

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
ESCUELA DE POSGRADOS**



**TITULO:**

PROPUESTA DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL DESARROLLO DEL CONTENIDO “VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN COMO APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA” UTILIZANDO GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA TECNOLÓGICA PARA ESTUDIANTE DEL CICLO II DE CÁLCULO INTEGRAL EN LA CARRERA DE INGENIERÍA EN LA UNIVERSIDAD DON BOSCO

**PRESENTADO POR:**

KAREN BRIZEIDA CAMPOS DE ESPINOZA (CM09055)

DAVID OMAR ESPINOZA CORTEZ (EC09011)

**TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL TITULO DE:**

MAESTRÍA EN FORMACIÓN PARA LA DOCENCIA UNIVERSITARIA

**ASESORA**

MAESTRA GLADYS EUGENIA PAREDES

**CIUDAD UNIVERSITARIA, DR. FABIO CASTILLO FIGUEROA, SAN  
SALVADOR, EL SALVADOR, CENTROAMERICA, SEPTIEMBRE DE 2024**

**AUTORIDADES UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

MAESTRO RÓGER ARMANDO ARIAS ALVARADO  
**RECTOR**

DOCTOR RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ  
**VICERRECTOR ACADÉMICO**

INGENIERO JUAN ROSA QUINTANILLA QUINTANILLA  
**VICERRECTOR ADMINISTRATIVO**

INGENIERO FRANCISCO ANTONIO ALARCÓN SANDOVAL  
**SECRETARIO GENERAL**

LICENCIADO LUÍS ANTONIO MEJÍA LIPE  
**DEFENSOR DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS**

LICENCIADO RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN  
**FISCAL GENERAL**

**AUTORIDADES FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**

MAESTRO WUILMAN HERRERA RAMOS  
**DECANO**

MAESTRA SANDRA LORENA BENAVIDES DE SERRANO  
**VICEDECANA**

MAESTRO YUPILTSINCA ROSALES CASTRO  
**SECRETARIO**

MAESTRO RAFAEL PAZ NARVÁEZ  
**DIRECTOR ESCUELA DE POSGRADO**

MAESTRO ALEJANDRO DE LEÓN CRUZ  
**COORDINADOR DEL PROGRAMA**

## **AGRADECIMIENTOS**

- a) Agradecemos a Dios por darnos la sabiduría necesaria en la realización de este trabajo y la oportunidad de finalizar un proyecto más como parte de nuestra formación académica y personal.
  
- b) Agradecemos a nuestra familia por el apoyo incondicional que nos brindaron, por el tiempo que nos dedicaron durante el recorrido de nuestro proyecto.

Karen Campos y David Espinoza

## ÍNDICE GENERAL

RESUMEN.....	13
INTRODUCCIÓN .....	14
CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	17
1.1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA .....	17
1.2. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN .....	19
1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN .....	19
1.3.1. Objetivo general .....	19
1.3.2. Objetivos específicos.....	19
1.4. JUSTIFICACIÓN.....	20
CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO O REFERENCIAL.....	21
2.1. APRENDIZAJE COOPERATIVO .....	21
2.2. MÉTODO ELI (ENSEÑANZA LIBRE DE IMPROVISACIÓN) .....	22
2.3. REGISTRO DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS .....	24
2.4. SECUENCIA DIDÁCTICA .....	25
2.4.1. Situación problemática contextualizada.....	26
2.4.2. Competencias .....	27
2.4.3. Tareas del docente.....	29
2.4.4. Actividades de los estudiantes.....	29
2.4.5. Evaluación.....	29
2.5. LA INTEGRAL DEFINIDA.....	30
2.6. DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA .....	31
2.6.1. Métodos de Integración.....	31
2.6.2. Definición de sólido de revolución .....	35
2.6.3. Algunas aplicaciones importantes donde se utiliza la integral definida.....	35
2.7. HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS COMO AUXILIARES PARA RESOLVER VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN .....	36
2.7.1. Programa Dinámico para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. GeoGebra 36	
2.7.2. Modelación con Tracker para el aprendizaje de movimientos en el plano .....	38
CAPÍTULO III. DISEÑO METODOLÓGICO .....	40
3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN.....	40
3.1.1. Metodología de la investigación.....	40
3.1.2. La población de estudio.....	40
3.1.3. Muestra.....	41

3.2.	TÉCNICA DE INVESTIGACIÓN .....	41
3.2.1.	Encuesta .....	41
3.2.2.	Instrumento para la recolección de datos .....	41
3.2.3.	El cuestionario.....	41
3.3.	PLAN DE COLECTA DE LA INFORMACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS 42	
3.3.1.	Operacionalización de las categorías .....	42
CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LOS RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN... 47		
4.1.	DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA DE ESTUDIO.....	47
4.2.	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS .....	47
4.2.1.	Perspectiva del estudiante .....	48
4.2.1.1.	Análisis de los resultados en encuesta a los estudiantes.....	48
4.2.1.2.	Conclusión sobre la perspectiva del estudiante parte I.....	56
4.2.1.3.	Conclusión sobre la perspectiva del estudiante parte II .....	64
4.2.2.	Perspectiva del docente .....	65
4.2.2.1.	Análisis de los resultados en encuesta a docentes .....	65
4.2.2.2.	Conclusión sobre la perspectiva del docente parte I .....	74
4.2.2.3.	Conclusión sobre la perspectiva del docente parte II .....	86
CAPÍTULO V. PROPUESTA DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA .....		87
5.1.	DESCRIPCIÓN DE LAS GENERALIDADES Y ELEMENTOS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA.....	87
5.2.	PROPUESTA DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA .....	90
CONCLUSIONES .....		119
RECOMENDACIONES .....		121
REFERENCIAS .....		123
ANEXOS.....		125

## INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Esquema de secuencia didáctica .....	26
Figura 2. Relación entre competencia y desempeño .....	28
Figura 3. Elementos de una competencia .....	28
Figura 4. Esquema de una tarea integradora.....	29
Figura 5. Esquema de evaluación .....	30
Figura 6. Sólido de revolución .....	35
Figura 7. Región plana girada entorno al eje $x$ .....	38
Figura 8. Modelo gráfico y numérico del recipiente .....	39
Figura 9. Explicación clara del docente.....	48
Figura 10. Utiliza recursos electrónicos el docente.....	49
Figura 11. El docente es ordenado y sistemático en el desarrollo de la clase .....	50
Figura 12. El docente clarifica la importancia del tema .....	51
Figura 13. El docente realiza ejercicios y problemas de diferente nivel de dificultad .....	52
Figura 14. El docente propone diferentes actividades en el desarrollo del contenido.....	53
Figura 15. El docente procura que apliquen el contenido .....	54
Figura 16. El docente establece una relación entre conocimiento nuevo y previo .....	55
Figura 17. El estudiante sabe que conocimientos previos debe tener para el estudio del contenido .....	57
Figura 18. Conocimientos previos que posee el estudiante.....	58
Figura 19. Programas o herramientas tecnológicas que utiliza el docente.....	60
Figura 20. Estrategias utilizadas por el docente .....	61
Figura 21. Dificultades en el tema Volumen de Sólidos de Revolución.....	62
Figura 22. Identificación del Sólido .....	63
Figura 23. El estudiante muestra dominio en los conocimientos previos .....	65
Figura 24. El estudiante comprende la aplicabilidad de la integral definida.....	66
Figura 25. El estudiante participa activamente en el desarrollo de la clase .....	67
Figura 26. El estudiante participa activamente en las actividades propuestas por el docente .....	68
Figura 27. El estudiante propone ideas o soluciones a los ejercicios o problemas .....	69
Figura 28. El estudiante evidencia sus avances por medio de ejercicios y problemas propuestos por el docente .....	70
Figura 29. El estudiante realiza una lectura previa sobre los materiales compartidos por el docente.....	71

Figura 30. El estudiante realiza una investigación previa utilizando otros medios fuera de los que proporciona el docente .....	72
Figura 31. El estudiante realiza consultas fuera del horario de clases .....	73
Figura 32. El docente realiza una exploración de conocimientos previos.....	75
Figura 33. Estrategias que utilizo el docente para explorar conocimientos previos.....	76
Figura 34. Estrategias metodológicas que el docente implemento en el desarrollo del contenido .....	77
Figura 35. El docente utilizo estrategias tecnológicas o programas para explicar el contenido .....	81
Figura 36. El docente explica la aplicabilidad del contenido .....	83
Figura 37. Fotografía del objeto .....	106
Figura 38. Fotografía insertada en el programa Tracker .....	106
Figura 39. Selección sobre la cantidad de puntos en contorno de objeto.....	107
Figura 40. Selección del sistema de coordenada en la fotografía.....	108
Figura 41. Grafica de la trayectoria de puntos en el contorno de la fotografía .....	109
Figura 42. Tabla de datos de la posición de puntos en el contorno de la fotografía .....	110
Figura 43. Curva del polinomio que se ajusta mejor a los datos .....	111
Figura 44. Grafica en 3D de simulación del objeto empleando GeoGebra.....	117

## INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Cálculo de volumen empleando GeoGebra.....	37
Tabla 2. Operacionalización de las categorías.....	46
Tabla 3. El docente explica con claridad el tema .....	48
Tabla 4. El docente hace uso de diferentes recursos tecnológicos para explicar con detalle el tema .....	49
Tabla 5. El docente es ordenado y sistemático en el desarrollo de la clase.....	50
Tabla 6. El docente ha clarificado la importancia del tema.....	51
Tabla 7. El docente ejemplifica con ejercicios y problemas de diferente grado de dificultad .....	52
Tabla 8. El docente expone el tema con diferentes actividades que permitan aplicar los conceptos para garantizar su comprensión. ....	53
Tabla 9. El docente procura que los estudiantes apliquen los conceptos adquiridos del tema .....	54
Tabla 10. El docente relaciona los nuevos conceptos con los conocimientos previos.....	55
Tabla 11. ¿Conoces cuáles son los conocimientos previos que debes tener para iniciar el estudio del tema? .....	57
Tabla 12. Selecciona los conocimientos que posees para el inicio del estudio del tema .....	58
Tabla 13. ¿Qué herramientas tecnológicas o programas utiliza el docente para apoyar la explicación del tema? .....	59
Tabla 14. ¿Qué estrategias metodológicas observas que utiliza el docente para explicar el tema?.....	61
Tabla 15. Del tema sólidos de revolución, que es lo que más se te dificulta: .....	62
Tabla 16. Conociendo la región plana y el eje de revolución, ¿Puedes identificar la figura del sólido?.....	63
Tabla 17. El estudiante muestra dominio en los conocimientos previos para comprender el tema .....	65
Tabla 18. El estudiante comprende la aplicabilidad de la integral definida.....	66
Tabla 19. El estudiante participa activamente en el desarrollo de la clase al impartir el tema .....	67
Tabla 20. El estudiante participa activamente en las actividades propuesta y asignadas por el docente.....	68
Tabla 21. ¿Se observa que el estudiante propone ideas o soluciones a los ejercicios y problemas planteados?.....	69

Tabla 22. El estudiante evidencia sus avances en su comprensión por medio de la resolución de los ejercicios y problemas propuestos por el docente .....	70
Tabla 23. El estudiante realiza una lectura previa sobre los materiales (Libros, videos, documento, etc.) proporcionados por el docente.....	71
Tabla 24. Se evidencia en clases que el estudiante realiza una investigación previa al tema utilizando otros medios fuera de los que proporciona el docente.....	72
Tabla 25. El estudiante realiza consultas a su docente para resolver dudas del tema en horarios fuera de la clase .....	73
Tabla 26. ¿Realiza una exploración de conocimientos previos al inicio del desarrollo del tema?.....	75
Tabla 27. ¿Cuáles de las siguientes estrategias utilizó para explorar los conocimientos previos?.....	76
Tabla 28. ¿Cuáles de las siguientes estrategias metodológicas implementó en el desarrollo del contenido “Volumen de Sólidos de Revolución”? .....	77
Tabla 29. ¿Qué estrategia metodológica considera usted que mejor le funcionó en el desarrollo del tema?.....	79
Tabla 30. ¿Podría mencionar que actividades formativas o sumativas realizó en el desarrollo del tema?.....	80
Tabla 31. ¿Utilizó herramientas tecnológicas o programas para apoyar la explicación del tema o en las actividades propuestas? .....	81
Tabla 32. ¿Podría mencionar las herramientas o programas utilizados en el desarrollo del contenido o actividades propuestas?.....	82
Tabla 33. Da una breve explicación al estudiante de la aplicabilidad que el contenido tiene en actividades de la cotidianeidad. ....	83
Tabla 34. Por su experiencia ¿Puede mencionar e identificar lo que más le dificulta al estudiante para comprender del tema?.....	84
Tabla 35. Propuesta de secuencia didáctica.....	102

## RESUMEN

A continuación con la presente investigación se tiene por objetivo fundamental elaborar la propuesta de una secuencia didáctica para el desarrollo del contenido “Volumen de Sólidos de Revolución como aplicación de la Integral Definida” utilizando GeoGebra como herramienta tecnológica para estudiantes del ciclo II de Cálculo Integral en las carreras de ingeniería en la Universidad Don Bosco, año 2022, considerando dicho instrumento didáctico como una herramienta que le permita a los docentes que imparten esta asignatura tener un insumo más en el desarrollo de su práctica docente en dicho contenido. Dicha propuesta será diseñada en base a las teorías de representaciones semióticas, metodología ELI y uso del software educativo GeoGebra, utilizando como auxiliar el programa Tracker, para ello haremos uso del método cualitativo-cuantitativo para poder recolectar y analizar información sobre la enseñanza de los docentes y el aprendizaje de los estudiantes basándonos en una encuesta con los docente de la materia y una encuesta a los estudiantes de cálculo integral, ciclo II, año 2022, para determinar si los estudiantes presentan dificultades en la visualización de sólidos de revolución, en el planteamiento de la integral definida que representa el volumen de un sólido de revolución y si el uso de herramientas tecnológicas en el desarrollo del contenido les motiva y ayuda a la comprensión. Además, se presenta la fundamentación teórica de investigaciones relacionadas al tema de estudio, se describe el método ELI, qué es GeoGebra y para qué se utiliza.

**Palabras clave:** Método ELI, GeoGebra, Representación Semiótica, Programa Tracker, Integral Definida, Sólido de Revolución

## INTRODUCCIÓN

La intención de la presente investigación es presentar la propuesta de una secuencia didáctica para el desarrollo del contenido “Volumen de Sólidos de Revolución” aplicando la integral definida y haciendo uso del software educativo GeoGebra como herramienta tecnológica para estudiantes del ciclo II de la asignatura de Cálculo Integral de Ingeniería en la Universidad Don Bosco, año 2022, El Salvador; con la presente investigación se pretende determinar las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de esta temática y generar un insumo como apoyo para el docente en la asignatura de cálculo integral; dicha propuesta estará basada en la aplicación del Método ELI (Enseñanza Libre de Improvisación ) el cual sugiere siete momentos que se describen posteriormente, visto como una metodología constructivista fundamentada en el aprendizaje colaborativo.

Con la propuesta de la secuencia didáctica se intenta ayudar a mejorar la visualización y aplicabilidad del conocimiento adquirido, para tal fin se propondrán diversas actividades encaminadas a solventar tales situaciones; se tomará en cuenta la experiencia adquirida por parte de los investigadores considerando la modalidad que actualmente manejamos (semipresencial) sobre el uso adecuado e idóneo de herramientas tecnológicas que fortalezcan y mejoren los procesos de enseñanza de las matemáticas y que el estudiante logre una mayor satisfacción en la comprensión del contenido en estudio, así mismo se analizará el trabajo realizado por parte del docente como insumo para el aprendizaje de sus estudiantes, ¿cómo este se preocupa y prepara sus conocimientos intelectuales?, ¿cómo prepara sus prácticas docentes?, si tiene o no conocimiento de algunas herramientas tecnológicas que pueda usar para el desarrollo del contenido y lo más importante ¿cuál es su interés de usarlas y si logra manejar dichas herramientas para que su clase se vuelva más interesantes y atractivas?. La investigación se analizará bajo un enfoque cualitativo y cuantitativo, a partir del análisis de categorías haciendo una comparación entre los resultados, considerando una muestra representativa del sector seleccionado de la universidad en estudio.

La estructura de la presente investigación está compuesta de cinco capítulos que se describen brevemente a continuación:

**Capítulo 1.** En éste apartado se detallan las principales características de la situación problemática que da origen a la presente investigación, enfatizando en aspectos importantes que permitirán una propuesta de solución al problema identificado, así mismo se describen la delimitación del problema, la interrogante de investigación a la que se le quiere dar respuesta con la finalización del estudio realizado, los objetivos que se piensan alcanzar con la investigación y la razón del porqué la importancia de dicha investigación.

**Capítulo 2.** Expone la base teórica que sustenta la investigación, donde se toman en cuenta aspectos como el aprendizaje de las matemáticas desde sus inicios, la base del aprendizaje cooperativo, el uso adecuado de las representaciones semióticas en el desarrollo de un contenido, la estructura del método ELI, el cual se tomará como base en la elaboración de la secuencia didáctica, se presenta una breve definición de integral definida, el modelo de secuencia didáctica y sus componentes, se comentan algunas herramientas tecnológicas que pueden ser útiles para el desarrollo del contenido cálculo del volumen de un sólido de revolución, entre otros.

**Capítulo 3.** En este capítulo, se da a conocer el proceso metodológico utilizado para el análisis de la información obtenida en esta investigación. Primero, se describe el tipo de investigación, se describe la población y muestra a considerar; segundo, se describen los instrumentos a utilizar y finalmente, se explica cómo se obtendrá la información y análisis de los resultados.

**Capítulo 4.** Aquí se muestran y discuten los resultados, junto con sus respectivos análisis obtenidos de la encuesta a docentes y a estudiantes, que dan respuesta a los objetivos planteados en la investigación.

**Capítulo 5.** En éste capítulo se presenta la propuesta de una secuencia didáctica para el desarrollo del contenido “Volumen de sólidos de Revolución” como consecuencia de la investigación realizada a estudiantes del ciclo II de la asignatura de Cálculo Integral en las carreras de ingeniería en la Universidad Don Bosco, año 2022 que reciben la asignatura de y docentes que imparte la asignatura, en la que se propone el uso de una metodología colaborativa, así mismo se proponen actividades en las que se hace uso de herramientas

tecnológicas que permitan al estudiantes tener otra opción de como visualizar de mejor forma los sólidos de revolución.

## **CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **1.1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA**

Las matemáticas son importantes para la formación del ser humano ya que permiten ampliar el conocimiento, la comprensión y análisis de problemas sobre situaciones cotidianas y así lograr dar respuesta basadas en argumentos lógicos y criterios bien definidos, razón por la cual es importante que desde los inicios de la formación académica de una persona se vayan construyendo los cimientos que permitirán desarrollar nuevos conocimientos de manera integral, tanto la fundamentación teórica como la práctica, para que, al presentarse una situación problemática, las personas puedan manifestar dominio eficaz en la aplicabilidad de dicha fundamentación, sin embargo, en educación se prioriza más la abstracción antes que tal relación entre el binomio teoría y práctica (Rodríguez, 2010, citado por (Cruz Sáenz F. , 2015).

El docente de nivel superior tiene un enorme reto para poder cambiar la mentalidad del estudiante, porque dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula, de las asignaturas de cálculo integral, se ha detectado que aplican poco el razonamiento y sólo se decanta por la aplicación de algoritmos. Pero para cambiar esta mentalidad, el docente debe también cambiar la forma de dar la clase, es decir cambiar la enseñanza tradicional, según (UZURIAGA L., 2006, p.268) una buena metodología conlleva a nuestros estudiantes a ver las matemáticas como una ciencia esencial, bonita, prioritaria y clave en el desarrollo social, económico y político del país y permitiría la formación de mejores competencias matemáticas en ellos.

Dentro de los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución de un problema, ocupan un lugar destacado los conceptos matemáticos, y dentro de los conceptos se encuentran aquellos que están vinculados con las operaciones matemáticas. Para cada una de las operaciones matemáticas que sean estudiadas, en cualquier nivel de enseñanza, existen dos importantes habilidades que los estudiantes deben desarrollar: la habilidad

relacionada con el cálculo de la operación y la habilidad relacionada con la aplicación de ésta en la resolución de problemas (Hernández Camacho, 2007).

Dichas habilidades están relacionadas, pero son muy diferentes. Un estudiante puede tener habilidad en el cálculo de una operación matemática y no tener habilidad para identificar cuándo tiene que aplicar esa operación en la resolución de un problema. Esto sucede desde la enseñanza primaria hasta la enseñanza universitaria; en la práctica docente se identifica que el estudiante es muy bueno calculando, por ejemplo, a nivel básico puede realizar multiplicaciones y divisiones y no tener la habilidad necesaria para aplicar dichos conocimientos. Análogamente, un estudiante universitario puede ser capaz de calcular derivadas e integrales con un elevado grado de dificultad y no ser capaz de identificar cuándo debe aplicar una de estas operaciones en la modelación de un problema.

Las aplicaciones de la integral definida son muchas, en este estudio nos enfocaremos en el cálculo de volumen de sólidos de revolución, tema en el cual muchos estudiantes muestran la dificultad al realizar el planteamiento de la integral definida que representa el volumen del sólido de revolución. Los conocimientos previos necesarios para esta aplicación no se manejan con claridad como lo es el saber graficar, calcular interceptos e identificar una región plana como se refleja en los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica que se realizó a un grupo de estudiantes del ciclo I en la asignatura de cálculo integral del presente año (Véase tabla1), esto afecta directamente a la comprensión del contenido por que vienen arrastrando todas esas dificultades que no les permite llegar a hacer un análisis y planteamiento correcto para el cálculo del volumen.

## **1.2. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN**

De lo anterior se genera la interrogante que la presente investigación pretende responder:

¿Es necesario el diseño de una secuencia didáctica que organice el proceso de aprendizaje y la construcción del conocimiento centrado en el desarrollo del pensamiento crítico y creativo apoyado en actividades que le permitan a los estudiantes del ciclo II de la asignatura de Cálculo Integral en las carreras de ingeniería en la Universidad Don Bosco, año 2022 explorar la visualización de los sólidos de revolución para el cálculo del volumen?

## **1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.3.1. Objetivo general**

Elaborar la propuesta de una secuencia didáctica para el desarrollo del contenido “Volumen de Sólidos de Revolución como aplicación de la Integral Definida” utilizando GeoGebra como herramienta tecnológica para estudiantes del ciclo II de la asignatura de Cálculo Integral en las carreras de ingeniería en la Universidad Don Bosco.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

- a) Conocer desde la perspectiva del estudiante y el docente cuales son las dificultades que se presentan en el desarrollo del contenido Volumen de Sólidos de Revolución.
- b) Identificar las metodologías empleadas por los docentes en el desarrollo del contenido Volumen de Sólidos de Revolución.
- c) Identificar las herramientas tecnológicas que el docente utiliza en el desarrollo del contenido Volumen de Sólidos de Revolución.

#### **1.4. JUSTIFICACIÓN**

Dentro de los contenidos que se abordan en la materia de cálculo integral como aplicación de la integral definida se encuentra “El cálculo de Volumen de Sólidos de Revolución”, el cual requiere de conocimientos previos fundamentales como la derivada de una función, métodos de integración, procesos algebraicos, gráfica de funciones, etc.; conocimientos en los que muchos estudiantes presentan dificultades que se identifican en la práctica docente.

En la enseñanza de la matemática se señalan dos problemas de mayor recurrencia que los estudiantes presentan en el abordaje de la aplicación de la integral definida: la inquietud por no saber la aplicabilidad de lo que con tanto esfuerzo estudia y la visualización de los sólidos de revolución, esto propicia que los estudiantes no logren un mejor desempeño académico. (Cruz Sáenz F. , 2015)

Abordaremos con mayor énfasis la aplicabilidad del contenido a la realidad considerando que el docente pueda contar con un insumo que le ayude a abordar el contenido de una mejor manera adaptándolo a su plan de desarrollo de la clase y permitiendo un aprendizaje activo.

## **CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO O REFERENCIAL**

La mejora de la enseñanza de las matemáticas se fundamenta en dos características, la primera es la naturaleza de las matemáticas, pues muy frecuentemente los maestros la consideran como una asignatura cuyo estudio solo puede ser afrontado de forma individual, por lo que es necesario urgir a los docentes para que tengan en cuenta las numerosas investigaciones que se han hecho en este campo. La segunda es referida al papel que desempeña el estudiante quien generalmente es limitado a recibir información y es necesario reconocerle como responsable de su propio aprendizaje y en consecuencia, poner a su alcance los medios posibles, entre los que destacan el profesor y el grupo de estudio (Serrano, González-Herrero, Pons, 2008) citado por (Cruz Sáenz F. J., 2015)

Para Duval, citado por (Cruz Sáenz F. J., 2015) el acceso al conocimiento matemático no es directo, por lo que se requiere el auxilio de diferentes representaciones de los objetos matemáticos, según la teórica de representaciones semióticas. En el proyecto de López, F., Nieto., N., Antolín, A., López, P. 2013 se diseñaron actividades con GeoGebra, con los que se propiciaron diferentes representaciones semióticas del objeto matemático de Integral Definida, con la intención de que los estudiantes manipulen de manera congruente las diferentes representaciones de éste, al emplear los tratamientos y conversiones pertinentes, para así lograr que tanto el concepto de sólido de revolución, como su cálculo, sean aprendido significativamente.

### **2.1. APRENDIZAJE COOPERATIVO**

Para Johnson, Johnson y Holubec 1999, citado por (Barriga Arceo, 2010) La cooperación consiste en trabajar juntos para alcanzar objetivos comunes. En una situación cooperativa, los individuos procuran obtener resultados que son beneficiosos para ellos mismos y para todos los demás miembros del grupo. El aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás. De manera que cooperar es trabajar juntos para lograr metas

compartidas, lo que se traduce en una interdependencia positiva entre los miembros del grupo. En este caso, el equipo trabaja junto hasta que todos los miembros del grupo hayan entendido y completado la actividad con éxito, de tal forma que la responsabilidad y el compromiso con la tarea son compartidas.

De acuerdo con Pérez 2000, citado por (Barriga Arceo, 2010), “Aunque el medio no hace la interacción”, es posible generar interacciones significativas y ambientes sociales apropiados en la enseñanza en línea, y para ello pueden ser recursos efectivos los organizadores de discusión académica y social, los intercambios comunicativos vía el correo electrónico, las charlas en tiempo real y la realización de proyectos grupales, entre otros.

Siendo que el aprendizaje se define como: todas aquellas experiencias significativas que provocan un cambio en la conducta del hombre, siempre he pensado que cuando el maestro enseña, el alumno pone en juego todo su ser, además de que cada uno tiene una forma distinta para procesar el conocimiento; por tanto, el aprendizaje dependerá siempre del individuo como un constructor de su propio aprendizaje y es entonces a los docentes a los que nos corresponde buscar las estrategias necesarias para mantenerlos motivados. (Rodríguez Hernández, A.)

## **2.2. MÉTODO ELI (ENSEÑANZA LIBRE DE IMPROVISACIÓN)**

Se trata de una propuesta que, como resultado de varios años de investigación, realizó el Dr. Ramón Ferreiro Gravié, basándose en la teoría de L. Vygotsky. Ferreiro, propone una forma de organizar el proceso de aprendizaje y la construcción social del conocimiento, desde una perspectiva sociocultural, centrado en el desarrollo del pensamiento crítico y creativo, sin dejar atrás la formación en valores. Consiste en que el alumno construya su propio conocimiento a partir de siete momentos estratégicos dentro de una lección. No importa el orden de estos momentos, además de que una estrategia, por si misma, puede cubrir varios de dichos momentos (Ferreiro Gravié, 2012)

Brevemente se explican los siete momentos en que se basa esta metodología.

1. **Activación (A):** Cuando los profesores realizamos la activación, estamos captando la atención del alumno, es entonces que debemos considerar estrategias de tipo socio afectivas y cognitivas según sea la dinámica dentro del salón de clases. Desde los periféricos y hasta las interacciones con otros, son parte importante de la activación.
2. **Orientación (O):** Promover el compromiso de los estudiantes con respecto a lo que tiene que aprender. Hay muchas estrategias que pueden ser útiles para este momento en clase: indicaciones, cambios de voz, desplazamientos físicos en el salón, por mencionar algunos. Las estrategias de orientación deben estar encaminadas para que el alumno preste atención a las indicaciones, contenidos, a las actividades, etc.
3. **Recapitulación (R):** Recapitular es recopilar, resumir, sintetizar. Dentro del método, son aquellas actividades en las que los alumnos recuerdan, asocian, o expone algo que ya se aprendió, ya sea en días anteriores o en el momento mismo de la lección.
4. **Metacognición (M):** Consiste en dar sentido y significado a lo que se ha aprendido; la autorregulación. Hacer que el alumno se apropie de los conocimientos adquiridos en el momento que comprende y transfiere para la vida. Invitar a que el alumno reflexione como resultado de la solución de un problema o cuando asume un compromiso o una responsabilidad.
5. **Procesamiento de la Información (PI):** Es un proceso intelectual, leer y subrayar, seleccionar lo más relevante, entender un proceso, desarrollar ideas e intercambiarlas, incluir todas aquellas combinaciones que lleven a aprender, entender, comprender y profundizar un contenido.
6. **Interacción social positiva (I):** El momento de mayor enriquecimiento y que corresponde al aprendizaje cooperativo, se refiere al espacio que, dentro de la lección, los estudiantes intercambiarán información, experiencias, puntos de vista, y que son resultado de procesar la información para tener mayor riqueza durante estos espacios. El Dr. Ferreiro nos hace referencia al respecto: lo ideal son equipos de dos o tres estudiantes ya que esto ayudará a que el desempeño dé mejores resultados.
7. **Evaluación (E):** Que se enfoca a valorar lo aprendido, sin embargo, podemos apreciar que todos los momentos son alternativas para evaluar el desempeño.

Además de los conceptos, podemos evaluar habilidades o destrezas y actitudes. Para esta metodología es importante que además de evaluar, los alumnos se autoevalúen y coevalúen como parte de la acción formativa e integral. (Rodríguez Hernández, A.)

Al trabajar con situaciones de aprendizaje en el ámbito didáctico-matemático, se requiere el uso de diferentes sistemas semióticos de representación: gráfico, numérico, verbal y algebraico. Duval (1998, p. 175) define los registros de representación semiótica como producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias restricciones de significados y de funcionamiento. Se puede considerar que las figuras de tipo geométrico, un enunciado en lenguaje habitual o una fórmula matemática pertenecen a sistemas semióticos diferentes (Camacho, 2008)

### 2.3. REGISTRO DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

El enfoque semiótico en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas nació a raíz de la dificultad sobre la comprensión y la necesidad de recurrir a otros tipos de representaciones que constituyen el lenguaje de la matemática. El estudio de los signos-síntomas es reconocido como semiótica y junto con la matemática han estado entrelazados desde hace mucho tiempo, pero no se reconoció la semiótica como disciplina científica hasta el siglo XIX. Para entender un poco más a fondo esta conexión que tiene la semiótica y la matemática, es pertinente partir desde puntos históricos-filosóficos.

Partiendo desde la antigua Grecia, la semiótica (*semion*) que es traducido como “signo” es un término que describe ontogénicamente la palabra semiótica, pero no presentando su verdadero significado. El **semion** era reconocido por los griegos como los síntomas de algún fenómeno natural en un sentido causa efecto, veamos que el **semion** humo es causa de que hay fuego, por lo tanto, si hay humo entonces hay fuego (D’Amore, Fandiño, Lori, 2013). Platón hace una aproximación a una teoría del signo, y en uno de sus apartados implementa un signo lingüístico que él denota con el nombre ónoma. Los ónomas según Platón son los medios por los cuales se pueden representar cosas de formas aproximadas. Así, Platón en sus apartados asegura que los matemáticos implementan “nombres”, los cuales se encargan de representar objetos concretos que en realidad nunca han sido vistos.

Por consiguiente, la noción de semiótica ha estado conectada con las matemáticas desde un punto de vista histórico- filosófico.

Según Duval (citado en Ospina, 2012) existen por lo menos dos características de la acción cognitiva involucrada en las habilidades matemáticas. (1) Diversos registros de representación semiótica y (2) los objetos matemáticos no son accesibles mediante la visualización. Tomando como base estas posturas Duval plantea dos preguntas claves relacionadas con el aprendizaje ¿cómo aprender a cambiar de registro? y ¿cómo aprender a no confundir un objeto con la representación que se hace de él?

Para tener acceso al conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas, según Raymond Duval creador de la teoría de representaciones semióticas. Los objetos matemáticos tienen diferentes registros de representación, tales como: *registro verbal*, *registro tabular*, *registro gráfico*, *registro algebraico*, *registro simbólico* y *registro figural*. Según Duval, citado en Brojón, et al. 2015 “se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz de transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo”. (Hernandez Moreno, 2017)

## **2.4. SECUENCIA DIDÁCTICA**

Una secuencia didáctica constituye un conjunto de tareas que diseña el docente, con el objetivo de promover la actividad de los estudiantes, de forma tal que el proceso contribuya a la formación de las competencias deseadas.

Esquema con los elementos que conforman una secuencia didáctica



**Figura 1. Esquema de secuencia didáctica**  
(Pimienta Prieto, 2012)

Una secuencia didáctica parte del planteamiento de un problema en contexto, lo cual hace necesaria la formación de competencias. Se determina un conjunto de tareas docentes que pondrán en actividad a los estudiantes; tales actividades serán evaluadas. Ello requerirá la utilización de recursos y, durante todo el tiempo, será necesario llevar a cabo actividades metacognitivas.

#### **2.4.1. Situación problemática contextualizada**

En los últimos años, en la bibliografía científica metodológica se presta gran atención a la enseñanza problemática como medio altamente efectivo para estimular la actividad constructiva de los estudiantes y desarrollar en ellos el pensamiento científico creador. Se han logrado resultados significativos en su aplicación dentro del proceso pedagógico y se discuten las posibilidades de utilización (no solamente desde una perspectiva cuantitativa) de los métodos de la ciencia en el proceso docente.

La función básica de este tipo de enseñanza es el desarrollo del pensamiento creador de los estudiantes. ¿Esto quiere decir que los estudiantes deben aprender todo por sí mismos? Claro que no. Se debe lograr la utilización de los conocimientos previos en el planteamiento de problemas que hacen necesarias las competencias a cuya formación pretendemos contribuir.

Existen principios que sustentan esta propuesta según (Pimienta Prieto, 2012)

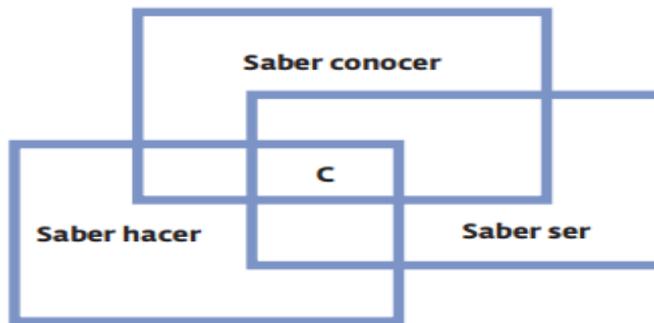
- a) La relación del contenido de la ciencia con su método de enseñanza; es decir, hay que tomar en cuenta la didáctica específica.
- b) El establecimiento de la unidad lógica de la ciencia con la lógica del proceso educativo.
- c) La consideración del nivel de desarrollo de los estudiantes.

Para considerar una propuesta como situación problemática se deben tomar en cuenta, al menos, las siguientes condiciones según (Pimienta Prieto, 2012)

- a) El conflicto planteado se puede enfrentar, es decir, representa un obstáculo que el estudiante es capaz de sortear, siguiendo un plan lógico que él mismo propone.
- b) El conflicto puede expresarse como pregunta o afirmación, lo importante es que represente una dificultad: ¿Cómo mejorar las condiciones de vida de una población marginada en la montaña?, o bien, un reto: necesidad de generar mecanismos para que la población estudiantil modifique sus hábitos alimenticios.

#### **2.4.2. Competencias**

Podemos entender por competencia el desempeño o la actuación integral del sujeto, lo que implica conocimientos factuales o declarativos, habilidades, destrezas, actitudes y valores, dentro de un contexto ético.



**Figura 2. Relación entre competencia y desempeño**  
(Pimienta Prieto, 2012)

Como podemos ver en la figura anterior, la competencia (c) emerge de la intersección entre los conocimientos factuales y declarativos (saber conocer), habilidades y destrezas (saber hacer), y actitudes y valores (saber ser).

Para elaborar una competencia debemos de tomar en cuenta los siguientes elementos.

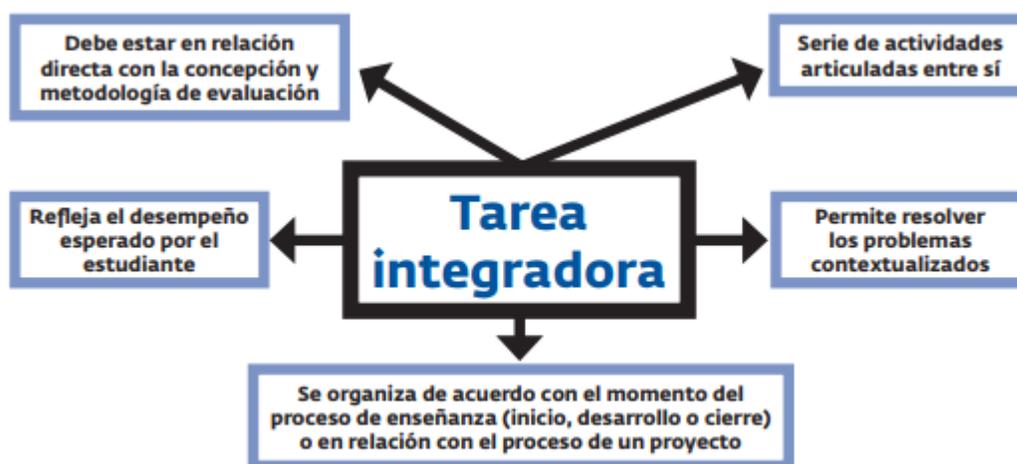


**Figura 3. Elementos de una competencia**  
(Pimienta Prieto, 2012)

### 2.4.3. Tareas del docente

Partir de los resultados de aprendizaje se vuelve imperativo con esta propuesta. Es esencial que tengamos presente cuáles son esos resultados, para comenzar a diseñar las tareas que generarán actividad en los estudiantes. Por supuesto, los resultados se mostrarán con las evidencias para su evaluación y, además, constituirán la meta hacia la que se dirige la formación.

Para lograr esa meta, se activará la competencia o las competencias necesarias que permitan resolver los problemas profesionales.



**Figura 4. Esquema de una tarea integradora**  
(Pimienta Prieto, 2012)

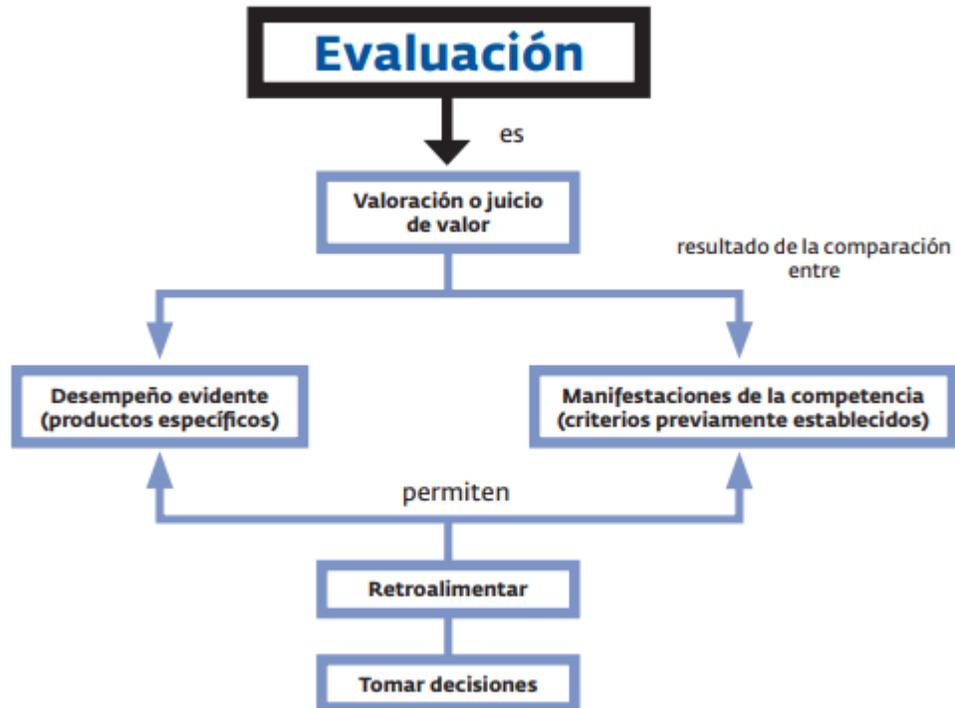
### 2.4.4. Actividades de los estudiantes

Las actividades que desarrollarán los estudiantes se encuentran en íntima relación con las tareas docentes, puesto que constituyen la concreción de las actuaciones necesarias para manifestar las competencias. Por ello, es sumamente importante que el profesor considere las actividades y sus mapas de progreso (matrices de valoración o rúbricas) de manera simultánea.

### 2.4.5. Evaluación

Consideramos la evaluación de las competencias de los estudiantes como la valoración o el juicio emitido producto de la comparación del desempeño que se hace evidente en productos de aprendizaje específicos, considerando las

manifestaciones de la competencia como indicadores de criterios acordados y compartidos. En palabras del doctor Arturo de la Orden Hoz, comparación y juicio son inseparables en el proceso de evaluación.



**Figura 5. Esquema de evaluación**  
(Pimienta Prieto, 2012)

## 2.5. LA INTEGRAL DEFINIDA

Es un concepto relevante para abordar una amplia gama de problemas que los estudiantes de Ingeniería utilizan en su programa de estudios. Está presente en diversos contenidos y se requiere en actividades de aprendizaje a lo largo de su formación universitaria. Para llevar a cabo estas actividades, los alumnos deben tener una sólida comprensión de este concepto. Es necesario identificar las dificultades que los estudiantes encuentran al aprenderlo para diseñar actividades de enseñanza que logren en el estudiante un aprendizaje más sólido (Camacho, 2008)

Uno de los trabajos sobre el aprendizaje del concepto de integral definida es el de Orton 1983, quien plantea como uno de sus objetivos, investigar la comprensión de los

estudiantes sobre la integración y diferenciación. Obteniendo como resultados evidencia en dominio del modo algebraico sobre el grafico y algunas carencias en significado en límites y aproximaciones (Cruz Sáenz F. , 2015). A continuación de se define algunos conceptos importantes y necesarios en el proceso de investigación.

## 2.6. DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

Sea  $f$  una función definida en un intervalo cerrado  $[a, b]$ . Entonces la integral definida de  $f$  de  $a$  a  $b$ , denotada y definida por medio de la suma de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x_k$$

En la definición precedente, a los números  $a$  y  $b$  se les llama límites de integración inferior y superior, respectivamente. El símbolo de la integral  $\int$ , usado primero por Leibniz, es una S alargada, por relación a la palabra “suma” (Deniss, G., Zill)

### 2.6.1. Métodos de Integración

Son técnicas de Integración que nos permiten encontrar la antiderivada o primitiva de una función; es decir, resolver las integrales indefinidas de una clase muy amplia de funciones. Los cuales son:

- 1) **Método de Cambio de variable:** Consiste en transformar la integral dada en otra más sencilla mediante un cambio o sustitución de una nueva variable.

**Ejemplo:** Calcular la siguiente integral

$$\int \frac{6x + 2}{\sqrt{3x^2 + 2x - 1}} dx$$

**Solución:**

Aplicamos el método de cambio de variable, hacemos  $u = 3x^2 + 2x - 1$ , y observemos que al calcular el diferencia del cambio de variable  $du = (6x + 2)dx$

se encuentra en el integrando, entonces, la integral se puede escribir en términos de  $u$  como

$$\int \frac{(6x + 2)dx}{\sqrt{3x^2 + 2x - 1}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2} du = \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{3x^2 + 2x - 1} + C$$

- 2) **El Método de Integración por partes:** Se utiliza cuando en el integrando se tienen un producto de funciones diferentes y consiste en utilizar la siguiente fórmula  $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ ; donde se debe seleccionar  $u$  como la función más fácil de derivar y  $dv$  la función más fácil de integrar. Para ayudar la selección de  $u$  se puede apoyar de la palabra nemotécnica ILATE, que significa, I: Inversa trigonométrica, L: Logarítmica, A: Algebraica, T: Trigonométrica, E: Exponencial, la selección de  $u$  sería la función que sucede primero de izquierda a derecha en la palabra ILATE.

**Ejemplo:** Calcular la siguiente integral

$$\int x \ln(x) dx$$

**Solución:**

El tipo de función que se encuentra en el integrando es una algebraica:  $x$  y una logarítmica:  $\ln(x)$ , entonces, siguiendo la palabra nemotécnica ILATE,  $u = \ln(x)$  y el resto que se encuentra en el integrando sería  $dv = x dx$ .

- $u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$
- $dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$

Aplicamos la fórmula  $\int u dv = u \cdot v - \int v du$

$$\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 + C$$

- 3) **Integración de potencias Trigonométricas:** Consiste en resolver integrales de potencias de funciones trigonométricas utilizando identidades trigonométricas.

**Ejemplo:** Calcular la siguiente integral

$$\int \tan^4(x) dx$$

**Solución:**

Como la potencia de la tangente es par, entonces, utilizamos la identidad trigonométrica  $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$ .

$$\int \tan^2(x) (\sec^2(x) - 1) dx = \int \tan^2(x) \sec^2(x) dx - \int \tan^2(x) dx$$

Para la primera integral realizamos el cambio de variables  $u = \tan(x)$  y determinamos el diferencial  $du = \sec^2(x) dx$ , y la para la segunda integral aplicamos nuevamente la identidad anterior, entonces, la integral se puede escribir en términos de la nueva variable como

$$\int u^2 du - \int (\sec^2(x) - 1) dx = \frac{u^3}{3} - \tan(x) + x + C = \frac{\tan^2(x)}{3} - \tan(x) + C$$

4) **Integración por Sustitución Trigonométrica:** Se utiliza cuando en el integrando se tienen expresiones de la forma

$(x^2 - a^2)^n$ ;  $(a^2 - x^2)^n$ ;  $(x^2 + a^2)^n$ , para ello se resuelve usando una sustitución trigonométrica para cada caso, las cuales son respectivamente

$$x = a \sec \theta; \quad x = a \sec \theta; \quad x = a \tan \theta$$

**Ejemplo:** Calcular la siguiente integral

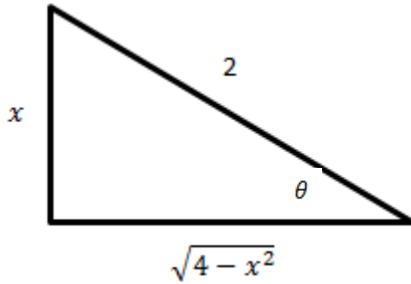
$$\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

**Solución:**

Se observa en el integrando que en el denominador tiene la forma  $(a^2 - x^2)^n$ , es decir que  $a^2 = 4$  y  $n = \frac{1}{2}$ , entonces, la sustitución que le corresponde sería

- $x = 2 \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow dx = 2 \cos(\theta) d\theta$
- $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{4(1 - \operatorname{sen}^2(\theta))} = 2\sqrt{\cos^2(\theta)} = 2 \cos(\theta)$

$$\int \frac{2 \operatorname{sen}(\theta)}{2 \cos(\theta)} 2 \cos(\theta) d\theta = \int 2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta = -2 \cos(\theta) + C$$



Regresamos a la variable original

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx &= -2 \cos(\theta) + C \\ &= -2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C \\ &= -\sqrt{4-x^2} + C \end{aligned}$$

- 5) **Integración por fracciones parciales:** Se aplica cuando el integrando es una función racional propia. Se trata de descomponer en fracciones parciales la fracción propia. (Leithold, 2009)

**Ejemplo:** Calcular la siguiente integral

$$\int \frac{3}{x^2 - 6x + 8} dx$$

**Solución:**

Factorizamos el denominador  $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$

$$\int \frac{3}{x^2 - 6x + 8} dx = \int \frac{3}{(x - 2)(x - 4)} dx = \int \left[ \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 4} \right] dx$$

$$\frac{3}{(x - 2)(x - 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 4} = \frac{A(x - 4) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 4)}$$

$$3 = A(x - 4) + B(x - 2)$$

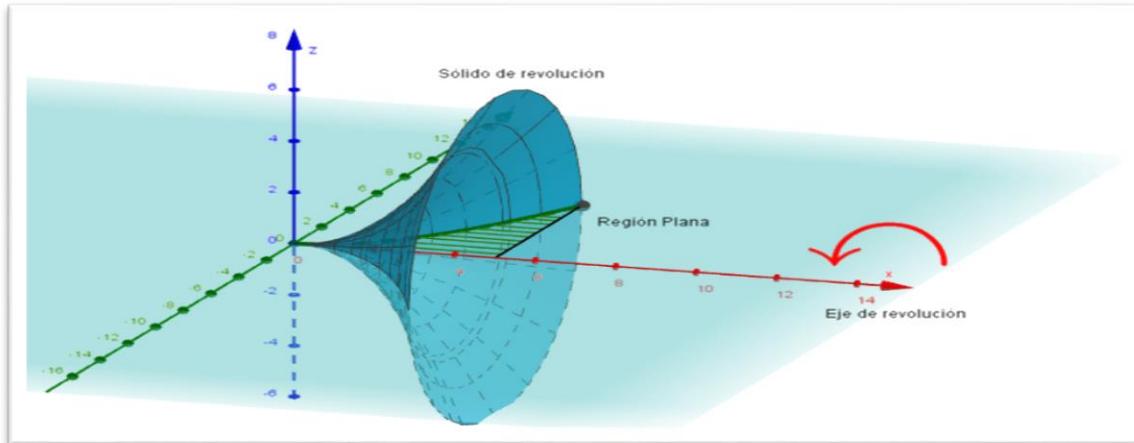
Si  $x = 2$ , entonces  $3 = A(2 - 4) \Rightarrow A = -\frac{3}{2}$

Si  $x = 4$ , entonces  $3 = B(4 - 2) \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

$$\int \frac{3}{x^2 - 6x + 8} dx = \int \left[ \frac{-3/2}{x - 2} + \frac{3/2}{x - 4} \right] dx = -\frac{3}{2} \ln(x - 2) + \frac{3}{2} \ln(x - 4) + C$$

### 2.6.2. Definición de sólido de revolución

Según (Larson, R; Edwards, B, 2010), los sólidos de revolución son sólidos que se generan al girar una región plana alrededor de un eje.



**Figura 6. Sólido de revolución**

Gráfica elaborada por Karen Campos y David Espinoza.

### 2.6.3. Algunas aplicaciones importantes donde se utiliza la integral definida

- 1) Movimiento de una partícula, velocidad y aceleración
- 2) Trabajo realizado al bombear un líquido en un recipiente
- 3) Fuerza ejercida por un fluido sobre una placa vertical o recipiente
- 4) Densidad de un material
- 5) Centro de masa
- 6) Modelos de crecimiento poblacional

## **2.7. HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS COMO AUXILIARES PARA RESOLVER VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN**

En cálculo integral, la determinación del Volumen de Sólidos de Revolución es una de los temas más difíciles de enseñar, debido a que se requiere mucha abstracción y la visualización de imágenes tridimensionales.

El avance de la tecnología ahora permite el acceso de muchas herramientas computacionales para auxiliar al estudiante en el estudio del cálculo; entre ellas se pueden mencionar: El software GeoGebra, Matlab, Octave-online, Winplot, Tracker, etc; que son de uso libre y tienen muchas capacidades de graficación que pueden ser de utilidad a estudiantes y profesores. Cabe decir, que de las herramientas mencionadas nos enfocaremos en el uso del Software GeoGebra como principal herramienta tecnológica educativa utilizada, el cual a continuación se da una reseña teórica en que consiste y cuál es su función.

### **2.7.1. Programa Dinámico para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. GeoGebra**

**GeoGebra** es un Programa Dinámico para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en todos los niveles educativos. Combina dinámicamente, geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo, realizando tareas complejas. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas y planillas, y hojas de datos dinámicamente vinculadas.

GeoGebra es en su origen la tesis de Markus Hohenwarter, con el objeto de crear una calculadora de uso libre para trabajar el Álgebra y la Geometría.

Fue un proyecto que se inició en el 2001 en un curso de Matemática en la Universidad de Salzburgo (Austria). Actualmente, GeoGebra continúa su desarrollo en la Universidad de Boca Ratón, Florida Atlantic University (USA). Pero no tenemos que olvidar que GeoGebra está diseñado con mentalidad colaborativa. (González, M.)

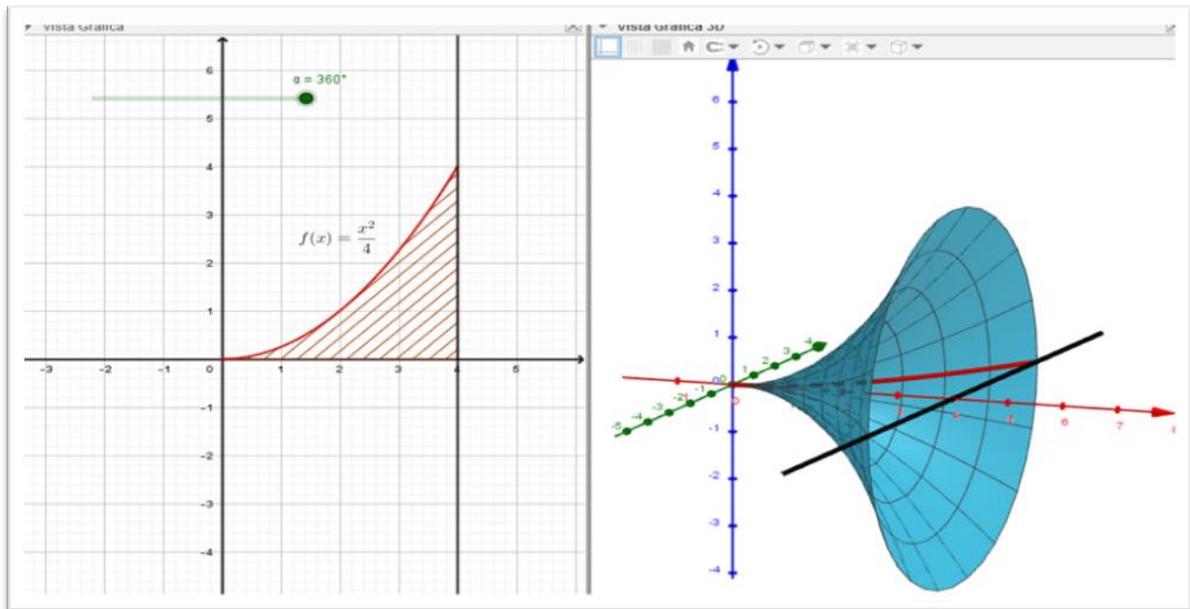
A continuación, se presenta un ejemplo de la utilidad del programa de GeoGebra para la representación gráfica y el cálculo del volumen de sólido de revolución

**Ejemplo:** Calcular el volumen del solido de revolución que se genera al hacer girar la región plana formada por  $f(x) = \frac{x^2}{4}$ ,  $x = 0$  y  $x = 4$  sobre el *eje x*

- Primero se traza las gráficas en GeoGebra y se identifica la región plana utilizando la vista de cálculo simbólico CAS, la vista gráfica y la vista grafica en 3D
- Se calcula el volumen empleando el método del disco y la función incorporada en GeoGebra para calcular integral “Integral (Función, valor de inicio, valor final)”

Cálculo simbólico (CAS)	
$f(x) := x^2/4$ $\rightarrow f(x) := \frac{1}{4} x^2$	1) Se define la función $f(x) = \frac{x^2}{4}$
$g(x) := \text{Función}(f, 0, 4)$ $\rightarrow g(x) := \text{Si}\left(0 \leq x \leq 4, \frac{1}{4} x^2\right)$	2) Se define la función en el intervalo de $[0,4]$ que es la limitación de la región.
$a(k, \beta) := \text{Superficie}(k, f(k) \cos(\beta), f(k) \text{sen}(\beta), k, 0, 4, \beta, 0, a)$ $\rightarrow a(k, \beta) := (k, f(k) \cos(\beta), f(k) \text{sen}(\beta))$	3) Se traza la superficie (Sólido de revolución) utilizando la función de superficie
$c := \text{Integral}(\pi f, 0, 4)$ $\rightarrow c := 64 \cdot \frac{\pi}{5}$	4) Se calcula el volumen

**Tabla 1. Cálculo de volumen empleando GeoGebra**

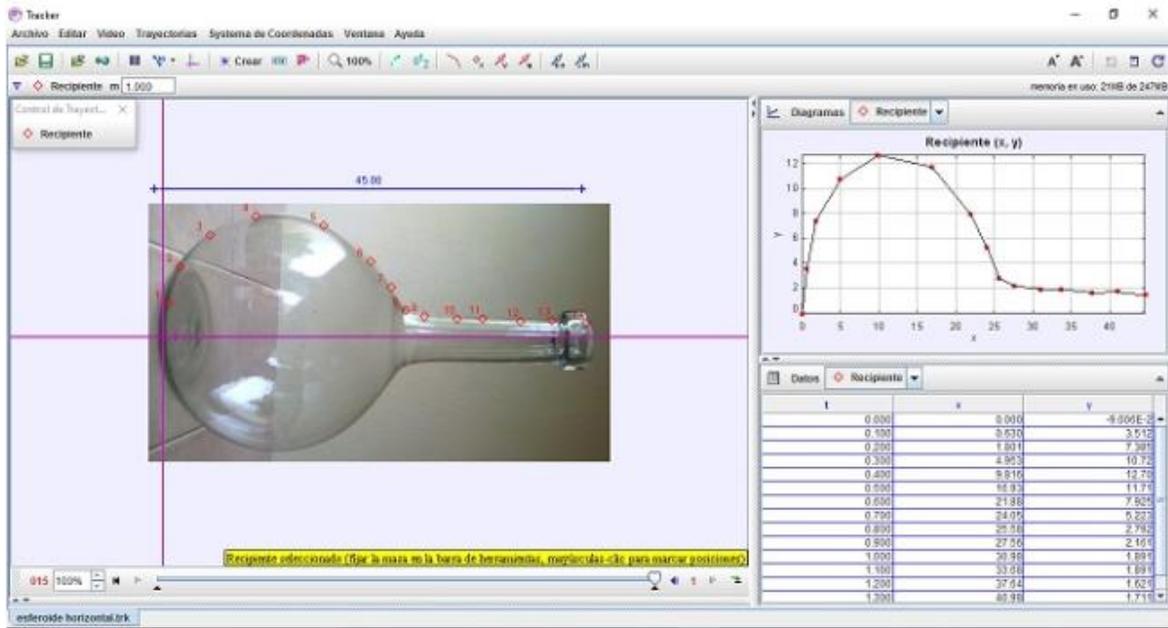


**Figura 7. Región plana girada entorno al eje  $x$**   
 Gráfica elaborada por Karen Campos y David Espinoza.

### 2.7.2. Modelación con Tracker para el aprendizaje de movimientos en el plano

Tracker es una herramienta gratuita de modelado y análisis de video construida en el marco Java de Open Source Physics (OSP). Está diseñado para ser utilizado en la educación física. El modelado de video de Tracker es una forma poderosa de combinar videos con el modelado por computadora. (Brown, Douglas; Wolfgang, Christian, M. Hanson, Robert , 2022).

A continuación, se presenta un ejemplo de la utilidad del programa Tracker para modelar, en la imagen se presenta un recipiente al cual se le tomo una fotografía y se importó la imagen al programa, luego se ubicaron los ejes coordenados, sobre el contorno del recipiente se marcan puntos que describen la trayectoria, esos puntos aparecen registrados en una tabla y se presenta los puntos en el plano cartesiano.



**Figura 8. Modelo gráfico y numérico del recipiente**

Elaborado por (Quiroz Rivera, S.; Nuñez Palenius, E.; Samboya, M.; Soto Mungía, J. L, 2019)

## **CAPÍTULO III. DISEÑO METODOLÓGICO**

En este capítulo, se da a conocer el proceso metodológico utilizado para el análisis de la información obtenida en esta investigación. Primero, se describe el tipo de investigación, se describe la población y muestra a considerar; segundo, se describen los instrumentos a utilizar y finalmente, se explica cómo se obtendrá la información y análisis de los resultados.

### **3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN**

#### **3.1.1. Metodología de la investigación**

En la investigación se hace uso del método cualitativo y cuantitativo, ya que la investigación pretende realizar un estudio para comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados (Punch, 2014; Lichtman, 2013; Morse, 2012; Encyclopedia of Educational Psychology, 2008; Lahman y Geist, 2008; Carey, 2007, y DeLyser, 2006) en un ambiente natural y en relación con su contexto. Citado en el libro “metodología de la investigación” por (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2014)

#### **3.1.2. La población de estudio**

Son los estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería, ciclo II, que cursaron Cálculo Integral en la Universidad Don Bosco en el año 2022. La elección de la muestra será no probabilística de tipo causal, la cual se caracteriza porque el investigador selecciona la muestra directa o indirectamente de los elementos de la población que forman parte de la muestra, el caso más frecuente de este procedimiento es utilizar como muestra los elementos a los que se tiene fácil acceso (Lopez, 2016). Se seleccionará a un grupo de estudiantes que están cursando la asignatura, también serán parte los docentes que imparten la materia de Cálculo integral, ciclo II año 2022.

### **3.1.3. Muestra**

La muestra será tomada de los estudiantes inscritos en primer año de la carrera de Ingeniería que cursan Cálculo Integral en ciclo II del año 2022 y los docentes que imparten la materia en ese ciclo.

## **3.2. TÉCNICA DE INVESTIGACIÓN**

Para que la metodología de la investigación sea efectiva en su aplicación, se hace necesario aplicar una determinada técnica, en este sentido, en la investigación se ha hecho uso de la **encuesta**.

### **3.2.1. Encuesta**

La técnica de encuesta es ampliamente utilizada como procedimiento de investigación, ya que permite obtener y elaborar datos de modo rápido y eficaz.

### **3.2.2. Instrumento para la recolección de datos**

Dentro del proceso del desarrollo de la técnica de la encuesta, se hace uso del cuestionario como el instrumento que permite la recolección de los datos, a continuación, se describe cómo se ha estructurado.

### **3.2.3. El cuestionario**

Es un conjunto de preguntas semiestructuradas preparadas con el fin de obtener información respecto del fenómeno o variable que se investiga. Puede realizarse de manera presencial o virtual. Dicho instrumento se aplicará a los estudiantes que cursan la asignatura de Cálculo integral en la carrera de ingeniería en ciclo II del año correspondiente al que se realiza la investigación y a docente que imparte la materia de Cálculo integral. Se aplicará tanto a docentes como a alumnos para determinar la congruencia entre la forma de enseñar y la de aprender, de tal manera, que se puedan obtener insumos para definir con mayor claridad la secuencia didáctica de la temática.

### 3.3. PLAN DE COLECTA DE LA INFORMACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para recolectar la información para la investigación se procedió de la siguiente manera.

- 1) Se solicitó el permiso en la Dirección del departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Don Bosco.
- 2) Se solicitó a los docentes que imparten la asignatura de Cálculo Integral su colaboración y permiso para aplicar la encuesta a los estudiantes de cada grupo responsable.
- 3) Se explicó a los estudiantes el objetivo y la finalidad de la investigación, y se les solicitó la colaboración para contestar la encuesta.
- 4) Se solicitó la colaboración de los docentes que imparten la materia de Cálculo Integral para contestar una encuesta y se le explicó el objetivo y la finalidad de la investigación.
- 5) Se realizó la operacionalización de las categorías, en donde se presenta los objetivos específicos, la definición de las categorías y las preguntas que nos permiten dar respuesta a los objetivos.

#### 3.3.1. Operacionalización de las categorías

Objetivo específico 1: Conocer desde la perspectiva del estudiante y el docente cuales son las dificultades que se presentan en el desarrollo del contenido Volumen de Sólidos de Revolución.	
Definición operativa de “Dificultades de aprendizaje”	Son un término genérico que se refiere a un grupo heterogéneo de trastornos, manifestados por dificultades significativas en la adquisición y uso de la capacidad para entender, hablar, leer, escribir, razonar para las matemáticas.
Categoría	Ítems para encuesta
“Dificultades de aprendizaje” según el estudiante	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente explica con claridad el tema</li> <li>• El docente es ordenado y sistemático en el desarrollo de la clase</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente ejemplifica con ejercicios y problemas de diferente grado de dificultad</li> <li>• El docente expone el tema con diferentes actividades que permitan aplicar los conceptos para garantizar su comprensión</li> <li>• El docente procura que los estudiantes apliquen los conceptos adquiridos del tema</li> <li>• El docente relaciona los nuevos conceptos con los conocimientos previos</li> <li>• ¿Conoces cuáles son los conocimientos previos que debes tener para iniciar el estudio del tema?</li> <li>• Selecciona los conocimientos que posees para el inicio del estudio del tema: <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Trazar grafica</li> <li><input type="checkbox"/> Calcular la derivada</li> <li><input type="checkbox"/> Calcular la integral</li> <li><input type="checkbox"/> Realizar operaciones con expresiones algebraicas</li> <li><input type="checkbox"/> Otros</li> </ul> </li> <li>• Del tema sólidos de revolución, que es lo que más se te dificulta: <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Graficar e identificar la región plana</li> <li><input type="checkbox"/> Realizar el planteamiento de la integral para calcular el volumen</li> <li><input type="checkbox"/> Calcular la integral para obtener el volumen</li> </ul> </li> <li>• Conociendo la región plana y el eje de revolución, ¿Puedes identificar la figura del sólido? <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Si</li> <li><input type="checkbox"/> No</li> </ul> </li> </ul>
<p>“Dificultades de aprendizaje” según el docente</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El estudiante muestra dominio de los conocimientos previos para comprender el tema</li> <li>• El estudiante comprende la aplicabilidad de la integral definida</li> <li>• El estudiante participa activamente en el desarrollo de la clase al impartir el tema</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El estudiante participa activamente en las actividades propuesta y asignadas por el docente</li> <li>• Se observa que el estudiante propone ideas o soluciones a los ejercicios y problemas planteados</li> <li>• El estudiante evidencia sus avances en su comprensión por medio de la resolución de los ejercicios y problemas propuestos por el docente</li> <li>• El estudiante realiza una lectura previa sobre los materiales (Libros, videos, documento, etc.) proporcionados por el docente.</li> <li>• Se evidencia en clases que el estudiante realiza una investigación previa al tema utilizando otros medios fuera de los que proporciona el docente</li> <li>• El estudiante realiza consultas a su docente para resolver dudas del tema en horarios fuera de la clase</li> <li>• ¿Realiza una exploración de conocimientos previos al inicio del desarrollo del tema?  <input type="checkbox"/> Si  <input type="checkbox"/> No</li> <li>• Da una breve explicación al estudiante de la aplicabilidad que el contenido tiene en actividades de la cotidianeidad.  <input type="checkbox"/> Si  <input type="checkbox"/> No</li> <li>• Por su experiencia ¿Puede mencionar e identificar lo que más le dificulta al estudiante para comprender el tema?</li> </ul>
<p>Objetivo específico 2: Identificar las metodologías empleadas por los docentes en el desarrollo del contenido Volumen de Sólidos de Revolución.</p>	
<p>Definición operativa de “Metodologías de enseñanza”</p>	<p>Son un conjunto de herramientas, técnicas, estrategias y métodos didácticos que los profesores utilizan para aumentar la participación de los estudiantes y asegurarles una experiencia activa y significativa en el proceso de aprendizaje.</p>
<p>Categoría</p>	<p>Ítems para encuesta</p>

<p>“Metodologías de enseñanza” según el estudiante</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente hace uso de diferentes recursos tecnológicos para explicar con detalle el tema</li> <li>• El docente ha clarificado la importancia del tema</li> <li>• El docente ejemplifica con ejercicios y problemas de diferente grado de dificultad</li> <li>• El docente expone el tema con diferentes actividades que permitan aplicar los conceptos para garantizar su comprensión</li> <li>• El docente procura que los estudiantes apliquen los conceptos adquiridos del tema</li> <li>• El docente relaciona los nuevos conceptos con los conocimientos previos</li> <li>• ¿Qué estrategias metodológicas observas que utiliza el docente para explicar el tema? <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Foros</li> <li><input type="checkbox"/> Lluvia de ideas</li> <li><input type="checkbox"/> Preguntas dirigidas</li> <li><input type="checkbox"/> Resolución de problemas</li> <li><input type="checkbox"/> Simulaciones</li> <li><input type="checkbox"/> Proyectos</li> <li><input type="checkbox"/> Debate dirigido</li> <li><input type="checkbox"/> Demostraciones</li> <li><input type="checkbox"/> Interrogatorio múltiple</li> <li><input type="checkbox"/> Otros</li> </ul> </li> </ul>
<p>“Metodologías de enseñanza” según el docente</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Realiza una exploración de conocimientos previos al inicio del desarrollo del tema? <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Si</li> <li><input type="checkbox"/> No</li> </ul> </li> <li>• ¿Cuáles de las siguientes estrategias utilizó para explorar los conocimientos previos? <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Lluvia de ideas</li> <li><input type="checkbox"/> Resolver ejercicios que sirven de base al contenido</li> <li><input type="checkbox"/> Preguntas dirigidas</li> <li><input type="checkbox"/> Examen escrito de conocimientos previos</li> </ul> </li> </ul>

	<input type="checkbox"/> Plantea situaciones que activen los conocimientos previos <input type="checkbox"/> Otras <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué estrategia metodológica considera usted que mejor le funcionó en el desarrollo del tema?</li> <li>• ¿Podría mencionar que actividades formativas o sumativas realizo en el desarrollo del tema?</li> <li>• Da una breve explicación al estudiante de la aplicabilidad que el contenido tiene en actividades de la cotidianeidad. <input type="checkbox"/> Si  <input type="checkbox"/> No </li> </ul>
Objetivo específico 3: Identificar las herramientas tecnológicas que el docente utiliza en el desarrollo del contenido Volumen de Sólidos de Revolución.	
Definición operativa de “Herramientas Tecnológicas”	Son espacios de apoyo para docentes y estudiantes, que rompen esquemas educativos tradicionales, dando la posibilidad de organizar agendas de trabajo educativo, independientemente del espacio físico, el horario, la distancia, etc.
Categoría	Ítems para encuesta
“Herramientas Tecnológicas”	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué herramientas tecnológicas o programas utiliza el docente para apoyar la explicación del tema?</li> <li>• Utilizó herramientas tecnológicas o programas para apoyar la explicación del tema o en las actividades propuestas <input type="checkbox"/> Si  <input type="checkbox"/> NO </li> <li>• ¿Podría mencionar las herramientas o programas utilizados en el desarrollo del contenido o actividades propuestas?</li> </ul>

**Tabla 2. Operacionalización de las categorías**

Fuente: Elaboración propia con base al proceso de análisis a seguir

## **CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LOS RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN**

En el presente capítulo se detallan los resultados, junto con sus respectivos análisis obtenidos de la encuesta a docentes y a estudiantes, que dan respuesta a los objetivos planteados en la investigación.

### **4.1. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA DE ESTUDIO**

La muestra tomada en esta investigación es de 129 estudiantes de ingeniería de la Universidad Don Bosco que cursan la materia de Cálculo Integral ciclo 2, 2022 y 3 docentes que imparte la materia de Cálculo Integral. Para la selección de los estudiantes se tomó en consideración lo establecido en el Capítulo III, para los docentes se consideró toda la planta docente que estaba impartiendo la materia.

Para implementar la encuesta a los estudiantes se conversó primero con el docente encargado del grupo para solicitar el permiso y la colaboración, se realizó de forma presencial, acercándose a cada salón y se explicó el objetivo y finalidad de la encuesta, no se tuvo ningún inconveniente ya que todos los estudiantes seleccionados cooperaron en el llenado de la encuesta y se observó la disponibilidad y responsabilidad.

Para la encuesta a los docentes, se explicó el objetivo y finalidad de la encuesta, se compartió la encuesta por correo electrónico y las respuestas lo enviarían por el mismo medio.

### **4.2. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS**

Perspectiva del estudiante y el docente sobre las dificultades que se presentan en el desarrollo del contenido Volumen de Sólidos de Revolución.

#### 4.2.1. Perspectiva del estudiante

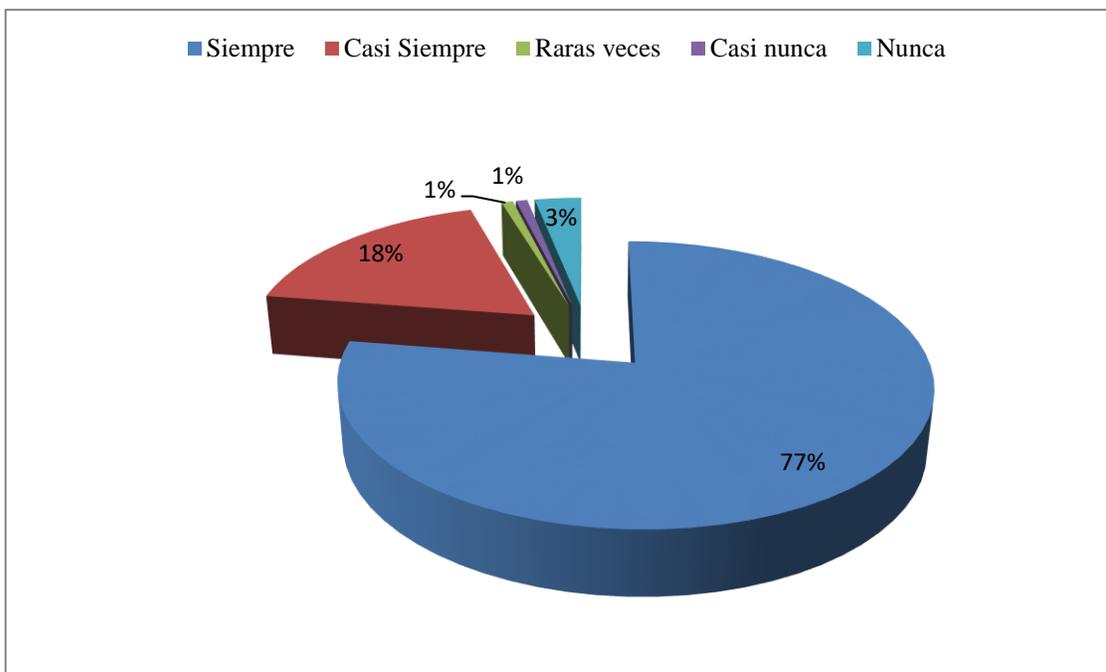
##### 4.2.1.1. Análisis de los resultados en encuesta a los estudiantes

###### Parte I

Para identificar el nivel de satisfacción de los estudiantes hacia los docentes que imparten clases en Cálculo Integral, se realizó una encuesta de ocho preguntas a 129 estudiantes, en donde se muestran los resultados.

Tabla 3. El docente explica con claridad el tema					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
100	23	1	1	4	0

Figura 9. Explicación clara del docente

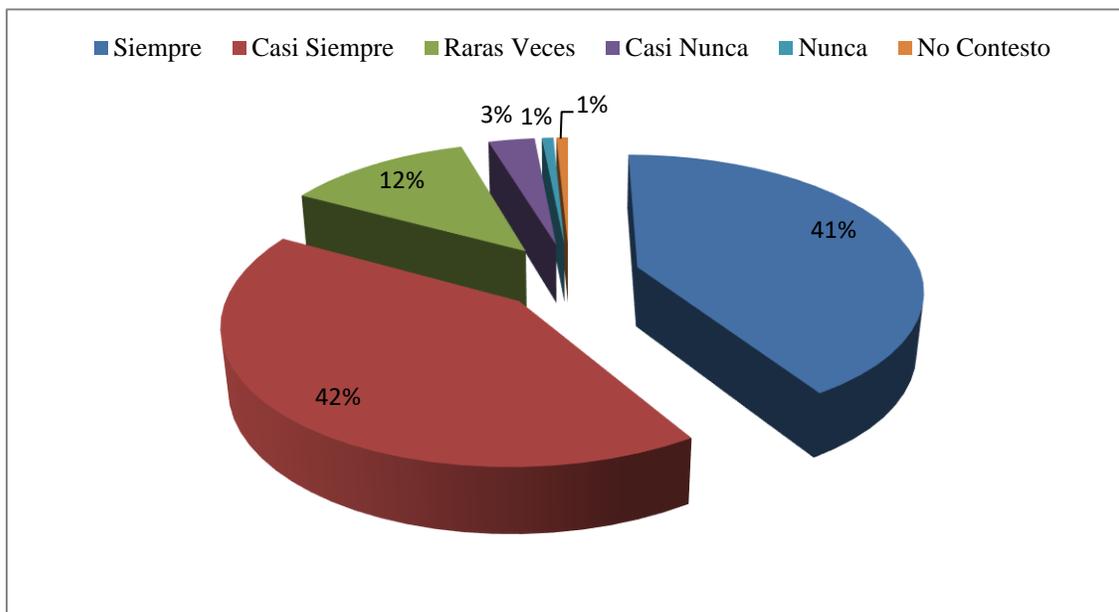


Un elemento clave dentro del proceso de aprendizaje es la capacidad del docente de enseñar los contenidos de manera que sean captados por el estudiante y puedan ser comprendidos.

Según los resultados se observa que, por lo general, los estudiantes están satisfechos por la claridad con la que el docente explica el contenido.

<b>Tabla 4. El docente hace uso de diferentes recursos tecnológicos para explicar con detalle el tema</b>					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
53	54	16	4	1	1

**Figura 10. Utiliza recursos electrónicos el docente**



En la explicación del contenido es importante que el docente se auxilie de diferentes recursos para facilitar la comprensión del estudiante, uno de los recursos que ayuda y brinda diferentes perspectivas en el desarrollo de la clase son las

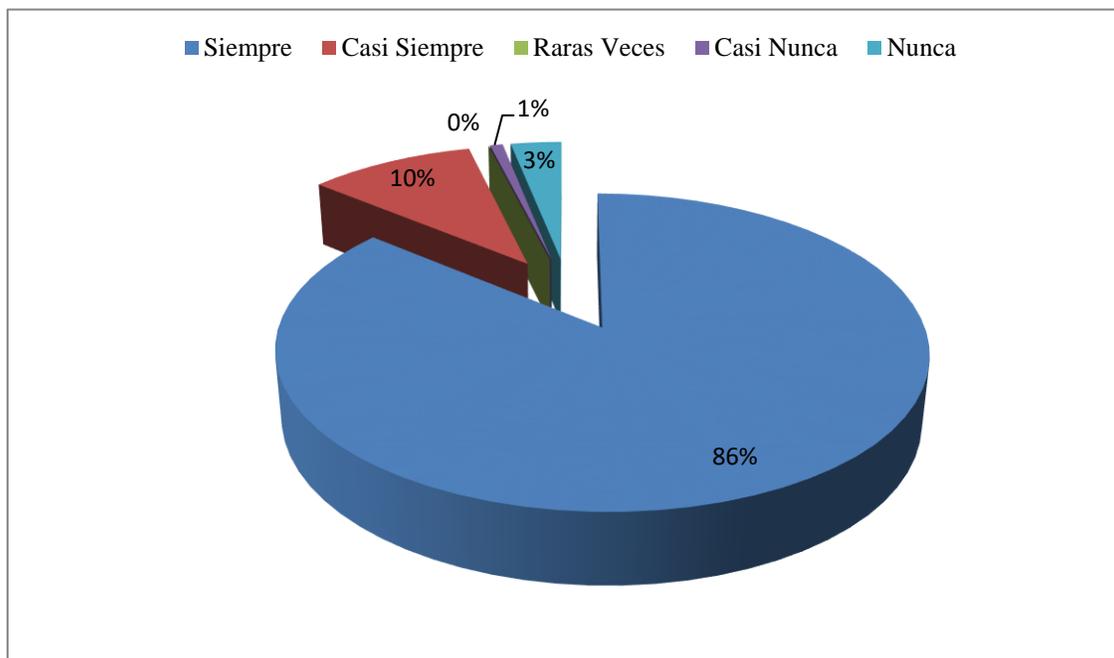
herramientas tecnológicas, ya que permite el diseño de estrategias metodológicas que favorezcan el proceso de aprendizaje y enseñanza.

Según los resultados, por lo general, el docente se auxilia de recursos tecnológicos para explicar el contenido a los estudiantes, sin embargo, hay que tomar en cuenta que también algunos las usan raras veces y es así donde en ese pequeño grupo debe motivarse a poder hacer uso de los recursos tecnológicos para facilitar la comprensión del contenido.

**Tabla 5. El docente es ordenado y sistemático en el desarrollo de la clase**

Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
111	13	0	1	4	0

**Figura 11. El docente es ordenado y sistemático en el desarrollo de la clase**



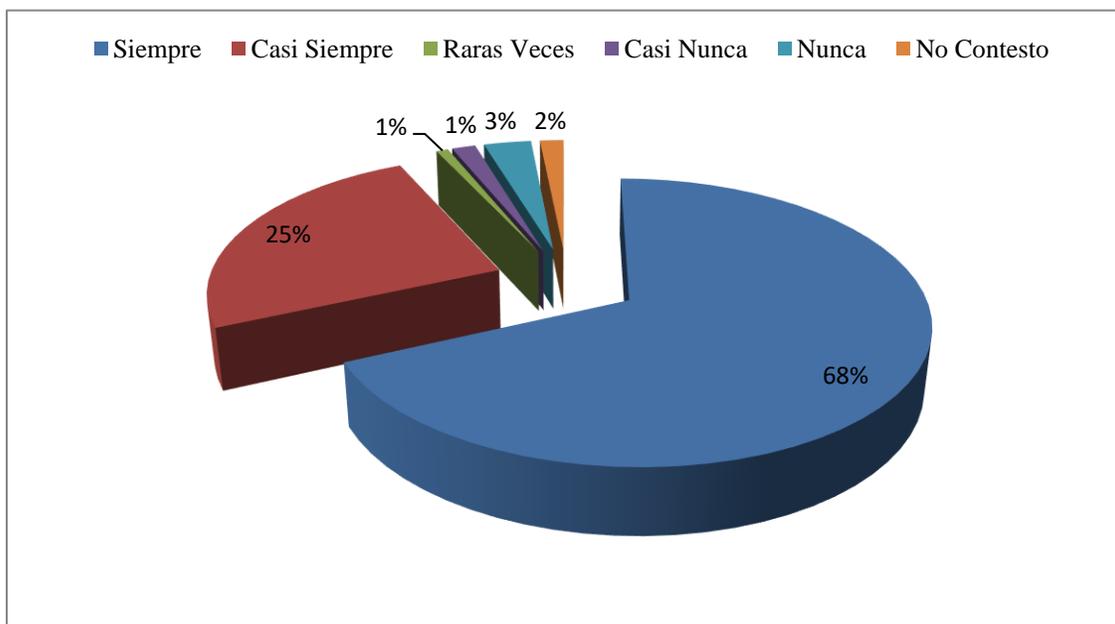
Es importante que el docente prepare sus clases porque esto le ayuda que su explicación sea fluida, exprese sus ideas de forma clara y que lleve un orden lógico

en el desarrollo del contenido para que al estudiante le permita ir relacionando los conceptos y su aprendizaje sea significativo.

Según los resultados, los estudiantes consideran que por lo general el docente lleva una secuencia ordenada en el desarrollo de la clase.

<b>Tabla 6. El docente ha clarificado la importancia del tema</b>					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
88	32	1	2	4	2

**Figura 12. El docente clarifica la importancia del tema**

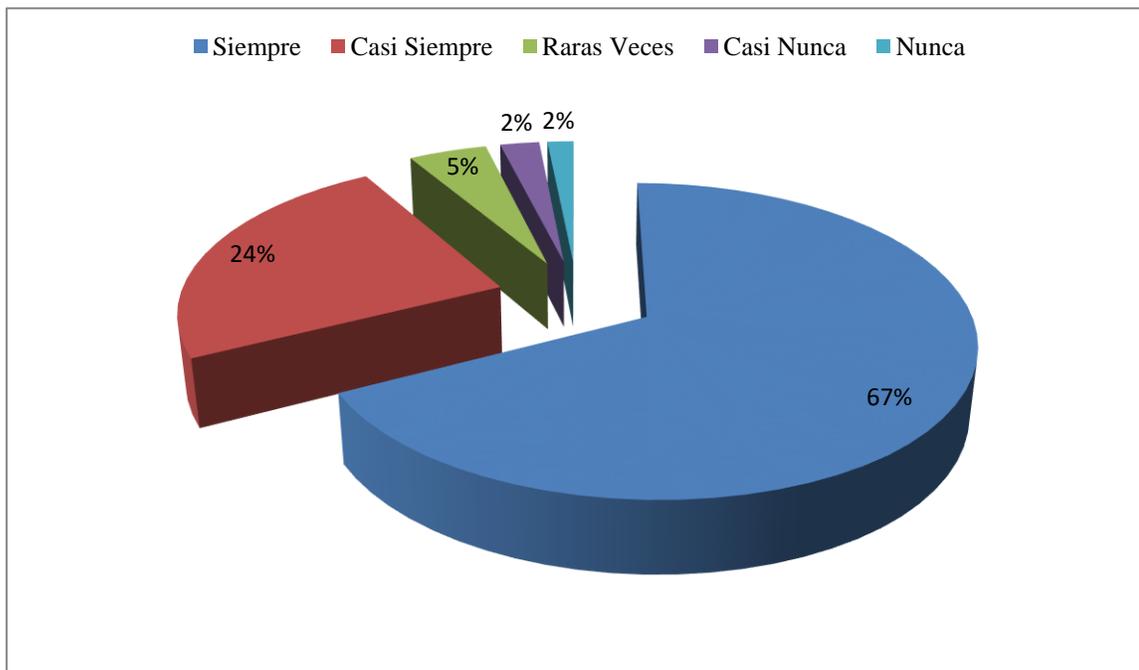


En el inicio de un contenido es importante dar a conocer un panorama amplio sobre lo que se va a estudiar y la importancia del mismo, esto permite captar la atención del estudiante y saber en dónde lo puede aplicar.

Según los resultados, el estudiante considera que el docente da a conocer la importancia del contenido.

Tabla 7. El docente ejemplifica con ejercicios y problemas de diferente grado de dificultad					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
87	31	6	3	2	0

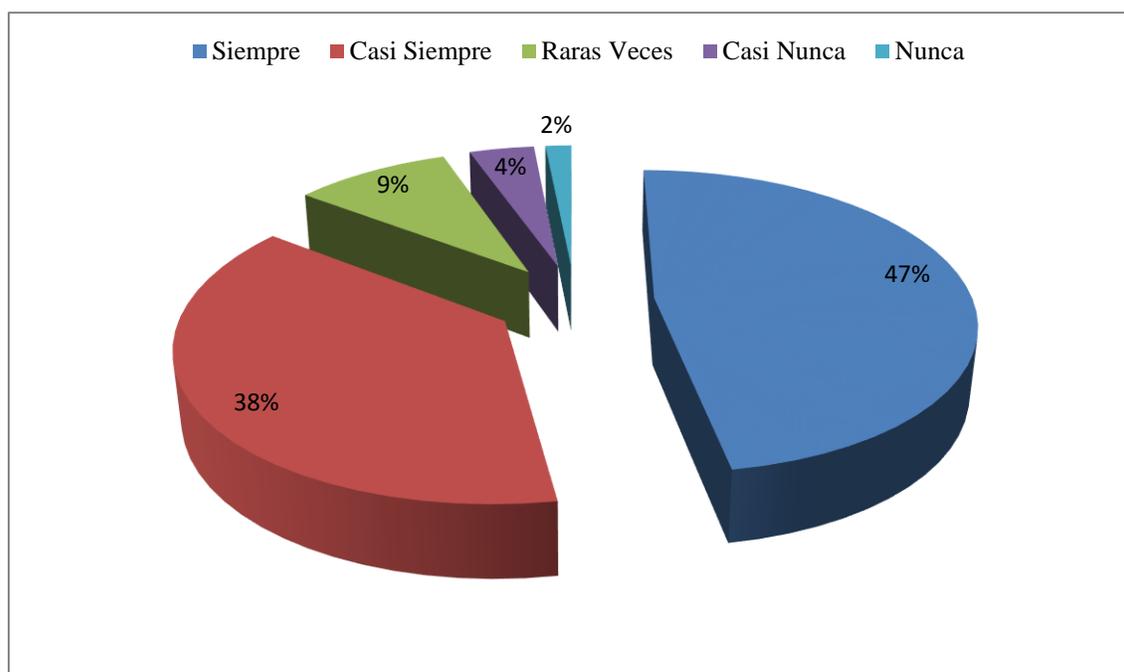
**Figura 13. El docente realiza ejercicios y problemas de diferente nivel de dificultad**



El docente en el desarrollo de un contenido debe de planificar los ejercicios y problemas que le permitan aplicar el contenido de forma gradual, es decir ir de lo fácil a lo difícil, ya que los primeros problemas permiten ir formando las bases e ir entendiendo el contenido para que después puedan trascender en el conocimiento. Según los resultados, en la explicación del contenido el docente presenta a los estudiantes diferentes grados de dificultad en el desarrollo de los problemas y ejercicios.

<b>Tabla 8. El docente expone el tema con diferentes actividades que permitan aplicar los conceptos para garantizar su comprensión.</b>					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
61	49	12	5	2	0

**Figura 14. El docente propone diferentes actividades en el desarrollo del contenido**

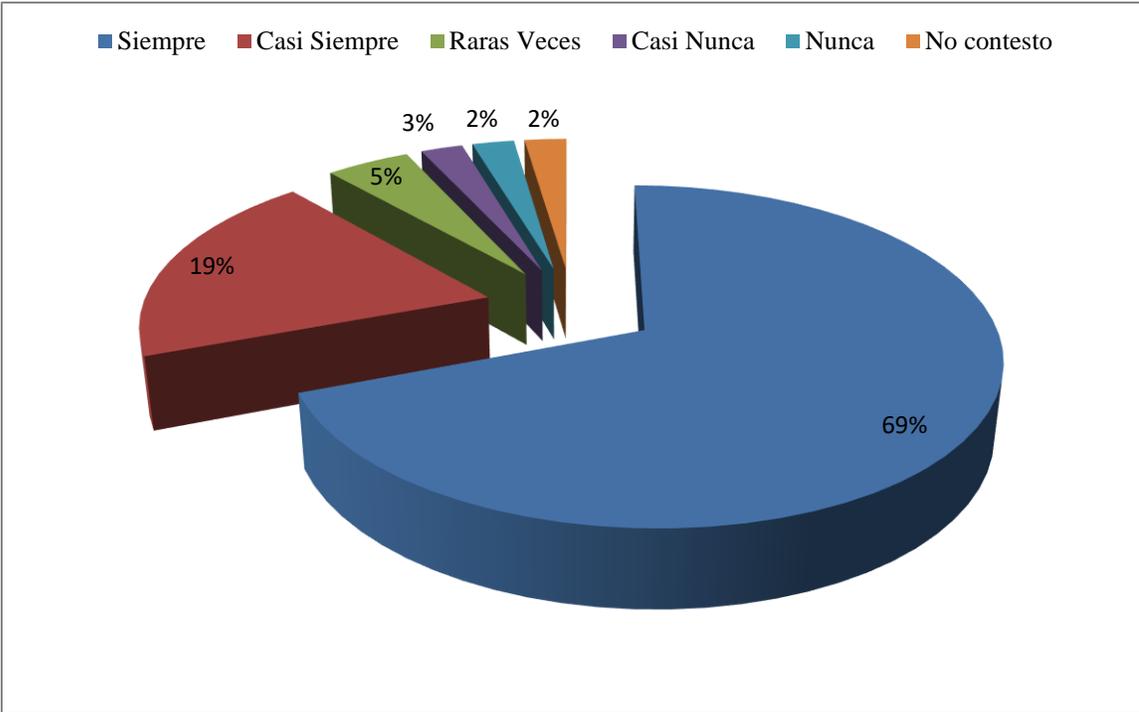


Las actividades didácticas tanto fuera como dentro del salón de clases son importantes para la comprensión y apropiación del contenido, esto permite explorar diferentes escenarios de aplicación, por ejemplo, la resolución de problemas, proyectos, juegos en la matemática, la experimentación matemática, demostración, las aplicaciones y procesos de modelación, esto hace que el estudiante tenga la oportunidad de profundizar en el contenido.

Según los resultados, el estudiante valora que el docente presenta diferentes actividades en el desarrollo del contenido que permiten comprender los conceptos, sin embargo, algunos indican que no siempre lo hacen.

<b>Tabla 9. El docente procura que los estudiantes apliquen los conceptos adquiridos del tema</b>					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
90	25	6	3	3	2

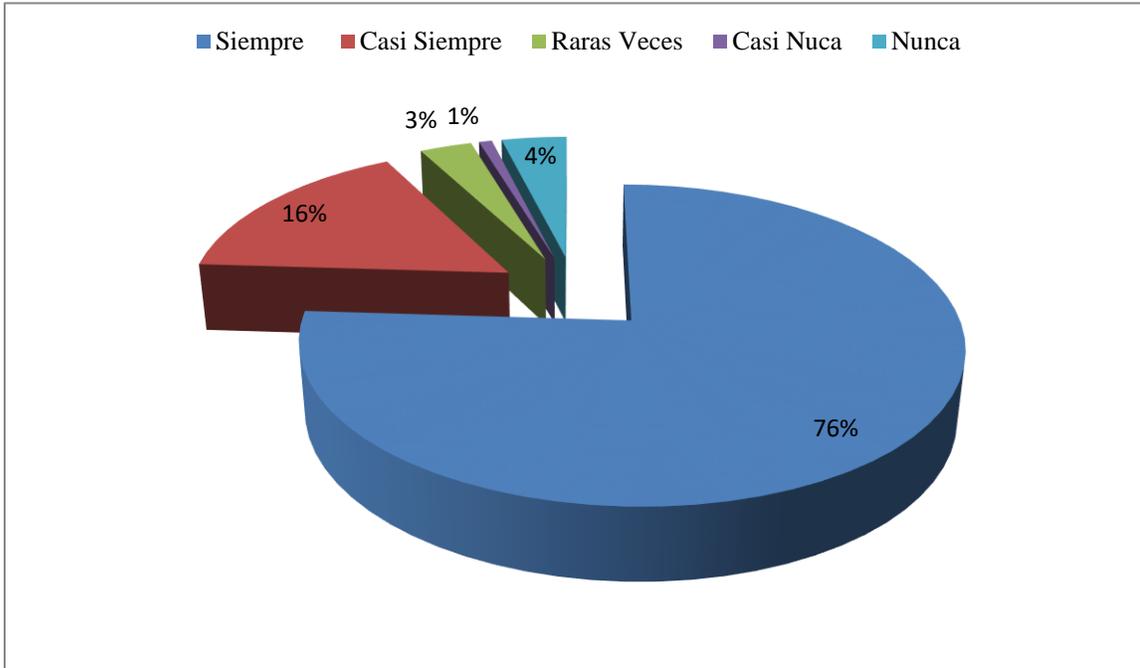
**Figura 15. El docente procura que apliquen el contenido**



En matemáticas el hacer es como se aprende, es importante que el docente proponga actividades que permitan al estudiante aplicar la teoría para consolidar y que el aprendizaje sea significativo, esto permite fomentar la creatividad para dar respuesta a problemas diferentes y que el estudiante sea capaz de trascender. Según los resultados, el estudiante considera que el docente muestra interés que aplique lo aprendido del contenido en la resolución de problemas y ejercicios.

<b>Tabla 10. El docente relaciona los nuevos conceptos con los conocimientos previos</b>					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
98	21	4	1	5	0

**Figura 16. El docente establece una relación entre conocimiento nuevo y previo**



El docente es el encargado de activar los conocimientos previos en los jóvenes, a través de estrategias que permitan relacionarlos con la nueva información.

En la utilización de los conocimientos previos radica el sentido y significado que los estudiantes dan a la nueva información para mayor retención y profundización en la mente para que lo puedan aplicar en la vida cotidiana.

Según los resultados, el estudiante considera que el docente permite establecer una relación entre la base de los conocimientos previos con los nuevos conceptos.

#### **4.2.1.2. Conclusión sobre la perspectiva del estudiante parte I**

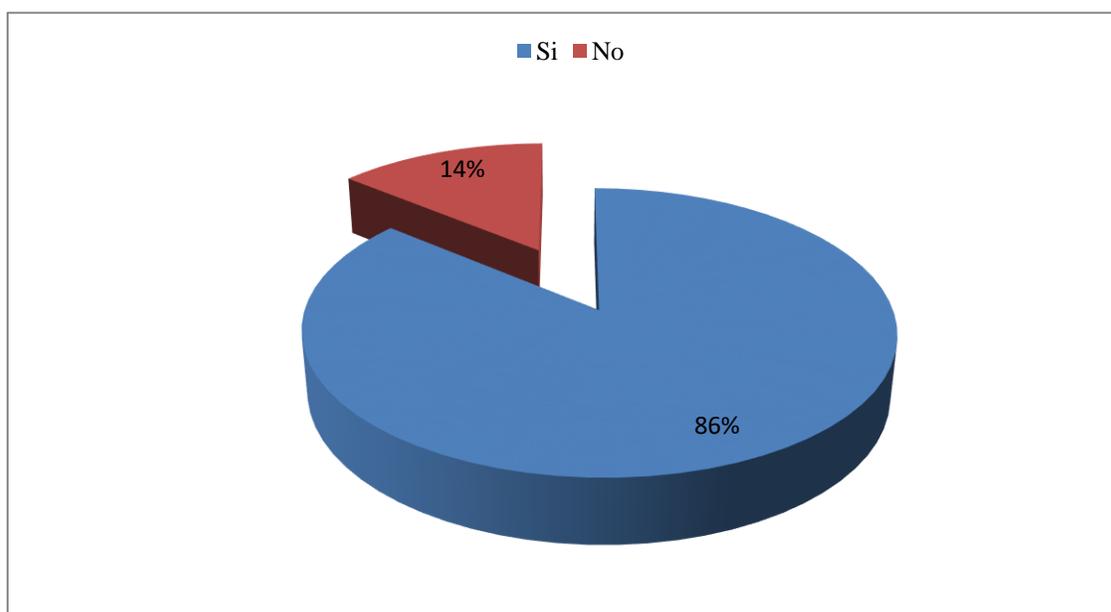
Con la pregunta 8 finaliza la Parte I de la encuesta realizada a 129 estudiantes que cursaron la asignatura de Cálculo Integral Ciclo II-2022, desde el punto de vista de los estudiantes, por lo general, están satisfechos del trabajo realizado por el docente en la enseñanza del contenido Volumen de Sólidos de Revolución, indicando con sus respuestas que el docente ha utilizado estrategias didácticas, actividades de aprendizaje y recursos tecnológicos que les han permitido comprender el contenido, sin embargo, hay un grupo menor, pero no menos importante que considera que algunos docentes no han explicado con claridad el contenido, no ha hecho uso de recurso tecnológicos que les permita comprender y las actividades propuestas no han sido suficiente para lograr alcanzar las competencias necesarias que les permita apropiarse de dicho contenido.

## Parte II

A continuación, se presentan los resultados y análisis respectivo de cada pregunta sobre los conocimientos previos y dificultades que tienen los estudiantes en el tema Volumen de Sólidos de Revolución.

<b>Tabla 11. ¿Conoces cuáles son los conocimientos previos que debes tener para iniciar el estudio del tema?</b>	
Si	No
111	18

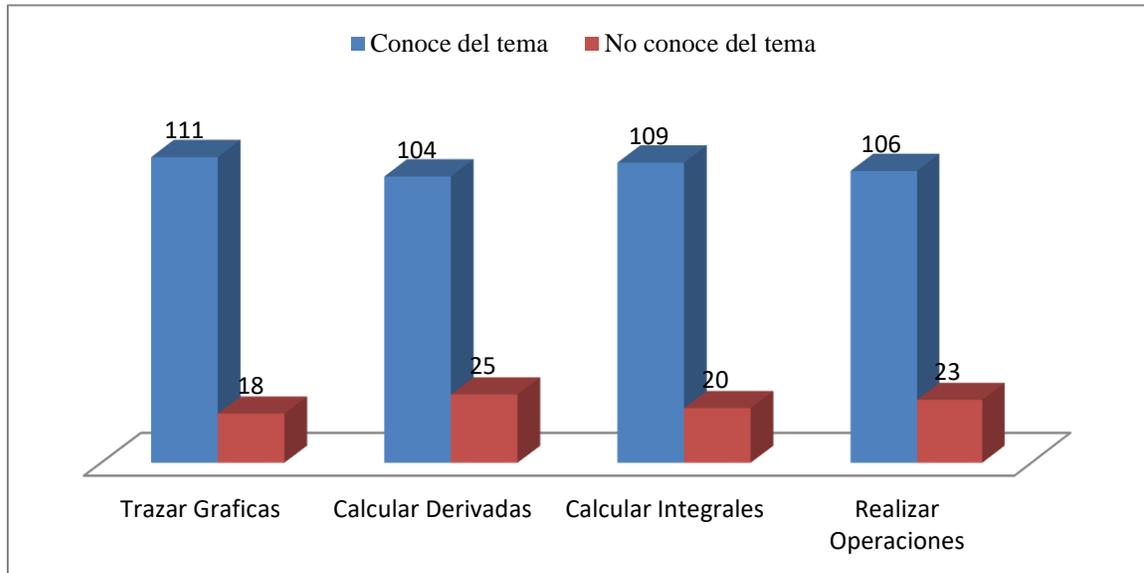
**Figura 17. El estudiante sabe que conocimientos previos debe tener para el estudio del contenido**



Los conocimientos previos son fundamentales en el estudio de un contenido, ya que es la base que permite realizar una discusión en clases con una dirección clara para el estudiante y esto facilita la adquisición de nuevas teorías y que conozca qué es lo que se necesita para facilitar la fluidez en el aprendizaje: el refuerzo previo. El estudiante por lo general considera que conoce cuales son las bases que debe de tener para poder estudiar el contenido de volumen de sólidos de revolución.

Tabla 12. Selecciona los conocimientos que posees para el inicio del estudio del tema			
Trazar graficas	Calcular derivadas	Calcular integrales	Realizar operaciones
111	104	109	106

Figura 18. Conocimientos previos que posee el estudiante



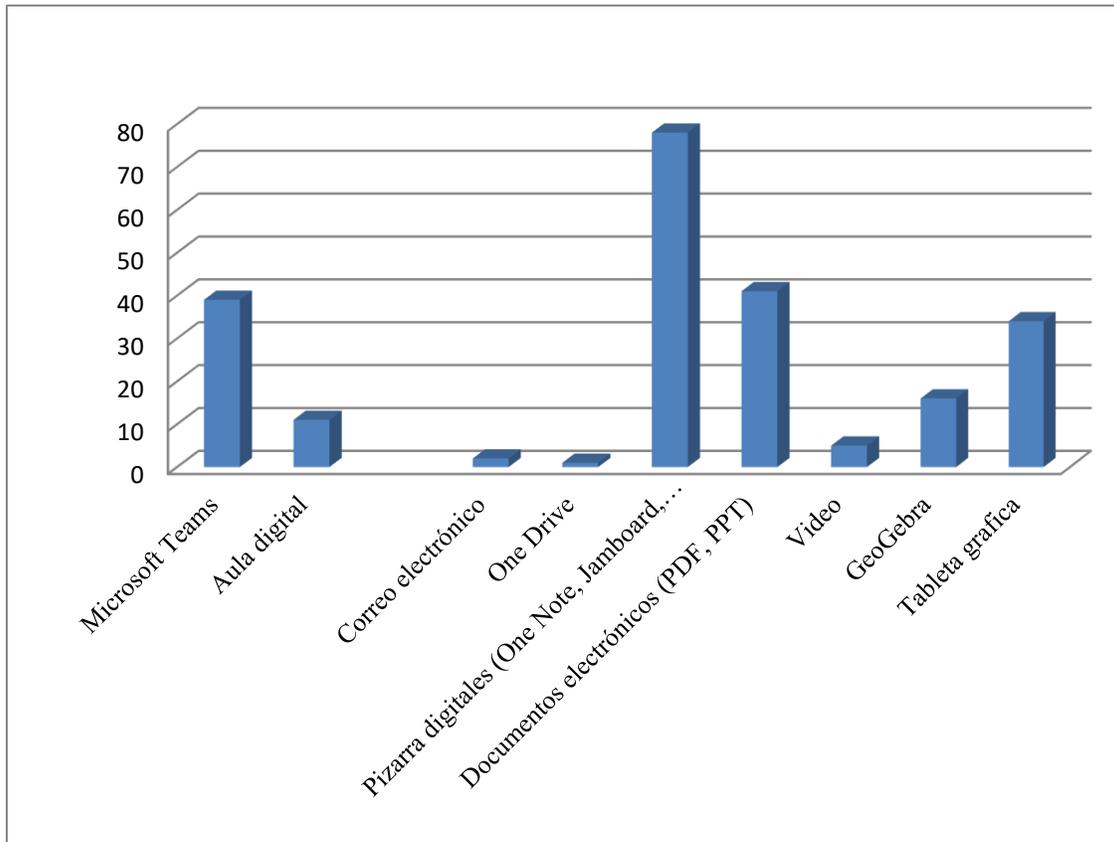
En el inicio del estudio de Volumen de Sólido de Revolución es importante tener el conocimiento para trazar la gráfica de una función, derivar e integrar funciones, realizar operaciones de expresiones, simplificar, esto facilita poder realizar el planteamiento correcto de la integral que representa el volumen y el proceso para determinarlo.

Según los resultados, por lo general los estudiantes consideran que pueden realizar operaciones, trazar gráficas, derivar e integral que son conceptos necesarios para el contenido. Sin embargo, hay un buen porcentaje (en todos los casos más del 13%) de estudiantes que no tiene base suficiente para la comprensión del tema y es hacia ellos que se tiene que dirigir una especial atención.

**Tabla 13. ¿Qué herramientas tecnológicas o programas utiliza el docente para apoyar la explicación del tema?**

Herramientas tecnológicas o programas	Microsoft Teams	39
	Aula digital	11
	Correo electrónico	2
	One Drive	1
	Pizarra digitales (One Note, Jamboard, OpenBoard)	78
	Documentos electrónicos (PDF, PPT)	41
	Video	5
	GeoGebra	16
	Tableta grafica	34

**Figura 19. Programas o herramientas tecnológicas que utiliza el docente**

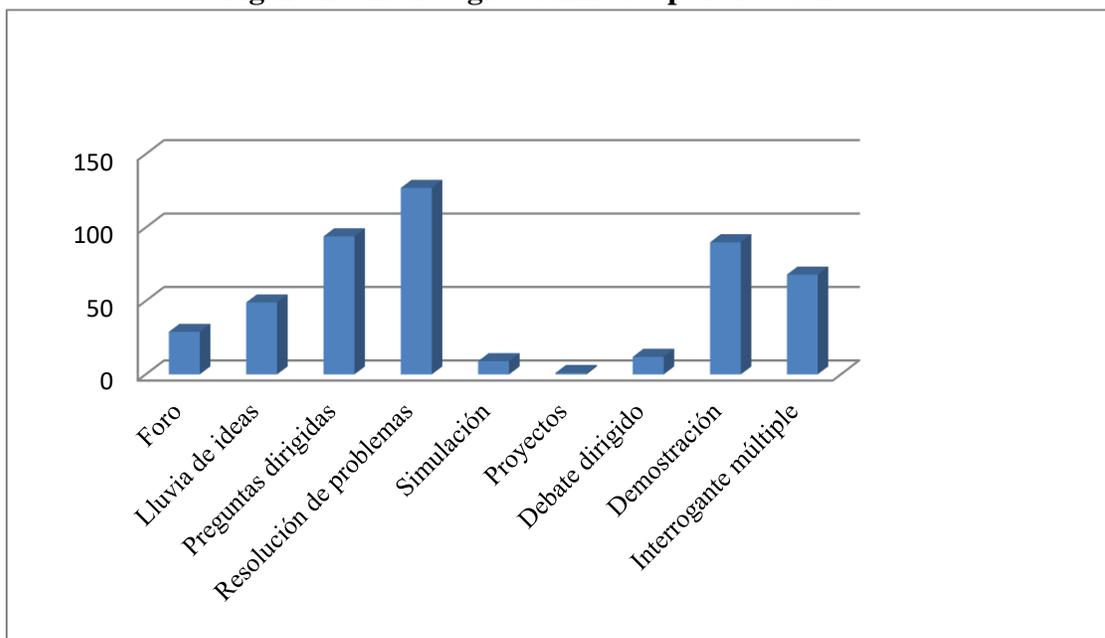


En el contexto de la pandemia en el que se llevó a cabo la investigación, la importancia del uso de programas y herramientas tecnológicas era fundamental para la enseñanza y aprendizaje óptimo, estos permitían mostrar diferentes perspectivas del contenido, ayudaban a facilitar la explicación y establecer una comunicación constante con los estudiantes.

Según los estudiantes las herramientas más utilizadas por los docentes fueron las plataformas de Microsoft Teams, Pizarras digitales, documentos electrónicos y tabletas gráficas.

Tabla 14. ¿Qué estrategias metodológicas observas que utiliza el docente para explicar el tema?								
Foro	Lluvia de ideas	Preguntas dirigidas	Resolución de problemas	Simulación	Proyectos	Debate dirigido	Demostración	Interrogatorio múltiple
29	49	94	127	9	1	12	90	68

**Figura 20. Estrategias utilizadas por el docente**

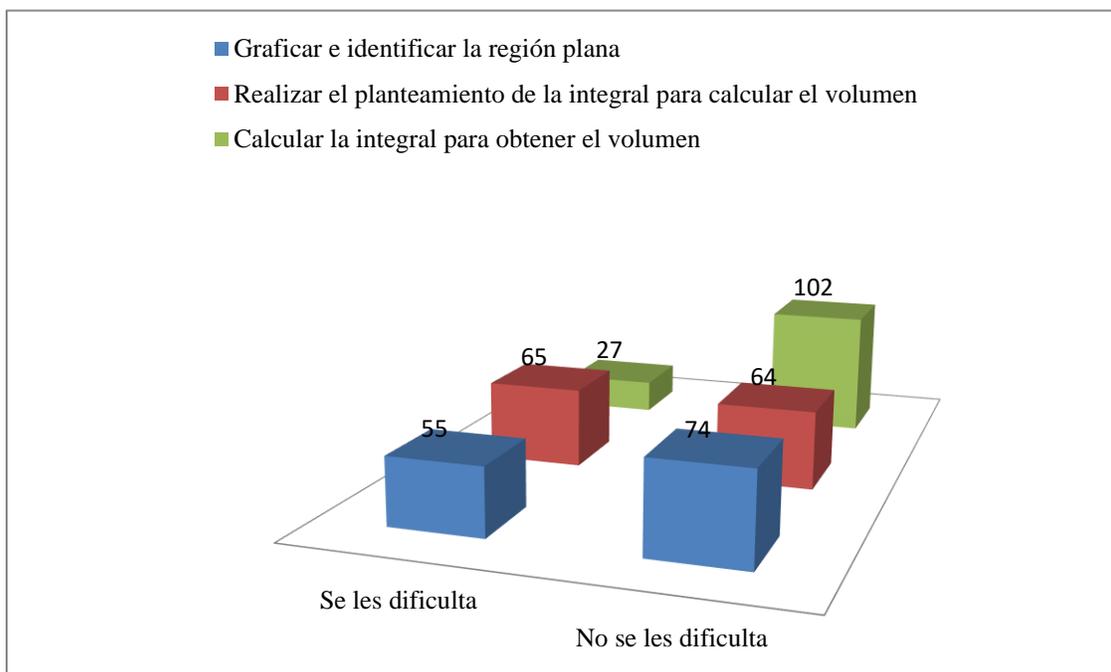


En la enseñanza es importante como se llega al conocimiento o lo que se desea aprender, el docente es el encargado de planificar ese camino y es necesario que tenga diferentes estrategias metodológicas que le permitan cumplir con los objetivos para que el estudiante adquiera las competencias necesarias según el contenido.

De acuerdo a los resultados, las estrategias más utilizadas por el docente según los estudiantes son la resolución de problemas, las demostraciones, preguntas dirigidas, interrogatorio múltiple, lluvia de ideas.

<b>Tabla 15. Del tema sólidos de revolución, que es lo que más se te dificulta:</b>	
Graficar e identificar la región plana	55
Realizar el planteamiento de la integral para calcular el volumen	65
Calcular la integral para obtener el volumen	27
no contesto	2

**Figura 21. Dificultades en el tema Volumen de Sólidos de Revolución**

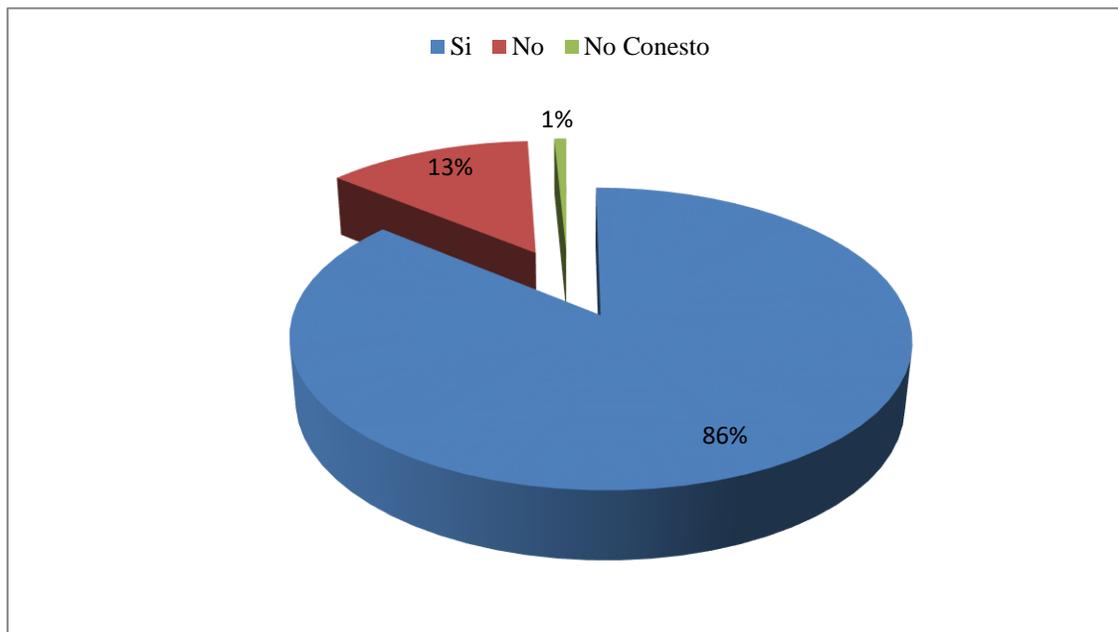


En el área de las matemáticas los estudiante se encuentran con procesos que más se les dificultan y estos no les permite comprender en su totalidad lo que el docente le enseña, en el contenido de Volumen de Sólidos de Revolución es importante conocer la región plana que se hace girar respecto al eje de revolución para generar el sólido, si no se grafica correctamente entonces es imposible hacer un planteamiento correcto para poder determinar el volumen, una vez se tenga la región plana correctamente es importante comprender el método que se aplica para realizar el planteamiento, estos procesos descritos son los que el estudiante

considera que es lo que más se le dificulta para poder determinar el volumen de un sólido.

<b>Tabla 16. Conociendo la región plana y el eje de revolución, ¿Puedes identificar la figura del sólido?</b>		
Si	No	No contestó
111	17	1

**Figura 22. Identificación del Sólido**



Según los resultados obtenidos el 86% de los estudiantes pueden identificar el sólido si se tiene identificada la región plana que genera el sólido, significa que comprende que es lo que se necesita para generar la idea grafica tridimensional.

#### **4.2.1.3. Conclusión sobre la perspectiva del estudiante parte II**

En base a los resultados obtenidos podemos notar que el nivel de satisfacción de los estudiantes hacia los docentes que imparten la materia, en cuanto a la enseñanza, es bien valorada, ya que por lo general, la metodología utilizada en el desarrollo de clases, las estrategias didácticas, actividades de aprendizaje y los recursos que aplica y utiliza el docente les permite comprender el contenido, pero también hay un sector de estudiantes cuya valoración respecto a estos tópicos, no es muy buena, aunque ese sector es minoría, pero no por ello, menos importante, y nuestra atención se centrará en ellos, ya que se puede inferir en base a sus respuestas que es necesario que se utilicen estrategias didácticas, actividades de aprendizaje y recursos tecnológicos diferentes para que puedan comprender y adquirir las competencias necesarias que correspondan al contenido. Algo muy importante que podemos resaltar son las estrategias metodológicas que con mayor frecuencia utiliza el docente son aquellas donde el trabajo del estudiante es individual. En este trabajo de investigación se promoverá una estrategia colaborativa que permita socializar, compartir el conocimiento y fomentar la autonomía.

Otro punto importante son los recursos electrónicos; según los resultados obtenidos una de las dificultades que tiene el estudiante es, en el trazo de la gráfica. En el trabajo de investigación se utilizará como referencia el programa de GeoGebra para que el estudiante se pueda apoyar y tener una representación clara de lo que es graficar, además, en el programa se puede realizar la representación gráfica del sólido al que se desea calcular el volumen.

En esta parte se pretende explotar al máximo la herramienta de GeoGebra que algunos docentes utilizan muy poco.

## 4.2.2. Perspectiva del docente

### 4.2.2.1. Análisis de los resultados en encuesta a docentes

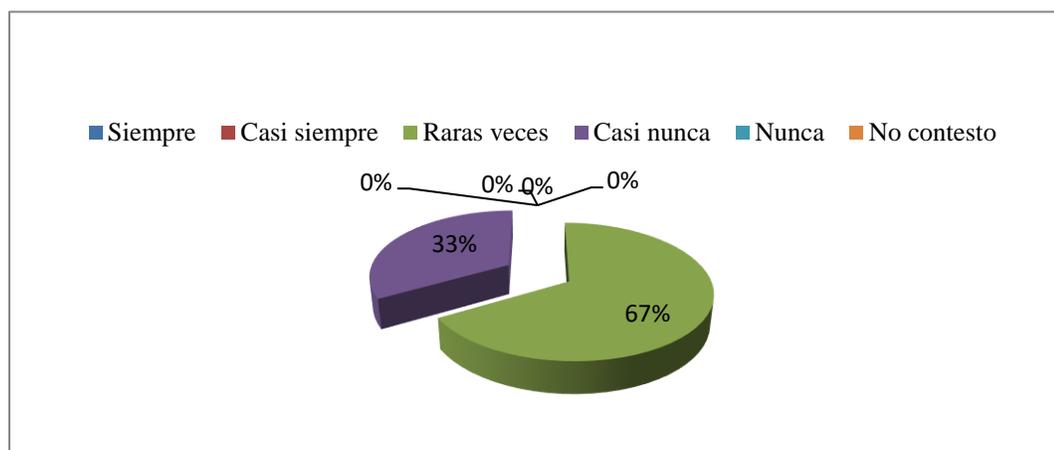
#### Parte I

Para identificar el nivel de satisfacción y grado de dificultad en los estudiantes que estudian la asignatura de cálculo integral en el desarrollo del tema Volumen de Sólidos de Revolución a partir de la opinión del docente, se realizó una encuesta de 18 preguntas a los 3 docentes que imparten la asignatura mostrando los siguientes resultados.

**Tabla 17. El estudiante muestra dominio en los conocimientos previos para comprender el tema**

Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
0	0	2	1	0	0

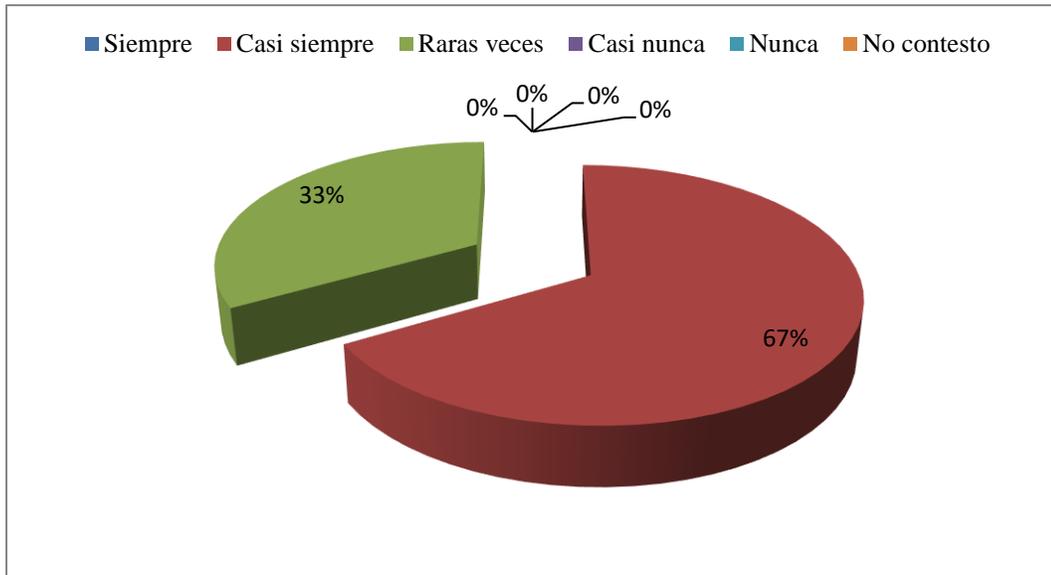
**Figura 23. El estudiante muestra dominio en los conocimientos previos**



Para la comprensión del tema Volumen de Sólidos de Revolución es necesario tener conocimientos básicos de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, es decir saber realizar operaciones básicas, graficar diferentes funciones y ecuaciones en el plano XY, factorizar, determinar interceptos entre gráficas, manejar fórmulas del volumen de cuerpos geométricos, reglas de derivación, métodos de integración entre otros; los conocimientos previos son fundamentales. Sin embargo, el docente ha observado que el estudiantado rara vez o casi nunca muestra dominio en dichos conocimientos previos necesarios para el contenido en estudio.

Tabla 18. El estudiante comprende la aplicabilidad de la integral definida					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
0	2	1	0	0	0

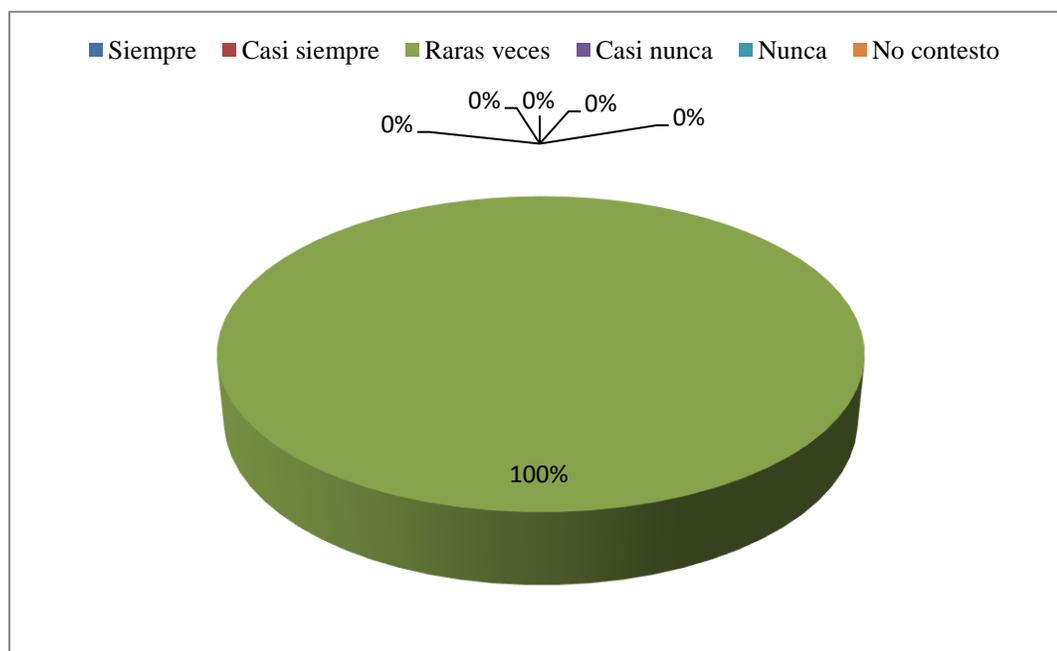
**Figura 24. El estudiante comprende la aplicabilidad de la integral definida**



Es importante comprender la aplicabilidad que la integral definida tiene en diferentes áreas, por ejemplo, se utiliza en la determinación de áreas de superficie, cálculo de volumen, momento de inercia, cálculo de trabajo energético, etc. Además, se encuentran muchos problemas de ingeniería que no pueden resolverse sin usar estos cálculos, por lo que el estudiante debe comprender la aplicabilidad que este concepto tiene en situaciones reales; ante ello el docente ha observado que casi siempre el estudiante comprende la aplicabilidad de la integral definida, sin embargo, existe un pequeño grupo que tiene dificultades para lograrlo.

Tabla 19. El estudiante participa activamente en el desarrollo de la clase al impartir el tema					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
0	0	3	0	0	0

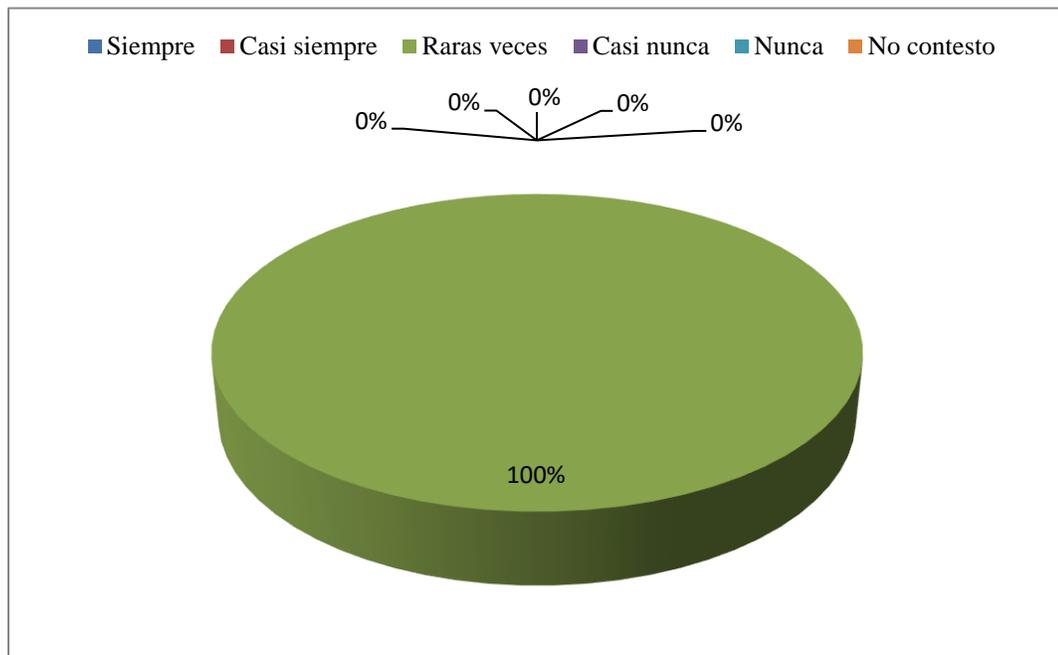
Figura 25. El estudiante participa activamente en el desarrollo de la clase



La participación activa durante el desarrollo de la clase por parte del estudiante es fundamental, puesto que le permite comprender con mayor facilidad el contenido en estudio, si éste repite, intercambia resultados con sus compañeros, socializa conceptos con los demás, resuelve, hace, practica en pleno lo discutido en clases. Sin embargo, el docente ha observado que la participación del estudiante en el desarrollo del tema Volumen de Sólidos de Revolución es muy poca, raras veces se involucra durante el desarrollo de la clase, lo cual puede presentar consecuencias, ya que el no participar en las discusiones dificulta la comprensión del tema en estudio.

Tabla 20. El estudiante participa activamente en las actividades propuesta y asignadas por el docente					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
0	0	3	0	0	0

**Figura 26. El estudiante participa activamente en las actividades propuestas por el docente**

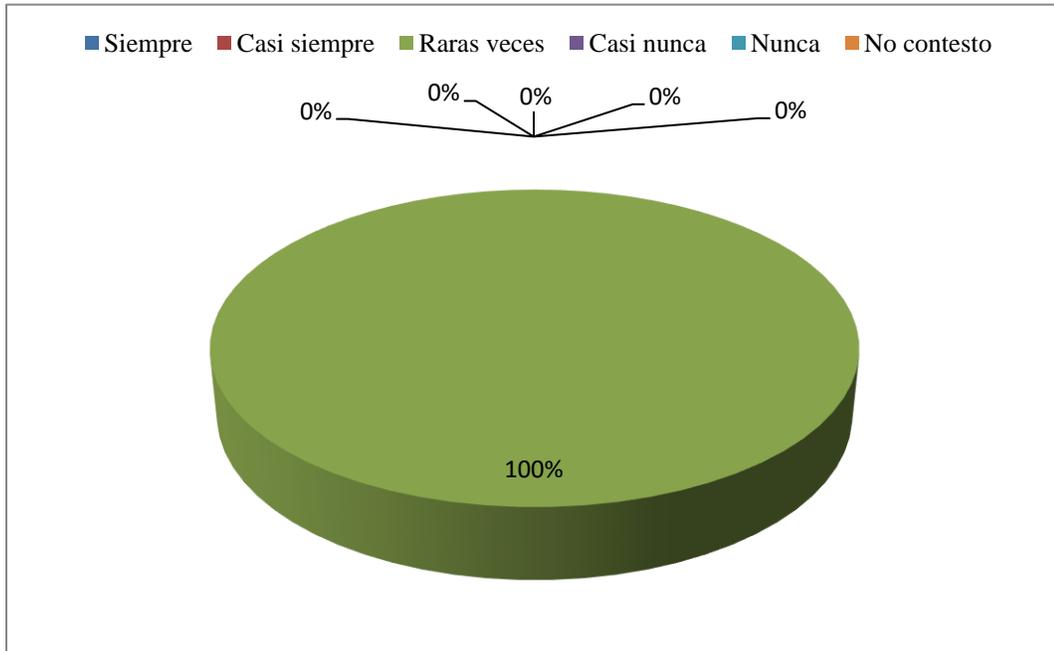


Realizar lo asignado por el docente dentro y fuera de clase es otro factor que influye positivamente en la comprensión del contenido, hacer estas actividades le ayuda al estudiante a encontrar dudas e inquietudes que posteriormente podrá resolver preguntando a su docente, ya que si no realiza las actividades asignadas no se da cuenta si puede o no realizar lo que se le solicite hacer.

De acuerdo a los resultados el docente ha observado que la participación del estudiantado en el desarrollo de actividades propuestas y asignadas del tema es muy poca, raras veces realiza dichas actividades.

Tabla 21. ¿Se observa que el estudiante propone ideas o soluciones a los ejercicios y problemas planteados?					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
0	0	3	0	0	0

**Figura 27. El estudiante propone ideas o soluciones a los ejercicios o problemas**

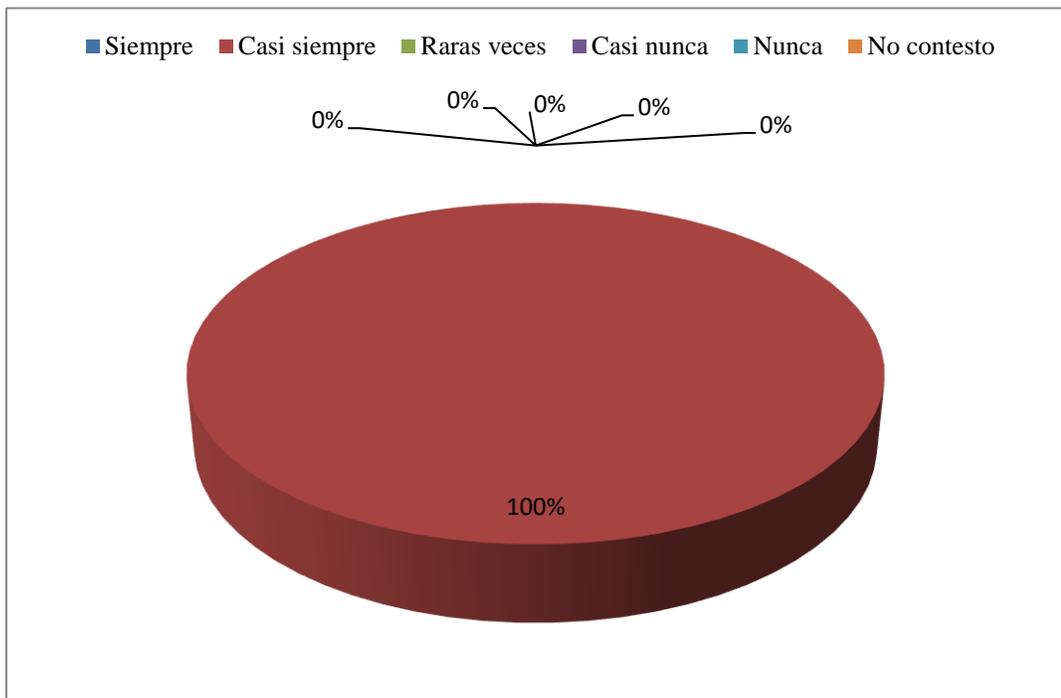


Presentar resultados del trabajo realizado en la resolución de ejercicios y problemas asignados por el docente y proponer ideas o soluciones ayuda a verificar si el estudiante ha comprendido el contenido de estudio, si aplica los conceptos vistos en clase de forma correcta y coherente permite al docente poder realizar observaciones de forma pertinente y así, el estudiante, puede hacer correcciones o se asegura que ha realizado exitosamente la solución del problema o ejercicio planteado.

Sin embargo, el docente ha observado que el estudiante tiene poca participación en clase y que raras veces propone ideas o soluciones a los problemas planteados respecto al tema Volumen de Sólidos de Revolución.

Tabla 22. El estudiante evidencia sus avances en su comprensión por medio de la resolución de los ejercicios y problemas propuestos por el docente					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
0	3	0	0	0	0

**Figura 28. El estudiante evidencia sus avances por medio de ejercicios y problemas propuestos por el docente**

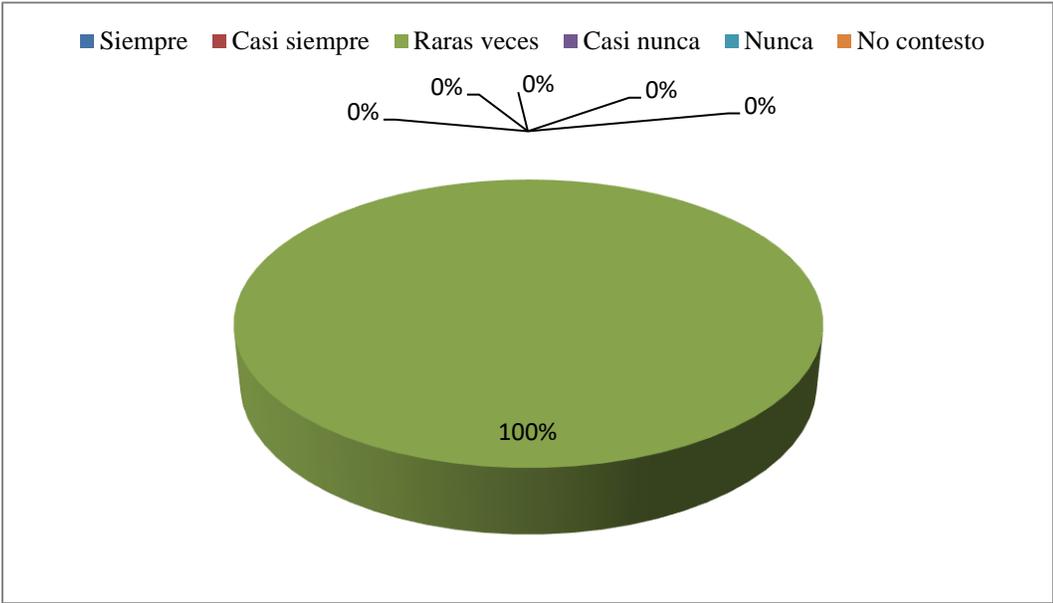


Mostrar y presentar evidencias de forma escrita de la resolución de ejercicios y problemas asignados ayuda al docente a identificar si el estudiante muestra avances en la comprensión del contenido en estudio y para el estudiante es una forma de garantizar que sus técnicas de estudio funcionan en su proceso de aprendizaje.

De acuerdo a los resultados para el estudio del contenido Volumen de Sólidos de Revolución el docente ha observado que el estudiante casi siempre evidencia los avances de su comprensión al verificar que puede resolver los ejercicios propuestos.

<b>Tabla 23. El estudiante realiza una lectura previa sobre los materiales (Libros, videos, documento, etc.) proporcionados por el docente.</b>					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
0	0	3	0	0	0

**Figura 29. El estudiante realiza una lectura previa sobre los materiales compartidos por el docente**

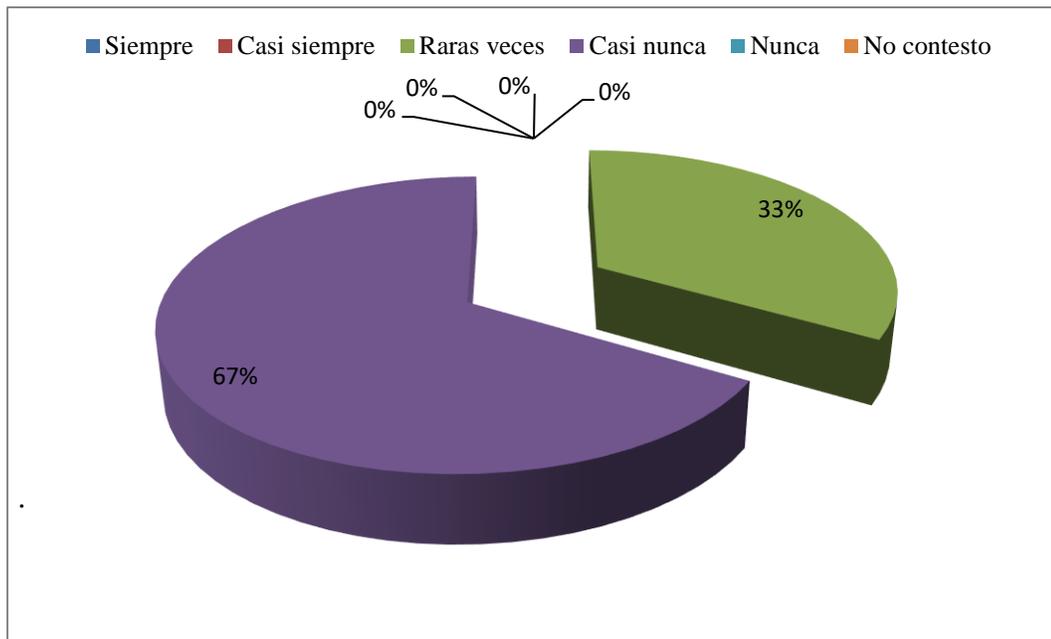


Se debe fomentar al estudiante que la lectura previa de cualquier contenido en estudio es muy importante en su proceso de aprendizaje, ya que es una herramienta que fortalece, enriquece, facilita la comprensión del tema a estudiar, es un hábito que el estudiante debe practicar, porque es a través de la lectura previa, que puede revisar las bases teóricas, los ejemplos resueltos que los diferentes materiales ofrecen sobre el tema, además le permite identificar que herramientas básicas requiere para el desarrollo del tema que posteriormente estudiará. En particular, para el tema Volumen de Sólidos de Revolución es necesario realizar dicha lectura porque las herramientas básicas a utilizar en el desarrollo de este contenido exigen la práctica previa sobre gráficas, cálculo de interceptos entre gráficas, selección de región plana, entre otros.

Sin embargo, el docente ha observado que el estudiantado raras veces demuestra que ha realizado lectura previa de los materiales de apoyo al contenido que se va a estudiar, lo cual puede ser éste un factor que limite la comprensión del tema.

<b>Tabla 24. Se evidencia en clases que el estudiante realiza una investigación previa al tema utilizando otros medios fuera de los que proporciona el docente</b>					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
0	0	1	2	0	0

**Figura 30. El estudiante realiza una investigación previa utilizando otros medios fuera de los que proporciona el docente**

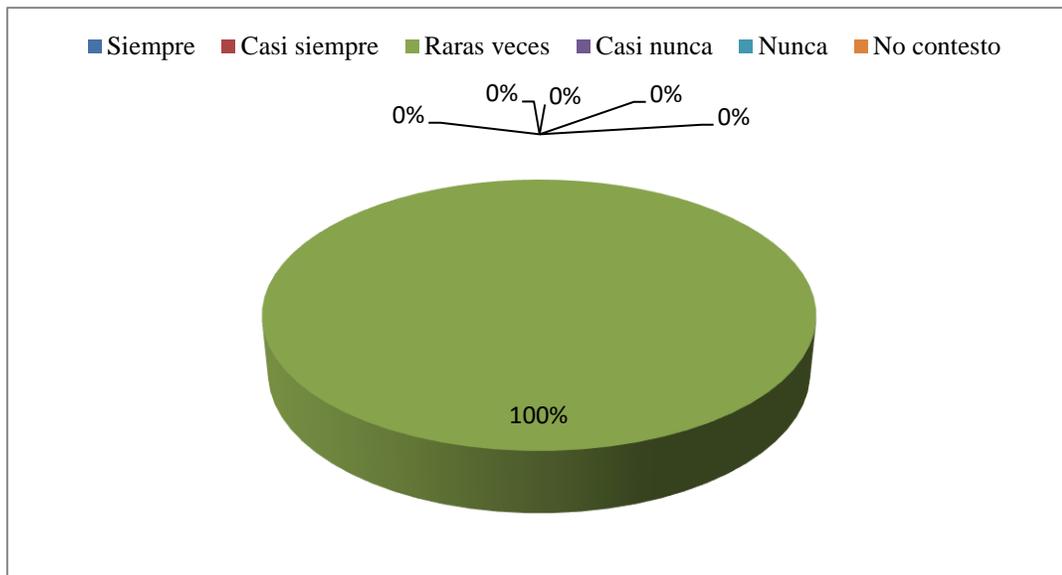


El contenido Volumen de Sólidos de Revolución es un tema que se puede encontrar en diferentes bibliografías, por lo que no es una limitante investigar previamente de que se trata el tema, el estudiante puede indagar más allá de los materiales que el docente ha proporcionado.

Sin embargo, se ha observado que casi nunca el estudiante realiza una investigación previa al tema utilizando sus propios recursos, puesto que no evidencia durante la clase los resultados de su investigación

<b>Tabla 25. El estudiante realiza consultas a su docente para resolver dudas del tema en horarios fuera de la clase</b>					
Siempre	Casi siempre	Raras veces	Casi nunca	Nunca	No contesto
0	0	3	0	0	0

**Figura 31. El estudiante realiza consultas fuera del horario de clases**



Resolver dudas e inquietudes mediante consultas al docente en horarios indicados por él sobre el tema en estudio es importante, puesto que le permite al estudiante aclarar de manera personal algo que no haya comprendido durante la clase; también la consulta al docente le permite solicitar revisión de algún ejercicio o problema particular sobre el cual pueda tener dudas de como lo ha resuelto y así asegurarse que está trabajando de manera correcta en la solución.

Sin embargo, es una situación un poco recurrente cada ciclo, mediante la encuesta realizada a los docentes que imparten la asignatura se refleja que durante el desarrollo del tema Volumen de Sólidos de Revolución el estudiante raras veces

realiza consulta con sus docentes para aclarar dudas del tema en horarios indicados fuera de clase.

#### **4.2.2.2. Conclusión sobre la perspectiva del docente parte I**

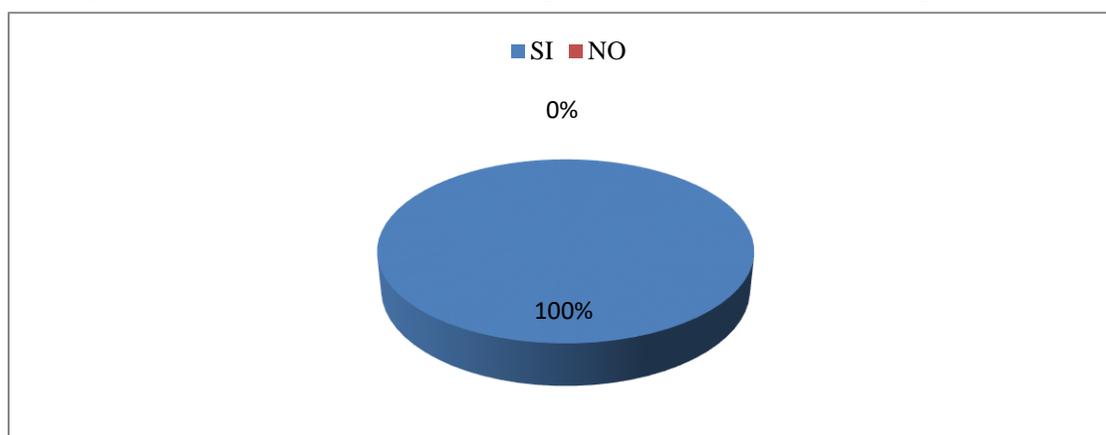
Con la pregunta 9 finaliza la Parte I de la encuesta realizada a los 3 docentes que en Ciclo II – 2022 impartieron la asignatura de Cálculo integral, obteniendo, desde la percepción del docente, como el estudiante muestra avances en la comprensión del tema Volumen de Sólidos de Revolución, como es su comportamiento ante lo desarrollado durante la clase, cuál es su actitud, como éste se prepara para recibir el tema, si realiza lo asignado durante la clase y fuera de ella, como se responsabiliza de actividades que ayudarán en la comprensión del tema. De estos resultados podemos inferir que los estudiantes no poseen hábitos de estudio que les permita fortalecer su aprendizaje, que pocas veces realiza actividades como leer, investigar o resolver problemas que ayuden a comprender como calcular el Volumen de un Sólido de Revolución.

## Parte II.

A continuación, mostraremos resultado en los que identificaremos como el docente se prepara para impartir el tema Volumen de Sólidos de Revolución identificando los recursos que utiliza para facilitar la comprensión del contenido.

<b>Tabla 26. ¿Realiza una exploración de conocimientos previos al inicio del desarrollo del tema?</b>	
SI	NO
3	0

**Figura 32. El docente realiza una exploración de conocimientos previos**

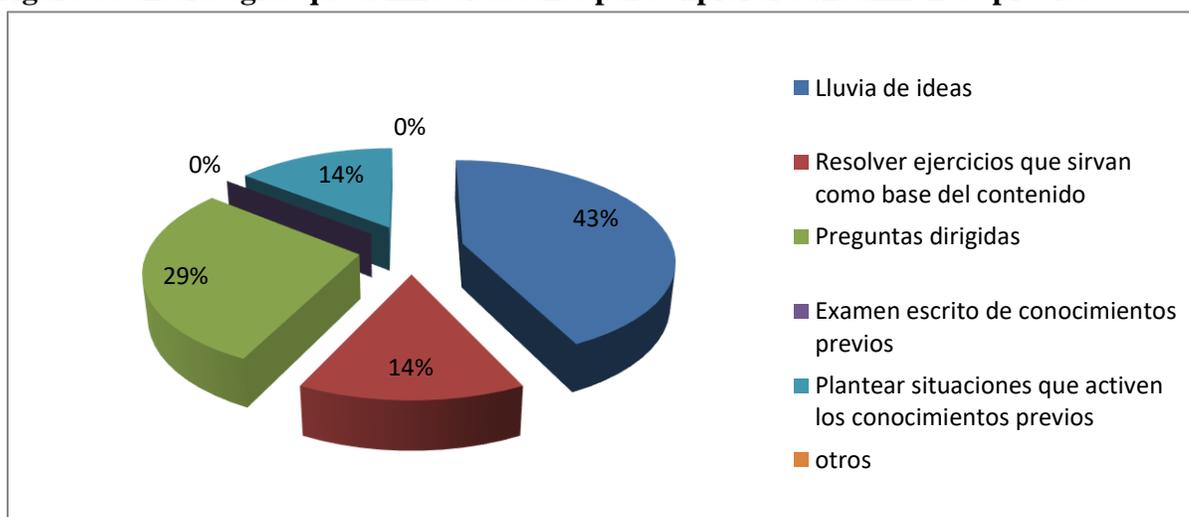


Es importante que al inicio del desarrollo de cada tema se realice una exploración de conocimientos previos; dicha exploración ayuda al docente a determinar el grado de profundidad con que se debe tratar un nuevo tema, reforzarlo o incorporarlo si se considera importante su dominio para comprender un nuevo conocimiento. Asimismo, el diseño de situaciones de aprendizaje, considerando las herramientas previas que el estudiante dispone y su actitud hacia el proceso de aprendizaje, le permite asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevos procedimientos asociados a él. Para el desarrollo del contenido Volumen de Sólidos de Revolución es necesario que el estudiante conozca y maneje ciertos conocimientos previos, por lo que se les consultó a los docentes que imparte la asignatura si realizan una exploración previa, a lo cual

respondieron que al impartir el tema siempre la realizan al inicio del desarrollo del contenido, con la finalidad de detectar pre saberes en los estudiantes.

Lluvia de ideas	Resolver ejercicios que sirvan como base del contenido	Preguntas dirigidas	Examen escrito de conocimientos previos	Plantear situaciones que activen los conocimientos previos	otros
3	1	2	0	1	0

**Figura 33. Estrategias que utilizo el docente para explorar conocimientos previos**

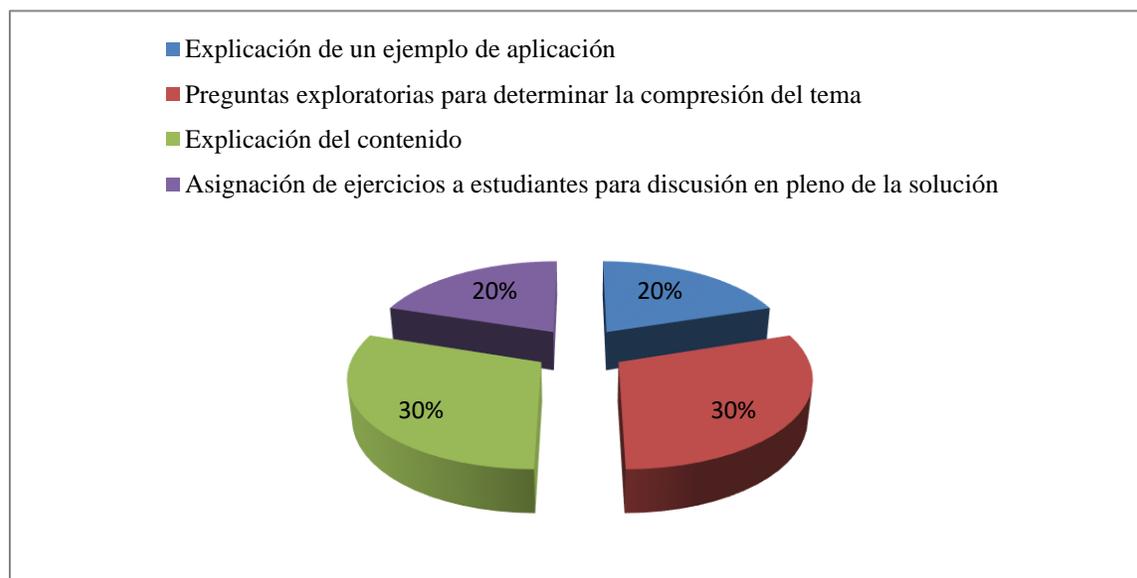


La exploración del conocimiento previo cumple una doble función, por un lado, permite conocer lo que saben los estudiantes y, por otro, permite utilizar dicho conocimiento como base para promover nuevos aprendizajes. Así mismo, el esclarecer los propósitos u objetivos educativos desarrolla las expectativas adecuadas sobre el contenido, así como da sentido y/o valor práctico a los aprendizajes involucrados en el curso. Este grupo de estrategias se recomienda utilizarlas al inicio de la clase y entre ellas se destacan: las pre interrogantes (preguntas dirigidas), la actividad generadora de información previa (por ejemplo: lluvia de ideas), la enunciación de objetivos, entre otros.

Por tanto, de acuerdo a los resultados obtenidos, las estrategias que más utilizan los docentes que imparten Cálculo integral al explorar conocimientos previos sobre el contenido Volumen de Sólidos de Revolución son lluvia de ideas y preguntas dirigidas.

<b>Tabla 28. ¿Cuáles de las siguientes estrategias metodológicas implementó en el desarrollo del contenido “Volumen de Sólidos de Revolución”?</b>	
Explicación de un ejemplo de aplicación	2
Preguntas exploratorias para determinar la comprensión del tema	3
Explicación del contenido	3
Asignación de ejercicios a estudiantes para discusión en pleno de la solución	2
Otros: propuestas de regiones donde solo escriban planteamiento de volumen, dado distintos ejes de giro	

**Figura 34. Estrategias metodológicas que el docente implemento en el desarrollo del contenido**



Tomando en cuenta que las estrategias metodológicas permiten identificar criterios, a través de métodos, técnicas y procedimientos que constituyen una secuencia ordenada y planificada permitiendo la construcción de conocimientos durante el proceso enseñanza-aprendizaje, se tomó la decisión de consultar al docente que tipo de estrategias usa en el desarrollo del contenido Volumen de Sólidos de Revolución, ya que el uso de estas estrategias pueden facilitar el desarrollo y comprensión del tema en estudio y además calcular el volumen de un sólido de revolución es una aplicación de la integral definida que requiere una explicación detallada de los elementos que necesita el estudiante identificar previamente para proceder a calcular el volumen requerido del sólido indicado.

De acuerdo a los resultados obtenidos las estrategias metodológicas más utilizadas por los docentes que imparten la asignatura Cálculo Integral para desarrollar el tema Volumen de Sólidos de Revolución son: explicación del contenido y preguntas exploratorias para determinar la comprensión del tema. Sin embargo, cabe mencionar, que algunas veces usan la explicación de un ejemplo de aplicación, la asignación de ejercicios a estudiantes para discusión en pleno de la solución y la propuestas de regiones donde solo escriban planteamiento de volumen, dado distintos ejes de giro.

<b>Tabla 29. ¿Qué estrategia metodológica considera usted que mejor le funcionó en el desarrollo del tema?</b>
- Desarrollo de ejercicios con participación de alumnos/ asignar ejercicio y que ellos comenten como lo resuelven
- Ejemplificar proporcionando una región y hacerla girar en diferentes ejes de rotación para comprender el uso de los elementos que forman la integral del volumen
- La ilustración de una figura adecuada, con los elementos representativos y hacer rotaciones en los ejes de giro, eso les ayuda a manejar mejor el planteamiento a la hora de resolver el ejercicio.

De acuerdo a la opinión de los 3 docentes encuestados mencionan que las estrategias que mayor efectividad les dan en el desarrollo del tema Volumen de Sólidos de Revolución son:

- 1) Explicación del contenido mediante la ilustración de una figura adecuada, con los elementos representativos y hacer rotaciones en los ejes de giro; eso les ayuda en el planteamiento del volumen al momento de resolver un ejercicio propuesto. Éste resultado lo indican 2 docentes.
- 2) Asignación de ejercicios mediante el desarrollo de ejercicios con participación de los alumnos/ asignar ejercicio y que ellos compartan como lo han resuelto. Ésta estrategia la comparten 2 docentes.
- 3) Preguntas exploratorias para determinar la comprensión del tema mediante la ejemplificación de una región y hacerla girar en diferentes ejes de rotación para comprender el uso de los elementos que forman la integral definida que representa el volumen de sólido. Lo indicó un docente.

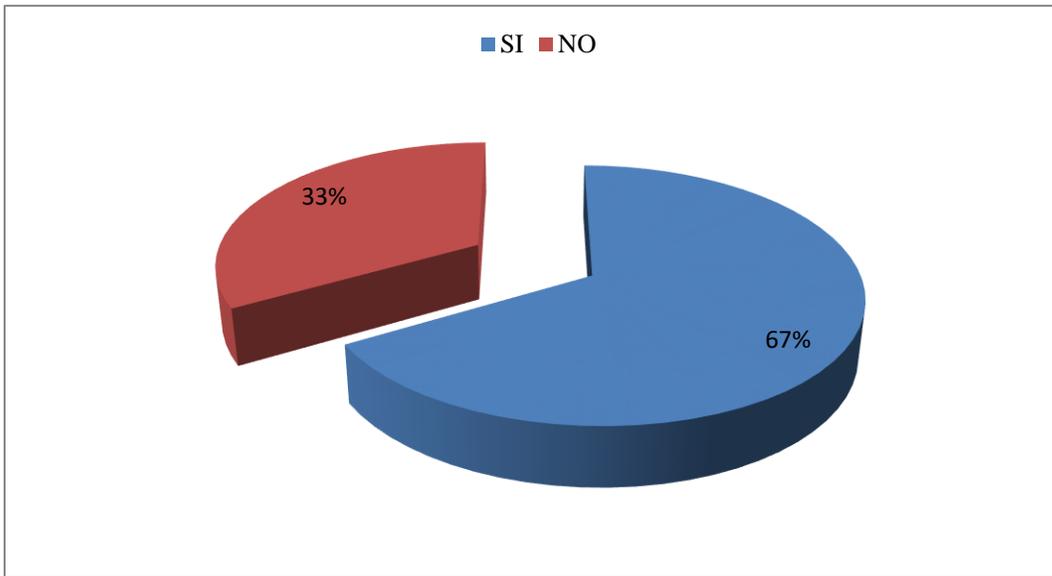
<b>Tabla 30. ¿Podría mencionar que actividades formativas o sumativas realizó en el desarrollo del tema?</b>	
Actividades Formativas	Actividades sumativas
-Asignación de ejercicios en clases (supervisados por el docente) -Asignación de ejercicios para desarrollar en casa y contestar preguntas sobre ellos en plataformas virtuales (Foros) -Resolución participativa de ejercicios desarrollados en la pizarra por los alumnos -Guías de trabajo semanal con los estudiantes.	examen parcial

Las actividades formativas son un conjunto de estrategias utilizadas en el proceso de enseñanza aprendizaje, las cuales permiten que los estudiantes desarrollen sus capacidades y competencias en cuanto a la materia que se le imparte, sirven de apoyo en el proceso de aprendizaje individual y grupal. Al estudiante le permiten una mayor asimilación de los contenidos y reforzar conocimientos. Algunos ejemplos de metodologías docentes que se incluyen en las actividades formativas pueden ser los foros, tutorías, uso de material audiovisual, preparación de trabajos, asignación de ejercicios en clases (supervisados por el docente) entre otras.

Durante el desarrollo del tema Volumen de Sólidos de Revolución los docentes indican que realizan diferentes actividades formativas y sumativas las cuales se describen en la tabla anterior.

Tabla 31. ¿Utilizó herramientas tecnológicas o programas para apoyar la explicación del tema o en las actividades propuestas?	
SI	NO
2	1

**Figura 35. El docente utilizó herramientas tecnológicas o programas para explicar el contenido**



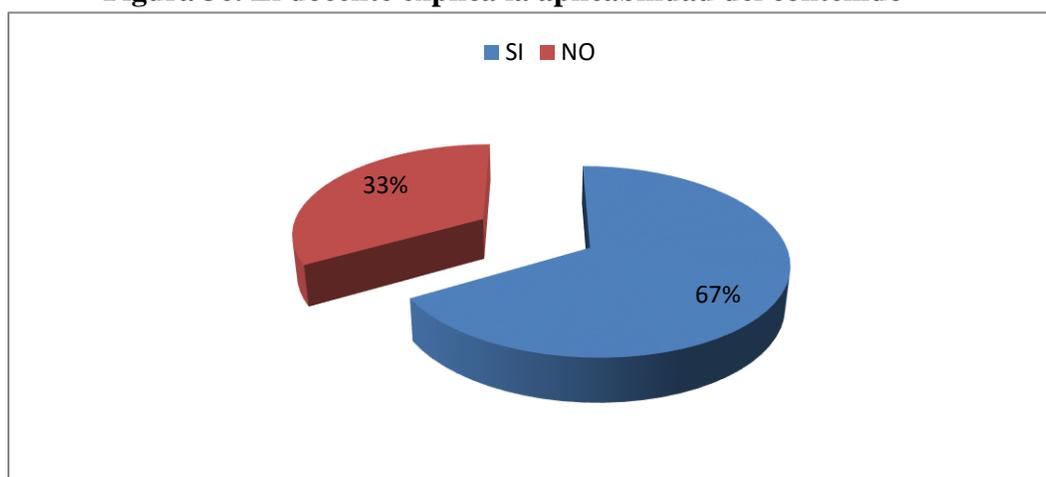
El uso de la tecnología en el proceso de enseñanza –aprendizaje para generar motivación es sumamente importante para profesores y estudiantes en cualquier materia. Ante ello se consultó al docente si utilizó herramientas tecnológicas o programas para apoyar la explicación del tema Volumen de Sólidos de Revolución o en las actividades propuestas, a lo cual respondieron que sí.

<b>Tabla 32. ¿Podría mencionar las herramientas o programas utilizados en el desarrollo del contenido o actividades propuestas?</b>	
Herramientas o programas utilizadas en el Desarrollo del tema	Herramientas o programas utilizadas en Actividades formativas y sumativas
<ul style="list-style-type: none"> <li>- GeoGebra</li> <li>- Microsoft Team</li> <li>- One note</li> </ul>	

De acuerdo a los resultados obtenidos, de tres docente encuestados, dos de ellos informaron que las herramientas tecnológicas utilizadas en el desarrollo del contenido son: GeoGebra, Microsoft Team y One note. Herramientas que les facilitaron el desarrollo de la clase y que le permitió al estudiante una mejor explicación del tema.

<b>Tabla 33. Da una breve explicación al estudiante de la aplicabilidad que el contenido tiene en actividades de la cotidianidad.</b>	
SI	NO
2	1

**Figura 36. El docente explica la aplicabilidad del contenido**



Como se menciona antes, es importante explicar al estudiante no sólo el concepto, la teoría, sino se debe buscar que entienda para qué es útil lo que se le enseña, y en qué se aplica lo que aprende, esto puede ser ejemplificando mediante actividades de la cotidianidad, aclararle de qué manera se aplica el contenido en una situación real, para que al comprenderlo muestre interés por aprenderlo. Por lo anterior, el docente debe dar una breve explicación al estudiante de la aplicabilidad que el contenido tiene y de acuerdo a los resultados obtenidos, de los tres docentes encuestados, solo dos docentes dan a conocer la aplicabilidad del contenido. A continuación, se presentan algunas aplicaciones que dan a conocer los docentes a sus estudiantes.

**Un docente encuestado respondió:**

Encontrar una función que al hacerla girar da como resultado una figura conocida

**Un docente encuestado respondió:**

- Compartir con ellos la noción de volumen que podríamos necesitar conocer al momento de utilizar una sartén, o como se haría para generar la forma de una lámpara de mesa, es decir que función nos permitiría obtener una forma específica, etc.

**Tabla 34. Por su experiencia ¿Puede mencionar e identificar lo que más le dificulta al estudiante para comprender del tema?**

Identificar las dificultades que presenta el estudiante respecto al contenido en estudio es importante; el docente debe mostrar interés en las situaciones que les dificulte la comprensión del tema. Para el desarrollo del tema Volumen de Sólidos de Revolución los tres docentes expresaron que las dificultades que han observado en los estudiantes son las siguientes:

- ✓ Tienen dificultades en la elaboración e identificación de regiones,
- ✓ Confunden los elementos de la integral de volumen cuando se cambia el eje de giro
- ✓ Presentan dificultad para identificar los límites de la integral
- ✓ Las gráficas de funciones o ecuaciones
- ✓ Calcular Puntos de intersección (dificultad en los procesos de álgebra)
- ✓ Visualización en el plano y en el espacio para identificar distancias
- ✓ Graficar, ubicar los límites de integración, orientarse con los ejes de giro si no están usándose los ejes coordenados.

De acuerdo a los resultados los docentes consideran que las dificultades que el estudiante presenta en el desarrollo del contenido son con mayor frecuencia: Graficar funciones o ecuaciones, calcular puntos de intersección, visualización en el plano y en el espacio para identificar distancias, identificar límites de integración, planteamientos de la fórmula que representa el volumen.

Al preguntarle a los docentes sobre las dificultades que tienen los estudiantes sobre la comprensión del tema, coincidieron los tres docentes en las siguientes actividades como elementos limitantes de la comprensión

Graficar
Calcular interceptos
Identificación de región plana
Seleccionar límites de integración correctamente
Visualización del sólido para identificar distancias

Por tanto, podemos observar que algunas de las dificultades que muestran los estudiantes son el uso de herramientas básicas, conocimientos previos que deben manejar y la visualización del sólido para identificar distancias que es algo que les dificulta con frecuencia.

#### 4.2.2.3. Conclusión sobre la perspectiva del docente parte II

En base a los resultados obtenidos los docentes expresan que el mayor problema que tienen los estudiantes es el trazo de la gráfica para identificar la región plana y el planteamiento de la integral que permite calcular el valor del volumen, ya que confunden los elementos principales del planteamiento cuando se cambian los ejes de revolución, además el docente hace uso de diferentes estrategias metodológicas con el fin de poder activar al estudiante y evidenciar el aprendizaje.

Al realizar una comparación de los resultados obtenidos en la encuesta de los estudiantes y docente, podemos observar que hay un nivel de coincidencia muy alta, los cuales son:

- 1) El estudiante y docente reconoce que una de las dificultades mayores para comprender el contenido es graficar las curvas que delimitan la región plana, lo cual no permite que el estudiante sea capaz de realizar un planteamiento correcto de la integral definida que representa el Volumen del Sólido.
- 2) Las estrategias metodológicas utilizadas por los docentes son oportunas e importantes, ya que, por lo general, los estudiantes dan una muy buena valoración, pero hay un grupo menor que considera, las estrategias no son suficiente, y esto se podría deber a que en su mayoría son estrategias donde el trabajo se realiza de forma individual.
- 3) Los estudiantes y docente reconocen que los recursos tecnológicos son importantes para la comprensión del contenido, pero según la investigación las herramientas más utilizadas por el docente son plataformas para comunicarse (Microsoft Teams) y pizarras electrónicas (One Note, Jamboard, OpenBoard), pero no se utilizan programas que ayuden al estudiante en la parte geométrica, es decir, en la representación gráfica de la región o el sólido, ya que muy pocos docente utilizan el programa GeoGebra.

## CAPÍTULO V. PROPUESTA DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

### 5.1. DESCRIPCIÓN DE LAS GENERALIDADES Y ELEMENTOS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

A continuación se presenta la estructura de la propuesta de una secuencia didáctica para el desarrollo del contenido “Volumen de sólidos de Revolución” como consecuencia de la investigación realizada a estudiantes que reciben la asignatura de Cálculo Integral y docentes que imparte la asignatura, en la que se propone el uso de una metodología colaborativa, así mismo se proponen actividades en las que se hace uso de herramientas tecnológicas que permitan al estudiantes tener otra opción de como visualizar de mejor forma los sólidos de revolución.

El modelo de secuencia didáctica tomada como base para la elaboración de la propuesta contiene los siguientes elementos:

- 1) **Datos generales.** En éste bloque se detallan elementos como el nombre de la institución, asignatura, ciclo de desarrollo, semana y tema, entre otros.
- 2) **Competencia.** Se describe la competencia que él estudiante debe adquirir durante el desarrollo del contenido.
- 3) **Actividades con el docente.** En este apartado se describirá el conjunto de tareas que realizará el docente, las cuales pondrán en actividad a los estudiantes, la estructura a seguir es según el método ELI.
- 4) **Actividades de aprendizaje autónomo.** En éste elemento se describen las actividades que él estudiante desarrollará las cuales serán propuestas por el docente, llevando un rol activo desde el inicio hasta el final, ya que las tareas irán encaminadas a la discusión entre compañeros.
- 5) **Metacognición y tiempo.** Permitirá recabar, producir y evaluar cada actividad presentada por el docente para dar sentido y significado a lo que el estudiante ha aprendido y en el elemento tiempo; se describirá el tiempo asignado en las actividades del docente y estudiante

### MODELO PROPUESTO DE SECUENCIA DIDÁCTICA

<b>MODELO PROPUESTO DE SECUENCIA DIDÁCTICA</b>					
Institución:					
Asignatura:	Cálculo Integral	Ciclo:	02	Año:	2022
Docente:					
Semana:		Fecha:			
Tema:	Aplicación de la integral definida: “Volumen de Sólidos de Revolución”				

Competencia:	Aplica correctamente la integral definida para calcular el volumen de sólidos de revolución generado por rotar una región plana y de objetos de la vida cotidiana mediante los métodos de disco, arandelas y capas cilíndricas.
--------------	---

Actividades con el docente	Actividades de aprendizaje autónomo	Metacognición	Tiempo
<p>En este apartado se describirá el conjunto de tareas que realizará el docente, las cuales pondrán en actividad a los estudiantes, la estructura a seguir según el método ELI es la siguiente.</p> <p><b>Inicio:</b> Crear un dialogo ameno y de compromiso es importante para establecer lazos de confianza y trabajo, se explicará las actividades que se realizarán en las sesiones de clases, así como también desarrollar actividades que permitan realizar una exploración de los conocimientos previos, esto ayudará al docente en la introducción del contenido y al estudiante para reforzar</p>	<p>El estudiante desarrollará las actividades propuestas por el docente, y llevará un rol activo desde el inicio hasta el final, ya que las tareas irán encaminadas a la discusión entre compañeros y docente, además realizará un trabajo autónomo, ya que tendrá que indagar, analizar, interpretar, y aplicar, no dejando de lado las relaciones entre compañeros en los grupos conformados.</p>	<p>Permitirá recabar, producir y evaluar cada actividad presentada por el docente para dar sentido y significado a lo que el estudiante ha aprendido, ayudara a precisar la retroalimentación oportuna en el desarrollo de las actividades y al final del contenido.</p>	<p>Se describirá el tiempo asignado en las actividades del docente y estudiante.</p>

<p>las debilidades.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Activación</li> <li>• Orientación</li> <li>• Recapitulación</li> </ul>			
<p><b>Desarrollo:</b> Se profundizará en el contenido a tratar proporcionando los conceptos necesarios, además se establecerán actividades integradoras (Situaciones complejas) para poner en actividad a los estudiantes (individual y grupal) y pueda aplicar la teoría, los recursos tecnológicos que se utilizarán será GeoGebra y Tracker estos permitirán trabajar las representaciones semióticas a partir del modelaje.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Procesamiento de la información</li> <li>• Interacción social positiva</li> </ul>			
<p><b>Cierre:</b> Se realizaran tareas formativas y sumativa, para establecer valoraciones sobre el trabajo realizado en el aula y ex-aula, para generar una retroalimentación oportuna.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Evaluación (Formativa o sumativa)</li> </ul>			

## 5.2. PROPUESTA DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Institución:					
Asignatura:	Cálculo Integral	Ciclo:	02	Año:	
Docente:					
Semana:		Fecha:			
Tema:	Aplicación de la integral definida: “Volumen de Sólidos de Revolución”				

Competencia:	Aplica correctamente la integral definida para calcular el volumen de sólidos de revolución generados por rotar una región plana en torno a una recta que se encuentra en el mismo plano utilizando como recurso objetos de la vida cotidiana mediante los métodos de disco, arandelas y capas cilíndricas haciendo uso del programa GeoGebra como herramienta tecnológica para elaborar las gráficas que forman la región plana y la curva que modela el objeto.
--------------	---

Actividades con el docente	Actividades de aprendizaje autónomo	Metacognición	Tiempo
<p><b>Inicio:</b></p> <p><b>Bienvenida al estudiante</b></p> <p>Realizar una prueba diagnóstica para detectar presaberes tomando en consideración los siguientes temas</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Gráficas de funciones: Lineales, cuadráticas, cúbicas,</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Realizar una prueba diagnóstica de conocimientos previos con disposición y responsabilidad.</li> <li>Identificar los</li> </ul>		40 min

<p>radicales, seccionadas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y racionales</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Interceptos entre curvas</li> <li>• Derivadas de funciones</li> <li>• Métodos de integración</li> <li>• Teorema fundamental del cálculo y propiedades de la integral definida</li> </ul> <p>Instrumento de diagnóstico: Cuestionario, preguntas dirigidas (escrita o verbal), lluvia de ideas.</p> <p><b>Retroalimentación de los conocimientos previos tomando como base el instrumento utilizado.</b></p> <p><b>Presentación del contenido</b></p> <p>Dialogar con los estudiantes la competencia que se pretende alcanzar con el desarrollo del contenido, la dinámica de la clase, actividades formativas y sumativas, dar a conocer la importancia del contenido mostrando la aplicabilidad que este tiene en situaciones de la cotidianidad en el área de ingeniería.</p> <p><b>Actividad de presentación:</b></p>	<p>conocimientos previos que son necesarios para el estudio del contenido Volumen de Sólidos de Revolución.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Realizar preguntas sobre la dinámica de la clase y las evaluaciones que generen dudas.</li> </ul>	<p>El estudiante identifica los conocimientos previos que posee y que son necesarios para la comprensión del tema</p> <p>El estudiante identifica la aplicación del Volumen de Sólidos de Revolución en un proceso real de producción y reconoce su importancia.</p>	<p>30 min</p>
--	--	--	---------------

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elaborar una PPT que contenga ejemplos sobre situaciones en el área de ingeniería en la que se aplica el volumen de un sólido de revolución.</li> </ul> <p><b>Ejemplo:</b> Aplicación en la ingeniería mecánica.</p> <p>Una aplicación importante de la integral, la tenemos en el uso para calcular el volumen de un sólido tridimensional. Ahora veremos los sólidos de revolución. Este tipo de sólidos suele aparecer frecuentemente en ingeniería y en procesos de producción como lo son en procesos de mecanizado, tales como el torneado en donde se usa mucho el concepto de volumen por revolución. Son ejemplos de sólidos de revolución: ejes, embudos, pilares, botellas y émbolos.</p> <p>Se denomina torno a un conjunto de máquinas herramienta que permiten mecanizar piezas de forma geométrica de revolución. Estas máquinas-herramienta operan haciendo girar la pieza a mecanizar (sujeta en el cabezal o fijada entre los puntos de chales que quedan fuera del contraje) mientras una o varias herramientas de corte son empujadas en un movimiento regulado de avance contra la superficie de la pieza, cortando la viruta de acuerdo con las condiciones tecnológicas de mecanizado adecuadas. Desde el inicio de la Revolución industrial, el torno se ha convertido en una máquina básica en el proceso industrial de mecanizado.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presentar ejemplos sobre la aplicación del contenido y determinar su importancia</li> </ul>		<p>50 min</p>
---	--	--	---------------

 <p>(WordPress, 2010)</p>			
<p><b>Desarrollo:</b></p> <p>Elaborar una PPT para apoyarse en la explicación del contenido en la que se detalle.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Definición de un sólido de revolución</li> <li>• Ejemplos de sólidos de revolución empleando <b>GeoGebra</b>.</li> <li>• Definición de volumen de figuras tridimensionales conocidas (Cilindro, esferas, conos, etc)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar en un sólido de revolución los elementos geométricos que lo generan</li> <li>• Participar activamente señalando la fórmula del volumen de las figuras indicadas por el docente</li> <li>• Presentar ejemplos para qué tipo de</li> </ul>	<p>El estudiante establece la relación entre los elementos geométricos que generan un sólido de revolución</p> <p>El estudiante comprende que es un sólido de revolución y lo diferencia de otros sólidos al utilizar GeoGebra</p>	

<p><b>MÉTODOS PARA CALCULAR EL VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Definir el método del disco:</b> Realizar una demostración ilustrativa (Demostración geométrica para dar a conocer la idea principal del método), apoyarse de <b>GeoGebra</b> para crear el elemento representativo en la región y a partir de él explicar cómo se analiza para obtener el radio del disco.</li> </ul> <p>Desarrollar los siguientes ejemplos en conjunto con los estudiantes haciendo uso de GeoGebra para elaborar las gráficas resultantes de los datos presentados.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ejemplo: Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región plana limitada por las siguientes curvas. Aplicando el método de Discos. <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>y = \ln(x), x = 3, y = 0</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Eje de giro: eje x</li> <li>b) Eje de giro: x=3</li> </ol> </li> <li>2. <math>f(x) = \text{sen}(x), 0 \leq x \leq \pi, y = 0</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Eje de giro: eje x</li> </ol> </li> </ol> </li> </ul>	<p>regiones se aplica el método apoyándose de GeoGebra.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar los elementos necesarios para aplicar el método.</li> <li>• Presentar una situación problemática en la que se aplica el método del disco y se utiliza <b>GeoGebra</b> para graficarla Ejemplo: las piezas de máquinas producidas por un torno.</li> <li>• Graficar e identificar correctamente la región plana</li> </ul>	<p>El estudiante comprende el método del disco, y reconoce la característica principal de cuándo debe utilizarse</p> <p>El estudiante propone soluciones para dar respuesta al ejercicio haciendo uso del método del disco y resuelve los ejercicios planteados en conjunto con el docente</p> <p>El estudiante efectúa los cálculos necesarios para resolver los problemas indicados e identifica los pasos para elaborar la gráfica correspondiente.</p> <p>El estudiante grafica e</p>	<p>60 min</p>
--	--	---	---------------

<p>3. <math>g(x) = x^2 + 2, x = -2, y = 2</math></p> <p>a) Eje de giro: <math>y=2</math></p> <p>b) Eje de giro: <math>x=-2</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Asignar un ejercicio al estudiante para que lo resuelva de forma individual aplicando lo explicado por el docente.</li> </ul>	<p>indicada.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Dibujar el elemento representativo del sólido en torno al eje de giro indicado de acuerdo al método adecuado.</li> <li>Determinar correctamente el radio del disco y plantear el volumen del sólido empleando la integral definida</li> <li>Calcular el valor del volumen del sólido, aplicando métodos de integración, operaciones algebraicas y teorema fundamental del cálculo.</li> <li>Presentar diferentes tipos de regiones en las que se aplica el</li> </ul>	<p>identifica correctamente la región plana solicitada haciendo uso de <b>GeoGebra</b> para verificar su región.</p> <p>El estudiante dibuja el elemento representativo del sólido de acuerdo al método adecuado y determina correctamente el radio del disco.</p> <p>El estudiante realiza el planteamiento correcto del volumen del sólido empleando la integral definida y calcula el valor del volumen, aplicando correctamente métodos de integración, procesos algebraicos y Teorema Fundamental del Cálculo.</p>	
--	---	---	--

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b><u>Definir el método del anillo o arandelas:</u></b> Realizar una demostración ilustrativa (Demostración geométrica para dar a conocer la idea principal del método), apoyarse de <b>GeoGebra</b> para crear el elemento representativo en la región y a partir de él explicar cómo se analiza para obtener los radios.</li> </ul> <p>Desarrollar los siguientes ejemplos en conjunto con los estudiantes</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ejemplo: Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región plana limitada por las siguientes curvas. Aplicando el método de anillos. <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>f(x) = x^2 - 2x + 1, x = 3, y = 0</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Eje de giro: <math>y=4</math></li> </ol> </li> <li>2. <math>y = 2\sqrt{x+2}, y = -x + 1, y = x - 3</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Eje de giro: <math>x=-1</math></li> <li>b) Eje de giro: <math>y=-1</math></li> </ol> </li> <li>3. <math>y =  x + 3  + 1, y = -(x + 3)^2, x = -4, x = -2</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Eje de giro: <math>y=2</math></li> </ol> </li> </ol> </li> <li>• Asignar un ejercicio al estudiante para que lo resuelva de</li> </ul>	<p>método.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Presentar una situación problemática en la que se aplica el método de anillos, identificando los elementos necesarios para aplicarlo, haciendo uso de GeoGebra para graficarla y señalando la región plana indicada.</li> <li>• Dibujar el elemento representativo del sólido en torno al eje de giro indicado de acuerdo al método del anillo, determinando correctamente los radios interior y exterior del anillo para plantear el</li> </ul>	<p>El estudiante comprende el método del anillo</p> <p>El estudiante propone soluciones para dar respuesta a los ejercicios planteados en conjunto con el docente efectuando los cálculos necesarios para resolver los problemas indicados elaborando la gráfica e identificando correctamente la región plana solicitada haciendo uso de GeoGebra para verificar su región.</p> <p>El estudiante dibuja el elemento representativo del sólido de acuerdo al método</p>	<p>60 min</p>
--	--	---	---------------

<p>forma individual aplicando lo explicado por el docente.</p>	<p>volumen del sólido empleando la integral definida</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Presentar ejercicios para calcular el valor del volumen, aplicando correctamente métodos de integración, procesos algebraicos y Teorema Fundamental del Cálculo.</li> <li>• Presentar ejemplos para identificar en qué tipo de regiones se aplica el método y mencionar los elementos necesarios para aplicarlo.</li> <li>• Dibujar el elemento representativo del</li> </ul>	<p>adecuado y determina correctamente los radios interior y exterior del anillo.</p> <p>El estudiante realiza el planteamiento correcto del volumen del sólido empleando la integral definida y calcula el valor del volumen, aplicando correctamente métodos de integración, procesos algebraicos y Teorema Fundamental del Cálculo.</p>	
--	---	---	--

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b><u>Definir el método de Capas Cilíndricas o Cortez Cilíndrica:</u></b> Realizar una demostración ilustrativa (Demostración geométrica para dar a conocer la idea principal del método), apoyarse de <b>GeoGebra</b> para crear el elemento representativo en la región y a partir de él explicar cómo se analiza para obtener los radios.</li> </ul> <p>Desarrollar los siguientes ejemplos en conjunto con los estudiantes</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ejemplo: Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región plana limitada por las siguientes curvas.       <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>x = y^2 - 2, y = x</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Eje de giro: <math>y = -1</math></li> </ol> </li> <li>2. <math>y = -x, y = -4x + 5, y = x + 4</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Eje de giro: <math>x = -2</math></li> </ol> </li> </ol> </li> </ul>	<p>sólido de acuerdo al método y determinar correctamente radio medio y altura de la capa.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Realizar el planteamiento correcto del volumen del sólido empleando la integral definida.</li> <li>• Calcular el valor del volumen, aplicando correctamente métodos de integración, procesos algebraicos y Teorema Fundamental del Cálculo.</li> </ul>	<p>El estudiante comprende el método de capas cilíndricas, proponiendo soluciones para dar respuesta al ejercicio.</p> <p>El estudiante grafica e identifica correctamente la región plana solicitada</p> <p>El estudiante dibuja el elemento representativo del sólido de acuerdo al método y determina correctamente radio medio y altura de la capa.</p> <p>El estudiante realiza el planteamiento correcto del volumen del sólido empleando la integral</p>	<p>60 min</p>
--	--	---	---------------

<p>3. <math>f(x) = 3(x - 4)^2 + 1, y = \sqrt{x - 4}, y = -x + 8, x = 4</math>  a) Eje de giro: <math>x=4</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Asignar un ejercicio al estudiante para que lo resuelva de forma individual aplicando lo explicado por el docente.</li> <li><b>Actividad en el aula:</b> Organizar a los estudiantes en grupos de 3 integrantes y asignar 5 ejercicios en los cuales deberán trazar la gráfica de diferentes ecuaciones, identificando la región plana limitada por las curvas dadas, luego calcular el volumen del sólido generado la rotar cada región plana identificada entorno a una recta horizontal o vertical aplicando los diferentes métodos explicados. Estos los deberán presentar en el pizarrón, el docente elegirá un participante de cada grupo para que los compartan en pleno y comenten su proceso de solución a los demás compañeros.</li> </ul>		<p>definida y calcula el valor del volumen, aplicando correctamente métodos de integración, procesos algebraicos y Teorema Fundamental del Cálculo.</p> <p>El estudiante resuelve los ejercicios planteados en conjunto con el docente efectuando los cálculos necesarios para resolver los problemas indicados</p> <p>El estudiante determina los elementos que componen la integral que representa el volumen del sólido usando el método del Disco</p> <p>El estudiante grafica utilizando GeoGebra e identifica la región plana</p>	<p>120 min</p>
---	--	---	----------------

		<p>solicitada</p> <p>El estudiante identifica el método correcto para calcular el volumen del sólido</p> <p>El estudiante es capaz de ubicar el elemento representativo del sólido de acuerdo al método que utiliza.</p> <p>El estudiante determina sin problemas los elementos necesarios para realizar el planteamiento de la integral para calcular el volumen del sólido</p> <p>El estudiante aplica correctamente los métodos de integración, procesos algebraicos y el Teorema Fundamental del Cálculo para obtener el valor del</p>	
--	--	--	--

		volumen y efectúa la gráfica correspondiente verificando en GeoGebra	
<p><b>Cierre:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Actividad ex aula</b> El docente organizará a los estudiantes en grupos de 4 integrantes, para realizar la siguiente actividad.</li> </ul> <p><u>Descripción de la actividad</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. El docente diseñará una guía didáctica donde explicará a partir de un ejemplo práctico como se obtiene el volumen de un objeto o fruta del entorno (florero, deposito plástico, sandía, etc) utilizando el programa de GeoGebra y auxiliándose de Tracker programa que genera una serie de puntos que describen la trayectoria del contorno del objeto para luego con las herramientas de GeoGebra se determine la curva que modela el contorno del objeto y poder calcular el volumen del objeto seleccionado; todo esto con el objetivo de mostrar a los estudiantes el proceso a seguir para calcular el volumen de un sólido.</li> <li>2. El estudiante leerá la guía didáctica como referencia para realizar lo siguiente: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Seleccionar un objeto de la vida cotidiana</li> <li>• Determinar el volumen del objeto aplicando Tracker y GeoGebra</li> </ul> </li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presentar situaciones problemáticas en donde se aplican correctamente los conceptos sobre los tres métodos para calcular el Volumen del Sólido de Revolución.</li> <li>• Efectuar gráficas utilizando correctamente el programa GeoGebra auxiliándose del programa Tracker para modelar de forma geométrica y algebraica el objeto seleccionado y poder calcular el</li> </ul>	<p>El estudiante selecciona adecuadamente un objeto o fruta asociada a un sólido para determinar su volumen utilizando de forma correcta el programa GeoGebra auxiliándose del programa Tracker en la determinación del volumen del objeto seleccionado.</p> <p>El estudiante comprende cómo determinar el volumen del objeto seleccionado utilizando los programas GeoGebra y Tracker aplicando correctamente la definición de volumen</p> <p>Los estudiantes describen en la entrega de su reporte un proceso detallado de como determinaron el volumen del</p>	60 min

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparar el volumen calculado con el volumen real del objeto.</li> <li>• Presentar un reporte sobre el trabajo realizado: caratula, objetivo, descripción del objeto o fruta seleccionada (fotográfica del objeto), explicación paso a paso de lo realizado para obtener el volumen (Tomar como base la guía didáctica).</li> </ul>	<p>Volumen.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Presentar ordenadamente el reporte que evidencia el trabajo en conjunto y la solución al problema planteado.</li> </ul>	<p>objeto seleccionado utilizando GeoGebra como herramienta principal auxiliándose del programa Tracker.</p>	
--	--	--	--

**Tabla 35. Propuesta de secuencia didáctica**

A continuación se presenta la propuesta de una guía didáctica diseñada para el desarrollo de la actividad ex aula propuesta en la secuencia didáctica anterior, la cual puede ser adecuada al momento de realizar dicha actividad.

**Guía didáctica: Cálculo de volumen de objetos cotidianos por el método de sólidos de revolución con aplicación del programa GeoGebra para graficar y calcular el volumen.**

**Objetivos:**

Calcular el volumen de objetos de la vida cotidiana usando los métodos de sólidos de revolución a partir de su gráfica elaborada con el programa GeoGebra y auxiliándose del programa Tracker.

**Competencia:**

- Selecciona correctamente un objeto de la vida cotidiana de acuerdo a las indicaciones dadas.
- Procesa la fotografía del objeto con el programa Tracker para obtener los datos numéricos que se emplearan para buscar la función que limitan el contorno del objeto seleccionado sobre un plano coordenado.
- Procesa los datos numéricos en GeoGebra para determinar la función que modela el contorno del objeto seleccionado.
- Calcula el volumen del sólido generado por la región formada a partir de la curva que modela el objeto seleccionado empleando GeoGebra.

**Tiempo:** 4 horas

**Descripción de la actividad:** Realizar búsqueda de un objeto de la vida cotidiana para calcular su volumen aplicando métodos de sólidos de revolución utilizando el programa de GeoGebra y apoyados del programa Tracker

**Recursos:** Hoja de trabajo, computadora, programa GeoGebra y Tracker, fotografías y objetos de la vida cotidiana (Recipientes, sandias, huevo, naranjas, copas, etc.)

## Actividad:

Paso 1. Seleccionar el objeto cotidiano y tomar una fotografía del objeto (Debe de tomar una buena fotografía que describa muy bien el objeto)

Paso 2. Utilizar el programa Tracker

- a) Insertar la fotografía del objeto en el programa Tracker
- b) Con la opción Ajustes del corte, botón derecho sobre la fotografía, se selecciona el número de puntos a marcar sobre el contorno del objeto: Cuadro Inicial: 0, Tamaño del Paso: 1 y Cuadro final: 17 (este valor se puede modificar).
- c) Selecciona la ubicación del sistema coordenado, en este caso, se coloca el plano cartesiano con el eje horizontal de tal forma que el objeto se divida en dos partes iguales y el eje vertical alineado al costado izquierdo.
- d) Con las instrucciones  , **Nuevo, Vara de calibración** aparece en la zona de trabajo de Tracker un segmento de línea recta, cuya función es ser la interface entre el objeto real y su fotografía en la computadora. Este segmento de recta se contrae o se expande, para que tenga la misma magnitud que la marca que se ubicó cerca del objeto cuando se fotografió dicho objeto. Esto es importante pues de ello depende que el volumen calculado sea aproximado al valor real del objeto.
- e) Elige la opción **Trayectoria, Nuevo, Masa Puntual** o hacer clic en el ícono **crear** para iniciar el marcado de los puntos sobre el contorno.
- f) La instrucción para marcar los puntos sobre el contorno del objeto es **Shift+clic**. Al presionar la tecla **Shift** el puntero del ratón cambia de forma, indicativo de que Tracker está listo para iniciar la señalización de los puntos sobre el contorno superior del objeto.

Paso 3: Utilizar el programa de GeoGebra

- a) Hacer una copia de la tabla de datos calculada por el programa Tracker y pegar en la hoja de cálculo de GeoGebra.
- b) Una vez que se han exportado los datos a GeoGebra, se selecciona la opción **Análisis de Regresión de dos variables, Modelo de regresión, Polinomio, Grado, Copiar a Vista Gráfica** y se ajusta el polinomio a la periferia.

- c) Se utiliza el programa de GeoGebra para aproximar el volumen del objeto por el método de sólidos de revolución, y se elige el polinomio de grado  $n$  que mejor se aproxima.

Información que necesita:

- Radio del disco:  $R(x)$
- Intervalo que limita la región:  $[a, b]$

La instrucción a ingresar en la entrada del programa de GeoGebra es la siguiente

$$pi * Integral(R(x)^2, a, b )$$

- d) Simulación del objeto en 3D empleando GeoGebra
- Ingresar la función en GeoGebra según el intervalo definido
  - Activar la vista grafica 3D
  - Crear un deslizador haciendo clic en la curva en la vista 2D, ingresar los parámetros solicitados (Ángulo, mínimo, máximo, incremento)
  - Seleccionar la vista grafica 3D, rotación axial, dar clic a la curva que va a generar la superficie y el eje donde se va a hacer rotar, inmediatamente se desplegara una ventana done le solicitara los parámetros de ángulo (debe de ubicar el nombre del ángulo que eligió en el paso anterior), puede seleccionar sentido horario o sentido antihorario.
  - Se generará una curva parametrizada en la vista algebraica.
  - Hacer clic derecho en la curva parametrizada y activar la opción rastro
  - Hacer clic en el deslizador y activar la opción animación y se comenzará a generar el sólido de revolución.

**Ejemplo del cálculo de volumen de un objeto utilizando GeoGebra y apoyándose del programa Tracker.**

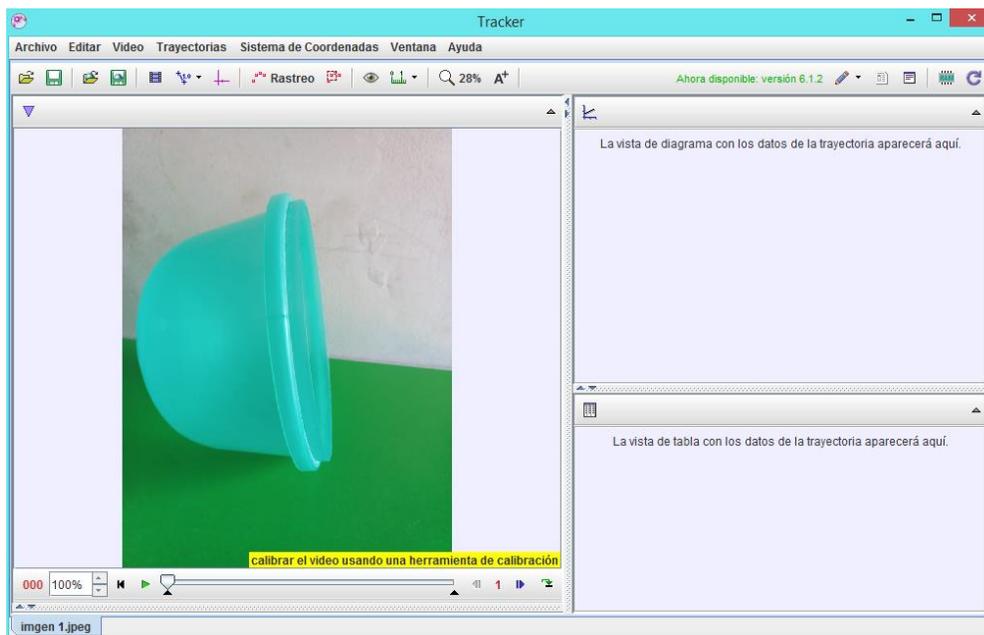
**Paso 1:** Seleccionar el objeto cotidiano y tomar una fotografía del objeto.



**Figura 37. Fotografía del objeto**

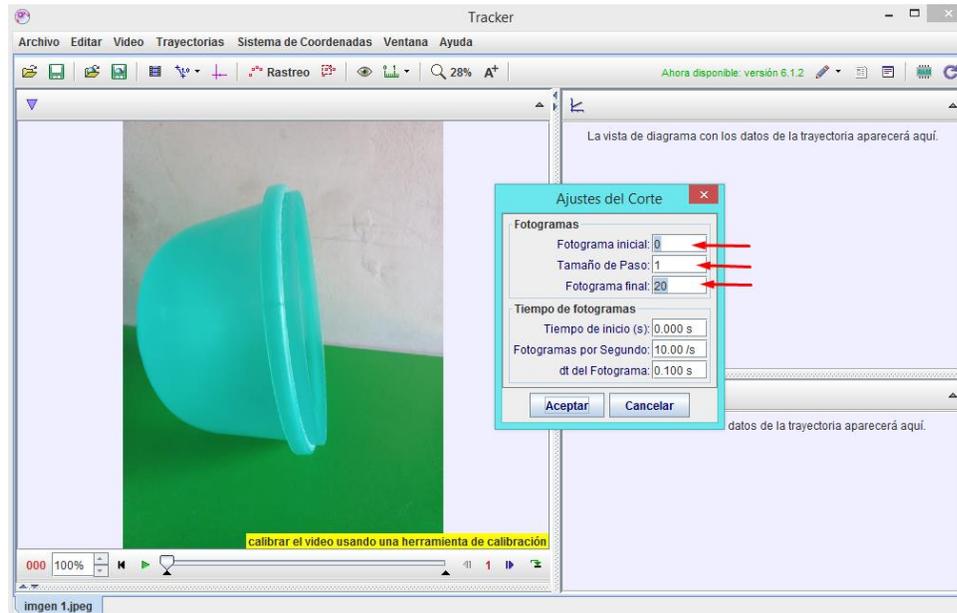
**Paso 2.** Utilizar el programa Tracker

- a) Insertar la fotografía del objeto en el programa Tracker: Para insertar debe de elegir la opción **vídeo- Importar** y seleccionar la ubicación donde se encuentre la imagen en la computadora.



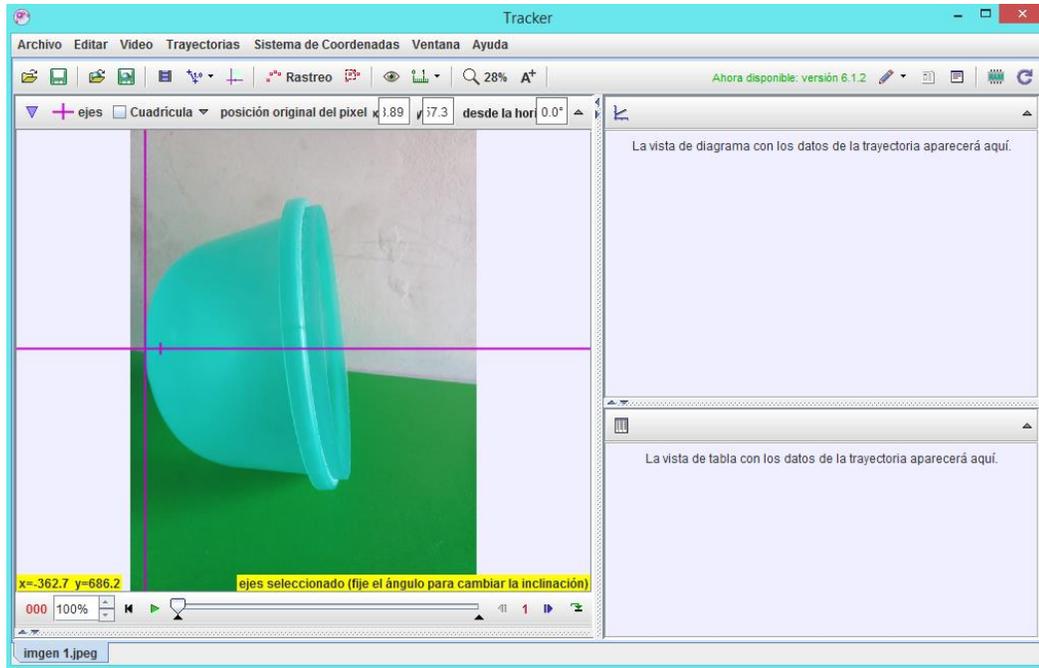
**Figura 38. Fotografía insertada en el programa Tracker**

- b) Con la opción Ajustes del corte, botón derecho sobre la fotografía, se selecciona el número de puntos a marcar sobre el contorno del objeto: Cuadro Inicial: 0, Tamaño del Paso: 1 y Cuadro final: 20.



**Figura 39. Selección sobre la cantidad de puntos en contorno de objeto**

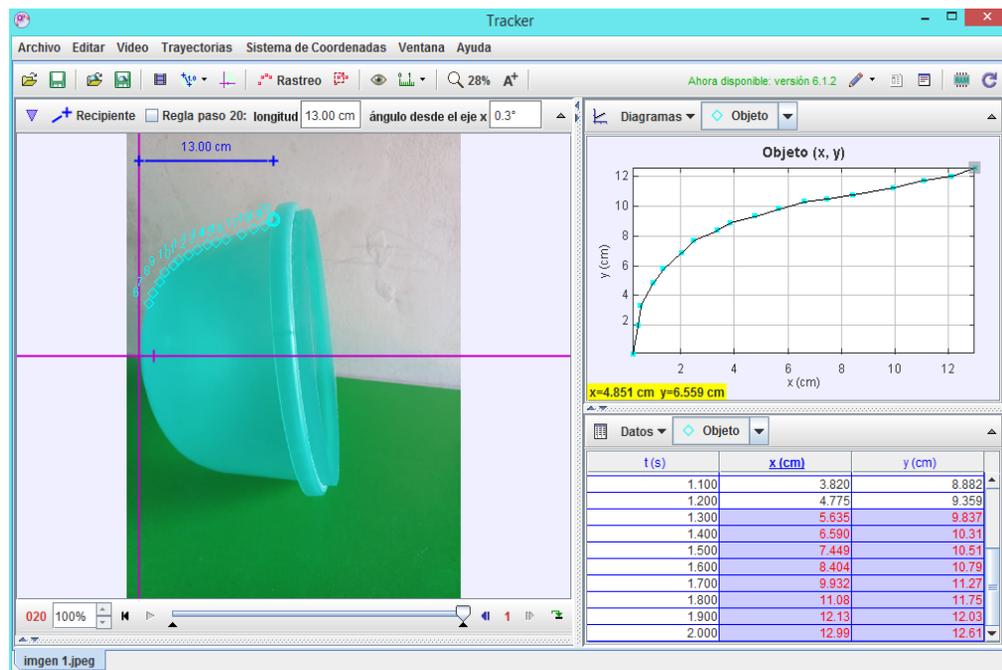
- c) Selecciona la ubicación del sistema coordenado , en este caso, se coloca el plano cartesiano con el eje horizontal de tal forma que el objeto se divida en dos partes iguales y el eje vertical alineado al costado izquierdo.



**Figura 40. Selección del sistema de coordenada en la fotografía**

- d) Con las instrucciones  , **Nuevo, Vara de calibración** aparece en la zona de trabajo de Tracker un segmento de línea recta, cuya función es ser la interface entre el objeto real y su fotografía en la computadora. Este segmento de recta se contrae o se expande, para que tenga la misma magnitud que la marca que se ubicó cerca del objeto cuando se fotografió dicho objeto. Esto es importante pues de ello depende que el volumen calculado sea aproximado al valor real del objeto.
- e) Elige la opción **Trayectoria, Nuevo, Masa Puntual** o hacer clic en el ícono **crear** para iniciar el marcado de los puntos sobre el contorno.
- Se inicia la marca sobre el contorno del recipiente, para ello se presiona la tecla Shift, el puntero del cursor cambia de forma, esto indica que está listo para la marcación de los puntos, manteniendo presionado la tecla Shift y haciendo clic sobre el contorno del recipiente dejará rastros de los puntos, recordar que la cantidad de puntos serán las mismas definidos en el literal b) (Cantidad de cuadros:20)

- Cada punto marcado sobre el contorno se registra al lado derecho de forma gráfica y numérica, se realizara la marcación siguiendo la trayectoria del contorno del recipiente. Si la marcación no ha sido precisa se puede mover los puntos marcados o borrar, tomar en cuenta que se deben de trazar con mucho cuidado para minimizar los errores en la aproximación del cálculo del volumen. Un vez se ha terminado de señalar por medio de los puntos el contorno del recipiente, la idea gráfica que se presenta al lado derecho está en términos de  $x - t$  en los ejes coordenados, cambiar con un clic en los ejes a las variables  $x - y$



**Figura 41. Grafica de la trayectoria de puntos en el contorno de la fotografía**

Paso 3: Utilizar el programa de GeoGebra

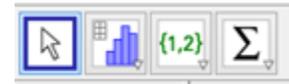
- Hacer una copia de la tabla de datos calculada por el programa de Tracker y pegarla en la hoja de cálculo de GeoGebra.

Hoja de Cálculo					
	A	B	C	D	E
1					
2		Objeto			
3	x	y			
4	0.19	0.1			
5	0.38	2.01			
6	0.48	3.34			
7	0.96	4.87			
8	1.34	5.83			
9	2.01	6.88			
10	2.48	7.74			
11	3.34	8.4			
12	3.82	8.88			
13	4.78	9.36			
14	5.63	9.84			
15	6.59	10.31			
16	7.45	10.51			
17	8.4	10.79			
18	9.93	11.27			
19	11.08	11.75			
20	12.13	12.03			
21	12.99	12.61			

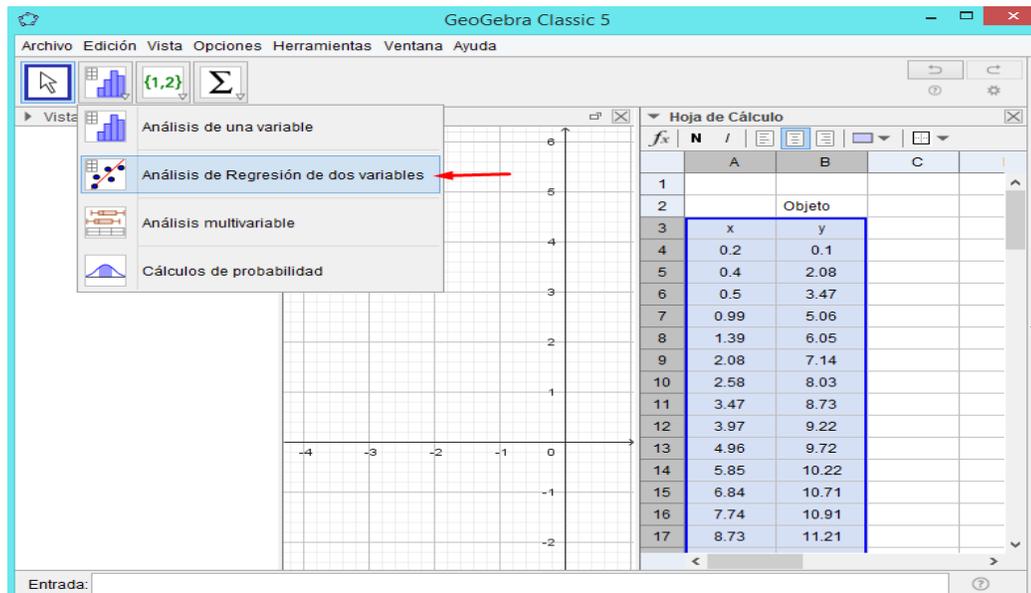
Figura 42. Tabla de datos de la posición de puntos en el contorno de la fotografía

b) Una vez que se han exportado los datos a GeoGebra, se selecciona la opción **Análisis de Regresión de dos variables, Modelo de regresión, Polinomio, Grado, Copiar a Vista Gráfica** y se ajusta el polinomio a la periferia.

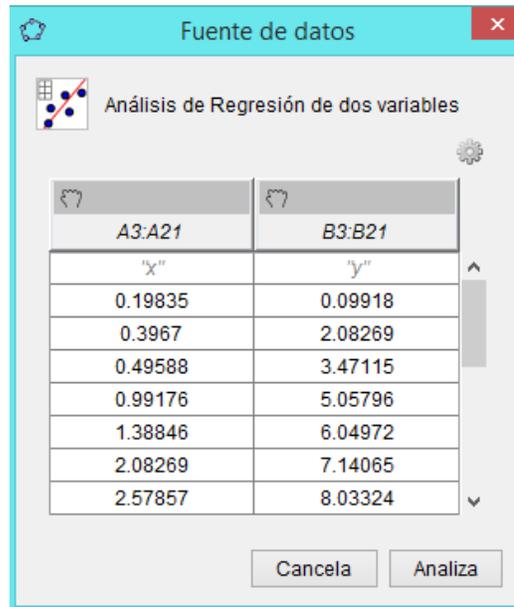
- Hacer clic sobre la hoja de Cálculo para activar la barra



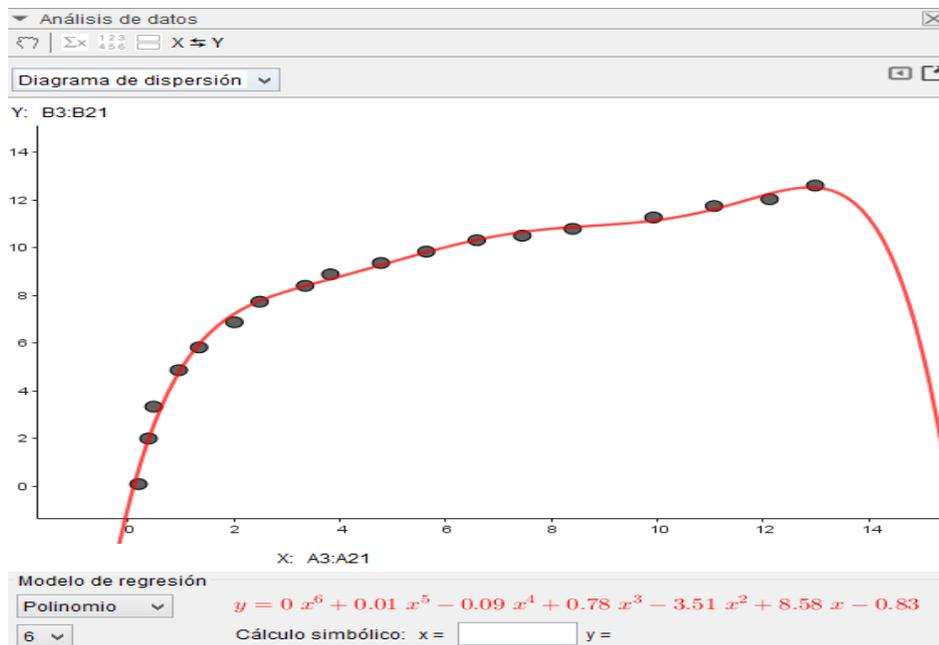
- Seleccionar los datos en la hoja de cálculo y luego dar clic en la opción de **Análisis de regresión de dos variables**



- Se genera una ventana **fente de datos**, dar clic en analizar



- Se elige el modelo de regresión, que será modelado a partir de un polinomio y se escoge el grado del polinomio que más se ajuste a los datos.



**Figura 43. Curva del polinomio que se ajusta mejor a los datos**

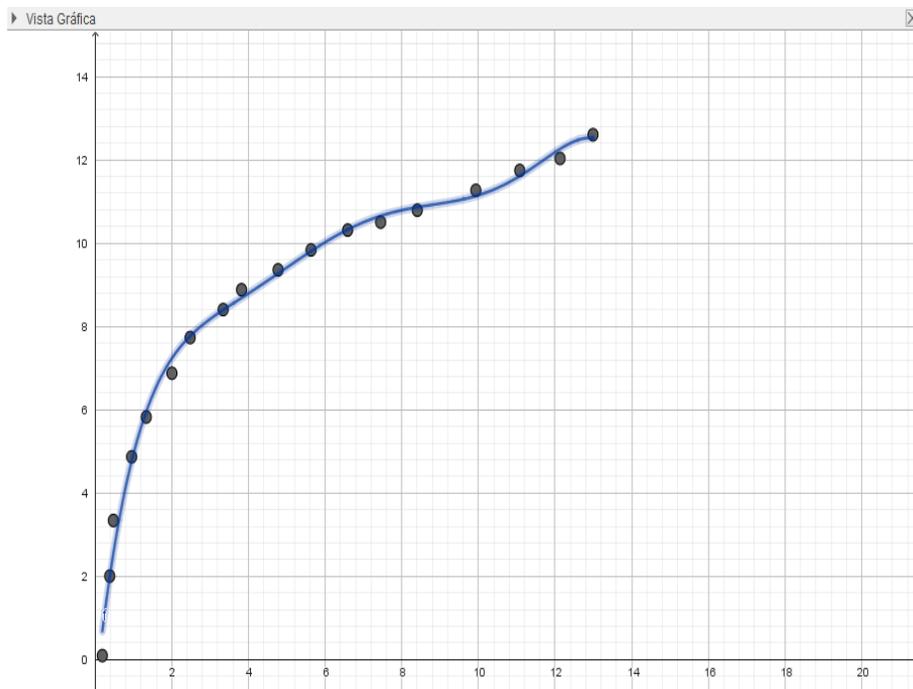
c) Se utiliza el programa de GeoGebra para aproximar el volumen del objeto por el método de sólidos de revolución, y se elige el polinomio de grado  $n$  que mejor se aproxima.

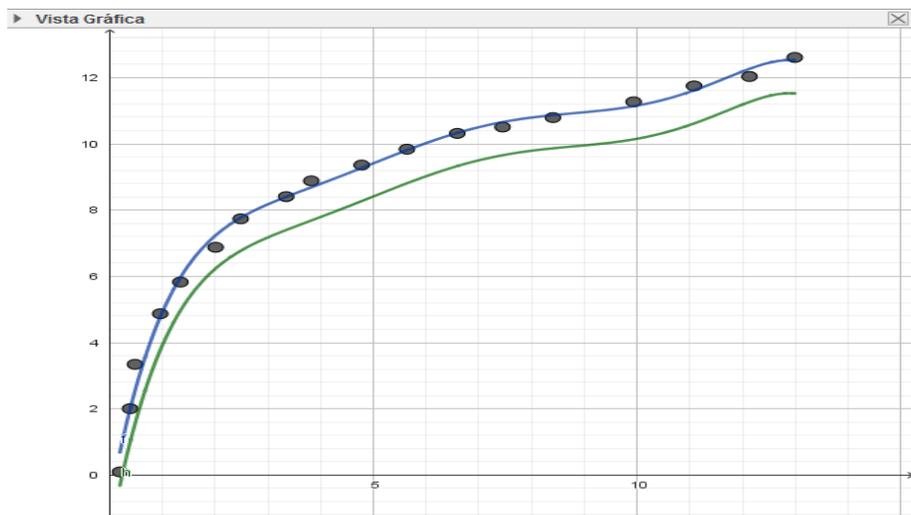
- Para el objeto seleccionado se elegirá el polinomio de grado 6 y se copia a vista gráfica donde se ajusta el polinomio.

$$f(x) = 0x^6 + 0.01x^5 - 0.09x^4 + 0.78x^3 - 3.51x^2 + 8.58x - 0.83$$



- Se acota las funciones  $f(x)$  en el intervalo  $[0.1910051, 12.98835]$  y  $g(x) = f(x) - 1$ , donde 1 cm representa el grosor (Este resultado es una estimación) del recipiente en el intervalos  $[1.1983515, 12.98835]$





- Calcular el volumen del objeto
  - El eje de revolución donde se hace girar la región formada por  $g(x)$  es  $y = 0.1$
  - Para calcular el volumen se utilizara el método del disco
  - El radio para el disco será la función

$$R_1(x) = g(x) - 0.1$$

- Aplicamos:  $V = \pi \int_a^b (R(x))^2$

Ingresamos en GeoGebra lo siguiente

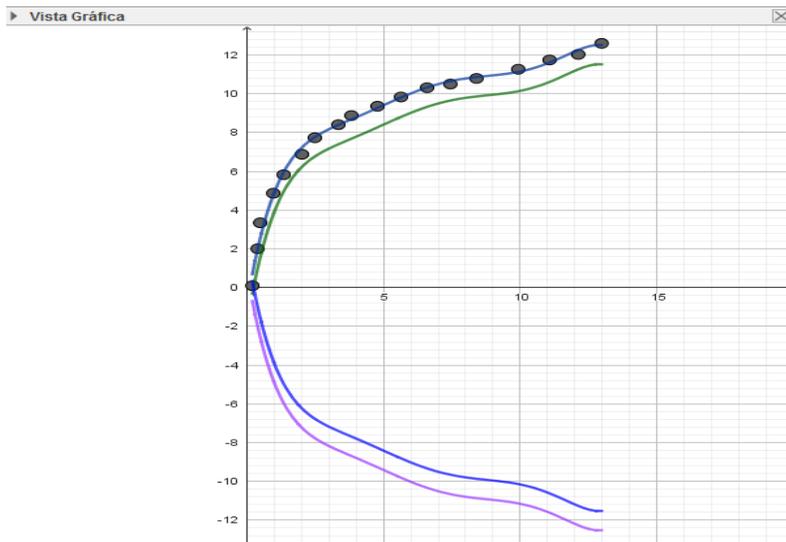
Entrada: `pi*Integral( <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo> )`

$$V_2 = pi * Integral[g(x)^2, 1.1983515, 12.98835]$$

- Volumen aproximado del objeto:  $3075.58 \text{ cm}^3$
- Volumen real del objeto:  $2100 \text{ cm}^3$ , teniendo un error porcentual del 46%

d) Simulación del objeto en 3D empleando GeoGebra

- Simulación en 2D

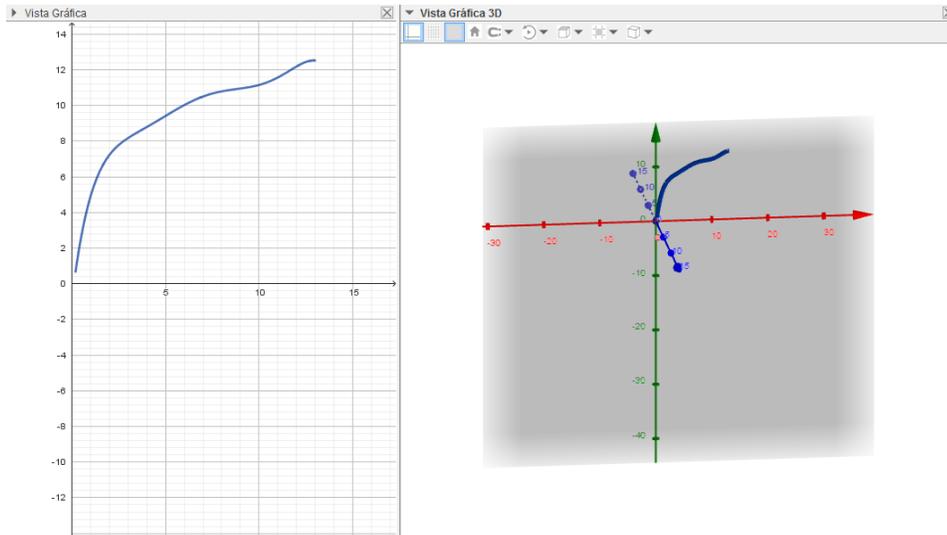


- Proceso a seguir para simular el objeto en 3D
  - i. Ingresar la función en GeoGebra en el intervalo donde se acoto el polinomio

Entrada: `Función(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo> )`

Función:  $f(x) = 0x^6 + 0.01x^5 - 0.09x^4 + 0.78x^3 - 3.51x^2 + 8.58x - 0.83$

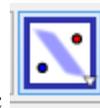
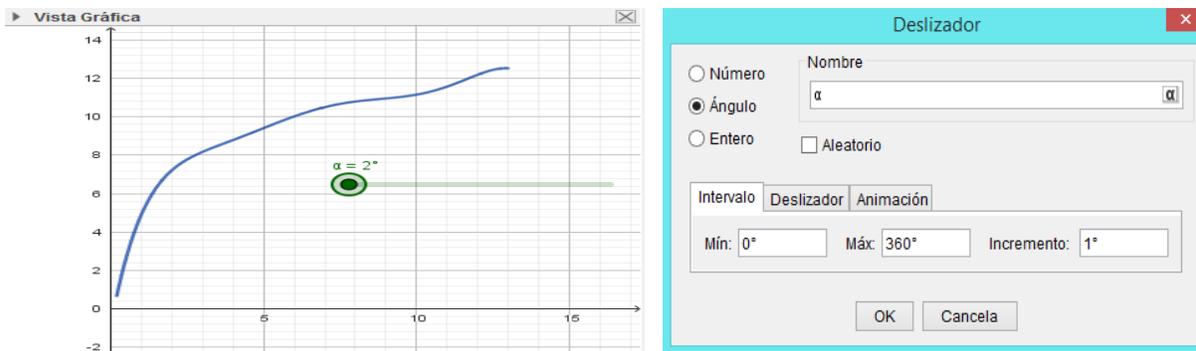
Intervalo: [0.1910051,12.98835]



ii. Activar la opción **Vista Grafica 3D**

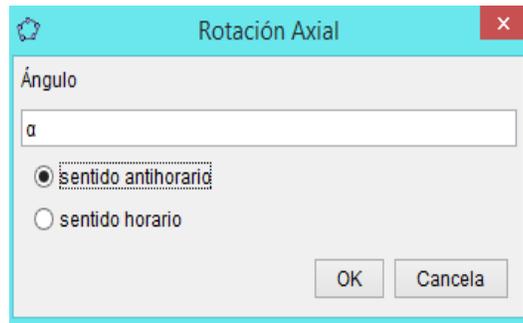


iii. En la opción generar un deslizador y dar clic a la gráfica de la función en 2D, activar la opción de Angulo y asignarle el nombre la letra griega **alfa**., el ángulo debe de girar de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , con incremento de  $1^\circ$ .

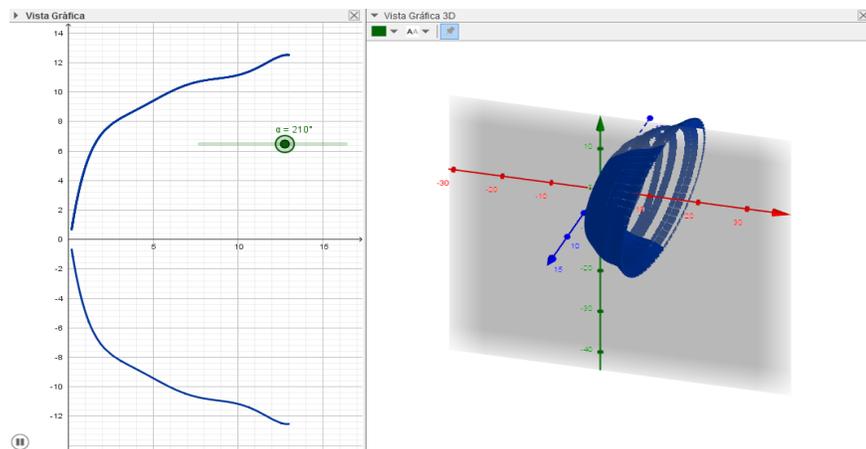


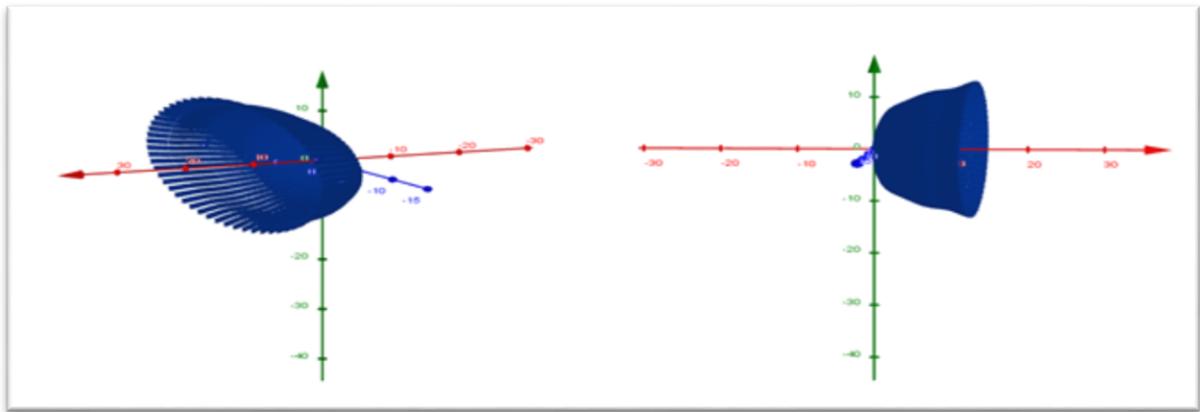
iv. Seleccionar la Vista Grafica 3D, y dar clic , rotación axial, seleccionar la curva que se va a rotar y el eje donde va a rotar la curva (eje y), se activar una venta donde debe colocar el ángulo alfa

y puede escoger cualquiera de las dos opciones sentido horario o sentido antihorario.

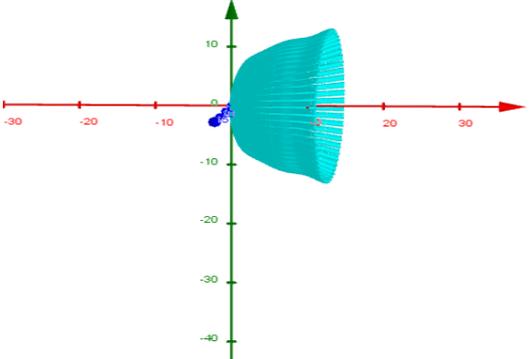


- v. Se genera una ecuación paramétrica de la superficie del objeto, activar la opción rastro y luego en el deslizador se activa la opción animación para que se comience a generar la superficie del solido de revolución.





**Figura 44. Grafica en 3D de simulación del objeto empleando GeoGebra**

Simulación del objeto utilizando GeoGebra	Recipiente seleccionado para calcular el volumen
	

**Observaciones para minimizar el error de la aproximación cálculo del volumen del objeto**

1. Se debe de hacer una buena toma de fotografía del objeto
2. Debe de tratar que la marcación de los puntos en el programa de Tracker sean lo más preciso y que siga la trayectoria del contorno del recipiente, para acercarse lo más posible a la forma.
3. Medir con precisión la longitud del objeto, si es posible, utilizar una herramienta que permita obtener el grosor del objeto

4. Seleccionar el polinomio que mejor se ajusta a los datos, ya que este será quien modele el contorno del recipiente y se utilizara para calcular el volumen.

## CONCLUSIONES

Las conclusiones que en esta investigación se presentan están ordenadas respondiendo a los tres objetivos planteados, por tanto, se concluye:

1. El estudiante y docente reconoce que una de las dificultades mayores para comprender el contenido Volumen de un Sólido de Revolución es graficar las curvas que delimitan la región plana, lo cual no permite que el estudiante sea capaz de realizar un planteamiento completo y correcto de la integral definida que representa el Volumen del Sólido; convirtiéndose en sí, en una de las principales dificultades, puesto que el identificar la región plana como producto de graficar diversas curvas en un mismo plano es fundamental, ya que, permite determinar los elementos necesarios para el planteamiento de la integral que representa el volumen del sólido; dichos elementos son los límites de integración y función del integrando. Para graficar diversas curvas en un mismo plano e identificar una región plana se necesitan conocimientos previos como tabulación, características de desplazamientos horizontales o verticales de una curva, calcular interceptos de forma analítica y gráfica.
2. La metodología implementada por el docente debe de tomar en cuenta el análisis de la estructura científica de la disciplina (Logia interna), las particularidades de los sujetos, las finalidades o valores que se pretenden desarrollar en la enseñanza, los medios con los que dispone la institución, el curriculum (Autino, B.D, Camacho, R.C, & Digión, M.A, 2015). Todos estos son factores que condicionan las metodologías que implementa el docente en su curso y que son de gran importancia para llevar un orden y flexibilidad. En la investigación realizada los estudiantes consideran que las estrategias metodológicas utilizadas por los docentes son oportunas e importantes, ya que, por lo general, los estudiantes dan una muy buena valoración, pero hay un grupo menor que considera, las estrategias no son suficiente, y esto se podría deber a que en su mayoría son estrategias donde el trabajo se realiza de forma individual.

3. Los estudiantes y docentes reconocen que los recursos tecnológicos son importantes para la comprensión del contenido, pero según la investigación las herramientas más utilizadas por el docente son plataformas para comunicarse (Microsoft Teams) y pizarras electrónicas (One Note, Jamboard, OpenBoard), pero no se utilizan programas que ayuden al estudiante en la parte geométrica, es decir, en la representación gráfica de la región o el sólido, ya que muy pocos docente utilizan el programa GeoGebra. Ante una realidad diferente a la que nos enfrentamos hoy en día, es necesario como docente pensar de qué manera vencer múltiples desafíos que han surgido en la nueva Era Tecnológica, puesto que las experiencias en el aula, el desarrollo de clases tradicionales están siendo reestructuradas a partir de la exigencia del nuevo modelo educativo que demanda mayor motivación , entrega y preparación, en el diseño didáctico de cada contenido, siendo así, la necesidad de parte del docente prepararse de manera integral en todos los aspectos necesarios para estar al nivel de las exigencias del proceso de enseñanza actual; por tanto, el uso de recursos tecnológicos adecuados para desarrollar el contenido en estudio juegan un papel importante, ya que permiten a los estudiantes , ser agentes activos de su aprendizaje, llevar conceptos que eran abstractos y ahora forman parte de una realidad.

## RECOMENDACIONES

A partir de la información y resultados obtenidos en la investigación surgen algunas recomendaciones que deberían de tomarse en cuenta en la implementación de la secuencia didáctica.

1. Ejecutar la secuencia didáctica propuesta en esta investigación, da apertura al seguimiento de una nueva investigación, para garantizar que la metodología propuesta ayuda en la comprensión del contenido Volumen de un Sólido de Revolución.
2. Para la implementación, el docente debe de conocer y analizar lo que se describe en cada uno de los apartados del instrumento y ejecutarlo con los docentes a cargo de la materia, a fin de conocer la sistematización que describe la secuencia didáctica y poder orientar al estudiante en el proceso.
3. En la propuesta se sugiere el uso del programa GeoGebra, auxiliándose del programa Tracker, pero existen diferentes aplicaciones o simuladores que permiten realizar la toma de datos y la representación de un modelo matemático, cada docente es libre de ajustar la metodología según los recursos y conocimientos que posee.
4. Para la última actividad que se propone en la secuencia didáctica, donde se tiene que calcular el volumen de un objeto de la vida cotidiana, por ejemplo, florero, pelota, frutas como sandía, melón, etc. Se recomienda que la institución o el docente pueda proporcionar los recursos necesarios, como una cámara fotográfica para que la foto tenga una calidad aceptable, un instrumento para medir la longitud y el grosor del objeto, esto permitirá que el valor del volumen encontrado tenga un grado de error aceptable y próximo al valor real.
5. La secuencia didáctica constituye un conjunto de tareas que diseña el docente, con el objetivo de promover la actividad de los estudiantes, de forma tal que el proceso constituya a la formación de las competencias deseadas (Pimienta Prieto, 2012), el

fin de la propuesta didáctica es que el estudiante tenga otra perspectiva del abordaje del contenido Volumen de Sólidos de Revolución y que permita tener un aprendizaje significativo, entonces el docente debe de adaptar en base a la dinámica de los estudiantes que van a recibir el contenido, es decir, dicha secuencia es flexible para poder ajustarla a las necesidades de los sujetos.

## REFERENCIAS

- Barriga Arceo, F. D. (2010). *Estrategias docente para un aprendizaje significativo una interpretación constructivista*, 2da. Edición. Obtenido de <https://buo.mx/assets/diaz-barriga%2C---estrategias-docentes-para-un-aprendizaje-significativo.pdf>
- Camacho, M. D. (2008). *Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. Educación Matemática*, 20(3),33-57. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40512064003>
- Citado por Fuster, D. (2019). *Investigación cualitativa: Método fenomenológico hermenéutico. Propósitos y Representaciones*. Obtenido de <http://www.scielo.org.pe/pdf/pyr/v7n1/a10v7n1.pdf>
- Cruz Sáenz, F. J. (2015). *Una propuesta didáctica basada en aprendizaje colaborativo para aprendizaje del cálculo de volúmenes de sólidos de revolución*. Obtenido de <https://riudg.udg.mx/bitstream/20.500.12104/79852/1/MCUCEI01082FT.pdf>
- Deniss, G., Zill. (s.f.). *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ferreiro Gravié, R. (2012). *Cómo ser mejor maestro. El método ELI*. Obtenido de <file:///C:/Users/karen/Downloads/52194-Texto%20del%20art%20C3%ADculo-96538-2-10-20160511.pdf>
- Fuster Guillen, D. E. (2019). *Investigación cualitativa: Método fenomenológico*. Obtenido de Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú: <http://www.scielo.org.pe/pdf/pyr/v7n1/a10v7n1.pdf>
- González, M. (s.f.). *Iniciación a GEOGEBRA*. Obtenido de <https://sites.google.com/site/geogebra1112/caracteristicas-de-geogebra>
- Hernández Camacho, R. (2007). *Propuesta didáctica para identificar cuándo la integral definida es aplicable para resolver un problema. Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44770208>
- Hernandez Moreno, A. C. (2017). *TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICA*. Obtenido de [https://www.researchgate.net/publication/315814323\\_TEORIA\\_DE\\_REGISTROS\\_DE\\_REPRESENTACIONES\\_SEMIOTICA](https://www.researchgate.net/publication/315814323_TEORIA_DE_REGISTROS_DE_REPRESENTACIONES_SEMIOTICA)
- Larson, R; Edwards, B. (2010). *Cálculo 2 de varias variables*. En *Revisión técnica Instituto tecnológico y de estudios superiores de Moterrey, México*. Mc Graw Hill Interamericana editores.
- Leithold, L. (2009). *Cálculo 7a edición*.
- López, F. N. (2013). *Arribando a la integral definida con el geogebra*. Obtenido de Recuperado el 23 de mayo de 2022: <https://erevistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt/article/view/141/139>
- López, L. (2016). *Interpretación de datos estadísticos*. Obtenido de <http://www.ricardonica.com/Interpretacion/Muestreo.pdf>
- Pimienta Prieto, J. H. (2012). *Las competencias en la docencia universitaria, preguntas frecuentes*. PEARSON EDUCACIÓN.

- Rizo-Patrón, R. (2015). *Supervenencia o nacimiento trascendental. Ápeiron: Estudios de filosofía: filosofía y fenomenología.* Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5966462>
- Rodríguez Hernández, A. (s.f.). *El método ELI una alternativa que no deja atrás el gran acontecimiento de la evaluación.* Obtenido de [https://investigacion.upaep.mx/micrositios/ebpd/assets/el\\_metodo\\_eli\\_una\\_alternativa.pdf](https://investigacion.upaep.mx/micrositios/ebpd/assets/el_metodo_eli_una_alternativa.pdf)
- Rodríguez, M. (2010, citado por Cruz Sáenz. F.J 2015). *El Papel de la escuela y el docente en el contexto de los cambios devenidos de la praxis del bionomio matemática cotidianidad.* Obtenido de UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 21, 113-125: <https://riudg.udg.mx/bitstream/20.500.12104/79852/1/MCUCEI01082FT.pdf>
- UZURIAGA L., V. L. (2006, p.268). *Retos de la enseñanza de las matemáticas en el nuevo milenio* . Obtenido de Scientia Et Technica: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84911639046>

## **ANEXOS**

## **A1. PRUEBA DIAGNÓSTICA**

El siguiente instrumento fue aplicado mediante un formato de Formularios en Google Drive.

### **Cuestionario**

Estimado estudiante:

A continuación, se le presentaran algunas preguntas con el objetivo de conocer las dificultades que se puedan presentar para el aprendizaje de “Volumen de Sólidos de Revolución”, tema de la materia de Cálculo Integral ciclo II de Ingeniería de la Universidad Don Bosco.

Le solicito que responda las siguientes preguntas con toda honestidad ya que sus observaciones servirán para mejorar la clase. Sus respuestas serán confidenciales.

Agradezco de antemano su cooperación

### **Opiniones Generales**

1. ¿Cuál es la mayor dificultad que encuentras para comprender el tema de la clase?

(Puedes seleccionar más de una opción)

- a) Tienes dificultad con los conocimientos de algebra
- b) Tienes dificultad con el trazo de graficas
- c) Se te dificulta la aplicación de métodos de integración
- d) El maestro no explica con claridad el tema
- e) El maestro no repite la explicación cuando no entiendes
- f) Te distraes con facilidad durante la explicación
- g) Tienes dificultad con los conocimientos de algebra

2. Durante la explicación del tema, tu actitud es. (Puede seleccionar más de una opción)

- a) Prestas atención y tomas apuntes
- b) Te distraes
- c) Realizas actividades que no son parte de la clase
- d) Realizas lo asignado por el docente

3. ¿Cuándo el maestro está dando la clase? (Puede seleccionar más de una opción)

- a) Es aburrido
  - b) Es demasiado serio
  - c) Se molesta si le preguntan sobre lo explicado
  - d) Es agradable la clase
  - e) Es demasiado flexible
  - f) Retroalimenta el tema
4. Tu relación con el docente es. Marca solo uno
- a) Cordial
  - b) Indiferente
  - c) No te agrada
5. Mencione ¿Cuáles considera que deben ser los conocimientos previos para el estudio del contenido “Volumen de Sólidos de Revolución”?
6. Sugerencias de actividades para mejorar la comprensión de los temas de clase

### Conocimientos Generales

7. Si una superficie plana gira sobre una recta que le sirve de eje, se forma un cuerpo geométrico denominado.
8. Dadas las funciones. Los puntos de intersección entre las curvas son:  

$$y = x^2 - 4x + 1, y = x + 1$$
  - a) (0,1); (6,5)
  - b) (0,1); (5,6)
  - c) (1, -2); (5,6)
  - d) (1,2); (2,3)
9. La derivada de la función  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x - 1}$  es:
- a)  $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2x^2-4x-1}}$
  - b)  $f'(x) = (4x - 4)\sqrt{2x^2 - 4x - 1}$
  - c)  $f'(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{2x^2-4x-1}}$
10. El método adecuado para resolver

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx$$

- a) Sustitución trigonométrica
  - b) Fracciones parciales
  - c) Cambio de variable
  - d) Integración por partes
11. Dada anti derivada de la función, calcular el valor de la integral definida en el intervalo [2,4]. (Enviar documento con el proceso)

$$\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

12. Resolver la integral. (Enviar documento con el proceso)

$$\int \text{sen}^2(x) \cos^3(x) dx$$

13. Graficar y plantear la integral que representa el área de la región limitada por las rectas.  
(Enviar documento con el proceso)

$$y = x + 2; y = -x + 4; \text{ eje } x$$

### Resultados

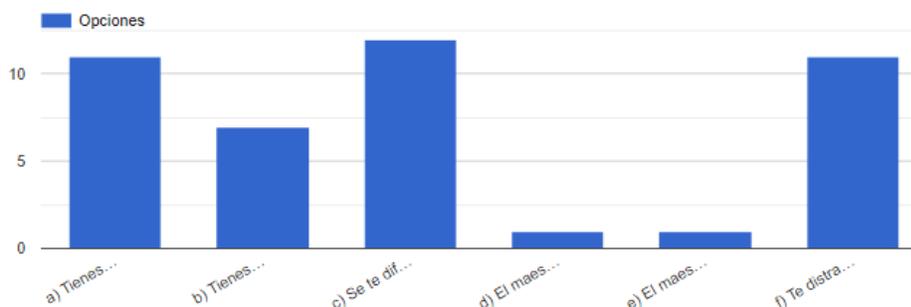
Se tomó una muestra de 26 estudiantes en la materia de Cálculo integral ciclo I año 2022.

### Parte I

1. ¿Cuál es la mayor dificultad que encuentras para comprender el tema de la clase?
  - a) Tienes dificultad con los conocimientos de algebra
  - b) Tienes dificultad con el trazo de graficas
  - c) Se te dificulta la aplicación de métodos de integración
  - d) El maestro no explica con claridad el tema
  - e) El maestro no repite la explicación cuando no entiendes
  - f) Te distraes con facilidad durante la explicación

## Respuestas

a) 12	b) 6	c) 12	d) 1	e) 1	f) 11
-------	------	-------	------	------	-------



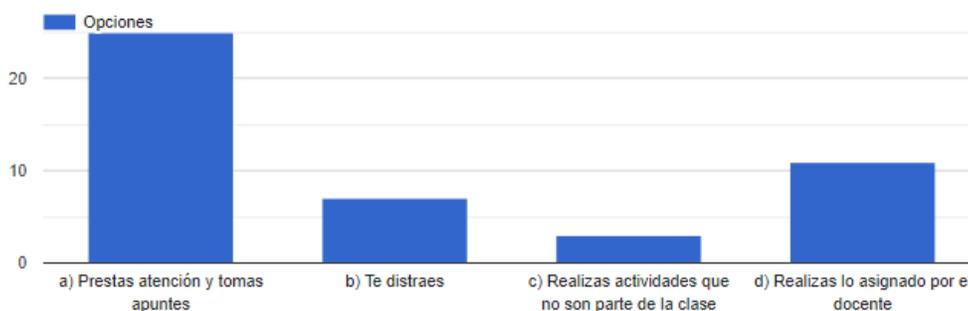
De acuerdo a la cantidad de encuestados se obtuvo que 12 personas indican que entre las mayores dificultades que presentan al comprender el contenido impartido en clases se encuentran dificultad con los conocimientos de álgebra y aplicación de métodos de integración.

**Nota:** En ésta interrogante los estudiantes podían seleccionar más de una opción por lo que el total de encuestados no coincide con la suma de respuestas a cada opción.

2. Durante la explicación del tema, tu actitud es
  - a) Prestas atención y tomas apuntes
  - b) Te distraes
  - c) Realizas actividades que no son parte de la clase
  - d) Realizas lo asignado por el docente

## Respuesta

a) 25	b) 7	c) 3	d) 11
-------	------	------	-------



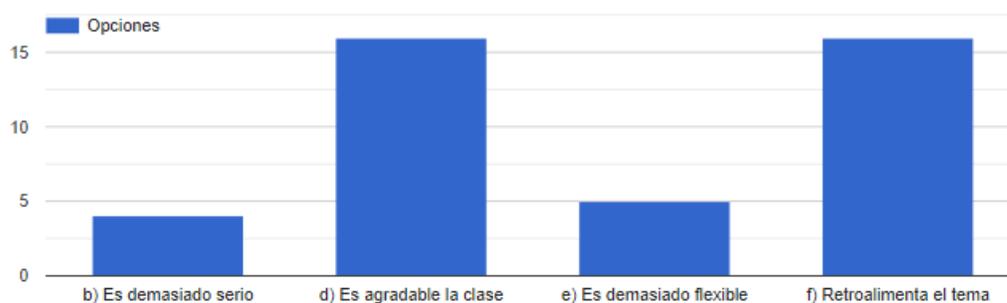
De acuerdo a los resultados 25 estudiantes indican que durante la explicación del tema su actitud prestar atención y tomar apuntes.

**Nota:** En ésta interrogante los estudiantes podían seleccionar más de una opción por lo que el total de encuestados no coincide con la suma de respuestas a cada opción.

3. ¿Cuándo el maestro está dando la clase?
- a) Es aburrido
  - b) Es demasiado serio
  - c) Se molesta si le preguntan sobre lo explicado
  - d) Es agradable la clase
  - e) Es demasiado flexible
  - f) Retroalimenta el tema

Respuesta

a) 0	b) 4	c) 0	d) 16	e) 5	f) 16
------	------	------	-------	------	-------



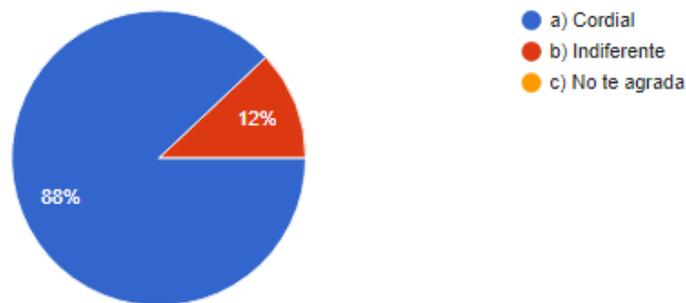
De acuerdo a los resultados 16 estudiantes coinciden que ¿Cuándo el maestro está dando la clase? Es agradable la clase y Retroalimenta el tema.

**Nota:** En ésta interrogante los estudiantes podían seleccionar más de una opción por lo que el total de encuestados no coincide con la suma de respuestas a cada opción.

4. Tu relación con el docente es
- a) Cordial
  - b) Indiferente
  - c) No te agrada

Respuesta

a) 23	b) 3	c) 0
-------	------	------



Ante la interrogante tu relación con el docente; 23 estudiantes contestaron que es cordial.

5. Mencione ¿cuáles considera que deben ser los conocimientos previos para el estudio del contenido “Volumen de Sólidos de Revolución”?

Saber graficar diferentes curvas	Capacidad de abstracción
Calcular intercepto	Aplicación de TFC
Manejo Métodos de integración	Conocimientos sobre área y volumen de figuras geométricas
Operaciones básicas	Despejar variables
Derivar	

6. Sugerencias de actividades para mejorar la comprensión de los temas de clase

Estudiar el mismo día lo visto en clases para no acumular dudas ni se dificulte estudio posterior	Que sea más participativo, que se pongan competencias donde los estudiantes practiquen y puedan ser vistos los errores por el docente
Auxiliarse del libro de catedra para dar revisión constante de lo desarrollado en cada clase, revisar ejemplos resueltos.	Que se explique la teoría, Desarrollar ejemplos similares a los del parcial
Ver videos de ejemplos cortos para mejorar comprensión	Dejar ejercicios similares a los de clase ya que siempre deja con más grado de dificultad.
Explicación de ejemplos más complejos y retomar temas de sesiones anteriores	más accesibilidad del docente en cuanto a duda fuera de la hora clase
Realizar más actividades individuales que grupales	El estudiante debe entregar más a la materia

Además de la realización de la clase algunos videos alusivos con más ejemplos seria de mucha ayuda puesto que en algunas ocasiones la duración de la clase no es suficiente para abarcar muchos ejemplos y en el momento de realizar ejercicios surgen dudas en el proceso.	Participación de conocimientos mutuos entre docente y estudiante.
Que las clases y evaluaciones todas sean virtuales o todo sea presencial	El llevar los ejercicios a algo más práctico o cotidiano en nuestra vida, de esa manera se asimilamos de mejor manera los conceptos y como desarrollarlo.
Que los ejemplos que se den sean distintos en métodos de solución unos con otros, para lograr tener distintas referencias de los casos posibles de solución de ejercicios	Que el tema al menos dure de 3 a 4 clases, porque en una sola es muy complicado entender

## Parte II

7. Si una superficie plana gira sobre una recta que le sirve de eje, se forma un cuerpo geométrico denominado.

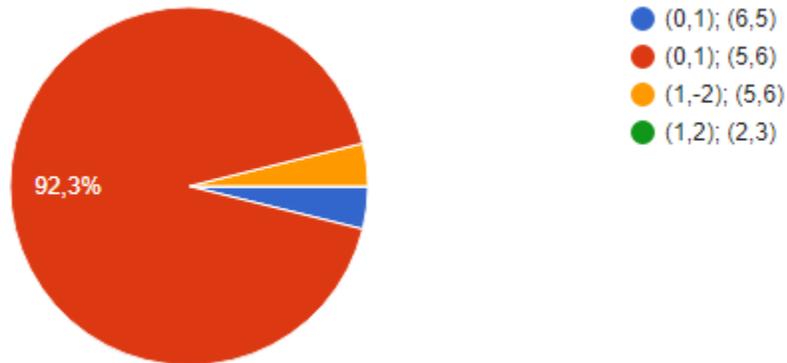
De acuerdo a los resultados 11 estudiantes acertaron que es un Sólido de revolución, el resto no dio una respuesta certera.

8. Dadas las funciones. Los puntos de intersección entre las curvas son:

$$y = x^2 - 4x + 1, y = x + 1$$

- a) (0,1); (6,5)
- b) (0,1); (5,6)
- c) (1, -2); (5,6)
- d) (1,2); (2,3)

a) 1	b) 24	c) 1	d) 0
------	-------	------	------



De acuerdo a los resultados, 24 estudiantes contestaron correctamente los puntos de intersección.

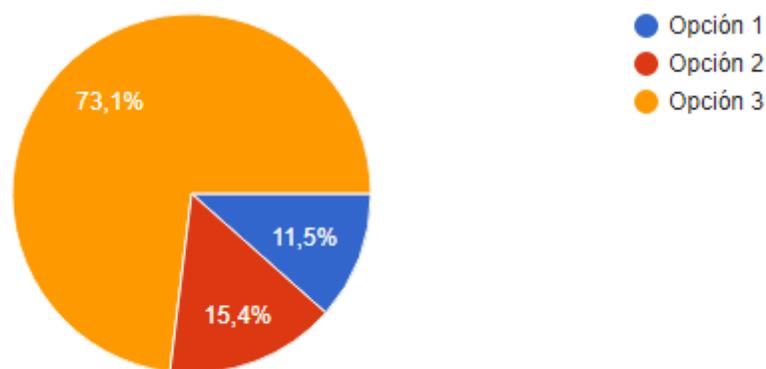
9. La derivada de la función  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x - 1}$  es:

d)  $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2x^2-4x-1}}$

e)  $f'(x) = (4x - 4)\sqrt{2x^2 - 4x - 1}$

f)  $f'(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{2x^2-4x-1}}$

a) 3	b) 19	c) 4
------	-------	------



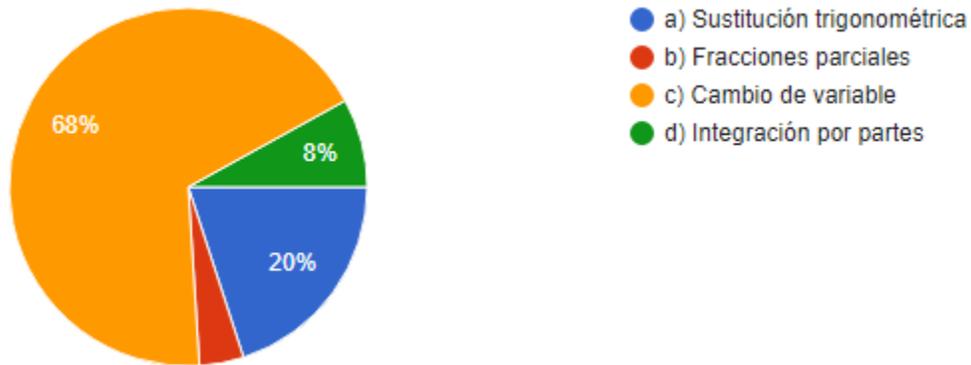
De acuerdo a los resultados, 19 estudiantes contestaron correctamente los puntos de intersección.

10. El método adecuado para resolver

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx$$

- a) Sustitución trigonométrica
- b) Fracciones parciales
- c) Cambio de variable
- d) Integración por partes

a) 4	b) 1	c) 17	d) 4
------	------	-------	------



De acuerdo a los resultados 17 estudiantes seleccionan correctamente el método adecuado para resolver la integral indefinida dada.

## Parte II

11. Dada la anti derivada de la función, calcular el valor de la integral definida en el intervalo [2,4]. (Enviar documento con el proceso)

$$\int x \ln(x) dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c$$

Criterios	Resultados			
	Cantidad de estudiantes que cumplió el criterio	Cantidad de estudiantes que no cumplió el criterio	No respondió	Total de estudiantes

Comprende la diferencia entre anti derivada general y anti derivada	15	6	5	26
Aplica correctamente el teorema fundamental del cálculo	18	3	5	
Realiza las operaciones correctamente	18	3	5	

**Conclusión:** Uno de los criterios donde presento mayor dificultad fue en comprender la diferencia entre antiderivada general y la anti derivada

12. Resolver la integral. (Enviar documento con el proceso)

$$\int \text{sen}^2(x) \cos^3(x) dx$$

Criterio	Resultado			
	Cantidad de estudiantes que cumplió el criterio	Cantidad de estudiantes que no cumplió el criterio	No respondió	Total de estudiantes
Sigue el proceso adecuado del método de integración (Potencia de funciones trigonométricas)	19	1	6	26
Aplica identidades correctamente	20	0	6	
Aplica correctamente el método de cambio de variable	18	2	6	
Expresa correctamente la integral en términos de la nueva variable	17	3	6	
Determina correctamente la anti deriva general	18	2	6	
Expresa la respuesta correcta en términos	15	5	6	

de la variable inicial				
------------------------	--	--	--	--

**Conclusión:** Uno de los criterios donde presento mayor dificultad fue en expresar la respuesta correcta en términos de la variable inicial.

13. Graficar y plantear la integral que representa el área de la región limitada por las rectas.  
(Enviar documento con el proceso)

$$y = x + 2; y = -x + 4; \text{ eje } x$$

Criterio	Resultado			
	Cantidad de estudiantes que cumplió el criterio	Cantidad de estudiantes que no cumplió el criterio	No respondió	Total de estudiantes
Traza correctamente la gráfica de las funciones en el plano cartesiano dejando claro el proceso de gráfica, escalas del sistema y puntos	10	9	7	26
Identifica la región plana a calcular el área correctamente	15	4	7	
Identifica correctamente los límites de integración	14	5	7	
Plantea correctamente el área de la región plana.	11	8	7	

**Conclusión:** Teniendo como resultado que el 35% presentar mayor dificultad en el trazo de gráfica y el 30% tiene problemas en el planteamiento de la integral para calcular el área.