UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO: UN ENFOQUE GEOMETRICO - ALGEBRAICO.

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR:

MEDARDA DEL ROSARIO CACERES AGUILAR

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

DICIEMBRE DE 1991.

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO: UN ENFOQUE GEOMETRICO - ALGEBRAICO.

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR:

MEDARDA DEL ROSARIO CACERES AGUILAR

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

DICIEMBRE DE 1991.

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA.

U N I V E R S I D A D   D E   E L   S A L V A D O R

RECTOR	:	DR. FABIO CASTILLO FIGUEROA
SECRETARIO GENERAL	:	LIC. MIGUEL ANGEL AZUCENA

F A C U L T A D   D E   C I E C I A S   Y   H U M A N I D A D E S

DECANO	:	LIC. VICTOR ARTURO GONZALEZ
SECRETARIO	:	LIC. MARINA DE JESUS LOPEZ

D E P A R T A M E N T O   D E   M A T E M A T I C A

JEFE DEL DEPARTAMENTO	:	LIC. ALBA LILA RICO DE TEJADA

T R A B A J O   D E   G R A D U A C I O N

COORDINADOR : ING. CARLOS MAURICIO CANJURA

ASESOR : ING. CARLOS MAURICIO CANJURA

I N D I C E

PAG. Nº

C A P I T U L O I

VECTORES EN EL PLANO

ESPACIOS VECTORIALES

ESPACIOS VECTORIALES EUCLIDEANOS

CAPITULO II

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

TRASLACIONES

HOMOTECIAS

ROTACIONES

SIMILITUDES

C A P I T U L O III

LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

C A P I T U L O   IV

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

I N T R O D U C C I O N

Este trabajo tiene como objetivo aportar cierto material de apoyo a los estudiantes de licenciatura en Matematica en el area de la Geometria. Se pretende con ello promover la ensenanza de la geometria estudiando las aplicaciones en el plano: traslaciones, proyecciones, homotecias, simetrias, similitudes.

El trabajo se desarrolla basicamente en cuatro capitulos: En el capitulo I se desarrollan los temas de espacios vectoriales, espacios euclideos y espacios afines, necesarios estos para desarrollar los aspectos geometricos que este enfoque requiere.

En los capitulos II y III se desarrollan las transformaciones en el plano y en el espacio, dandole un tratamiento geometrico - algebraico.

En el ultimo capitulo se desarrolla aspectos elementales de la geometria descriptiva, cuyo objeto es el de representar en el plano las formas espaciales: y la resolucion de problemas en el espacio por medio de construcciones en el plano.

Este tema sera importante que se continue desarrollando, pues a pesar de su importancia en el area de las ingenierias en la licenciatura en Matematica ha gozado de ningun espacio para su desarrollo.

Finalmente me complace la oportinidad de expresar mis agradecimientos al Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA por su valiosa asesoria en la elaboracion de este trabajo.

CAPITULO I

ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICION

Sea E un conjunto dotado de una ley de composición interna y una externa. La primera se llama adición (+) y la segunda multiplicación por un real denotada (.). Esta última asociada a toda pareja $(\lambda,\vec{x})$ de $\mathbb{R} \times E$ un elemento de E denotado por $\lambda.\vec{x}$.

Se dice que (E,+,.) es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (se dice también espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$) si y solamente si:

i) (E,+) es un grupo conmutativo.

a) La suma es una ley de composición interna en E. definida así:

$+ : E \times E \longrightarrow E$

$(\vec{x},\vec{y}) \rightsquigarrow \vec{x} + \vec{y}$; donde $\vec{x} \in E$ y $\vec{y} \in E$

b) La suma es asociativa en E.

$\forall\ \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in E$ se cumple $(\vec{x}+\vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

c) Existe un vector neutro $\vec{0}$ para la suma en E. Es decir:

$\exists\ \vec{0} \in E$ tal que $\forall\ \vec{x} \in E$ se cumple $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$.

d) Todo elemento $\vec{x} \in E$ admite inverso aditivo u opuesto $\vec{y}$ de E.

$\forall\ \vec{x} \in E,\ \exists\ \vec{y} \in E$ tal que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} = \vec{0}$.

Al opuesto de $\vec{x}$ lo denotaremos con $-\vec{x}$, o sea, $\vec{y} = -\vec{x}$.

e) La suma es conmutativa en E.

$\forall\ \vec{x},\vec{y} \in E$ se cumple que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

ii) Sean λ y μ dos reales cualesquiera y $\vec{x},\vec{y}$ elementos de E; se tiene que:

a) $\lambda.\vec{x} \in E$

b) $\lambda(\mu.\vec{x}) = (\lambda\mu).\vec{x}$

c) $(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$

d) $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$

e) $1.\vec{x} = \vec{x}$.

Los elementos de E se llaman vectores. Los elementos de $\mathbb{R}$ son escalares u operadores.

Si en la definición de espacio vectorial, $\mathbb{R}$ lo sustituimos por otro cuerpo conmutativo $K(\mathbb{Q},\mathbb{C},\ldots)$, se define un K-espacio vectorial (o espacio vectorial sobre K).

Ejemplo 1

Sea $\mathbb{R}^n$ el conjunto de n-uplas de $\mathbb{R}$, dotado de la adición definida.

Para $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3,\ldots x_n)$ y $\vec{y} = (y_1,y_2,\ldots y_n)$ de E por

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1,x_2,x_3,\ \ldots x_n) + (y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n)$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1+y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3,\ \ldots,\ x_n + y_n)$.

Y de la multiplicación definida:

para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}$ por:

$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots \lambda x_n)$. Verificar que $(\mathbb{R}^n, +, .)$ es un espacio vectorial.

1.1.3 **Ejemplo** 2)

Sea $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ el conjunto de funciones numéricas definido sobre un conjunto D, dotado de la adición:

Cualesquiera que sea f y g de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, (f+g) está definida así:

$$\forall\, x \in D.\ (f+g) + g(x)$$

y de la multiplicación por un número real: cualquiera que sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y f de $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, λf está definido por:

$$\forall\, x \in D\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

También podemos verificar que $(\mathcal{F}(D,\mathbb{R}),+,.)$ es un espacio vectorial.

En particular si D = N, el conjunto $\mathcal{F}(N,\mathbb{R})$ que es el conjunto de sucesiones numéricas definido sobre N y $(\mathcal{F}(N, \mathbb{R}),+,.)$ es un espacio vectorial.

1.1.4 **Reglas de Cálculo en un Espacio Vectorial**

Existen ciertas reglas de uso constante y ligadas a la multiplicación externa, así como:

1) Para todo $\vec{x} \in E$, se cumple:

$0\vec{x} = \vec{0}$.

Prueba:

Cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$,

tenemos $(\lambda+0)\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$$\lambda\vec{x} + 0\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

y como el opuesto de $\lambda\vec{x}$ es $-(\lambda\vec{x})$ se tiene

$$-(\lambda\vec{x}) + \lambda\vec{x} + 0\vec{x} = -\lambda\vec{x} + \lambda\vec{x}$$

$$0\vec{x} = \vec{0} \quad \text{luego } 0\vec{x} = \vec{0}$$

2) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene: $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$

Prueba:

Cualquiera sea $\vec{x} \in E$,

tenemos $\lambda\vec{x} = \lambda(\vec{x} + \vec{0})$

$$\lambda\vec{x} = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{0}$$

$$-\lambda\vec{x} + \lambda\vec{x} = -\lambda\vec{x} + \lambda\vec{x} + \lambda\vec{0}$$

$$\vec{0} = \lambda\vec{0}.$$

luego $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

3) En forma recíproca si $\lambda\vec{x} = \vec{0}$, entonces $\lambda = 0$ ó $\vec{x} = \vec{0}$

i) Si $\lambda\vec{x} = \vec{0}$, se presentan dos casos:

Cuando $\lambda = 0$ y la igualdad $\lambda\vec{x} = \vec{0}$ se verifica para cualquier $\vec{x} \in E$.

ii) Cuando $\lambda \neq 0$, siendo λ^{-1} el inverso multiplicativo de λ, se tiene:

$$\lambda^{-1}(\lambda\vec{x}) = \vec{0}$$

$$(\lambda^{-1}\lambda)\vec{x} = \vec{0}$$

$$1.\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

4) $\forall\ \vec{x} \in E \ \wedge \ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$(-\lambda)\vec{x} = \lambda(-\vec{x}) = -\lambda\vec{x}\ .$$

Prueba:

i) Como $\lambda\vec{x} + (-\lambda)\vec{x} = [\lambda + (-\lambda)]\vec{x}$

$$= [\lambda - \lambda]\vec{x}$$
$$= 0\vec{x}$$
$$= \vec{0}$$

luego $(-\lambda)\vec{x} = -\lambda\vec{x}$, que es el opuesto de $\lambda\vec{x}$.

ii) tenemos $\lambda\vec{x} + \lambda(-\vec{x}) = \lambda[\vec{x} + (-\vec{x})]$

$$= \lambda[\vec{x} - \vec{x}]$$
$$= \lambda\vec{0}$$
$$= \vec{0}$$

entonces $\lambda(-\vec{x}) = -(\lambda\vec{x})$.

De los resultados i) y ii) tenemos: $(-\lambda)\vec{x} = \lambda(-\vec{x}) = -(\lambda\vec{x})$.

también $-(\lambda\vec{x}) = -\lambda\vec{x}$.

5) $(\vec{x} \neq \vec{0} \ \wedge \ \lambda = \beta) \Rightarrow \lambda\vec{x} = \beta\vec{x}$.

$$(\vec{x} \neq \vec{0} \ \wedge \ \lambda = \beta) \Rightarrow (\vec{x} \neq \vec{0} \ \wedge \ \lambda - \beta = 0)$$
$$\Rightarrow (\lambda - \beta)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow [\lambda + (-\beta)]\vec{x} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \lambda\vec{x} - \beta\vec{x} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \lambda\vec{x} = \beta\vec{x}.$$

6) $(\lambda \neq 0 \wedge \vec{x} = \vec{y}) \Rightarrow (\lambda\vec{x} = \lambda\vec{y})$

$$
\begin{aligned}
(\lambda \neq 0 \wedge \vec{x} = \vec{y}) &\Rightarrow (\lambda \neq 0 \wedge \vec{x} - \vec{y} = \vec{0}) \\
&\Rightarrow \lambda(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \\
&\Rightarrow \lambda[\vec{x} + (-\vec{y})] = \vec{0} \\
&\Rightarrow \lambda\vec{x} + \lambda(-\vec{y}) = \vec{0} \\
&\Rightarrow \lambda\vec{x} - \lambda\vec{y} = 0 \Rightarrow \lambda\vec{x} = \lambda\vec{y}.
\end{aligned}
$$

1.2 SUB-ESPACIOS VECTORIALES

1.2.1) Definición:

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$,

Sea w un conjunto distinto de vacío, $W \subset E$. Se dice que W es sub-espacio vectorial de E si cumple ser un espacio vectorial con las operaciones definidas en E.

2) Caracterización de sub-espacios

Si E es un espacio vectorial sobre el cuerpo k, $A \subset E$

A es un sub-espacio vectorial si:

a) A es un subgrupo en $\mathbb{R}^2$

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall \vec{x} \in A, \ \alpha\vec{x} \in A$.

3) Ejemplo 1

Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$; donde $A \neq \phi$

Probar que A es sub-espacio de $\mathbb{R}^2$

Solución:

1°) Probar que A es subgrupo de $\mathbb{R}^2$

2°) $\alpha\vec{x} \in A$, $\forall \vec{x} \in A$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

a) $\forall \vec{x}, \vec{x} = (x_1, x_2)$ $\forall \vec{y}$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$

como $(x_1, x_2) \in A \Rightarrow x_1 = x_2$

$\wedge$ $(y_1, y_2) \in A \Rightarrow y_1 = y_2$

sumando queda $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

$\Rightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in A.$

Sea $(x_1, x_2) \in A \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow -x_1 = -x_2$

$\Rightarrow (-x_1, -x_2) \in A$

$\Rightarrow -(x_1, x_2) \in A$

$\therefore$ A es un subgrupo. (1)

Probando la 2a condición

Sea (x_1, x_2) un elemento cualquiera de A; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Probar que $\lambda(x_1, x_2) \in A$.

Como $(x_1, x_2) \in A \Rightarrow x_1 = x_2$

$\lambda x_1 = \lambda x_2$

$\Rightarrow (\lambda x_1, \lambda x_2) \in A$

$\Rightarrow \lambda(x_1, x_2) \in A.$ (2)

De acuerdo a los resultados (1) $\wedge$ (2) podemos afirmar que A es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

1.2.4 **Proposición:**

Sea $A \varepsilon E$, $A \neq 0$; donde E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces: A es un sub-espacio de E sí y sólo si:

i) $(\vec{x} + \vec{y}) \varepsilon A$; $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \varepsilon A$

ii) $(\alpha\vec{x} \varepsilon A$; $\forall\ \vec{x} \varepsilon A$, $\forall\ \alpha \varepsilon \mathbb{R}$.

Prueba:

a) Como AcV, sus elementos son vectores:

Sean $\vec{x},\vec{y} \varepsilon A \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} = \vec{c}$ ya que la suma de vectores el resultado es un vector, luego $\vec{c} \varepsilon A$.

b) Sea $\vec{x} \varepsilon A$, $\alpha \varepsilon \mathbb{R}$ la operación $\alpha\vec{x} = \vec{b}$, ya que el producto de un escalar por un vector el resultado es otro vector así $\vec{b} \varepsilon A$, luego $\alpha\vec{x} \varepsilon A$. $\forall\ \lambda \varepsilon \mathbb{R}$.

c) Como $\forall\ \vec{x},\vec{y},\vec{z} \varepsilon E$ $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$, en particular se cumple para los elementos del conjunto A, luego los elementos de A son asociativos.

Así, A es un sub-espacio de E ya que todas las propiedades de E se cumplen en A bajo las condiciones i) e ii).
$\therefore$ De (*) y (**) A es un sub-espacio de E.

5) **Ejemplos:**

El conjunto $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x,\ x \in \mathbb{R}\}$ es un sub-espacio del espacio $E = \{(x,y) / x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

Forma Geométrica

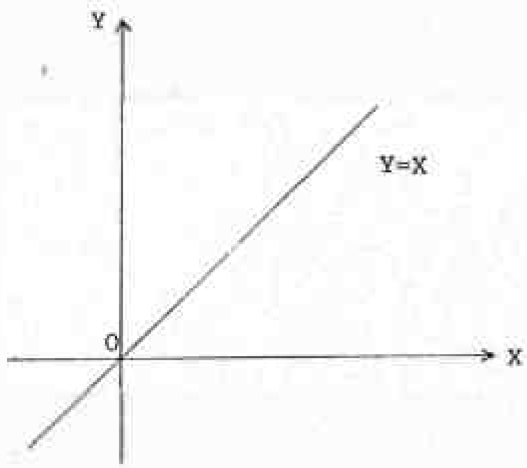


Fig. 1.1

Todo espacio vectorial tiene como sub-espacio a $\{0\}$ y a él mismo.

Cualquier sub-espacio de E que cumple $A \neq \{0\} \wedge A \neq E$ se dice que es sub-espacio propio de E.

1.3 SUMA DE SUB-ESPACIOS

1.3.1 DEFINICION:

Sean A,B dos sub-espacios de E. Se define la suma de sub-espacios como:

$$A + B = \{E / E = x + y,\ x \in A,\ y \in B\}$$

1.3.2 PROPIEDADES:

1) $(A + B) \subset E$

2) $(A + B)$ es un sub-espacio de E.

Demostración para 2)

i) Sean (x_1+x_2) y (y_1+y_2) dos elementos de $A + B$.

A probar que: $(x_1+x_2) + (y_1+y_2) \in (A + B)$

tenemos:

$$x_1 \wedge y_1 \in A \Rightarrow (x_1 + y_1) \in A$$

$$x_2 \wedge y_2 \in B \Rightarrow (x_2 + y_2) \in B$$

ya que A y B son sub-espacios

sumando los elementos:

$$(x_1+x_2) + (y_1+y_2) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$$

$$= (x_1+y_1) + (x_2+y_2) \text{ asociando}$$

como $(x_1 + y_1) \varepsilon A \wedge (x_2+y_2) \varepsilon B$

$\Rightarrow (x_1+y_1) + (x_2+y_2) \varepsilon (A + B)$

$\Rightarrow$ A + B es cerrada para la suma.

ii) A probar:

$$\alpha(\vec{x}_1+\vec{x}_2) \varepsilon (A + B)$$

Sea $(\vec{x}_1+\vec{x}_2) \varepsilon (A + B) \wedge \forall \alpha \varepsilon \mathbb{R}$ con $x_1 \varepsilon A \wedge x_2 \varepsilon B$.

Se tiene:

$$\alpha(\vec{x}_1+\vec{x}_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$$

si $\vec{x}_1 \varepsilon A \Rightarrow \alpha\vec{x}_1 \varepsilon A$ ya que A es sub-espacio (1)

Si $\vec{x}_2 \varepsilon B \Rightarrow \alpha\vec{x}_2 \varepsilon B$ ya que B es sub-espacio (2)

Sumando (1) y (2) tenemos:

$\alpha\vec{x}_1 + \alpha\vec{x}_2 \varepsilon A + B$

$\Rightarrow \alpha(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \alpha\vec{x}_1 + \alpha\vec{x}_2 \varepsilon (A + B)$

luego A + B es sub-espacio de E.

1.3.3 INTERSECCION DE SUB-ESPACIOS

1.3.3.1 Definición:

Sean V y W sub-espacios de E. Se define la intersección de sub-espacios como el conjunto:

$V \cap W = \{z \varepsilon E / z \varepsilon V \wedge z \varepsilon W\}$.

comentario:

$$V \cap W \neq \phi \text{ ya que el vector } \vec{0} \varepsilon V \cap W.$$

1.3.3.2 Proposición:

Si V y W son sub-espacios de E entonces $V \cap W$ es sub-espacio de E.

DEMOSTRACION:

A probar que $\forall\ \vec{x}_1,\ \vec{x}_2 \in V \cap W$ y $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

se cumple:

1) $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in V \cap W$

2) $\alpha\vec{x}_1 \in V \cap W$

Prueba para 1)

Sean $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V \cap W$

$\vec{x}_1 \in V \cap W \Rightarrow \vec{x}_1 \in V \wedge \vec{x}_1 \in W$

$\vec{x}_2 \in V \cap W \Rightarrow \vec{x}_2 \in V \wedge \vec{x}_2 \in W$

$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in V \wedge \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in W$

$\Rightarrow \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in V \cap W$

luego la suma es cerrada en $V \cap W$.

Prueba para 2)

Sean $\vec{x}_1 \in V \cap W \wedge \alpha \in \mathbb{R}$ a probar que $\alpha\vec{x} \in V \cap W$.

Si $\vec{x}_1 \in V \cap W \Rightarrow \vec{x}_1 \in V \wedge \vec{x}_1 \in W$

$\Rightarrow \alpha\vec{x}_1 \in V \wedge \alpha\vec{x}_1 \in W$ ya que V y W son sub-espacios

$\Rightarrow \alpha\vec{x}_1 \in V \cap W$.

Luego de 1) y 2) tenemos:

$$\begin{cases} \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in V \cap W\ ; & \forall\ \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V \cap W \wedge \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha\vec{x}_1 \in V \cap W\ ; & \end{cases}$$

$\therefore$ el conjunto $V \cap W$ es un sub-espacio

1.4 SUMA DIRECTA DE SUB-ESPACIOS

1.4.1 DEFINICION

Sean V y η dos sub-espacios de E; se dice que E es la suma directa de V y η si las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) $V \cap \eta = \{\vec{0}\}$

   todo vector $\vec{v} \in E$ se escribe como

   $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\eta}'$ con $v' \in V$ y $\vec{\eta}' \in \eta$.

2) Todo vector v E se escribe de una forma única:

   $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\eta}'$ con $\vec{v}' \in V$ y $\vec{\eta}' \in \eta$.

Prueba:

(1) $\Rightarrow$ (2) con:

Si $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\eta}'$, con $\vec{v}' \in V \wedge \vec{\eta}' \in \eta$. Supongamosque

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{\eta}_1$; con $\vec{v}_1 \in V \wedge \vec{\eta}_1 \in \eta$

luego $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\eta}' = \vec{v}_1 + \vec{\eta}_1$

así $\vec{v}' - \vec{v}_1 = \vec{\eta}_1 - \vec{\eta}'$

la diferencia $\vec{v}' - \vec{v}_1 \in V$ lo mismo a $\eta \Rightarrow \vec{v}' - \vec{v}_1 \in V \cap \eta$

y como $\vec{v}' - \vec{v}_1 = \vec{\eta}_1 - \vec{\eta}'$ significa que $\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}' \in V \cap \eta$

$\Rightarrow \vec{\eta}_1 - \vec{\eta}' \in V \cap \eta$

$\Rightarrow \vec{v}' - \vec{v}_1 = \vec{\eta}_1 - \vec{\eta}' = \vec{0}$ ya que el único elemento que posee la intersección es el elemento $\vec{0}$.

$\Rightarrow \vec{v}' = \vec{v}_1 \wedge \vec{\eta}_1 = \vec{\eta}'$ luego el vector$\vec{v}$ se escribe de una forma única como la suma de los vectores.

**(2) => (1)

Sea $\vec{v} \in V \cap \eta$ entonces lo podemos definir como la suma de dos vectores:

$$\vec{v} = \vec{v} + \vec{0} \quad , \text{ con } \vec{v} \in V \wedge \vec{0} \in \eta$$

también $\vec{v} = \vec{0} + \vec{v}' \quad \text{con } \vec{0} \in V \wedge v' \in \eta.$

Como $\vec{v}$ se escribe de manera única entonces

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v}'$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{0} \in V \cap \eta$$

$$\Rightarrow V \cap \eta = \{\vec{0}\} \qquad **$$

luego de (*) y (**) se concluye que E se puede escribir como la suma de dos sub-espacios $E = V \oplus \eta$ y se llama suma directa, la cual es única.

1.5 DEPENDENCIA LINEAL

1.5.1 DEFINICION:

Sea E un espacio vectorial, se dice que el conjunto de vectores $\{\vec{x}_i\}$; $i = 1,2,\ldots,n$ de E es linealmente dependiente si existe un escalar $\alpha_k \neq 0$ tal que la combinación lineal de los vectores es el vector nulo, es decir:

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k + \alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1} + \ldots\alpha_i\vec{x}_i = \vec{0}; \; i = 1,2,\ldots n$$

2 **EJEMPLO:**

Sea $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial definido como:

$v = \{(x,y)/x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$. Con las operaciones usuales $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ y $\alpha(x_1,y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$. $\forall\ (x_1,y_1);\ (x_2,y_2) \in V$ y $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

tomando $(1,-2)$, $(2,1)$, $(-2,2)$ como elementos de $\mathbb{R}^2$, mostrar que son linealmente dependientes.

Solución:

Aprobar que existen escalares α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha_1(1,-2) + \alpha_2(2,1) + \alpha_3(-2,2) = (0,0)$$

$$(\alpha_1,-2\alpha_1) + (2\alpha_2,\alpha_2) + (-2\alpha_3,2\alpha_3) = (0,0)$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3,\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) = (0,0)$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \quad \wedge \quad -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

Sumando las dos ecuaciones tenemos:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$$

$$-2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

$$-\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$$

$$3\alpha_2 = \alpha_1$$

Sustituyendo $\alpha_1 = 3\alpha_2$, en $\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$

$$3\alpha_2 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$$

$$5\alpha_2 = 2\alpha_3$$

luego $\alpha_2 = \frac{2}{5}\alpha_3$.

Si tomanos, por ejemplo $\alpha_3 = 1$, resulta $\alpha_2 = \frac{2}{5} \wedge \alpha_1 = \frac{6}{5}$

y así se concluye que $(1,-2)$, $(2,1)$, $(-2,2)$ son linealmente dependientes.

1.5.3 INDEPENDENCIA LINEAL

1.5.3.1 DEFINICION

El conjunto de vectores $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ de un espacio vectorial E es linealmente independiente si $\forall\ \alpha_i \in \mathbb{R}$; $i=1,2,\ldots n$.
$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_ix_i = \vec{0}$, necesariamente los escalares α_i son cero, es decir $\alpha_1 = \alpha 2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$.

1.5.3.2 PROPOSICION:

Sea $A = \{x_1,x2,\ldots,x_n\}$ un conjunto de vectores del espacio vectorial E. Estos son linealmente dependientes si y sólo si, existe $x_k \in A$ que se puede escribir como la combinación lineal de los restantes. Es decir:

$$x_k = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \ldots + \beta_nx_n \text{ ; para algunos } \beta_i \in \mathbb{R}$$

DEMOSTRACION:

" $\Rightarrow$ " Ademostrar que si $\{x_1,x_2,\ldots x_n\}$ son linealmente dependientes entonces al menos uno de ellos se puede escribir como una combinación lineal del resto.

Sea $\alpha_k \neq 0$ entonces tenemos:

$\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \ldots + \alpha_kX_k + \ldots + \alpha_nX_n = \vec{0}$

$\alpha_kX_k = -\alpha_1X_1 - \alpha_2X_2 - \ldots - \alpha_nX_n$. (*)

Como $\alpha_k \neq 0$ entonces podemos multiplicar (*) por el real $\frac{1}{\alpha_k}$

luego $X_k = \frac{-\alpha_1}{\alpha_k}X_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}X_2 \ldots \frac{\alpha_n}{\alpha_k}X_n$;

$\therefore$ el vector X_k es el que se ha escrito como combinación lineal de los restantes.

" <= "

Supongamos que el vector X_k lo podemos escribir en forma de combinación lineal del resto de vectores.

$X_k = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1} + - + \beta_{k+1} X_{k+1} + \ldots + \beta_n X_n.$

$\Rightarrow \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1} + (-1) X_k + \beta_{k+1} X_{k+1} + \ldots + \beta_n X_n = \vec{0}$

donde $\alpha_k = -1$

luego los vectores $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ son linealmente dependientes.

1.6 ESPACIOS GENERADOS

1.6.1 DEFINICION

Sean $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ un conjunto de vectores del espacio vectorial E. Se dice que los n-vectores son generadores del espacio vectorial E si cualquier vector $\vec{x}$ de E se puede escribir como una combinación lineal de los n vectores, es decir existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{x}$$

1.6.2 EJEMPLO

Sea $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ un conjunto de vectores Mostrar que son generadores del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, donde $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/x,y \in \mathbb{R}\}$.

SOLUCION:

Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. A mostrar que existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tq.

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,1) + \alpha_3(0,1) = (X,Y)$$

$$(\alpha_1,0) + (\alpha_2,\alpha_2) + (0,\alpha_3) = (X,Y)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + 0, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (X,Y)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = X \wedge \alpha_2 + \alpha_3 = Y$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = X - \alpha_2 \wedge \alpha_2 = Y - \alpha_3$$

si $\alpha_2 = 1$

$$\alpha_1 = X - 1 \wedge \alpha_3 = Y - 1$$

Comprobación:

$$(X-1)(1,0) + 1(1,1) + (Y-1)(0,1) = (X,Y)$$

$$(X-1,0) + (1,1) + (0,Y-1) = (X,Y)$$

$$(X,1) + (0,Y-1) = (X,Y)$$

$$(X,Y) = (X,Y)$$

luego los vectores $\{(1,0),(1,),(0,1)\}$ son generadores del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$

1.7 **BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL**

1.7.1 **DEFINICION:**

El conjunto $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots\vec{x}_n\}$ de vectores del espacio E es una base si y solamente si:

a) El conjunto es generador del espacio

b) Los vectores $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\}$ son linealmente independientes

1.7.2 **PROPOSICION:**

Si $\vec{x} \in E$, donde E es espacio vectorial, entonces $\vec{x}$ tiene una escritura única para cada base B de E.

Prueba:

Sea $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ una base de E entonces en particular es un conjunto de generadores luego cualquier vector de E puede ser escrito como combinación lineal de los vectores b_i, y = 1,2,...,n.

Supongamos que el vector $x \in E$ puede ser escrito de la forma siguiente:

1) $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n = \vec{x}$

2) $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n = \vec{x}$

Restando (2) de (1) obtenemos:

$$\vec{x} - \vec{x} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 - \ldots - \beta_n b_n.$$

$$\vec{0} = (x_1 - \beta_1) b_1 + (\alpha_2 - b_2) b_2 + \ldots + (\ _n - \ _n) b_n \qquad (**)$$

como B es una base de E entonces el conjunto $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ es linealmente independiente y los coeficientes de la combinación lineal (**) deben ser nulos es decir:

$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$

luego $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n = \beta_n$.

.. Si $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ es una base de E, el vector $\vec{x} \in E$ se puede escribir en forma única como combinación lineal de los vectores de la base.

Si $x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$, los coeficientes α_i, i = 1, 2, ..., n son llamados coordenadas de x con relación a la base.

En forma particular podemos tomar como base $B = \{(1,0),(0,1)\}$ en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ que son las bases denominadas canónicas de los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

1.2 ESPACIOS VECTORIALES EUCLIDEAÑOS

Producto Escalar. (Producto punto).

1.2.1 DEFINICION:

Sea E un espacio vectorial, se define en E la función producto escalar como $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes

$$\vec{x}\,,\,\vec{y} \rightsquigarrow \vec{x}.\vec{y}$$

condiciones:

$\forall\ \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in E,\quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$:

i) $\vec{x}.(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}.\vec{y} + \vec{x}.\vec{z}$

ii) $\vec{x}(\alpha.\vec{y}) = \alpha(\vec{x}\vec{y})$

iii) $\vec{x}.\vec{x} \geq 0$

iv) $\vec{x}.\vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

v) $\vec{x}.\vec{y} = \vec{y}.\vec{x}$

El espacio E, dotado de la función producto es un espacio vectorial Euclidiano.

1.2.2 EJEMPLO:

En $\mathbb{R}^n$ se define el producto escalar como el real.

$P = \vec{x}.\vec{y} = (x_1,x_2,\ldots,x_n).(y_1,y_2,\ldots,y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, donde

$\vec{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\vec{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$

Prueba para i)

Sea $\vec{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\vec{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$;

$\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\vec{x}.(\vec{y}+\vec{z}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).[(y_1, y_2, \ldots, y_n)+(z_1, z_2, \ldots, z_n)]$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n).[(y_1+z_1, y_2+z_2, \ldots, y_n+z_n)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i + z_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$$

$$= \vec{x}.\vec{y} + \vec{x}.\vec{z}$$

luego $\vec{x}.(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}.\vec{y} + \vec{x}.\vec{z}$

Para ii) sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\vec{x}.(\alpha\vec{y}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).[\alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)(\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha y_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$= \alpha\vec{x}.\vec{y}$$

Para iii).

Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x}.\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Como $x_1^2 \geq 0$; $x_2^2 \geq 0$, ..., $x_n^2 \geq 0$, tenemos que

$$\vec{x}.\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

Para iv) como es bicondicional se prueba en dos partes

a) " $\Rightarrow$ " $\vec{x}.\vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = (0,0,\ldots,0) = \vec{0}$

$$\vec{x}.\vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x}.\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, \quad \forall\ i = 1,2,3,\ldots,n.$$

$$\Rightarrow x_i^2 = 0 \quad \forall\ i = 1,2,\ldots,n$$

$$\Rightarrow x_i = 0 \quad \forall\ i = 1,2,\ldots,n$$

$$\Rightarrow \vec{x} = (0,0,\ldots,0) = \vec{0} \quad ; \text{ donde } \vec{0} \in \mathbb{R}^n$$

b) " $\Leftarrow$ " si $\vec{x} = \vec{0}$ entonces $\vec{x}.\vec{x} = 0$

$$\text{si } \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \vec{x} = (0,0,\ldots,0)$$

$$\Rightarrow \vec{x}.\vec{x} = (0,0,\ldots,0).(0,0,\ldots,0)$$

$$\Rightarrow \vec{x}.\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} (0)(0)$$

$$\Rightarrow \vec{x}.\vec{x} = 0 \in \mathbb{R}$$

Prueba para v) $\vec{x}.\vec{y} = \vec{y}.\vec{x}$

Sea $\vec{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\vec{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\vec{x}.\vec{y} &= (x_1,x_2,\ldots,x_n).(y_1,y_2,\ldots,y_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\
&= (y_1,y_2,\ldots,y_n).(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\
&= \vec{y}.\vec{x}
\end{aligned}$$

1.2.3 **DEFINICION:**

El producto escalar de un vector $\vec{x}$ por el mismo se representa como el cuadrado del vector $\vec{x}.\vec{x} = \vec{x}^2$.

1.2.4 **PROPOSICION:**

En todo espacio euclideano el producto escalar, de cualquier vector y el vector nulo es cero.

1.2.5 **DEFINICION:**

Si E es un espacio vectorial con producto escalar se define la función $Q: E \longrightarrow \mathbb{R}$ por $Q(\vec{x}) = \vec{x}.\vec{x}$, llamada la forma cuadrática asociada al producto escalar en E.

1.2.6 **PROPOSICION:**

Sea Q la forma cuadrática asociada al producto interno.

$\forall\ \vec{x},\vec{y} \in E,\ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, tenemos:

a) $Q(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$,

b) $Q(\vec{x}) \geq 0$

c) $Q(\alpha\vec{x}) = \alpha^2 Q(\vec{x})$

d) $Q(\vec{x}+\vec{y}) = Q(\vec{x}) + 2\vec{x}.\vec{y} + Q(\vec{y})$

e) $(\vec{x}.\vec{y}) \leq Q(\vec{x})Q(\vec{y})$.

Prueba: para las propiedades anteriores

a) $Q(\vec{x}) \geq 0$

Como $\vec{x}.\vec{x} \geq 0$ por propiedad de producto interno

luego $Q(\vec{x}) \geq 0$ ya que por definición $Q(\vec{x}) = \vec{x}.\vec{x}$.

b) $Q(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

tenemos que $\vec{x}.\vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$ por el producto interno

luego $Q(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

c) $Q(\alpha\vec{x}) = \alpha^2 Q(\vec{x})$.

se tiene $Q(\alpha\vec{x}) = (\alpha\vec{x}).(\alpha\vec{x})$ por definición

$$
\begin{aligned}
&= \alpha[\vec{x}.(\alpha\vec{x})] \\
&= \alpha[\alpha(\vec{x}.\vec{x})] \\
&= \alpha^2(\vec{x}.\vec{x}) \\
&= \alpha^2 Q(\vec{x})
\end{aligned}
$$

luego $Q(\alpha\vec{x}) = \alpha^2 Q(\vec{x})$.

d) $Q(\vec{x}+\vec{y}) = Q(\vec{x}) + 2\vec{x}.\vec{y} + A(\vec{y})$

tenemos $Q(\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}+\vec{y}).(\vec{x}+\vec{y})$

$$
\begin{aligned}
&= \vec{x}.(\vec{x}+\vec{y}) + \vec{y}.(\vec{x}+\vec{y}) \\
&= \vec{x}.\vec{x} + \vec{x}.\vec{y} + \vec{y}.\vec{x} + \vec{y}.\vec{y} \\
&= \vec{x}.\vec{x} + \vec{x}.\vec{y} + \vec{x}.\vec{y} + \vec{y}.\vec{y} \\
&= Q(\vec{x}) + 2\vec{x}.\vec{y} + Q(\vec{y})
\end{aligned}
$$

luego $Q(\vec{x}+\vec{y}) = Q(\vec{x}) + 2\vec{x}.\vec{y} + Q(\vec{y})$.

e) $(\vec{x}.\vec{y})^2 \leq Q(\vec{x}).Q(\vec{y})$

si $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in E$

$(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}).(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \geq 0$

$\alpha^2(\vec{x}.\vec{x}) + 2\alpha\beta(\vec{x}.\vec{y}) + \beta^2(\vec{y}.\vec{y}) \geq 0$

haciendo $\alpha = \vec{y}.\vec{y}$ y $\beta = -\vec{x}.\vec{y}$, tenemos:

$(\vec{y}.\vec{y})^2(\vec{x}.\vec{x}) - 2(\vec{y}.\vec{y})(\vec{x}.\vec{y})^2 + (\vec{x}.\vec{y})^2(\vec{y}.\vec{y}) \geq 0$

$(\vec{y}.\vec{y})^2(\vec{x}.\vec{x}) - (\vec{y}.\vec{y})(\vec{x}.\vec{y})^2 \geq 0$

entonces $(\vec{y}.\vec{y})^2(\vec{x}.\vec{x}) \geq (\vec{y}.\vec{y})(\vec{x}.\vec{y})^2$

$\Rightarrow (\vec{y}.\vec{y})(\vec{x}.\vec{x}) \geq (\vec{x}.\vec{y})^2$

$\Rightarrow (\vec{x}.\vec{x})(\vec{y}.\vec{y}) \geq (\vec{x}.\vec{y})^2$

$\therefore Q(\vec{x})Q(\vec{y}) \geq (\vec{x}.\vec{y})^2$

1.2.7 NORMA DE UN VECTOR

1.2.7.1 DEFINICION:

Sea E un espacio vectorial dotado del producto interior, definiremos norma o longitud del vector $\vec{x} \in E$ al número

$\|\vec{x}\| = +\sqrt{Q(\vec{x})}$

$= +\sqrt{\vec{x}.\vec{x}}$

1.2.7.2 PROPOSICION:

El cuadrado de la norma de todo vector es igual al producto escalar de dicho vector consigo mismo es decir

$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x}.\vec{x}$

$$|\vec{x}\|^2 = (+\sqrt{Q(\vec{x})})^2$$

$$\Rightarrow |\vec{x}\|^2 = (+\sqrt{\vec{x}.\vec{x}})^2$$

luego $|\vec{x}\|^2 = \vec{x}.\vec{x}$

1.2.7.3 **PROPOSICION:**

Sea E un espacio vectorial con producto interno la norma verifica que $|\vec{x},\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$. (Desigualdad de Schwarz).

se tiene:

$$(\vec{x}.\vec{y})^2 \leq Q(\vec{x})Q(\vec{y})$$

$$(\vec{x}.\vec{y})^2 \leq (\vec{x}.\vec{x})(\vec{y}.\vec{y})$$

$$(\vec{x}.\vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$$

$$|\vec{x}.\vec{y}|^2 \leq (\|\vec{x}\|\,|\vec{y}\|)^2$$

$$|\vec{x}.\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|.$$

1.2.7.4 **PROPOSICION:**

En un espacio vectorial E, se define la función norma

$\|\;\|: E \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

$\vec{x} \rightsquigarrow |\vec{x}|$

$\forall\ \vec{x},\vec{y} \in E,\quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

i) $|\vec{x}\| \geq 0$

ii) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Estas dos consecuencias son inmediatas ya que $\vec{x}.\vec{x} \geq 0$ y $\vec{x}.\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ respectivamente.

iii) $|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$

iv) $|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}\| + |\vec{y}\|.$

Prueba por iii) y iv)

Se tiene por definición:

$$|\alpha\vec{x}| = +\sqrt{Q(\alpha\vec{x})}$$

$$= +\sqrt{\alpha^2 Q(x)}$$

$$= +\sqrt{\alpha^2}\sqrt{Q(\vec{x})}$$

$$= +\sqrt{\alpha^2 \|\vec{x}|}$$

$= |\alpha|\,\|\vec{x}\|$ por definición de valor absoluto $|\alpha| = +\sqrt{\alpha^2}$

luego $|\vec{x}| = |\alpha|\,|\vec{x}|$.

Para $|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$,

tenemos:

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = Q(\vec{x}+\vec{y})$$

$$= Q(\vec{x}) + 2\vec{x}.\vec{y} + Q(\vec{y})$$

$$\leq Q(\vec{x}) + 2|\vec{x}|\,\|\vec{y}| + Q(\vec{y})$$

$$= |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}|\,|\vec{y}| + |\vec{y}|^2$$

$$= (|\vec{x}\| + |\vec{y}|)^2$$

$$|\vec{x}+\vec{y}| \leq (\|\vec{x}\| + |\vec{y}|)^2$$

$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|x\| + |y|$; ya que las bases son positivas.

1.2.8 ANGULO ENTRE VECTORES

Sean $\vec{x},\vec{y}$ dos vectores no nulos en un espacio con producto interno. A partir de la desigualdad de Schwarz.

tenemos:

$$|\vec{x}.\vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$$

se deduce que $-|\vec{x}||\vec{y}| \leq |\vec{x}.\vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$

$$-1 \leq \frac{|\vec{x}.\vec{y}|}{|\vec{x}||\vec{y}|} \leq 1. \quad \text{ya que}$$

$$|\vec{x}| \neq 0 \wedge |\vec{y}| \neq 0$$

DEFINICION:

Sean $\vec{x},\vec{y}$ dos vectores distintos del vector nulo se define el ángulo entre dos vectores al número real $\alpha \in [0,\pi]$

Tal que

$$\cos \alpha = \frac{\vec{x}.\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

De aquí se deduce la expresión del producto escalar en función del ángulo entre vectores y de sus normas.

Así $\vec{x}.\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \alpha$.

1.2.8.3 **DISTANCIA ENTRE DOS VECTORES**

En un espacio vectorial con producto escalar se define como distancia entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a la norma de su diferencia es decir: $d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\|$; $\forall\ \vec{u},\vec{v} \in E$.

1.2.8.4 **PROPOSICION:**

Sea "d" la función distancia definida como:

$$d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{u},\vec{v}) \rightsquigarrow d(\vec{u},\vec{v}).$$

en un espacio vectorial E dotado de producto escalar.

1.2.8.5 **PROPIEDADES:**

1) $d(\vec{u},\vec{v}) \geq 0 \quad \forall\ \vec{u},\vec{v} \in E$

2) $d(\vec{u},\vec{v}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{v}$

3) $d(\vec{u},\vec{v}) = d(\vec{v},\vec{u})$

4) $d(\vec{u},\vec{v}) \leq d(\vec{u},\vec{w}) + d(\vec{w},\vec{v}) \quad \forall\ \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in E$.

Pruebas:

i) Para la propiedad 1) es inmediata ya que por definición de distancia $d(\vec{u},\vec{v}) \geq 0$.

ii) Para Nº 2 se demuestra así:

$$d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\| = 0 \iff \vec{u}-\vec{v} = 0 \text{ por propiedad de norma}$$
$$\iff \vec{u} = \vec{v}$$

iii) Para la Nº 3, $\forall\ \vec{u},\vec{v} \in E$ se tiene:

$$d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\| = \|-(\vec{v}-\vec{u})\|$$
$$= |-1|\,\|\vec{v}-\vec{u}\| = \|\vec{v} - \vec{u}\|$$

$$= d(\vec{v},\vec{u}).$$

iv) Prueba para 4)

$$d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\|$$

$$= \|\vec{u} - \vec{w} + \vec{w} - \vec{v}\|$$

$$\leq \|\vec{u}-\vec{w}\| + \|\vec{w}-\vec{v}\| \quad \text{por propiedad de norma}$$

$$= d(\vec{u},\vec{w}) + d(\vec{w},\vec{u})$$

luego $d(\vec{u},\vec{v}) \leq d(\vec{u},\vec{w}) + d(\vec{w},\vec{v})$.

2.3 ORTOGONALIDAD

2.3.1 DEFINICION:

Sea E un espacio vectorial con producto escalar. Dos vectores $\vec{x},\vec{y} \in E$ son ortogonales si y solamente si el producto escalar $\vec{x}.\vec{y}$ es cero.

2.3.2 TEOREMA DE PITAGORAS

Si $\vec{x},\vec{y} \in E$ son dos vectores ortogonales entonces

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Prueba:

Tenemos $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y}).(\vec{x}+\vec{y})$

$$= \vec{x}.\vec{x} + \vec{x}.\vec{y} + \vec{y}.\vec{x} + \vec{y}.\vec{y}$$

$$= \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}.\vec{y} + \|\vec{y}\|^2$$

$$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \quad \text{ya que } \vec{x}.\vec{y} = 0$$

luego $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

Forma Geométrica

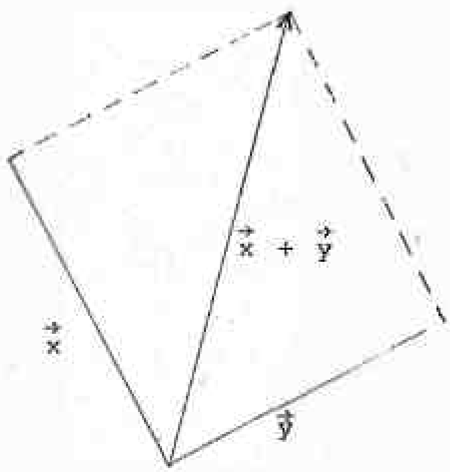


Fig. 1.2

2.3.4 **DEFINICION:**

En un espacio vectorial dotado de producto escalar; un conjunto de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ es ortogonal sí y solamente sí dos vectores cualesquiera $\vec{x}, \vec{y}$ y distintos de cero son ortogonales, es decir $\vec{x}.\vec{y} = 0$.

2.3.5 **ORTOGONALIDAD EN** $\mathbb{R}^n$

2.3.5.1 **DEFINICION:**

Un conjunto de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, x_n\}$ en un espacio vectorial E, dotado de la operación producto escalar, se dice que es una base ortonormal si es ortogonal y además $\|\vec{x}_i\| = 1$ $\forall\ i \leq n$; es decir que $\vec{x}_i \vec{x}_j = \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n$.

Una base ortogonal es tal que $\begin{cases} \vec{x}_i \vec{x}_j = 0\ , & i \neq j \\ \vec{x}_i \vec{x}_j = 1\ , & \text{si } i = j \end{cases}$

EJEMPLO:

Tomando a $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial con producto escalar, la base canónica $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,..,\vec{e}_n\}$ es ortogonal.

2.3.5.2 **PROPOSICION:**

Todo espacio euclidiano de dimensión finita admite una base ortogonal.

DEMOSTRACION:

Sea $A = \{\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n\}$ una base cualquiera.

De donde:

i) $\vec{0} \neq \vec{a}_1 \in A$. Por lo tanto $\|\vec{a}_1\| \neq 0$,

El vector $\vec{s}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}$, es unitario

ii) Supongamos que $s = \{\vec{s}_1,\vec{s}_2,...,s_n\}$ es un conjunto ortonormal.

Se trata de obtener s_{n+1} talque $\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,...,s_{n+1}\}$ sea ortonormal.

Sea el vector $\vec{d}_{n+1} = \vec{a}_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (\vec{a}_{n+1}.\vec{s}_i).\vec{s}_i$

El cual al desarrollarlo queda:

$$d_{n+1} = a_{n+1} - (\vec{a}_{n+1}\vec{s}_1)\vec{s}_1 - (\vec{a}_{n+1}.\vec{s}_2)\vec{s}_2 - \ldots, -(\vec{a}_{n+1}\vec{s}_n)\vec{s}_n$$

Se cumple que d_{n+1} es ortogonal a s_j, $\forall\ j = 1, \ldots, n.$

es decir:

$$d_{n+1}\ s_j = 0$$

En efecto: $d_{n+1}\ s_j = \left[a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (\vec{a}_{n+1}.\vec{s}_1)\vec{s}_1\right] s_j$

$$= a_{n+1}\ s_j - \sum_{i=1}^{n} (\vec{a}_{n+1}.\vec{s}_1)\vec{s}_1\ \vec{s}_j = 0$$

$$= a_{n+1}\ s_j - \sum_{i=1}^{n} (\vec{a}_{n+1}.\vec{s}_1)\,\delta ij \quad = 0$$

$$d_{n+1}\ s_j = a_{n+1}\ s_j - (\vec{a}_{n+1}.s_j).1 = 0,\ \forall\ i = j$$

luego

$$d_{n+1}\ s_j = 0$$

Definamos el elemento s_{n+1} de la forma

$$\vec{s}_{n+1} = \frac{\vec{d}_{n+1}}{|\vec{d}_{n+1}|}$$

de donde $|\vec{s}_{n+1}| = 1$ por definición de vector unitario.

y en consecuencia el conjunto de vectores

$$s = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n+1}\} \text{ es ortonormal}$$

2.3.5.4 **EJEMPLO:**

En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, .)$ se considera la base formada por:

$$a_1 = (1,0) \quad , \quad a_2 = (1,1).$$

Por i)

$$\|\vec{a}_1\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\vec{s}_1 = \frac{a_1}{|a_1|} = \frac{(1,0)}{1} = (1,0)$$

$$\vec{d}_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2.\vec{s}_1)\vec{s}_1$$

$$= (1,1) - \left[(1,1).(1,0)\right](1,0)$$

$$= (1,1) - \left[(1\cdot1) + (1\cdot0)\right](1,0)$$

$$= (1,1) - \left[1\right](1,0)$$

$$= (1,1) - (1,0)$$

$$\vec{d}_2 = (0,1)$$

luego

$$\vec{s}_2 = \frac{\vec{d}_2}{|\vec{d}_2|} = \frac{(0,1)}{1} = (0,1)$$

$\therefore$ la base $\{s_1, s_2\}$ es ortonormal.

2.3.5.5 **EJEMPLO:**

Se considera la base en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ formada por:

$$\vec{a}_1 = (0,1,1) \quad , \; \vec{a}_2 = (1,0,1), \; \vec{a}_3 = (1,1,0).$$

tomemos:

$$\vec{s}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\vec{d}_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2\vec{s}_1).\vec{s}_1$$

$$= (0,1,1) - \left[(1,0,1).(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\right](0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= (0,1,1) - \left[0+0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right](0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= (0,1,1) - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right](0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= (0,1,1) - (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\vec{d}_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$|\vec{d}_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego

$$\vec{s}_2 = \frac{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\vec{d}_3 = \vec{a}_3 - (\vec{a}_3.\vec{s}_2).\vec{s}_2$$

$$= (1,1,0) - \left[(1,1,0).(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\right](0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\vec{d}_3 = (1,1,0) - \left[0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right](0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= (1,1,0) - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right](0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= (1,1,0) - (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\vec{d}_3 = (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$|\vec{d}_3| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Luego

$$\vec{s}_3 = \frac{(1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})}{\sqrt{3/2}}$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{3/2}},\ \frac{1}{2\sqrt{3/2}},\ -\frac{1}{2\sqrt{3/2}})$$

$$= (\frac{\sqrt{3/2}}{3/2},\ \frac{\sqrt{3/2}}{-3},\ -\frac{\sqrt{3/2}}{3})$$

$$\vec{s}_3 = (\frac{2\sqrt{3/2}}{3},\ \frac{\sqrt{3/2}}{3},\ -\frac{\sqrt{3/2}}{3})$$

$\therefore$ la base $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3\}$ es ortonormal.

2.4 PROYECCION DE UN VECTOR SOBRE OTRO

Sea $\vec{x}$ y $\vec{y}$ dos vectores de un espacio con producto escalar, e $\vec{y} \neq \vec{0}$. Entonces existe un escalar β, tal que.

$$(\vec{x} - \beta\vec{y}) \perp \vec{y}.$$

en efecto:

$$(\vec{x} - \beta\vec{y}).\vec{y} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{x}.\vec{y} - \beta\vec{y}\vec{y} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{x}.\vec{y} = \beta\vec{y}\vec{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{x}\vec{y}}{\vec{y}\vec{y}} = \beta. \qquad **$$

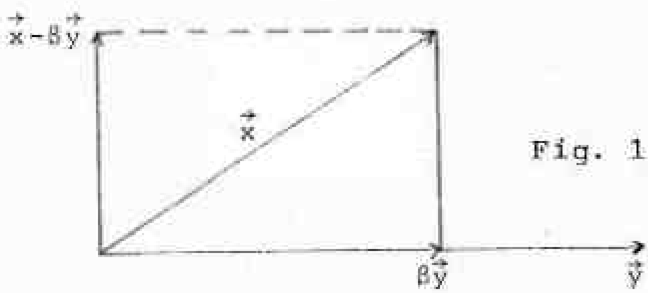


Fig. 1.3

Si multiplicamos la expresión (**) por $\vec{y}$ el vector

$$\beta\vec{y} = \frac{\vec{x}.\vec{y}}{\vec{y}.\vec{y}} . \vec{y} = \frac{\vec{x}.\vec{y}}{|\vec{y}|} . \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}$$

Se llama proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre $\vec{y}$ el cual lo identificamos como el número real $\frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$ y lo escribimos $p_{\vec{y}}\vec{x} = \frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$

En forma particular si $\vec{y}$ es un vector de módulo 1, se tiene: $p_{\vec{y}}\vec{x} = \vec{x}.\vec{y}$.

2.5 **VECTORES COLINEALES O PARALELOS**

2.5.1 **DEFINICION:**

Sean $\vec{x},\vec{y}$ dos vectores del espacio vectorial E

Se dice que dos vectores son colineales si y solamente si pertenecen a una misma recta.

2.5.2 **PROPOSICION:**

Sea $\vec{x}$ un vector no nulo y $\vec{y}$ un vector cualquiera

1º si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son colineales, entonces existe un único real t, tal que $\vec{y} = t\vec{x}$.

2º Si existe un real t tal que $\vec{y} = t\vec{x}$, entonces $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son colineales.

Prueba:

1º Sea $t \in \mathbb{R}$, y $\vec{x} \neq \vec{0}$, y dos vectores tal que $\vec{y} = t\vec{x}$.

Supongamos que $\exists$ $t' \in \mathbb{R}$ talque $\vec{y} = t'\vec{x}$.

Se tiene $t'\vec{x} = t\vec{x}$

$$\Rightarrow \quad t'\vec{x} - t\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad (t'-t)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad t' - t = 0 \quad \text{ya que } \vec{x} \neq \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad t' = t$$

luego t es único y debe ser $\vec{y} = t\vec{x}$.

2.6 SEGMENTO, DIVISION DE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA.

Tomando cualquier $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y considerando el conjunto de vectores.

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \gamma\vec{v} \;;\; \alpha,\gamma \geq 0, \quad + \quad = 1. \tag{1}$$

determinados por los reales α,γ cuya suma es 1 se tiene:

$$\vec{w} = (1-\gamma)\vec{u} + \gamma\vec{v}$$

$$= \vec{u} + \gamma(\vec{v}-\vec{u}) \quad ; \quad \alpha = 1 - \gamma \text{ y } \; 0 \leq \gamma \leq 1 \tag{2}$$

o sea

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + (1-\alpha)\vec{v}$$

$$= \alpha\vec{u} + \vec{v} - \alpha\vec{v}$$

$$= \vec{v} + \alpha(\vec{u}-\vec{v}) \quad , \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{3}$$

De (2) en el espacio $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{w}$ completan el segmento que une $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Esto es debido a que el vector $\vec{w}$ es la suma del vector $\vec{u}$ con el vector $\alpha(\vec{v}-\vec{u})$; así $\vec{w}$ es colineal con $(\vec{v}-\vec{u})$.

En forma Geométrica

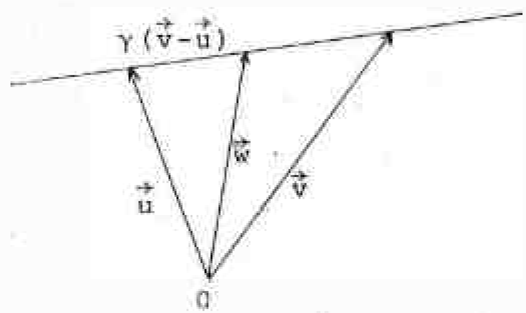


Fig. 1.4

Así, el conjunto de vectores $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \gamma\vec{v}$, $(\alpha, \gamma \geq 0,\ \alpha + \gamma = 1)$ representan el segmento $[u,v]$ que es el vector formado con las partes terminales de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$.

Consecuencias:

1ª) Si $\alpha = 0$ se tiene $\vec{w} = \vec{v}$ ya que $\gamma = 1$.

2ª) Si $\gamma = 0$ se tiene $\vec{w} = \vec{u}$ ya que $\alpha = 1$.

3ª) $\alpha > 0$, $(\gamma = 1 - \alpha > 0)\ \vec{w}$ es un vector cualquiera de $[u,v]$

2.6.2 **DEFINICION:**

Se llama segmento $[u,v]$ que une los puntos $u,v \in \mathbb{R}^n$ al conjunto de todos los vectores $\vec{w}$ de la forma

$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \gamma\vec{v}$, $(\alpha, \gamma \geq 0,\ \alpha + \gamma = 1)$.

2.7 SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

a) **Espacio** ($\mathbb{R}^3$)

Un sistema de coordenadas cartesianas del espacio $\mathbb{R}^3$ es el conjunto por una base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ y un punto "0" (llamado origen) que se puede indicar por $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Las rectas orientadas que pasan por el origen dándoles la dirección $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, se denominan: eje de las abscisas, eje de las ordenadas Y y eje de las cotas z respectivamente.

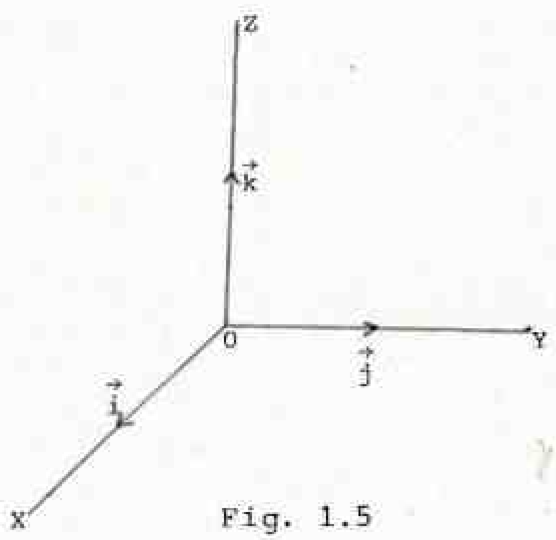


Fig. 1.5

b) **Plano** ($\mathbb{R}^2$)

En el plano $\mathbb{R}^2$ el sistema de coordenadas cartesianas es el conjunto formado por una base ortonormal $(\vec{i},\vec{j})$ y un punto "0", dicho sistema se indica por $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Las rectas orientadas que pasan por el punto "0" (u origen) que tiene como dirección a los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ se denominan respectivamente: eje de las abscisas x y eje de las coordenadas Y.

Gráficamente

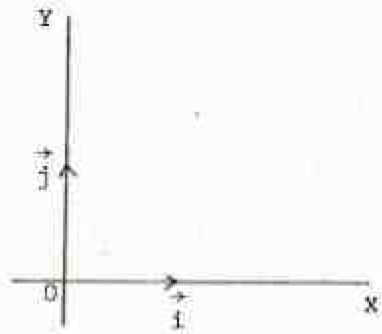


Fig. 1.6

2.8 ECUACION VECTORIAL DE LA RECTA

2.8.1 EN EL ESPACIO $\mathbb{R}^3$

Sea D una recta que pasa por el punto x cuya dirección está dada por el vector no nulo $\vec{v}$.

Para que un punto Y de $\mathbb{R}^3$ pertenezca a la recta D es necesario y suficiente que existe un número real β tal que:

$\overrightarrow{xy} = \beta\vec{u}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Así tenemos la ecuación

$0\vec{x} = 0\vec{y} + \beta\vec{u}$, (i)

Se denomina ecuación vectorial de la recta.

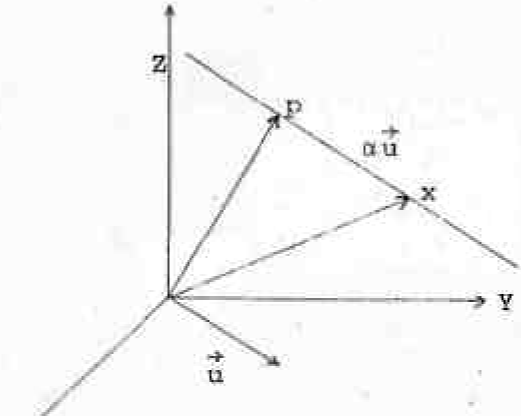


Fig. 1.7

Si D pasa por dos puntos distintos P y Q, la dirección de la recta será dada por el vector $\overrightarrow{pq}$, y la ecuación vectorial de la recta es:

$$\overrightarrow{0X} = \overrightarrow{0P} + \beta\overrightarrow{pq}, \quad (\beta \in \mathbb{R}) . \qquad \text{(ii)}$$

2. En el **plano** $\mathbb{R}^2$

Sea D una recta, que pasa por el punto x, que tiene como dirección el vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ del plano, la ecuación vectorial de D, será de la forma $x = y + \beta\vec{u}$ $(\beta \in \mathbb{R})$.

En el caso de que recta D está definida por dos puntos distintos P,Q la ecuación vectorial de D será:

$$X = P + \beta(\overrightarrow{pq}) \quad , \beta \in \mathbb{R}$$

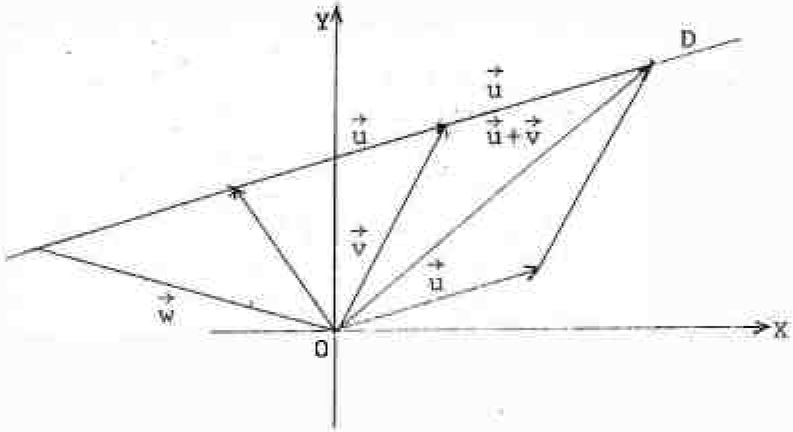


Fig. 1.8

2.9 ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA RECTA

1. En el Espacio $\mathbb{R}^3$

a) Sea $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ el sistema de coordenada de $\mathbb{R}^3$.

Sea $p = (x,y,z)$, $\Omega(x_0,y_0,x_0)$ y $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$, respectivamente p es un punto fijo, $\Omega \in D$ y $\vec{u} \neq \vec{0}$ un vector director que es paralelo a la recta D.

De la ecuación vectorial de la recta D: $\overrightarrow{0x} = \overrightarrow{0p} + \beta\vec{u}$, $(\beta \in \mathbb{R})$ tenemos:

$$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(\alpha,\beta,\gamma)$$
$$= (x_0+t\alpha, y_0+t\beta, z_0+t\gamma)$$

2.10 ECUACION CARTESIANA DE UNA RECTA

2.10.1 DEFINICION:

Sea p un plano de sistema $(0,\vec{i},\vec{j})$. Consideremos la recta D que pasa por el punto $\mu_0(x_0,y_0)$ y tiene como vector director $\vec{u}(\alpha,\beta)$.

Un punto $\mu(x,y)$ pertenece a la recta D si y solamente si los vectores $\overrightarrow{\mu_0\mu}(x-x_0,y-y_0)$ y $\vec{u}(\alpha,\beta)$ son colineales es decir si y sólo si su determinante es nulo.

Así se tiene:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$$

Significa que $\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0) = 0$ (1)

La expresión (1) es una ecuación cartesiana de la recta.

En forma geométrica se tiene:

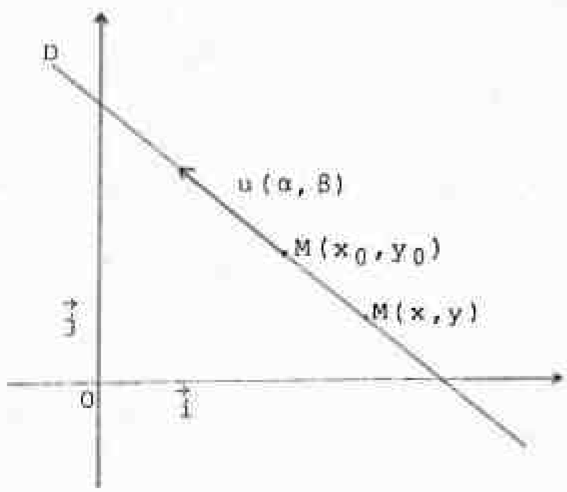


Fig. 1.9

$$\text{luego: } \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{iii)}$$

En el cual α, β, γ no son todos nulos, ya que $\vec{u} \neq \vec{0}$.
Así las ecuaciones iii) se denominan ecuaciones parametricas de la recta D, en relación con el sistema de coordenadas $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

El proceso anterior se puede plantear en forma inversa. En el caso que la recta D sea definida por dos puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ las ecuaciones parametricas de la recta en $\mathbb{R}^3$ serán:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y &= a_2 + t(b_2 - a_2) \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z &= a_3 + t(b_3 - a_3) \end{aligned}$$

En el plano $\mathbb{R}^2$, de sistema $(0, \vec{i}, \vec{j})$, las ecuaciones parametricas de la recta D que pasa por el punto $x = (x_0, y_0)$ y con dirección del vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ son:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\alpha \\ y &= y_0 + t\beta \end{aligned} , \quad (t \in \mathbb{R})$$

En el caso que la recta pasa por dos puntos distintos A,B $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, las ecuaciones parametricas son:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y &= a_2 + t(b_2 - a_2). \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2.11 ECUACION GENERAL DE LA RECTA EN EL PLANO

2.11.1 Sea p el plano. El conjunto de puntos $\mu(x,y)$ y un vector director $\vec{u}(-B,A)$ verifican la ecuación $Ax+By+C = 0$ con $(A,B) \neq (0,0)$ donde $A,B,C \in \mathbb{R}$ no simultaneamente nulos.

2.11.2 RECTAS PARALELAS

Sean L, L_1 dos rectas de ecuaciones $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ respectivamente.

L tiene dirección $\vec{u}(-B,A)$ y L' tiene $u'(-B',A')$. Las rectas L y L' son paralelas si y solamente si $\vec{u}$ y $\vec{u}'$ son colineales es decir, si y solamente si,

$$\begin{vmatrix} -B & -B' \\ A & A' \end{vmatrix} = 0 \text{ significa que } AB' - BA' = 0$$

2.11.3 RECTAS PERPENDICULARES U ORTOGONALES

Sean las ecuaciones $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'x + C' = 0$ de las rectas L y L' respectivamente en un sistema ortogonal.

Se dice que L y L' son ortogonales si y solamente si $\vec{u}.\vec{u}' = 0$ es decir $AA' + BB' = 0$; donde $\vec{u}$ y $\vec{u}'$ son los vectores directores.

PROPIEDADES

1) Una recta en el espacio está contenida en una infinidad de planos.
2) Dos rectas paralelas determinan un plano.
3) Una recta es paralela a un plano si y sólo si la recta es paralela a una recta contenida en el plano.
4) Una recta es perpendicular a un plano si y sólo si la recta es perpendicular a una recta contenida en el plano.
5) Dos planos son perpendiculares si y sólo si existe una recta contenida en uno de los planos que es perpendicular al

otro plano.

CARACTERISTICAS DE LA PROPIEDAD 5

1) Dos planos perpendiculares son secantes.

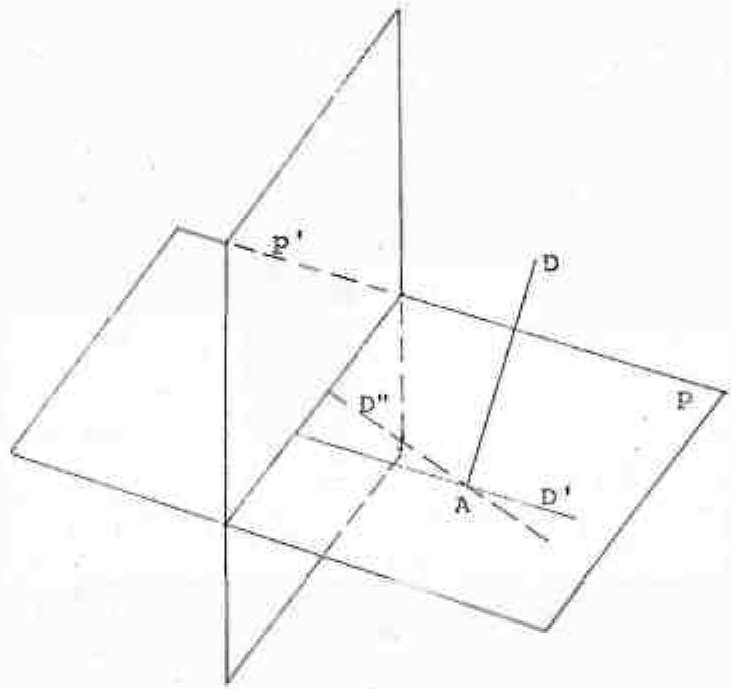


Fig. 1.10

A es un punto P y D' una recta que pasa por A y ortogonal a P'. Mostremos que D' c P.

D ⊥ P y pasa por A; las rectas D y D' son ortogonales luego ellas son secantes en A y determinan un plasno Q que corta a P según una recta D" que pasa por A y es perpendicular a D.

Las rectas D' y D" estan en Q y son ortogonales a D y pasan por el mismo punto, luego D' c P.

Reciprocamente si consideramos dos planos P y P' tales que uno de ellos contiene una recta o sea D' c P, ella es orto gonal al plano P'.

2) P y P" son secantes, según una recta Δ ortogonal a D'. Ortogonales y coplanares, Δ y D' son secantes en A.

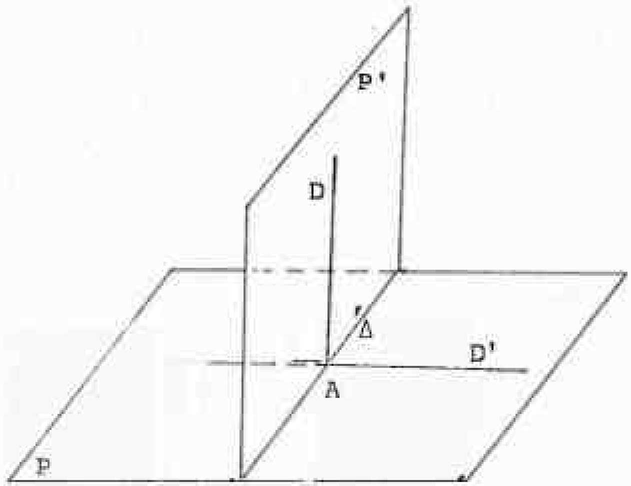


Fig. 1.11

Como D es la recta de P' que pasa por A y es ortogonal a Δ; de esto resulta D' ⊥ D y Δ ⊥ D luego D ⊥ P.

∴ P ⊥ P' ya que D ⊥ D' las cuales son las rectas contenidas en cada uno.

3) Sean P' y P" dos planos secantes perpendiculares a un plano P. A un punto de la recta Δ que es la intersección de P' y P" y es ortogonal a P. De acuerdo a la propiedad 2) Δ está incluida en P' y P" luego Δ ⊥ P. Ya que Δ es perpendicular a cualquier recta contenida en P.

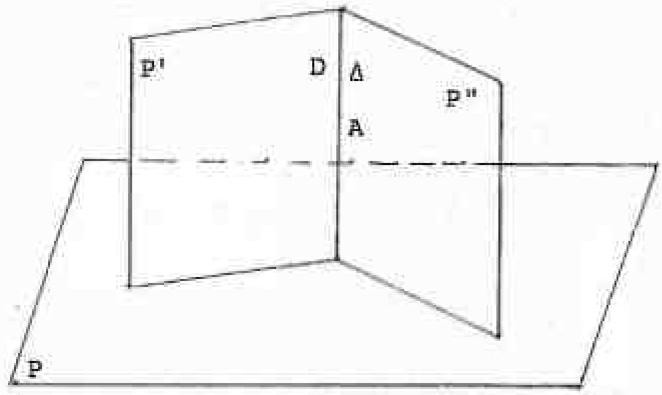


Fig. 1.12

4) Si dos planos son perpendiculares, todo plano ortogonal a su recta de intersección Δ los corta según donde son secantes en un punto de Δ las rectas D y D' que son ortogonales.

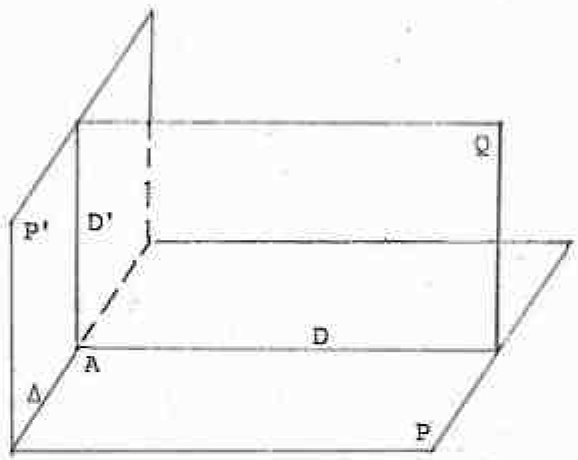


Fig. 1.13

Q es un plano ortogonal a Δ, Q ⊥ P y Q ⊥ P'

D y D' rectas de intersección de los planos P y P" con el plano Q. Los planos secantes P y Q son ortogonales a P"

∴ D es ortogonal a P' y D' c P'., D y D' son coplanares y ortogonales y también son secantes en A con Δ.

5) Sea D una recta que no es ortogonal a P; existe un plano

P' y uno solo, que contiene a D y es perpendicular a P.

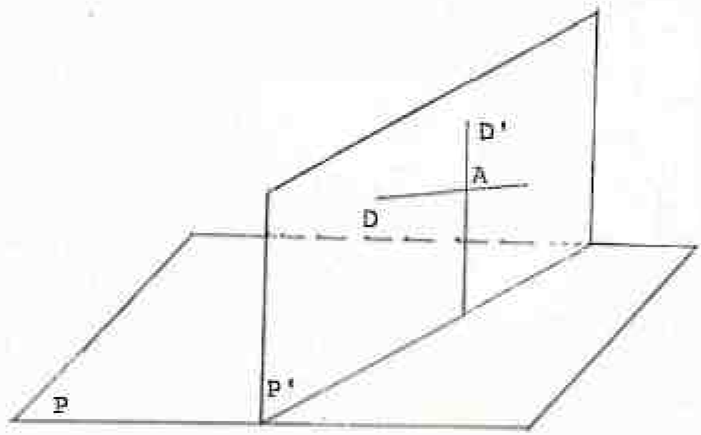


Fig. 1.14

2.12 ECUACION VECTORIAL DEL PLANO

2.12.1 Sea A un punto de p, $\vec{x},\vec{y}$ dos vectores linealmente independientes a p. En estas condiciones los vectores $\vec{x},\vec{y}$ y $\overrightarrow{AB}$ con $B \in P$, son linealmente dependientes y así, para cada $B \in P$ existen siempre dos números reales α_1, α_2 tales que:

$$\overrightarrow{AB} = \alpha_1 \vec{x} + \alpha_2 \vec{y} \quad ;$$

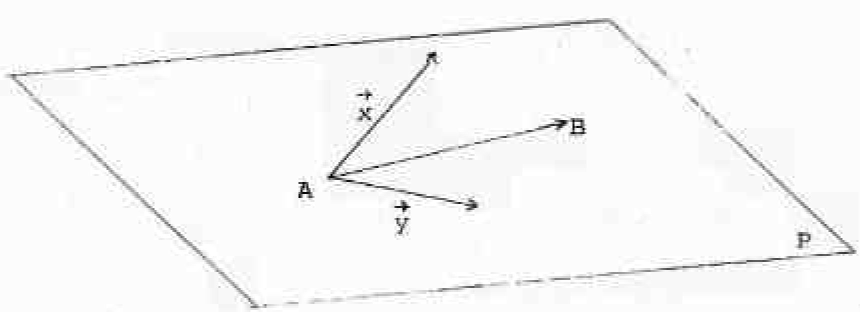


Fig. 1.15

luego tenemos la ecuación

$$\vec{0B} = \vec{0A} + \alpha_1\vec{x} + \alpha_2\vec{y} \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

que es la ecuación vectorial del plano p.

En forma recíproca, el conjunto de puntos B del espacio $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\vec{0B} = \vec{0A} + \alpha_1\vec{x} + \alpha_2\vec{y} \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

con $\vec{x}, \vec{y}$ linealmente independientes, es un plano que pasa por el punto A y es paralelo a las direcciones de los vectores $\vec{x}, \vec{y}$.

En el caso cuando son tres puntos A,B,C no colineales que pertenecen al plano de dirección del plano p será dada por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ que son linealmente independientes, y la ecuación vectorial del plano p es:

$$\vec{0x} = \vec{0A} + \alpha_1(\vec{AB}) + \alpha_2(\vec{AC}) \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

2.13 ECUACIONES PARAMETRICAS DE UN PLANO

2.13.1 DEFINICION

Sean $(0,i,j,k)$ un sistema de coordenadas del espacio $\mathbb{R}^3$ y p un plano que pasa por el punto $x = (x_0, y_0, z_0)$ y de dirección dada por los vectores $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son linealmente independientes).

Siendo $\vec{0x} = \vec{0A} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2$, $\quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

en relación al sistema de coordenadas se tiene:

$$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \alpha_1(a_1,b_1,c_1) + \alpha_2(a_2,b_2,c_2).$$

$$= (x_0+\alpha_1a_1, y_0+\alpha_1b_1, z_0+\alpha_1c_1) + \alpha_2(a_2,b_2,c_2)$$

$$(x,y,z) = (x_0+\alpha_1a_1+\alpha_2a_2, y_0+\alpha_1b_1+\alpha_2b_2, z_0+\alpha_1c_1+\alpha_2c_2).$$

luego:
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 \\ y = y_0 + \alpha_1b_1 + \alpha_2b_2 \qquad \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R} \qquad ** \\ z = z_0 + \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2 \end{cases}$$

que se denominan ecuaciones paramétricas del plano p.

En forma recíproca, si se tiene un sistema de ecuaciones lineales (**) se encuentra el plano p en el espacio $\mathbb{R}^3$ que contiene un punto de coordenadas y tiene como dirección a los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ que son linealmente independientes en relación al sistema $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Cuando el plano está determinado por tres puntos $A = (x_1,y_1,z_1)$ $B = (x_2,y_2,z_2)$ y $C = (x_3,y_3,z_3)$, no colineales, siendo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sus vectores directores del plano, se tienen:

$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_3-z_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$.

Luego tenemos:

$\overrightarrow{Ox}=\overrightarrow{OA} + \alpha_1\overrightarrow{AB} + \alpha_2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{Ox}= (x_1,y_1,z_1)+ \alpha_1(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)+\alpha_2(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$

De aquí que:

$$* \quad \begin{cases} x = x_1 + \alpha_1(x_2-x_1) + \alpha_2(x_3-x_1) \\ y = y_1 + \alpha_1(y_2-y_1) + \alpha_2(y_3-y_1) \qquad \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + \alpha_1(y_3-y_1) + \alpha_2(z_3-z_1) \end{cases}$$

El sistema (*) son ecuaciones parametricas del plano p.

2.13.2 **EJEMPLO**

1) Se considera el sistema $(A,\vec{v}_1,\vec{v}_2)$, determinar la ecuación paramétrica del plano P para el cual se da
$A = (1,-1,3)$, $\vec{u}(2,1,-1)$, $\vec{u}'(0,2,1)$.

SOLUCION:

Tenemos a partir de (**) el sistema de ecuaciones paramétricas $\forall\ \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x &= 1 + \alpha_1 2 + \alpha_2(0) &&= \ \ 1 + 2\alpha_1 \\ y &= -1 + \alpha_1 + \alpha_2 2 &&= -1 + \alpha_1 + 2\alpha_2 \quad \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R} \\ z &= 3 - \alpha_1 + \alpha_1 &&= \ \ 3 - \alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$

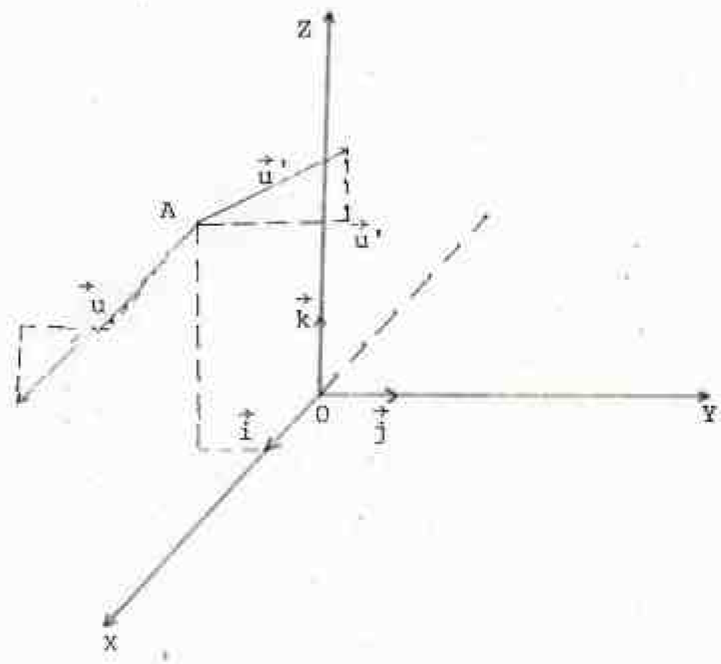


Fig. 1.16

2.14 ECUACION GENERAL DEL PLANO EN $\mathbb{R}^3$

Todo plano posee una ecuación de forma $Ax + By + Cz + D = 0$ que es la ecuación de primer grado en tres dimensiones con A,B y C no todas nulas.

Esta ecuación se obtiene dado un punto fijo p(a,b,c) y un punto cualquiera M(x,y,z) que pertenece al plano, luego se obtiene el vector $\overrightarrow{pM} = (x-a,\ y-b,\ z-c)$.

Todo vector que sea normal al plano, digamos, $A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ será tal que el producto escalar de éste con $\vec{pM}$ será nulo.

Reciprocamente el vector $\overrightarrow{PM}$ es perpendicular a v(A,B,C).
Y por tanto $\overrightarrow{PM}.\vec{v} = 0$
es deicr:

$$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$$

$$\Rightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0 \quad ; \quad D = -Aa - Bb - Cc$$

Geométricamente se tiene:

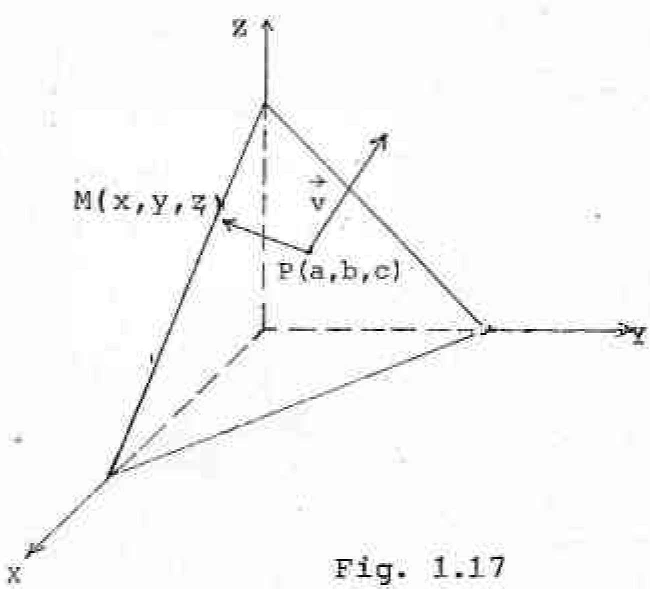


Fig. 1.17

En el caso del sistema (*) si eliminamos α_1 y α_2 resulta la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$.

2.15 APLICACIONES LINEALES

2.15.1 Sea E y F dos espacios vectoriales. Se llama aplicación lineal de E a F a toda aplicación ψ de E a F que posee las dos propiedades lineales:

1) $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2 \qquad \psi(\vec{x}+\vec{y}) = \psi(\vec{x}) + \psi(\vec{y})$

2) $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall\vec{x} \in E \quad \psi(\lambda x) = \lambda\psi(\vec{x})$

La conjunción de las propiedades 1) y 2) es equivalente a:

$\forall\ (\lambda,\alpha) \in \mathbb{R}^2),\ \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2 \quad \psi(\lambda\vec{x}+\alpha\vec{y}) = \lambda\psi(\vec{x}) + \alpha\psi(\vec{y})$ (3)

2.15.2 EJEMPLO

Sea $k \neq 0$ un real y E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

La aplicación h_k: $E \longrightarrow E$ es lineal pues cualesquiera
$x \rightsquigarrow k\vec{x}$.

que sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{x},\vec{y}$ de E se tiene:

i) $h_k(\vec{x}+\vec{y}) = h_k(\vec{x}) + h_k(\vec{y})$

ii) $h_k(\lambda\vec{x}) = \lambda h_k(\vec{x})$

PRUEBA:

$$\text{i) } h_k(\vec{x}+\vec{y}) = k(\vec{x} + \vec{y})$$
$$= k\vec{x} + k\vec{y}$$
$$= h_k(\vec{x}) + h_k(\vec{y})$$

ii) $h_k(\lambda\vec{x}) = k(\lambda\vec{x})$

$= \lambda(k\vec{x})$

$= \lambda h_k(\vec{x})$

La aplicación h_k se llama homotecía vectorial del espacio vectorial E, de razón k.

2.15.3 **EJEMPLO 2**

La aplicación $\psi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple linealidad

$(x,y,z) \longrightarrow 2x + 3y + z$

$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ y $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

PRUEBA:

Sea (a,b,c), $(a',b',c') \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ a probar

i) $\psi((a,b,c) + (a',b',c')) = \psi((a,b,c) + \psi(a',b',e')$.

ii) $\psi(\lambda(a,b,c)) = \lambda\psi(a,b,c)$.

Prueba para i).

$$\begin{aligned}\psi((a,b,c) + (a',b',c')) &= \psi(a+a', b+b', c+c') \\ &= 2(a+a') + 3(b+b') + c+c' \\ &= 2a+2a' + 3b+3b' + c+c' \\ &=(2a + 3b + c)+(2a' + 3b' + c') \\ &= \psi(a,b,c) + \psi(a',b',c')\end{aligned}$$

luego $\psi((a,b,c) + (a',b',c')) = \psi(a,b,c) + \psi(a',b',c')$.

Prueba para ii)

$$\begin{aligned}\psi(\lambda(a,b,c)) &= \psi(\lambda a,\ \lambda b,\ \lambda c)\\ &= 2(\lambda a) + 3(\lambda b) + \lambda c\\ &= \lambda 2a + \lambda 3b + \lambda c\\ &= \lambda(2a + 3b + c)\\ &= \lambda\psi(a,b,c)\end{aligned}$$

luego $\psi(\lambda(a,b,c)) = \lambda\psi(a,b,c)$.

De acuerdo a i) y ii) la aplicación ψ es lineal.

2.15.4 **FORMA LINEAL**

Se llama forma lineal a toda aplicación lineal de un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial E al espacio vectorial $\mathbb{R}$.

2.15.5 **EJEMPLO**

La aplicación d, que a todo polinomio p le asocia el polinomio derivado p' es una aplicación lineal ya que $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ y $p,Q \in E$ se cumple:

i) $d(p + Q) = p' + Q'$

ii) $d(\lambda P) = \lambda p'$

Nota: Una aplicación lineal definida de un espacio vectorial E a él mismo se llama endomorfismo de E.

PROPIEDADES:

Sea ψ: $E \longrightarrow F$ una aplicación lineal.

Denotemos por $\vec{0},\vec{0}'$ los vectores nulos de E y F respectivamente. Se tiene entonces que:

a) $\psi(\vec{0}) = \vec{0}'$, es decir $\psi: E \longrightarrow F$

$$\vec{0} \rightsquigarrow \vec{0}'$$

Si ψ es lineal, $\psi(\vec{0}) = \vec{0}'$

b) $\psi(-x) = -\psi(\vec{x})$

c) $\psi(\vec{x}-\vec{y}) = \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{y})$, $\forall\ \vec{x},\vec{y} \in E$

d) $\psi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi(\vec{x}_i)$; si ψ es una combinación lineal.

PRUEBAS:

Para a).

Se tiene $\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x} + \vec{0})$

$$\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) + \psi(\vec{0}) \ ; \ \psi(\vec{x}) + \vec{0} = \psi(\vec{x}) + \psi(\vec{0})$$

simplificando $\psi(\vec{x})$:

$$\vec{0} = \psi(\vec{0}).$$

Para b)

Cualquiera que sea $\vec{x} \in E$:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) + \psi(-\vec{x}) &= \psi(\vec{x} + (-\vec{x})) \\ &= \psi(\vec{x} - \vec{x}) \\ &= \psi(\vec{0}) \end{aligned}$$

luego $\psi(\vec{x}) + \psi(-\vec{x}) = \vec{0}'$

donde $\psi(-\vec{x}) = -\psi(\vec{x})$.

Nota: Las dos propiedades se obtienen también haciendo $\lambda = 0$ ó $\lambda = -1$ en la condición (2) de la definición de aplicación lineal.

Para c)

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}-\vec{y}) &= \psi(\vec{x}+(-\vec{y}))\\ &= \psi(\vec{x})+\psi(-\vec{y})\\ &= \psi(\vec{x})-\psi(\vec{y})\end{aligned}$$

luego $\psi(\vec{x}-\vec{y}) = \psi(\vec{x})-\psi(\vec{y})$

parad)

Esta demostración se realiza recurriendo a la ayuda de la igualdad (3) de la definición de aplicación lineal, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\psi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{x}_i\right) &= \psi(\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\lambda_3\vec{x}_3+\ldots+\lambda n\vec{x}n)\\ &= \psi(\lambda_1\vec{x}_1)+\psi(\lambda_2\vec{x}_2+\psi(\lambda_3\vec{x}_3)+\ldots+\psi(\lambda_n\vec{x}_n)\\ &= \lambda_1\psi(\vec{x}_1)+\lambda_2\psi(\vec{x}_2)+\lambda_3\psi(\vec{x}_3)+\ldots+\lambda_n\psi(\vec{x}_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\psi(\vec{x}_i)\end{aligned}$$

$$\text{luego}\,\psi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\psi(\vec{x}_i)$$

Esta prueba también se puede realizar por inducción para "n"

2.15.6 IMAGEN Y NUCLEO DE UNA APLICACION LINEAL

Imagen de un sub-espacio vectorial de V en W.

2.15.7 DEFINICION

Sea U un sub-espacio vectorial de V y ψ una aplicación lineal de V en W.

A demostrar que $\psi(U)$ es un sub-espacio vectorial de W.

i) $\psi(U)$ es una parte no vacía de W ya que $U \neq \phi$;

ii) $\psi(U)$ es estable por combinaciones lineales para cualesquiera que sean λ, α de $\mathbb{R}$ y $\vec{u}'\vec{v}'$ de $\psi(U)$ mostremos que $\lambda u' + \alpha v' \in \psi(U)$.

$\vec{u}', \vec{v}' \in \psi(\vec{u}) \Rightarrow \exists\ \vec{u}, \vec{v}$ tal que

$\psi(\vec{u}) = u' \quad ; \quad \psi(\vec{v}) = \vec{v}'$

$$\begin{aligned} \lambda\vec{u}' + \alpha\vec{v}' &= \lambda\chi(\vec{u}) + \alpha\psi(\vec{v}) \\ &= \psi(\lambda\vec{u}) + \psi(\alpha\vec{v}) \\ &= \psi(\lambda\vec{u} + \alpha\vec{v}) \end{aligned}$$

luego $\lambda\vec{u}' + \alpha\vec{v}' \in \psi(\vec{u})$.

Ya que $\lambda\vec{u}' + \alpha\vec{v}'$ admite un antecedente $\lambda\vec{u} + \alpha\vec{v}$ por ψ, donde $\lambda\vec{u}' + \alpha\vec{v}' \in \psi(U)$.

Entonces tenemos el siguiente resultado:

La imagen de un sub-espacio vectorial de V por una aplicación lineal de V en W es un sub-espacio vectorial de W.

2.15.8 IMAGEN DE UNA APLICACION LINEAL

DEFINICION:

Se llama imagen de una aplicación lineal ψ de V en W a la imagen $\psi(V)$ de V por ψ. Se nota por Im ψ que es un sub-espacio vectorial del conjunto de llegada de W.

2.15.9 NUCLEO DE UNA APLICACION LINEAL

DEFINICION:

Se llama núcleo de una aplicación lineal $\psi: \upsilon \longrightarrow w$; al conjunto de vectores de υ cuya imagen por ψ es el vector nulo de

W. El núcleo se denota por ker ψ.

2.15.10 **PROPOSICION:**

El kerψ es un subespacio vectorial de V.

PRUEBA:

Denotemos $\vec{0},\vec{0}'$ los vectores nulos de V y W respectivamente

* kerψ es una parte no vacía de V ya que $\psi(\vec{0}) = \vec{0}'$, $\vec{0} \in V$.
* kerψ es estable por combinaciones lineales ya que cualesquiera que sean $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ y $\vec{x},\vec{y} \in$ kerψ se tiene:

$$\psi(\vec{x}) = \vec{0}' \quad , \quad \psi(\vec{y}) = \vec{0}'$$

$$\begin{aligned}\psi(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= \psi(\lambda\vec{x}) + \psi'\mu\vec{y})\\ &= \lambda\psi(\vec{x}) + \mu\psi(\vec{y})\\ &= \lambda\vec{0}' + \mu\vec{0}'\\ &= \vec{0}' + \vec{0}'\\ &= \vec{0}'\end{aligned}$$

luego $(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \in$ kerψ.

$\therefore$ el núcleo de una aplicación lineal es un subespacio vectorial de V.

2.15.11 **DEFINICION:**

Si ψ: $V \longrightarrow W$ es tal que ker$\psi = \{\vec{0}\}$ entonces ψ es inyectiva es decir:

Sea ψ:$V \longrightarrow W$ una aplicación lineal talque

ker$\psi = \{\vec{0}\}$:

Cualesquiera que sean $\dot{x},\dot{y} \in V$, tales que $\psi(\dot{x}) = \psi(\dot{y})$ se tiene:

$$\psi(\vec{x}) - \psi(\vec{y}) = \vec{0}'$$

$$\psi(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}'$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} - \vec{y} \quad \ker\psi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \qquad (\text{puesto que } \ker\psi = \{\vec{0}\})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$$

luego ψ es inyectiva.

ESPACIOS AFINES

1.3 APLICACIONES AFINES

1.3.1 APLICACION AFIN DE $\vec{x}$ en $\vec{x}$

1.3.1.1 DEFINICION:

Se dice que una aplicación f de $\vec{x}$ en $\vec{x}$ es afin sii existe un endomorfismo , de $\vec{x}$ y un vector b de $\vec{x}$ tales que:

$$(\forall\ \vec{v} \in \vec{x})\ f(\vec{v}) = \ (\vec{v}) + \vec{b}$$

Nota: Para una aplicación afin f dada de $\vec{x}$ a $\vec{x}$, $\vec{b} = f(\vec{0})$ donde $\vec{b}$ es único y también el endomorfismo ya que $(\forall\ \vec{v} \in \vec{x})\quad (\vec{v}) = f(\vec{v}) - \vec{b}$.

se llama el endomorfismo asociado a f o aun más la parte lineal de f.

3.1.2 EJEMPLOS:

- Todo endomorfismo de $\vec{x}$ es una aplicación afín ($\vec{b} = \vec{0}$)
- Toda aplicación constante de $\vec{x}$ en $\vec{x}$ es afín (Ψ es el endomorfismo nulo).

- Toda aplicación $t: \vec{v} \longrightarrow \vec{v} + \vec{b}$, donde se da $\vec{b}$, es afin ($\Psi = Id_{\vec{x}}$).

Nota: Una aplicación afin de $\vec{x}$ en $\vec{x}$ es la composición de un endomorfismo de $\vec{x}$ y de una traslación vectorial.

$$\begin{tikzcd} \vec{v} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\Psi"'] & & \Psi(\vec{v})+\vec{b} \\ & \Psi(\vec{v}) \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

Fig. 1.18

1.3.2 APLICACION AFIN DE x EN x:

1.3.2.1 DEFINICION:

Sea f una aplicación de x en x. Y sean 0'M',N'... lás imágenes por f de los puntos 0,M,N,... .

Se llama parejas de puntos homólogos (m,m') a toda pareja formada por un punto M de X y su imágen M' por f.

Se dice que una aplicación: M $\longrightarrow$ M' de X en X es afin sí y solamente si existe un punto 0 de X tal que la aplicación $\overrightarrow{0m} \longrightarrow \overrightarrow{0m'}$ de $\vec{x}$ a $\vec{x}$ sea afin.

3.2.2 OTRA FORMA:

Se dice que la aplicación $f: x \longrightarrow x$ es afin sii existe un punto 0 de x, un endomorfismo Ψ de $\vec{x}$ y un vector $\vec{b}$ de $\vec{x}$ tales que cualquiera que sea la pareja de puntos homólogos (M,M'):

$$\overrightarrow{0m'} = (\overrightarrow{0m}) + \vec{b}.$$

Si O' es la imagen de O, se tiene que M = O en la relación procedente $\overrightarrow{OO'} = \vec{b}$

donde $\overrightarrow{OM'} = \Psi(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'}$ (1)

La igualdad (1) es equivalente a:

$$\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OO'} = \Psi(\overrightarrow{OM})$$

$$\overrightarrow{O'M'} = \Psi(\overrightarrow{OM}) \qquad (2)$$

Entonces se puede enunciar el siguiente teorema:

3.2.3 **TEOREMA:**

Una aplicación de x a x es afín sii existe una pareja de puntos homólogos (O,O') y un endomorfismo Ψ de $\vec{x}$ tales que, cualquiera que sea la pareja de puntos homólogos (M,M'):

$\overrightarrow{O'M'} = \Psi(\overrightarrow{OM})$.

Sea (N,N') otra pareja de puntos homólogos para una de las aplicaciones afín:

$$\overrightarrow{O'N'} = \Psi(\overrightarrow{ON})$$

donde $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'}$

$= \Psi(\overrightarrow{ON}) - \Psi(\overrightarrow{OM})$

$= \Psi(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})$

luego $\overrightarrow{M'N'} = \Psi(\overrightarrow{MN})$

1.3.3 DETERMINACION DE UNA APLICACION AFIN

Sea ψ otro endomorfismo asociado a f, para el cual se tiene cualquiera que sean las parejas de puntos homólogos (M,M') y (N,N'):

$$\overrightarrow{M'M'} = \Psi(\overrightarrow{MN})$$

cualquiera que sea $\vec{v} \in \vec{x}$, sea (M,N) un bipunto talque $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$ y M',M' las imágenes de M y N respectivamente por f:

$$\Psi(\vec{v}) = \Psi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

$$\psi(\vec{v}) = \psi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

donde $\forall\ \vec{v} \in \vec{x}\quad \Psi(\vec{v}) = \psi(\vec{v})$ luego $\Psi = \psi$.

Este endomorfismo único se llama endomorfismo asociado a f o aún la parte lineal de f.

1.3.3.3 TEOREMA:

Sean 0 y 0' dos puntos de X y Ψ un endomorfismo de $\vec{x}$. Existe una aplicación afin f única de X en X tal que 0' = f(0) y de endomrofismo asociado a Ψ.

Recíprocamente a un endomorfismo Ψ de $\vec{x}$, se puede asociar varias aplicaciones afines.

3.3.4 PUNTOS DE UN SISTEMA AFIN Y SUS IMAGENES

1.3.3.4.1 DEFINICION:

Sea $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un sistema afin de X donde n es 2, ó 3 ó 4 según si X es una recta, un plano en el espacio.

En forma igual se dan los puntos $A'_1, A'_2, \ldots A'_n$ de X. Existe un endomorfismo único Φ de X tal que las imágenes de los vectores de la base $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_n})$ son $\overrightarrow{A'_1A'_2}$, $\overrightarrow{A'_1A_3}, \ldots \overrightarrow{A'_1A'_n}$. Donde existe una aplicación afin f: X ——> X que es única tal que $A'_1 = f(A_1)$ y un endomorfismo asociado ϕ.

Las imágenes por f de los puntos $A_2, A_3, \ldots A_n$ son los puntos $A''_2, A''_3, \ldots, A''_n$ tales que:

$$\overrightarrow{A'_1A''_2} = \Phi(\overrightarrow{A_1A_2}) = \overrightarrow{A'_1A'_2} \quad \text{donde } A''_2 = A'_2$$
$$\overrightarrow{A'_1A''_n} = \Phi(\overrightarrow{A_1A_n}) = \overrightarrow{A'_1A'_n} \quad \text{donde } A''_n = A'_n$$

1.3.3.4.2 TEOREMA:

Sea $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un sistema afin de X y de los puntos

$A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ de X.

Existe una aplicación afin f única de x en X tal que las imágenes por f de los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son respectivamente los puntos $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$.

1.3.3.4.3 PROPIEDADES DE LAS APLICACIONES AFINES

1) Conservación de baricentro

Se dice que una aplicación f de x en X conserva los baricentro si, para toda familia $((A'_i, \alpha_i))_{i \in [1,n]}$ de puntos ponderados de baricentro G, ($\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$), la familia (A_i', α_i) donde $i \in [1,n]$ tiene por baricentro G'. (Se denota siempre $A_i' = f(A_i)$, $G' = f(G)$).

Sea f una aplicación afín y $G = Bar((A_i, \alpha_i))i \in [1,n]$. Se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Apl cando el endomorfismo ϕ asociado a f a los dos miembros de esta igualdad, se obtiene:

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i}$$

$$\text{luego } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i'} = \vec{0}$$

lo que expresa que $G' = Bar((A', \alpha))i \in [1,n]$: toda aplicación afín conserva el baricentro.

2) Recíprocamente, sea f una aplicación de x en x conservando el baricentro.

Sea "0" un punto de x y ϕ la aplicación de $\vec{x}$ en $\vec{x}$ que a un vector $\overrightarrow{0m}$ asocia el vector $\overrightarrow{0'm'}$.

PRUEBA:

Sea $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores de $\vec{x}$, P,Q y R los puntos de x tales que $\overrightarrow{0p} = \vec{u}$, $\overrightarrow{0Q} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{0r} = \vec{u} + \vec{v}$. Se tiene las equivalencias:

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} \iff \overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

$$\iff R = \mathrm{Bar}\ ((0,-1),\ (P,1),(Q,1)$$

Como f conserva el baricentro, se deduce:

R' = Bar((0',-1),(P',1),(Q',1),(Q',1). Se tiene

$$\overrightarrow{OR'} = -\overrightarrow{O'O'} + \overrightarrow{O'P'} + \overrightarrow{O'Q'} \iff \overrightarrow{O'P'} + \overrightarrow{O'Q'}$$

$$\iff \phi(\vec{u}+\vec{v}) = \phi(\vec{u}) + \phi(\vec{v}) \qquad (*)$$

Ahora supongamos un real λ y s el punto de x tal que $\overrightarrow{Os} = \lambda\vec{u}$ se tiene:

$$\overrightarrow{Os} = \lambda\overrightarrow{Op} \iff \overrightarrow{Os} = (1-\lambda)\overrightarrow{OO} + \lambda\overrightarrow{Op}$$

$$\iff s = \mathrm{Bar}\ ((0,1-\lambda),\ (p,\lambda))$$

se deduces' = Bar((0',1-λ),(p',λ)), se tiene las equivalencias:

$$\overrightarrow{O's'} = (1-\lambda)\overrightarrow{O'O'} + \lambda\overrightarrow{O'p'} \iff O's' = \lambda\overrightarrow{O'p'} -$$

$$\iff \phi(\overrightarrow{\lambda u}) = \phi(\vec{u}) \qquad (**)$$

De acuerdoa (*) y (**) se tiene que la aplicaciónϕ es afín.

1.3.3.4.4 **TEOREMA:**

Una aplicación f de x a x es afín si y solamente si ella conserva el baricentro.

b) Conservación de la convexidad.

1.3.3.4.5 **DEFINICION:**

Una parte c de x se dice que es convexo si y solamente si $\forall\ (M,N) \in c^2\quad [M,N] \subset C$

1.3.3.4.6 **EJEMPLOS:**

Un segmento, una semirecta, un abierto o compacto, una recta;

un semi-plano abierto o cerrado, un disco, un plano.

Si c_1 y c_2 son dos partes convexas de x. Cualesquiera que sean los puntos M y N de su intersección, el segmento $[M,N]$, está por hipótesis a la vez en c_1 y c_2 , luego en su intersección.

1.3.3.4.7 **TEOREMA:**

La intersección de dos partes convexas es convexa.

Nota: La unión de dos partes convexas no necesariamente es convexa.

1.3.3.5 **IMAGEN DE UNA PARTE CONVEXA POR UNA APLICACION AFIN f**

1.3.3.5.1 Sea $[M,N]$ un segmento, donde $[M,N]$ es el conjunto de baricentros p de $((M,\alpha), (N,\beta))$, $\alpha \geq 0 \wedge \beta \geq 0$. Como toda aplicación afín conserva los baricentros, la imagen de $[M,N]$ es el conjunto de baricentros p' de $((M',\alpha), (N',\beta))$ con $\alpha \geq 0 \wedge \beta \geq 0$ es decir el segmento $[M,N]$. Donde la imagen de un segmento $[M,N]$ por una aplicación afines el segmento $[M',N']$.

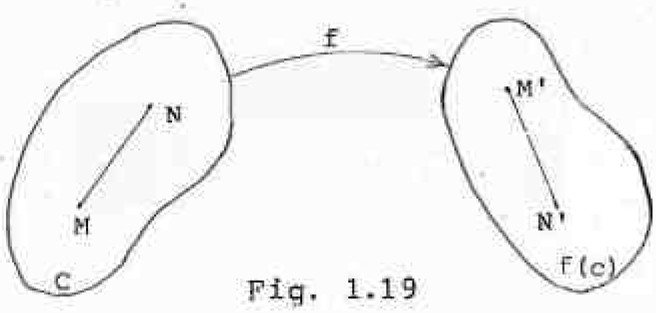


Fig. 1.19

En tal caso la figura anterior (es una parte convexa de x. Cualesquiera que sean los puntos M' y N' de f(c), existe M y N de c tales que f(M) = M', y f(N) = N'. Se tiene:

$[M,N] \subset C$ entonces $f([M,N]) \subset f(c)$ es decir $[M',N'] \subset f(c)$ luego tenemos:

TEOREMA:

La imagen de una parte convexa por una aplicación afin es convexa.

1.3.3.6 APLICACIONES AFINES INYECTIVAS, SOBREYECTIVAS, BIYECTIVAS.

1.3.3.6.1 Sea f una aplicación afin de x en x definida por:

$$\overrightarrow{O'M'} = \phi(\overrightarrow{OM}).$$

Donde ϕ es el endomorfismo asociado a f y $O' = f(O)$.

* Si f es inyectiva, mostremos que ϕ es inyectiva. Mostremos que $\ker\phi = \{\vec{0}\}$.

Sea $\overrightarrow{OM} = \vec{v} \in \ker\phi$, se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \ker\phi &\Rightarrow \phi(\overrightarrow{OM}) = \vec{0} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{O'M} = \vec{0} \\
&\Rightarrow M' = O' \\
&\Rightarrow M = O \text{ (por que f es inyectiva)} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}
\end{aligned}$$

* Recíprocamente si ϕ es inyectiva, mostremos que f es inyectiva. Para esto, mostremos que si f(M) = f(N) entonces M = N.

tenemos:

$$f(M) = f(N) \Rightarrow \Phi(\overrightarrow{OM}) = \Phi(\overrightarrow{ON})$$

$$\Rightarrow \Phi(\overrightarrow{OM}) - \Phi(\overrightarrow{ON}) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \Phi(\overrightarrow{MN}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \vec{0} \quad \text{(ya que es inyectiva)}$$

$$\Rightarrow M = N$$

1.3.3.6.2 **PROPOSICION:**

Si f es sobreyectiva, a mostrar que ϕ es sobreyectiva.

DEMOSTRACION:

Para esto, mostremos que todo vector $\vec{v}' \in \vec{x}$ es imagen por Φ de almenos un vector de $\vec{x}$. Tomemos $\vec{v}' = \overrightarrow{O'M'}$. Existe almenos un punto M de imagen M' por f (ya que f es sobreyectiva) se tiene:

$\vec{v}' = \overrightarrow{O'M'}$

$\vec{v}' = \Phi(\overrightarrow{OM})$; donde $\vec{v}'$ es imagen de $\vec{v}$ por Φ

* Recíprocamente si Φ es sobreyectiva, probar que f es sobreyectiva. Para esto hay que demostrar que todo punto M' de x es la imágen por f de almenos un punto de x.

  Si se da M', sea $\vec{v}' = \overrightarrow{O'M'}$, existe $\vec{v}$ de $\vec{x}$ tal que $\vec{v}' = \Phi(\vec{v})$ (ya que ϕ es sobreyectiva), sea M tal que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$, se tiene $\overrightarrow{O'M'} = \Phi(\overrightarrow{OM})$ donde M' es la imagen de M.

* Como $\vec{x}$ es espacio vectorial de dimensión finita y ϕ un endomorfismo dh $\vec{x}$, se dice que:

ϕ es inyectiva $\Longleftrightarrow \phi$ es sobreyectiva $\Longleftrightarrow$ Φ biyectiva.

1.3.4 ISOMETRIAS DEL PLANO:

1.3.4.1 DEFINICION:

Se llama isometría a la aplicación $f:\ p \longrightarrow p$ que conserva

$$M \rightsquigarrow M'$$

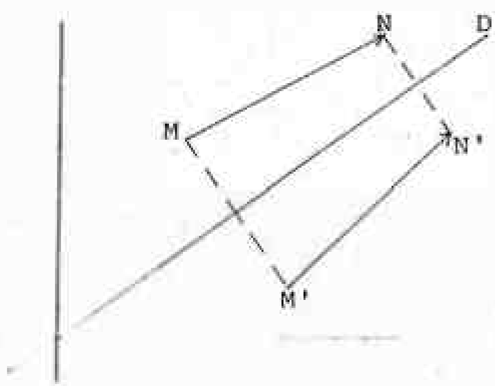
las distancias; es decir:

$$d(M',N') = d(M,N), \quad M,N \in p.$$

$$\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$$

1.3.4.2 EJEMPLOS:

a) Simetría Ortogonal



b) Simetría Central

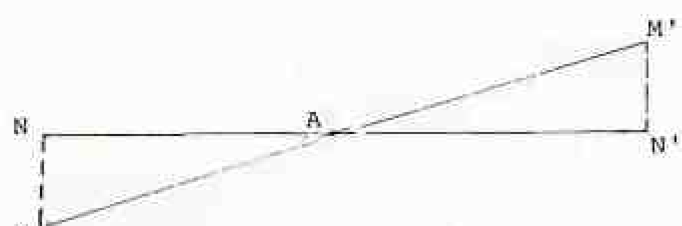


Fig. 1.20

1.3.4.3 **PROPOSICION:**

Toda isometría es inyectiva.

PRUEBA:

Si $f(M) = f(N) \Rightarrow M = N$

si $f(M) = f(N) \Rightarrow d(f(M),f(N) = 0$

$\Rightarrow d(M,N) = 0$ ya que conserva las distancias.

$d(M,N) = 0$

$\Leftrightarrow M = N$

$\therefore$ f es inyectiva.

1.3.4.4 **PROPOSICION:**

Si f y g son isometrías, entonces la composición $g \circ f$ es una isometría.

PRUEBA:

Como f es una isometría, se tiene:

$f: p \longrightarrow p$; entonces $d(f(M),f(N)) = d(M,N)$, $M,N \quad P$

$M \longrightarrow f(M) = M'$

En forma similar se tiene para g.

$g: p \longrightarrow p$; entonces, $d(g(M'), g(N')) = d(M',N')$.

$M' \longrightarrow g(M')$

luego: $f \circ g = p \longrightarrow p$

$M \rightsquigarrow (f \circ g)(M)$

entonces $d(g\circ f(M),\ g\circ f(N)) = d(g(f(M)),\ g(f(N))$

$$= d(g(M'),\ g(N'))$$

$$= d(M',N')$$

$$= d(f(M),\ f(N))$$

$$= d(M,N)\quad ,\quad M,\ N \in P$$

luego la composición $g\circ f$ conserva la distancia

$\therefore$ $g\circ f$ es una isometría.

1.3.4.4 **ISOMETRIAS VECTORIALES:**

1.3.4.4.1 **DEFINICION:**

Se llama isometría vectorial a todo endomorfismo de $\vec{p}$ que conserva la norma.

Sea $f: \vec{p} \longrightarrow \vec{p}$ una aplicación. Mostremos que las proposiciones siguientes son equivalentes:

1°) f es un endomorfismo que conserva la norma (es decir una isometría vectorial de $\vec{p}$)

2°) f conserva el producto escalar: $(\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{M'N'}.\overrightarrow{P'Q'}$

3°) f es un endomorfismo tal que existe una base ortonormal que tiene una base ortonormal.

Es suficiente demostrar que se cumplen las implicaciones:

1) $\Rightarrow$ 2); 2) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 1).

DEMOSTRACION:

Sea $f: \vec{p} \longrightarrow \vec{p}$ una isometría vectorial que conserva la norma.

$\vec{v} \longmapsto f(\vec{v})$

Es decir $(\forall \vec{v} \in \vec{p})$ $\quad |f(\vec{v})| = |\vec{v}|$.

Sean $\vec{u},\vec{v} \in \vec{p}$, a probar que $\vec{u}.\vec{v} = \phi(\vec{u}).\phi(\vec{v})$.

Por proposición demostración tenemos:

$$\|\vec{u} + \vec{v}|^2 = <\vec{u} + \vec{v},\ \vec{u} + \vec{v}>$$

$$= <\vec{u},\vec{u}> + 2\vec{u}.\vec{v} + <\vec{v},\vec{v}> \quad \text{por def. de producto escalar.}$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + |\vec{v}|^2.$$

luego:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}\|^2 - |\vec{v}|^2 = 2\vec{u}.\vec{v}.$$

Así $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\,[\,|\vec{u}+\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2].$

ii) Como $f(\vec{u})$ y $f(\vec{v})$ son vectores entonces tenemos

$$\|f(\vec{u})+ f(\vec{v})\|^2 = <f(\vec{u}) + f(\vec{v}),\ f(\vec{u}) + f(\vec{v})>.$$

$$= <f(\vec{u}),f(\vec{u})> + 2f(\vec{u}).f(\vec{v}) + <f(\vec{v}),f(\vec{v})>.$$

$$|f(\vec{u}) + f(\vec{v})|^2 = \|f(\vec{u})\|^2 + 2f(\vec{u}).f(\vec{v}) + \|f(\vec{v})\|^2.$$

pero como f conserva la norma.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\ f(\vec{u}).f(\vec{v}) + |\vec{v}|^2.$$

luego:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}|^2 - |\vec{v}\|^2 = 2f(\vec{u}),f(\vec{v}).$$

así

$$\frac{1}{2}[\,\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2] = f(\vec{u}).f(\vec{v}).$$

De acuerdo al resultado i) y ii) se tiene:

$\vec{u}.\vec{v} = f(\vec{u}).f(\vec{v})$.

$\therefore$ f conserva el producto escalar:

2) $\rightarrow$ 3)

Sea f la aplicación que conserva el producto escalar. A probar que f es un endomorfismo de $\vec{p}$ es decir que, cuales quiera que sea $\vec{u},\vec{v} \in \vec{p}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple:

i) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

ii) $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

Para esto mostraremos que

$(f(\vec{u}+\vec{v}) - f(\vec{u}) - f(\vec{v}))^2 = 0$ a)

$(f(\lambda\vec{u}) - \lambda f(\vec{u}))^2 = 0$ b)

En efecto:

$$<f(\vec{u}+\vec{v}) - f(\vec{u}) - f(\vec{v}),\ f(\vec{u}+\vec{v}) - f(\vec{u}) - f(\vec{v})> = 0$$

$$\begin{aligned}
<f(\vec{u}+\vec{v})-f(\vec{u})-f(\vec{v}),f(\vec{u}+\vec{v})-f(\vec{u})-f(\vec{v})> &= <f(\vec{u}+\vec{v}),f(\vec{u}+\vec{v})>+<f(\vec{u}+\vec{v}),-f(\vec{u})-f(\vec{v})> + \\
&\quad +<-f(\vec{u})-f(\vec{v}),f(\vec{u}+\vec{v})>+<-f(\vec{u})-f(\vec{v}),-f(\vec{u})-f(\vec{v})> \\
&= \|f(\vec{u}+\vec{v})\|^2-f(\vec{u}+\vec{v}).f(\vec{u})-f(\vec{u}+\vec{v}).f(\vec{v})-f(\vec{u})f(\vec{u}+\vec{v}) \\
&\quad -f(\vec{v}),f(\vec{u}+\vec{v})+<f(\vec{u}),f(\vec{u})>+f(\vec{u}).f(\vec{v}) \\
&\quad +f(\vec{v}).f(\vec{u})+<f(\vec{v}),f(\vec{v})>. \\
&= \|f(\vec{u}+\vec{v})\|^2+\|f(\vec{u})\|^2+\|f(\vec{v})\|^2-2f(\vec{u}+\vec{v}).f(\vec{u}) \\
&\quad -2f(\vec{u}+\vec{v}).f(\vec{v})+2f(\vec{u}).f(\vec{v}) \\
&= \|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u}-2(\vec{u}+\vec{v}).\vec{v}+2\vec{u}.\vec{v} \\
&= (\vec{u}+\vec{v})^2+\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}^2-2\vec{v}\vec{u}-2\vec{u}\vec{v}-2\vec{v}^2+2\vec{u}\vec{v} \\
&= (\vec{u}+\vec{v})^2-\vec{u}^2-\vec{v}^2-2\vec{u}\vec{v} \\
&= (\vec{u}+\vec{v})^2-(\vec{u}^2+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2) \\
&= (\vec{u}+\vec{v})^2 - (\vec{u}+\vec{v})^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego $<f(\vec{u}+\vec{v})-f(\vec{u})-f(\vec{v}),f(\vec{u}+\vec{v})-f(\vec{u})-f(\vec{v})> = 0$

Así $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

Y de esta forma se prueba el literal a)

b) $<f(\lambda\vec{u})-\lambda f(\vec{u}),f(\lambda\vec{u})-\lambda f(\vec{u})> = <f(\lambda\vec{u}),f(\lambda\vec{u})> - <\lambda f(\vec{u}),f(\lambda\vec{u})> -$

$$- <\lambda f(\vec{u}),f(\lambda\vec{u})> + <\lambda f(\vec{u}),\lambda f(\vec{u})>$$

$$= \|f(\lambda\vec{u})\|^2 + \|\lambda f(\vec{u})\|^2 - 2\lambda f(\vec{u}).f(\lambda\vec{u})$$

$$= \|\lambda\vec{u}\|^2 + \lambda^2\|\vec{u}\|^2 - 2\lambda^2\vec{u}.\vec{u}$$

$$= 0$$

1.3.3.7.6 **EJEMPLO:**

Sea $(\vec{i},\vec{j})$ una base ortonormal de $\vec{p}$. Ya que f conserva el producto escalar.

$f(\vec{i}).f(\vec{i}) = \vec{i}.\vec{i} = 1$, de donde $|f(i)| = 1$

$f(\vec{j}).f(\vec{j}) = \vec{j}.\vec{j} = 1$, de donde $|f(j)| = 1$

$f(\vec{i}).f(\vec{j}) = \vec{i}.\vec{j} = 0$; así $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ es una base ortonormal.

Demostración de 3) => 1)

Sea f un endomorfismo de $\vec{p}$ tal que existe una base ortonormal $(\vec{i},\vec{j})$ teniendo por imagen una base ortonormal $(f(i),f(j)$.

Cualquiera que sea $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, se tiene:

$$f(\vec{v}) = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j})$$

$$\|f(\vec{v})\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \|\vec{v}\|$$

luego la norma de todo vector se conserva.

Nota:

* La imagen de toda base ortonormal por una isometría vectorial es una base ortonormal.

* Ya que la imagen de una base ortonormal es una base ortonor

mal por una isometría vectorial f, esta aplicación es biyectiva. Así pues da un automorfismo de $\vec{p}$.

OBSERVACION

Una aplicación f: $\vec{p} \longrightarrow \vec{p}$ que conserva la norma no necesariamente es un endomorfismo de $\vec{p}$.

1.4.5 **ISOMETRIA AFINES**

DEFINICION. PROPIEDADES

DEFINICION:

Se llama isometría de p toda aplicación de p en p que conserva las distancias.

Sea f: p ——> p una aplicación. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

1) f es una aplicación que conserva las distancias (es decir una isometría de p).
2) f es una aplicación afin donde el endomorfismo asociado es una isometría vectorial de $\vec{p}$.

DEMOSTRACION:

Sea f: p ——> p una aplicación que conserva las distancias lo que dice que cualesquiera que sean las parejas de puntos homologos (M,M') y (N,N').

$$|\overrightarrow{M'N'}| = |\overrightarrow{MN}|$$

Sea 0 un punto de p, de imagen 0'. Consideremos la aplicación

$$\Phi: \vec{P} \longrightarrow \vec{P}$$
$$\overrightarrow{OM} \longrightarrow \overrightarrow{O'M'}$$

Mostremos que Φ conserva el producto escalar:

tenemos:

$$(\overrightarrow{MN})^2 = (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})^2$$
$$= \overrightarrow{ON}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$$
$$(\overrightarrow{M'N'})^2 = (\overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'})^2$$
$$= \overrightarrow{O'N'}^2 + \overrightarrow{O'M'}^2 - 2\overrightarrow{O'N'}.\overrightarrow{O'M'}$$

ya que las distancias se conservan:

$\overrightarrow{M'N'}^2 = \overrightarrow{MN}^2$, $\overrightarrow{O'M'}^2 = \overrightarrow{OM}^2$, $\overrightarrow{O'N'}^2 = \overrightarrow{ON}^2$, de donde:

$$\overrightarrow{O'M'}.\overrightarrow{O'N'} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$$

luego la aplicación ϕ conserva el producto escalar, siendo ϕ una isometría vectorial de $\vec{P}$. La aplicación f es una aplicación afin de endomorfismos asociado a Φ.

1.3.4.5.3 Reciprocamente, sea $f: P \longrightarrow P$ una aplicación afin de endomorfismo asociado a una isometría vectorial Φ . Cualesquiera que sean las parejas de puntos homólogos (M,M') y (N,N') se tiene:

$$\|M'N'\| = |f(\overrightarrow{MN})|$$
$$= |\overrightarrow{MN}|$$

Asi las distancias se conservan, luego f es una isometría de P.

La isometría tiene las propiedades de una aplicación afin y, además, las propiedades que se derivan del endomorfismo asociado a una isometría vectorial.

En particular:

* Una isometría de P se da apartir de dos puntos homólogos y de la isometría vectorial asociada:
* Una isometría conserva el baricentro, la convexidad.
* Conserva alineamiento de puntos, el paralelismo y la ortogonalidad.
* Es biyectiva ya que la isometría vectorial asociada es biyectiva.

1.3.5 EFECTO DE UNA ISOMETRIA SOBRE LAS LONGITUDES Y LAS AREAS

1.3.5.1 SEA f UNA ISOMETRIA DE P.

Consideremos el círculo C; $C = \{M \in P / \|\overrightarrow{OM}\| = r\}$

0: centro del círculo

r: radio de C

$M \in C \iff |\overrightarrow{OM}| = r$

el área de C es $A = \pi r^2$ y la longitud $L = 2\pi r$.

Sea $0' = f(0)$ imagen del centro; $0'$: centro de C'

$$\begin{aligned} M' \in C' &\iff |0'M'| = r' \text{ , } r' \text{ radio de } C' \\ &\iff |\overrightarrow{OM}| = r' \\ &\iff r = r' \end{aligned}$$

luego en área de C' es $A' = \pi r'^2$

$$\begin{aligned} &= \pi r^2 \\ &= A \end{aligned}$$

la longitud de C' es $L' = 2\pi r'$

$$\begin{aligned} L' &= 2\pi r \\ &= L \end{aligned}$$

$\therefore$ la aplicación f conserva la longitud y el área de C.

Si tomamos tres puntos no alineados A,B,C de imágenes A',B',C' respectivamente, y H la proyección ortogonal de A sobre BC, su imágen H' es proyección ortogonal de A' sobre B'C' ya que f conserva la ortogonalidad.

El área es $A(ABC) = \dfrac{\|BC\| . \|AH\|}{2}$

el área de $A(A'B'C') = \dfrac{|B'C'| . |A'H'|}{2}$

$$A(A'B'C') = \frac{|BC| . |AH|}{2}$$

luego el $A(A'B'C') = A(ABC)$.

Si tenemos $A_1A_2 \ldots A_n$ un polígono de P. Su imágen $A_1', A_2' \ldots A_n'$ por f es convexo ya que conserva la convexidad. El área de $A_1A_2 \ldots A_n$ es:

$A(A_1;A_2, \ldots A_n) = A(A_1,A_2,A_3) + A(A_1A_3A_4) + \ldots + (A_1A_{n-1}A_n)$.

obteniendo el áre del polígono $A_1'A_2', \ldots, A_n'$.

$$\begin{aligned} A(A_1'A_2' \ldots A_n) &= A(A_1'A_2'A_3') + A(A_1'A_3'A_4') + \ldots + A(A_1A_{n-1}A_n) \\ &= A(A_1A_2A_3) + A(A_1A_3A_4) + \ldots + A(A_1A_{n-1}A_n) \\ &= (A_1A_2 \ldots A_n). \end{aligned}$$

En general tenemos que S es subconjunto de P de longitud L y área A, su imágen por una isometría tiene longitud L y área A.

1.3.6 GRUPO DE ISOMETRIAS DE P.

El conjunto de isometrias de P bajo la operación composición es un grupo.

1ª) Mostremos que "0" es cerrada.

Sea f y g dos isometrías y cualesquiera A,B ε P.

se tiene:

$$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$$

$$B \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} B''$$

se tiene:

$$\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \quad . \quad |\overrightarrow{A''B''}| = |\overrightarrow{A'B'}|$$

así $|\overrightarrow{A''B''}\| = |\overrightarrow{AB}|$

luego g∘f es una isometría de P.

Probaremos que la función identidad f es una isometría

existe la función f: P ⟶ P.

$$A \rightsquigarrow f(A) = A.$$

entonces:

$$d(f(A),\ f(B)) = d(A,B)$$

$$d(A,B) = d(A,B) \qquad , \quad A,B \in P$$

la identidad de P es I_{dp}.

Inversos: como f es una isometría de P, también su recíproco es isometría que es f^{-1}

probar asociatividad

Definamos:

$$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A'' \xrightarrow{h} A''' \qquad B \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} B'' \xrightarrow{h} B'''$$

A probar:

$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$$

se tiene:

$\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{A''B''}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$, $\|\overrightarrow{A'''B'''}\| = \|\overrightarrow{A''B''}\|$

$\quad\quad\downarrow f \quad\quad\quad\quad \downarrow g \quad\quad\quad\quad \downarrow h$

$\|\overrightarrow{A'''B'''}\| = \|\overrightarrow{A''B''}\|$ aplicación h

$= \|\overrightarrow{A'B'}\|$ aplicación g, g isometría

$= \|\overrightarrow{AB}\|$ aplicación f.

ii) $\|\overrightarrow{A''B''}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$

$= \|\overrightarrow{AB}\|$ (a)

también $\|\overrightarrow{A'''B'''}\| = \|\overrightarrow{A''B''}\|$ (b)

luego: de (a) y (b) se tiene

$$\|\overrightarrow{A'''B'''}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

∴ La aplicación composición es asociativa y se concluye que es un grupo.

1.3.7 DESPLAZAMIENTO

1.3.7.1 DEFINICION:

Se llama desplazamiento de p a toda isometría cuyo endomorfismo asociado es una rotación vectorial, el ángulo de un desplazamiento es el ángulo de la rotación asociada.

1.3.7.2 EJEMPLOS:

1) Una traslación de p es un desplazamiento cuyo endomorfismo asociado es la I_{dp} que es la rotación vectorial de ángulo nulo.

2) Una rotación de centro I y ángulo θ es un desplazamiento con endomorfismo asociado es la rotación vectorial de ángulo θ.

1.3.7.3 **TEOREMA:**

El conjunto de desplazamiento es un sub-grupo del grupo de isometrías de p. Bajo la operación composición.

PRUEBA:

1) Cierre:

La composición de dos desplazamientos es un desplazamiento. Sea f y g dos desplazamientos. Se dice que $f \circ g$ es una isometría de p ya que la composición de isometrías es una isometría. Y el endomorfismo es la composición de rotaciones vectorial ya que θ_1 es el ángulo de r y θ_2 el ángulo de r' luego

$$r_{\theta_2} \circ r_{\theta_1} = r_{\theta_2+\theta_1}$$

luego cumple cierre.

2) La composición de dezplazamiento es asociativa ya que la composición de aplicación es asociativa.

3) El elemento neutro es la I_{dp} que es un desplazamiento cuyo endomorfismo asociado es $r_{\circ}$.

4) Si f pertenece al conjunto de desplazamiento de p entonces f^{-1} es una isometría de p. Y su endomorfismo asociado es la rotación vectorial $r_{-\theta} = (r_{\theta})^{-1}$

$\therefore$ $f \circ g$ es un subgrupo.

4. NUMEROS COMPLEJOS

4.1 **TEOREMA Y DEFINICION 1:**

El conjunto de $\mathbb{R}^2$ dadas las operaciones adición y multiplicación:

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$$

$$(a,b)(a',b') = (aa'-bb', ab' + ba')$$

es un cuerpo conmutativo, de elemento unidad $(1,0)$, se llama cuerpo de Números Complejos y se denota $\mathbb{C}$.

El cuerpo $\mathbb{C}$ contiene un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$; además el elemento $(0,1)$ denotado por i, es tal que $i^2 = -(1,0)$.

Notación $(a,b) = a + ib$.

Sea $\mathbb{R}_1$ el conjunto de Números Complejos de la forma $(a,0)$, donde a es un real. La biyección ϕ de $\mathbb{R}_1$ a $\mathbb{R}$ es tal que

$$\phi : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a,0) \rightsquigarrow a.$$

es decir para toda pareja (a,b) se tiene:

$(a,b) = (a,0) + (0,1)(b,0)$, es decir utilizando la identificación precedente y la notación $i = (0,1)$: $(a,b) = a + ib$.

Todo Número Complejo se escribe de la forma $a + ib$, donde a y b son reales. Esta escritura es evidentemente única ya que la igualdad $a + ib = a' + ib'$, con a,a',b,b' reales significa que $(a,b) = (a',b')$, es decir que $a = a'$ y $b = b'$.

1.4.2 TEOREMA Y DEFINICION 2:

Para todo Número Complejo z existe una pareja (a,b) de reales y una sola tal que $z = a+ib$.

Los reales a y b se llaman parte real e imaginaria respectivamente de z. Y se denotan $\mathbb{R}e(z)$ y $Im(z)$.

El Número Complejo $a+ib$ es nulo si y solamente si, $a = b = 0$.

Los Números Complejos no nulos de la forma ib, donde b es real distinto de cero se llaman imaginarios puros.

La igualdad $(ib)^2 = -b^2$ muestra que el cuadrado de un número imaginario puro es un real estrictamente negativo.

4.3 ESTRUCTURA DEL CUERPO $\mathbb{C}$

- La adición definida en los números complejos cumple ser:
  i) Asociativa,
  ii) Conmutativa
  iii) Para toda pareja (a,b) se cumple:
  $(a,b) + (0,0) = (0,0) + (a,b) = (a,b)$, así $(0,0)$ es el elemento neutro para la suma.
  iv) Para toda pareja (a,b) existe una pareja (-a,-b) tal que:
  $$(a,b) + (-a,-b) = (-a,-b) + (a,b) = (0,0)$$
  así (-a,-b) es el opuesto aditivo de (a,b).

- La multiplicación es evidentemente conmutativa, y la pareja

(1,0) es el elemento neutro para el producto.

Resta verificar i) asociatividad, para cualquiera que sean las parejas (a,b),(a',b'),(a",b").

ii) Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma.

iii) Inverso multiplicativo para toda pareja (a,b).

SOLUCION:

i) Para cualesquiera que sean (a,b),(a',b'),(a",b") se cumple:

α) $$\begin{aligned}[(a,b)(a',b')](a'',b'') &= (aa'-bb',ab'+ba')(a'',b'') \\ &= [(aa'-bb')a''-(ab'+ba')b'', (aa'-bb')b'' \\ &\quad +(ab'+ba')a''] \\ &= (aa'a''-bb'b''-ab'b''-ba'b'', \\ &\quad aa'b''-bb'b''+ab'a''+ba'a'')\end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned}(a,b)[(a',b')(a'',b'')] &= (a,b)[a'a''-b'b'',a'b''+a''b'] \\ &= (a(a'a''-b'b'')-b(a'b''+a''b'), \\ &\quad a(a'b'+a''b')+b(a'a''-b'b'')) \\ &= (aa'a''-ab'b''-a'bb''-a''bb' \text{ y} \\ &\quad aa'b''+aa''b'+a'a''b-bb'b'')\end{aligned}$$

De los resultados (α) y (β) podemos concluir que:

$[(a,b)(a',b')](a'',b'') = (a,b)[(a',b')(a'',b'')]$ ya a,a',a'',b,b',b'' son reales podemos utilizar la conmutatividad para el producto en $\mathbb{R}$.

ii) Para cualquiera que sean $(a,b),(a',b'),\ (a'',b'')$ a probar:

$$(a,b)\ (a',b')+(a'',b'') = (a,b)(a',b')+(a,b)(a'',b'')$$

tenemos:

$$\begin{aligned}(a,b)\left[(a',b')+(a'',b'')\right] &= (a,b)\left[(a'+a'',b'+b'')\right]\\ &= (a(a'+a'')-b(b'+b''),b(a'+a'')+(a'+b''))\\ &= (aa'+aa''-bb'-bb'',ba'+ba''+ab'+ab'')\\ &= (aa'-bb'+aa''-bb'',ab'+ba'+ab''+ba'')\\ &= (aa'-bb',ab'+ba')+(aa''-bb'',ab''+ba'')\\ &= (a,b)(a',b') + (a,b)(a'',b'') \qquad (*)\end{aligned}$$

De acuerdo a la conmutatividad para la multiplicación se tiene:

$$\left[(a',b')+(a'',b'')\right](a,b) = (a',b')(a,b)+(a'',b'')(a,b); \quad (**)$$

luego:

De los resultados (*) y (**) podemos decir que el producto de complejos se distribuye sobre la suma tanto por la derecha como por la izquierda.

iii) Aprobar que para todo elemento $(a,b) \neq (0,0)$, existe (a',b') tal que:

$$(a,b)(a',b') = (a',b')(a,b) = (1,0)$$

es decir:

$$(a,b)(a',b') = (1,0)$$
$$(aa'-bb',ab'+ba') = (1,0)$$

luego:

$$\begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ab' + ba' = 0 \end{cases}$$

Resolviendo para a' y b' se tiene:

$$a' = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad y \quad b' = \frac{-b}{a^2 + b^2}, \text{ ya que } (a,b) \neq (0,0),\ a^2+b^2 \neq 0$$

de donde el inverso multiplicativo de $(a,b) \neq (0,0)$ es

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

De los resultados anteriores el conjunto $\mathbb{C}$ de los Números Complejos es un cuerpo conmutativo bajo las operaciones suma y producto de complejos. El cual se denota por $(\mathbb{C}, +, .)$.

1.4.2 REPRESENTACION GEOMETRICA DE UN NUMERO COMPLEJO.

1.4.2.1 Consideremos el plano p y un plano vectorial $\vec{P}$ que es el conjunto de vectores de P, donde $\vec{P}$ posee una base ortonormal (e_1, e_2) y P es el sistema otonormal $(0, e_1, e_2)$.

a) Representación por un Vector.

Se define la aplicación f:

$$f: \quad \mathbb{C} \longrightarrow P$$
$$z = a + ib \rightsquigarrow V = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$$

Donde f es una biyección tal que, cualesquiera que sean z y z' en $\mathbb{C}$ y λ en $\mathbb{R}$:

$$f(z+z') = f(z) + f(z') \text{ y } f(\lambda z) = \lambda f(z).$$

Se dice que el vector $\vec{V} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ es la imagen del número complejo a + ib.

Se dice que z es el afijo del vector $\vec{V}$.

Observemos que la imagen z depende de la base que se escoge en $\vec{P}$.

b) Representación por un punto.

La aplicación $g: \vec{P} \longrightarrow P$

$$\vec{V} \rightsquigarrow M \quad \text{tal que } \vec{OM} = \vec{V};$$ g es biyectiva.

Donde la aplicación $g \circ f$ que a todo complejo $z = a+ib$ asocia el punto M de P tal que $\vec{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ es biyectiva (ya que es la composición de dos biyectivas).

Se dice aún qué M es la imagen de z, 0 que z es la preimagen de M.

En este caso la imagen de z depende del sistema que se escoge en P.

Es facil indicar, en el plano, junto de cada punto, la preimagen de ese punto.

4.2.2 **EJEMPLO:**

Sean A,B,C las preimagenes respectivas de 1,i,i+2, las cuales se pueden representar en el plano así:

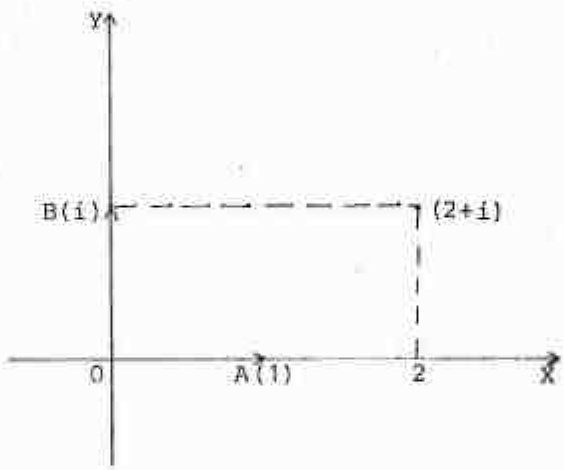


Fig. 1.21

4.2.3 **EJEMPLO:**

Sean los puntos M,M' de preimagenes z y z'.

Se tiene:

$$f(z) = \overrightarrow{OM}$$

$$f(z') = \overrightarrow{OM'}$$

y luego: $f(z + z') = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$

$$= \overrightarrow{OM''}.$$

La imagen de (z+z') es el punto M" tal que $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

Se obtiene así el punto M" con la ayuda de la construcción clasica del paralelogramo.

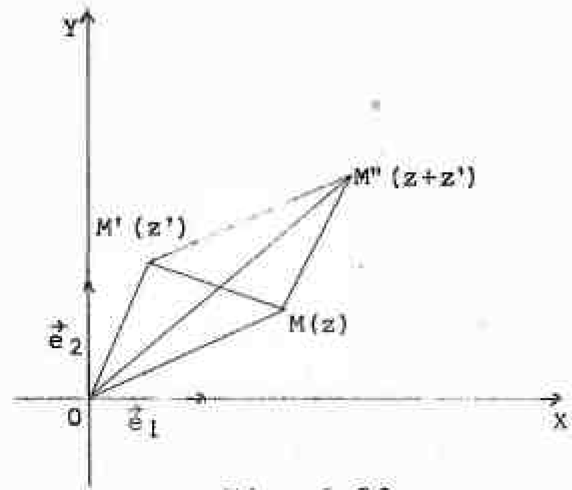


Fig. 1.22

El punto I es el punto medio de OM", verificar que $\overrightarrow{0I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{0M}"$, I tiene por preimagen $\frac{1}{2}(z + z')$.

La imagen de $\frac{1}{2}(z + z')$ es el medio de la pareja (M,M') de imagen z y z'.

Solución:

$$\text{Como } \frac{1}{2}(z+z') = (\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}z')$$

$$\begin{aligned} f(\tfrac{1}{2}(z+z')) &= f(\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}z') \\ &= f(\tfrac{1}{2}z) + f(\tfrac{1}{2}z') \\ &= \tfrac{1}{2}f(z) + \tfrac{1}{2}f(z') \\ &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{0M} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{0M'} \\ &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{0M} + \overrightarrow{0M}') \\ &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{0M}"). \end{aligned}$$

luego $\overrightarrow{0I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{0M}"$.

- Sean los puntos M(z) y M(-z), el medio de (M,M') de una preimagen:

  $\frac{1}{2}(z-z) = 0$ que es el origen "0". Los puntos M y M' son simétricos respecto al origen:

Solución:

$$\frac{1}{2}(z-z') = 0$$

$$f(\frac{1}{2}(z-z')) = 0$$

$$f(\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z') = 0$$

$$f(\frac{1}{2}z)+f(-\frac{1}{2}z') = 0$$

$$\frac{1}{2}f(z)-\frac{1}{2}f(z) = 0$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{0M} - \frac{1}{2}\overrightarrow{0M'} = 0$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{0M} - \overrightarrow{0M'}) = 0$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{M'M}) = 0$$

luego 0 es el punto medio de (M,M')

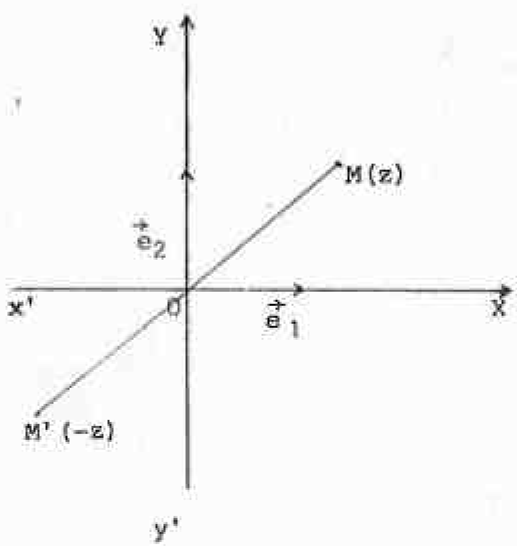


Fig. 1.23

1.4.3 CONJUGADO DE UN NUMERO COMPLEJO

4.3.1 El número complejo $\bar{z} = a - ib$ es el conjugado del número complejo $z = a + ib$.

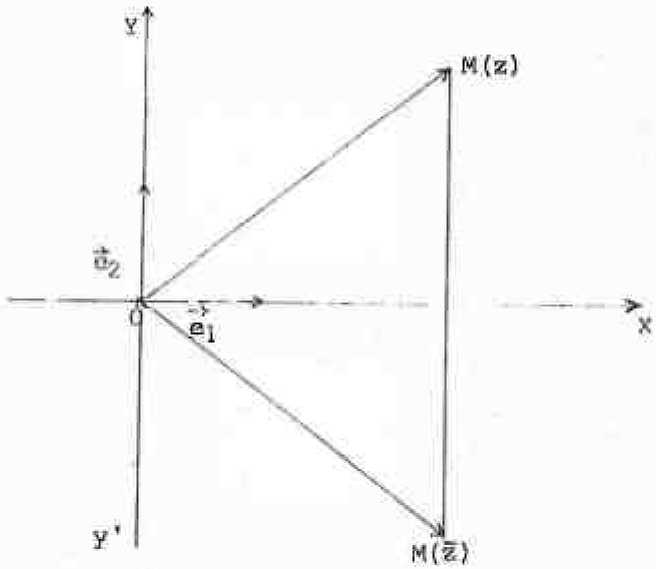


Fig. 1.24

4.3.2 **TEOREMA:**

Cualquiera que sean z y su conjugado $\bar{z}$ se tiene:

$$z + \bar{z} = 2\,\mathbb{R}_e(z) \;\; ; \;\; z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$$

$$z = -\bar{z} \iff z \text{ es imaginario puro}; \;\; z = \bar{z} \iff z \text{ es real.}$$

tenemos $z = a + ib$ y su conjugado $\bar{z} = a - ib$.

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib$$

$z + \bar{z} = 2a$; donde "a" es la parte real.

$$z - \bar{z} = \cancel{a} + ib - \cancel{a} + ib.$$

$$= 2ib; \text{ donde } ib \text{ parte imaginaria.}$$

Consideremos en forma matemática la aplicación $r: z \longrightarrow \bar{z}$ así:

$$r: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \rightsquigarrow \bar{z}$$

Para cualquiera que sea z en $\mathbb{C}$:

$$(r \circ r)(z) = \bar{\bar{z}} = z$$

Prueba:

$$\text{Sea } z = a + ib; \quad y \ \bar{z} = a - ib = r(z)$$

$$\begin{aligned}(r \circ r)(z) &= r(r(z)) \\ &= r(a-ib) \\ &= a + ib \\ &= z\end{aligned}$$

luego $(r \circ r)(z) = \bar{\bar{z}} = z$.

La aplicación $r \circ r = Id_{\mathbb{C}}$, y en consecuencia r es involutiva, de donde la biyección $r^{-1} = r$.

1.4.3.3 **PROPIEDADES:**

Para cualquiera que sean z y z' en $\mathbb{C}$

donde $z = a + ib$ y $z' = a' + ib'$ se tiene:

$$\begin{aligned}\text{i) } r(z+z') &= r(a+ib+a'+ib') \\ &= r(a+a'+i(b+b')) \\ &= a + a' - i(b+b') \\ &= a + a' - ib - ib' \\ &= (a-ib) + (a'-ib') \\ &= \bar{z} + \bar{z}'\end{aligned}$$

luego $r(z+z') = r(z) + r(z')$

$= \bar{z} + \bar{z}'$

ii) $r(zz') = r(z).r(z')$

tenemos:

$$
\begin{aligned}
r(zz') &= r((aa'-bb',\ ab' + a'b)) \\
&= r(aa'-bb'+i(ab'+a'b)) \\
&= aa' - bb' - i(ab' + a'b) \\
&= aa' - bb' - iab' - ia'b \\
&= (a-ib)a' - i(b+ia)b' \\
&= (a-ib)a' - ib'(a-ib); \\
&= (a - ib)(a' - ib') \\
&= r(z)r(z') \\
&= \bar{z}.\bar{z}'
\end{aligned}
$$

luego $r(zz') = r(z)r(z') = \bar{z}.\bar{z}'$

iii) $r(\frac{1}{z}) = \frac{1}{r(z)}$; donde $r(z) = \bar{z}$

Para la prueba de esta propiedad basta probar que $r(z^{-1}) = r(z)^{-1}$

Solución:

Sea $z = a + ib \Rightarrow z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}$

$$\Rightarrow r(z^{-1}) = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{(-ib)}{a^2+b^2}$$

luego $\quad r(z^{-1}) = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}\, i \quad (*)$

también tenemos $r(z) = a - ib$

$$r(z)^{-1} = (a - ib)$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{(^-ib)}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{ib}{a^2+b^2}$$

luego $r(z)^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\,\dfrac{b}{a^2+b^2}$ $\quad **$

$\therefore$ De los resultados $(*)$ y $(**)$ tenemos

$$r(z^{-1}) = r(z)^{-1}$$

entonces

$$r(\frac{1}{z}) = \frac{1}{r(z)}$$

TEOREMA:

La aplicación $r: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un automorfismo

$$z \rightsquigarrow \bar{z}$$

involutivo de $\mathbb{C}$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ que deja invariantes los elementos de $\mathbb{R}$.

En conclusión el conjugado de un número complejo cumple:

i) $\quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

ii) $\quad \overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$

iii) $\quad \overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\bar{z}}$

iv) $\quad z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

v) $\quad z - \bar{z} = 2\ \mathrm{Im}(z)$

vi) z es real $\Longleftrightarrow z = \bar{z}$

vii) $z = -\bar{z} \Longleftrightarrow z$ es imaginario puro.

1.4.4 MODULO DE UN NUMERO COMPLEJO:

Para todo complejo $z = a + ib$ donde a y b son reales se tiene: $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ es un número real positivo.

1.4.4.1 DEFINICION:

Se llama módulo de un número complejo z, al número real positivo $|z|$ definido por: $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Se observa que $|z|$ es la distancia del origen de coordenadas "0" a la imagen M de z: $|z| = OM$.

Propiedades:

i) $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$

ii) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

iii) $|z| = |-z|$, $|z| = |\bar{z}|$

iv) $|zz'| = |z||z'|$

v) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

vi) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$

vii) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

viii) $1 = |z \frac{1}{z}| = |z| . \left|\frac{1}{z}\right|$, de donde $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Pruebas para algunas propiedades:

- Para ii)

Sea $z = a + ib$

$|z| = 0 \Rightarrow \sqrt{z\bar{z}} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 0$

$\Rightarrow a^2+b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$

- Para iv)

Sea $z = a + ib$ y $z' = a' + ib'$

tenemos $zz'.\bar{z}\bar{z}' = z\bar{z}.z'\bar{z}'$

$|zz'| = \sqrt{zz'.\bar{z}\bar{z}'}$

$= \sqrt{z\bar{z}.z'\bar{z}'}$

$= \sqrt{z\bar{z}} \cdot \sqrt{z'\bar{z}'}$

$= |z||z'|$

luego $|zz'| = |z||z'|$

Para v) aprobar que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

tenemos:

$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'})$ def. de módulo

$= (z+z')(\bar{z}+\bar{z}')$ propiedad del conjugado

$= z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}'$

$$= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2$$

$$\leq |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2$$

$$\leq (|z| + |z'|)^2$$

$$\Rightarrow |z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$$

$$\Rightarrow |z+z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\therefore |z+z'| \leq |z| + |z'|$$

1.4.5 ARGUMENTO DE UN COMPLEJO

4.5.1 NUMERO COMPLEJO DE MODULO 1.

Sea z de módulo 1, y P un sistema ortonormal directo $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, designemos por M la imagen de z.

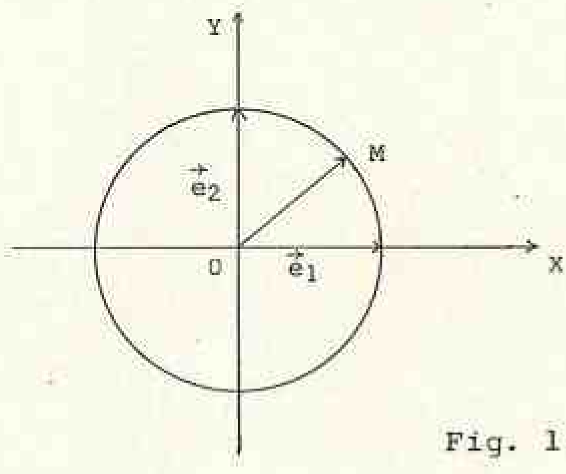


Fig. 1.25

Sea (a,b) las coordenadas de M, donde a, y b se pueden expresar en función de la medida θ en radianes del ángulo de los vectores $(\vec{e}_1,\vec{OM})$ por:

$a = \|\vec{OM}\| \cos\theta = \cos\theta$; ya que el módulo es 1.

$b = |\vec{OM}|$ sen θ = sen θ;

luego $z = a + ib$ puede expresarse como $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$.

4.5.2 **DEFINICION:**

Se llama argumento de un número complejo z de módulo 1, al real θ que pertenece al intervalo $|0,2\pi|$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ tal que:

$$z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

El conjunto de argumentos de z es el conjunto de medidas en radianes del ángulo $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$, donde M es la imagen de z en el sistema ortonormal $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Si θ es un argumento de z, se expresa $\arg z \equiv \theta(2\pi)$ lo que significa que todo argumento de z, denotado por arg z, es congruente a θ módulo 2π.

4.5.3 **PROPIEDADES:**

a) Si dos complejos z y z' son de módulo 1 entonces zz' y $\frac{1}{z} = \bar{z}$ son de módulo 1.

luego tenemos:

El conjunto U de números complejos de módulo 1 es un grupo con la operación multiplicación de complejos.

b) La aplicación que a todo número complejo de módulo 1 asocia sus imagenes en el plano p dado un sistema ortonormal directa es una biyección de U sobre el círculo trigonométrico, de centro en el origen y de radio 1.

Si $\arg z \equiv \theta(2\pi)$ y $\arg z' \equiv \theta'(2\pi)$, donde $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ y $z' = \cos\theta' + i\,\text{sen}\,\theta'$ se tiene:

i) $\arg zz' \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$.

ii) $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg z\ [2\pi]$

iii) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

iv) $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

v) $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$

vi) $\arg\frac{1}{z^n} \equiv -n \arg(z)\ [2\pi]$

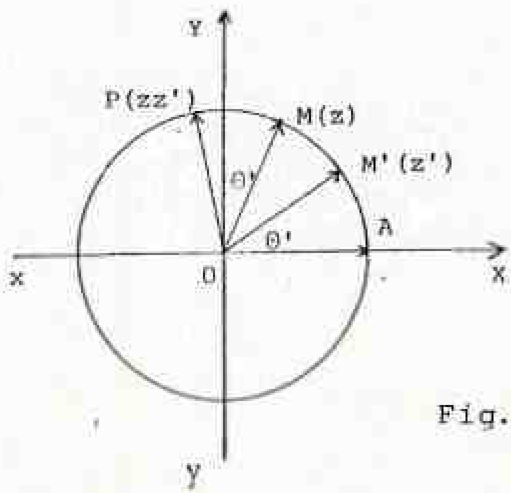


Fig. 1.26

El punto p es la imagen de M por la rotación de centro 0 y angulo θ'

$$\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}} \equiv \widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}}\ [2\pi]$$

Representación Geométrica

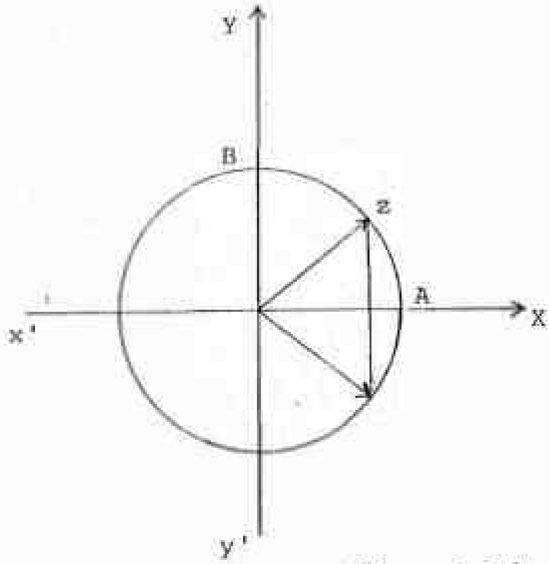


Fig. 1.28

La igualdad $(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\theta)(\cos\theta - i\ \mathrm{sen}\theta) = 1$ se escribe:

$$\cos\theta - i\mathrm{sen}\theta = \frac{1}{\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta}$$

$$\cos(-\theta) + i\mathrm{sen}(-\theta) = \frac{1}{\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta}$$

Esto demuestra que para todo complejo z de módulo 1, se tiene:

$$\arg \frac{1}{z} = -\arg(z).$$

1.4.6 **COMPORTAMIENTO EXPONENCIAL DE CIS θ**

Como un complejo z lo podemos expresar $z = \|\overrightarrow{OM}\| (\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)$.
haciendo $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$ tenemos $z = \rho(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)$.

La expresión $\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta$ se designa como $\mathrm{cis}\theta$. Luego

$z = \rho(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta) = \rho\,\mathrm{cis}\theta$

4.6.1 **DEFINICION:**

Para todo número real θ se tiene: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

la cual se define como Φ: $\mathbb{R} \longrightarrow U$; donde U es el conjunto

$\theta \rightsquigarrow e^{i\theta}$

de complejos módulo 1.

1°) Esta aplicación tiene las siguientes propiedades:

a) $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$: Φ es un morfismo de grupo aditivo $\mathbb{R}$ en U.

b) $e^{i\theta} = 1$; en forma precisa, $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0\ [2\pi]$.

c) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

e) $e^{i\pi} = -1$

f) $e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$

g) $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta'\ [2\pi]$

2°) Fórmula de Euler.

De $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ y $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$, resulta:

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$ y $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ y $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\operatorname{sen}\theta$

$\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta.$ y $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{sen}\theta.$

luego $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

3°) Fórmula de DE MOIVRE

Esta fórmula se escribe $(e^{i\theta})^p = e^{ip\theta}$, para toda $p \in \mathbb{R}$

4°) Derivada de la función $\theta \longrightarrow e^{i\theta}$

Una aplicación F de un intervalo I de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ se escribe $F(\theta) = F_1(\theta) + iF_2(\theta)$ donde $F_1(\theta) = \mathbb{R}eF(\theta)$ y $F_2(\theta) = Im(F_2(\theta))$ en este caso la derivada queda $F'(\theta) = F_1'(\theta) + F_2'(\theta)$.

Aplicando esta definición a la función

ϕ: $\theta \longrightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$.

$$\phi'(\theta) = -\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta$$

$$= i(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{i})$$

$$= i(\cos\quad + i\operatorname{sen}\quad);\ \text{donde}$$

$$\frac{-\operatorname{sen}\theta}{i} = \frac{-i^3}{i^3 i}\operatorname{sen}\theta = \frac{i\operatorname{sen}\theta}{i^4} = i\operatorname{sen}\theta.$$

$$= i\, e^{i\theta}$$

luego $\phi'(\theta) = ie^{i\theta}$

En forma Geométrica de la Derivada.

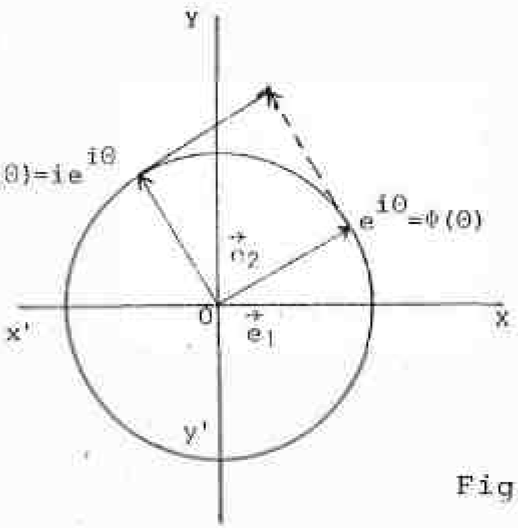


Fig. 1.28

5°) En la escritura trigonométrica de todo número complejo $z \neq 0$ y de argumento θ, se utiliza la notación $e^{i\theta}$ luego z se escribe $z = |z|e^{i\theta}$:

si $z = \rho e^{i\theta}$, donde ρ y θ son reales, se tiene:

a) Cuando $\rho = 0$: $z = 0$;

b) Cuando $\rho > 0$: $|z| = \rho$ y $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$

c) Cuando $\rho < 0$: $|z| = -\rho$ y $\arg z \equiv \theta + \pi \ [2\pi]$.

CAPITULO II

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

2.1 TRASLACIONES

1.1 DEFINICION:

a) Sea $\vec{u}$ un vector de $\vec{p}$

La aplicación $t_{\vec{u}}$: $p \longrightarrow P$ que a todo punto M le asocia

$$M \rightsquigarrow M'$$

$M' \in P$ tal que $\overrightarrow{MM'} = \vec{\alpha}$ se llama traslación $t_{\vec{u}}$ de vector $\vec{u}$.

En forma geométrica se tiene:

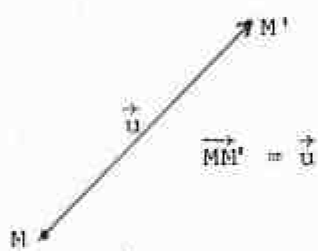


Fig. 2.1

b) Si el plano $\vec{p}$ está en el sistema ortonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$ y M tiene coordenadas (x,y), $\vec{u} = (\alpha,\beta)$; $M'(x',y')$ entonces

$$t_{\vec{u}}: p \longrightarrow P$$

$$(x,y) \rightsquigarrow (x',y')$$

donde $(x',y') = (x,y) + (\alpha,\beta)$

$$= (x + \alpha,\ y + \beta)$$

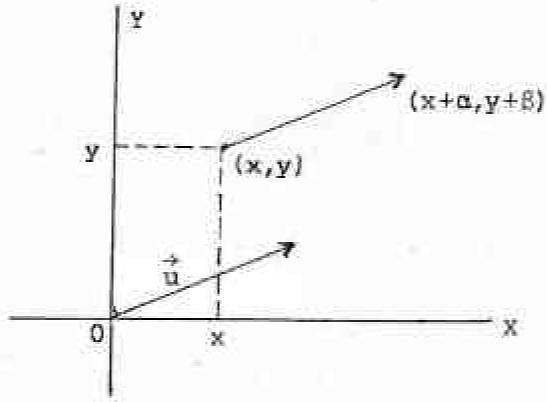


Fig. 2.2

La aplicación $t_{\vec{u}}$ es una aplicación afín cuyo endomorfismo asociado es $Id_{\vec{p}}$.

2.1.2 **GRUPO DE TRASLACIONES:**

El conjunto $(T,\circ)$ es un grupo conmutativo o sea el conjunto de traslaciones posee la estructura de grupo conmutativo.

1) Prueba: Cierre

Sea $M \in p$ definamos $t_{\vec{u}}: p \longrightarrow P$

$$M \rightsquigarrow M' = t_{\vec{u}}(M)$$

y

$$t_{\vec{v}}: p \longrightarrow P$$

$$M' \rightsquigarrow M'' = t_{\vec{v}}(M')$$

Se tiene:

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \quad \wedge \quad \overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$$

así

$$\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{MM''} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$

luego la composición de traslación es una traslación.

2) Si de la expresión $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$ hacemos $\vec{v} = -\vec{u}$

entonces $t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+(-\vec{u})}$

$= t_{\vec{o}}$

$= Id_P.$

luego $t_{-\vec{u}}$ es la traslación opuesta de la traslación de vector $\vec{u}$.

3) Conmutatividad.

Se tiene que $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

$= t_{\vec{v}+\vec{u}}$

$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$

luego es conmutativa.

4) Asociatividad

Sea $M, M', M'', M_3 \in P$ tal que:

$t_{\vec{u}}: p \longrightarrow P$

$M \rightsquigarrow M' = t_{\vec{u}}(M)$; $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$t_{\vec{v}}: p \longrightarrow P$

$M' \rightsquigarrow M'' = t_{\vec{v}}(M')$; $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$

$t_{\vec{w}}: p \longrightarrow P$

$M'' \rightsquigarrow M_3 = t_{\vec{w}}(M'') = M_3$; $\overrightarrow{M''M_3} = \vec{w}$

Se tiene:

$\overrightarrow{M'M'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$ $\wedge$ $\overrightarrow{M''M_3} = \vec{w}$

Sumando

$$\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} + \overrightarrow{M''M_3} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$$\overrightarrow{MM'} + (\overrightarrow{M'M''}+\overrightarrow{M''M_3}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$$\overrightarrow{MM'} + (\overrightarrow{M'M_3}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$$\overrightarrow{MM_3} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

si tomo:

i) $\overrightarrow{MM'} + (\overrightarrow{M'M''} + \overrightarrow{M''M_3}) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$$= (t_{\vec{w}} \circ t_{\vec{v}}) \circ t_{\vec{u}}$$

ii) Agrupando

$$(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}) + \overrightarrow{M''M_3} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

$$(\overrightarrow{MM''}) + \overrightarrow{M''M_3} = t_{w} \circ (t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}})$$

$$\overrightarrow{MM_3} = t_{w} \circ (t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}})$$

De los resultados i) y ii) se concluye la propiedad de asociatividad.

.˙. el conjunto $(T,0)$ es un grupo conmutativo.

2.1.3 **PUNTOS INVARIANTES**

El punto M e s invariante por $t_{\vec{u}} \iff t_{\vec{u}}(M) = M$ e s decir $\iff \overrightarrow{MM} = \vec{u}$.

* Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, ningún punto es invariante.
* Si $u = \vec{0}$ $t_{\vec{o}}$ es la identidad de P y todos los puntos son invariantes.

2.2 HOMOTECIAS

2.2.1 **DEFINICION:**

Sea Ω un punto del plano P y k un real, $k \neq 0$.

Se llama homotecia de centro Ω y de razón k a la aplicación que a todo punto M asocia un único punto M' definido por:

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

es decir:

$$H_{(\Omega,k)}: P \longrightarrow P$$

$$M \rightsquigarrow M' \quad \text{tal que } \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

Así los puntos Ω,M,M' estan alineados.

Esta aplicación se denota por $H_{(\Omega,k)}$, 0 simplemente h.

En forma geométrica se tiene:

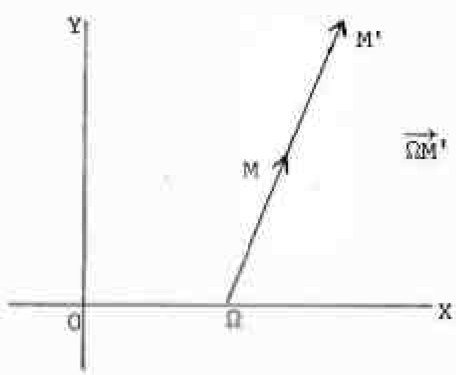


Fig. 2.3

2.2 **EJEMPLOS:**

Cuando k = -1 la expresión $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ resulta $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$:

el centro Ω de la homotecia es el punto medio del bipunto $(M.M')$

Fig. 2.3

La homotecia $H_{(\Omega,-1)}$ es la simetría central de centro Ω.

Cuando $k = +1$ la imagen homotéteica M' de todo punto M es tal que $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$. Asi $M = M'$ y se deduce que toda homotecia de razon $k = 1$ es la aplicación identidad del plano I_p y todo punto M es su propia imagen.

2.2.3 **PRIMERAS PROPIEDADES:**

1ª) La igualdad $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ evidencia que los puntos Ω, M, M' estan alineados, ya sea que $k > 0$ ó $k < 0$.

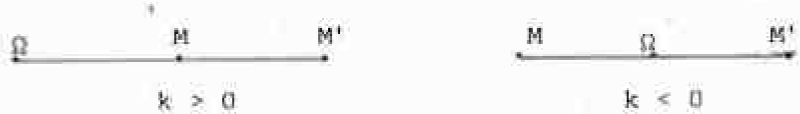


Fig. 2.4

a) Cuando $\Omega \neq M$, la pareja $(\Omega, \overrightarrow{\Omega M})$ es un sistema de la recta (ΩM) y $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ significa que M' es el punto de abcisa k en el sistema.

b) Si $M = \Omega$ se tiene $\overrightarrow{\Omega M'} = \vec{0}$ donde $M = \Omega = M'$; el punto Ω resulta ser invariante por h.

2ª) Investiguemos el conjunto de puntos invariantes por h:

Los puntos M invariantes por h son tales que $h(M) = M$, es decir $\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega M}$, aún más

$$(1-k)\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0} \qquad (**)$$

a) Si $k = 1$, todo punto del plano cumple (**): h es la aplicación identidad del plano p, I_p.

b) Si $k \neq 1$, la igualdad (**) implica $\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$ lo que significa que $M = \Omega$. Se deduce entonces que sólo el punto Ω es invariante por h.

c) Si $k = 0$, la expresión (**) implica $\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$ entonces $\Omega = M$ que también significa que el centro Ω es invariante por h y la aplicación es la constante.

2.2.4 BIYECCION RECIPROCA:

Toda homotecia es una función biyectiva; es decir: h cumple inyectividad y sobreyectividad.

a) Probemos que la aplicación homotética $H_{(\Omega,k)}$, con $k \neq 0$, cumple ser inyectiva.

Si $H_{(\Omega,k)}(N) = N' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{\Omega N}$ (1)

$H_{(\Omega,k)}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ (2)

debemos probar que:

Si $H_{(\Omega,k)}(M) = H_{(\Omega,k)}(N)$ entonces $M = N$.

Tomando encuenta (1) y (2) tenemos:

$$\text{Si } \overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega N'} \Rightarrow k\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega N}$$

$$\Rightarrow k\overrightarrow{\Omega M} - k\overrightarrow{\Omega N} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow k(\overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega N}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow k(\overrightarrow{NM}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = \vec{0} \text{ ; ya que } k \neq 0$$

$$\Rightarrow N = M$$

$\therefore H_{(\Omega,k)}$ es inyectiva.

b) Probar que $H_{(\Omega,k)}$ es sobreyectiva.

Si $k = 1$ entonces tenemos la aplicación identidad del plano y ésta es biyectiva.

Si $k \notin \{0,1\}$:

Sea M un punto del plano entonces:

$$\overrightarrow{\Omega M} = k(\tfrac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M})$$

$$\overrightarrow{\Omega M} = k(\Omega N)$$

entonces M es imagen de N definido en forma tal que $\overrightarrow{\Omega N} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M}$.

Si probamos que $H^{-1}_{(\Omega,k)} = H_{(\Omega,\frac{1}{k})}$ estaríamos en condiciones de aplicar la función homotética inversa para encontrar la preimagen de cualquier punto.

SOLUCION:

Definamos $H_{(\Omega,k)}$ la homotecia de centro Ω y razón k.

y $H_{(\Omega,\frac{1}{k})}$ la homotecia de centro Ω y razon $\frac{1}{k}$.

A probar que:

$$H_{(\Omega,k)} \circ H_{(\Omega,\frac{1}{k})} = Ip. \qquad (\beta)$$

Sea p un punto del plano, tal que $H_{(\Omega,\frac{1}{k})}(p) = p' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega p'} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega p}$

y $H_{(\Omega,k)}(p') = p'' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega p''} = k\overrightarrow{\Omega p'}$

Aplicando (β) al punto p tenemos:

$$H_{(\Omega,k)} \circ H_{(\Omega,\frac{1}{k})}(p) = p''$$

$$H_{(\Omega,k)}(p') = p''$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega p''} = k\overrightarrow{\Omega p'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega p''} = k\left(\frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega p}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega p''} = \overrightarrow{\Omega p}$$

$$\Rightarrow p'' = p$$

entonces: $H_{(\Omega,k)} \circ H_{(\Omega,\frac{1}{k})}(p) = p'' = p$

luego $H_{(\Omega,k)} \circ H_{(\Omega,\frac{1}{k})} = Ip$. De aquí que $H_{(\Omega,\frac{1}{k})} = H^{-1}_{(\Omega,k)}$

luego p es preimagen de p" por la homotecia $H_{(\Omega,k)}$

$\therefore$ $H_{(\Omega,k)}$ es sobreyectiva.

De los resultados a) y b) $H_{(\Omega,k)}$ es biyectiva.

2.2.5 REPRESENTACION GEOMETRICA DE LA APLICACION:

Homotética $H_{(\Omega,k)}$ de centro Ω y razón k.

Si deseamos dilatar un triángulo ABC.

Caso 1: $k > 1$

a) El centro Ω es cualquier punto en el plano.

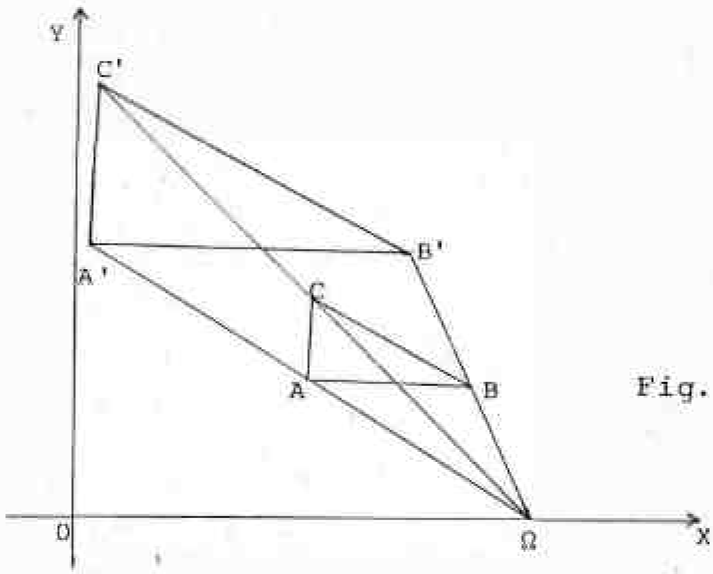


Fig. 2.6

Encontrando las imágenes de la figura anterior

$H_{(\Omega,k)}(A) = A' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A}$

$H_{(\Omega,k)}(B) = B' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega B'} = k\overrightarrow{\Omega B}$

$H_{(\Omega,k)}(C) = C' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega C'} = k\overrightarrow{\Omega C}$

b) Si tomamos el centro en el origen, $\Omega = (0,0)$, $k > 1$.

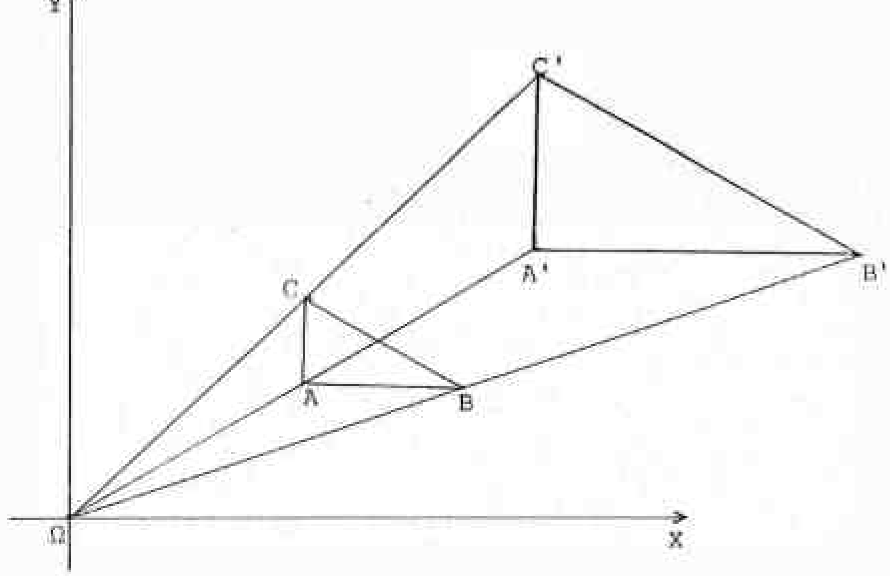


Fig. 2.7

Caso 2: Si $0 < k < 1$.

a) El centro cualquier punto del plano.

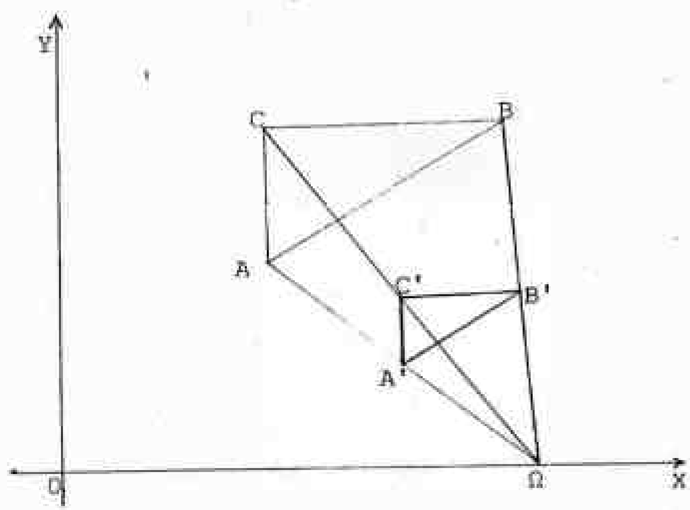


Fig. 2.8

b) El centro es el origen $\Omega = (0,0)$

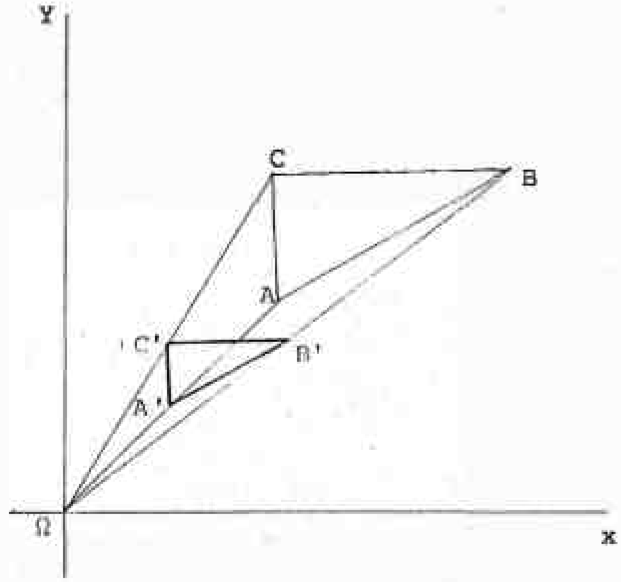


Fig. 2.9

Caso 3: Si $k < 0$

a) El centro cualquier punto del plano.

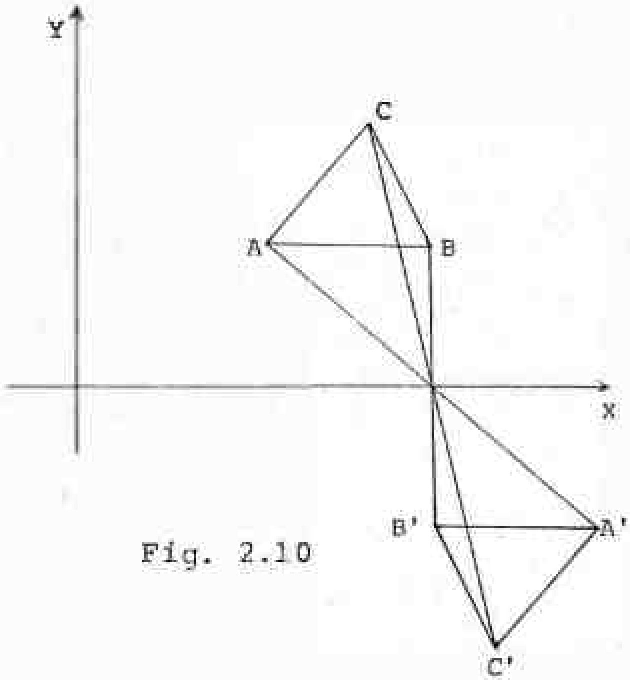


Fig. 2.10

b) El centro está en el orígen $\Omega = (0,0)$

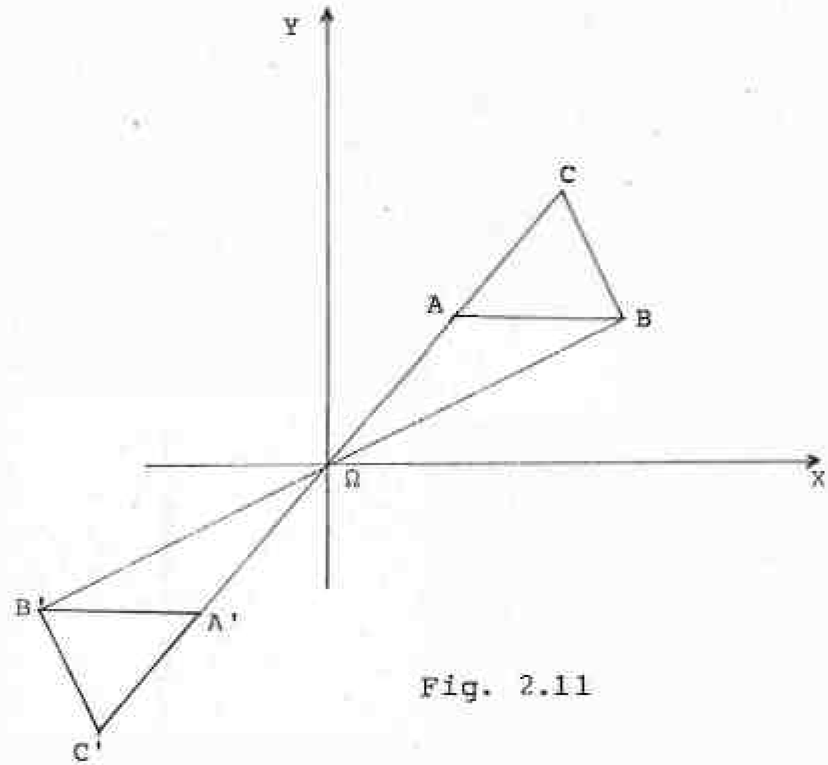


Fig. 2.11

2.2.6 **IMAGEN DE UN BIPUNTO:**

Se considera una homotecia $H_{(\Omega,k)}$ y dos puntos M,N de imágenes M',N' respectivamente.

Se tiene:

$$(1)\quad \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \quad y \quad \overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{\Omega N} \quad (2)$$

restando 1 de 2 tenemos

$$\overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega N} - k\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\overrightarrow{M'N'} = k(\overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M})$$

$$\overrightarrow{M'N'} = k(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega N})$$

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$$

De estos resultados tenemos el siguiente teorema:

2.6.1 **TEOREMA:**

La imagen de un bipunto (M,N) por una homotecia de centro Ω y razón k es el bipunto (M',N') tal que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

En forma geométrica se tiene:

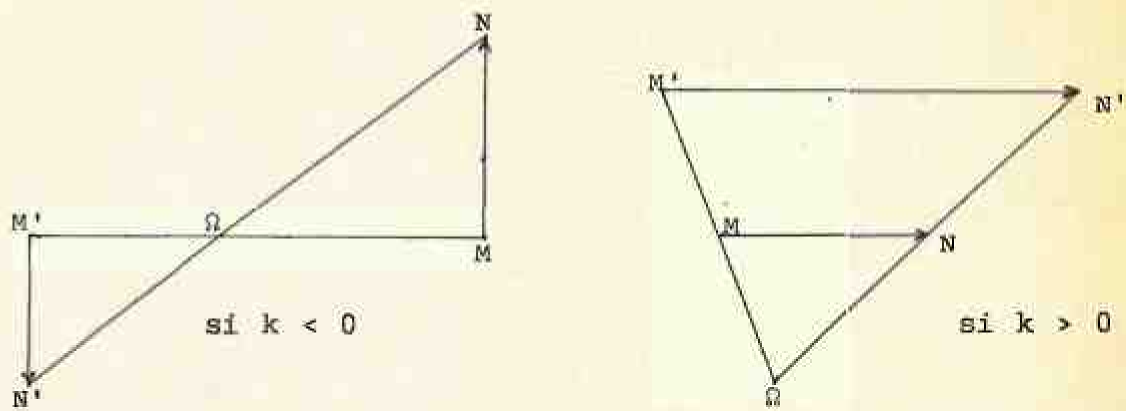


Fig. 2.12

2.6.2 **CONSECUENCIAS:**

a) Si M y N son distintos, los vectores $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{M'N'}$ son distintos del vector nulo y de la misma dirección. Luego las rectas (MN) y (M'N') son paralelas.

b) De la igualdad $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, resulta $\|M'N'\| = |k|\,\|MN\|$.

Este resultado se expresa por el siguiente enunciado: Una homotecia de centro Ω y razón k, multiplica las distancias por $|k|$.

2.2.7 **IMAGEN DE UNA RECTA:**

2.7.1 Sean A,B dos puntos que pertenecen a la recta D y sea M el conjunto de puntos que están en D, es decir, tales que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ donde t describe $\mathbb{R}$.

Si A',B',M' son las imágenes respectivas de A,B,M se tiene:

(1) $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ (2), ya que la imagen de un bipunto es un bipunto formado por las imágenes.

De (1) tenemos $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{A'M'} = k(t\overrightarrow{AB}); \text{ ya que } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{A'M'} = t(k\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{A'M'} = t\,\overrightarrow{A'B'}; \text{ de acuerdo a (2)}$$

luego $\overrightarrow{A'M'} = t\overrightarrow{A'B'}$ lo que significa que cuanto "t" tome todos los reales el punto M describe la recta D y la imagen M' describirá la recta D' que pasa por A',B' cuando t tome todos los reales.

La recta D', es el conjunto de imagenes M' de los puntos $M \in D$. El vector director $\overrightarrow{AB}$ de la recta D es colineal con el vector director $\overrightarrow{A'B'}$ de D' ($\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$) luego las rectas D y D' son paralelas.

2.2.7.2 **TEOREMA:**

La imagen de una recta por una homotecia es una recta D' paralela a D.

Representación Geométrica.

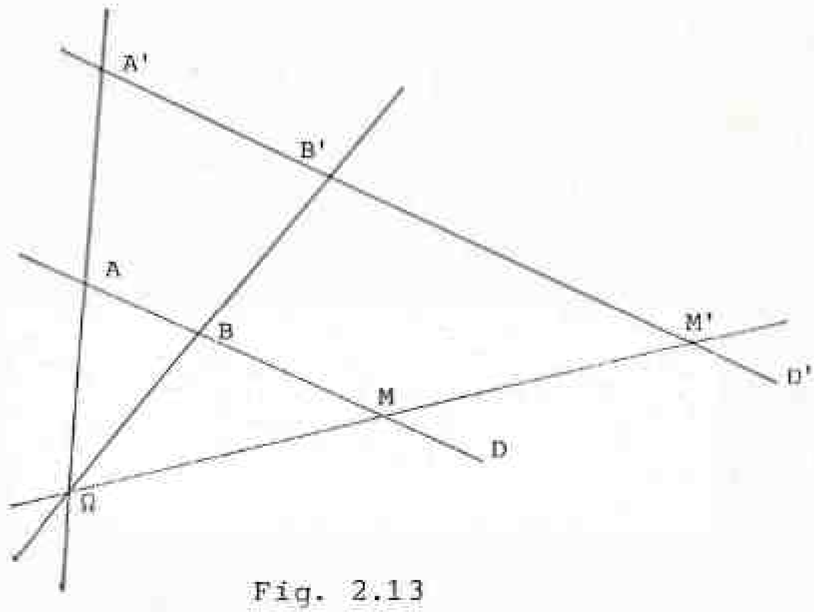


Fig. 2.13

2.2.7.3 **CONSECUENCIAS:**

Sean D y Δ dos rectas, D',Δ' sus imagenes respectivas por una homotecia. Donde D y D' son paralelas, lo mismo Δ y Δ'. Por consiguiente:

1°) Si D∥Δ entonces D'∥ Δ'

2°) Si D ⊥ Δ entonces D' ⊥ Δ'

(*) En este caso se trata de aplicar una homotecia a dos rectas por perpendiculares.

En forma Geométrica se tiene:

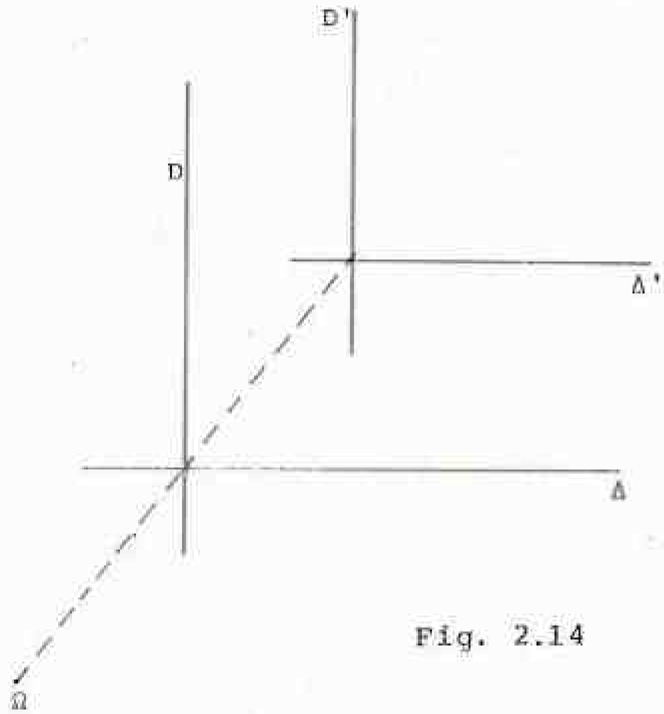


Fig. 2.14

Una homotecia transforma dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, lo mismo sucede si las rectas son perpendiculares, las transforma en rectas perpendicualres.

2.8 IMAGEN DE UN CIRCULO POR UNA HOMOTECIA:

2.8.1 TEOREMA:

La imagen homotética de un círculo "C" de radio r es un círculo de radio $|k|r$.

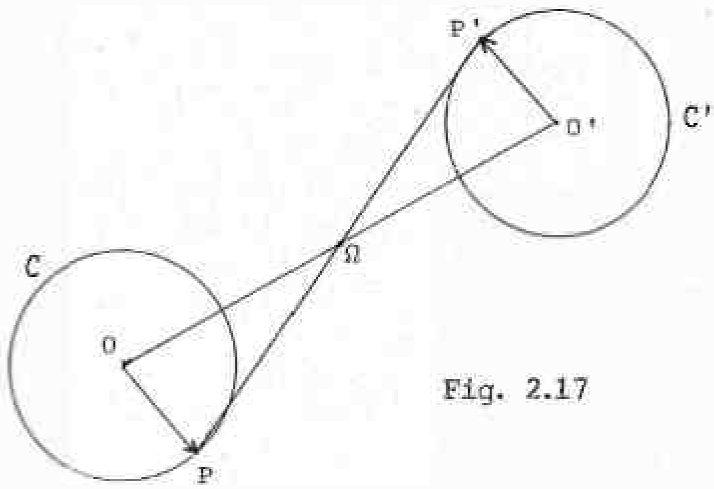


Fig. 2.17

$C = \{p \in P / \|\overrightarrow{Op}\| = r\}$, O, centro del círculo; r = radio de C, $p \in C \iff \|\overrightarrow{Op}\| = r$.

Sea $H_{(\Omega,k)}$ la homotecia tal que:

$H_{(\Omega,k)}(O) = O' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega O'} = k\overrightarrow{\Omega O}$

$H_{(\Omega,k)}(p) = p' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega p'} = k\overrightarrow{\Omega p}$

tenemos que $\overrightarrow{O'p'} = \overrightarrow{O'\Omega} + \overrightarrow{\Omega p'}$ por Chasles

$$= -k\overrightarrow{\Omega O} + k\overrightarrow{\Omega p}$$

$$= k\overrightarrow{O\Omega} + k\overrightarrow{\Omega p}$$

$$= k(\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega p})$$

$$\overrightarrow{O'p'} = k\overrightarrow{Op}$$

Sacando normas tenemos $\|\overrightarrow{O'p'}\| = |k|\,\|\overrightarrow{Op}\|$

$$\|\overrightarrow{O'p'}\| = |k|r.$$

2.9 FORMA GENERAL DE LA APLICACION HOMOTETICA:

2.9.1 Sea $M(x,y)$ un punto cualquiera, $M'(x',y')$ la imagen por h de centro $\Omega = (\alpha,\beta)$ y razón k. Encontrar las coordenadas x',y' en forma general:

SOLUCION:

Por definición tenemos:

$$
\begin{aligned}
H_{(\Omega,k)}(M) = M' &\Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k(\overrightarrow{\Omega M}) \\
&\Rightarrow (x'-\alpha, y'-\beta) = k(x-\alpha, y-\beta) \\
&\Rightarrow (x'-\alpha, y'-\beta) = (k(x-\alpha),\ k(y-\beta)) \\
&\Rightarrow x'-\alpha = k(x-\alpha) \ \wedge \ y'-\beta = k(y-\beta) \\
&\Rightarrow x' = k(x-\alpha)+\alpha \ \wedge \ y' = k(y-\beta)+\beta \\
&\Rightarrow x' = kx - k\alpha+\alpha \ \wedge \ y' = ky - k\beta + \beta \\
&\quad\ x' = kx + (1-k)\alpha \ \wedge \ y' = ky + (1-k)\beta
\end{aligned}
$$

luego:

$$x' = kx + a_1 \ ; \text{ donde } a_1 = (1-k)\alpha$$

$$y' = ky + a_2 \ ; \text{ donde } a_2 = (1-k)\beta$$

2.9.2 FORMA ANALITICA:

Sea $M(x,y)$ en el plano $(0,\vec{i},\vec{j})$ y $M'(x',y')$ su imagen por la homotecia de centro $\Omega = (-2,3)$ y de razón $k = -2$.

Determinar las coordenadas x',y'.

SOLUCION:

Utilizando la definición

$$H_{((-2,3)-2)}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Rightarrow (x'+2,\ y'-3) = k(x+2,\ y-3)$$

$$\Rightarrow (x'+2,\ y'-3) = (k(x+2),\ k(y-3))$$

$$\Rightarrow x'+2 = -2(x+2) \ \wedge\ y'-3 = -2(y-3)$$

$$\Rightarrow x' = -2(x+2)-2 \ \wedge\ y' = -2)y-3) + 3$$

$$\Rightarrow x' = -2x - 4-2 \ \wedge\ y' = -2y + 6 + 3$$

$$\Rightarrow x' = -2x - 6 \ \wedge\ y' = -2y + 9$$

luego tenemos:

$$x' = -2x - 6$$
$$y' = -2y + 9$$

En Forma Geométrica Tenemos:

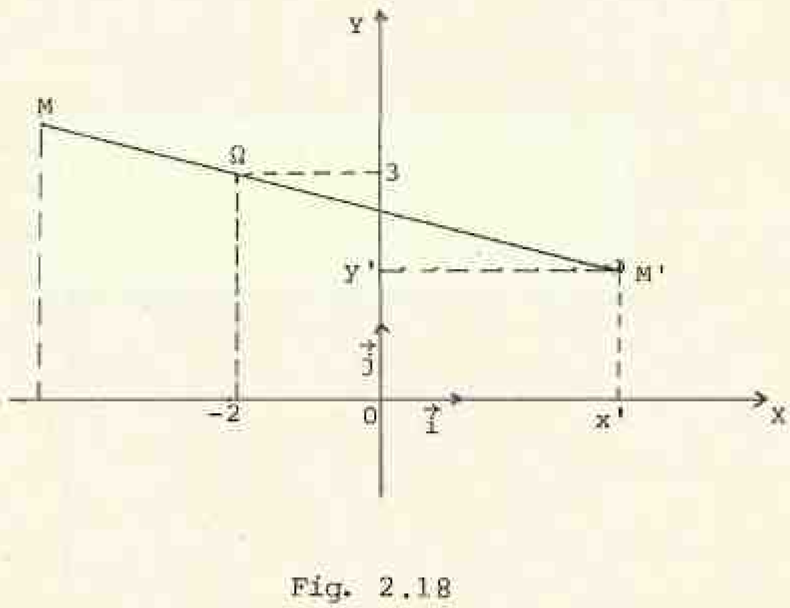


Fig. 2.18

EJEMPLO:

Estudiar la aplicación f: P ⟶ P, que a todo punto M(x,y) asocia el punto M'(x',y') cuyas coordenadas estan dadas en forma analítica.

$$x' = \frac{3}{3}x + 1$$

$$y' = \frac{3}{3}y - 1$$

SOLUCION:

En forma general tenemos:

$$x' = kx + a1;\ \text{donde } a_1 = (1-k)c1$$

$$y' = ky + a_2;\ \text{donde } a_2 = (1-k)c_2$$

entonces $k = \frac{2}{3}$ y

$$(1-k)c1 = 1 \qquad (1)$$

$$(1-k)c_2 = -1 \qquad (2)$$

De (1) $(1-k)c_1 = 1$ De (2) $(1-k)c_2 = -1$

$$(1-\tfrac{2}{3})c_1 = 1 \qquad (1-\tfrac{2}{3})c_2 = -1$$

$$\tfrac{1}{3}c_1 = 1 \qquad \tfrac{1}{3}c_2 = -1$$

$$c_1 = 3 \qquad c_2 = -3$$

luego el centro es (3,-3). y $k = \frac{2}{3}$, es decir $\Omega = (3,-3)$

Ejemplo 2.

a) Definir analíticamente la homotecia h de centro $\Omega(-1,-3)$ y de razón $k = \frac{3}{2}$.

SOLUCION:

$H_{(\Omega,k)}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$; $M(x,y)$ $\wedge$ $M'(x',y')$

$\Rightarrow (x'-c_1, y'-c_2) = k(x-c_1, y-c_2)$; $\Omega = (c_1,c_2)$

$\Rightarrow (x'+1,\ y'+3) = \frac{3}{2}(x+1,\ y+3)$

$\Rightarrow x'+1 = \frac{3}{2}(x+1) \quad \wedge \quad y'+3 = \frac{3}{2}(y+3)$

$\Rightarrow x' = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - 1 \quad \wedge \quad y' = \frac{3}{2}y + \frac{9}{2} - 3$

$\Rightarrow x' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \quad \wedge \quad y' = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}$

b) Deducir de los resultados anteriores un sistema de ecuaciones parametricas de la imagen D' de D. Tomando en cuenta que D' es paralela a D.

SOLUCION:

Sea $M(x,y) \in D$ que tiene coordenadas (2,1).

$\Rightarrow x' = \frac{3}{2}(2) + \frac{1}{2} \quad \wedge \quad y' = \frac{3}{2}(1) + \frac{3}{2}$

$= 3 + \frac{1}{2} \qquad y' = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$

$x' = \frac{7}{2} \qquad y' = 3$

luego $p_1(x',y') = p_1(\frac{7}{2}, 3)$

tomando $M_1(x_1,y_1)$ cuyas coordenadas son $(3,0) \in D$.

$x'' = \frac{3}{2}(3) + \frac{1}{2} \quad \wedge \quad y'' = \frac{3}{2}(0) + \frac{3}{2}$

$x'' = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \quad \wedge \quad y'' = \frac{3}{2}$

$x'' = \frac{10}{2}$

$x'' = 5$

Así $p_2(x'',y'') = p_2(5,\frac{3}{2})$

El vector director de la recta D' es $\overrightarrow{p_1p_2} = (5 - \frac{7}{2}, \frac{3}{2} - 3)$

$$\overrightarrow{p_1p_2} = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$$

tomando $p_1(\frac{7}{2}, 3)$ como punto fijo tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x^* = x_0 + t\alpha = \frac{7}{2} + t(\frac{3}{2}) = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}t \\ y^* = y_0 + t\beta = 3 + t(-\frac{3}{2}) = 3 - \frac{3}{2}t \end{array}\right\} \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

luego el sistema de ecuaciones parametricas de D' imagen de D por h es:

$$\begin{cases} x^* = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}t \\ y^* = 3 - \frac{3}{2}t \end{cases}$$

2.10 COMPOSICION DE DOS HOMOTECIAS

Sea P el plano con respecto al sistema $(0,\vec{i},\vec{j})$. Se considera el punto $\Omega_1(1,1)$ y las homotecias $h_1(\Omega_1,\frac{1}{3})$ y $h_2(0,2)$.

Sea $M_1(x_1,y_1)$ la imagen de un punto $M(x,y)$ por la homotecia h_1, $M_2(x_2,y_2)$ la imagen de M_1 por la homotecia de h_2.

1°) Calcular x_1,y_1 en función de x,y y luego x_2,y_2 en función de x_1,y_1.

SOLUCION:

a) $h_1(\Omega,k)(M) = M_1 \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M_1} = k\overrightarrow{\Omega M}$; $\Omega_1(1,1)$ - $k = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow (x_1-c_1,y_1-c_2) = k(x-c_1,y-c_2)$$

$$\Rightarrow (x_1-1, y_1-1) = \frac{1}{3}(x-1,y-1)$$

$$\Rightarrow (x_1-1, y_1-1) = (\tfrac{1}{3}(x-1),\ \tfrac{1}{3}(y-1))$$

$$\Rightarrow x_1 - 1 = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3} \ \wedge\ y_1 - 1 = \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3} + 1 \ \wedge\ y_1 = \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3} + 1$$

$$\Rightarrow x_1 = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3} \ \wedge\ y_1 = \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}$$

luego tenemos:

$$\star \begin{cases} x_1 = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3} \\ y_1 = \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3} \end{cases}$$

que son las imagenes de $h_1(\Omega_1, \frac{1}{3})$

b) $h_2(\Omega,k)(M_1) = M_2 \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M_2} = k\overrightarrow{\Omega M_1}$; $\Omega = (0,0)$; $k = 2$

$$\Rightarrow (x_2-c_1, y_2-c_2) = k(x_1-x_1, y_1-c_2)$$

$$\Rightarrow (x_2-0, y_2-0) = 2(x_1-0, y_1-0$$

$$\Rightarrow x_2 = 2x_1 \ \wedge\ y_2 = 2y_1$$

luego $\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ y_2 = 2y_1 \end{cases}$ imagen por $h_2(0,2)$.

2°) Expresar x_2, y_2 en función de x,y y demostrar que $h_2 \circ h_1$ $M \longrightarrow M_2$ es una homotecia y determinar el centro Ω y la razón k. Además demostrar que $0, \Omega, \Omega_1$ estan alineados.

SOLUCION:

Tomando $x_1 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ e $y_1 = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$ y sustituir en x_2, y_2 se tiene:

$$x_2 = 2x_1 \quad \wedge \quad y_2 = 2y_1$$

$$= 2(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}) \wedge \quad y_2 = 2(\tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3})$$

$$x_2 = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3} \quad \wedge \quad y_2 = \tfrac{2}{3}y + \tfrac{4}{3}$$

De forma general tenemos $k = \frac{2}{3}$

y $\quad a_1 = (1-k)c_1 \Rightarrow \frac{4}{3} = (1 - \frac{2}{3})c_1 \qquad (1)$

$\quad a_2 = (1-k)c \Rightarrow \frac{4}{3} = (1 - \frac{2}{3})c_2. \qquad (2)$

De (1) tenemos $\frac{4}{3} = (1 - \frac{2}{3})c_1 \quad \wedge \quad$ de (2) $\frac{4}{3} = (1 \; -\frac{2}{3})c_2$

$$\frac{4}{3} = (\frac{1}{3})c_1 \qquad\qquad \frac{4}{3} = \frac{1}{3}\,c_2$$

$$4 = c_1 \qquad\qquad 4 = c_2$$

luego $\Omega(c_1,c_2) = 4,4)$ y $k = \frac{2}{3}$. que son el centro y razón de $h_2 \circ h_1$ respectivamente.

Para demostrar que $0,\Omega,\Omega_1$ estan alineados se prueba que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{\Omega_1\Omega} = t\overrightarrow{0\Omega}$

$\Rightarrow (4-1,\ 4-1) = t(1-0,\ 1-0),\ \Omega_1(1,1)\ \Omega(4,4)$

$\Rightarrow (3,3) = t(1,1)$

$\Rightarrow 3(1,1) = t(1,1)$

luego $t = 3 \quad \wedge \quad 0,\Omega,\Omega_1$ estan alineados.

2.3 PROYECCIONES

2.3.1 **PROYECCIONES EN EL PLANO**

DEFINICION:

Sean D y D' dos rectas en el plano. Se define la aplicación

$\Pi: \begin{matrix} P \longrightarrow P \\ M \rightsquigarrow M' \end{matrix}$ talque a todo punto $M \in D$ le asocia un punto

$M' \in D'$. Según la dirección δ.

A esta aplicación se le llama proyección de la recta D sobre la recta D'; es decir M' es la proyección de M con dirección δ.

Forma Geométrica

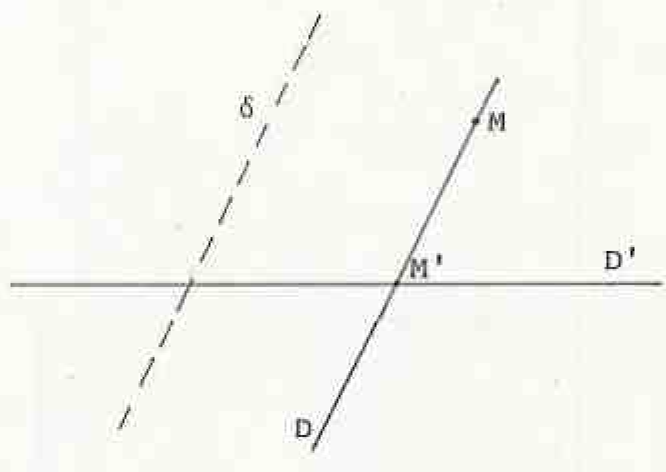


Fig. 2.19

Propiedades:

1°) Sean A y B dos puntos de la recta D y sean A',B' dos puntos que pertenecen a D' sus respectivas proyecciones.

$\forall$ M ε D, y todo M' ε D' se cumple:

a) Si M' es la proyección de M,... $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$

b) Recíprocamente, si $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$, entonces M' es la proyección de M.

El enunciado anterior se trata del teorema de THALES.

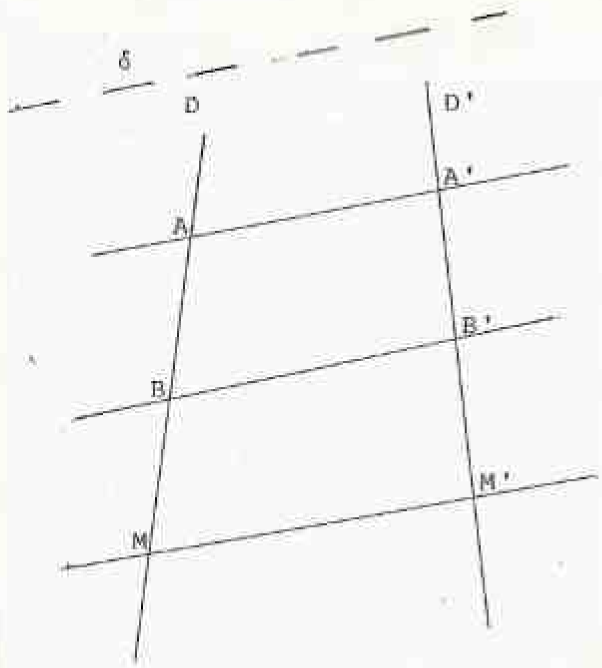


Fig. 2.20

PRUEBA: Para 1) " $\Leftarrow$ "

Primero hay que probar que para todo punto M ε D distintos de A y B con imagen M' distinta de A',B' bajo la aplicación Π, $\overline{MM'}$ es paralela a $\overline{AA'}$ ó BB'.

Por hipótesis tenemos: $\overline{AA'} \,//\, \overline{BB'}$ y que $\overline{AA'}$, $\overline{BB'} \,//\, \delta$.

A probar que $\overline{MM'} // AA'$ ó $\overline{MM'} // BB'$ ya que $MM' // \delta$.
Supongamos que $\overline{MM'}$ no es paralela a $\overline{AA'}$ entonces existe un punto S tal que $S \in AA'$ y $S \in MM'$ esto significa que por S podemos trazar dos paralelas a BB' lo cual es contradictorio ya que por un punto exterior a una recta sólo podemos trazar una y solamente una paralela a dicha recta.

Luego $MM' // AA'$ y por lo tanto a $\overline{BB'}$ ya que por hipótesis $\overline{AA'} // \overline{BB'}$

$\therefore$ M' es la proyección de M.

" $\Rightarrow$ "

Como $\overline{AA'} // \overline{BB'}$, $\overline{AA'} // \overline{MM'}$ - $\overline{BB'} // MM'$
Si tomamos como unidad de medida (m) para los puntos de D es decir: para $\overline{AB}$ y $\overline{BM}$. En forma similar para A', B', M' tenemos a m' así

$$\overline{AB} = r\,m ; \ \overline{BM} = sm \ - \ \overline{A'B'} = rm' ; \ \overline{B'M'} = sm'$$

Como tiene la misma unidad de medida, la razón de los dos segmentos es:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}} = \frac{r}{s} \quad - \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'M'}} = \frac{r}{s}$$

luego $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BM}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'M'}}$

$\therefore$ M' es la proyección de M, bajo la aplicación Π.

El teorema de "THALES" también se puede generalizar para cualquier número de paralelas y para cualquier posición de las rectas ya que D, y D' son transversales.

3.2 PROYECCIONES VECTORIALES

3.2.1 DEFINICION:

Se consideran dos rectas vectoriales distintas V_d y $V\delta$, y dos rectas D y Δ de direcciones "d" y "δ" respectivamente. Las dos rectas son secantes en A.

Para todo vector $\vec{u}$ del plano vectorial V existe uno y sólamente un punto M del plano, tal que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$. Sea M' la proyección de M sobre D según la dirección δ y M" la proyección de M sobre Δ según la dirección d.

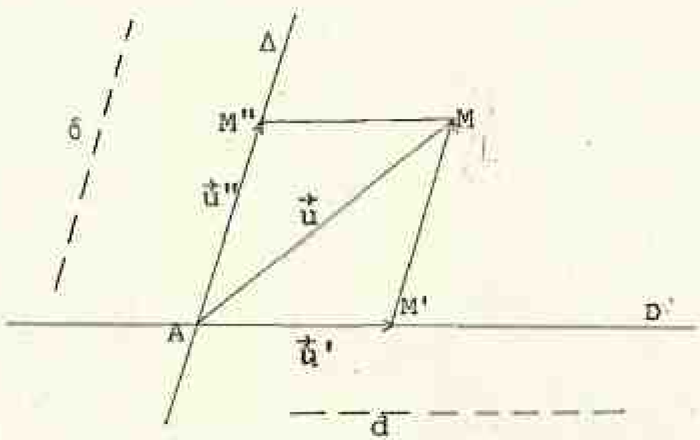


Fig. 2.19

Los vectores $\vec{u}' = \overrightarrow{AM'}$ y $\vec{u}'' = \overrightarrow{AM''}$ pertenecen a las rectas vectoriales V_d y V_δ respectivamente.

Además $\vec{u}' + \vec{u}'' = \overrightarrow{AM''} = \overrightarrow{AM} = \vec{u}$

Demostraremos que, para todo vector $\vec{u}$, existe una única pareja de vectores $(\vec{u}', \vec{u}'')$ verificando las condiciones:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'', \ \vec{u}' \in V_d, \ \vec{u}'' \in V_\delta$$

PRUEBA:

Supongamos que existe otra pareja $(\vec{v}', \vec{v}'')$ que cumple las mismas condiciones:

$$\vec{u} = \vec{v}' + \vec{v}'',\ \vec{v}' \in V_{d},\ \vec{v}'' \in V_{\delta}$$

entonces se tiene: $\vec{u}' + \vec{u}'' = \vec{v}' + \vec{v}''$, es decir $\vec{u}'-\vec{v}' = \vec{v}''-\vec{u}''$. El vector $\vec{u}' - \vec{v}'$, es la diferencia de dos vectores de la recta vectorial V_d, con respecto a V_d. Lo mismo el vector $\vec{v}''-\vec{u}''$ con respecto a V_{δ}.

Como las direcciones de las rectas d y δ son distintas, el único vector común a las rectas vectoriales V_d y V_{δ} es el vector nulo.

Por consiguiente:

$$\vec{u}'-\vec{v}' = \vec{v}'' - \vec{u}'' = \vec{0},\ \text{es decir}\ \vec{u}'=\vec{v}'\ \text{y}\ \vec{u}''=\vec{v}''$$

luego $(\vec{u},\vec{u}'') = (\vec{v}',\vec{v}'')$ $\therefore$ la pareja $(\vec{u}',\vec{u}'')$ es única

TEOREMA:

En el plano vectorial v, dadas dos rectas vectoriales distintas, V_d y V_{δ}, para todo vector u, existe una pareja de vectores $(\vec{u},\vec{u}'')$, y una sola, tal que:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'';\ \text{donde}\ \vec{u}' \in V_d\ \ \text{y}\ \vec{u}'' \in V_{\delta}.$$

Los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{u}''$ son respectivamente las proyecciones de $\vec{u}$ sobre V_d praralelamente a V_{δ} y de u sobre V_{δ} paralelamente a V_d.

En forma general:

La aplicación de v en v que, a todo vector $\vec{u}$ de v, ascocia su proyección $\vec{u}'$ sobre V_d

es la proyección sobre v_d paralelamente a v_{δ}.

3.2.2 PROPIEDADES DE UNA PROYECCION VECTORIAL

1°) Designemos por Π la proyección sobre $v_d//v\delta$ y consideremos dos rectas D y Δ, de direcciones respectivas d y δ, y su punto de intersección A.

1°) Para obtener la proyección $\Pi(\vec{u})$ de un vector $\vec{u}$, se construye el punto M tal que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$, luego el punto M' proyección de M sobre D paralelamente a Δ tal que $\Pi(\vec{u}) = \overrightarrow{AM'}$.

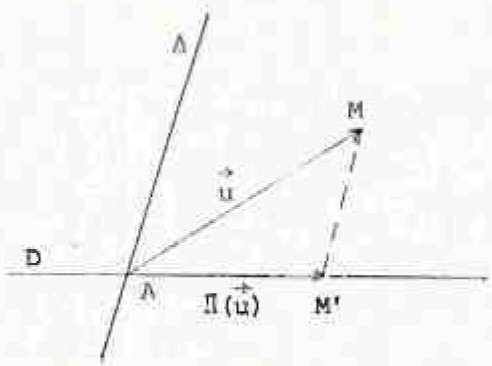


Fig. 2.26

2°) Cuando $\vec{u} \in v_d$, el punto M pertenece a D y M = M' luego $\Pi(\vec{u}) = \vec{u}$. Todo vector $\vec{u}$ de v_d es invariante por Π.

Recíprocamente, si $\vec{u}$ es invariante por Π, entonces $\vec{u} = \Pi(\vec{u})$ y luego $\vec{u} \in v_d$, ya que $\Pi(\vec{u}) \in v_d$.

La recta vectorial v_d es el conjunto de los vectores invariantes por Π.

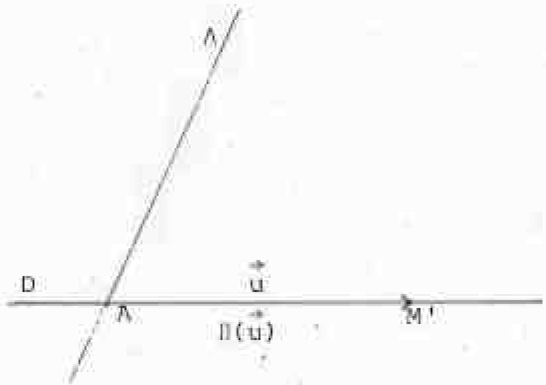


Fig. 2.27

3.3 PROYECCIONES EN EL ESPACIO

3.3.1 DEFINICION:

Sea D una recta, de dirección d, y un plano P, de dirección P, secantes en A. Se define la aplicación proyección.

$$\text{Proy: } P \longrightarrow P$$
$$M \rightsquigarrow M'$$

que es la proyección sobre el plano P según la dirección d y la proyección sobre D según la dirección de P.

3.3.1.1 PROYECCIONES PUNTUALES

Para todo punto M del espacio:

a) La recta D_M de dirección de pasando por M corta a P en un punto M' se llama proyección de M sobre P paralelamente a D, ó según la dirección d. D_M es la proyección del punto M.

b) El plano P_M de dirección P pasa por M corta a D en un punto M" se llama proyección de M sobre D paralelamente a P, o según la dirección P. P_M es el plano proyectado de M.

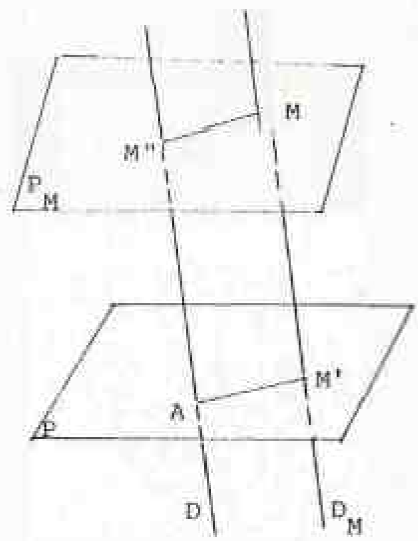


Fig. 2.28

Las aplicaciones f: M ⟶ M' y g: M ⟶ M" son respectivamente las proyecciones sobre P según la dirección d y la proyección sobre D según la dirección P.

El cuadrilatero AM'MM" es un paralelogramo, este resultado es evidente ya que M pertenece a D ó a P. Si M no pertenece ni a "D" ni a P los planos P y P_M son estrictamente paralelos así como las rectas D y D_M. Estas dos rectas determinan un plano que corta a P y P_M segun las dos rectas paralelas (AM') y (M"M).

3.3.1.2 **PROYECCIONES VECTORIALES**

Sea V_d y V_p una recta y un plano vectorial secante, de direcciones d y p respectivamente.

Toda recta D de dirección d y todo plano P de dirección P son secantes en A. Para todo vector $\vec{u}$ del espacio vectorial W, existe un punto M del espacio E, y uno solo tal que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$. Sea M' y M" las proyecciones respectivas del punto M, sobre el plano P paralelamente a D, y sobre la recta D paralelamente a P.

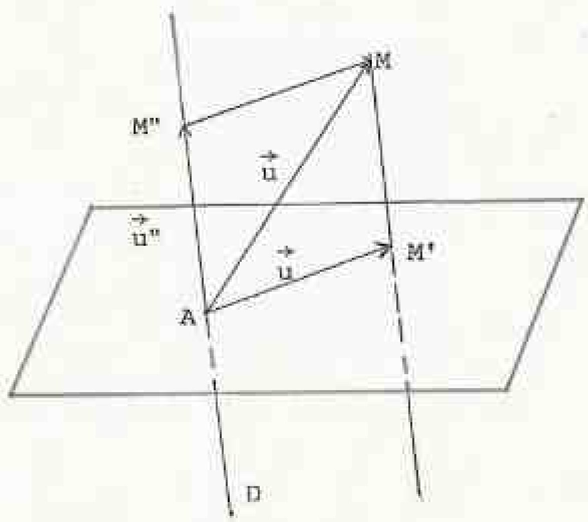


Fig. 2.29

Como AM'MM" es un paralelogramo, se tiene:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AM''}$$

si escribimos $\vec{u}' = \overrightarrow{AM'}$ y $\vec{u}'' = \overrightarrow{AM''}$, se obtiene:

$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$, $\vec{u}' \in V_p$, $\vec{u}'' \in V_d$.

Supongamos que existen otros dos vectores $\vec{v}'$ y $\vec{v}''$ tales que:

$$\vec{u} = \vec{v}' + \vec{v}'' \ , \ \vec{v}' \in V_p \ , \ \vec{v}'' \in V_d$$

Se tiene entonces: $\vec{u}' + \vec{u}'' = \vec{v}' + \vec{v}''$, es decir $\vec{u}' - \vec{v}' = \vec{u}'' - \vec{v}''$

El vector $\vec{u}' - \vec{v}'$, es la diferencia de dos vectores del plano vectorial V_p que pertenece a V_p y lo mismo, el vector $\vec{v}'' - \vec{u}''$

pertenece a V_d.

Como el único vector común a V_p y a V_d es el vector nulo:

$\vec{u}' - \vec{v}' = \vec{v}'' - \vec{u}'' = \vec{0}$, entonces: $\vec{u}' = \vec{v}'$ y $\vec{u}'' = \vec{v}''$

3.3.1.3 **TEOREMA:**

En el espacio vectorial W, se dan una recta y un plano vectorial secantes, V_d y V_p para todo vector $\vec{u}$ de W existe una pareja de vectores $(\vec{u}',\vec{u}'')$, y uno solo, tal que:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' \quad , \vec{u}' \in V_p, \ \vec{u}'' \in V_d$$

Los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{u}''$ son respectivamente las proyecciones de $\vec{u}$ sobre V_p paralelamente a V_d y de $\vec{u}$ sobre V_d paralelamente a V_p.

3.3.1.4 **DEFINICION:**

Se definen las proyecciones vectoriales como sigue:

Π: $\vec{u} \longrightarrow \vec{u}'$ y Π': $\vec{u} \longrightarrow \vec{u}''$ que son las proyecciones sobre V_p $//V_d$ y sobre $V_d//$ V_p.

Estas proyecciones $\Pi(\vec{u})$ y $\Pi'(\vec{u})$ se obtienen apartir de una recta D y de un plano P de direcciones respectivas d y p.

3.3.2 **LINEALIDAD DE LAS PROYECCIONES VECTORIALES**

Estudiaremos la linealidad de las proyecciones vectoriales Π y Π'. 1°) sea $\vec{u},\vec{v} \in W$, donde W es el espacio vectorial. Existe una pareja de vectores $(\vec{u}',\vec{u}'')$, única, tal que:

(1) $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$, $\vec{u}' \in V_p$, $\vec{u}'' \in V_d$

y una pareja de vectores $(\vec{v}', \vec{v}'')$, única tal que:

(2) $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$, $\vec{v}' \in V_p$, $\vec{v}'' \in V_d$.

Como V_p y V_d son estables para la suma de vectores, resulta de (1) y (2):

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u}' + \vec{u}' + \vec{v}' + \vec{v}''$$

$$= (\vec{u}'+\vec{v}') + (\vec{u}''+\vec{v}''), \quad \vec{u}'+\vec{v}' \in V_p, \; \vec{u}''+\vec{v}'' \in V_d,$$

a mostrar que:

$$\Pi(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}' + \vec{v}' \quad y \quad \Pi'(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}'' + \vec{v}''$$

ahora bien: $u' = \Pi(u)$, $\vec{v}' = \Pi(\vec{v})$, $\vec{u}'' = \Pi'(u)$, $\vec{v}'' = \Pi(\vec{v})$.

donde: $\Pi(\vec{u}+\vec{v}) = \Pi(\vec{u})+\Pi(\vec{v})$ y $\Pi'(\vec{u}+\vec{v}) = \Pi'(\vec{u}) + \Pi'(\vec{v})$

2º) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\vec{u}$ de $\mathbb{W}$, existe una pareja de vectores $(\vec{u}', \vec{u}'')$, únicos, tal que:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'', \; \vec{u}' \in V_p \; y \; \vec{u}'' \in V_d. \qquad (1)$$

Como V_d y V_p son estables por el producto por un real, resulta de (1) $\overrightarrow{au} = a\vec{u}' + a\vec{u}''$, $a\vec{u}' \in V_p$, $a\vec{u}'' \in V_d$,

de aquí se muestra que:

$$\Pi(a\vec{u}) = a\vec{u}' \quad y \quad \Pi'(a\vec{u}) = a\vec{u}''.$$

ahora bien: $\vec{u}' = \Pi(\vec{u})$ y $\vec{u}'' = \Pi'(\vec{u})$.

donde : $\Pi(a\vec{u}) = a\Pi(\vec{u})$ y $\Pi'(a\vec{u}) = a\Pi'(\vec{u})$.

3.3.2.1 **TEOREMA:**

En el espacio vectorial $\mathbb{W}$, toda proyección vectorial es una aplicación lineal.

3.4 IMAGEN DE UN BIPUNTO POR UNA PROYECCION F

3.4.1 DEFINICION:

Sea D una recta, P un plano que son secantes en A y que tienen dirección d y p respectivamente.

Definamos f y f' la proyección sobre p paralela a D y la proyección sobre D paralela a p, respectivamente.

La proyección vectorial Π sobre el plano vectorial V_p paralelamente a la recta vectorial V_d, es decir la proyección vectorial asociada a f.

De la misma forma la proyección Π' sobre V_d paralalemente a V_p es decir, la proyección vectorial asociada a f'.

Para todo bipunto (M,N) de imagen (M',N') por f, y de imagen (M",N") por f'.

Se tiene:

$$\Pi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AN'} \quad , \quad \Pi(\overrightarrow{AN}) = \overrightarrow{AN'} \qquad (1)$$

$$y\ \Pi'(\overrightarrow{AM'}) = \overrightarrow{AM''} \quad , \quad \Pi'(\overrightarrow{AN}) = \overrightarrow{AN''} \qquad (2)$$

De (1) se tiene:

$$\Pi(\overrightarrow{AN}) - \Pi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AN'} - \overrightarrow{AM'}$$

$$\Pi(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AN'} - \overrightarrow{AM'} \quad ; \text{ ya que } \Pi \text{ es lineal}$$

$$\Pi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

De (2) se tiene:

$$\Pi'(\overrightarrow{AN}) - \Pi'(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AN''} - \overrightarrow{AM''}$$

$$\Pi'(AN - AM) = \overrightarrow{AN''} + \overrightarrow{M''A} \qquad ; \ \Pi' \text{ es lineal}$$

$$\Pi'(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M''N''}$$

Representación Geométrica

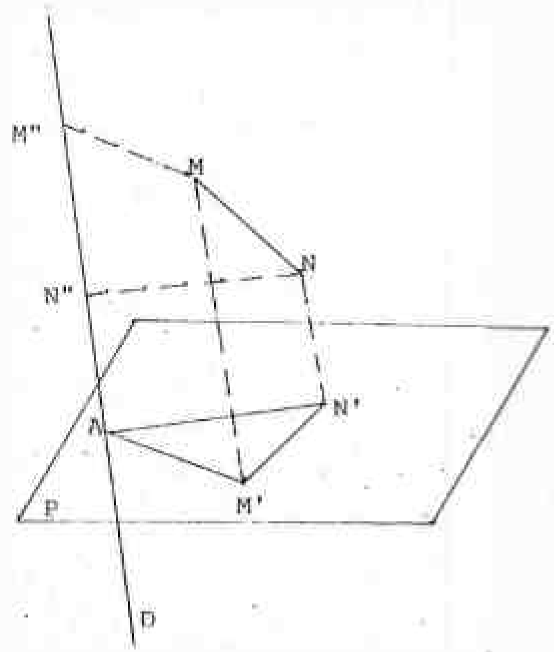


Fig. 2.30

3.4.2 IMAGEN DE TRES PUNTOS ALINEADOS POR LA APLICACION f

Sea f una proyección puntual y sea Π su proyección vectorial asociada.

Se dan tres puntos A,B,C tal qeu $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ los cuales tienen por imagenes A',B',C' por la aplicación f.

Se tiene $\overrightarrow{A'C'} = \Pi(\overrightarrow{AC})$

$$\overrightarrow{A'C'} = \Pi(t.\overrightarrow{AB})$$

y como Π es lineal nos queda

$$\overrightarrow{A'C'} = t\Pi(\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{A'C'} = t\ \overrightarrow{A'B'}$$

El resultado anterior lo entenderemos así:

Tres puntos A,B,C tales que AC = tAB, tienen por imagenes respectivas por una proyección puntual f, tres puntos A',B',C' tales que $\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$.

Representación Geométrica

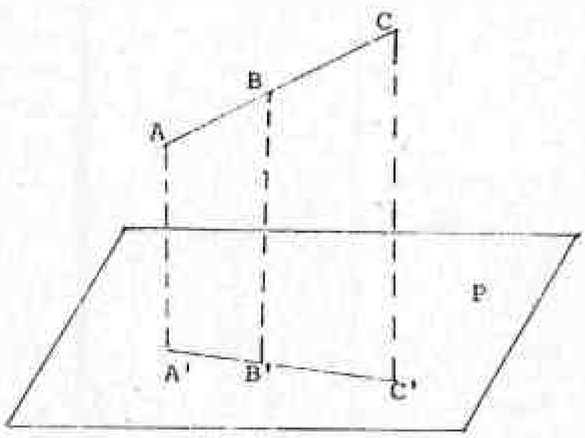


Fig. 2.31

$$\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB} \Rightarrow \Pi(\overrightarrow{AC}) = t\overrightarrow{A'B'}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$$

En forma particular si $t = \frac{1}{2}$, C es el punto medio del bipunto (A,B) y C' el punto medio del bipunto (A',B'), luego podemos decir:

Para todo bipunto (A,B) de imagen (A',B') por una proyección puntual f, la proyección del punto medio de (A,B) es el punto medio de (A',B').

3.4.3 TEOREMA DE THALES EN EL ESPACIO

Sean P,Q,R tres planos estrictamente paralelos que cortan a dos rectas no coplanares D y D' en A,B,C y A',B',C' respectivamente. Demostrar que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

Existen dos formas para demostrar esta relación

1°) usando la proyección puntual

2°) utilizando la proyección vectorial Π asociada a la proyección puntual f.

Forma Geométrica

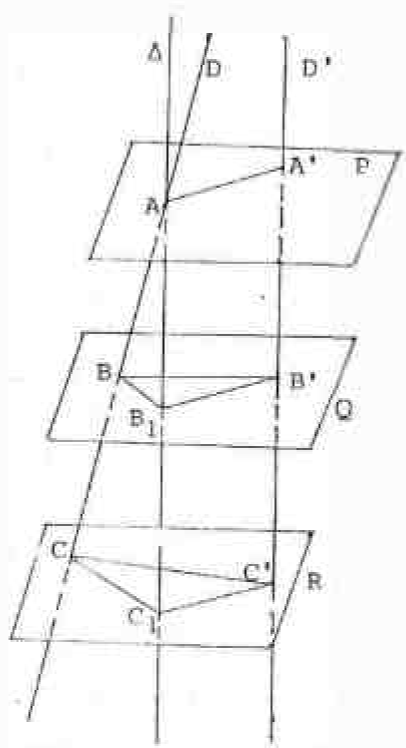


Fig. 2.32

I JEBA:

/ probar que BB_1 y CC_1 son paralelas.

La recta Δ pasa por el punto A corta a Q en B_1 y a R en C_1.Co mo A es común a las rectas Δ y D entonces se puede obtener las ecuaciones siguientes:

$$\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$BB_1 + B_1A + AB = \vec{0} \qquad (2)$$

también se tiene que A,B,C son alineados luego

a) $\overrightarrow{AC} = t\ \overrightarrow{AB}$; de la misma forma A ,$B_1$,$C_1$ así

b) $\overrightarrow{AC_1} = t'\overrightarrow{AB_1}$

Restando (2) de (1) se tiene:

$$(3) \quad \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{B_1A} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

sustituyendo $\overrightarrow{AC} = t\ \overrightarrow{AB}$ ∧ $\overrightarrow{AC_1} = t'\overrightarrow{AB_1}$ en (3)

$$\overrightarrow{CC_1} - t'\overrightarrow{AB_1} + t\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BA} = 0$$

$$(1-t')AB_1 + (t-1)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{C_1C}$$

$$(1-t')(AB+BB_1) + (t-1)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB}_1 + \overrightarrow{C_1C}$$

$$-t'(AB+BB_1) + \cancel{AB}+\cancel{BB}_1+tAB-\cancel{AB} = \cancel{\overrightarrow{BB}}_1 + \overrightarrow{C_1C}$$

$$-t'AB - t'BB_1 + t\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C_1C}$$

$$(t-t')\overrightarrow{AB} - t'BB_1 = \overrightarrow{C_1C}$$

si $t = t' \Rightarrow -t'\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$

$$\Rightarrow BB_1 \,/\!/\, \overrightarrow{CC_1}$$

luego como ACC_1 es un triángulo y como ya se ha demostrado que la proyección es un triángulo cualquiera es // a la base entonces se cumple

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} \qquad (\alpha)$$

A probar que las rectas (AA'), (B_1B') y (C_1C') son paralelas los puntos A,B,C estan alineados así, $\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB}$ entonces por teorema (**) se tiene $P(\overrightarrow{AC}) = P(t\,\overrightarrow{AB})$

$$= t\,P(AB)$$

$$\overrightarrow{A'C'} = t\,\overrightarrow{A'B'} \qquad (\beta)$$

luego las imagenes A',B',C' estan alineadas.

También por hipótesis se tiene:

i) $P \,//\, Q$ entonces $P \cap Q = \phi$ y la recta (AA') que está contenida en P es paralela a Q.

ii) $Q \,//\, R \Rightarrow Q \cap R = \phi$ y la recta (BB') que está en Q es paralela a R.

iii) $P \,//\, R \Rightarrow P \cap R = \phi$ y la recta (AA') que está en P es paralela a R.

luego AA' // BB'

A probar que AA' // CC' ó BB' // CC'

Supongamos que AA' y CC' son secantes entonces las rectas AA' y CC' estarían en el mismo plano es decir CC' estaría en P lo cual es una contradicción ya que CC' está en R luego

AA' // CC' y por lo tanto BB' // CC'

entonces $\frac{\overline{AB_1}}{AC_1} = \frac{A'C'}{\overline{A'C'}} \qquad (\gamma)$

De los resultados (α) y (γ) se concluye

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{AB_1}{\overline{AC_1}} \quad (\theta)$$

Recíproco del Teorema de THALES.

Sean D y D' dos rectas no coplanares, A,B,C tres puntos de D y A',B',C' en D' tales que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'C'}}$

a) Demostrar que las rectas AA' y CC' son no coplanares.

PRUEBA:

Supongamos que AA', CC' son coplanares entonces o son secantes ó paralelas que están contenidas en el mismo plano.

Si son secantes entonces existe un punto común a la recta AA' y CC' lo cual es una contadicción ya que por hipótesis AA' ε P y CC' ε R y ellos son paralelos lugoego AA' // CC'

$\therefore$ AA' y CC' son no coplanares.

b) Demostrar que existe un plano Q, único, que pasa por el punto B y es paralelo a las rectas (AA') y (CC'), Q corta a D' en B". Demostrar el teorema de THALES en el espacio: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{A'B''}{\overline{A'C'}}$ y deducir que B" = B', ya que las rectas (AA'), (BB') y (CC') son paralelas a un mismo plano.

SOLUCION:

A probar que Q es único.

Supongamos que existe el plano Q' que pasa por el punto B y es paralelo a las rectas (AA') y (CC') esto significa que Q' es paralelo a los planos P y R, como Q' corta a D' en B" entonces corta a Δ en B', luego se tiene:

a) Si $Q' \mathbin{/\!/} P \implies Q' \cap P = \phi$

$\implies AA' \mathbin{/\!/} BB''$

b) Si $Q' \mathbin{/\!/} R \implies Q' \cap R = \phi$

$\implies CC' \mathbin{/\!/} BB''$

De a) y b) se tiene que las rectas (AA'), (BB") y (CC') son paralelas a un mismo plano.

Utilizando la expresión (θ) se tiene que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{A'C'}} \quad \text{luego} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

$\implies B'' = B'$ y $B' \in Q$

$\implies B'' \in Q$ luego $Q' = A$ $\therefore$ Q es único.

2.4.1 **SIMETRIAS AXIALES**

4.1.1 **DEFINICION:**

Sea D una recta de dirección "d" y una dirección δ distinta de "d".

A todo punto M del plano, se le puede asociar el punto M_1, proyección de M sobre D según la dirección δ, luego el punto M' tal que $\overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{MM_1}$ es decir tal que M_1 sea el punto medio del bipunto (M,M').

En forma geométrica tenemos:

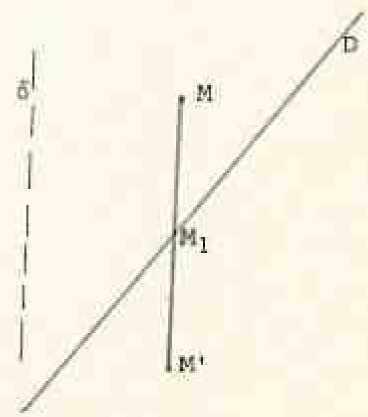


Fig. 2.33

4.1.2 **DEFINICION:**

Se dice que M' es el simétrico de M con respecto a la recta D según la dirección δ.

La aplicación del plano P en el mismo, que a todo punto M hace corresponder el punto M', se llama simetría de eje D y de dirección δ.

Dado un punto M del plano P, su simétrico M' con respecto a D según la dirección δ se caracteriza por las dos propiedades siguientes:

a) M' pertenece a la recta que contiene a M y de dirección δ;
b) El punto medio del bipunto (M,M') pertenece a la recta D.

EJEMPLO:

El plano P está representado por un sistema $(0,\vec{i},\vec{j})$. Sea D la recta de ecuación $3x + y - 3 = 0$ y $\vec{u}$ el vector de coordenadas (2,1).

Definir analíticamente la simetría respecto a D según la dirección δ del vector $\vec{u}$.

SOLUCION:

Sea M(x,y) un punto del plano y M'(x',y') su imagen por S.

El punto M' pertenece a la recta ΔM pasando por M y de vector $\vec{u}$. Existe un real t tal que $\overrightarrow{MM'} = t\vec{u}$, es decir:

$$(x'-x,\ y'-y) = t(2,1)$$

$$\text{donde} \quad x' - x = 2t \wedge y' - y = t$$

$$\text{entonces } x' = x + 2t \wedge y' = y + t.$$

El punto medio M1 del bipunto $(\overrightarrow{M_1M'})$ tiene por coordenadas $M_1\left(\frac{x'+x}{2},\ \frac{y'+y}{2}\right)$.

Luego:

sustituyendo x' y y' en el punto medio tenemos:

$$\frac{x'+x}{2} = \frac{1}{2}(x+2t+x) \quad \wedge \quad \frac{y'+y}{2} = \frac{1}{2}(y + t + y)$$

$$= \frac{1}{2}(2x+2t) \qquad\qquad = \frac{1}{2}(2y + t)$$

$$\frac{x'+x}{2} = \frac{2}{2}(x+t) \qquad\qquad \frac{y'+y}{2} = y + \frac{t}{2}$$

entonces las coordenadas del punto medio M_1 son $M_1(x+t, y+\frac{1}{2}t)$.

Como M_1 pertenece a la recta D: $3x + y - 3 = 0$ se tiene:

$$3(x+t) + (y + \tfrac{1}{2}t) - 3 = 0$$

$$3x + 3t + y + \tfrac{1}{2}t - 3 = 0$$

multiplicando por 2 tenemos:

$$6x + 6t + 2y + t - 6 = 0$$

$$7t + 6x + 2y - 6 = 0$$

$$7t = 6 - 6x - 2y$$

$$t = \tfrac{1}{7}(6 - 6x - 2y).$$

Si sustituimos t en $x' = x + 2t$ y $y' = y + t$

obtenemos:

$$x' = x + 2\left[\tfrac{1}{7}(6 - 6x - 2y)\right] \quad y \quad y' = y + \left[\tfrac{1}{7}(6 - 6x - 2y)\right].$$

$$x' = x + \tfrac{2}{7}(6 - 6x - 2y) \quad y \quad y' = y + \tfrac{1}{7}(6 - 6x - 2y)$$

$$x' = x + \frac{12}{7} - \frac{12}{7}x - \frac{4}{7}y \quad y \quad = y + \frac{6}{7} - \frac{6x}{7} - \frac{2}{7}y$$

$$x' = \frac{-5}{7}x - \frac{4}{7}y + \frac{12}{7} \quad y \quad y' = \frac{5}{7}y - \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$$

$$x' = \tfrac{1}{7}(-5x - 4y + 12) \quad y \quad y' = \tfrac{1}{7}(-6x + 5y + 6)$$

luego:

despejando x' queda:

$$x' = \frac{2ay - (a_2 - 1)x - 2ab}{a^2 + 1}$$

Para encontrar las coordenadas de y' sumamos (1) con (2)

$$y' - y = -\frac{1}{a}(x' - x)$$

$$y' + y = \cancel{2}a\left(\frac{x' + x}{\cancel{2}}\right) + 2b$$

$$2y' = -\frac{1}{a}(x' - x) + a(x' + x) + 2b$$

multiplicando por "a" tenemos

$$2ay' = x - x' + a_2x' + a_2x + 2ab$$

$$2ay' = (a_2 - 1)x' + (a_2 + 1)x + 2ab$$

Despejando y' resulta

$$y' = \frac{(a_2 - 1)x' + (a_2 + 1)x + 2ab}{2a}, \text{ donde } a \neq 0$$

Luego tenemos las coordenadas de M'(x',y').

$$x' = \frac{2ay - (a^2 - 1)x - 2ab}{a^2 + 1}$$

$$y' = \frac{(a^2 + 1)x + (a^2 - 1)x' + 2ab}{2a}$$

Ejemplo 1

Sea D: y = x la recta que es el eje de simetría, encontrar las coordenadas del punto M'(x',y').

SOLUCION:

Como y = x es la ecuación de la recta de la forma y = ax + b; donde a = 1, b = 0 las coordenadas de $M'(x',y')$ son:

$$M'\left(\frac{1}{7}(-5x - 4y + 12),\ \frac{1}{7}(-6x + 5y + 6)\right)$$

Representación Geométrica del Problema.

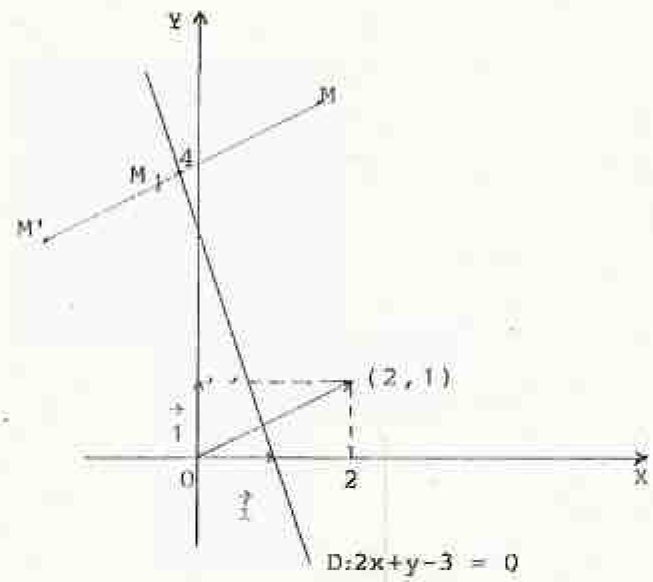


Fig. 2.34

4.2 SIMETRIAS AXIALES ORTOGONALES:

4.2.1 DEFINICION:

Las simetrías ortogonales son un caso particular de las simetrías axiales con dirección δ. Es decir:

si la dirección δ es ortogonal a "d", la simetría de eje D y de dirección δ es la simetría ortogonal de eje D.

Representación Geométrica

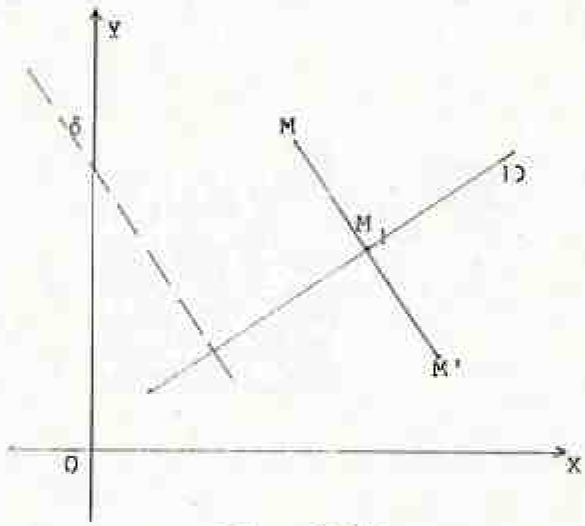


Fig. 2.35

Propiedades:

i) D es el eje de simetría

ii) MM' $\perp$ D

iii) El punto medio M_1 ε D, y al segmento MM'

4.2.2 FORMA ANALITICA:

Supongamos que la recta D tiene como ecuación D: $y = ax+b$, $a \neq 0$

Sea $M'(x',y')$ la imagen de $M(x,y)$ por ia simetría ortogonal El vector $\overrightarrow{MM'} = (x'-x, y'-y)$ es perpendicular a V_d, donde V_d es el vector director de la recta D.

Como la pendiente de la recta D es "a", donde $a \neq 0$, entonces la pendiente del segmento MM' es $m = -\frac{1}{a}$ ya que D $\perp$ MM' también se tiene que la pendiente de MM' se obtiene a partir de las coordenadas de los puntos M y M'

$$m = \frac{y' - y}{x' - x}$$

igualando las pendientes $m = \frac{y' - y}{x' - x}$ y $m = -\frac{1}{a}$

tenemos:

$$\frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{1}{a} \qquad (1)$$

efectuando operaciones queda:

$$a(y' - y) = -1(x' - x)$$

$$a(y' - y) = x - x'$$

y $ay' - ay - x + x' = 0$ es la ecuación del segmento MM'.

Como

$P_m = (\frac{x' + x}{2}, \frac{y' + y}{2})$ pertenece a D.

entonces lo sustituimos en $y = ax + b$ y resulta la ecuación

$$\frac{y' + y}{2} = a(\frac{x' + x}{2}) + b \qquad (2)$$

luego tenemos dos ecuaciones (1) y (2)

(1) $ay' - ay - x + x' = 0$

(2) $\frac{y' + y}{2} = a(\frac{x' + x}{2}) + b.$

$y' + y = a(x' + x) + 2b$ (multiplicando por 2 ambos miembros).

Restando (1) de (2)

$$y' + y = a(x' + x) + 2b$$

$$-y' + y = \frac{1}{a}(x' - x)$$

$$2y = a(x' + x) + 2b + \frac{1}{a}(x' - x)$$

multiplicando por "a" obtenemos:

$$2ay = a^2(x' + x) + 2ab + (x' - x)$$

$$2ay = a^2x' + a^2x + x' - x + 2ab$$

$$2ay = (a^2 + 1)x' + (a^2 - 1)x + 2ab$$

despejando x' queda:

$$x' = \frac{2ay - (a^2 - 1)x - 2ab}{a^2 + 1}$$

Para encontrar las coordenadas de y' sumamos (1) con (2)

$$y' - y = -\frac{1}{a}(x' - x)$$

$$y' + y = \cancel{2}a\left(\frac{x' + x}{\cancel{2}}\right) + 2b$$

$$2y' = -\frac{1}{a}(x' - x) + a(x' + x) + 2b$$

multiplicando por "a" tenemos

$$2ay' = x - x' + a_2x' + a_2x + 2ab$$

$$2ay' = (a^2 - 1)x' + (a^2 + 1)x + 2ab$$

Despejando y' resulta

$$y' = \frac{(a_2 - 1)x' + (a_2 + 1)x + 2ab}{2a}, \text{ donde } a \neq 0$$

Luego tenemos las coordenadas de M'(x',y').

$$x' = \frac{2ay - (a^2 - 1)x - 2ab}{a^2 + 1}$$

$$y' = \frac{(a^2 + 1)x + (a^2 - 1)x' + 2ab}{2a}$$

Ejemplo 1

Sea D: y = x la recta que es el eje de simetría, encontrar las coordenadas del punto M'(x',y').

SOLUCION:

Como y = x es la ecuación de la recta de la forma y = a x + b; donde a = 1, b = 0 entonces:

$$x' = \frac{2ay - (a^2 - 1)x - 2ab}{a^2 + 1}$$

$$= \frac{2(1)y - (1 - 1)x - 2(1)(0)}{1 + 1}$$

$$= \frac{2y - (0)x - 2(0)}{2}$$

$$x' = \frac{2y}{2} = y \qquad (\alpha)$$

obteniendo y'

$$y' = \frac{(a^2 + 1)x + (a^2 - 1)x' + 2ab}{2a}$$

$$= \frac{(1 + 1)x + (1 - 1)x' + 2(1)(0)}{2}$$

$$= \frac{2x + \overset{0}{\cancel{(0)}}x' + 2\overset{0}{\cancel{(0)}}}{2}$$

$$y' = \frac{2x}{2} = x \qquad (\beta)$$

luego de los resultados (α) y (β) tenemos que las coordenadas de M' son $x' = y$ $\wedge$ $y' = x$.

$p'(x',y') = (y,x)$ que es la imagen de p por la simetría ortogonal de eje $y = x$.

Representación Geométrica del Ejemplo

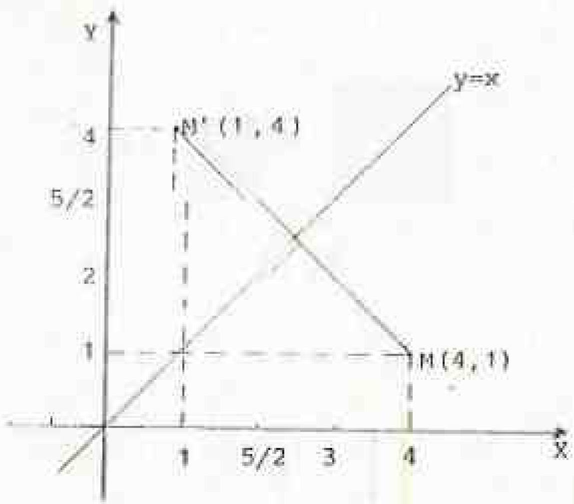


Fig. 2.36

En forma particular si tomamos el punto M(4,1) las coordenadas del punto $M'(x',y') = (1,4)$; así, $x' = 1 \wedge y' = 4$ el punto medio es:

$$M_1 = (\frac{1+4}{2}, \frac{4+1}{2})$$

$$M_1 = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$$

Ejemplo 2

Sea D: $y = 0$ el eje de simetría, donde de acuerdo a la ecuación $y = ax + b$ tenemos que $a = 0$ y $b = 0$ luego las coordenadas x', y' son :

$$x' = \frac{2ay - (a^2 - 1)x - 2ab}{a^2 + 1}$$

$$x' = \frac{2(\overset{0}{\cancel{0}})y - (0-1)x - 2(\cancel{0})\overset{0}{(0)}}{0 + 1}$$

$$x' = \frac{-(-x)}{1} = x$$

Para encontrar y' tenemos la forma analítica.

$$y' = \frac{(a^2 + 1)x + (a^2 - 1)x' + 2ab}{2a}, \quad a \neq 0$$

Pero como $a = 0$ entonces no la podemos obtener de esta forma. Utilizaremos el punto medio ya éste pertenece a la recta que sirve de eje en este caso $y = 0$.

Como todos los puntos tienen como segunda coordenada $y = 0$ entonces $M_1(\frac{x' + x}{2}, \frac{y' + y}{2})$ tiene como coordenada $\frac{y' + y}{2} = 0$

donde $y' + y = 0$

luego $y' = -y$

entonces el punto $M'(x',y') = (x, -y)$.

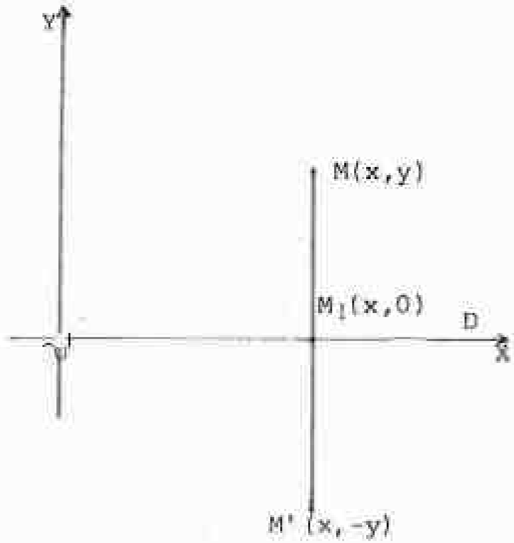


Fig. 2.37

4.3 **SIMETRIAS CENTRALES:**

2.4.3.1 Sea S_c: $P \longrightarrow P$

$$(x,y) \rightsquigarrow (x',y')$$

Se llama simetría central a la simetría que se hace con respecto a un punto, y que a todo punto M(x,y) le asigna un punto M'(x',y') tal que:

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM'}$$

Donde c es el centro de la aplicación S_c.

En forma geométrica tenemos:

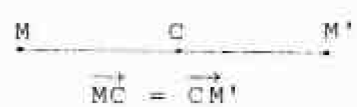


Fig. 2.38

2.4.3.2 **FORMA ANALITICA DE LA SIMETRIA CENTRAL:**

Estudiaremos la forma que tienen las coordenadas p'(x',y') que es la imagen de p(x,y) por la aplicación "S_c".

Sea $c = (c_1,c_2)$ el punto simetrico, entonces:

$$\overrightarrow{cp} = -\overrightarrow{cp'}$$

tomando en cuenta las coordenadas resulta:

$\overrightarrow{cp} = (x - c_1,\ y - c_2)$ y $cp' = (x' - c_1,\ y' - c_2)$

luego

$$(x-c_1,\ y-c_2) = -(x'-c_1,\ y'-c_2)$$

$$(x-c_1,\ y-c_2) = (c_1-x',\ c_2-y')$$

Por igualdad de vectores tenemos:

$$x-c_1 = c_1-x' \quad y \quad y-c_2 = c_2-y'$$

donde

$$x' = c_1 + c_1 - x \quad \wedge \quad y' = c_2 + c_2 - y$$

$$x' = 2c_1 - x \quad \wedge \quad y' = 2c_2 - y$$

Representación Geométrica

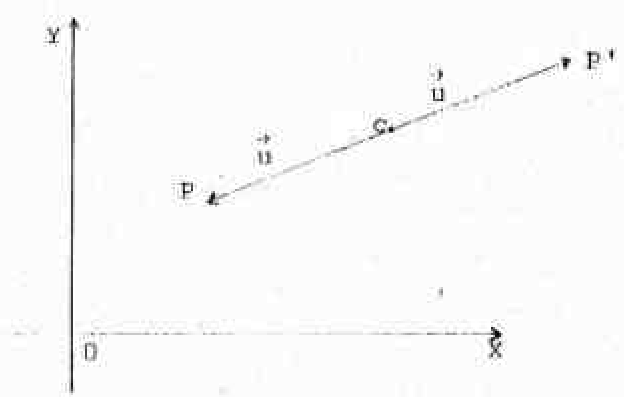


Fig. 2.39

$\therefore$ En forma general las coordenadas de la aplicación "S_c" son:

$$x' = 2c_1 - x \quad \wedge \quad y' = 2c_2 - y \qquad (**)$$

Un caso particular es si c = (0,0) los resultados (**) quedan:

$$x' = -x \quad \wedge \quad y' = -y$$

es decir:

$$S_{(0,0)} : P \longrightarrow P$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (-x,-y)$$

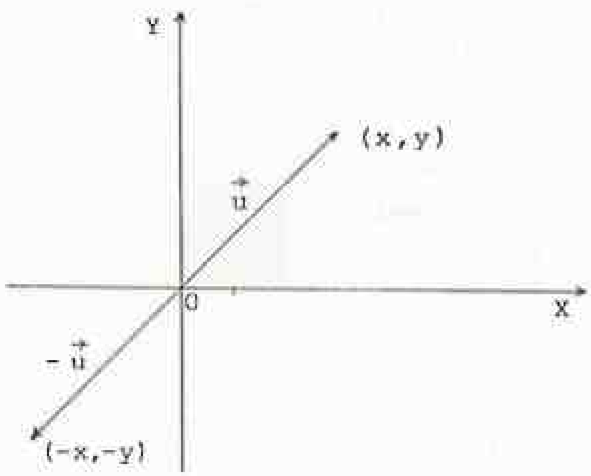


Fig. 2.40

4.4 **PROPIEDADES DE UNA SIMETRIA AXIAL**

2.4.4.1 Sea S la simetría de eje D y de dirección δ.

1°) Para todo punto M de imagen M' por S, la imagen de M' es M. Por consiguiente $S_0S = I_{dp}$.

Se expresa esta propiedad diciendo que la simetría axial "S" es involutiva.

Forma Geométrica

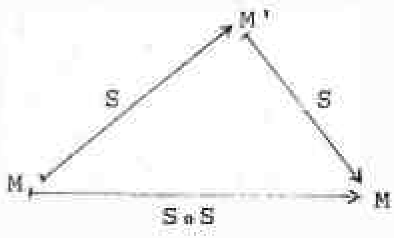


Fig. 2.41

2°) Sea M' un punto cualquiera del plano. Para todo antecedente M de M' se tiene:

$$S(M) = M'$$

donde $S[S(M)] = S(M')$ así, $M = S(M')$.

Además el punto $S(M')$ es un antecedente de M' pueS $S[S(M')] = M'$

Todo punto M' posee un antecedente único, es decir $S(M')$. Resulta que la simetría S es biyectiva. Su biyección recíproca $S^{-1} = S$. De lo anterior Se puede decir:

Toda simetría axial es biyectiva e igual a su biyección recíproca.

3°) Para todo punto M de imagen M', el punto medio de (M,M') pertenece al eje "D" de S. Si M es invariante el punto medio de (M,M') es M; M pertenece en tal caso a D.

Recíprocamente, es inmediato que todo punto de D es invariante por S. En resumen se puede decir:

El conjunto de puntos invariantes por una simetría axial es el eje de esa simetría.

2.4.5 SIMETRIA VECTORIAL ASOCIADA A UNA SIMETRIA AXIAL

2.4.5.1 Sea S la simetría de eje D y de dirección δ, y A un punto que pertenece a D.

Se define la simetría vectorial asociada a S.

$$S: V \longrightarrow V$$
$$\vec{u} \rightsquigarrow \sigma(\vec{u}) = \vec{u}'$$

Que significa que a todo vector $\vec{u}$ del plano vectorial V asocía al punto M tal que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$, el punto M', imagen de M por la simetría S, y el vector $\vec{u}' = \overrightarrow{AM}'$

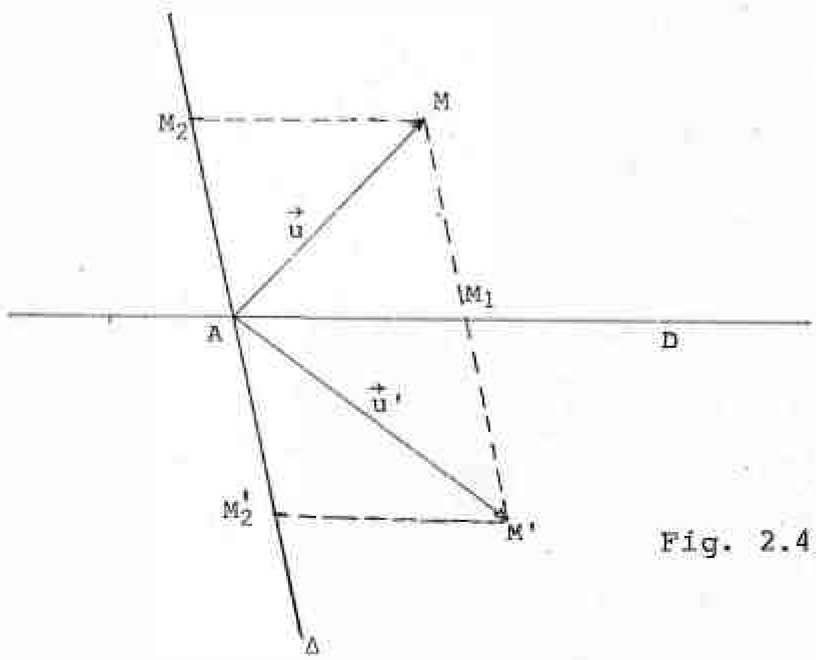


Fig. 2.42

Estudiaremos la aplicación de $\vec{V}$ en V, denotada por σ, que a todo vector $\vec{u}$ hace corresponder el vector $\vec{u'}$ definido arriba

Consideremos la recta Δ, de dirección δ que pasa por "A" y los puntos M_1 y M_2, proyecciones respectivas de M sobre D paralelamente a Δ y de M sobre Δ paralelamente a D.

Designemos por V_d y V_δ las rectas vectoriales donde las direcciones d y δ son de D y Δ, y por π_1 y π_2 las proyecciones vectoriales sobre V_d paralelamente a V_δ y sobre V_δ paralela a V_d.

Se tiene:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM'} &= \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1M'}\\ &= \overrightarrow{AM_1} - \overrightarrow{M_1M}\\ &= \overrightarrow{AM_1} - \overrightarrow{AM_2}\end{aligned}$$

Ahora bien: $\overrightarrow{AM_1} = \pi_1(\overrightarrow{AM})$ y $\overrightarrow{AM_2} = \pi_2(\overrightarrow{AM})$

De donde:

$$\overrightarrow{AM'} = \pi_1(\overrightarrow{AM}) - \pi_2(\overrightarrow{AM}),$$

es decir:

$$\sigma(\vec{u}) = \pi_1(\vec{u}) - \pi_2(\vec{u}).$$

Esta igualdad muestra que la aplicación σ puede ser definida unicamente a partir de las rectas vectoriales V_d y V_δ:

La imagen por σ de todo vector $\vec{u}$ se da por:

$$\sigma(\vec{u}) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2,$$

Donde $\vec{u}_1$ es la proyección de $\vec{u}$ sobre V_d paralelamente a V_δ y $\vec{u}_2$ la proyección de $\vec{u}$ sobre V_δ paralelamente a V_d.

Forma Geométrica

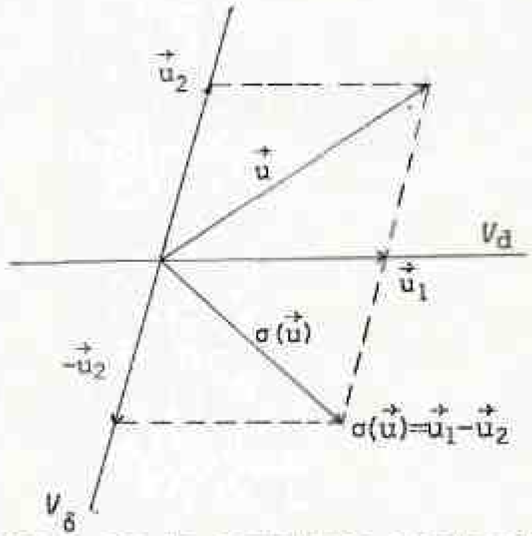


Fig. 2.43

Se dice que σ es la simetría vectorial con respecto a V_d paralelamente a V_δ: Esta simetría vectorial se dice asociada a la simetría S.

Cuando V_δ es la recta vectorial ortogonal a V_d se dice que σ es la simetría vectorial ortogonal con respecto a V_d.

En Forma Geométrica se Tiene:

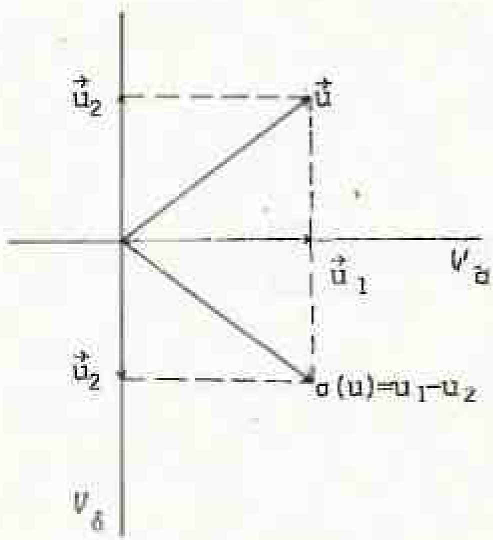


Fig. 2.44

2.4.5.2 **Linealidad De la Simetría Vectorial σ**

Cualesquiera que sean los vectores $\vec{u},\vec{v}$, se tiene:

A probar que:

a) $\sigma(\vec{u}+\vec{v}) = \sigma(\vec{u}) + \sigma(\vec{v})$, para todo $\vec{u},\vec{v}$

d) $\sigma(a\vec{u}) = a\sigma(\vec{u})$; para todo vector $\vec{u}$ y para todo $a \in \mathbb{R}$

SOLUCION:

a) tenemos $\sigma(\vec{u}+\vec{v}) = \pi_1(\vec{u}+\vec{v}) - \pi_2(\vec{u}+\vec{v})$ por def. de σ

$= \pi_1(\vec{u})+\pi_1(\vec{v}) - \pi_2(\vec{u}) - \pi_2(\vec{v})$; ya que π_1,π_2 son lineales

$= \pi_1(\vec{u})-\pi_2(\vec{u})+\pi_1(\vec{v})-\pi_2(\vec{v})$, asociando

$= \sigma(\vec{u}) + \sigma(\vec{v})$.

b) Usando la definición de σ.

$\sigma(a\vec{u}) = \pi_1(a\vec{u}) - \pi_2(a\vec{u})$ por def. de σ

$= a\pi_1(\vec{u}) - a\pi_2(\vec{u})$; ya que π_1,π_2 son lineales

$= a[\pi_1(\vec{u}) - \pi_2(\vec{u})]$; sacando factor común

$= a\sigma(\vec{u})$; por def. de σ

De los resultados a) y b) se concluye que la aplicación σ es lineal.

Consecuencias:

Para todo bipunto (M,N) de imagen (M',N') por la simetría S, se tiene:

Definiendo

$$R_{(0,\theta)}: P \longrightarrow P$$

$$M \rightsquigarrow M', \; |\overrightarrow{OM'}| = |\overrightarrow{OM}| \;\wedge\; (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM''}) = \theta$$

$$R_{(0,-\theta)}: P \longrightarrow P$$

$$M' \rightsquigarrow M'', \; |\overrightarrow{OM''}| = |\overrightarrow{OM'}|, \;\; (\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM''}) = -\theta$$

efectuando la compoción:

$$R_{(0,\theta)} \circ R_{(0,-\theta)}(M) = Idp.$$

por la propiedad ii) se tiene:

$$R_{(0,\theta)}\; R_{(0,-\theta)} = R_{(0,\theta-\theta)}$$

$$= R_{(0,0°)}$$

$$R_{(0,\theta)} \circ R_{(0,-\theta)} = Idp$$

así $\quad R_{(0,-\theta)} = R^{-1}_{(0,\theta)}$

Forma Geométrica

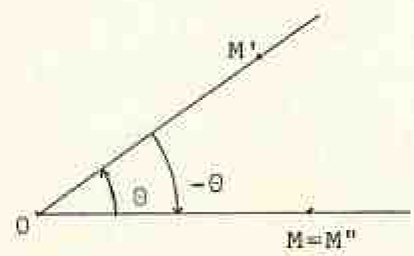


Fig. 2.49

$|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM''}| \;\wedge\; (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM''}) = \beta$

Por Chasles se tiene:

De los resultados anteriores se tiene:

$$|\overrightarrow{OM}'| = \|\overrightarrow{OM}\| \wedge (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM}') = \theta_1$$

$$\|\overrightarrow{OM}''\| = \|\overrightarrow{OM}'\| \wedge (\overrightarrow{OM}',\overrightarrow{OM}'') = \theta_2$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{OM}''\| = \|\overrightarrow{OM}\| \quad \wedge \quad (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM}'') = \beta$$

utilizando la relación de Chasles en la medida de ángulos

$$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM}'') = (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM}') + (\overrightarrow{OM}',\overrightarrow{UM}'')$$
$$= \theta_1 + \theta_2$$

luego $\beta = \theta_1 + \theta_2$

y como $|\overrightarrow{OM}''| = |\overrightarrow{OM}\| \quad \wedge \quad (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM}'') = \theta_1 + \theta_2$

entonces se tiene la aplicación $R_{(0,\theta_2+\theta_1)}(M) = M''$

luego:

$$R_{(0,\theta_2)} \circ R_{(0,\theta_1)} = R_{(0,\theta_1+\theta_2)}$$

Forma Geométrica.

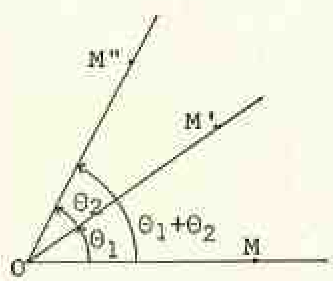


Fig. 2.48

iii) Para esta propiedad basta probar que:

$$R_{(0,\theta)} \circ R_{(0,-\theta)} = \text{Idp.}$$

$$R_{(0,\theta)} : P \longrightarrow P$$

$$p \rightsquigarrow p' \text{ tal que } |\overrightarrow{op}| = \|\overrightarrow{op}'\| \ \wedge \ (\overrightarrow{op},\overrightarrow{op}') = \theta$$

cuyo centro es el origen "0" y θ la medida del ángulo.

PROPIEDADES:

i) $R_{(0,0°)} = I_p$

ii) $R_{(0,\theta_1)} \circ R_{(0,\theta_2)} = R_{(0,\theta_1+\theta_2)}$

iii) $R^{-1}{}_{(0,\theta)} = R_{(0,-\theta)}$

PRUEBA:

i) $R_{(0,0°)} : P \longrightarrow P$

$$M \rightsquigarrow M' \text{ tal que } |\overrightarrow{0M}'| = |\overrightarrow{0M}\|, \quad (\overrightarrow{0M},\overrightarrow{0M}') = 0$$

Si $\theta = 0$ entonces $\overrightarrow{0M}' = \alpha \ \overrightarrow{0M}$

$$\|\overrightarrow{0M}'| = |\alpha| \, \|\overrightarrow{0M}\|$$

$$\|\overrightarrow{0M}'\| = \alpha\|\overrightarrow{0M}\|$$

como $|\overrightarrow{0M}'| = |\overrightarrow{0M}|$, entonces $\alpha = 1$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{0M}' = \overrightarrow{0M}$$

$$\Rightarrow M' = M$$

luego la aplicación $R_{(0,0°)}$ es la identidad.

ii) Sea $R_{(0,\theta_1)} : P \longrightarrow P$

$$M \rightsquigarrow M' \text{ tal que } |\overrightarrow{0M}'| = |\overrightarrow{0M}\|, \ (\overrightarrow{0M},\overrightarrow{0M}') = \theta_1$$

$$R_{(0,\theta_2)} : P \longrightarrow P$$

$$M' \rightsquigarrow M'' \text{ tal que } |\overrightarrow{0M}'| = |\overrightarrow{0M}''|, \ (\overrightarrow{0M}',\overrightarrow{0M}'') = \theta_2$$

2.5 ROTACIONES

2.5.1 DEFINICION:

Se llama rotación de centro A y ángulo θ a la aplicación de P en P que deja invariante al punto A y que a todo punto $M \neq A$, asocia el punto M', definido por

$$\|\overrightarrow{AM}\| = |\overrightarrow{AM'}| \quad \wedge \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta$$

Es decir:

$$R_{(A,\theta)} : P \longrightarrow P$$
$$M \rightsquigarrow M' = R_{(A,\theta)}(M)$$

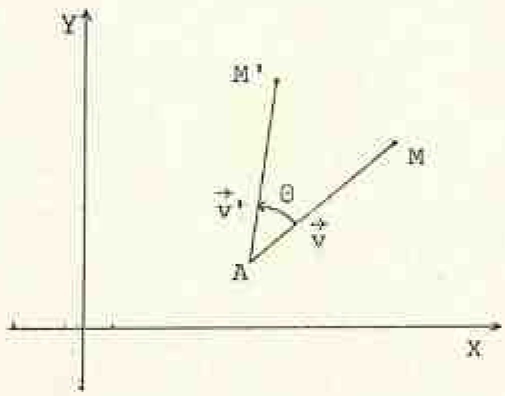


Fig. 2.47

Si el plano P es $\mathbb{R}^2$ en el sistema ortonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$ se tiene:

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\vec{v} \rightsquigarrow R\theta(\vec{v}) = \vec{w} \text{ tal que } \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| \quad \wedge \quad (\vec{v},\vec{w}) = \theta$$

2.5.2 ROTACION PUNTUAL

5.2.1 Se define como rotación puntual a la aplicación

Una recta está definida por dos puntos A y B, estudiaremos sus imagenes por S.

Para todo bipunto M de la recta (AB), existe un real t tal que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. (**)

Sean A',B',M' las imagenes de los puntos A,B,M; se tiene:

$$\overrightarrow{A'M'} = \sigma(\overrightarrow{AM}) \quad y \quad \overrightarrow{A'B'} = \sigma(\overrightarrow{AB}),$$

y la linealidad de la simetría vectorial σ resulta:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'M'} &= \sigma(\overrightarrow{AM}) \\ &= \sigma(t\overrightarrow{AB}) && \text{; ya que por (**) } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \\ &= t\sigma(\overrightarrow{AB}) && \text{; por la linealidad de } \sigma \\ &= t\overrightarrow{A'B'} && \text{; por definición}\end{aligned}$$

luego $\overrightarrow{A'M'} = t\overrightarrow{A'B'}$

Cuando t describe los reales M describe la recta (AB) pues $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, y M' describe la recta (A'B') por que $\overrightarrow{A'M'} = t\,\overrightarrow{A'B'}$. Resulta que la imagen de la recta (AB) es la recta (A'B').

4.5.5 **TEOREMA:**

La imagen de una recta por una simetría axial es una recta.

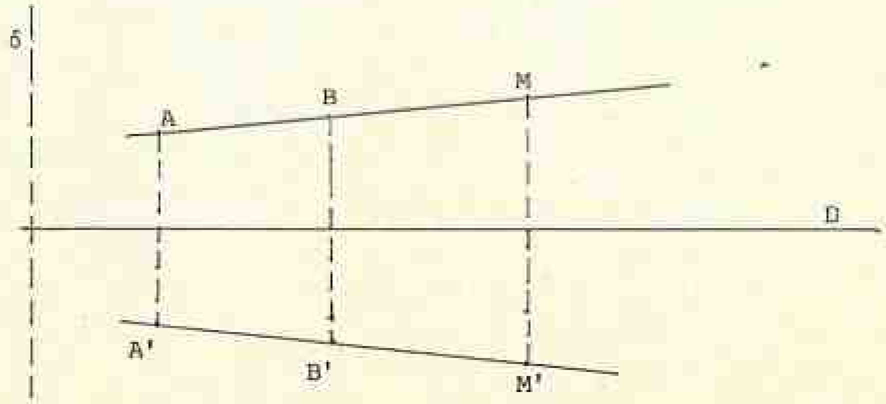


Fig. 246

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{AN'} - \overrightarrow{AM'} \\
&= \sigma(\overrightarrow{AN}) - \sigma(\overrightarrow{AM}) \\
&= \sigma(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) && \text{; ya que } \sigma \text{ es lineal} \\
&= \alpha(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MA}) && \text{;} \\
&= \sigma(\overrightarrow{MN}) && \text{; por Chasles}
\end{aligned}$$

finalmente $\sigma(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$

Forma Geométrica:

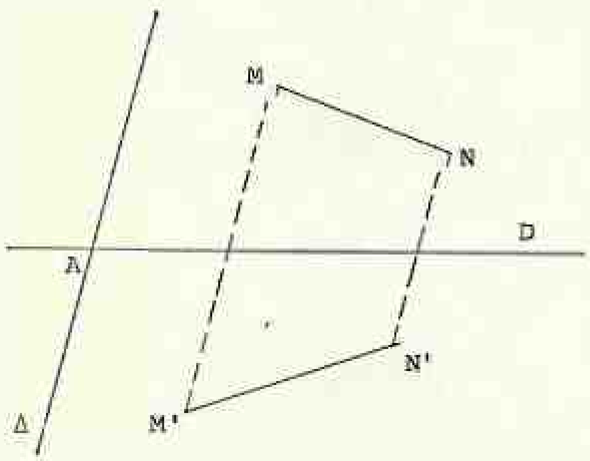


Fig. 2.45

4.5.3 **TEOREMA:**

Dada una simetría S de eje D y de dirección δ

1°) La simetría vectorial σ asociada a S es lineal

2°) Para todo bipunto (M,N) de imagen (M',N') por S,

$\sigma(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$

2.4.5.4 **IMAGEN DE UNA RECTA POR UNA SIMETRIA AXIAL**

Sea "S" la simetría de eje D y de dirección δ y sea σ la simetría vectorial asociada a S.

De la figura anterior se tiene:

$$|AM'| = |\overrightarrow{AM}| \quad \wedge \quad (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}) = 2\beta$$

$$|AM''| = |AM'| \quad \wedge \quad (\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{AM''}) = 2\alpha$$

$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AM''}| \quad \wedge \quad (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM''}) = \gamma$$

utilizando la relación de Chasles

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM''}) = (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}) + (\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{AM''})$$

$$= 2\beta + 2\alpha$$

$$\gamma = 2(\beta + \alpha)$$

$$\gamma = 2(\tfrac{\Theta}{2}) = \Theta \quad \text{luego } \gamma = \Theta$$

ii) Como r e s la composición de dos simetrías ortogonales entonces llamemos Θ al ángulo entre δ y δ'

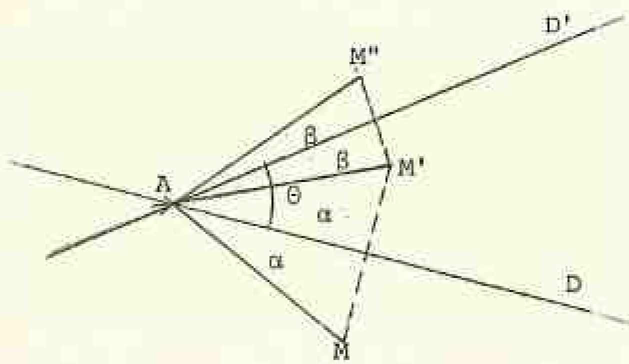


Fig. 2.51

$$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM}") = (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM}') + (\overrightarrow{OM}',\overrightarrow{OM}")$$
$$= \theta + (-\theta)$$
$$= \theta - \theta = 0$$

luego $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM}"|$ $\wedge$ $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM}") = 0°$

Que es la aplicación identidad.

2.5.3 **DESCOMPOSICION DE UNA ROTACION:**

5.3.1 **TEOREMA:**

Toda rotación puede expresarse como la composición de dos simetrías ortogonales S_D , $S_{D'}$ con ejes δ y δ' no paralelos respectivamente es decir $r = S_{\delta'} \circ S_{\delta}$ cuyo centro es la intersección de las rectas D y D' y su ángulo es $\frac{\theta}{2}$

PRUEBA:

i) Sean δ,δ' dos rectas que interceptan en A y cuyo ángulo es $\frac{\theta}{2}$

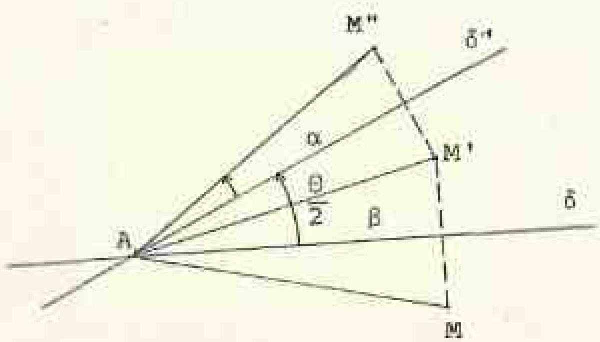


Fig. 2.50

$\|\overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{OM}\| \quad \wedge \quad (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = \theta$

Las coordenadas de M conrespecto al ángulo α son:

$x = \|\overrightarrow{OM}\| \cos \alpha$

$y = \|\overrightarrow{OM}\| \operatorname{sen} \alpha \qquad \wedge \qquad (\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}) = \alpha.$

A encontrar las coordenadas de $M'(x',y')$ en función θ.

tenemos que $\beta = \alpha + \theta$

luego $x' = \|\overrightarrow{OM'}\| \cos(\alpha+\theta)$

$\qquad y' = \|\overrightarrow{OM'}\| \operatorname{sen}(\alpha+\theta)$

utilizando la identidad de $\cos(\alpha+\theta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha+\theta)$ se tiene:

$x' = \|\overrightarrow{OM'}\| [\cos \alpha \cos \theta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta]$

$y' = \|\overrightarrow{OM'}\| [\operatorname{sen} \alpha \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \alpha]$

tenemos que $\|\overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{OM}\|$

así:

$\qquad x' = \|\overrightarrow{OM}\| \cos \theta \cos \alpha - \|\overrightarrow{OM}\| \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta$

$\qquad y' = \|\overrightarrow{OM}\| \operatorname{sen} \alpha \cos \theta + \|\overrightarrow{OM}\| \cos \alpha \operatorname{sen} \theta$

De acuerdo a los resultados (*)

$\qquad x' = x \cos\theta - y \operatorname{sen} \theta$

$\qquad y' = y \cos\theta + x \operatorname{sen} \theta$

luego $M'(x',y') = (x\cos \theta - y\operatorname{sen} \theta,\ y\cos \theta + x \operatorname{sen} \theta)$ que es la imagen M por la aplicación rotación cuyo ángulo es θ y el centro es el origen.

Si el centro está distinto del origen la coordenada de M' tienen la siguiente forma:

La rotación tiene como ángulo $(\vec{AM},\vec{AM}") = (\vec{AM},\vec{AD}) + (\vec{AD},\vec{AM}')$

$+(\vec{AM}',\vec{AD}')+(\vec{AD}',\vec{OM}")$

$= \alpha + \theta + \beta$

pero $(AD,AM') + (\vec{AM}',\vec{AD}') = (\vec{AD},\vec{AD}')$ $= \theta + \alpha + \beta$

$= \alpha + \beta$ $= \theta + \theta$

$= 2\theta$

luego $(\vec{AM},\vec{AM}") = 2\theta \wedge \|\vec{AM}\| = |\vec{AM}"|$ además θ ángulo entre D y D'

asila aplicación rotación $r_{(A,\theta)} = S_{D'} \circ S_D$.

2.5.4 FORMA ANALITICA DE UNA ROTACION

5.4.1 DEFINICION:

Sea P el plano en el sistema ortonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$.

M' es la imagen de M por la aplicación $R_{(A,\theta)}$

es decir:

$$R_{(A,\theta)}: P \longrightarrow P$$
$$M \rightsquigarrow M' = R_{(A,\theta)}(M)$$

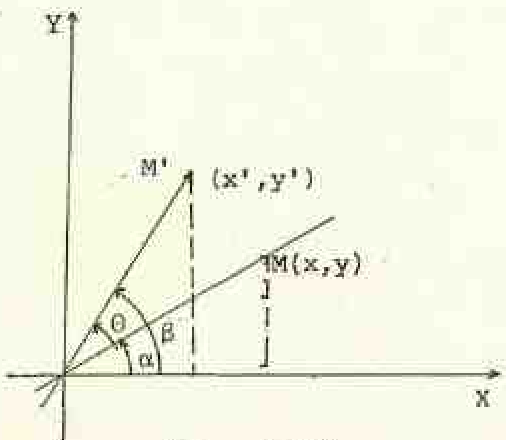


Fig. 2.52

$x^* = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta$

$y^* = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta$

Si x^*, y^*, x_1, y_1 se ponen en función del nuevo centro

$x^* = x' - c_1$, $x_1 = x - c_1$

$y^* = y' - c_2$, $y_1 = y - c_2$

el sistema (**) queda:

$x' - c_1 = (x - c_1)\cos\theta - (y - c_2)\operatorname{sen}\theta$

$y' - c_2 = (y - c_2)\cos\theta + (x - c_1)\operatorname{sen}\theta$

Desarrollando se tiene:

$$x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta - c_1\cos\theta + c_2\operatorname{sen}\theta + c_1$$

$$y' = y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta - c_2\cos\theta - c_1\operatorname{sen}\theta + c_2$$

luego:

$$x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta + a_1 \quad ; \quad a_1 = -c_1\cos\theta + c_2\operatorname{sen}\theta + c_1$$

$$y' = y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta + a_2 \quad ; \quad a_2 = -c_2\cos\theta - c_1\operatorname{sen}\theta + c_2$$

que son las coordenadas de M'.

Forma Geométrica

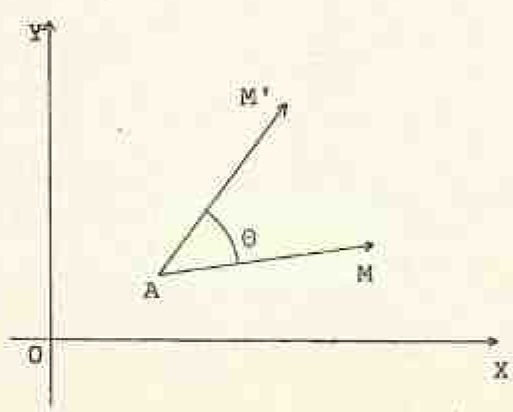


Fig. 2.53

5.4.2 FORMA MATRICIAL DE LA APLICACION $R_{(A,\theta)}$

Si $A = (0,0)$ y θ cualquier valor

se tiene:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Si $A \neq (0,0)$ y θ cualquier valor:

se tiene:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'-a_1 \\ y'-a_2 \end{bmatrix}, \text{ donde } A = (a_1, a_2)$$

EJEMPLOS:

1) Sea g la aplicación definida analiticamente

$$x' = \frac{1}{2}(x\sqrt{3} + y + 3 - \sqrt{3})$$

$$y' = \frac{1}{2}(-x + y\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3})$$

Demostrar que g es una rotación y calcular su centro y su ángulo.

SOLUCION:

Tenemos el sistema $x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta - c_1\cos\theta + c_2\,\mathrm{sen}\,\theta + c_1$

$y' = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta - c_2\cos\theta - c_1\,\mathrm{sen}\,\theta + c_2$

cuando el centro de la rotación es distinto del origen.

Adecuando la definición analítica

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}-3}{2}$$

De acuerdo al sistema $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\wedge$ $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$ ya que el $\operatorname{sen}\theta$ es negativo

ii) Para encontrar el centro tenemos que

$a_1 = -c_1\cos\theta + c_2\operatorname{sen}\theta + c_1 \quad \wedge \quad a_2 = -c_2\cos\theta - c_1\operatorname{sen}\theta + c_2$

y de acuerdo a la información $a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ $\wedge$ $a_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

luego se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{3-\sqrt{3}}{2} &= -c_1\cos(-\tfrac{\pi}{6}) + c_2\operatorname{sen}(-\tfrac{\pi}{6}) + c_1\\ &= -c_1\frac{\sqrt{3}}{2} - c_2\frac{1}{2} + c_1\\ &= c_1(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2}c_2\end{aligned}$$

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2} = c_1(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2}c_2 \quad . \qquad (1)$$

y para $a_2 = -c_2\cos\theta - c_1\operatorname{sen}\theta + c_2$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = -c_2\cos(-\tfrac{\pi}{6}) - c_1\operatorname{sen}(-\tfrac{\pi}{6}) + c_2$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = -c_2\cos\frac{\pi}{6} + c_1\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{6}) + c_2 \qquad (2)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_1 + c_2$$

Simultaneamente las ecuaciones (1) y (2)

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2} = c_1(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2}c_2$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = c_2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{2}c_1$$

multiplicando (1) por $(2 - \sqrt{3})$ y sumando con (2)

$$(2-\sqrt{3})\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) = c_1\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})c_2$$

$$\frac{6-3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3}{2} = c_1\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)(2-\sqrt{3}) - \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)c_2$$

$$\frac{9-5\sqrt{3}}{2} = \frac{4-4\sqrt{3}+3}{2}c_1 - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)c_2$$

$$9-5\sqrt{3} = (7-4\sqrt{3})c_1 - (2-\sqrt{3})c_2 \qquad (1)$$

y multiplicando por 2 la ecuación (2) se tiene:

$$\sqrt{3}-1 = c_2(2-\sqrt{3}) + c_1$$

luego efectuando la suma:

$$\begin{array}{rcl} 9-5\sqrt{3} & = & (7-4\sqrt{3})c_1 - (2-\sqrt{3})c_2 \\ \sqrt{3}-1 & = & c_1 + (2-\sqrt{3})c_2 \\ \hline 8-4\sqrt{3} & = & c_1(1+7-4\sqrt{3}) \end{array}$$

$$8-4\sqrt{3} = (8-4\sqrt{3})c_1$$

$$\frac{8-4\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}} = c_1 \implies c_1 = 1$$

Sustituyendo $c_1 = 1$ en la ecuación (2)

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = c_2\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}c_1$$

$$\sqrt{3}-1 = c_2(2-\sqrt{3}) + 1$$

$$\sqrt{3}-2 = (2-\sqrt{3})c_2$$

$$-(2-\sqrt{3}) = (2-\sqrt{3})c_2$$

$$\frac{-(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}} = c_2 \implies c_2 = -1$$

así tenemos $A = (1,-1) \wedge \theta = -\frac{\pi}{6}$

2) Sea P el plano en el sistema $(0,i,j)$

Sea Ψ la aplicación lineal definida de P en P; tal que

$$\Psi(\vec{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j}) \quad \text{y} \quad \Psi(j) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-i+j)$$

Demostrar que Ψ es una rotación vectorial y determine su medida.

SOLUCION:

Tomando $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x,y)$ en el plano P.

Se tiene:

$$\Psi(u) = \Psi(x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$= \Psi(x\vec{i}) + \Psi(y\vec{j})$$

$$= x\Psi(\vec{i}) + y\Psi(\vec{j})$$

$$= x(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}) + y(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}x\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}y\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}y\vec{j}$$

$$\Psi(u) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)\vec{i} + (-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)\vec{j}$$

$$\Psi(u) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y , -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)$$

obteniendo las normas

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|\Psi(\vec{u})| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{4}(x+y)^2 + \frac{2}{4}(-x+y)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2) + \frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + \cancel{xy} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \cancel{xy} + \frac{y^2}{2}}$$

$$|\Psi(\vec{u})| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

luego $|\vec{u}| = \|\Psi(\vec{u})\|$.

Para obtener el ángulo utilizamos la expresión

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \Psi(\vec{u})\rangle}{|\vec{u}||\Psi(\vec{u})|}$$

$$\langle \vec{u}, \Psi(\vec{u})\rangle = \langle (x,y), (\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y))\rangle$$

$$= x\,\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + y\,\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}xy - \frac{\sqrt{2}}{2}xy + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2$$

$$\langle \vec{u}, \Psi(u)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + y^2)$$

así,

$$\cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

2.6 SIMILITUDES

2.6.1.1 DEFINICION:

Sea $X \subset P$, sea f una aplicación de X en P y $k > 0$.

Se dice que f es una similitud de razón k si $\forall\ x,y \in X$ se define

$$f: X \longrightarrow P$$
$$(x,y) \rightsquigarrow d(f(X), f(y)) = kd(x,y)$$

Si $k = 1$, la aplicación es una isometría.

2.6.1.2 LEMA:

Toda homotecia en P de razón k es una silimitud de razón $|k|$

DEMOSTRACION:

Sea $h: P \longrightarrow P$ una homotecia

$$x \rightsquigarrow H(x) = x' \Rightarrow \overrightarrow{cx'} = \overrightarrow{kcx}, \text{ donde } c = (c_1,c_2)$$

luego $\forall\ x,y \in P$ se tiene:

$$h(x) = x' \Leftrightarrow \overrightarrow{cx'} = \overrightarrow{kcx} \qquad (\alpha)$$

$$h(y) = y' \Leftrightarrow \overrightarrow{cy'} = \overrightarrow{kxy} \qquad (\beta)$$

De (α) tenemos

$$(x_1'-c_1,\ x_2'-c_2) = k(x_1-c_1,\ x_2-x_2)$$

y de (β) $\quad (y_1'-c_1,\ y_2'-c_2) = k(y_1-c_1,\ y_2-c_2)$

2.6.2 SIMILITUDES DIRECTAS

6.2.1 DEFINICION:

Se llama similitud directa de un plano P a toda aplicación $f: P \longrightarrow P$ que se escribe $h \circ g$, donde g es un desplazamiento del plano y h una homotecia.

2.6.2.2 PROPOSICION:

i) Dada una similitud directa f, existe un único real $k > 0$ y un único ángulo θ verificandose para toda pareja de puntos distintos x, y de un plano.

$d(x',y') = kd(x,y)$ y $(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{x'y'}) = \theta$

ii) Si una aplicación f verifica la propiedad (i), entonces es una similitud directa.

El real k es la razón de la similitud f; θ es el ángulo de la similitud f.

DEMOSTRACION:

Sea $f = h_{(p,k)} \circ g$ la similitud directa donde k es un real estrictamente positivo y g un dezplazamiento.

2.6.3 REPRESENTACION ANALITICA Y COMPLEJA DE UNA SIMILITUD DIRECTA.

1°) Representación Analítica

Sea h una homotecia de la misma razón k. Entonces $h^{-1}\circ f = g$ es una isometría, si x,y son dos puntos del plano se tiene $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ y $h^{-1}(x') = x''$, $h^{-1}(y') = y''$

además

$$d(f(x),f(y) = d(x',y')$$
$$= kd(x,y)$$
$$\text{y } d(x'', y'') = k^{-1}d(x',y')$$
$$= k^{-1}d(x',y')$$
$$= k^{-1}kd(x,y)$$
$$d(x'', y'') = d(x,y)$$

$\therefore$ g es una isometría

2.6.1.4 **PROPOSICION:**

Toda similitud es una aplicación afin biyectiva.

DEMOSTRACION:

Sea f una similitud

A probar que f es inyectiva

$$f(x) = f(y) \Rightarrow d(f(x), f(y)) = 0$$
$$\Rightarrow kd(x,y) = 0$$
$$\Rightarrow d(x,y) = 0 \quad ; \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$
$$\Rightarrow x = y$$

luego f es inyectiva. (α)

A probar sobreyectividad

Como f es afin y por (α) es inyectiva por tanto es biyectiva.

Restando β de α se tiene:

$$[(x_1'-c_1-y_1'+c_1, x_2'-c_2-y_2'+c_2)] = [k(x_1-c_1)-k(y_1-c_1), k(x_2-c_2)-k(y_2-c_2)]$$

$$(x_1'-y_1',\ x_2'-y_2') = [k(x_1-y_1),\ k(x_2-y_2)]$$

$$\overrightarrow{x'\ y'} = k\ \overrightarrow{xy}$$

$$|\overrightarrow{x'y'}| = \|k\overrightarrow{xy}|$$

$$|x'-y'| = |k|\,|\overrightarrow{xy}\|$$

$$d(x',y') = |k|\,\|x-y\|$$

$$d(x',y') = |k|d(x,y)$$

$$d(h(x),h(y) = |k|d(x,y)$$

$\therefore$ h es una similitud.

2.6.1.3 **PROPOSICION:**

Toda similutd de P en P de razón k es el producto de una homotecia de razón k y de una isometría.

DEMOSTRACION:

Sea f: P —— P, donde f es una similitud de razón k.

$x \rightsquigarrow x'$

2.6.3.1 TEOREMA:

Sea P el plano con respecto al sistema ortonormal.

La aplicación f: P ----→ P es una similitud directa sii existen los reales a', b', x_0, y_0 $((a',b') \neq (0,0))$ tales que:

Cualquiera que sea $M(x,y)$ de imagen $M'(x',y')$, se tiene

$$\left.\begin{aligned} x' &= a'x - b'y + x_0 \\ y' &= b'x + a'y + y_0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

DEMOSTRACION:

Sea P el plano en el sistema $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Sea f una similitud directa de razón k y sea $\Psi = k\rho$ un endomorfismo asociado donde el endomorfismo ρ es una rotación vectorial de $\vec{P}$ cuya matriz en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{con } a_1^2 + b_2^2 = 1$$

luego la matriz de Ψ es $\begin{pmatrix} ka_1 & -kb_1 \\ kb_1 & ka_1 \end{pmatrix}$ que se puede escribir

$\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ donde $a' = ka_1$ y $b' = kb_1$, $a', b' \neq 0$ pues

$(a')^2 + (b')^2 = k^2, \quad k^2 \neq 0$

Si tomamos $0'(x_0, y_0) = f(0)$ entonces la imagen $M'(x',y')$ de cualquier punto $M(x,y)$ se define:

$$\overrightarrow{0'M'} = \Psi(\overrightarrow{0M})$$

es decir:

$$x' - x_0 = a'x - b'y$$
$$y' - y_0 = b'x + a'y$$

que equivale

$$\left.\begin{aligned} x' &= a'x - b'y + x_0 \\ y' &= b'x + a'y + y_0 \end{aligned}\right. \qquad (*)$$

" $\Leftarrow$ "

En forma recíproca. Sea f una aplicación en P con respecto al sistema ortonormal $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ definida

$$f: P \longrightarrow P$$
$$M(x,y) \rightsquigarrow M'(x',y')$$ tal que se tiene las expresiones $(*)$ donde $a',b',x_0,y_0 \in \mathbb{R}$ con $(a',b') \neq (0,0)$.

Que se puede escribir

$$\overrightarrow{O'M'} = \Psi(\overrightarrow{OM})$$

donde $O.(x_0,y_0)$ es la imagen de "O" por f. Y Ψ es el endomorfismo de P de matriz $\begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix}$ en la base ortonormal $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

donde f es una aplicación afin de endomorfismo asociado Ψ.

El endomorfismo $F = \dfrac{1}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}\Psi$ tiene por matriz

$$\begin{bmatrix} \dfrac{a'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}} & \dfrac{-b'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}} \\ \dfrac{b'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}} & \dfrac{a'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}} \end{bmatrix} ; \text{ donde } \sqrt{(a')^2+(b')^2} = 1$$

y cuya matriz es de la forma $\begin{bmatrix} a_1 & -b_1' \\ b_1 & a_1' \end{bmatrix}$ donde ρ es una rotación vectorial de $\vec{P}$.

y la razón es $\sqrt{(a^1)^2+(b^1)^2}$, y como el plano es orientado con relación al sistema ortonormal directo, la medida del ángulo de f es uno de los reales Θ definidos como

$$\cos \quad = \frac{a'}{\sqrt{(a^1)^2+(b^1)^2}} \text{ ó } \operatorname{sen}\Theta = \frac{b'}{\sqrt{(a^1)^2+(b^1)^2}}$$

ya que $a_1^2 + b_1^2 = 1$ y $a' = ka_1$, $b' = kb_1$ luego

$$(a^1)^2 + (b^1)^2 = k^2(a_1^2 + b_1^2) \quad , k^2 \neq 0$$

$$\sqrt{(a^1)^2+(b^1)^2} = k.$$

luego $\frac{a'}{k} = a_1$ y $\frac{b'}{k} = b_1$ y como tenemos que

$\cos 2\Theta + \operatorname{sen} 2\Theta = 1$ entonces podemos hacer $\cos\Theta = a_1$ y $\operatorname{sen}\Theta = b_1$

$$\cos\Theta = \frac{a'}{\sqrt{(a^1)^2+(b^1)^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\Theta = \frac{b'}{\sqrt{(a^1)^2+(b^1)^2}}$$

$\therefore$ cualquier valor $\frac{a'}{\sqrt{(a^1)^2+(b^1)^2}}$ ó $\frac{b'}{\sqrt{(a^1)^2+(b^1)^2}}$ puede ser la medida del ángulo f.

2.6.3.2. b) **Representación Compleja**

2.6.3.2.1 **TEOREMA:**

Sea P un plano en $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

La aplicación f: p ——> P es una similitud directa sii existe $(a,b) \in C^* \times C$ tal que para cualquier punto M de imagen M' por f, los afijos z,z' de M y M' respectivamente verifican la relación.

$$z' = az + b$$

Sea i el complejo de coordenada (0,1)

El sistema $\begin{cases} x'-x_0 = a'x - b'y \\ y'-y_0 = b'x + a'y \end{cases}$ es equivalente a

$$x'+iy' = (a'x-b'y + x_0) + i(b'x + a'y + y_0)$$

$$= a'x-b'y + ib'x + ia'y + x_0 + iy_0$$

$$= (a'+ib')x + (-b'+ia')y + x_0 + iy_0$$

$$= (a'+ib')x + (a' - \frac{b'}{i})iy + x_0 + iy_0$$

$$= (a'+ib')x + (a' + ib)iy + x_0 + iy_0 \ , \ ib = \frac{-b'i}{i^2}$$

(8) $x'+iy' = (a'+ib')(x+iy) + x_0 + iy_0$

Si hacemos $z' = x' + iy'$, $a = a' + ib'$, $z = x + iy$, $b = x_0+iy_0$ la expresión (8) queda

$$z' = az + b. \text{ donde } (a',b') \neq (0,0) \Rightarrow a \neq 0$$

y además $a,b \in \mathbb{C}$.

obteniendo el módulo de z', z, a y b.

$|z'| = \sqrt{(x')^2+(y')^2}$, $|a| = \sqrt{(a')^2+(b')^2}$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|b| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

CONSECUENCIAS:

Haciendo $b = 0 \Rightarrow f(z) = az$.

1. Si $a = 1 \Rightarrow |a| = 1$ luego $f(z) = z$; f es la función I_p.
2. Si $|a| = 1$, $a \neq 1$ se tiene:

Como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\ (\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta)$$

$$z = r\cos x + ir\ \mathrm{sen}\ y \qquad \text{haciendo } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

luego $z = r\cos\theta + ir\ \mathrm{sen}\ \theta = x + iy$

como $|a| = 1$ entonces $a = \cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta$

en consecuencia se tiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= az \\ &= (\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta)(x + iy) \\ &= (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\ \theta) + i(x\,\mathrm{sen}\ \theta + y\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\text{así } (x' + iy') = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\ \theta) + i(x\,\mathrm{sen}\ \theta + y\cos\theta)$$

luego

$$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\ \theta$$

$$y' = x\,\mathrm{sen}\ \theta + y\cos\theta$$

significa que f es una rotación

3. Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, $a \neq 0$ se tiene

$$z' = az$$

$$(x', y') = a(x, y)$$

$$(x'-0, y'-0) = a(x-0, y-0)$$

$$\overrightarrow{0z'} = a\overrightarrow{0z}$$

luego f es una homotecia de centro en el origen y razón "a"

4. Si $a \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = \sqrt{a'^2 + b'^2}\ (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\ \theta)(x, y) \qquad k = \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

$$= k(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\ \theta)(x + iy)$$

$$(x', y') = k(x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\ \theta,\ x\,\mathrm{sen}\ \theta + y\cos\theta)$$

luego

f es la composición de h∘r; h una homotecia de centro en el origen y razón k y r la rotación de ángulo θ.

5. Si $b \neq 0$, $a = 1$

$$f(x) = z + b$$

$$f(z) = (x + iy) + (x_0 + iy_0)$$

$$= (x + x_0) + i(y + y_0)$$

$$f(z) = (x + x_0,\ y + y_0)$$

luego f es una traslación del punto (x_0, y_0) por el vector $z = (x_0, y_0)$

6. Si $|a| = 1$ entonces $f(z) = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(x,y) + (x_0, y_0)$

es un desplazamiento con endomorfismo asociado la rotación r de ángulo θ y centro (x_0, y_0).

C A P I T U L O   I I I

3.1 TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

3.1.1 DEFINICION:

Sea f una función en el plano P.

Se dice que la aplicación $f: P \longrightarrow P$ es una biyección o una

$$M \rightsquigarrow M' = f(M)$$

transformación de P, cuando todo punto M' de P posee un único antecedente M.

3.1.2 APLICACION RECIPROCA DE UNA TRANSFORMACION:

Sea f una transformación del plano P. La aplicación que, a todo punto M', asocia su único antecedente M, es la aplicación recíproca de f; denotada por f^{-1}.

Es decir:

> Para todo bipunto (M,M'), las dos igualdades $f(M)=M'$ y $f^{-1}(M') = M$ son equivalentes.
>
> $f(M) = M'$ equivale a $f^{-1}(M') = M$.

La siguiente figura ilustra la aplicación f^{-1}.

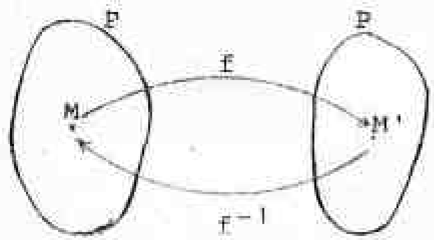


Fig. 3.1

$f(M) = M'$

$f^{-1}(f(M)) = f^{-1}(M')$

$M = f^{-1}(M')$

3.1.3 TEOREMA:

La aplicación recíproca f^{-1}, de una transformación f del plano P es una transformación de P y $(f^{-1})^{-1} = f$.

PRUEBA:

Como f^{-1} es una transformación de P, entonces la aplicación que a todo punto M", asocia un único antecedente M' es la aplicación recíproca de f^{-1}; que se denota $(f^{-1})^{-1} = f$.

EJEMPLOS:

1) Sea t la traslación de vector $\vec{u}$ y sea M' un punto cualquiera de P. Un punto M de P es un antecedente de M' si y sólamente si, $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, es decir si y sólamente si $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$.

SOLUCION:

La traslación t es una biyección y su recíproca t^{-1} es la aplicación que a todo M' asocia el punto M definido por $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$

tenemos

$$t_{\vec{u}} : P \longrightarrow P$$
$$M \rightsquigarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$t_{-\vec{u}} : P \longrightarrow P$$
$$M' \rightsquigarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$$

sumando se tiene: $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M} = \vec{u} - \vec{u}$

$$\overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

$t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{(\vec{0})}$.·. M es antecedente de M'.

Si el ejercicio anterior se analiza en el sistema $(0,\vec{i},\vec{j})$ se tiene:

Sea $M(x,y)$, $M'(x',y')$ y $\vec{u} = (\alpha,\beta)$

$$t_{\vec{u}} : P \longrightarrow P$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (x+\alpha,\ y+\beta) = M'(x',y')$$

$$t_{-\vec{u}} : P \longrightarrow P$$
$$(x',y') \rightsquigarrow (x'+(-\alpha),\ y'+(-\beta)) \quad ; \quad -\vec{u} = (-\alpha,-\beta)$$
$$= (x'-\alpha,\ y'-\beta)$$
$$= (x+\alpha-\alpha,\ y+\beta-\beta)$$
$$= (x,y)$$
$$= M$$

luego la aplicación traslación es una transformación

2) Sea h la aplicación de P.

h es la homotecia de centro Ω y razón k distinta de cero que a todo punto M, asocia el punto M' definido por $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

SOLUCION:

Sea M' un punto cualquiera de P. Un punto M es un antecedente de M' si y sólamente si $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ es decir $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'}$, donde el punto M es único.

$$h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

$$h_{(\Omega,\frac{1}{k})}(M') = M \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'}$$

Si M tiene coordenadas (x,y), $M'(x',y')$ y $\Omega(c_1,c_2)$ se tiene:

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

$$(x'-c_1, y'-c_2) = k(x-c_1,\ y-c_2)$$

$$x'-c_1 = k(x-c_1) \quad \wedge \quad y'-c_2 = k(y-c_2)$$

$$x' = k(x-c_1)+c_1 \quad \wedge \quad y' = k(y-x_2) + c_2$$

Si efectuamos la aplicación $h_{(\Omega,\frac{1}{k})}$ se tiene:

$$h_{(\Omega,\frac{1}{k})}(M') = M'' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M''} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Rightarrow (x_1-c_1, y_1-c_2) = \frac{1}{k}(x'-c_1,\ y'-c_2)$$

$$\Rightarrow x_1-c_1 = \frac{1}{k}(x'-c_1) \quad \wedge \quad y_1-c_1 = \frac{1}{k}(y'-c_2)$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{1}{k}(k(x-c_1)+c_1-c_1)+c_1 \wedge y = \frac{1}{k}(k(y-c_2)+\cancel{c_2}-\cancel{c_2})+c_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x - c_1 + c_1 \wedge y_1 = y - c_2 + c_2$$

$$\Rightarrow (x_1,\ y_1) = (x,y)$$

luego $M(x,y)$ es el único antecedente de M'

y así h es transformación del plano cuya inversa es

$$h^{-1}(\Omega,k) = h(\Omega, \frac{1}{k})$$

NOTA:

No todas las aplicaciones en el mismo plano son transformaciones.

EJEMPLO:

Las proyecciones sobre una recta D según la dirección δ: no es transformación.

1.3 COMPOSICION DE DOS TRANSFORMACIONES

1.3.1 **TEOREMA:**

La composición de dos transformaciones $g \circ f$ es una transformación y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

PRUEBA:

Como f y g son transformaciones del plano entonces:

Sea M_1 imagen de M por f y M_2 imagen de M_1 por g. La aplicación que, a M, asocia M_2 es la aplicación composición. Luego se tiene:

$$\forall \text{ punto } M \in P \quad (g \circ f)(M) = g(f(M))$$

Sea M' un punto cualquiera del plano, un punto M es antecedente de M' por $g \circ f$ si y sólamente si $(g \circ f)(M) = M' \Rightarrow M = (g \circ f)^{-1}(M')$

la igualdad $(g\circ f)(M) = M'$ es equivalente a $f(M) = g^{-1}(M')$

$$\Rightarrow M = f^{-1}(g^{-1}(M'))$$
$$= f^{-1}\circ g^{-1}(M')$$
$$\Rightarrow M = f^{-1}\circ g^{-1}(M')$$

$$\text{luego } (g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$$

$\therefore$ La aplicación $g\circ f$ es biyectiva y su biyección reciproca $(g\circ f)^{-1}$, es la aplicación que a todo punto M' asocia el punto M que es antecedente de M'.

Esquema de la aplicación Composición.

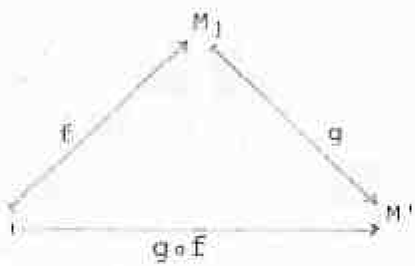


Fig. 3.2

Ejemplo:

Sea P el plano con respecto al sistema $(0,\vec{i},\vec{j})$, la aplicación $f: P \longrightarrow P$ que a todo punto M de coordenadas x,y asocia el

$M \rightsquigarrow M'$

punto M' de coordenadas x',y' las cuales se dan a continuación, en forma analítica.

$$x' = 2x + 3y - 1$$
$$y' = 3x + 5y$$

La aplicación f definida asi, es una transformación del plano?

SOLUCION:

Sea $M'(x',y')$ un punto cualquiera de P. Un punto M de coordenadas (x,y) es un antecedente de M' si y sólamente si $f(M) = M'$, es decir sii, los puntos $f(M)$ y M' tienen las mismos coordenadas:

$$(\alpha)\ \begin{cases} 2x + 3y - 1 = x' & (1) \\ 3x + 5y = y' & (2) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema (α), simultaneando se tiene: multiplicando por (3) a (1) y por (-2) la (2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \cancel{6x} + 9y - 3 &= 3x' \\ \underline{-\cancel{6x} - 10y \quad} &\underline{= -2y'} \\ 0 - y - 3 &= 3x' - 2y' \\ -y &= 3x' - 2y' + 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = -3x' + 2y' - 3}$$

sustituyendo y en (2) resulta:

$$y' = 3x + 5(-3x' + 2y' - 3)$$

$$y' = 3x - 15x' + 10y' - 15$$

$$-3x = -15x' + 9y' - 15$$

$$\boxed{x = 5x' - 3y' + 5}$$

asi, las coordenadas de M que es el antecedente de M' son:

$$x = 5x' - 3y' + 5$$

$$y = -3x' + 2y' - 3$$

Esta resolución muestra que existe una pareja (x,y) y una sola la cual demuestra la unicidad del antecedente $M(x,y)$, luego la aplicación f es biyectiva.

Su recíproca biyectiva es la aplicación que, a todo punto M' de coordenadas x',y', asocia el punto M cuyas coordenadas son

$$M(x,y) = M(5x' - 3y' + 5, -3x' + 2y' - 3)$$

$\therefore$ f es una transformación de P.

1.3 GRUPO DE TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

1.3.1 DEFINICION:

Designemos por $\mathcal{B}$ el conjunto de biyecciones de P.
Se llama grupo de transformaciones del plano P todo sub-conjunto $B' \neq \phi$ del conjunto de biyecciones de P, estable por la composición de aplicaciones, que contiene la biyección recíproca de cada uno de sus elementos.

EJEMPLOS:

1) El conjunto $T \cup S$ es un sub-conjunto de biyecciones de $\mathcal{B}$ ya que toda traslación como toda simetría central es biyectiva.

De manera que:

- La composición $g \circ f$ de dos elementos de $T \cup S$ es un elemento de $T \cup S$: es decir que $T \cup S$ es estable por la composición de aplicaciones.
- $T \cup S$ contiene la biyección recíproca de cada uno de sus elementos.

- Todo grupo de transformaciones de P contiene la transformación I_{dp} ya que $f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_{dp}$.
- Es asociativo por la aplicación de composiciones.

Observación:

Se dice que el grupo B' de transformaciones del plano es conmutativo ya que, cualesquiera que sean f y g elementos de B', cumplen $f\circ g = g\circ f$.

1.4 GRUPO DE HOMOTECIAS - TRASLACIONES

1.4.1 Conjunto de homotecias - traslaciones

La unión $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ se llama conjunto homotecias - traslaciones

Propiedades:

1°) Sea f un elemento de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ y sea (A,B) un bipunto de imagen (A',B').

i) Si f es una traslación de vectores $\vec{u}$, se tiene:

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$, así $\overrightarrow{A'B'} = 1\ \overrightarrow{AB}$

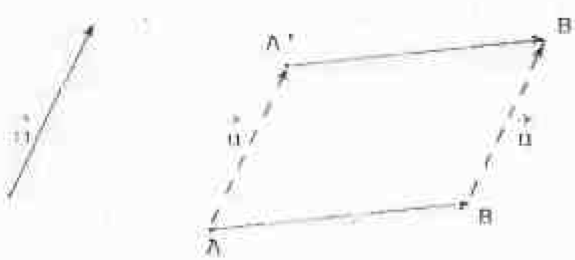


Fig. 3.3

ii) Si f es una homotecia de centro Ω y razón k, se tiene:

$$\overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A} \quad \wedge \quad \overrightarrow{\Omega B'} = k\overrightarrow{\Omega B}$$

así $\overrightarrow{\Omega B'} - \overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega B} - k\overrightarrow{\Omega A}$

$$\overrightarrow{A'\Omega} + \overrightarrow{\Omega B'} = k(\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega B})$$

$$\overrightarrow{A'B'} = k\ \overrightarrow{AB}$$

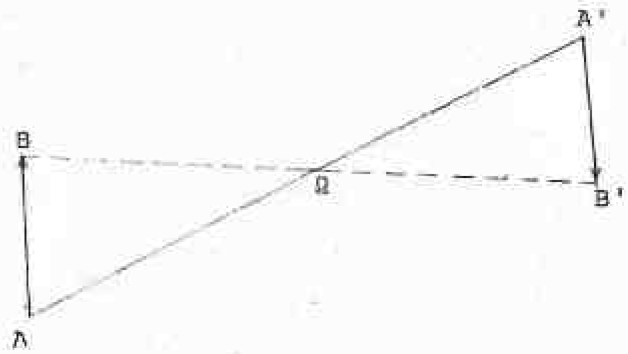


Fig. 3.4

Del resultado anterior se observa que todo elemento del conjunto $H \cup T$ posee la propiedad siguiente:

Existe un real $k \neq 0$ tal que para todo bipunto (A,B) de imagen (A',B') se tiene:

$$\overrightarrow{A'B'} = k\ \overrightarrow{AB}$$

si $k \neq 1$, f es una homotecia de razón k.

si $k = 1$, f es una traslación.

2°) En forma recíproca, considerando la aplicación f de p en P posee esta propiedad.

Sea A un punto de imagen A'. Para todo punto M de imagen M', se tiene: $\overrightarrow{A'M'} = k\ \overrightarrow{AM}$.

Igualmente puede escribirse, M_0 que es un punto cualquiera del plano bajo la forma:

$$\overrightarrow{M_0M'} - \overrightarrow{M_0A'} = k(\overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0A})$$

es decir:

$$\overrightarrow{M_0M'} - k\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0A'} - k\overrightarrow{M_0A} \qquad (*)$$

i) Si $k = 1$ la igualdad $(*)$ queda $\overrightarrow{M_0M'} - \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0A'} - \overrightarrow{M_0A}$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$$

f es la aplicación traslación de vector $\overrightarrow{AA'}$

ii) Si $k \neq 1$, los puntos ponderados $(A',1)$, $(A,-k)$ tienen baricentro "M_0" definido por $\overrightarrow{M_0A'} - k\overrightarrow{M_0A} = \vec{0}$ y la idualdad $(*)$ queda : $\overrightarrow{M_0M'} - k\ \overrightarrow{M_0M} = 0$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0M}$$

luego f es la aplicación homotética de centro M_0 y razón k.

De los resultados 1°) y 2°) se deduce el siguiente teorema:

TEOREMA:

Para que una aplicación f del plamo P en P sea un elemento del conjunto $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, es necesario y suficiente que exista un real $k \neq 0$ tal que, para todo bipunto (A,B) de imagen (A',B')

$$\overrightarrow{A'B'} = k\ \overrightarrow{AB}.$$

1.5 COMPOSICION DE DOS ELEMENTOS DE $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

Sean f_1, f_2 dos elementos del conjunto $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

Sea (A,B) un bipunto y (A_1,B_1) su imagen por f_1, existe

$k_1 \neq 0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{A_1B_1} = k_1\overrightarrow{AB}$$

y la imagen por f_2 de (A_1, B_1) es $\overrightarrow{A_2B_2} = k_2\overrightarrow{A_1B_1}$; $k_2 \neq 0$ es decir:

$$A \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2$$

$$B \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{f_2} B_2$$

Así,

$$\overrightarrow{A_2B_2} = k_2(k_1\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{A_2B_2} = (k_2k_1)\overrightarrow{AB}$$

en consecuencia $f_2 \circ f_1$ es un elemento de $H \cup T$ ya que el producto k_2k_1 es el producto de dos reales distintos de cero entonces es distinto a cero y puede representarse por k.

Además,

Si $f \in H$, f tiene un punto fijo Ω y una razón $k \neq 0,1$ f^{-1} es la homotecia, de centro Ω y razón $\frac{1}{k}$.

Si $f \in T$, f es la traslación de vector $\vec{u}$

f^{-1} es la traslación recíproca de vector $-\vec{u}$

luego: el conjunto de homotecias - traslación es estable por la composición de aplicaciones.

1.5.1 **TEOREMA:**

El conjunto de homotecias - traslaciones del plano P es un grupo de transformaciones de P.

Toda homotecia como toda traslación es una biyección del plano, $H \cup T$ es un sub-conjunto no vacío del conjunto de transformaciones del plano.

El conjunto $H \cup T$ contiene la biyección recíproca de cada uno de sus elementos, ya que, la biyección recíproca de toda traslación es una traslación y la biyección recíproca de toda homotecia es una homotecia.

Ejemplo:

Sea P el plano en el sistema $(0,\vec{i},\vec{j})$, sea h la homotecia de centro en el origen y razón $k \neq 1$. Y sea t una traslación de vector $\vec{u} = \vec{i}$.

1°) Definir analíticamente $f = h \circ t$ y deducir que f es una homotecia que se determinará el centro y la razón.

SOLUCION:

i) $f(x,y) = (h \circ t)(x,y)$;

$= h(t_{\vec{u}}(x,y))$; donde $\vec{u} = (1,0) = \vec{i}$

$= h(x+1,y)$

$= (x',y')$

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$; $\Omega M = (x+1,y)$,

$(x',y') = k(x+1,y)$

$x' = k(x+1) \wedge y' = ky$ $\qquad c_1 = k$

$\qquad c_2 = 0$

$x' = kx + k \wedge y' = ky$

Luego f es una homotecia de razón k y $C = (k,0)$

ii) Efectuar $g = t \circ h$ con los mismos datos

$g(x,y) = (t \circ h)(x,y)$

$g(x,y) = t(h(x,y))$

se tiene:

$$h_{(o,k)}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \quad ; \quad M(x,y) \; ; \; M'(x',y')$$

$$(x',y') = k(x,y)$$

$$x' = kx \;\wedge\; y' = ky$$

luego

$g(x,y) = t(kx,ky)$

$g(x,y) = (x_1,y_1)$

$$t_{\vec{u}}(x_1,y_1) = t_{(1,0)}(x_1,y_1)$$
$$= (x_1+1,\; y_1)$$
$$= (kx+1,\; ky)$$

asi, $x_1 = kx + 1 \;\wedge\; y_1 = ky$ que resulta ser las coordenadas de una homotecia de razón k y centro (1,0).

De los resultados i) y ii) $h \circ t \neq t \circ h$

1.6 TRANSFORMACIONES INVOLUTIVAS

1.6.1 Una aplicación $f: P \longrightarrow P$ es involutiva si $f \circ f = I_{dp}$ también se dice que f es una involución del plano P.

EJEMPLOS:

1) * Las simetrías Centrales

2) * Las simetrías Axiales

(ya que las simetrias axiales tienen como propiedad que $\forall$ punto M de imagen M' por S, la imagen de M' es M o sea $S \circ S = I_{dp}$.

3) * Bajo que condiciones una traslación es una involución?

Para que una traslación sea una involución tiene que cumplir $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{\vec{u}}$ y así que satisfaga $t \circ t = I_{dp}$, esto sucede solo cuando el vector sea nulo es decir $\vec{u} = \vec{0}$.

4) * Bajo que condiciones una homotecia es una involución?.

Es decir $h \circ h = I_{dp}$.

Sea $M(x,y)$ un punto del plano, Ω centro y $k \in \mathbb{R}$, la razón de una homotecia.

Definamos:

$$h: P \longrightarrow P$$
$$M \longrightarrow M'$$

$h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

a probar que

$$(h \circ h)(M) = I_d(M) = M$$

es decir $\quad h(h(M)) = M$

se tiene que

$$h(M) = M'$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M} \qquad (*)$$
$$h(h(M)) = h(M') = M''$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega M''} = k\,\overrightarrow{\Omega M'}$$

De (*) se tiene:

$$\overrightarrow{\Omega M''} = k(k\ \overrightarrow{\Omega M})$$

$$\overrightarrow{\Omega M''} = k^2\overrightarrow{\Omega M}$$

$$M'' = M \iff \Omega M = k^2\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\iff k = \pm 1.$$

luego las condiciones en las cuales una homotecia es una involución es cuando $k = \pm 1$.

CAPITULO IV
GEOMETRIA DESCRIPTIVA

4.1 PROYECCION DIEDRICA O DE MONGE

4.1.1 DEFINICION:

Sean H y V dos planos en E. Se llama proyección diedrica o de Monge al sistema más empleado en la representación de edificios, piezas mecánicas, máquinas y otros, el cual es utilizado por los ingenieros y los arquitectos.

Este sistema es ortogonal y emplea en el espacio, como planos fundamentales de proyección, uno horizontal H y otro vertical V la intersección de los planos se le llama línea de tierra indicada como (LT)

Forma Geométrica

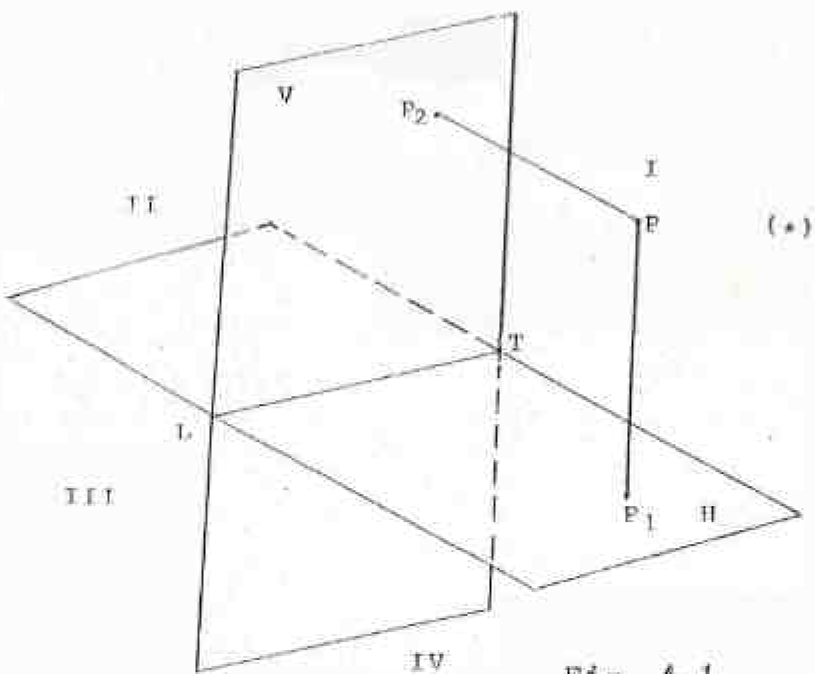


Fig. 4.1

Los dos planos de proyección dividen el espacio en cuatro regiones (diedros rectos) que se nombran respectivamente, I, II, II, IV región del espacio ó 1ª, 2ª, 3ª, 4ª diedros.

4.1.2 PROYECCION DE UN PUNTO

La proyección de un punto sobre el plano horizontal es la primera proyección ó proyección horizontal que la indicaremos P_1. La proyección sobre el plano vertical es la segunda proyección vertical que la indicaremos por P_2.

Para indicar que un punto P, tiene como proyecciones P_1 y P_2, empleamos la escritura $P \equiv (P_1, P_2)$.

La distancia $\overline{P_1P}$ se llama cota de P. Y la distancia $\overline{P_2P}$ se llama alejamiento (figura 4.1)

4.1.3 REPRESENTACION DE UN PUNTO

Supongamos que un punto P lo situamos en la I región. Sus proyecciones son P_1 y P_2.

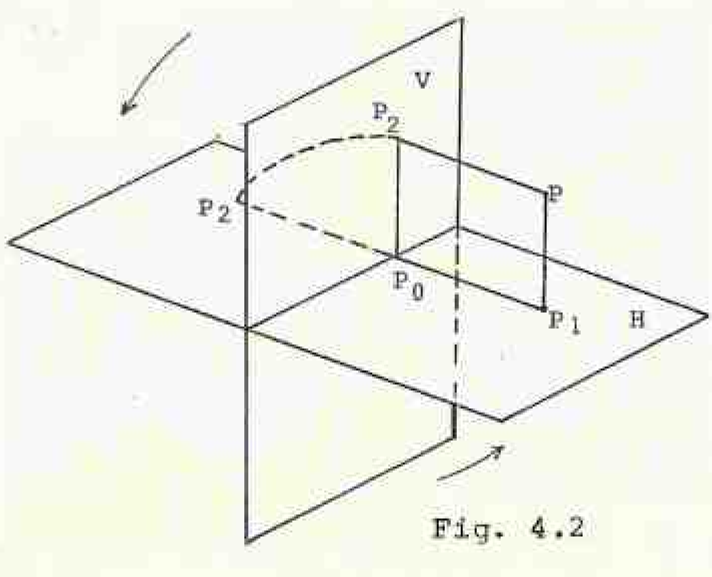


Fig. 4.2

Los proyectantes PP_1 y PP_2 determinan un plano que es perpendicular al plano H y al plano V. Las intersecciones P_0P_1 y P_0P_2 del plano resultante con los de proyección son perpendiculares a la LT y $P_0P_1 \perp P_0P_2$. La figura $PP_1P_0P_2$ es un rectángulo de lo cual se puede deducir: $\overline{P_1P} = \overline{P_0P_2}$ $\wedge$ $\overline{P_2P} = \overline{P_0P_1}$.

Si en la fig 4.2 hacemos girar el plano vertical alrededor de LT, en sentido contrario a las agujas del reloj, hasta que coincida con H, los segmentos $\overline{P_0P_2}$ y $\overline{P_0P_1}$, perpendiculares a LT quedarán uno a continuación del otro y los puntos P_1, P_2 estarán en una misma perpendicular a LT. Esta recta se le llama "línea de referencia".

Este proceso se le llama abatido ó rebatido del plano.

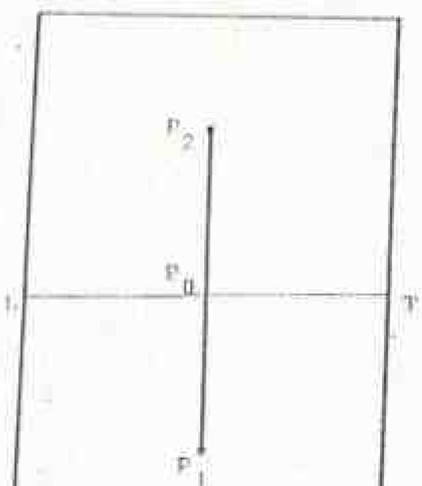
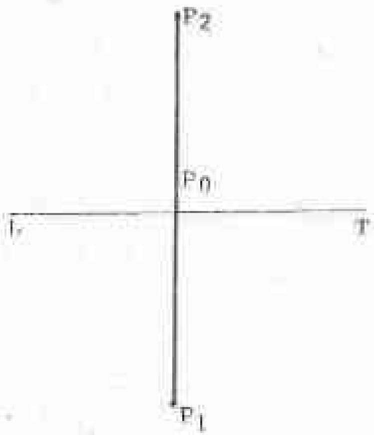


Fig. 4.3

Si se suprime el contorno de los planos la representación toma el aspecto de la figura (4.4) de la cual tenemos los elementos necesarios para individualizar el punto P del espacio.

Figura Descriptiva



(***)

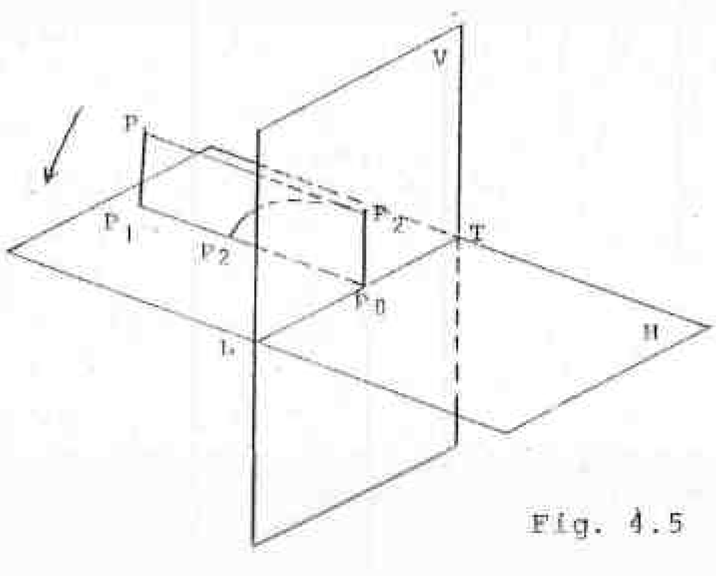
Fig. 4.4

4.1.4 **POSICIONES DEL PUNTO**

a) El punto está situado en la primera región

La figura anterior representa las proyecciones de P.

b) El punto está en la segunda región



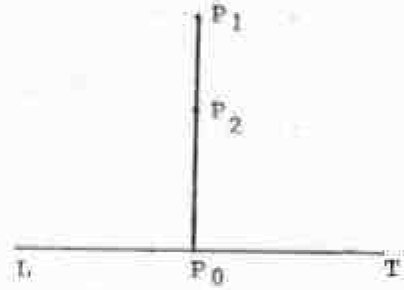


Fig. 4.5

Las dos proyecciones se encuentran arriba de la línea de tierra.

c) El punto está en la región III.

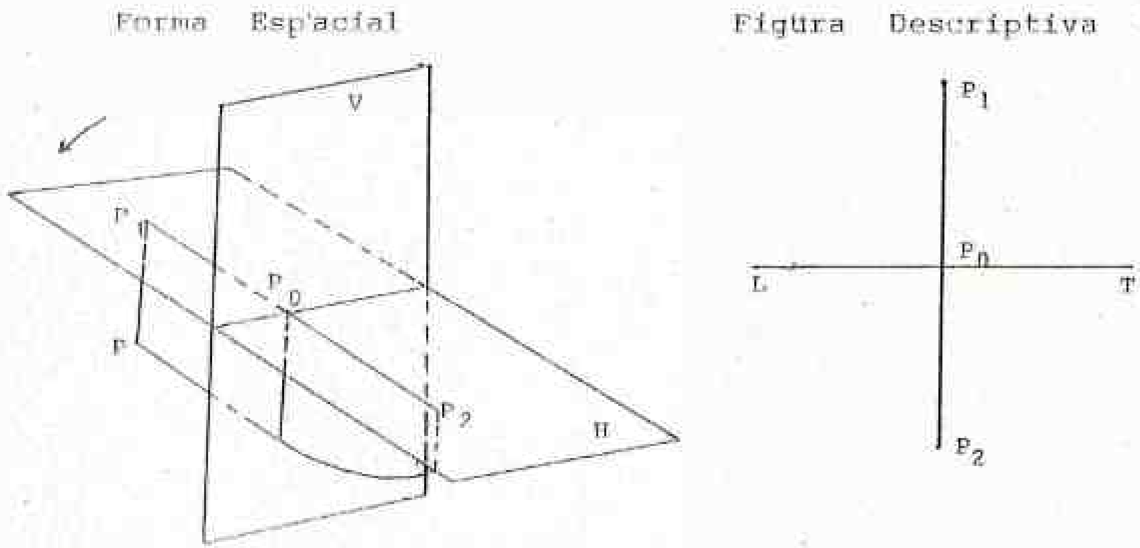


Fig. 4.6

Abatido el plano V sobre H resulta una representación con característica de que P_1 está arriba de LT y P_2 debajo.

d) El punto está en IV.

(**) La fig. del literal d) está en la página 235.

Forma Espacial Figura Descriptiva

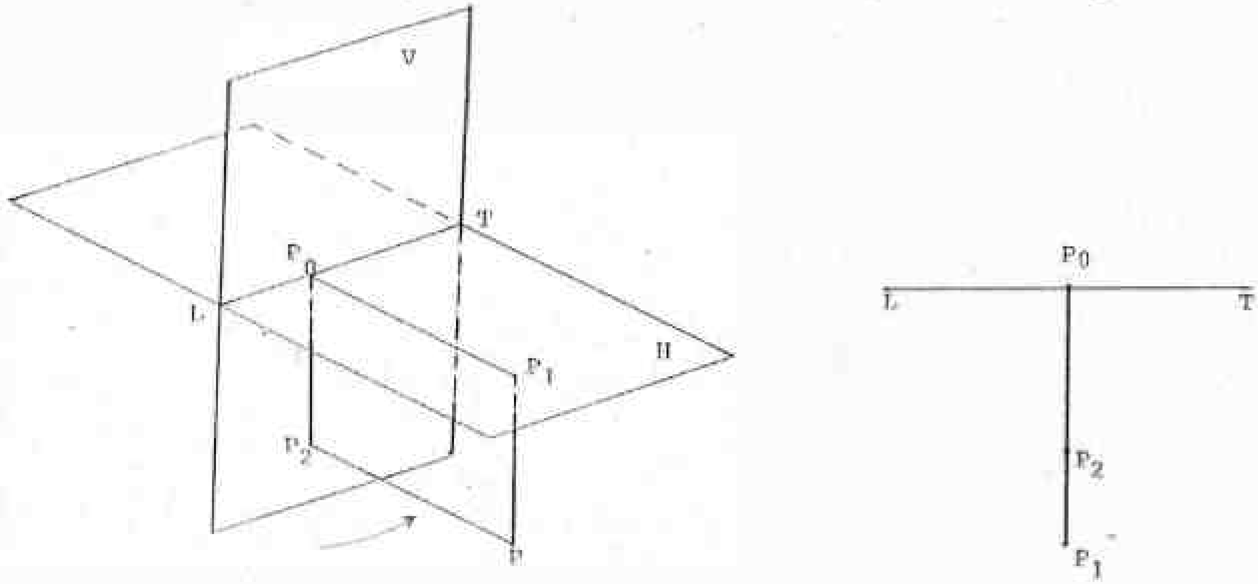


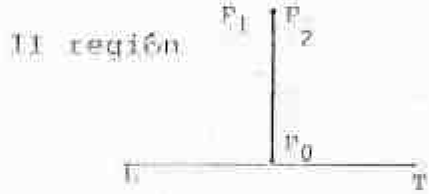
Fig. 4.7

Las dos proyecciones caen debajo de LT.

5.1.5 OBSERVACION:

Los puntos situados en la región II y IV los resultados dependen de los valores de las cotas y de los elejamientos, aunque ambas proyecciones aparecen siempre al mismo lado de LT y sobre una recta perpendicualr a LT.

Si la cota es igual al alejamiento las dos proyecciones se superponen y se obtienen las siguientes figuras.



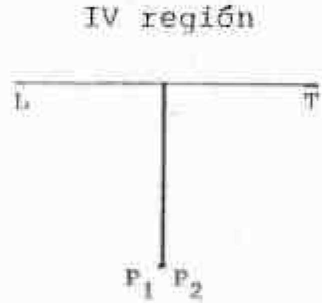


Fig. 4.8

4.1.6 PUNTOS SITUADOS EN UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

1. Si el punto está en H.

La proyección horizontal de P es H. La cota es nula, luego la proyección vertical está en la línea de tierra.

Figura Espacia

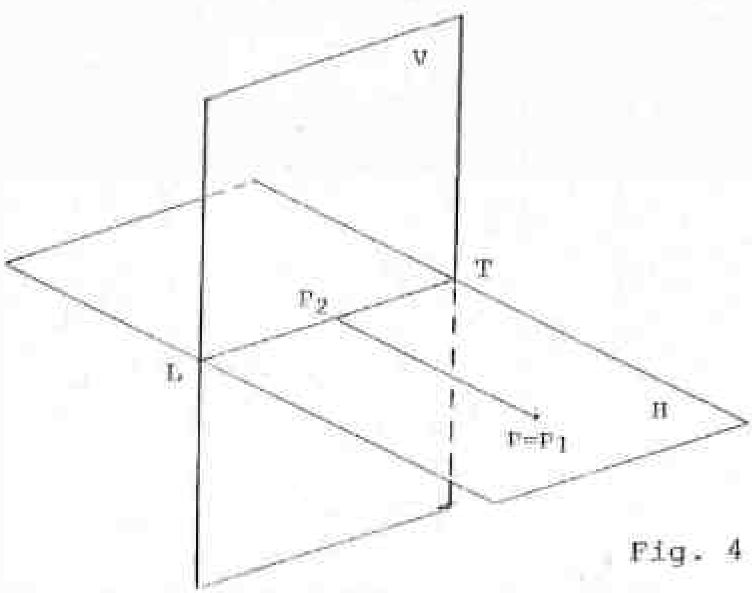


Figura Descriptiva

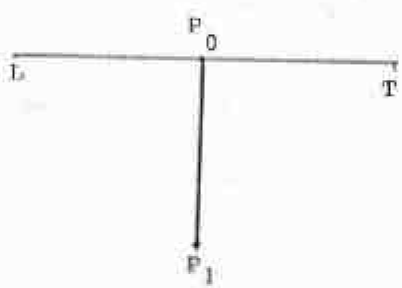


Fig. 4.9

2. Si el punto está en el plano H, pero delante del plano vertical.

La proyección horizontal es nula y sólo tiene alejamiento.

Figura Espacial

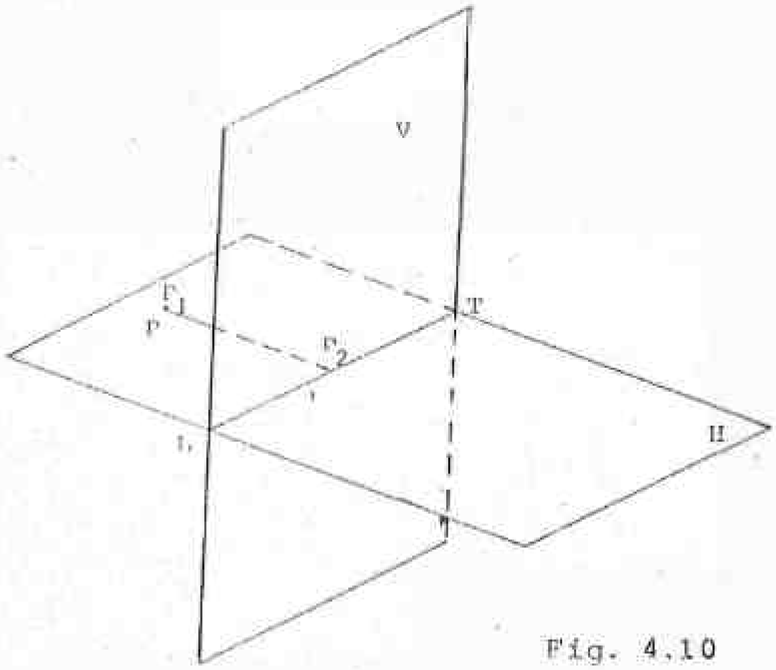


Figura Descriptiva

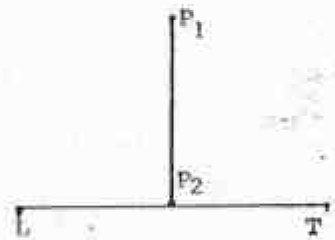


Fig. 4.10

3. Si P está en el plano vertical, el alejamiento es nulo y la proyección horizontal se encuentra en LT.

Figura Espacial

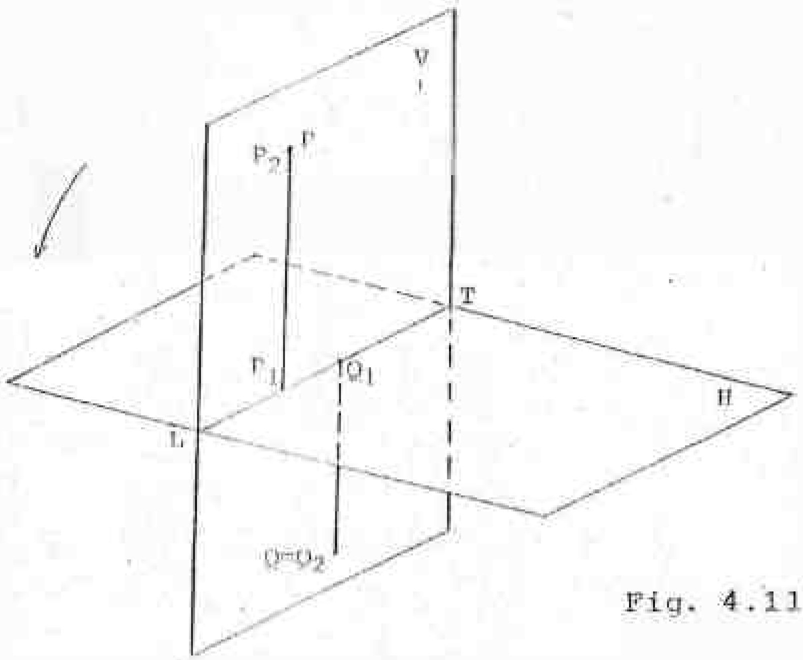


Figura Descriptiva

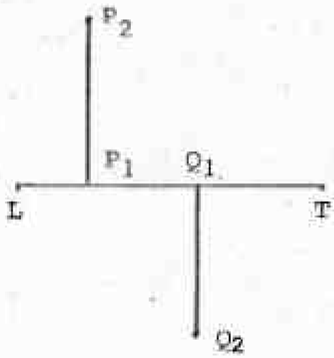


Fig. 4.11

4. Sí el punto está en LT, entonces el punto se confunde con sus proyecciones.

Figura Descriptiva

Fig. 4.12

4.1.7 PLANOS BISECTORES

4.1.7.1 DEFINICION:

Se llama plano bisector de un diedro al plano que pasa por la arista de éste y lo divide en dos partes iguales. De esta manera resultan dos planos bisectores uno para los diedros I y

III y otro para los diedros II y IV.

4.1.7.2 Punto Situado en el Plano Bisector.

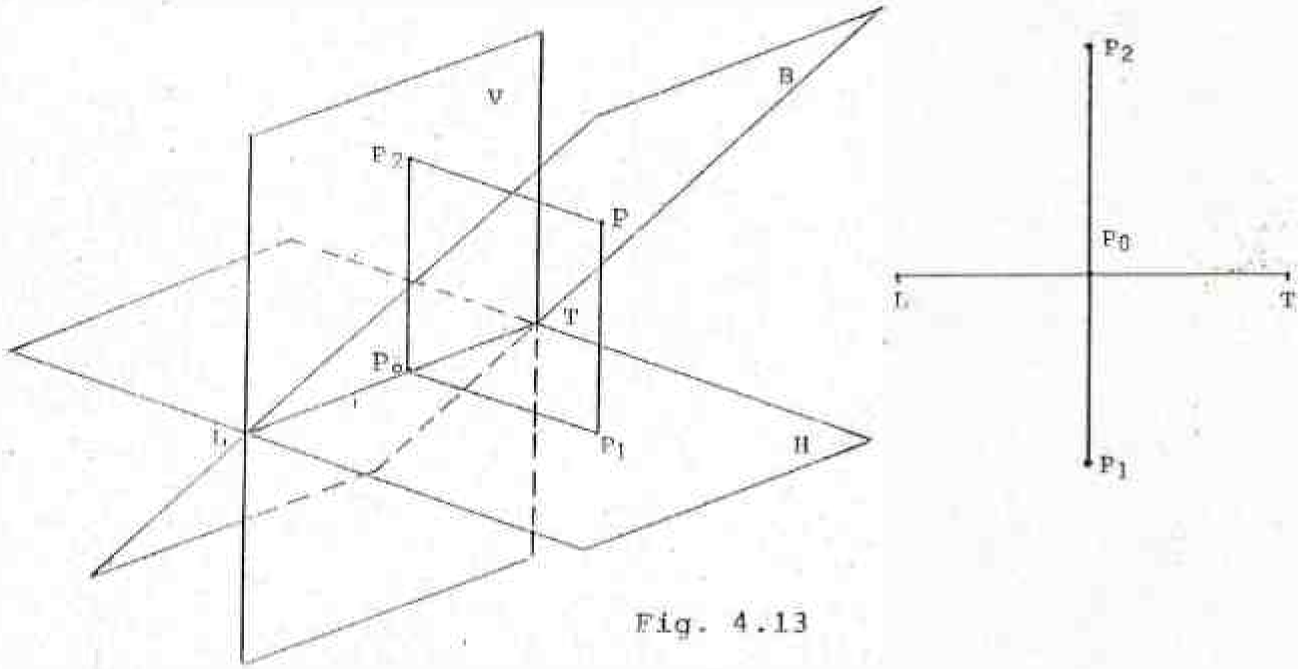


Fig. 4.13

La propiedad para todos los puntos del plano bisector en cualquiera de los diedros es que: equidistan de los dos planos de proyección y P_1, P_2 se encuentran simetricamente con respecto a LT. Es decir:

$$\overline{P_0P_2} = \overline{P_0P_1}$$

Cuando los puntos se encuentran en los planos bisectores de los diedros 2°, 3° y 4° se obtiene la siguiente figura.

Fig. Descriptiva

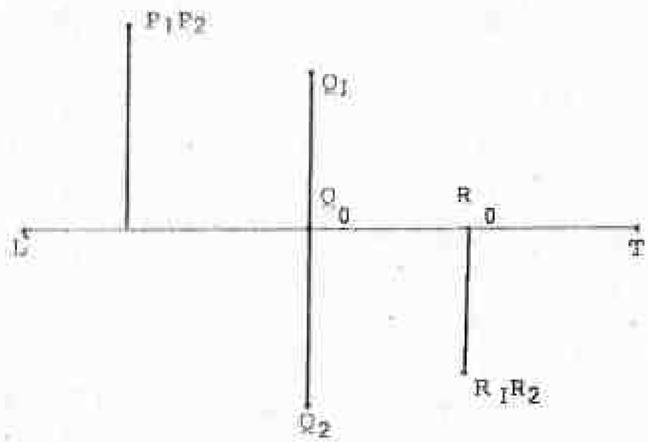


Fig. 4.14

Los puntos P, Q y R estan en el plano bisector

4.1.8 PLANO DE PERFIL

Los planos H y V son suficientes para estudiar las figuras del espacio. En algunos casos es necesario recurrir a otro plano B que es perpendicular a V y H, el cual recibe el nombre de "plano de Perfil" o tercer plano de proyección.

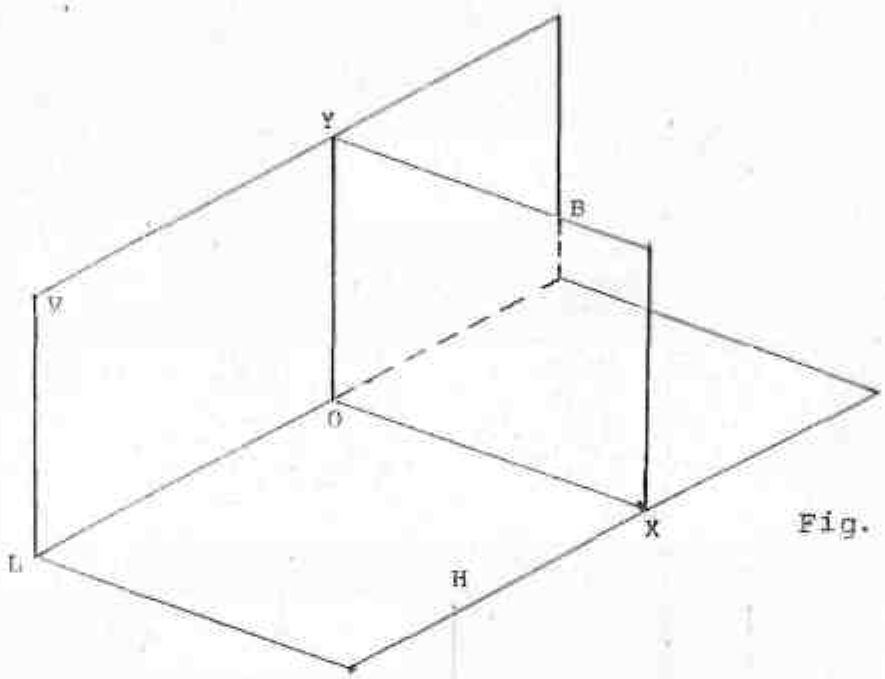


Fig. 4.15

Los tres planos de proyección forman un tiedro trirectangular y las rectas rectangulares se cortan entre si, y concurren en "O"

Para obtener una representación puede abatirse el plano de perfil y sobre el plano horizontal girando alrededor de "OX", o bien sobre el plano vertical girando alrededor de "OY".

4.1.8.1 Sistema de Coordenadas.

1- Para fijar la posición de un punto dentro de un cuadrante se dan las siguientes coordenadas:

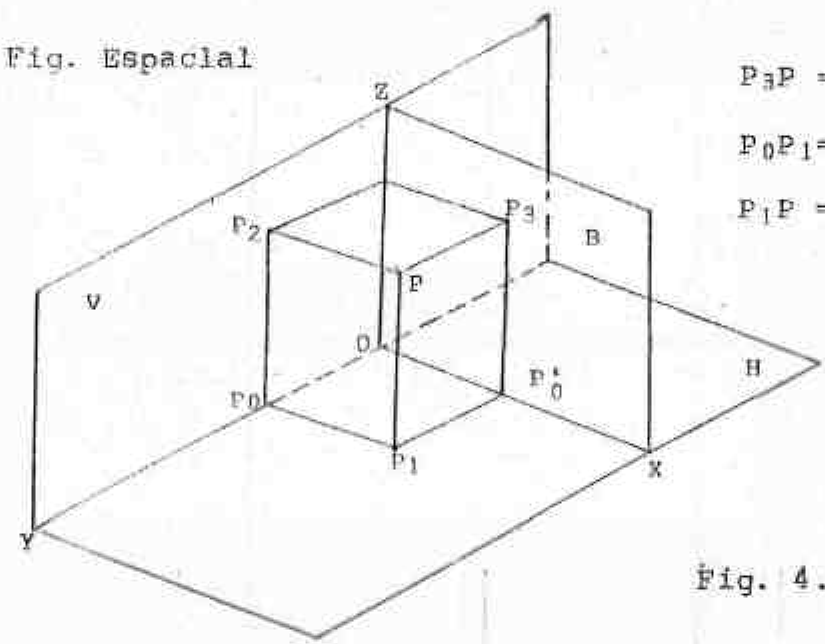
Margen: La distancia de un punto al plano de perfil β

Cota : La distancia que existe entre el punto y el plano horizontal H.

Alejamiento: La distancia entre el punto y el plano vertical de proyección V.

Z: Intersección de los tres planos.

Fig. Espacial



$P_3P = P_1P'_0 =$ Margen

$P_0P_1 = P_2P =$ Alejamiento

$P_1P = P_2P_0 =$ Cota.

Fig. 4.16

La cota: será positiva cuando esté sobre LT.

y negativa cuando esté bajo LT.

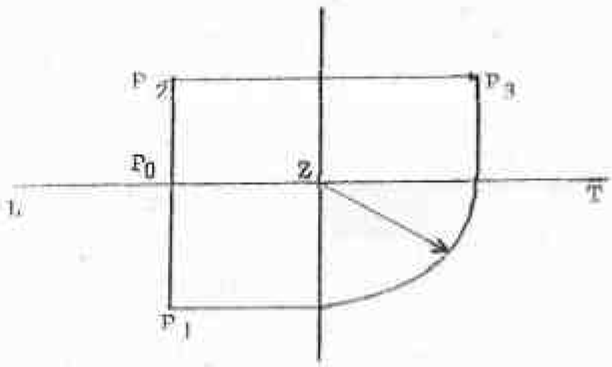


Fig. 4.17

4.1.8.2 Convenciones para el Dibujo

Para que una figura descriptiva pueda ser leida es necesario dibujarla de acuerdo a las siguientes convenciones:

1) Los dos planos de proyección son considerados opacos; en consecuencia sólo son visibles las figuras de la primera región.

2) Las proyecciones de los datos y de los resultados se dibujaran en negro (——) mediante trazos contínuos llenos o trazos pequeños o puntos si son puntos invisibles.

3) Proyecciones de líneas auxiliares se dibujan en forma de pequeños trazos de igual longitud (----) o bien mediante trazos contínuos suaves y muy finos.

4) Líneas auxiliares de cierta importancia, ejes de simetría se presentan por medio de trazos y puntos alternos (-.-.-.-).

NOTA: un punto se puede representar como la terna (M,C,A). (Margen, Cota, Alejamiento).

4.1.9 LA LINEA RECTA

Si se proyecta la recta r, primero sobre el plano H y después sobre el vertical se obtiene r_1, r_2.

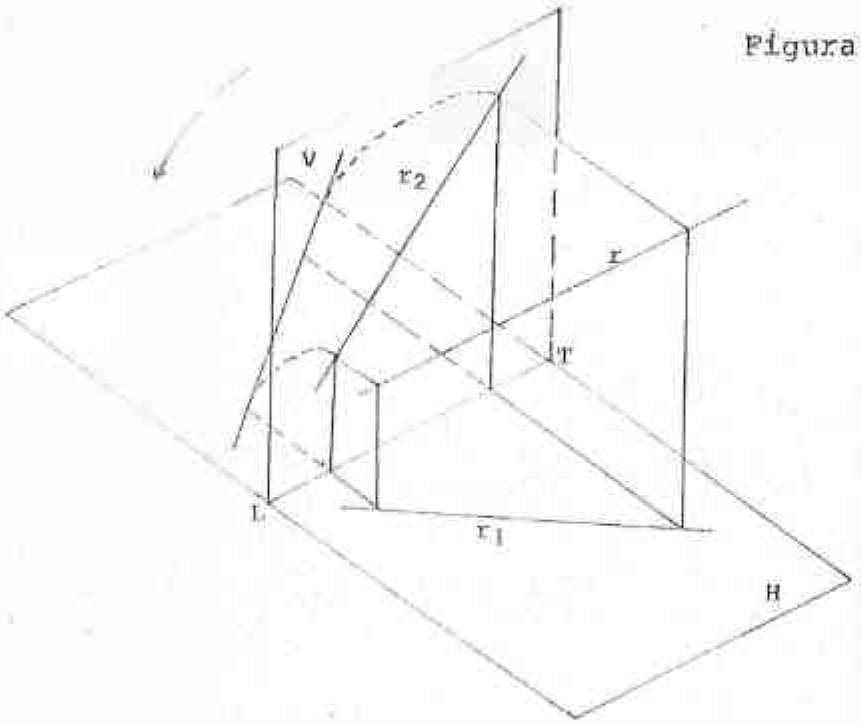


Figura Espacial

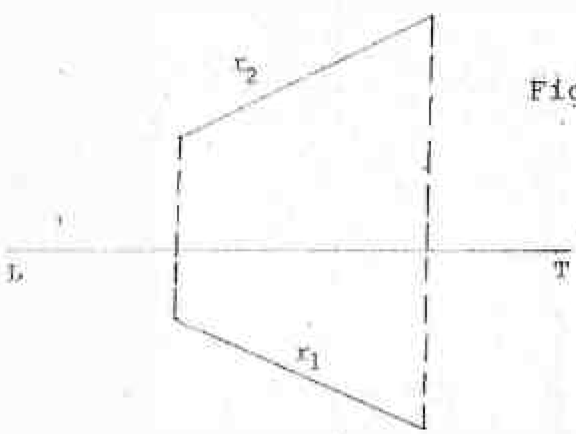


Figura Descriptiva

Fig. 4.18

La figura descriptiva de "r" resulta de abatir el plano V sobre H mediante una rotación alrededor de LT, después de haber obtenido las proyecciones r_1, r_2, las dos rectas resultantes se tienen en H y éstas constituyen la recta objetiva.

Como r_1 es la proyección horizontal ó primera proyección y r_2 la segunda proyección ó proyección vertical, entonces r se escribe $r = (r_1, r_2)$.

Segundo Caso

Como dos puntos determinan una recta, ésta se considera conocida si se dan las proyecciones A_1, A_2, B_1, B_2 de dos de sus puntos A y B.

Figura descriptiva

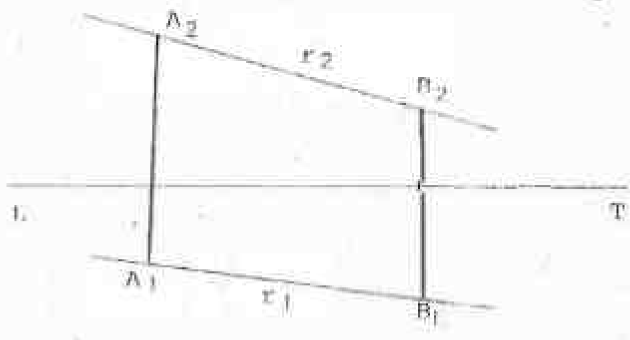


Fig. 4.19

Caso Tres

Si se conocen las proyecciones r_1, r_2 de una recta se determinan las proyecciones P_1, P_2 de un punto P de la recta. Tomando en cuenta que P_1, P_2 deben encontrarse sobre r_1, r_2 respectivamente y sobre una misma perpendicular a LT.

Figura Descriptiva

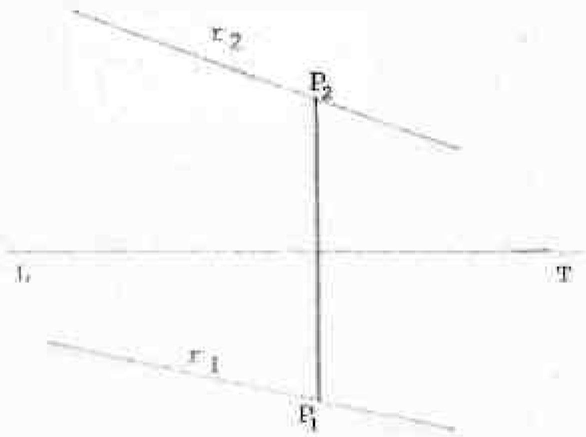


Fig. 4.20

Caso Cuatro.

Si un segmento es dividido por un punto, dada una relación también las proyecciones del punto dividen en la misma relación las proyecciones del segmento.

En consecuencia:

Si $\overline{AB}$ es un segmento y P es el punto que lo dividen en la relación $\frac{m}{n}$, se tiene por el teorema de THALES $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{A_1P_1}{P_1B_1}$ y entonces, si por hipótesis

$\frac{AP}{BP} = \frac{m}{n}$, también $\frac{\overline{A_1P_1}}{P_1B_1} = \frac{m}{n}$, así de esta manera $\frac{\overline{A_2P_2}}{P_2B_2} = \frac{m}{n}$.

En particular, las proyecciones del punto medio de un segmento dividen en dos partes iguales las proyecciones del segmento.

Figura Espacial del caso cuatro

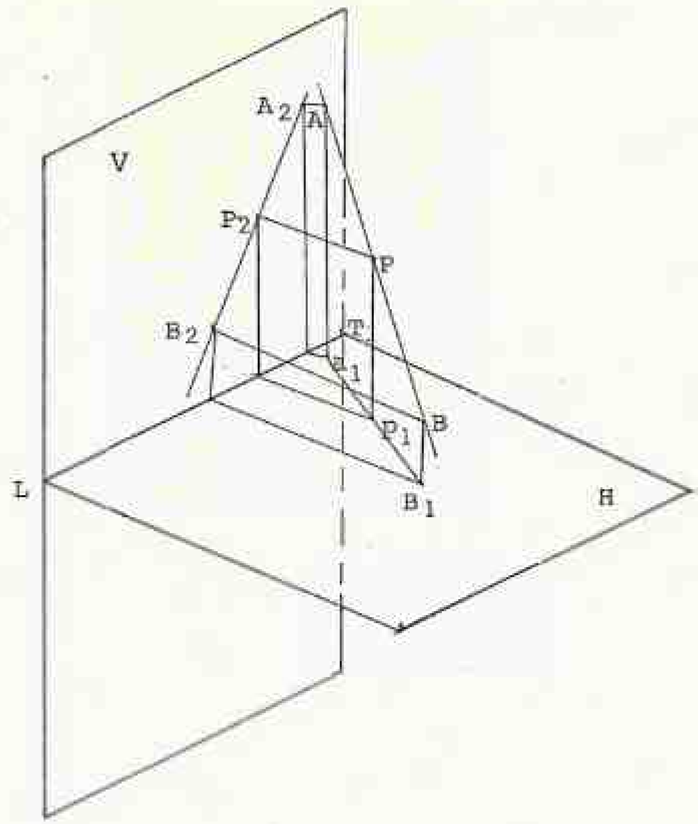


Fig. 4.21

4.1.9.1 Trazas de una Recta.

1) Se llama trazas de una recta los puntos en que ésta encuentra o atraviesa los dos planos de proyección.

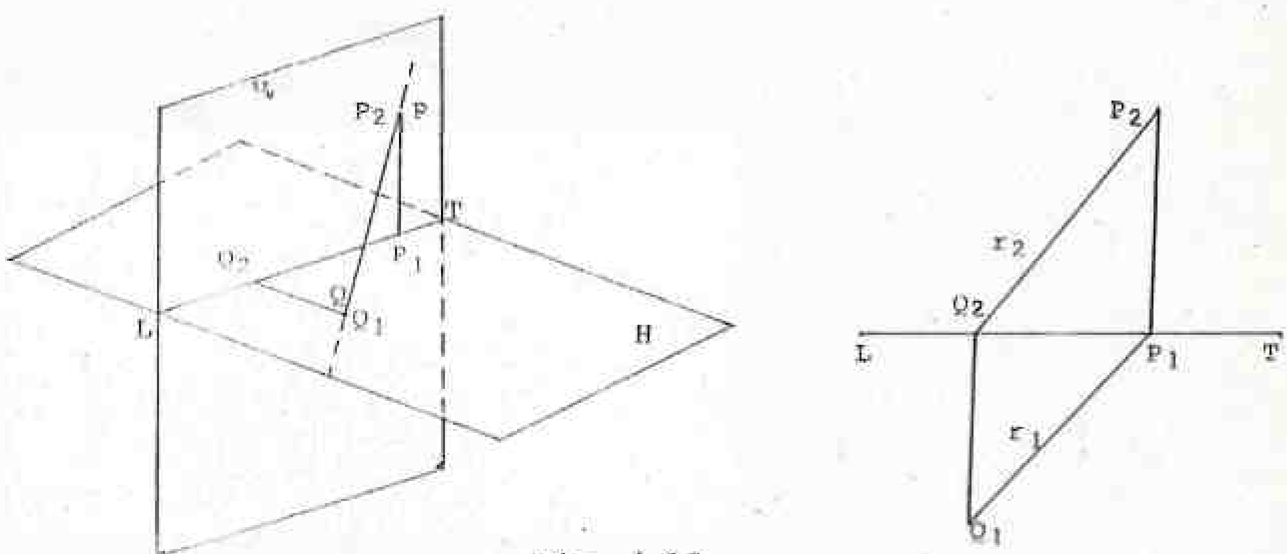


Figura Espacial Fig. 4.22 Figura Descriptiva

El dibujo de la fig. 4.22 permite encontrar las proyecciones r_1, r_2 de la recta r del espacio. Basta unir las proyecciones Q_1 con P_1 y Q_2 con P_2.

2) Si se conocen las proyecciones r_1, r_2 de una recta, es posible determinar sus trazas. Para esto se prolongan las dos proyecciones hasta encontrar LT.

El punto en que encuentra la proyección horizontal a LT da P_1, proyección horizontal de la traza vertical; su proyección vertical se encuentra en P_2 sobre la prolongación de r_2.

El punto en que la proyección r_2 encuentra a LT da Q_2, pro yección vertical de la traza horizontal; la otra proyección se encuentra en Q_1 sobre la prolongación de r_1.

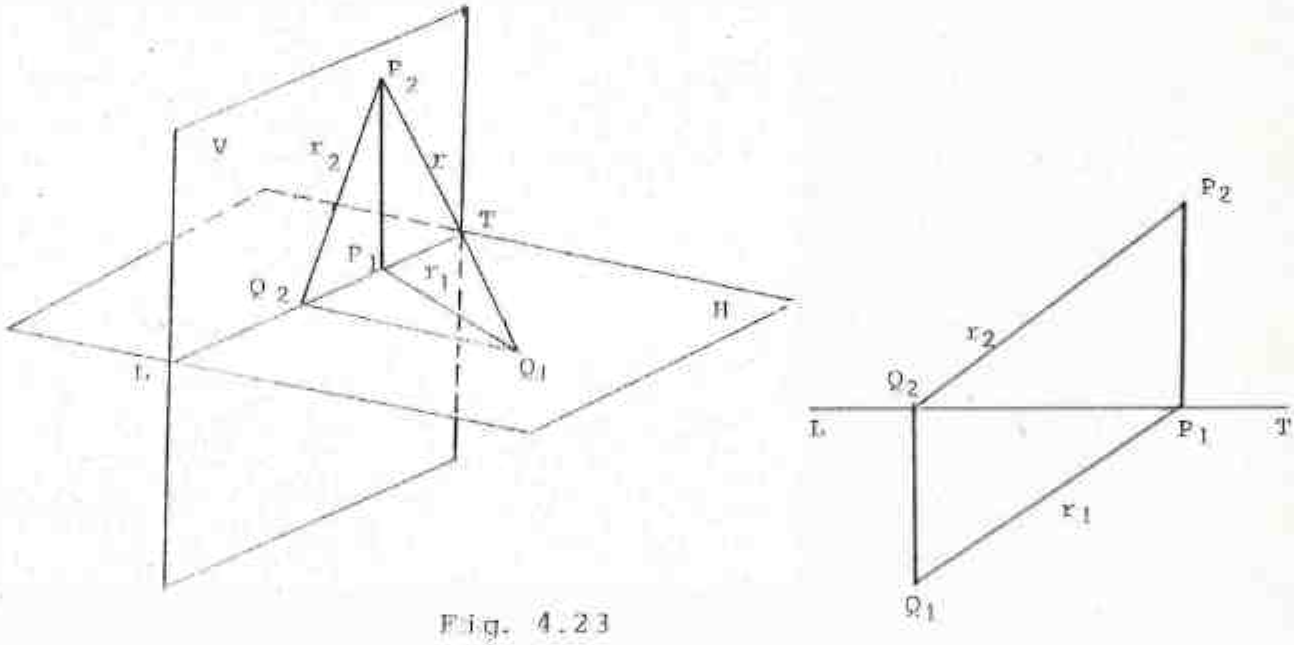
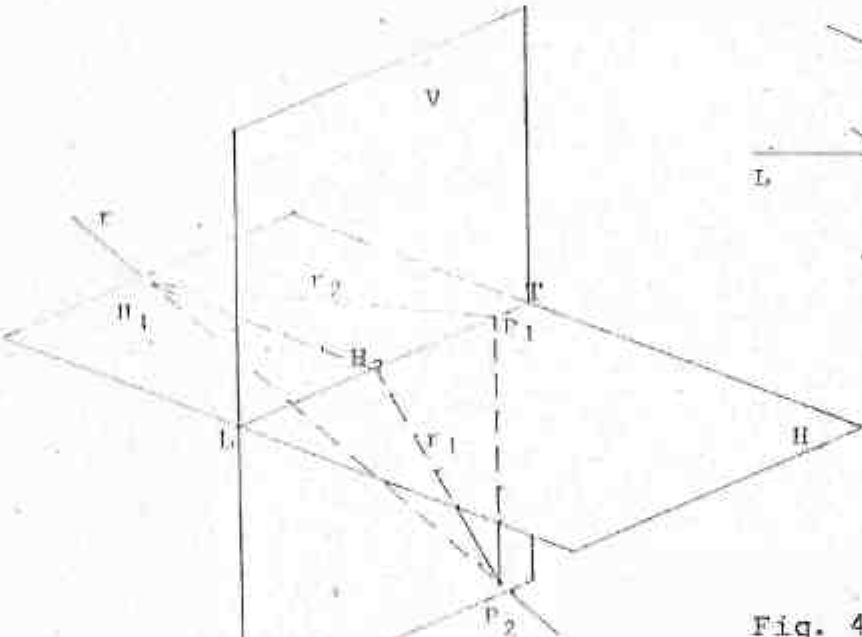


Fig. 4.23

4.1.9.2 Casos en los que la Recta no Atravieza las Cuatro Regiones.

Los trazos de la recta varían su posición con respecto a LT.

Primera Región



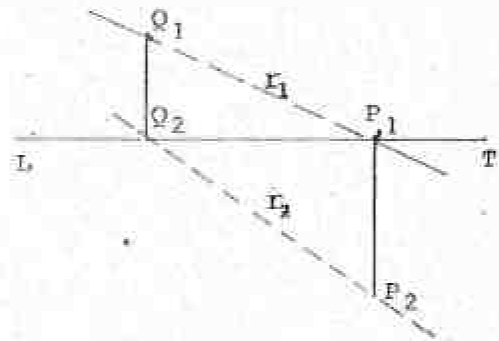
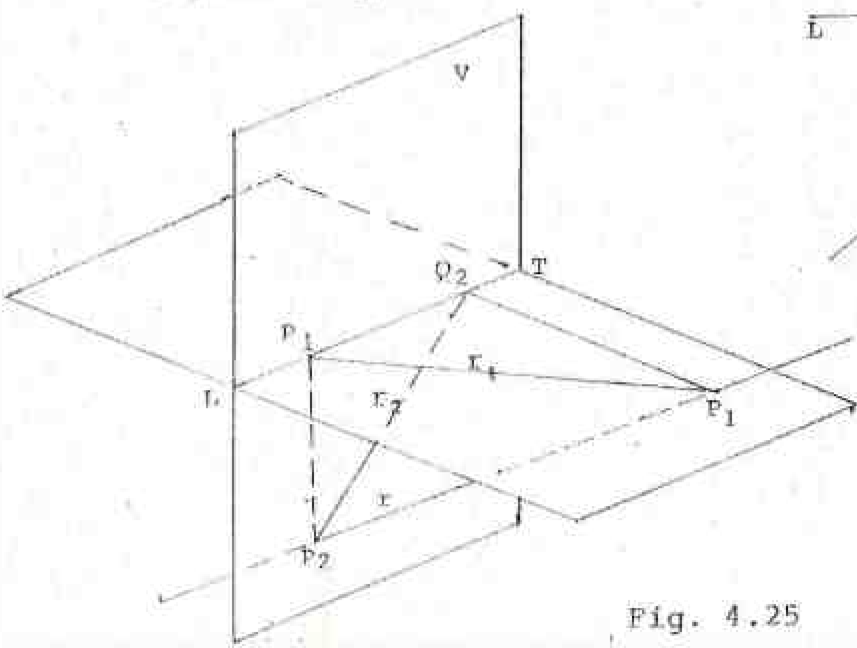


Fig. 4.24

2a Reg. | 4a Reg. | 1a Reg.

Segunda Región



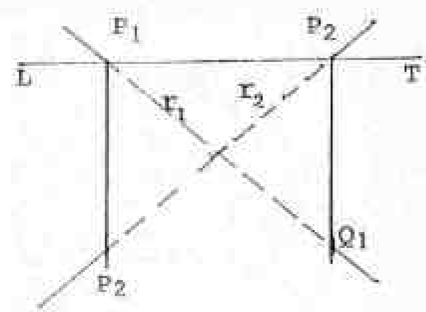


Fig. 4.25

4.1.9.3 Posiciones Particulares de la Recta.

1) Recta Horizontal

Todos los puntos de la recta tiene igual cota, y es paralela al plano horizontal la proyección vertical de "r" es paralela a LT.

La proyección horizontal forma con LT un ángulo igual al que "r" del espacio forma con V. El punto (P_1, P_2) es la traza vertical. Traza horizontal no existe.

Figura Espacial

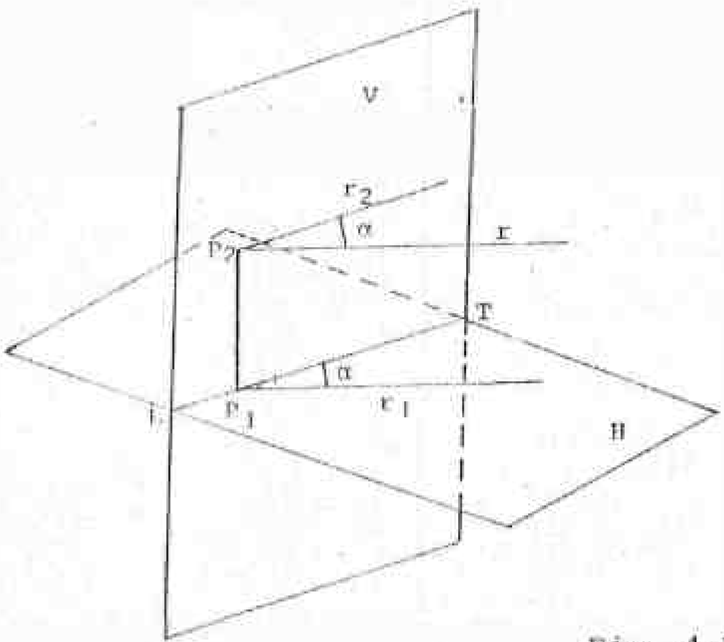


Figura Descriptiva

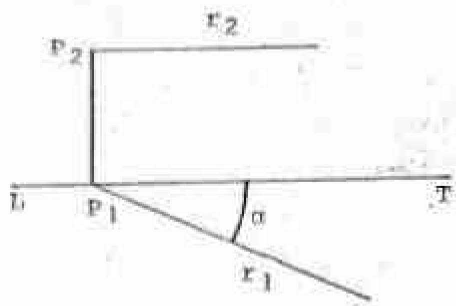


Fig. 4.26

Caso Particular

Si la recta está situada en H. Sus proyecciones son las siguientes:

Figura Descriptiva

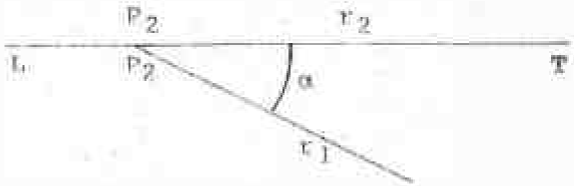


Fig. 4.27

2) Recta Frontal

Como la recta r es paralela a V los alejamientos de todos sus puntos son iguales, su proyección horizontal es paralela a LT.

El ángulo que forma la recta con LT es igual el que forma r en el espacio con el plano V.

Figura Espacial

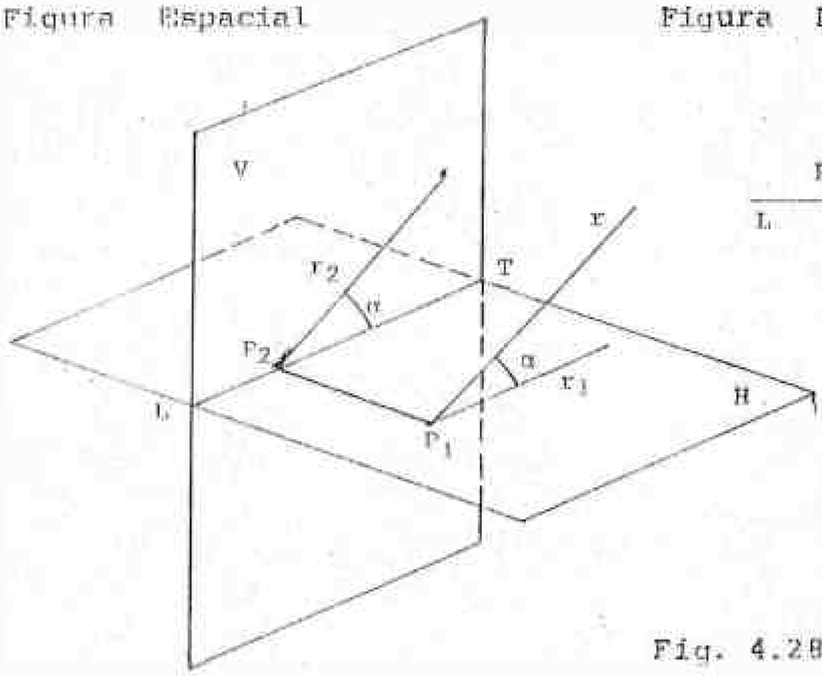


Figura Descriptiva

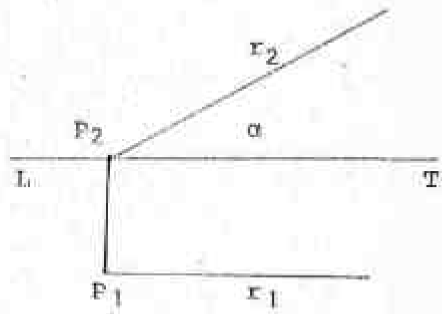


Fig. 4.28

5.2 ROTACIONES

5.2.1 Dada la representación de una figura mediante el método de Monge, a veces es conveniente encontrar la representación de esta figura, después de hacerle describir un movimiento de rotación alrededor de un eje, generalmente perpendicular a uno de los planos de proyección.

4.2.2 CARACTERISTICAS

1) Cada punto de la figura queda siempre a la misma distancia del eje.

2) Si se elige el eje vertical, su proyección horizontal es, un punto; su proyección vertical es una recta perpendicular a LT.

3) Si el eje es perpendicular al plano vertical su proyección vertical es un punto; su proyección horizontal es perpendicular a LT.

4) El movimiento tiene dos sentidos uno en sentido de las manecillas del reloj y el otro en sentido contrario.

4.2.3 IMAGEN DE UN PUNTO CUANDO EL EJE ES VERTICAL

Todos los puntos describen arcos de circunferencias cuyos planos son perpendiculares al eje de rotación y cuyos centros están sobre este eje.

Ejemplo:

Sea $P = (P_1, P_2)$ el punto y θ el ángulo de rotación como en la siguiente figura.

Figura Espacial

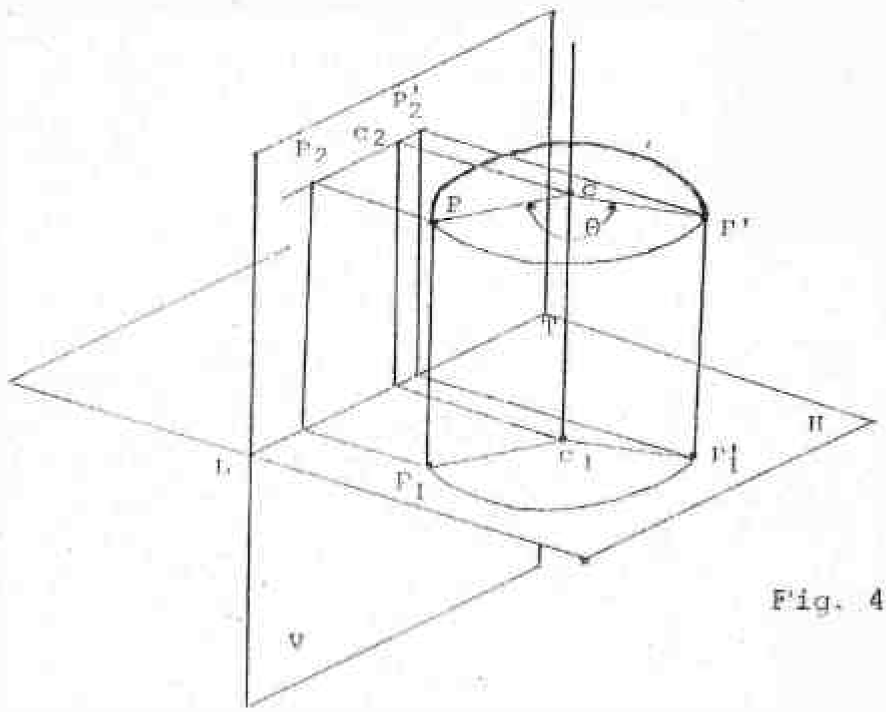


Fig. 4.29

4.2.3.1 Observaciones:

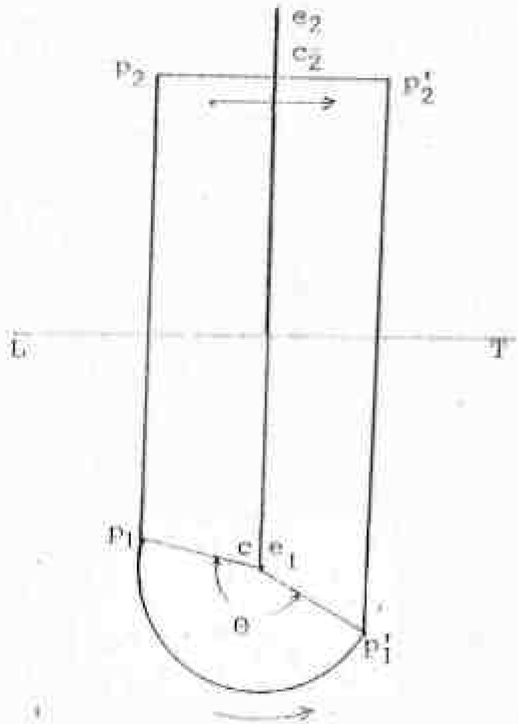
1) Cuando P se mueve describe un arco de amplitud θ con centro en "C" y radio $\overline{CP}$ permanece en un plano paralelo al plano horizontal por lo tanto se proyecta en el mismo plano.

2) El arco $\overline{PP'}$ tiene como proyección horizontal $\overline{P_1P_1'} = \overline{PP'}$

3) Su proyección vertical es el segmento de recta $\overline{P_2P_2'}$ paralelo a LT.

En conclusión se puede decir que cuando el punto P del espacio describe un arco de amplitud θ y radio $\overline{CP}$, su proyección horizontal P_1 describe un arco de centro C_1, amplitud θ y radio $\overline{C_1P_1} = \overline{CP}$, su proyección P_2 se traslada en forma paralela a LT.

Figura Descriptiva



4.2.4 IMAGEN DE UN PUNTO POR UNA ROTACION ALREDEDOR DE UN EJE DE PUNTA.

El punto $P = (P_1, P_2)$ describe una figura como la siguiente con una amplitud θ y en sentido contrario.

Figura Espacial

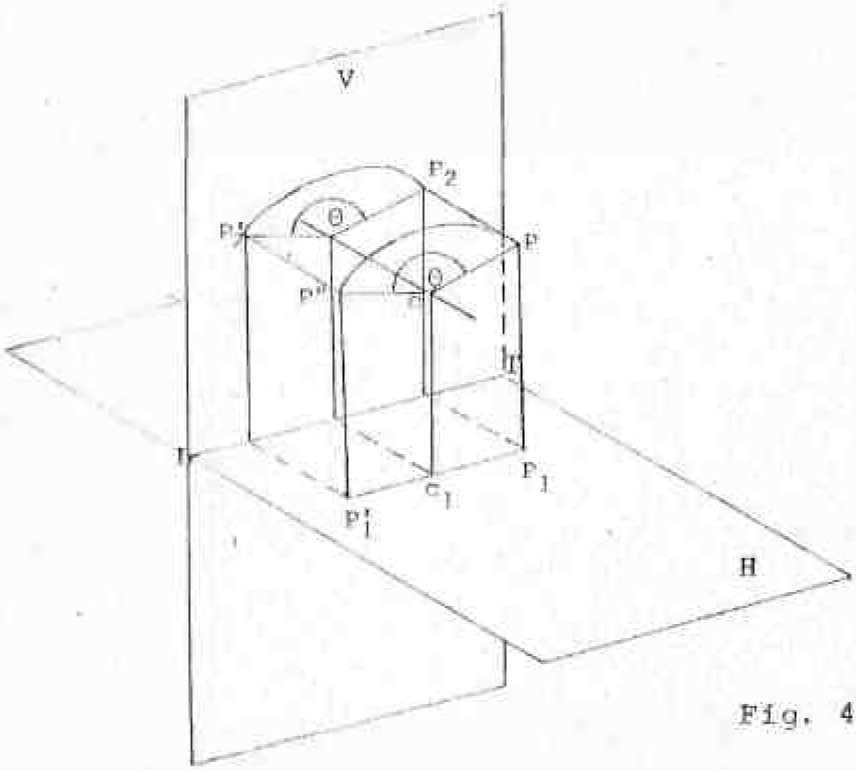


Fig. 4.32

Figura Descriptiva

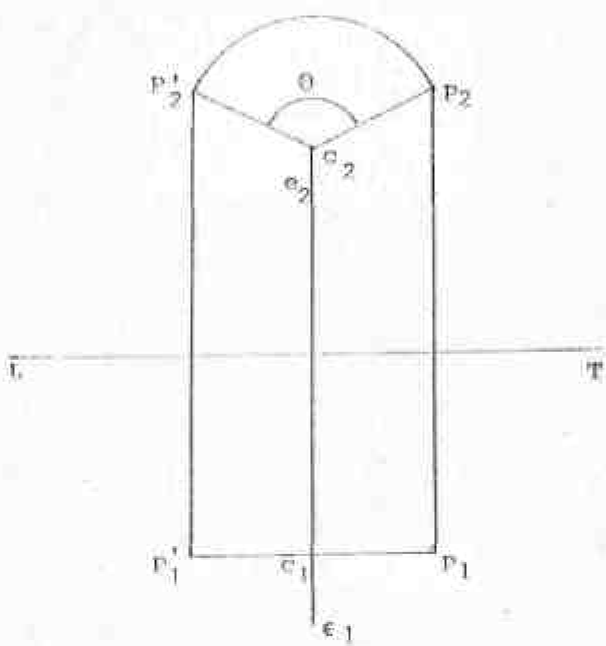


Fig. 4.33

4.2.5 IMAGEN DE UNA RECTA POR UNA ROTACION

a) Sea (r_1,r_2) la recta dada, (d_1,d_2) eje de rotación y θ amplitud o ángulo de rotación.

Como dos puntos determinan una recta basta rotar dos puntos cualquiera de la recta es decir: (A_1,A_2) y $(B1,B_2)$.

Figura Descriptiva

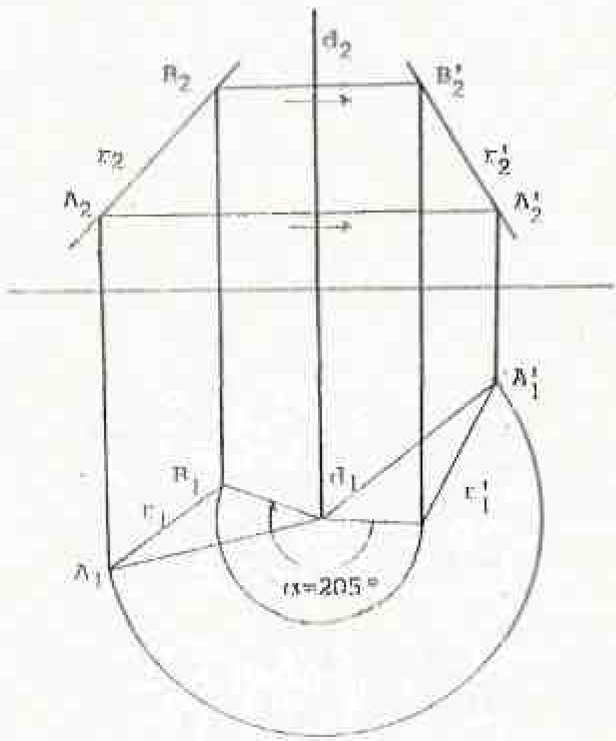


Fig. 4.34

Aplicando las indicaciones para la rotación de puntos se obtienen las nuevas proyecciones (r'_1,r'_2) de la recta r.

b) Si elegimos un eje de rotación vertical ó perpendicular al plano H; un ángulo θ y en sentido del reloj.

El punto de intersección (P_1, P_2) queda inmovil y entonces basta hacer girar solamente un punto de la recta dada, en este caso (A_1, A_2).

Figura Descriptiva

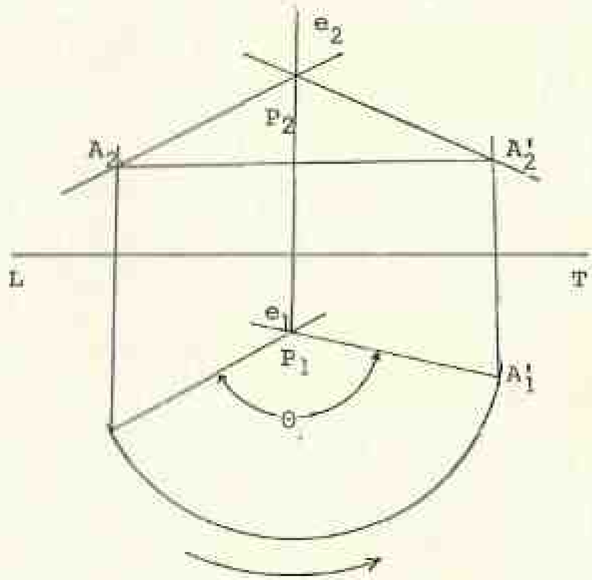


Fig. 4.35

B I B L I O G R A F I A

* JEAN DIEUDONNE / HERMANN

" ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE ELEMENTAIRE "

* C. GAUTIER
C. THIERCE

" MATHEMATIQUE PREMIERES S E T E
GEOMETRIE"

* JEAN FRENKEL / HERMANN

"GEOMETRIE POUR L ELEVE - PROFESSEUR"
(SEGUNDA EDICION)

* M. BERGER / SPRINGER-VERLAG

" GEOMETRY I "

* ERNEST SNAPPER
AND / ACADEMIC PRESS
ROBERT. J. TROYER

" METRIC AFFINE GEOMETRY "

* GUSTAVE CHOQUET / HERMANN

" L ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE "

* ROGER GODEMENT / HERMANN

" COURS D ALGEBRE "

* J. A. ARUSTAMOV

" PROBLEMAS DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA "

* D. DI PIETRO

"GEOMETRIA DESCRIPTIVA "