
.8	1.2493293018E+00	1.2493289379E+00	3.6389610614E-07
.9	1.3065700070E+00	1.3065696279E+00	3.7910649553E-07
1.0	1.3678797840E+00	1.3678794035E+00	3.8053985918E-07

>

RUN
ADA1

SOLUCION USANDO EL METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

X	Y	VERDADERO VALOR	ERROR
.0	1.0000000000E+00	1.0000000000E+00	0.0000000000E+00
.2	1.0187333374E+00	1.0187307509E+00	2.5864792406E-06
.4	1.0703242697E+00	1.0703200382E+00	4.2315332394E-06
.6	1.1488168230E+00	1.1488116200E+00	5.2030773077E-06
.8	1.2493346304E+00	1.2493289379E+00	5.6925455283E-06
1.0	1.3679052220E+00	1.3678794035E+00	5.8184668887E-06

>

ADA2

```
10 REM CORRIDA 1
20 REM PROGRAMA PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS CON VALORES INICIALALES
30 REM DONDE LA PRIMERA DERIVADA DE Y ES IGUAL A X-Y+1;Y(0)=1,0<=X<=1
40 REM INICIANDO CONEL METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN Y
50 REM CONTINUANDO CON EL METODO PREDICTOR-CORRECTOR CON TRES PUNTOS
60 REM X ES LA VARIABLE INDEPENDIENTE
70 REM Y ES LA VARIABLE DEPENDIENTE
80 REM A,B LOS EXTREMOS DEL INTERVALO CERRADO CON A<B
90 REM N NUMERO DE PUNTOS DONDE SE DESEA CALCULAR LA SOLUCION DEL
100 REM PROBLEMA DE VALORES INICIALES.
110 REM U EL VALOR DE Y(0)
120 REM P VALOR APROXIMADO DE Y (PREDICTOR)
130 REM C1 VALOR CORREGIDO DE Y(CORRECTOR)
140 REM J EL NUMERO DE ITERACIONES PAA OBTENER EL CORRECTOR
150 REM T LA TOLERANCIA DADA PARA OBTENER EL NUMERO DE ITERACIONES
160 PRINT
170 PRINT SPA(10);"SOLUCION USANDO EL METODO PREDICTOR-CORRECTOR"
180 PRINT SPA(10);"CON TRES PUNTOS, INICIANDO CON RUNGE-KUTA"
190 PRINT
200 PRINT USING "#,53A";&
    "-----------------------------------------------------"
210 PRINT USING "17A/";"-----------------"
220 PRINT
230 PRINT USING 240;"XI","P","Y","J"
240 IMAGE 3X,2A,17X,A,23X,2A,20X,A
250 PRINT
260 PRINT USING "#,55A";&
    "-------------------------------------------------------"
270 PRINT USING "17A/";"-----------------"
280 LONG H,T,X0,X1,X2,X3,Y0,Y1,Y2,Y3,D,C,K1,K2,K3,K4,P,W
290 DEF FNG(X,Y)=X-Y+1
300 READ A,B,N,U,T
310 H=(B-A)/N
320 X0=C=A
330 Y0=D=U
340 PRINT USING 350;X0,"-",Y0,"-"
350 IMAGE 2X,D.D,17X,A,17X,D.10DE,12X,A
360 I=0
370 K1=FNG(C,D)
380 K2=FNG(C+H/2,D+(K1*H)/2)
390 K3=FNG(C+H/2,D+(K2*H)/2)
400 K4=FNG(C+H,D+K3*H)
410 IF I=0 THEN DO
420   Y1=D+H/6*(K1+2*K2+2*K3+K4)
430   X1=A+(I+1)*H
440   PRINT USING 450;X1,"-",Y1,"-"
450   IMAGE 2X,D.D,17X,A,17X,D.10DE,12X,A
460   D=Y1
470   C=X1
480   I=I+1
490   GOTO 370
500 DOEND
510 Y2=D+H/6*(K1+2*K2+2*K3+K4)
520 X2=A+(I+1)*H
530 PRINT USING 540;X2,"-",Y2,"-"
540 IMAGE 2X,D.D,17X,A,17X,D.10DE,12X,A
550 D=Y2
560 C=X2
570 I=I+1
580 P=Y2+H/12*(23*FNG(X2,Y2)-16*FNG(X1,Y1)+5*FNG(X0,Y0))
590 J=1
```

```
600 X3=A+(I+1)*H
610 W=8*FNG(X2,Y2)-FNG(X1,Y1)
620 Y3=Y2+H/12*(5*FNG(X3,P)+W)
630 C1=Y2+H/12*(5*FNG(X3,Y3)+W)
640 IF ABS((C1-Y3)/Y3)<=T THEN 680
650 J=J+1
660 Y3=C1
670 GOTO 630
680 PRINT USING 690; X3,P,C1,J
690 IMAGE 2X,D.D,10X,D.10DE,9X,D.10DE,11X,2D
700 I=I+1
710 IF I>N-1 THEN 790
720 X0=X1
730 Y0=Y1
740 X1=X2
750 Y1=Y2
760 X2=X3
770 Y2=C1
780 GOTO 580
790 PRINT
800 PRINT USING "#,55A";"
    ------------------------------------------------------------------"
810 PRINT USING "17A/";"-----------------"
820 DATA 0,1,10,1,.000001
830 END
>RUN
```

RUN
ADA2

SOLUCION USANDO EL METODO PREDICTOR-CORRECTOR
CON TRES PUNTOS, INICIANDO CON RUNGE-KUTA

XI	P	Y	J
.0	-	1.0000000000E+00	-
.1	-	1.0048375067E+00	-
.2	-	1.0187309155E+00	-
.3	1.0407857851E+00	1.0408215523E+00	2
.4	1.0702933214E+00	1.0703258514E+00	2
.5	1.1063[illegible]91509E+00	1.1065385342E+00	2
.6	1.148[illegible]4497[illegible]E+00	1.1488211155E+00	2
.7	1.196[illegible]19512E+00	1.1965959072E+00	1
.8	1.2493187317E+00	1.2493402958E+00	1
.9	1.3065619832E+00	1.3065814972E+00	1
1.0	1.3[illegible]787389556+00	1.3678915501E+00	1

>

ADA2

SOLUCION USANDO EL METODO PREDICTOR-CORRECTOR
CON TRES PUNTOS, INICIANDO CON RUNGE-KUTA

XI	P	Y	J
.0	-	1.0000000000E+00	-
.2	-	1.0187333374E+00	-
.4	-	1.0703242697E+00	-
.6	1.1483622105E+00	1.1488552094E+00	3
.8	1.2489859998E+00	1.2493968010E+00	3
1.0	1.3676290601E+00	1.3679611683E+00	3

BIBLIOGRAFIA

1. BURDEN, RICHARD L; FAIRES, J. DOUGLAS y REYNOLDS ALBERT C.
"Numerical Analysis".
PRINDLIE, WEBER & SCHMIDT, Boston, Massachusetts. 1980.

2. COHEN, A. M.
"Análisis Numérico".
Editorial Reverté S. A. España. 1977.

3. HENRICI, PETER.
"Elementos de Análisis Numérico".
Editorial Trillas. México. 1977.

4. Mc CRACKEN, DANIEL D.
"Métodos Numéricos y Programación Fortran".
Editorial Limusa - Wiley, S. A. 1973.

5. PORTER, MICAEL, Dr.
"Introducción a los Métodos Numéricos".
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.
Oaxtepec, Morelos. 1981.

6. RALSTON, ANTHONY.
"Introducción al Análisis Numérico".
Editorial Limusa-Wiley, S.A. 1970.

7. SCHEID, FRANCIS.

"Análisis Numérico".

Poligráfica, S.A. México. Mayo 1983.

nvdr.