

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



TRABAJO DE GRADUACIÓN
“ESTUDIO DE MODELOS DE RIESGO ACTUARIAL Y DE LA
PROBABILIDAD DE RUINA”

PRESENTADO POR
Lic. WALTER OTONIEL CAMPOS GRANADOS

ASESORES

Dra. ROSARIO ROMERA (Universidad Carlos III, Madrid, España)
Dr. JOSÉ NERYS FUNES TORRES (Universidad de El Salvador)

Para optar al título de
Maestro en Estadística

Ciudad Universitaria, diciembre de 2009.

INTRODUCCIÓN

La teoría de riesgo colectivo es un área de la matemática de seguros (o actuarial), que trata con modelos estocásticos que describen la actividad de una compañía de seguros.

La tradicional aproximación a la **teoría de riesgo** consiste en considerar un modelo del negocio de riesgo de una compañía aseguradora, y estudiar la probabilidad de ruina, es decir, la probabilidad de que el riesgo venga a obtener valor específico negativo, lo cual supone el estado de “ruina” para la compañía aseguradora.

El modelo de riesgo usual se formula como sigue: Se parte de un espacio de probabilidad completo (Ω, \mathcal{F}, P) llevando los siguientes objetos independientes:

- (I) Un **proceso Poisson** con intensidad $\lambda > 0$, que modela el número de reclamaciones hasta el tiempo $t \geq 0$.
- (II) Una sucesión $\{Y_n\}_1^\infty$ de variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas, con función de distribución común F de media μ , que modelan el tamaño o cantidad de la k -ésima reclamación.

En cada instante de tiempo n la compañía tiene que pagar una cantidad estocástica de dinero, y la compañía recibe (determinísticamente) c unidades de dinero por unidad de tiempo ($c > \lambda\mu$), entonces la ganancia en el tiempo t de la aseguradora con capital inicial $u \geq 0$ está dada por

$$X(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geq 0$$

El cual constituye el modelo clásico de riesgo en tiempo continuo.

Una de las cantidades claves en el modelo clásico de riesgo es la **probabilidad de ruina**, denotada por $\psi(u)$ como una función de u , la cual es la probabilidad de que la ganancia de la aseguradora sea menor que cero en algún tiempo t , es decir:

$$\psi(u) = Pr\{X(t) < 0 \text{ para algún } t \geq 0.\}$$

Para evitar la ruina con toda seguridad (es decir $\psi(u) = 1$), aquí es necesario asumir que la tasa de seguridad θ , definida por $\theta = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu}$, es positiva. Se

puede mostrar (ver página 6 de [1]) que la probabilidad de ruina satisface la siguiente ecuación integral:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{P}(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-y) \bar{P}(y) dy,$$

donde $\bar{B}(x) = 1 - B(x)$ denota la cola de una función de distribución $B(x)$.

En general, es muy difícil encontrar expresiones explícitas y cerradas para la probabilidad de ruina. Sin embargo, bajo condiciones adecuadas, se pueden obtener algunas aproximaciones a la probabilidad de ruina.

Por otro lado, el reaseguro en un modelo de riesgo, se presenta cuando una aseguradora firma un contrato para cubrir ciertos riesgos con otra compañía aseguradora llamada reaseguradora. De esta manera ambas aseguradoras adquieren la obligación de solventar las posibles reclamaciones del riesgo en cuestión. Desde el punto de vista de la aseguradora, el reaseguro le ayuda a evitar posibles fuertes montos en las reclamaciones, aunque naturalmente disminuyen sus ingresos por primas, pues tiene que compartir éstas con la reaseguradora. Además, hay dos tipos de reaseguramiento, a saber, el reaseguro proporcional y el reaseguro no proporcional.

En el presente trabajo se resumen las principales ideas teóricas del artículo “Bounds for the ruin probability of a discrete-time risk process”, (de Maikol Diasparra y Rosario Romera), *Journal of Applied Probability*, 2009, Vol. 46, N° 1, pp. 99-112.

El problema de ruina es ciertamente relevante en el ámbito de compañías aseguradoras y es a su vez, objeto de interés en el ámbito de la Probabilidad Aplicada, como lo prueban los numerosos trabajos que en los últimos veinte años, y aún en la actualidad pueden consultarse en la literatura especializada, (ver [2]).

El ámbito del problema que se estudia en el presente trabajo incorpora la novedad de considerar simultáneamente en el modelo de riesgo, un elemento de reaseguro, así como un elemento de inversión en activo sin riesgo.

Índice

1. COTAS PARA LA PROBABILIDAD DE RUINA	5
1.1. Casos Particulares del Modelo (1)	8
1.2. Ecuaciones Recursivas y Ecuaciones Integrales para la Probabilidad de Ruina	9
1.3. Cota para la Probabilidad de Ruina por Aproximación Inductiva	11
1.4. Cota para la Probabilidad de Ruina por Aproximación Martingala	13
2. ANÁLISIS DE SIMULACIONES HECHAS CON MATLAB	18
2.1. Análisis de resultados con $c = 1,1$ fijo	18
2.2. Análisis de resultados con $c = 1$ fijo	31
2.3. Análisis de resultados con $c = 0,8$ fijo	43
3. CONCLUSIONES	55
4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59

1. COTAS PARA LA PROBABILIDAD DE RUINA

Se considera el proceso de riesgo de seguros en tiempo discreto, en el cual la ganancia varía de acuerdo a la ecuación:

$$X_n = X_{n-1}(1 + I_n) + C(b_{n-1}) - h(b_{n-1}, Y_n), \text{ para } n \geq 1 \quad (1)$$

donde el proceso tasa de interés $\{I_n\}_{n \geq 0}$ es modelado por una cadena de Markov cuyo conjunto de estados es numerable, con $X_0 = x \geq 0$. Por otro lado, un estado absorbente η es introducido, de tal manera que $X_{n+1} = \eta$ si $X_n < 0$ o $X_n = \eta$, Y_n es el *total de reclamaciones* durante el n -ésimo período (desde el tiempo t_{n-1} al tiempo t_n), las cuales se asumen forman una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con función de distribución de probabilidad común F .

El proceso puede ser controlado por reaseguramiento, esto es, se escoge el *nivel de retención* (o factor de proporcionalidad) $b \in B$ de un contrato de reaseguramiento para un período.

La función $h(b, y)$ con valores en $[0, y]$ especifica la fracción de la reclamación y pagada por el seguro, y esta depende del nivel de retención b en el inicio del período. De lo anterior $y - h(b, y)$ es la parte pagada por el reaseguro. Se considera, además, el caso de reaseguramiento proporcional, lo cual significa que

$$h(b, y) := by \text{ con nivel de retención } b \in B. \quad (2)$$

La tasa de prima (ingreso) c es fija. Ya que el seguro paga al reaseguro una tasa de prima, la cual depende del nivel de retención b , se denota por $C(b)$ la prima obtenida por el seguro si el nivel de retención b es escogido, donde $0 \leq C(b) \leq c$, $b \in B$. Se define $b_{min} := \min\{b \in (0, 1] : C(b) \geq 0\}$. Además, $C(b)$ es una función creciente que se calcula de acuerdo al Principio del Valor Esperado, con tasa de seguridad agregada desde el reaseguro:

$$C(b) = c - (1 + \theta)(1 - b)E[Y], \quad (3)$$

donde Y es una variable aleatoria genérica con función de distribución de probabilidad F .

También se define $B = [b_{min}, 1]$ como el espacio de decisión, y se considera una política de control Markoviana $\pi = \{a_n\}_{n \geq 0}$, la cual en cada tiempo n

depende solamente del estado actual, es decir, $a_n(X_n) := b_n$, para $n \geq 0$. Considerando un estado inicial arbitrario $X_0 = x \geq 0$ (nótese que el valor inicial no es estocástico) y una política de control $\pi = \{a_n\}_{n \geq 0}$, entonces, por iteración de (1), se sigue que X_n satisface

$$X_n = x \prod_{l=1}^n (1 + I_l) + \sum_{l=1}^n \left((C(b_{l-1}) - b_{l-1} Y_l) \prod_{m=l+1}^n (1 + I_m) \right). \quad (4)$$

Sea p_{ij} la matriz de probabilidad de transición de $\{I_n\}$, es decir

$$p_{ij} = P\{I_{n+1} = j | I_n = i\} \quad (5)$$

La probabilidad de ruina cuando se usa la política π , dada la ganancia inicial x , y la tasa de interés inicial $I_0 = i$ se define como:

$$\psi^\pi(x, i) := P^\pi \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_k < 0\} | X_0 = x, I_0 = i \right), \quad (6)$$

la cual también puede ser expresada como

$$\psi^\pi(x, i) = P^\pi(X_k < 0 \text{ para algún } k \geq 1 | X_0 = x, I_0 = i) \quad (7)$$

Similarmente la probabilidad de ruina en el caso de horizonte finito está dada por

$$\psi_n^\pi(x, i) := P^\pi \left(\bigcup_{k=1}^n \{X_k < 0\} | X_0 = x, I_0 = i \right), \quad (8)$$

De lo anterior es claro que

$$\psi_1^\pi(x, i) \leq \psi_2^\pi(x, i) \leq \dots \leq \psi_n^\pi(x, i) \leq \dots,$$

de manera que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^\pi(x, i) = \psi^\pi(x, i)$$

El siguiente Lema es de mucha importancia ya que sirve para probar los Teoremas centrales

Lema 1.1 *Para cualquier política π , existe una función $\psi^\pi(x)$ tal que*

$$\psi^\pi(x, i) \leq \psi^\pi(x)$$

para todo estado inicial $x > 0$ y tasa de interés inicial $I_0 = i$.

Demostración: Está claro que por (1) y (2), el modelo de riesgo se puede escribir como

$$X_n = X_{n-1}(1 + I_n) + C(b_{n-1}) - b_{n-1}Y_n$$

Ya que $I_n \geq 0$, se tiene que

$$X_n = X_{n-1}(1 + I_n) + C(b_{n-1}) - b_{n-1}Y_n \geq X_{n-1} + C(b_{n-1}) - b_{n-1}Y_n \quad (9)$$

Definiendo recursivamente

$$\bar{X}_n = \bar{X}_{n-1} + C(b_{n-1}) - b_{n-1}Y_n \quad (10)$$

con $X_0 = \bar{X}_0 = x$. Es claro que $X_n \geq \bar{X}_n$ para todo n .

Sea

$$E_1 = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) < 0, n = 1, 2, \dots\}$$

$$E_2 = \{\omega \in \Omega : \bar{X}_n(\omega) < 0, n = 1, 2, \dots\}$$

se tiene que $E_1 \subset E_2$, además, si

$$E_1^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n(\omega) < 0, \omega \in \Omega\}$$

$$E_2^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\bar{X}_n(\omega) < 0, \omega \in \Omega\}$$

es claro que $E_1^* \subset E_2^*$, de donde

$$P^\pi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n < 0\} | I_0 = i \right) \leq P^\pi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\bar{X}_n < 0\} | I_0 = i \right)$$

de (6) y del hecho que \bar{X}_n no depende de I_n , se obtiene que

$$\psi^\pi(x, i) = P^\pi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n < 0\} | I_0 = i \right) \leq P^\pi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\bar{X}_n < 0\} | I_0 = i \right) = \psi^\pi(x) \quad \square$$

1.1. Casos Particulares del Modelo (1)

Son de particular interés los cuatro casos especiales siguientes de (1)

1. Si $I_n = 0$ y $b_n = 1$ para todo $n \geq 1$ entonces (1) se reduce al modelo clásico de riesgo en tiempo discreto sin inversión y reaseguro

$$X_k = x - \sum_{t=1}^k (Y_t - c).$$

2. Si $I_n = 0$ y $b \in B$ para $n \geq 1$ entonces (1) se reduce al modelo de riesgo en tiempo discreto con reaseguramiento proporcional

$$X_k = x - \sum_{t=1}^k (b_{t-1}Y_t - C(b_{t-1})). \quad (11)$$

Sea $\psi^\pi(x) = P^\pi(\bigcup_{k=1}^\infty \{X_k < 0\} | X_0 = x)$, la correspondiente probabilidad de ruina, si se asume estrategias estacionarias constantes, es decir, $b_n = b_0, \forall n \leq 1$, y además, $E[b_0Y] \leq C(b_0)$, entonces existe una constante $R_0 > 0$ satisfaciendo

$$e^{-R_0C(b_0)} E[e^{R_0(b_0Y)}] = 1 \quad (12)$$

Por lo tanto por la desigualdad clásica de Lundberg para probabilidad de ruina

$$\psi^\pi(x) \leq e^{-R_0x}, \forall x \geq 0 \quad (13)$$

3. Sea d_n la tasa de beneficios constante en el n -ésimo período (los beneficios son pagos hechos por una corporación a sus accionistas). Entonces el modelo de riesgo en tiempo discreto con tasa de interés estocástica y beneficios está dado por

$$X_n = X_{n-1}(1 + I_n) + C(b_{n-1}) - h(b_{n-1}, Y_n) - d_n X_n$$

reordenando términos se llega a establecer que este modelo es desde un punto de vista estadístico el mismo que (1).

4. El último caso sucede cuando la compañía tiene un plan de reinversión de beneficios, el cual le permite a sus accionistas comprar pequeñas cantidades de reservas. En este caso el modelo de riesgo en tiempo discreto con tasa de interés estocástico y reinversión de beneficios está dado por

$$X_n = X_{n-1}(1 + I_n) + C(b_{n-1}) - h(b_{n-1}, Y_n) + \bar{d}_n X_n,$$

donde $\bar{d} \in [0, 1)$ es la tasa de reinversión de beneficios en el n -ésimo período; otra vez se llega a establecer que este modelo es esencialmente el mismo que (1).

1.2. Ecuaciones Recursivas y Ecuaciones Integrales para la Probabilidad de Ruina

En lo que sigue se obtienen ecuaciones recursivas para la probabilidad y ecuaciones integrales para la probabilidad de ruina final asociada al modelo (1).

Lema 1.2 *Sea $u(y) = b_0 y - C(b_0)$, donde b_0 es el nivel de retención inicial, $\tau_j = (x(1 + j) + C(b_0))/b_0$, $X_0 = x \geq 0$, y p_{ij} como en (5), entonces*

$$\psi_1^\pi(x, i) = \sum_{j \in I} p_{ij} \bar{F}(\tau_j), \quad (14)$$

donde $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$, y para $n \geq 1$

$$\psi_{n+1}^\pi(x, i) = \sum_{j \in I} p_{ij} \int_0^{\tau_j} \psi_n^\pi(x(1 + j) - u(y), j) dF(y) + \sum_{j \in I} p_{ij} \bar{F}(\tau_j), \quad (15)$$

$$\psi^\pi(x, i) = \sum_{j \in I} p_{ij} \int_0^{\tau_j} \psi^\pi(x(1 + j) - u(y), j) dF(y) + \sum_{j \in I} p_{ij} \bar{F}(\tau_j). \quad (16)$$

Demstración: Sea $U_k = U(Y_k) = b_0 Y_k - C(b_0)$. Dando $Y_1 = y$, la política de control π , y $I_1 = j$, de (4) se tiene que $U_1 = u(y)$. Por lo tanto

$$X_1 = x(1 + I_1) - U_1 = h_1 - u(y), \text{ donde } h_1 = x(1 + j)$$

Ahora, si $u(y) > h_1$, entonces

$$P^\pi(X_1 < 0 | Y_1 = y, I_1 = j, X_0 = x, I_0 = i) = 1$$

lo anterior implica que

$$P^\pi \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} \{X_k < 0\} | Y_1 = y, I_1 = j, X_0 = x, I_0 = i \right) = 1,$$

mientras si $0 \leq u(y) \leq h_1$, entonces

$$P^\pi(X_1 < 0 | Y_1 = y, I_1 = j, X_0 = x, I_0 = i) = 0. \quad (17)$$

Sea $\{\tilde{Y}_n\}_{n \geq 1}$, $\{\tilde{I}_n\}_{n \geq 1}$, copias independientes de $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ y $\{I_n\}_{n \geq 0}$, respectivamente.

Sea $\tilde{U}_k = b_0 \tilde{Y}_k - C(b_0)$. Luego por (4) y (17), se tiene, para $0 \leq u(y) \leq h_1$,

$$\begin{aligned} & P^\pi \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} \{X_k < 0\} | Y_1 = y, I_1 = j, X_0 = x, I_0 = i \right) \\ &= P^\pi \left(\bigcup_{k=2}^{n+1} \{X_k < 0\} | Y_1 = y, I_1 = j, X_0 = x, I_0 = i \right) \\ &= P^\pi \left(\bigcup_{k=2}^{n+1} \left\{ (h_1 - u(y)) \prod_{l=1}^k (1 + I_l) - \sum_{l=1}^k U_l \prod_{m=l+1}^k (1 + I_m) < 0 \right\} | X_0 = x, I_1 = j \right) \\ &= P^\pi \left(\bigcup_{k=2}^{n+1} \left\{ (h_1 - u(y)) \prod_{l=1}^k (1 + \tilde{I}_l) - \sum_{l=1}^k \tilde{U}_l \prod_{m=l+1}^k (1 + \tilde{I}_m) < 0 \right\} | X_0 = x, \tilde{I}_1 = j \right) \\ &= \psi_n^\pi(h_1 - u(y), j) = \psi_n^\pi(x(1 + j) - u(y), j) \end{aligned}$$

en lo anterior se ha usado el hecho que $\{I_n\}_{n \geq 0}$ es cadena de Markov, y que ésta es independiente de $\{Y_n\}_{n \geq 1}$.

Ahora se considera el evento $\mathcal{A} = \{Y_1 = y, I_1 = j, X_0 = x, I_0 = i\}$, recordando que $F(y) = P(Y \leq y)$, de (4) y (8) se obtiene que

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}^\pi(x, i) &= P^\pi \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} \{X_k < 0\} | X_0 = x, I_0 = i \right) \\ &= \sum_{j \in I} p_{ij} \int_0^\infty P^\pi \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} \{X_k < 0\} | \mathcal{A} \right) dF(y) \end{aligned}$$

Entonces, ya que $\tau_j = \frac{x(1+j)+C(b_0)}{b_0}$, y notando que $u(y) > h_1$ implica $y > \tau_j$, se tiene

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}^\pi(x, i) &= \sum_{j \in I} p_{ij} \left\{ \int_0^{\tau_j} P^\pi \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} \{X_k < 0\} \mid \mathcal{A} \right) dF(y) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j \in I} p_{ij} \int_{\tau_j}^\infty P^\pi \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} \{X_k < 0\} \mid \mathcal{A} \right) dF(y) \right\} \\
&= \sum_{j \in I} p_{ij} \left\{ \int_0^{\tau_j} \psi_n^\pi(x(1+j) - u(y), j) dF(y) + \int_{\tau_j}^\infty dF(y) \right\} \\
&= \sum_{j \in I} p_{ij} \left\{ \int_0^{\tau_j} \psi_n^\pi(x(1+j) - u(y), j) dF(y) + \bar{F}(\tau_j) \right\}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Esto establece (15). En particular,

$$\psi_1^\pi(x, i) = \sum_{j \in I} p_{ij} \bar{F}(\tau_j)$$

Para terminar, basta hacer $n \rightarrow \infty$ en (18) y usar el teorema de convergencia dominada para obtener $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{n+1}^\pi(x, i) = \psi^\pi(x, i)$, estableciendo (16). \square

1.3. Cota para la Probabilidad de Ruina por Aproximación Inductiva

A través del siguiente teorema se obtiene una cota para la probabilidad de ruina, por aproximación inductiva:

Teorema 1.1 *Sea $R_0 > 0$ la constante que satisface (12), entonces, $\forall x \geq 0$ e $i \in I$*

$$\begin{aligned}
\psi^\pi(x, i) &\leq \beta \sum_{j \in I} p_{ij} E^\pi [e^{-R_0 x(1+j)}] \\
&= \beta E^\pi [e^{-R_0 [x(1+I_1)]} \mid I_0 = i],
\end{aligned} \tag{19}$$

donde $\beta \equiv \beta(b_0)$ y está dado por

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_0 b_0 y} dF(y)}{e^{R_0 b_0 t} \bar{F}(t)}.$$

Demostración: Primero se muestra que el término a la derecha de (19) es una cota superior para $\psi_n^\pi(x, i)$, para todo $n \geq 1$. Se probará esto por inducción.

El siguiente es un artificio muy importante

$$\begin{aligned}\bar{F}(\theta) &= \left(\frac{\int_{\theta}^{\infty} e^{R_0 b_0 y} dF(y)}{e^{R_0 b_0 \theta} \bar{F}(\theta)} \right)^{-1} e^{-R_0 b_0 \theta} \int_{\theta}^{\infty} e^{R_0 b_0 y} dF(y) \\ &\leq \beta e^{-R_0 b_0 \theta} \int_{\theta}^{\infty} e^{R_0 b_0 y} dF(y) \leq \beta e^{-R_0 b_0 \theta} E^\pi[e^{R_0 b Y_1}]\end{aligned}\quad (20)$$

par cualquier $\theta \geq 0$. Esto implica que para todo $x \geq 0, i \geq 0$ y $b_0 \in B$, por (14) y (20), se tiene

$$\begin{aligned}\psi_1^\pi(x, i) &= \sum_{j \in I} p_{ij} \bar{F}(\tau_j) \\ &\leq \sum_{j \in I} p_{ij} \left(\beta E^\pi[e^{R_0 b Y_1}] e^{-R_0 b_0 \left(\frac{x(1+j)+C(b_0)}{b_0} \right)} \right) \\ &= \beta E^\pi[e^{R_0 b Y_1}] \sum_{j \in I} p_{ij} e^{-R_0 [x(1+j)+C(b_0)]} \\ &= \beta E^\pi[e^{R_0 b Y_1}] E^\pi[e^{-R_0 [x(1+j)+C(b)]} | I_0 = i] \\ &= \beta E^\pi[e^{R_0 b Y_1}] E^\pi[e^{-R_0 C(b)}] E^\pi[e^{-R_0 x(1+I_1)} | I_0 = i] \\ &= \beta E^\pi[e^{-R_0 [C(b)-bY_1]}] E^\pi[e^{-R_0 x(1+I_1)} | I_0 = i] \\ &= \beta E^\pi[e^{-R_0 x(1+I_1)} | I_0 = i] \text{ por (12)}\end{aligned}$$

Esto establece el resultado para $n = 1$. Ahora por la hipótesis inductiva, se tiene que para algún $n \geq 1$, y todo $x \geq 0, i \in I$,

$$\psi_n^\pi(x, i) \leq \beta E^\pi[e^{-R_0 x(1+I_1)} | I_0 = i] \quad (21)$$

Ahora, sea $0 \leq y \leq \tau_j$, con τ_j como en el Lema 2. Reemplazando en (21) x e i por $x(1+j) + C(b_0) - b_0 y$ y j , respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned}\psi_n^\pi(x(1+j) + C(b_0) - b_0 y, j) &\leq \beta E^\pi[e^{-R_0 [x(1+j)+C(b)-by](1+I_1)} | I_0 = j] \\ &\leq \beta e^{-R_0 [x(1+j)+C(b_0)-b_0 y]}\end{aligned}\quad (22)$$

reemplazando (22) en (15), se obtiene

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}^\pi(x, i) &\leq \sum_{j \in I} p_{ij} \left(\beta e^{-R_0[x(1+j)+C(b_0)]} \int_{\tau_j}^{\infty} e^{R_0 b_0 y} dF(y) \right) \\
&+ \sum_{j \in I} p_{ij} \left(\beta e^{-R_0[x(1+j)+C(b_0)]} \int_0^{\tau_j} e^{R_0 b_0 y} dF(y) \right) \text{ por (20), con } \theta = \tau_j \\
&= \sum_{j \in I} p_{ij} \left(\beta e^{-R_0[x(1+j)+C(b_0)]} \int_0^{\infty} e^{R_0 b_0 y} dF(y) \right) \\
&= \beta E^\pi[e^{R_0 b Y_1}] E^\pi[e^{-R_0 C(b)}] E^\pi[e^{-R_0 x(1+I_1)} | I_0 = i] \text{ por (12)} \\
&= \beta E^\pi[e^{-R_0 x(1+I_1)} | I_0 = i]
\end{aligned}$$

Luego, (21) es fijo para $n \geq 1$, y haciendo que $n \rightarrow \infty$ en (21), se obtiene (19) \square

A continuación se define un conjunto de distribuciones de probabilidad, que incluye la familia Exponencial, la Gamma, Erlang, y la familia de tipo Phase, cuya propiedad más interesante es que proporciona cotas para la probabilidad de ruina más ajustadas que la clásica de Lundberg.

Definición: Una distribución F , concentrada en $(0, \infty)$, se dice ser **new worse than used in convex (NWUC) ordering** si, para todo $x, y \geq 0$

$$\int_{x+y}^{\infty} \bar{F}(z) dz \geq \bar{F}(y) \int_x^{\infty} \bar{F}(z) dz$$

Corolorario 1.1 *Bajo las hipótesis del Teorema 1, y asumiendo que $E^\pi[e^{R_0 b Y_1}] < \infty$ para todo $b \in B$, y que, además, F es una distribución (NWUC), se tiene*

$$\psi^\pi(x, i) \leq (E^\pi[e^{R_0 b Y_1}])^{-1} E^\pi[e^{R_0 x(1+I_1)} | I_0 = i] \quad (23)$$

1.4. Cota para la Probabilidad de Ruina por Aproximación Martingala

El siguiente resultado establece una cota para la probabilidad de ruina, por medio de aproximación martingala¹:

¹Ver [6], para revisar la definición de Martingala

Proposición 1.1 *Asuma que $E^\pi[C(b) - bY - 1] > 0$. Además supóngase que para cada $i \in I$, existe $\rho_i > 0$ tal que*

$$E^\pi[e^{-\rho_i[C(b)-bY_1](1+I_1)^{-1}}|I_0 = i] = 1, \quad (24)$$

entonces

$$R_1 = \min_{i \in I} \rho_i \geq R_0 \quad (25)$$

y, además, $\forall i \in I$

$$E^\pi[e^{-R_1[C(b)-bY_1](1+I_1)^{-1}}|I_0 = i] \leq 1. \quad (26)$$

Demostración: Para cada $i \in I$, sea

$$l_i(r) = E^\pi[e^{-r[C(b)-bY](1+I_1)^{-1}}|I_0 = i] - 1, \quad r > 0$$

Recordando la definición de esperanza y ocupando el Teorema Fundamental del Cálculo, no es difícil establecer que

$$l'_i(0) = E^\pi[-(C(b) - bY)]E^\pi[(1 + I_1)^{-1}|I_0 = i] < 0, \text{ ya que } E^\pi[C(b) - bY] > 0$$

Derivando de nuevo, se establece que

$$l''_i(r) = E^\pi[((C(b) - bY)(1 + I_1)^{-1})^2 e^{-r[C(b)-bY](1+I_1)^{-1}}|I_0 = i] > 0$$

Además, notar que $l_i(0) = 0$, así, se ha probado que $l_i(r)$ es una función convexa que es decreciente en cero. Por la convexidad de $l_i(r)$, se está seguro que ésta tiene una única raíz positiva, sea ρ_i , dicha raíz. Por otro lado ocupando de nuevo la convexidad de $l_i(r)$, se establece que si $0 < \rho \leq \rho_i$, entonces $l_i(\rho) \leq 0$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} E^\pi[e^{-R_0[C(b)-bY](1+I_1)^{-1}}|I_0 = i] &= \sum_{j \in I} p_{ij} E[e^{-R_0[C(b_0)-b_0Y](1+j)^{-1}}] \\ &= \sum_{j \in I} p_{ij} E[(e^{-R_0[C(b_0)-b_0Y]})^{(1+j)^{-1}}] \\ &= \sum_{j \in I} p_{ij} (e^{-R_0 C(b_0)})^{(1+j)^{-1}} E[(e^{R_0 b_0 Y})^{(1+j)^{-1}}] \\ &\leq \sum_{j \in I} p_{ij} (e^{-R_0 C(b_0)})^{(1+j)^{-1}} E[e^{R_0 b_0 Y}]^{(1+j)^{-1}} \\ &= \sum_{j \in I} p_{ij} E[e^{-R_0[C(b_0)-b_0Y_1]}]^{(1+j)^{-1}} \end{aligned}$$

En la desigualdad se ha hecho uso de la desigualdad de Jensen para funciones convexas (realmente la desigualdad de Jensen se invierte cuando la función es cóncava, el cual es el caso). Consecuentemente por (12), se tiene que $E[e^{-R_0[C(b_0)-b_0Y_1]}] = 1$, de donde, tomando en cuenta que $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1$,

$$E^\pi[e^{-R_0[C(b)-bY](1+I_1)^{-1}} | I_0 = i] \leq 1$$

Lo anterior implica que $l_i(R_0) \leq 0$, además, $R_0 \leq \rho_i$, para todo i , así

$$R_1 = \min_{i \in I} \rho_i \geq R_0$$

Se ha establecido (25). Además $R_1 \leq \rho_i$, para todo i , lo cual implica que $l_i(R_1) \leq 0$, esto establece (26).

Teorema 1.2 *Bajo las hipótesis de la Proposición 1.1, $\forall i \in I$ y $x \geq 0$,*

$$\psi^\pi(x, i) \leq e^{-R_1 x}. \quad (27)$$

Demostración: Primeramente se define, el así llamado, *proceso de riesgo descontado* $V_n = X_n \prod_{l=1}^n (1 + I_l)^{-1}$ con $n \geq 1$, el cual realizando operaciones elementales, se ve que satisface

$$V_n = x + \sum_{l=1}^n \left((C(b_0) - b_0 Y_l) \prod_{t=1}^l (1 + I_t)^{-1} \right) \quad (28)$$

Además, sea $S_n = e^{-R-1V_n}$, entonces, de nuevo reordenando términos, se tiene

$$S_{n+1} = S_n e^{-R_1(C(b_0)-b_0Y_{n+1}) \prod_{t=1}^{n+1} (1+I_t)^{-1}}$$

De lo anterior, para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} & E^\pi[S_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n, I_1, \dots, I_n] \\ &= S_n E[e^{-R_1(C(b_0)-b_0Y_{n+1}) \prod_{t=1}^{n+1} (1+I_t)^{-1}} | Y_1, \dots, Y_n, I_1, \dots, I_n] \\ &= S_n E[e^{-R_1(C(b_0)-b_0Y_{n+1})(1+I_{n+1})^{-1} \prod_{t=1}^n (1+I_t)^{-1}} | I_1, \dots, I_n] \\ &\leq S_n E \left([e^{-R_1(C(b_0)-b_0Y_{n+1})(1+I_{n+1})^{-1}}] \right)^{\prod_{t=1}^n (1+I_t)^{-1}} \\ &\leq S_n. \end{aligned}$$

De nuevo se ha hecho uso de la desigualdad de Jensen aplicada a una función cóncava.

Esto implica que $\{S_n\}_{n \geq 1}$ es una supermartingala.

Ahora, sea $T_i = \min\{n : V_n < 0 | I_0 = i\}$, entonces T_i es un tiempo de paro y $n \wedge T_i = \min\{n, T_i\}$ es un tiempo finito de paro. De aquí por el Teorema Opcional de Paro para martingalas, se tiene

$$E^\pi[S_{n \wedge T_i}] \leq E^\pi[S_0] = e^{-R_1 x}$$

De aquí,

$$\begin{aligned} e^{-R_1 x} &\geq E^\pi[S_{n \wedge T_i}] \geq E^\pi[(S_{n \wedge T_i})1_{T_i \leq n}] \geq E^\pi[(S_{T_i})1_{T_i \leq n}] \\ &= E^\pi[e^{-R_1 V_{T_i}} 1_{T_i \leq n}] \geq E^\pi[1_{T_i \leq n}] = \psi_n^\pi(x, i), \end{aligned} \quad (29)$$

(29) se sigue del hecho que $V_{T_i} < 0$. Ahora, haciendo $n \rightarrow \infty$ en (29), se obtiene (27). \square

Vale la pena subrayar que para la demostración del Teorema 1.2 se define el proceso de riesgo descontado $V_n = X_n \prod_{l=1}^n (1 + I_l)^{-1}$ con $n \geq 1$, porque en el modelo clásico de riesgo $\{e^{-R_0 X_n}\}_{n \geq 1}$ es una martingala. Sin embargo, para el modelo (1), no existe constante $r > 0$ tal que $\{e^{-r X_n}\}_{n \geq 1}$ sea una martingala. Empero, existe una constante $r > 0$ tal que $\{e^{-r V_n}\}_{n \geq 1}$ es una supermartingala.

A partir del desarrollo teórico presentado en esta sección, se plantean diversas interrogantes que vamos a resumir brevemente. Algunas podrán abordarse en trabajos posteriores de índole teórica, como son:

1. ¿Es posible obtener cotas más ajustadas que las proporcionadas por los Teoremas 1.1 y 1.2?
2. ¿Qué herramientas deberían utilizarse, como por ejemplo las basadas en Cadenas de Markov, para conseguir expresiones cerradas y explícitas de la probabilidad de ruina?
3. ¿Se puede generalizar el proceso de inversión al caso de activo con riesgo?
4. ¿Se puede calcular o estimar $E[\tau]$ o $P(\tau \leq T)$, para $T > 0$ fijo, siendo $\tau = \inf\{k \geq 1 : X_k < 0\}$, tiempo hasta la ruina?

Es a ésta última pregunta a la que en la sección 2 se responde parcialmente, mediante estimaciones obtenidas por simulación del modelo (1), bajo un cierto diseño experimental.

2. ANÁLISIS DE SIMULACIONES HECHAS CON MATLAB

En esta sección se realizan simulaciones, de los resultados teóricos obtenidos. Se está interesado en simular trayectorias del modelo (1), y averiguar la probabilidad del tiempo de ruina.

El diseño del experimento se ha establecido como sigue:

1. El número n de iteraciones para el modelo (1) se fija en $n = 50$, y el número N de replicaciones es de $N = 1000$,
2. Se toman como parámetros fijos los siguientes: Los valores iniciales (I_0, X_0) , las probabilidades de transición de la Cadena de Markov dadas por la matriz estocástica M , con espacio de estados I , y el coeficiente de seguridad θ . Donde, $(I_0, X_0) = (8\%, 5)$,

$$M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,15 & 0,7 & 0,15 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix},$$

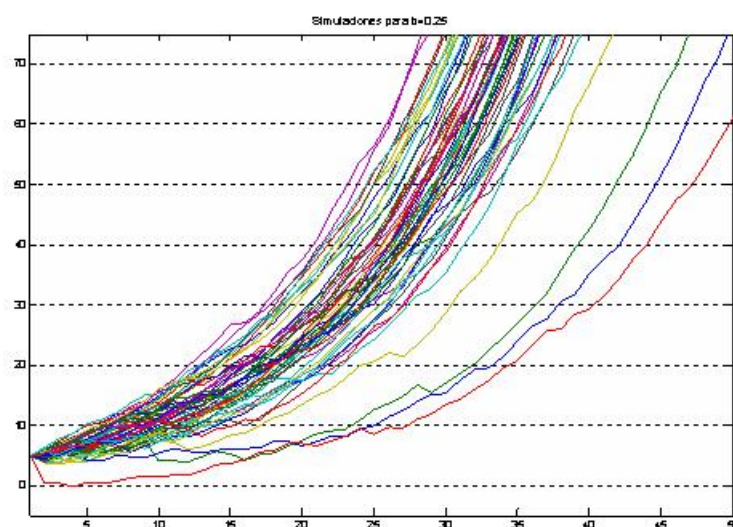
$I = \{6\%, 8\%, 10\%\}$ y $\theta = 10\%$.

3. Los parámetros que se harán variar son los siguientes: la prima c , la distribución $\Gamma(p, a)$, y el nivel de retención b . Donde $c \in \{1,1; 1; 0,8\}$, $\Gamma(p, a) \in \{\Gamma(1, 3), \Gamma(1, 4), \Gamma(7/10, 7/2), \Gamma(1/2, 2)\}$

2.1. Análisis de resultados con $c = 1,1$ fijo

Las tablas a continuación muestran la **probabilidad estimada de que la ruina ocurra antes del tiempo $T = 10$, $P(\tau \leq 10)$, el valor promedio estimado del tiempo de las trayectorias donde hay ruina, $E[\tau | X_\tau < 0]$ y el porcentaje de trayectorias donde hay ruina, antes del horizonte $n = 50$, que se denota por A .**

$c = 1,1$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(1, 3)$	$P(\tau \leq 10) = 0,012$ $E = 7,041$ $A = 1,4\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,327$ $E = 13,55$ $A = 67,9\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,747$ $E = 8,053$ $A = 93,3\%$

Tabla 1: Resultados con la Distribución $\Gamma(1, 3)$ Figura 1: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

Los resultados numéricos en la Tabla 1 para el nivel de retención $b = 0,25$, junto con la ilustración de la Figura 1, muestran claramente que no hay ruina con éstos valores.

En lo sucesivo es de tener cuidado a la hora de leer el número E , ya que éste por sí solo da poca información, en este caso se tiene que $E = 7,041$ que es menor que diez, sin embargo, el porcentaje de trayectorias que llevan a ruina es sumamente bajo, por lo que éste número tiene muy poca trascendencia.

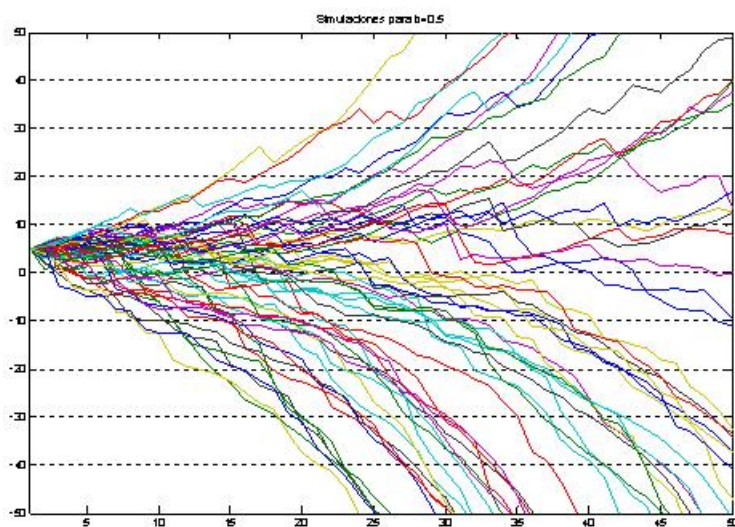


Figura 2: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Los resultados numéricos en la Tabla 1 para el nivel de retención $b = 0,5$, junto con la ilustración de la Figura 2, muestran claramente que hay ruina con éstos valores, aunque ésta sucederá con una probabilidad un tanto baja antes de 10 años. A pesar de que en un alto porcentaje de las trayectorias sucede ruina ésta se dará después de la décima iteración, (después de 10 años).

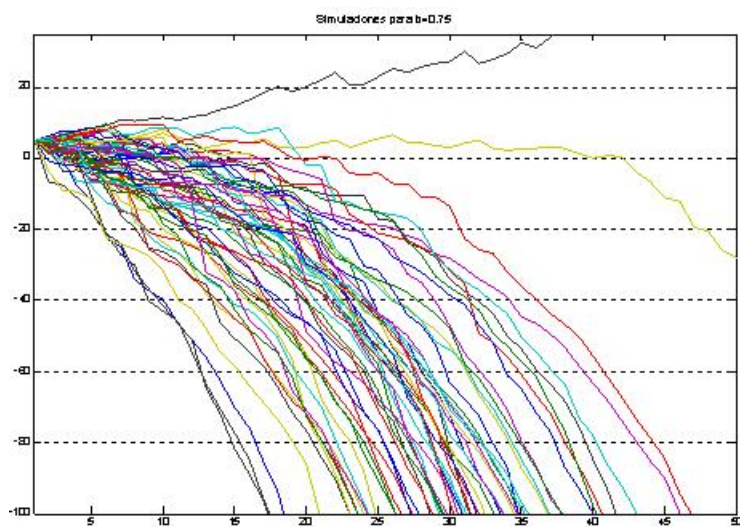


Figura 3: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

Leyendo la Tabla 1 en la columna correspondiente a $b = 0,75$ junto con la ilustración de la Figura 3 es evidente que hay ruina antes de 10 años con una probabilidad alta. Además prácticamente en el 100 % de las trayectorias hay ruina.

$c = 1,1$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(1, 4)$	$P(\tau \leq 10) = 0,059$ $E = 10,88$ $A = 9,6\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,665$ $E = 9,33$ $A = 96,4\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,916$ $E = 5,07$ $A = 100\%$

Tabla 2: Resultados con la Distribución $\Gamma(1, 4)$

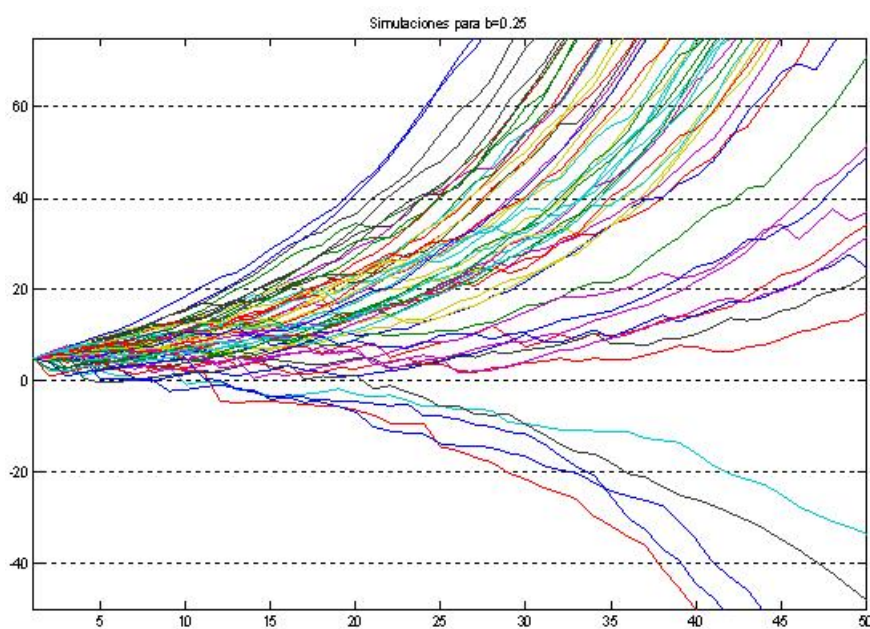


Figura 4: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

Con los datos de la Tabla 2 en la columna correspondiente al nivel de retención $b = 0,25$, junto con la ilustración de la Figura 4, es evidente que no hay ruina.

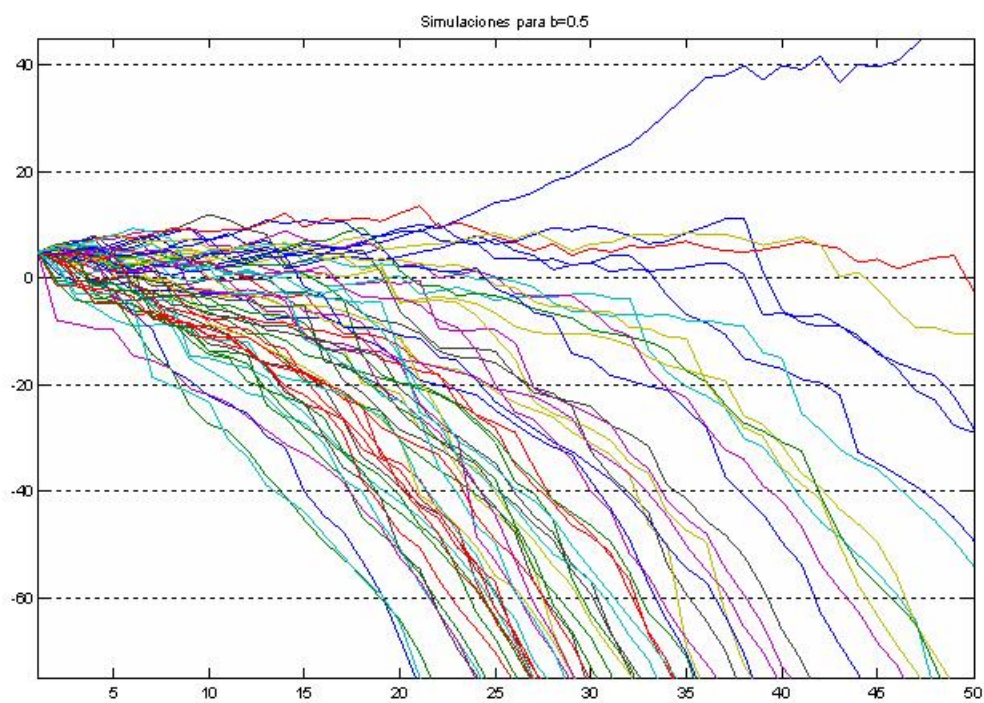


Figura 5: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Con los datos de la Tabla 2 en la columna correspondiente al nivel de retención $b = 0,5$, junto con la ilustración de la Figura 5, es claro que existe una probabilidad alta de que haya ruina antes de 10 años.

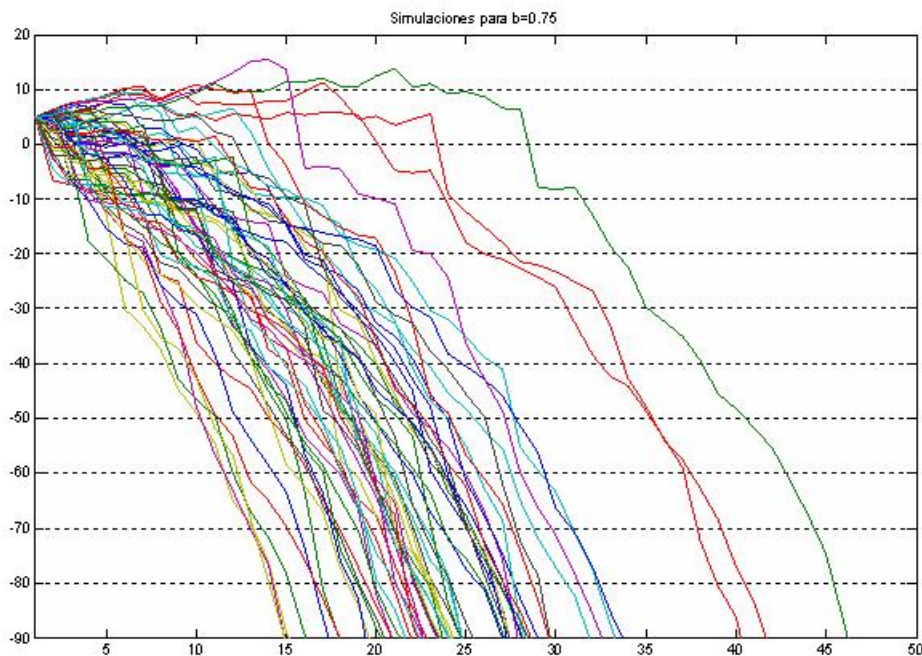
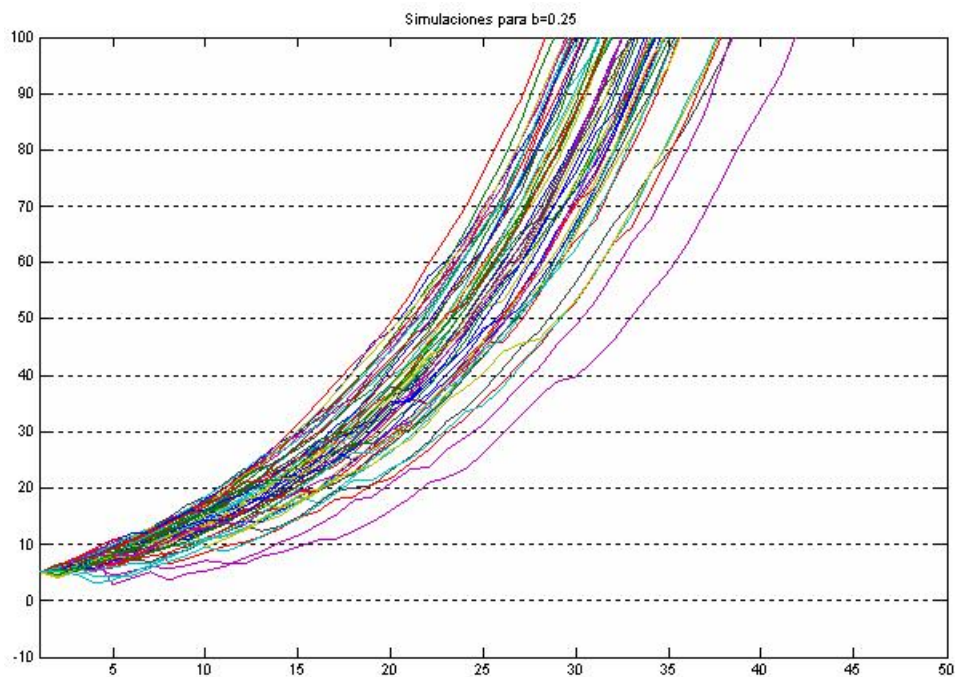


Figura 6: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

Leyendo la Tabla 2 en la columna correspondiente a $b = 0,75$ junto con la ilustración de la Figura 6 es evidente que hay ruina antes de 10 años con una probabilidad alta. Además prácticamente en el 100 % de las trayectorias hay ruina.

Observación: A esta altura se puede notar ya, el peso que tiene en los resultados el cambio en el nivel de retención y por ende se puede ir justificando la necesidad del reaseguro.

$c = 1,1$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(7/10, 7/2)$	$P(\tau \leq 10) = 0,002$ $E = 3$ $A = 0,2\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,168$ $E = 12,56$ $A = 31,3\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,525$ $E = 10,04$ $A = 82,2\%$

Tabla 3: Resultados con la Distribución $\Gamma(7/10, 7/2)$ Figura 7: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

Con los datos de la Tabla 3 en la columna correspondiente al nivel de retención $b = 0,25$, junto con la ilustración de la Figura 7, es evidente la inexistencia de ruina en el proceso.

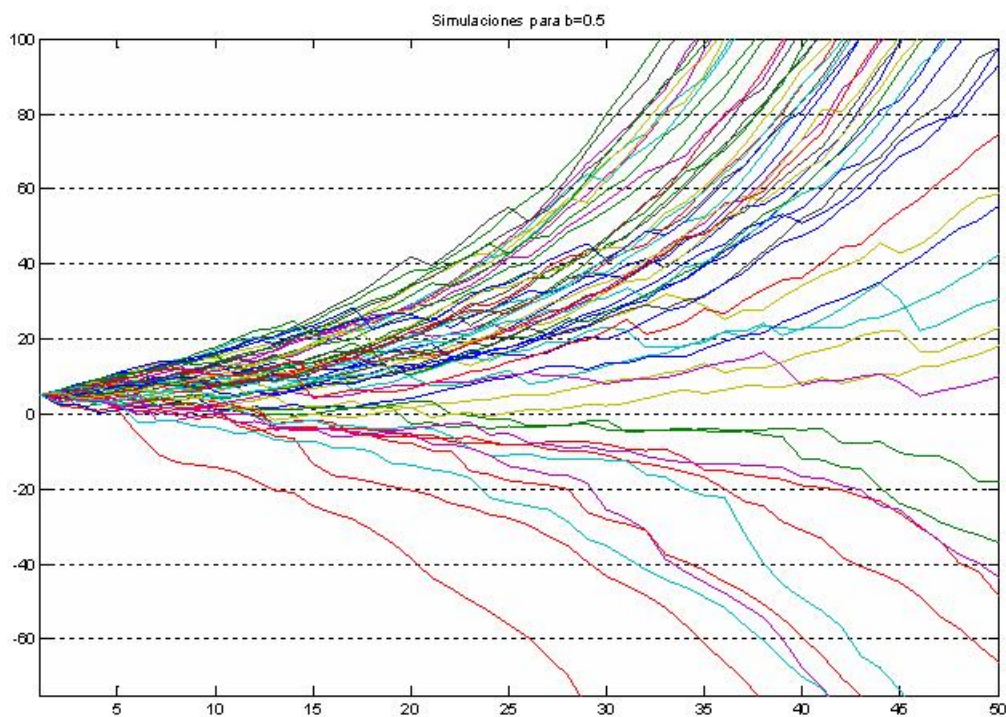


Figura 8: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Con los datos de la Tabla 3 en la columna correspondiente al nivel de retención $b = 0,5$, junto con la ilustración de la Figura 8, se puede concluir que aún para este nivel de retención no hay ruina antes de 10 años; esto quiere decir que la distribución que modela las reclamaciones tiene un mayor protagonismo.

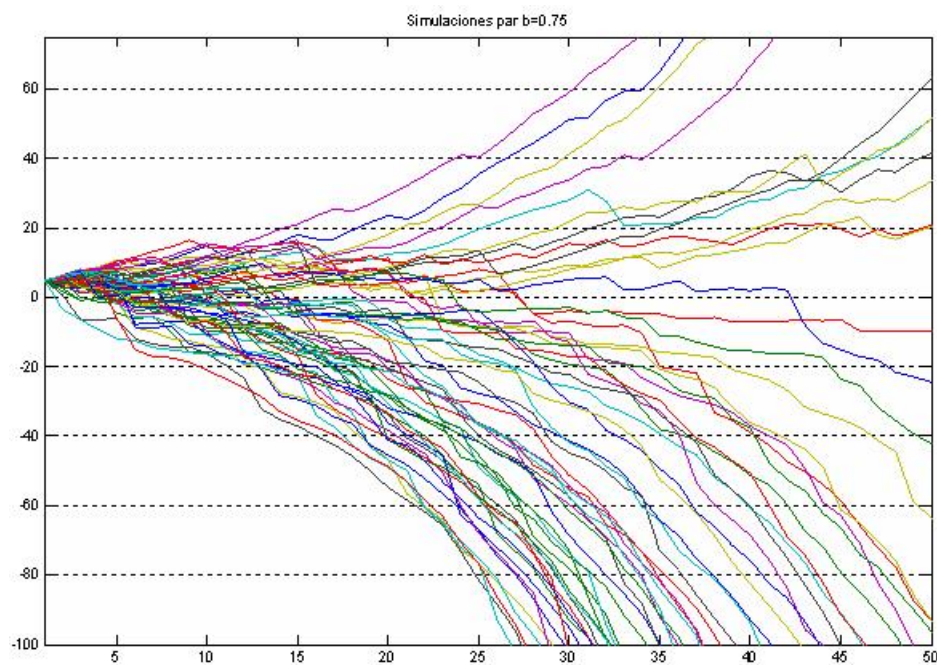
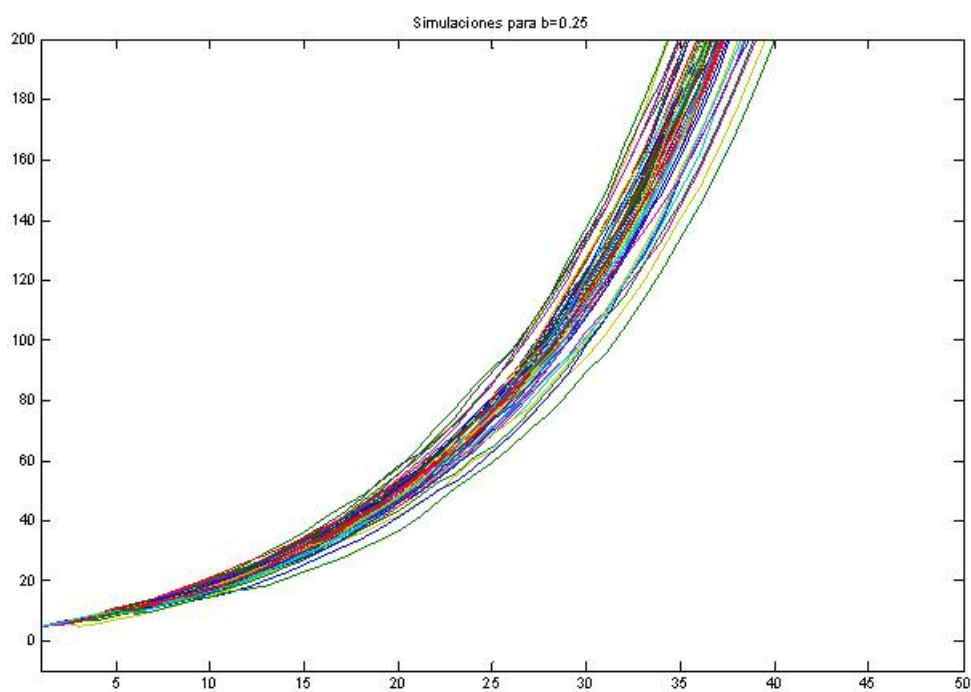


Figura 9: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

Con los datos de la Tabla 3 en la columna correspondiente al nivel de retención $b = 0,75$, junto con la ilustración de la Figura 9, se puede decir que existe ruina en un porcentaje medio antes de 10 años, nótese que $P = 0,525$. De nuevo se nota la influencia de la distribución que modela las reclamaciones.

$c = 1,1$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(1/2, 2)$	$P(\tau \leq 10) = 0$ $E = NaN$ $A = 0\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,0001$ $E = 3$ $A = 0,1\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,026$ $E = 5,44$ $A = 2,9\%$

Tabla 4: Resultados con la Distribución $\Gamma(1/2, 2)$ Figura 10: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

Claramente esta gráfica ilustra, de una manera simple el hecho de la inexistencia de ruina, para el nivel de retención $b = 0,25$

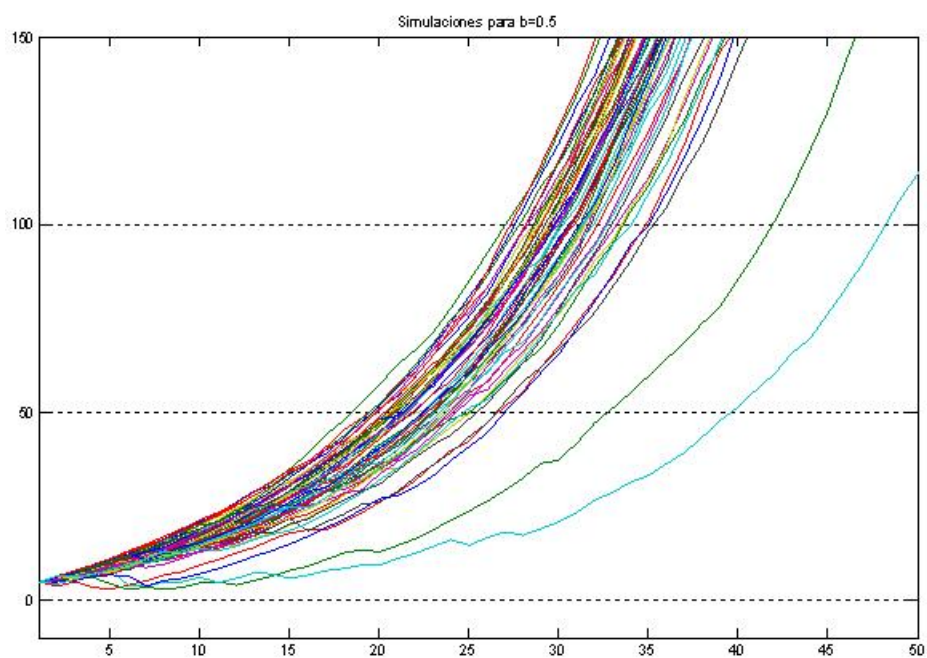


Figura 11: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Claramente esta gráfica ilustra, de una manera simple el hecho de la inexistencia de ruina, para el nivel de retención $b = 0,25$, lo cual se corresponde con los valores obtenidos en la Tabla 4 correspondiente al nivel de retención $b = 0,5$

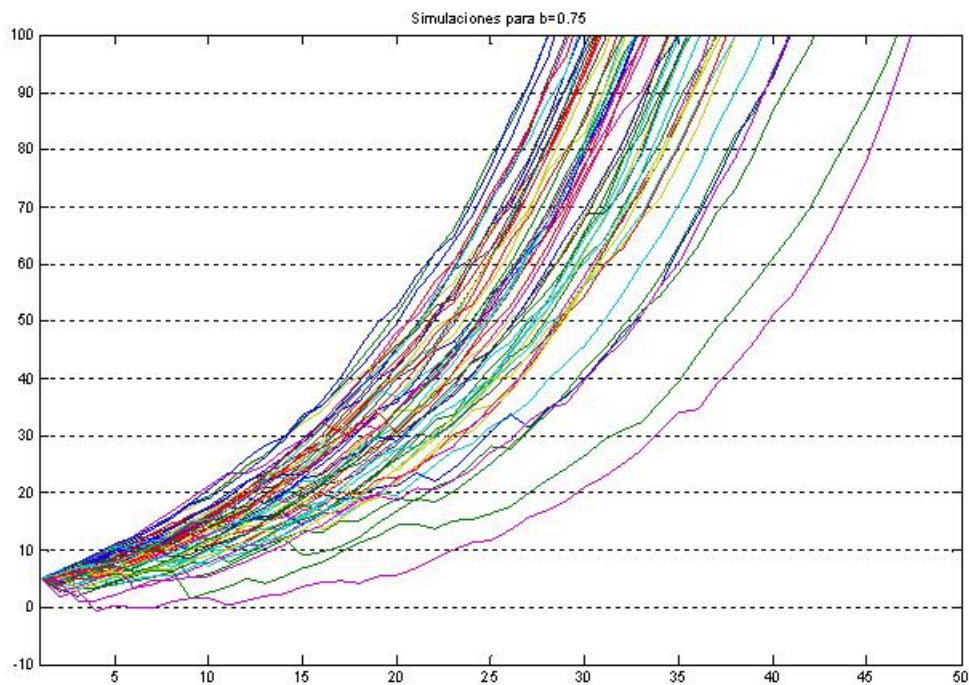


Figura 12: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

Aún cuando se tiene un porcentaje de reaseguro muy bajo ($b = 0,75$), se observa que con esta distribución el proceso está sobreprotegido. En lo que sigue se verá el impacto de cambiar la prima c y se podrán realizar otro tipo de comparaciones de interés.

2.2. Análisis de resultados con $c = 1$ fijo

Las tablas a continuación muestran la **probabilidad de que la ruina ocurra antes del tiempo $\tau = 10$** , $P(\tau \leq 10)$, el **valor promedio del tiempo de las trayectorias donde hay ruina**, $E[\tau|X_\tau < 0]$ y el porcentaje de trayectorias donde hay ruina, A , cambiando la prima a un valor de $c = 1$.

$c = 1$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(1,3)$	$P(\tau \leq 10) = 0,008$ $E = 12,2$ $A = 1,5\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,428$ $E = 12,605$ $A = 81,8\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,8$ $E = 7,0291$ $A = 99,5\%$

Tabla 5: Resultados con la Distribución $\Gamma(1,3)$

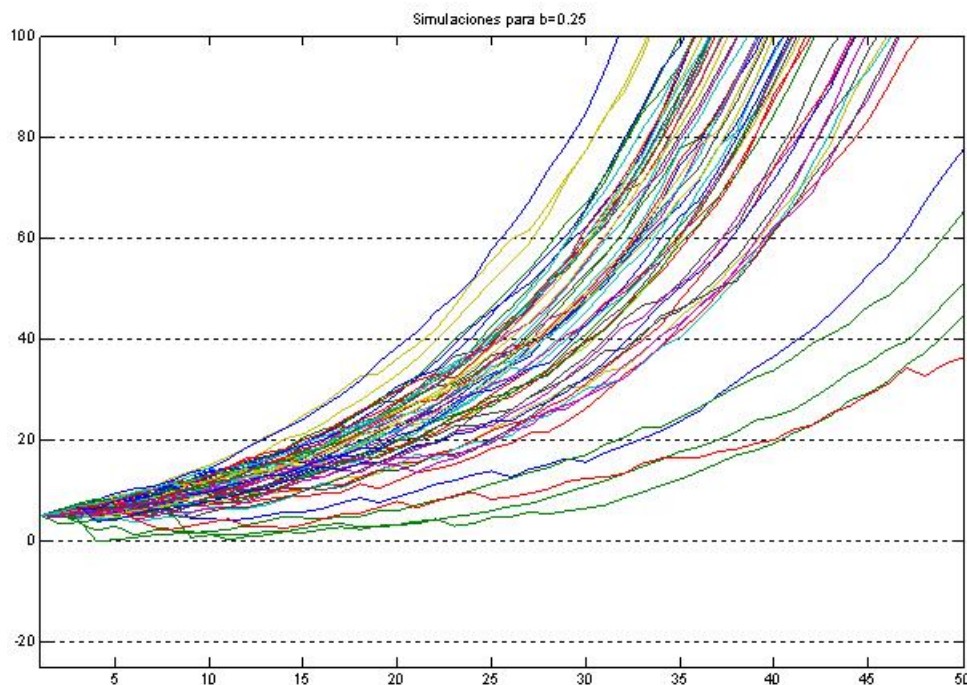


Figura 13: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

Es evidente que en este caso no sucede ruina.

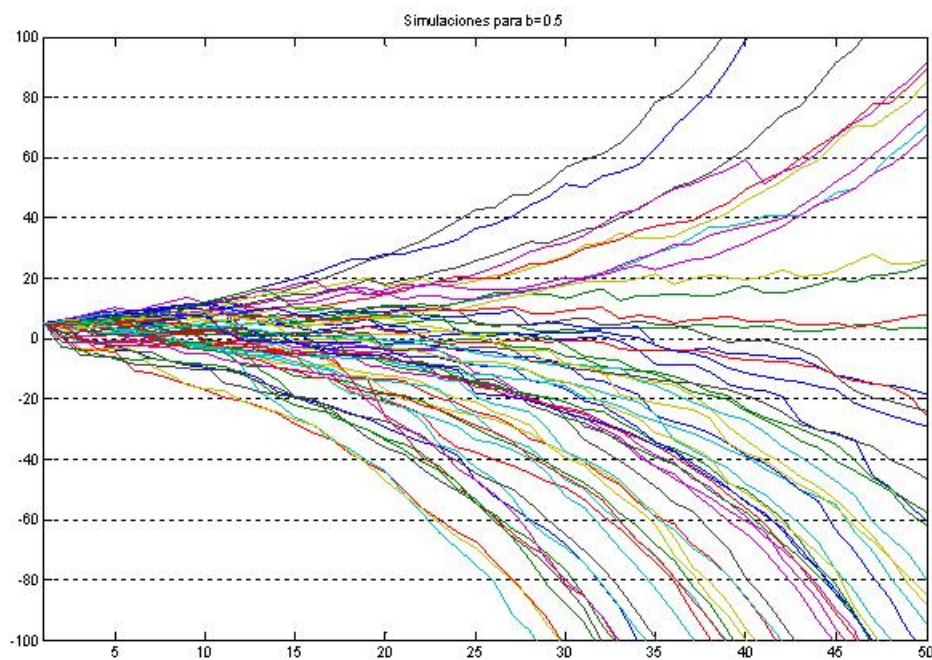


Figura 14: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

Con los datos de la Tabla 5 se puede concluir que la probabilidad de que el proceso se vaya a ruina antes de diez años es moderada, Nótese que a pesar de que la gráfica sugiere un alto porcentaje de trayectorias donde existe ruina, ésta sucede tarde.

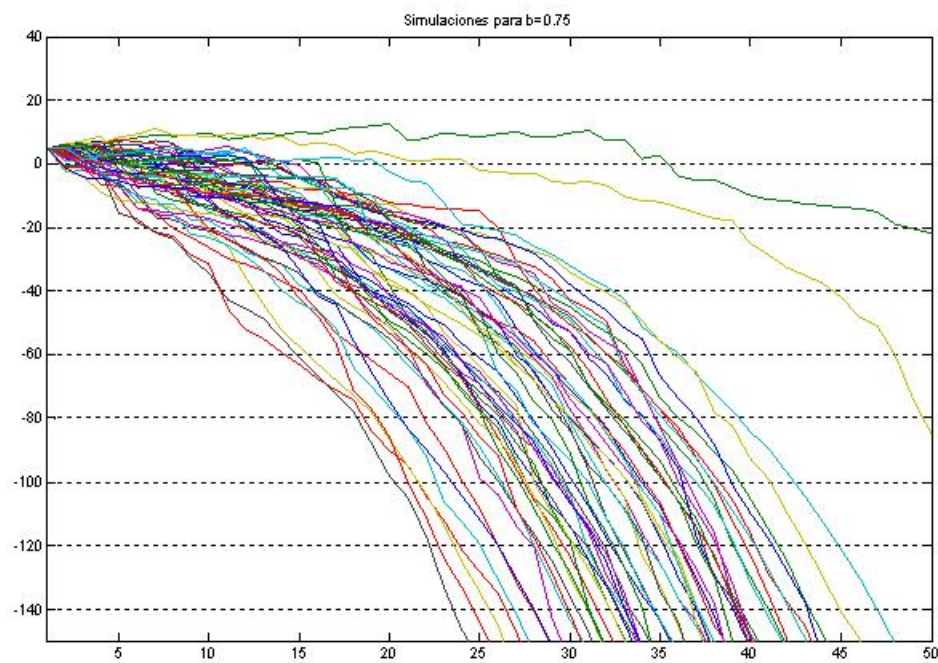


Figura 15: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

La columna correspondiente a $b = 0,75$ de la Tabla 5 sugiere una alta probabilidad de que el proceso se arruine antes de diez años, esto lo refuerza los resultados gráficos de la Figura 15.

$c = 1$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(1, 4)$	$P(\tau \leq 10) = 0,074$ $E = 14,5032$ $A = 15,7\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,723$ $E = 8,45$ $A = 98,8\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,939$ $E = 4,739$ $A = 100\%$

Tabla 6: Resultados con la Distribución $\Gamma(1, 4)$

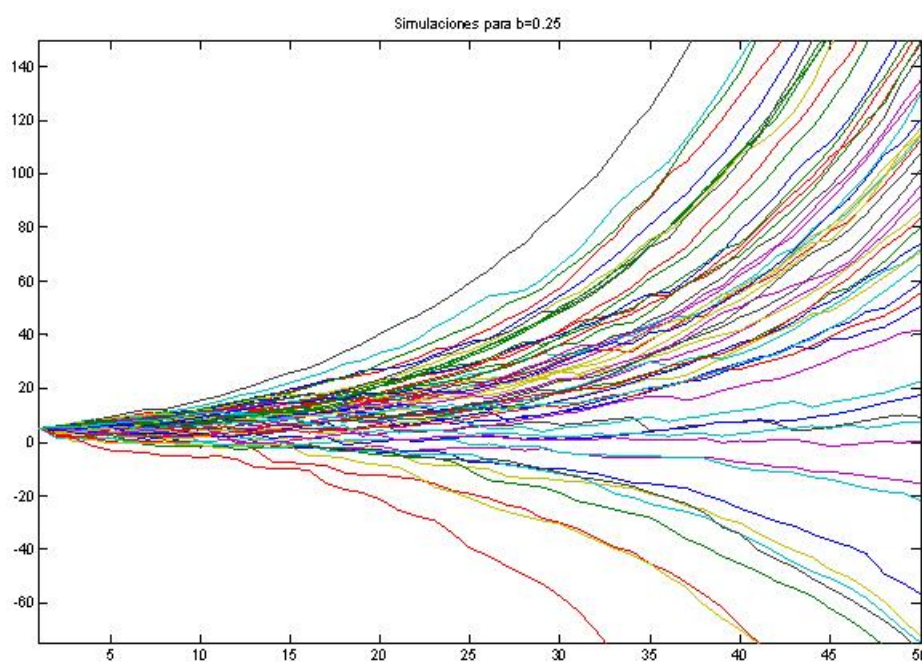


Figura 16: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

La probabilidad de que el proceso se arruine antes de diez años es muy baja, como lo sugiere la Figura 16 anterior, y los resultados de la Tabla 6 para $b = 0,25$

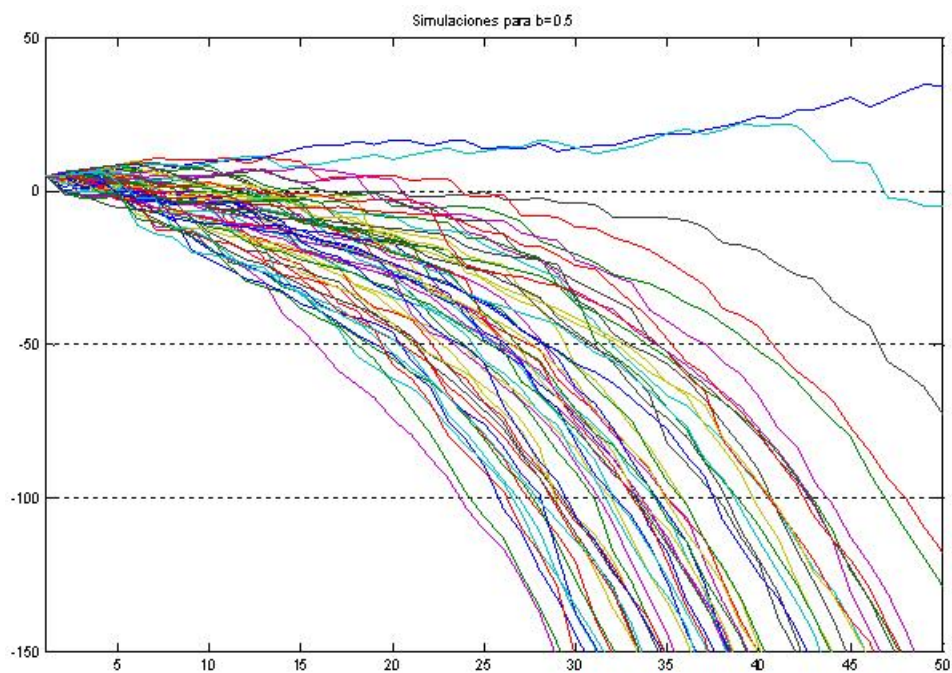


Figura 17: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Los resultados de la Tabla 6 para el nivel de retención $n = 0,5$, junto con la ilustración de la Figura 17, son contundentes en el sentido de que el proceso se arruina antes de diez años.

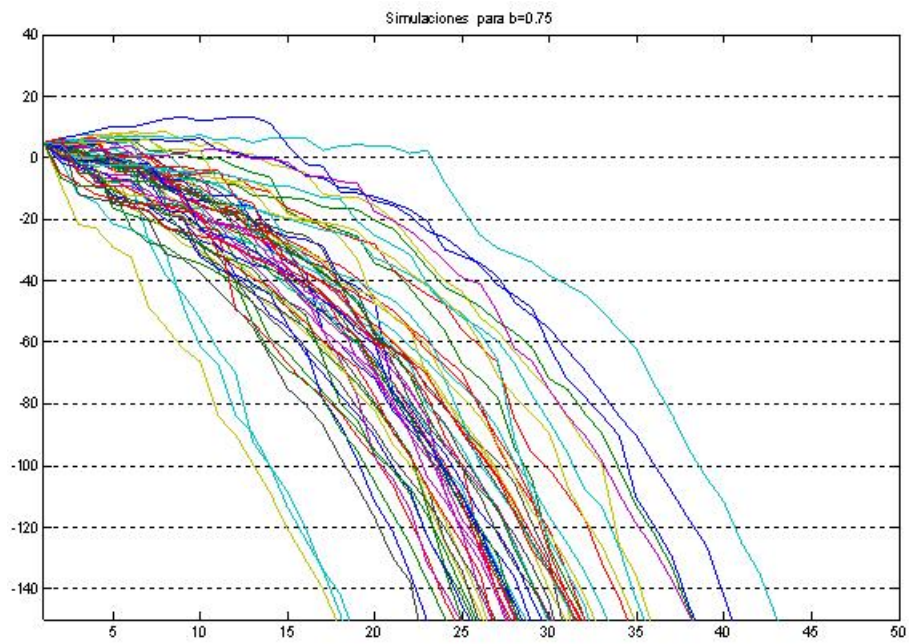


Figura 18: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

Los resultados son aún más contundentes que el caso anterior, hay ruina antes de diez años con una probabilidad alta.

$c = 1$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(7/10, 7/2)$	$P(\tau \leq 10) = 0,002$ $E = 2,5$ $A = 0,2\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,233$ $E = 12,10$ $A = 43,5\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,579$ $E = 10,42$ $A = 89,7\%$

Tabla 7: Resultados con la Distribución $\Gamma(7/10, 7/2)$

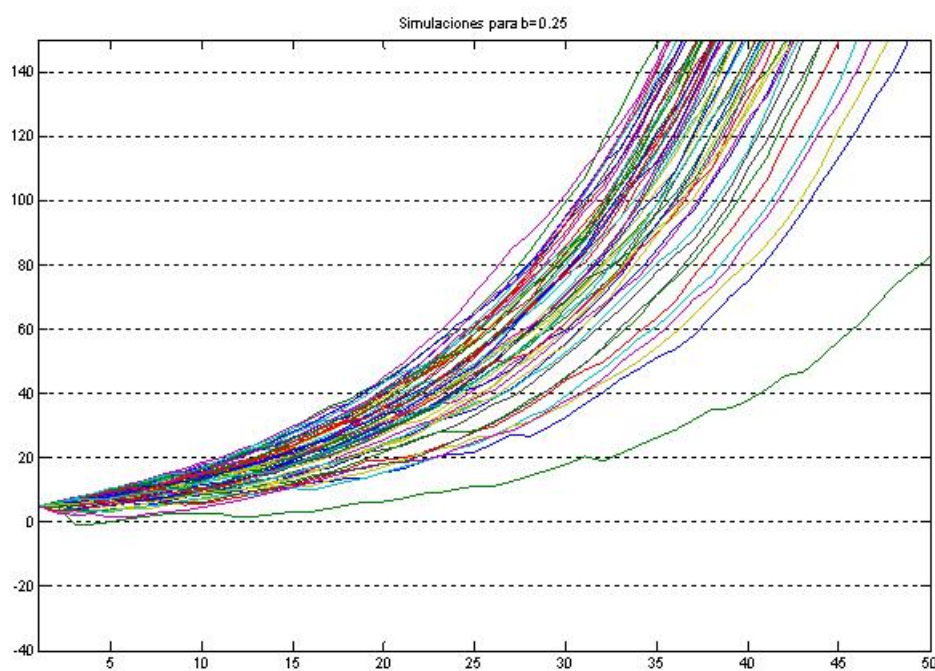


Figura 19: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

Claramente el proceso tiene una probabilidad muy baja de que se arruine, notar que está muy cercana a cero. Además el porcentaje de trayectorias que conducen a ruina es muy baja.

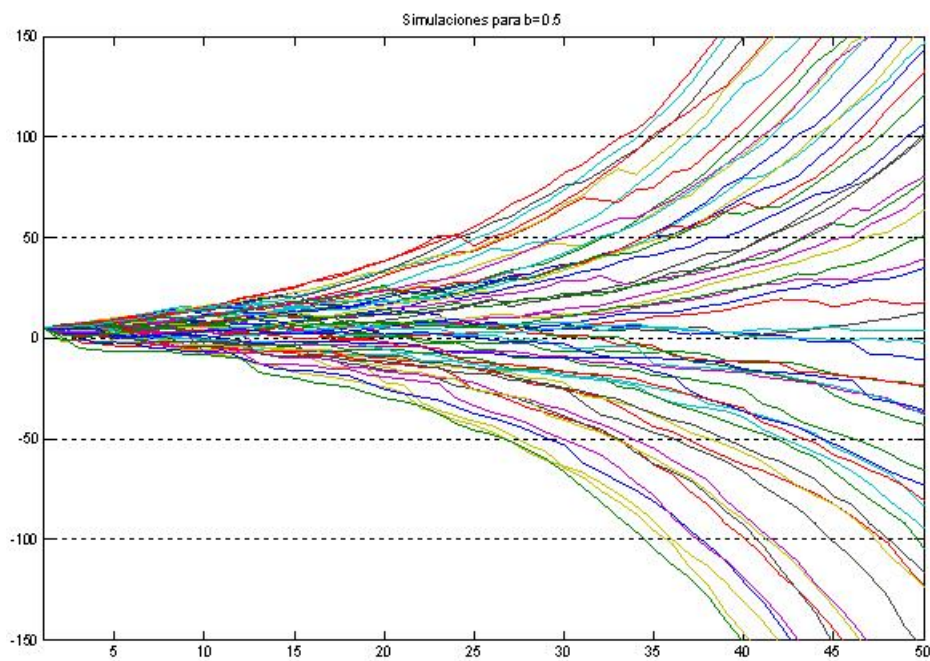


Figura 20: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Este caso requiere especial atención, a pesar que la gráfica nos indica un alto porcentaje de trayectorias que se arruinan, la probabilidad de que esto suceda antes de diez años es aún baja, como lo indica la Tabla 7 en la columna correspondiente a $b = 0,5$

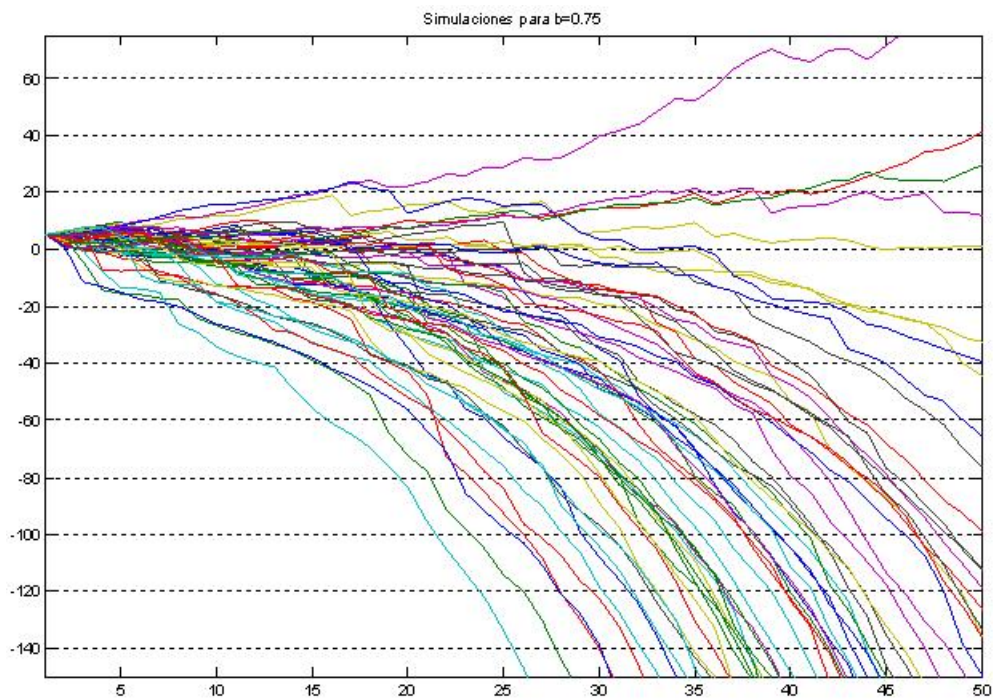
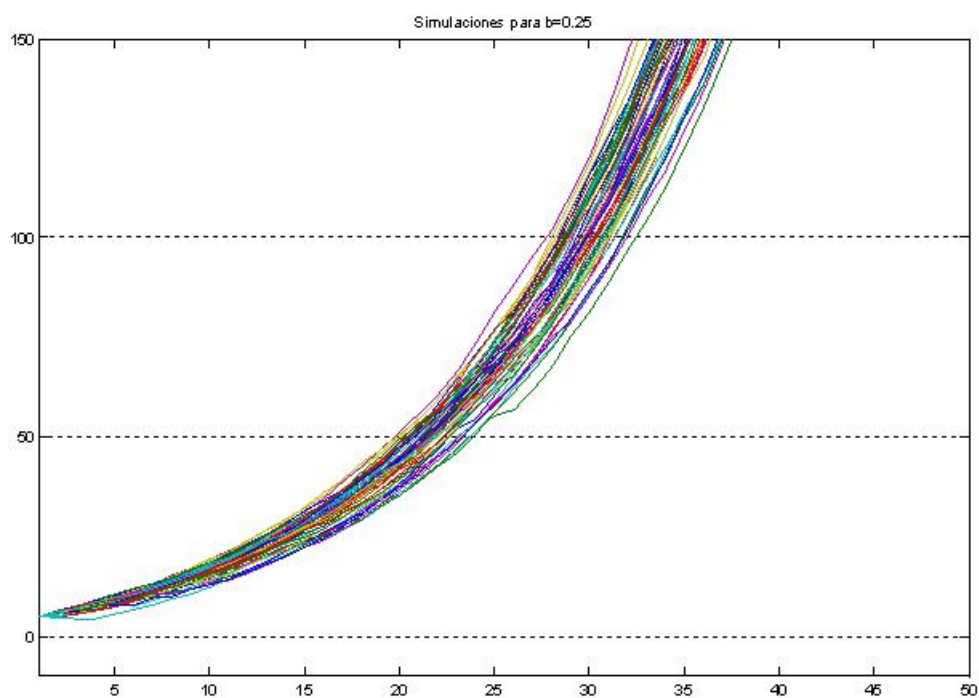


Figura 21: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

De nuevo hay que tener cuidado al ver la gráfica, ya que la probabilidad de que el proceso se arruine antes de diez años es intermedia, además la esperanza es un poco mayor de 10.

$c = 1$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(1/2, 2)$	$P(\tau \leq 10) = 0$ $E = NaN$ $A = 0\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,002$ $E = 5,5$ $A = 0,2\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,027$ $E = 6,12$ $A = 3,2\%$

Tabla 8: Resultados con la Distribución $\Gamma(1/2, 2)$ Figura 22: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

Como se ha venido viendo a lo largo de los análisis previos, para esta Distribución el proceso se muestra muy robusto, a pesar de que se ha variado la prima que se está cobrando, se mantiene siempre en alza.

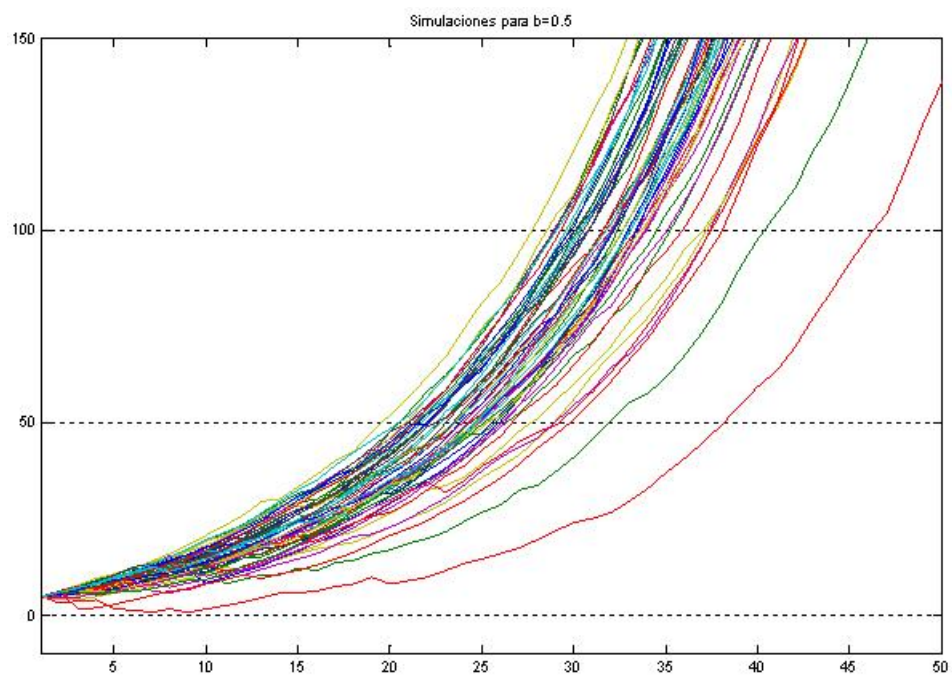


Figura 23: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Nótese los resultados de la Tabla 8, en la columna correspondiente a $b = 0,5$, siguen siendo muy bajos a pesar que el reaseguro es menor que en el caso anterior. De nuevo se observa el peso de la Gamma escogida.

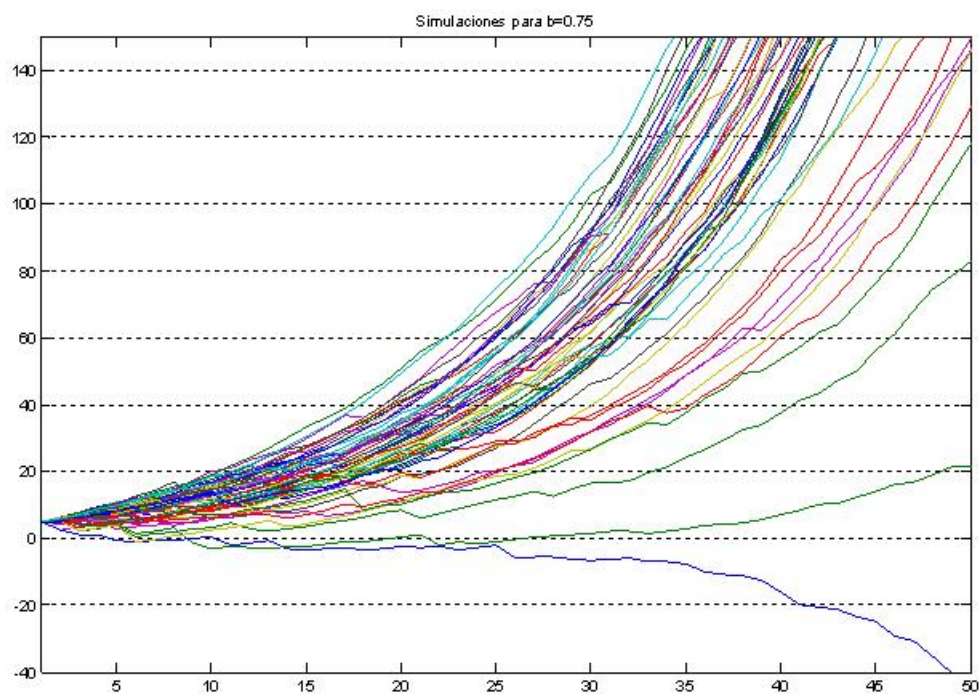


Figura 24: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

Estos resultados para $b = 0,75$ son contundentes, nótese que la cantidad de reaseguro es muy baja, sin embargo el proceso se mantiene en alza, además el porcentaje de trayectorias que conducen a ruina es bajísimo.

2.3. Análisis de resultados con $c = 0,8$ fijo

Las tablas a continuación muestran la **probabilidad de que la ruina ocurra antes del tiempo $\tau = 10$** , $P(\tau \leq 10)$, **el valor promedio del tiempo de las trayectorias donde hay ruina**, $E[\tau|X_\tau < 0]$ y el porcentaje de trayectorias donde hay ruina, A , donde la prima es $c = 0,8$.

$c = 0,8$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(1,3)$	$P(\tau \leq 10) = 0,033$ $E = 18,73$ $A = 12,3\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,588$ $E = 10,70$ $A = 97\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,892$ $E = 5,77$ $A = 100\%$

Tabla 9: Resultados con la Distribución $\Gamma(1,3)$

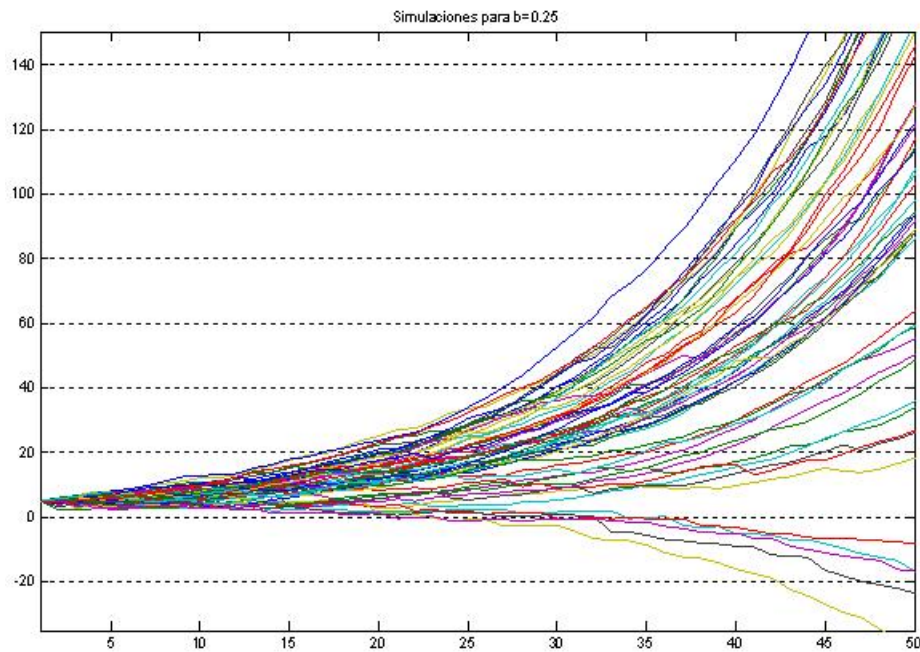


Figura 25: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

Nótese que a pesar que $c = 0,8$, la probabilidad de ruina antes de diez años es baja, en este caso se puede pensar que el reaseguro influye.

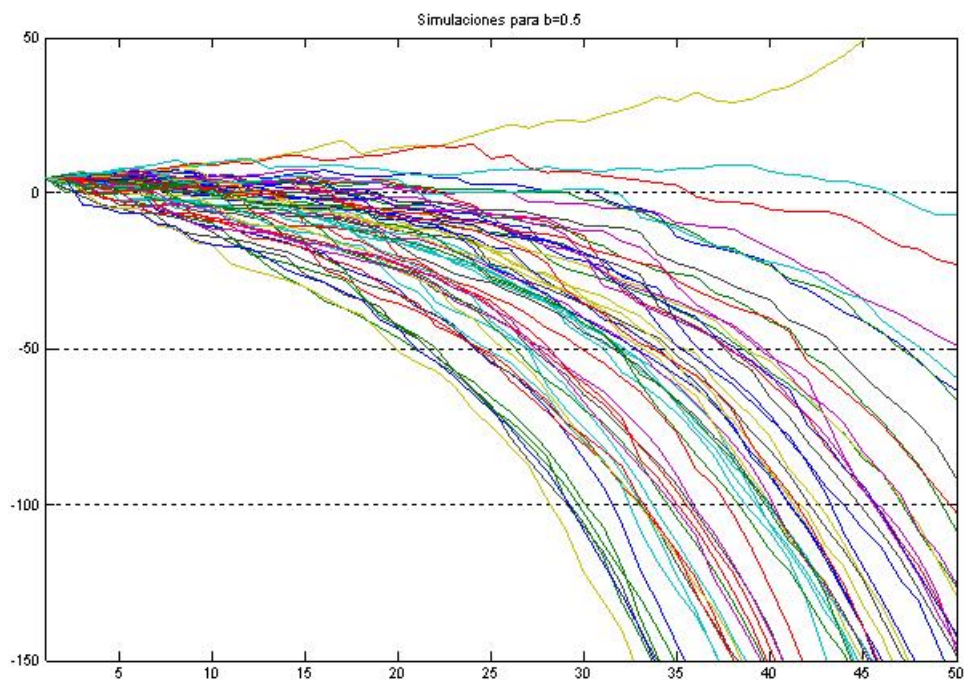


Figura 26: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Se puede visualizar un cambio significativo, con los resultados anteriores, observando la Tabla 9 en la columna correspondiente a $b = 0,5$, se puede concluir que existe una probabilidad un poco alta de ruina antes de diez años. Los resultados gráficos de la Figura 26 confirman dichos resultados.

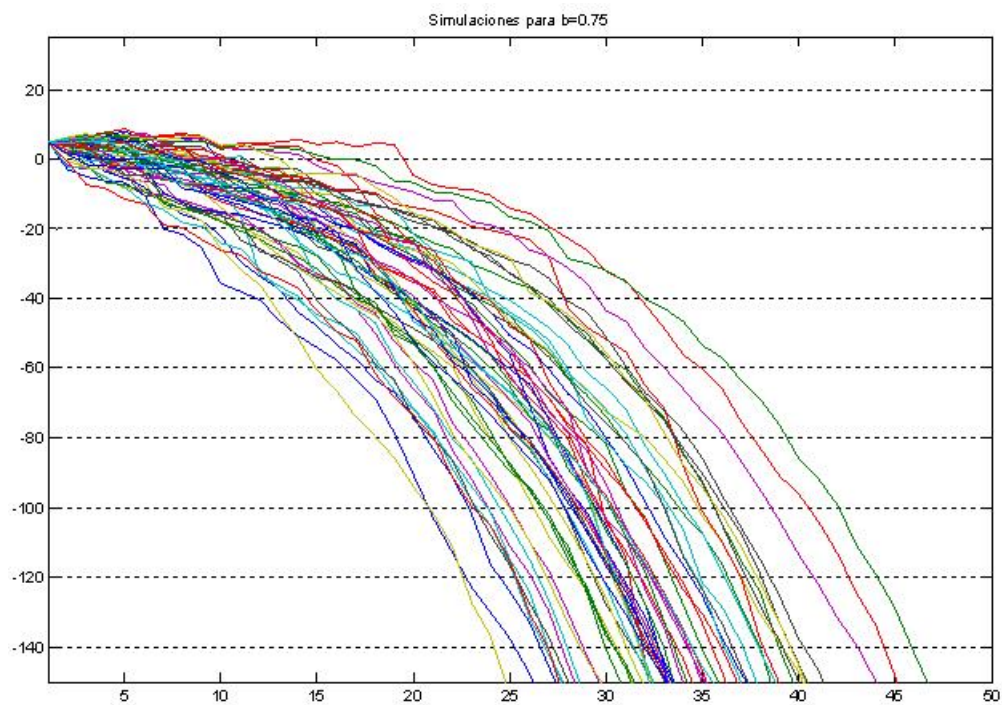
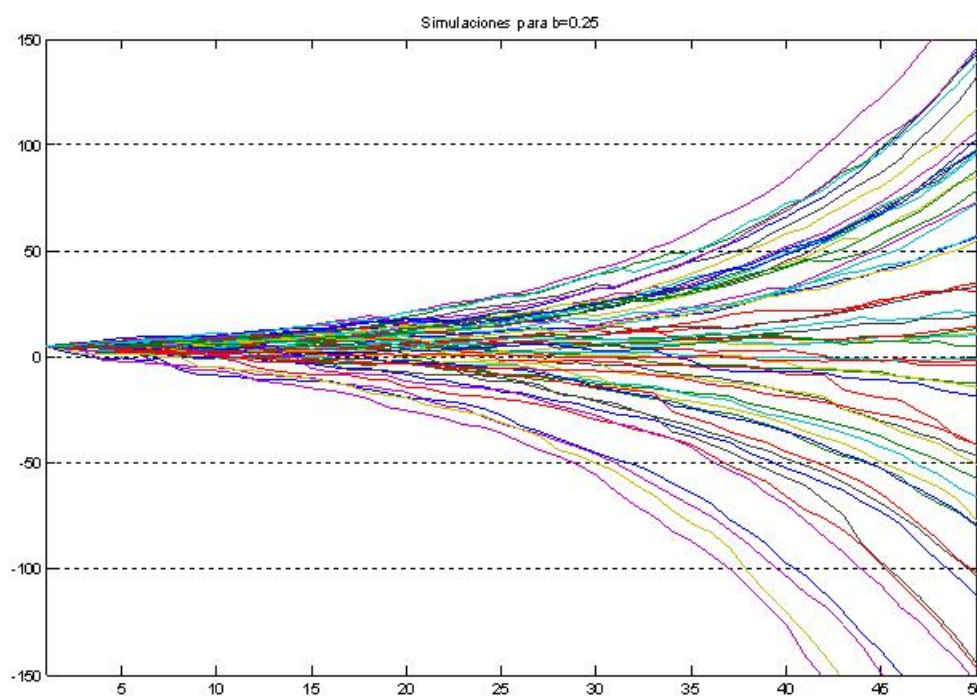


Figura 27: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

Claramente al juzgar por los resultados de la Tabla 9, columna correspondiente al nivel de retención $b = 0,75$, aunado a los resultados gráficos de la Figura 27, se puede concluir que existe una probabilidad alta de ruina antes de diez años.

$c = 0,8$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(1, 4)$	$P(\tau \leq 10) = 0,145$ $E = 17,51$ $A = 47,6 \%$	$P(\tau \leq 10) = 0,833$ $E = 6,7$ $A = 99,8 \%$	$P(\tau \leq 10) = 0,972$ $E = 4,04$ $A = 100 \%$

Tabla 10: Resultados con la Distribución $\Gamma(1, 4)$ Figura 28: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

Los datos de la Tabla 10, para $b = 0,25$ muestran una probabilidad baja de ruina antes de diez años, a pesar que la gráfica y el número A , parece que dicen lo contrario, lo que sucede es que la ruina ocurre después de diez años, como lo dice el número E .

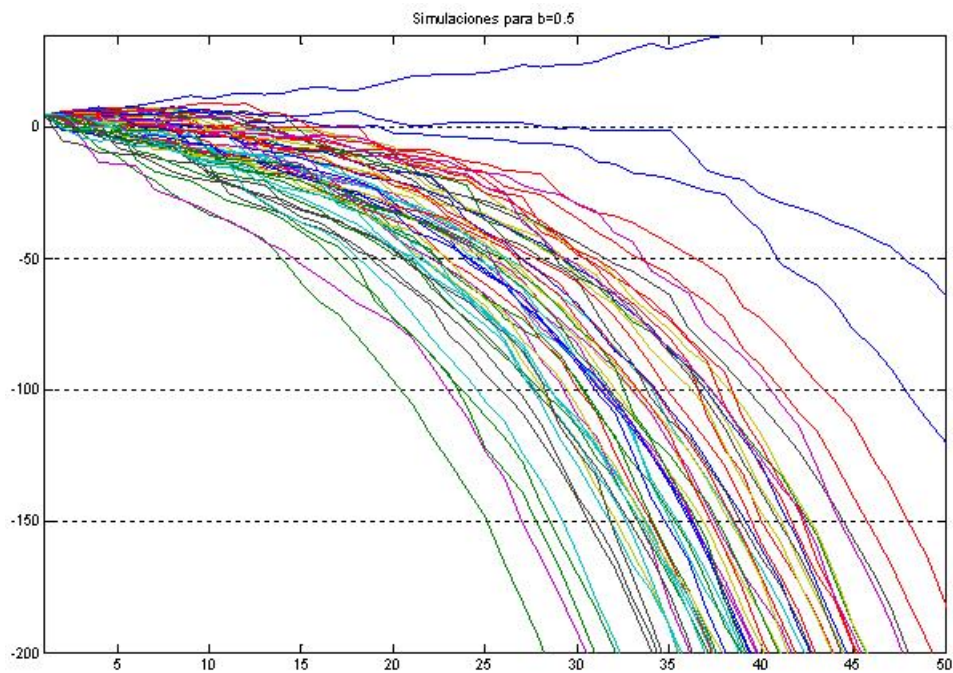


Figura 29: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Con los datos de la Tabla 10 para $b = 0,5$ es evidente que, a pesar que se tiene un reaseguro intermedio, el proceso se arruina rápidamente en menos de diez años. Comparando estos resultados con los obtenidos con la prima $c = 1,1$, se concluye que existe influencia de este parámetro.

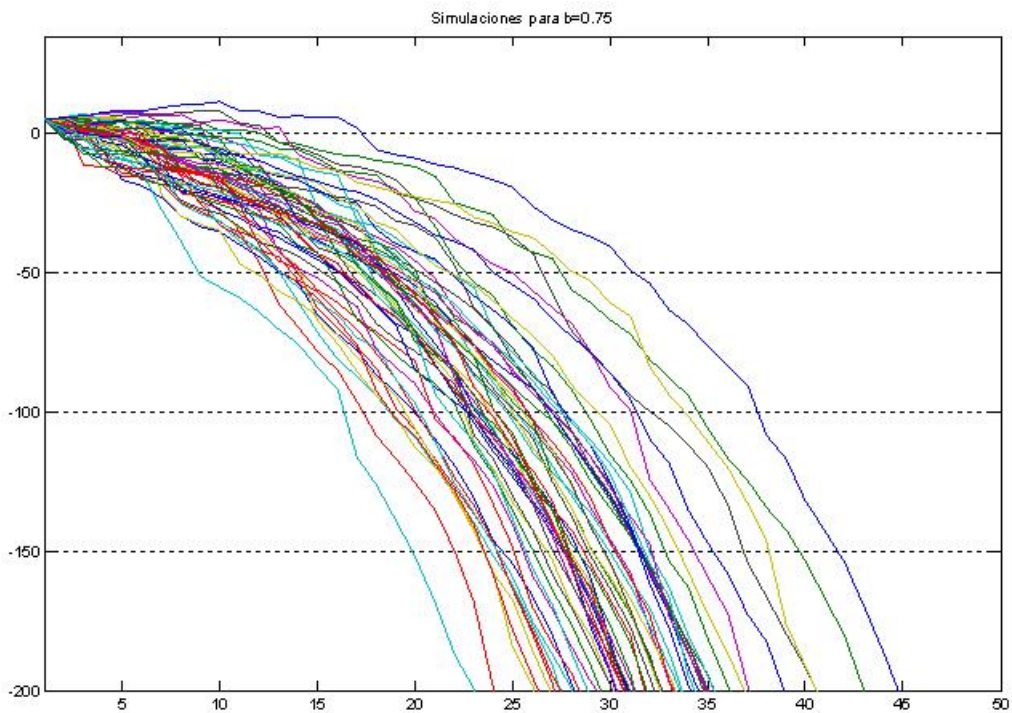
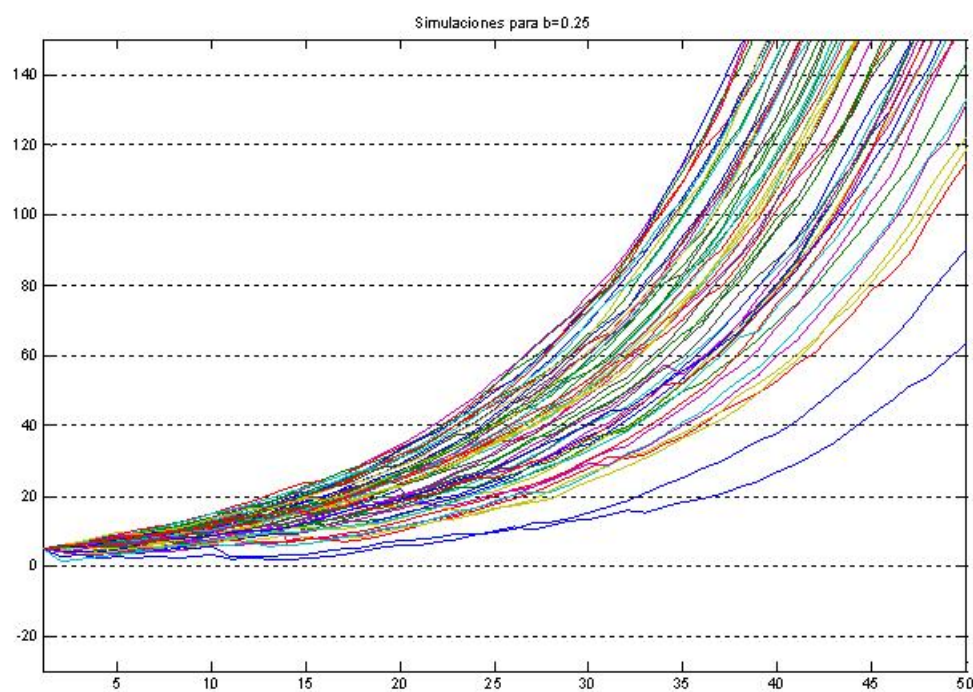


Figura 30: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Observando la Tabla 10 para $b = 0,75$, junto con la Figura 30, no hay lugar a dudas que existe ruina muy pronto con una alta probabilidad. Además en prácticamente el 100 de las trayectorias hay ruina.

$c = 0,8$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(7/10, 7/2)$	$P(\tau \leq 10) = 0,011$ $E = 11,52$ $A = 1,9\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,29$ $E = 14,65$ $A = 62,9\%$	$P(\tau \leq 10) = 0,677$ $E = 8,97$ $A = 97,3\%$

Tabla 11: Resultados con la Distribución $\Gamma(7/10, 7/2)$ Figura 31: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

Observando los resultados de la Tabla 11, para $b = 0,25$, más la gráfica de la Figura 31, es fácil darse cuenta que con un alto reaseguro, a pesar que la prima se ha bajado, el proceso se mantiene creciendo con esta Distribución que modela las reclamaciones.

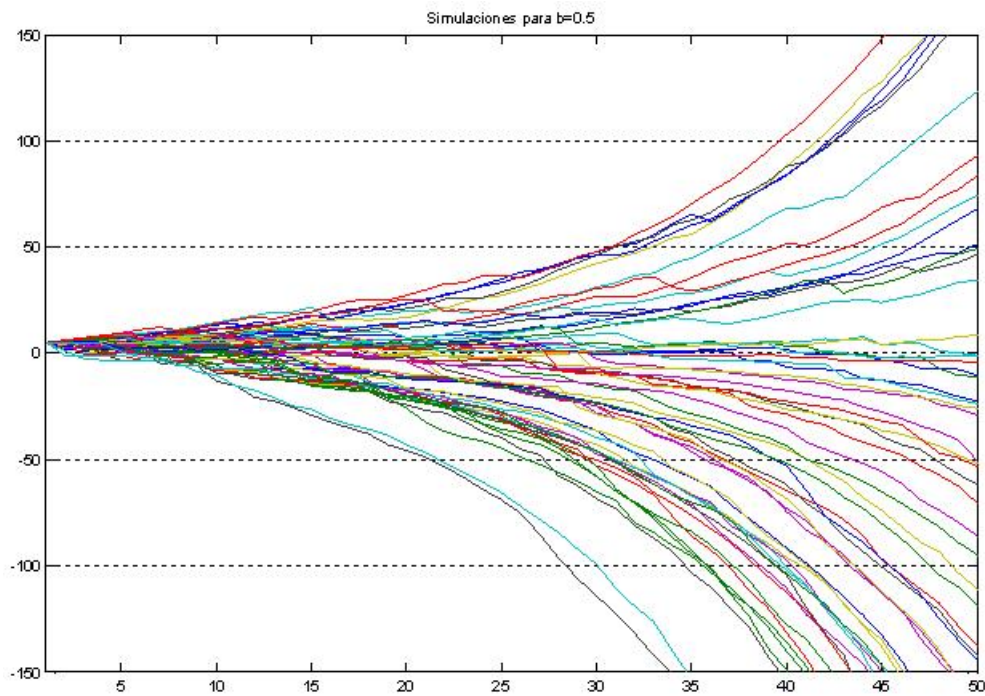


Figura 32: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Compare los resultados para la $\Gamma(1, 4)$ con éstos correspondientes a $b = 0,5$, se nota una alta diferencia, ya que aquí la probabilidad de ruina antes de diez años es baja. En este caso se observa una influencia determinante de la Distribución que modela las reclamaciones.

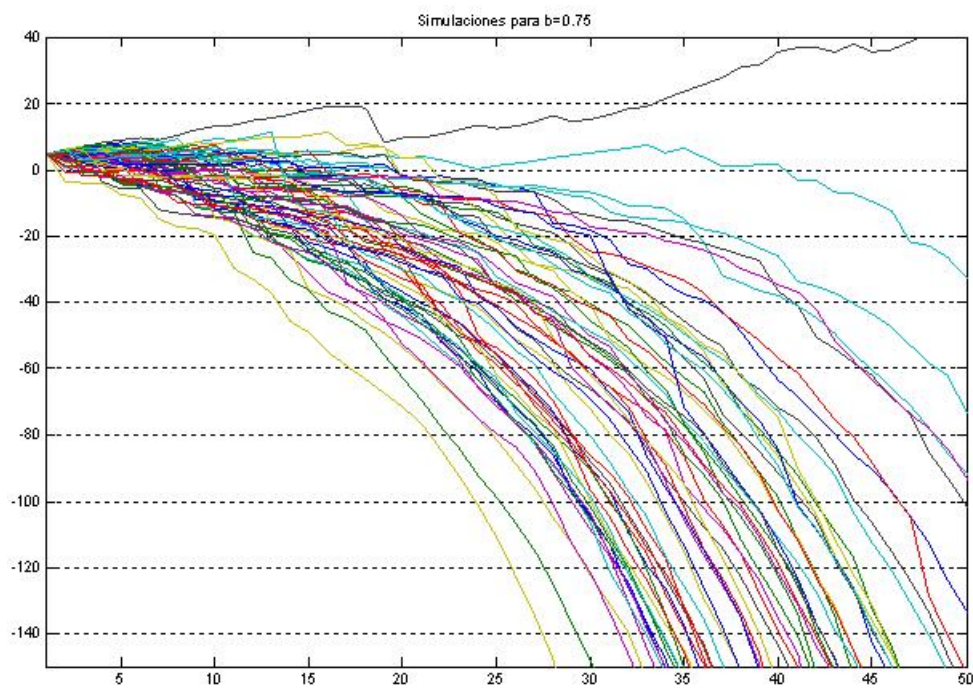
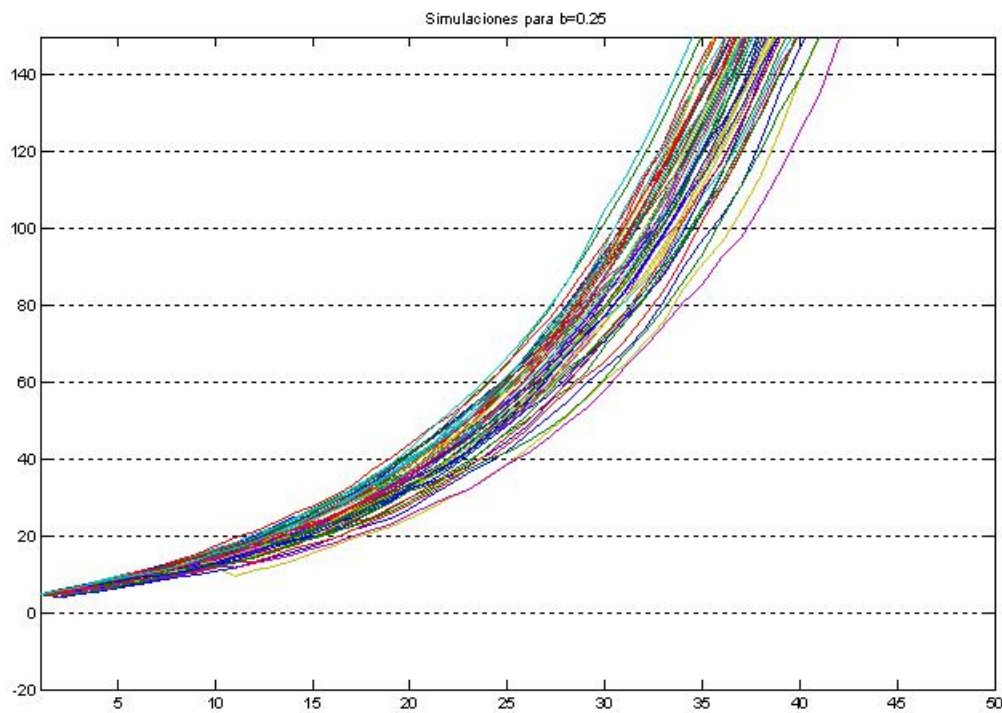


Figura 33: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

Hay que tener cuidado a la hora de interpretar la gráfica de la Figura 33, ya que a pesar que esta sugiere un alto porcentaje de trayectorias que se arruinan, la probabilidad de que la ruina suceda antes de diez años es intermedia, notar que $E = 10,42$, y $A = 89,7$ en la Tabla 11, para $b = 0,75$.

$c = 0,8$	Nivel de retención b		
	0.25	0.5	0.75
$\Gamma(1/2, 2)$	$P(\tau \leq 10) = 0$ $E = NaN$ $A = \%$	$P(\tau \leq 10) = 0,003$ $E = 5$ $A = 0,3 \%$	$P(\tau \leq 10) = 0,042$ $E = 9,4$ $A = 6,2 \%$

Tabla 12: Resultados con la Distribución $\Gamma(1/2, 2)$ Figura 34: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,25$

Como ha sido habitual, con esta Distribución y un alto reaseguro $b = 0,25$ y a pesar que se ha disminuido la prima a $c = 0,8$, no hay ruina como lo dice la Tabla 12 junto con la Figura 34.

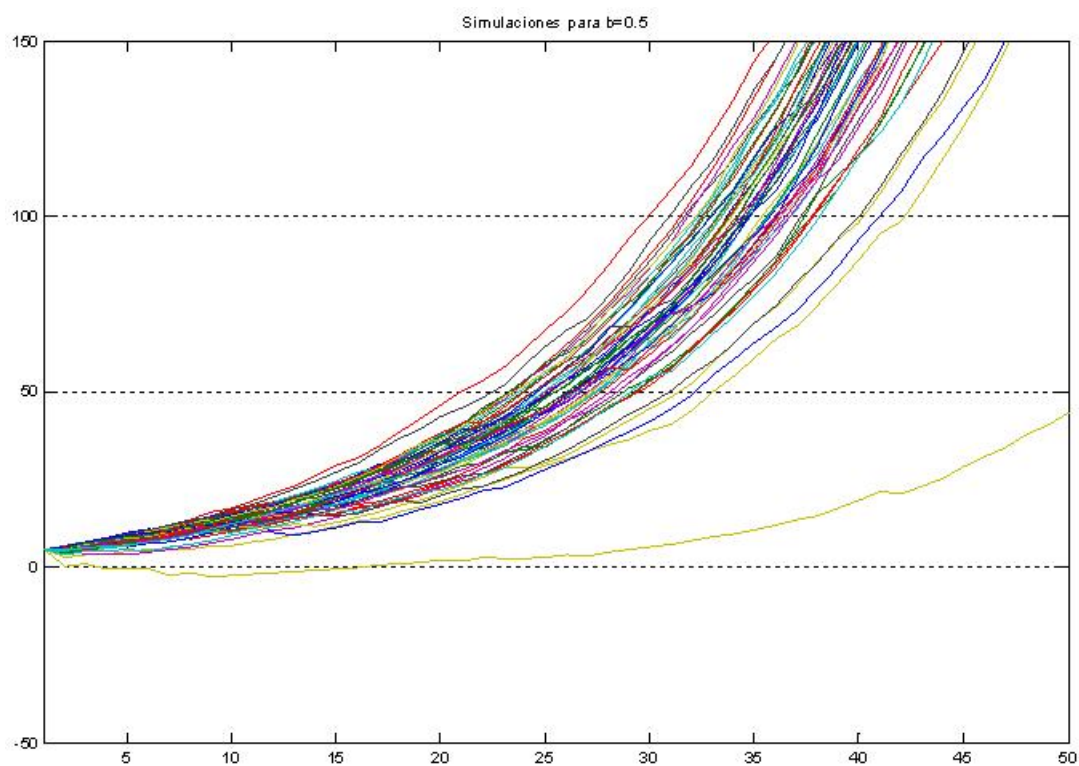


Figura 35: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,5$

Tampoco se observa ruina para este nivel de retención $b = 0,5$, nótese que el porcentaje de trayectorias que se arruinan A es bajísimo.

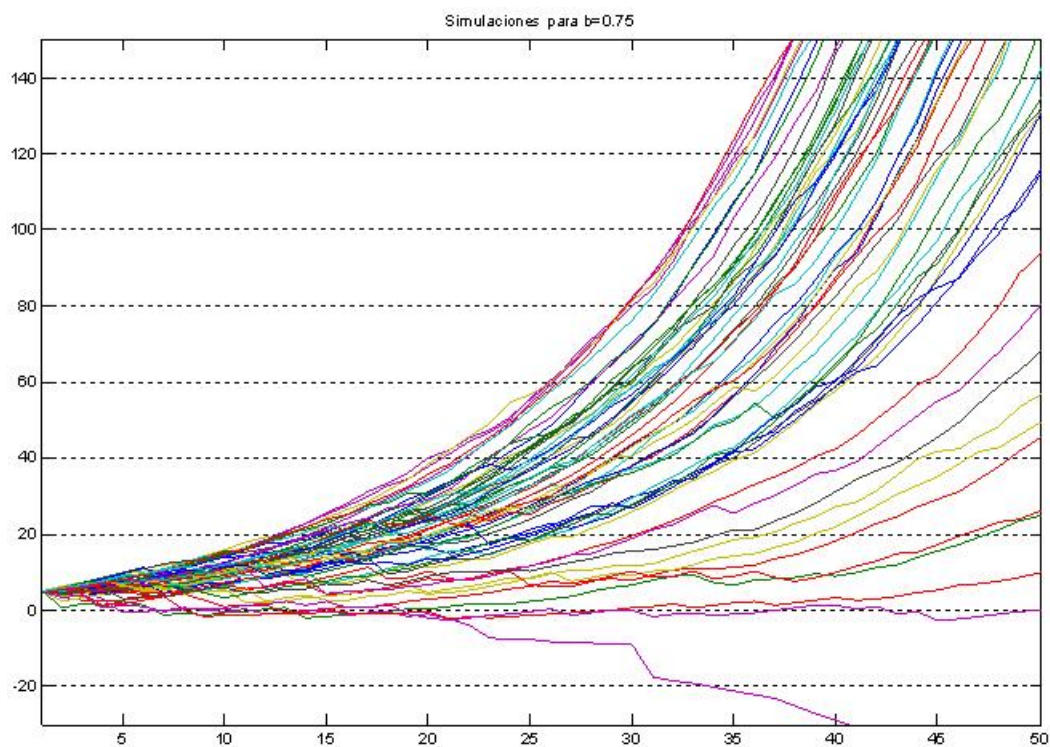


Figura 36: Gráfica para el nivel de retención $b = 0,75$

Leyendo los resultados de la Tabla 12, par el nivel de retención $b = 0,75$, u la gráfica de la Figura 36, se observa un leve aumento del porcentaje de trayectorias que llevan a ruina, sin embargo, la probabilidad que la ruina suceda antes de diez años sigue siendo bajísima.

3. CONCLUSIONES

1. Se van a resumir los resultados de la simulación obtenidos, evaluando probabilidades estimadas de ruina antes de diez años superiores o iguales a 0,5

$c = 1,1$	Nivel de retención b		
	0,25	0,5	0,75
$\Gamma(1, 3)$	No	No	Si
$\Gamma(1, 4)$	No	Si	Si
$\Gamma(7/10, 7/2)$	No	No	Si
$\Gamma(1/2, 2)$	No	No	No

Tabla 13: Resumen de resultados para $c = 1,1$

$c = 1$	Nivel de retención b		
	0,25	0,5	0,75
$\Gamma(1, 3)$	No	No	Si
$\Gamma(1, 4)$	No	Si	Si
$\Gamma(7/10, 7/2)$	No	No	Si
$\Gamma(1/2, 2)$	No	No	No

Tabla 14: Resumen de resultados para $c = 1$

$c = 0,8$	Nivel de retención b		
	0,25	0,5	0,75
$\Gamma(1, 3)$	No	Si	Si
$\Gamma(1, 4)$	No	Si	Si
$\Gamma(7/10, 7/2)$	No	No	Si
$\Gamma(1/2, 2)$	No	No	No

Tabla 15: Resumen de resultados para $c = 0,8$

A partir de las tablas anteriores, se puede concluir que la probabilidad de ruina crece con b y decrece con c , como era de esperar, siendo no claramente dependiente de la distribución $NWUC$ utilizada, aquí representada por distribuciones Gamma, obteniendo que para $\Gamma(1/2, 2)$, el porcentaje de trayectorias que llevan a ruina es despreciable,

2. En las siguientes tablas se evalúan los promedios de tiempo hasta la ruina, E , para las trayectorias que presentan ruina antes del horizonte $n = 50$ y una probabilidad estimada de ruina antes de diez años superior a 0,5. A partir de las tablas 13, 14 y 15 es evidente que basta considerar los niveles de retención $b = 0,5$ y $b = 0,75$, para todas las distribuciones Gamma utilizadas, excepto la $\Gamma(1/2, 2)$:

$c = 1,1$	Nivel de retención b	
	0,5	0,75
$\Gamma(1, 3)$	-	8,053
$\Gamma(1, 4)$	9,33	5,07
$\Gamma(7/10, 7/2)$	-	10,04

Tabla 16: Promedios de tiempo, E , para $c = 1,1$

$c = 1$	Nivel de retención b	
	0,5	0,75
$\Gamma(1, 3)$	-	7,029
$\Gamma(1, 4)$	8,45	4,739
$\Gamma(7/10, 7/2)$	-	10,42

Tabla 17: Promedios de tiempo, E , para $c = 1$

$c = 0,8$	Nivel de retención b	
	0,5	0,75
$\Gamma(1, 3)$	10,7	5,77
$\Gamma(1, 4)$	6,7	4,04
$\Gamma(7/10, 7/2)$	-	8,97

Tabla 18: Promedios de tiempo, E , para $c = 0,8$

En términos generales se puede decir que E decrece con b , es decir, el tiempo hasta la ruina se acelera con el incremento en la prima por reaseguro.

Por otro lado los promedios de tiempo hasta la ruina en función de c son:

c	\bar{E}
$c = 1,1$	8,12
$c = 1$	7,65
$c = 0,8$	7,23

Tabla 19: Tiempos promedios en función de c

Lo cual sugiere que al reducirse la prima el tiempo promedio también decrece, lo cual parece razonable.

Por último, mirando el tipo de distribución de las reclamaciones utilizadas en las Tablas 16, 17 y 18 y en concreto sus medias, que son $1/3$, $1/4$ y $1/5$, respectivamente, (recordar que si $Y \sim \Gamma(p, a)$, $E[Y] = p/a$) se obtiene:

$\Gamma(p, a)$	\bar{E}
$E[\Gamma(1, 3)] = 1/3$	6,3
$E[\Gamma(1, 4)] = 1/4$	7,66
$E[\Gamma(7/10, 7/2)] = 1/5$	9,81

Tabla 20: Tiempos promedios en función de c

De aquí, la media de tiempo hasta la ruina se incrementa si el promedio de la cuantía de las reclamaciones decrece, lo cual es un resultado razonable, acorde con los supuestos del modelo (1) simulado,

- De todo lo anterior se puede concluir, de manera general, que el procedimiento de simulación implementado puede ayudar a visualizar y estimar numéricamente los parámetros probabilidad hasta la ruina, y los porcentajes y los tiempos medios hasta la ruina para la distribución condicionada a la ruina segura,
- Nótese que a pesar que la esperanza para las distribuciones $\Gamma(1/2, 2)$ y $\Gamma(1, 4)$ es igual, se observa un comportamiento sustancialmente diferente del modelo (1) para cada una de dichas distribuciones, de donde,

se observa que los parámetros de la distribución inciden en el comportamiento del modelo (1),

5. Al ajustar un modelo, es importante buscar el equilibrio entre la prima c y el nivel de retención b ,
6. Se debe tener en cuenta, que a la hora de decidir la distribución que modela las reclamaciones debe hacerse un estudio de mercado de los posibles clientes potenciales de la aseguradora, y ver que tipo de distribución se les puede ajustar.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Grandell, J. (1991). Aspects of Risk Theory, Springer-Verlag, New York.

[2] Schmidli, H. (2008). Stochastic Control in Insurance, Springer-Verlag, London.

[3] Follmer, H. And Schied, A. (2004). Stochastic Finance, Walter de Gruyter, Berlín-New York.

[4] Diasparra, M. And Romera, R. (2009). Bounds for the ruin probability of a discrete-time risk process, Journal of Applied Probability, 2009, Vol. 46, N° 1, pp. 99-112.

[5] Castañeda Leyva, N., S. Rodríguez Narciso y L. R. Pérez Hernández (2008), Métodos Estocásticos en Finanzas I, Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones, Sociedad Matemática Mexicana, 39, 45-78.

[6] Bosq, D. And Nguyen, H. (1996). A Cours in Stochastic Processes, Kluwer Academic Publishers, Norwell, USA.