UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE ORIENTE

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

SECCIÓN DE MATEMÁTICA

TESIS:

CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS GEOMETRICAS CON REGLA Y COMPÁS DESDE UN PUNTO DE VISTA ALGEBRAICO.

PRESENTADO POR:

SONIA HAYDEÉ AGUILAR TORRES.
JOSÉ ABRAHAM HERNÁNDEZ ACOSTA.
JOSÉ EVER SÁNCHEZ LUNA.

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

MARZO DE 2013

SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

SECCIÓN DE MATEMÁTICA

TEMA:

CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS GEOMETRICAS CON REGLA Y COMPÁS DESDE UN PUNTO DE VISTA ALGEBRAICO.

PRESENTADO POR:

SONIA HAYDEÉ AGUILAR TORRES.
JOSÉ ABRAHAM HERNÁNDEZ ACOSTA.
JOSÉ EVER SÁNCHEZ LUNA.

ASESOR DIRECTOR:

MSC. MARCELINO MEJÍA.

ASESOR METODOLÓGICO:

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ.

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

CIUDAD UNIVERSITARIA DE ORIENTE, MARZO DE 2013.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR.

RECTOR: ING. MARIO ROBERTO NIETO LOVO.

VICE-RECTORA ACADEMICA: MAESTRA ANA MARÍA GLOWER

SECRETARIA GENERAL: DRA. ANA LETICIA DE AMAYA

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL.

DECANO: LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ.

VICE-DECANO: LIC. CARLOS ALEXANDER DIAZ.

SECRETARIO: LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNÁNDEZ.

ADMINISTRADOR ACADEMICO: LIC. EDWIND JEOVANNY TREJOS CABRERA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA.

JEFE: M.EST. JOSÉ ENRY GARCÍA.

SECCIÓN DE MATEMÁTICA.

COORDINADOR: ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA.

<u>TRABAJO DE GRADUACION APROBADO POR:</u>

LIC. ULISES LIZAMA VIGIL.

Coordinador de Procesos de Graduación.

Depto. Ciencias Naturales y Matemática.

MSC. MARCELINO MEJÍA.

Asesor Director.

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ.

Asesor Metodológico.

AGRADECIMIENTOS.

A **Dios** por guiar mis pasos y estar conmigo en cada momento, brindándome sabiduría para culminar mi carrera.

A mis **Padres** por enseñarme a perseverar ante las adversidades, por sus consejos, su apoyo constante y su amor incondicional en todo momento para lograr mis objetivos.

A mis **Hermanos** Karen Elizabeth Aguilar Torres y Miguel Ángel Aguilar Torres por apoyarme en este camino.

A mis **familiares y amigos** por demostrarme su apoyo incondicional en todo momento.

A nuestros Asesores **Licda. Sonia del Carmen Martínez de López** y **MSc. Marcelino Mejía** por haber contribuido su experiencia, conocimiento y dedicación para poder finalizar con éxito nuestro trabajo de tesis.

A todos los **maestros** que contribuyeron a mi formación profesional con sus conocimientos y sus consejos durante toda mi carrera.

Sonia Haydeé Aguilar Torres.

A Dios nuestro padre celestial que ilumina mi camino por estar conmigo siempre dándome fortaleza y razonamiento sobretodo fe en este proceso de mi formación como profesional.

A mi madre Ana María Acosta: Le agradezco infinitamente el esfuerzo y sacrificio que ha hecho para regalarme este tesoro que es mi formación como un profesional, gracias por su apoyo, comprensión incondicional. Ya que debido a ella en este momento me encuentro finalizando mi formación como Licenciado en matemática.

A mi abuela Elena Haydeé Acosta: Quien siempre se esforzó por instruirme en todos los ámbitos de mi vida espiritual, moral y educativa, le agradezco por su esfuerzo brindado, y por guiarme por un buen camino haciéndome un hombre de bien.

Al Docente Marcelino Mejía: Por dirigir nuestro trabajo de grado, por ser un excelente guía y una de las personas que más admiro por su inteligencia, su responsabilidad, su disponibilidad para el trabajo y por ser, no solo asesor si no que un gran amigo, quien siempre me apoyo.

A nuestra asesora Sonia del Carmen Martínez: Por su generosidad al brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad y experiencia educativa por su confianza, amistad y comprensión fundamentales para la realización de este trabajo. Y a los docentes quienes contribuyeron en mi formación académica Lic. Pedro Flores, Lic. Karla Mejía, Lic. Sulema Vásquez, Lic. Fredy Vásquez, Lic. Enry García, Lic. María del Transito Gutiérrez, Lic. Rolando Montesinos, Lic. Jorge Martínez, Lic. Oscar Campos, Lic. Antonio Hernández.

A mi novia Genit Elizabeth Alvarenga Fuentes: Por estar siempre apoyándome y por su cariño incondicional. Y **a mis amigos** con quienes compartí gratos momentos de felicidad y tristeza, por apoyarme a culminar mi objetivo, considero su amistad como valiosa y agradezco cada detalle que tuvieron para mi persona.

José Abraham Hernández Acosta

A Dios Todopoderoso, por tomarme de la mano y por haberme permitido vencer todos los obstáculos que se me presentaron en el transcurso de mi formación académica y por la oportunidad que me ha dado de alcanzar un peldaño más en la vida, culminando mi carrera profesional, gracias Dios.

A mi familia: por apoyarme y estar presentes en el proceso de mi formación profesional.

A nuestros Asesores **Lic. Marcelino Mejía** y **Licda. Sonia del Carmen Martínez de López,** por haber aceptado colaborar con su experiencia y dedicación para lograr terminar con éxito nuestro trabajo de tesis.

Al **Consejo de Becas Estudiantiles de la Universidad de El Salvador,** por los medios económicos que me han aportado durante mi carrera.

A mis amigos: con quienes compartí gratos momentos de felicidad y tristeza, por apoyarme a culminar mi objetivo, considero su amistad como valiosa y agradezco cada detalle que tuvieron para mi persona

A mis compañeros de tesis Sonia Haydee Aguilar Torres y José Abraham Hernández, con quienes compartí momentos muy difíciles y tensos durante el período de realización del proyecto y hoy compartimos la alegría de culminarlo, gracias por su amistad y compañerismo.

José Ever Sánchez Luna

ÍNDICE DE CONTENIDOS.

Breve descripción de la investigación……………………………………...……...…...i

Introducción……………………………………………………………….……….iii

Nota Histórica…………………………………………….....……………….….iv

Justificación………………………………………………………….…….…..x

Objetivos……………………………………………………………………...xi

CAPÍTULO I: ELEMENTOS INTRODUCTORIOS.

Sección I: Preliminares Algebraicos.

1.1.1 Grupo……………………………………………...…………..…..1

1.1.2 Sub-Grupo…………………………………….…….……..…..2

1.1.3 Anillos………………………………………….…...……….....2

1.1.4 Sub-Anillo………………………………………….....................4

1.1.5 Homomorfismo, Isomorfismo, Automorfismo y Endomorfismo de grupos………………..……………………………………………...4

1.1.6 Anillos de Polinomios…………………..………………………….….5

1.1.7 Polinomios sobre los Racionales………………..……………...………...8

1.1.8 Campos……………………………………………………...……9

1.1.9 Extensiones de Campos……………………………………...............10

1.1.10 Grupo Cíclico………………………………......................……12

1.1.11 Grupo de Galois…………………………………………………....12

1.1.12 Polinomios Ciclotómicos……………………………………...….13

1.1.13 Teorema de Fermat……………………………………………..………..15

1.1.14 Phi un número Trascendental…….…………………………..………....16

Sección II: Preliminares Geométricos.

1.2.1 El Punto…………………………………………….…..……………..…17

1.2.2 La Recta…………………………………………….……………...…17

1.2.3 Plano Cartesiano…………………………….……………………..…21

1.2.4 Ángulos…………………………………………….…………………...…24

1.2.5 Los polígonos…………………………………….……………….…….29

1.2.6 El círculo………………………………………..………..…….….…34

1.2.7 El Triángulo……………………………………..……….………..…37

1.2.8 Razones Trigonométricas…………………………….…………...……41

Sección III: Construcciones Básicas.

1.3.1 Construcción de un segmento de recta igual a otro dado………….….…..42

1.3.2 Construcción del punto medio de un segmento…………………...…….43

1.3.3 Hallar un punto equidistante de los extremos de una recta dada…..……..45

1.3.4 Construir un punto simétrico al punto C dado, con respecto al segmento $\overline{AB}$………...……………………...……………………………...…46

1.3.5 Trazar un segmento n veces mayor que un segmento dado……….........47

1.3.6 Dividir un arco de circunferencia en dos partes iguales………................48

1.3.7 Construir una perpendicular por un punto fuera de la recta dada…....….50

1.3.8 Levantar una perpendicular desde cualquier punto de una recta………......52

1.3.9 Levantar una perpendicular en el extremo A del segmento $\overline{AW}$……........54

1.3.10 Construir una paralela a una recta pasando por un punto S dado fuera de la recta…………………………………………………………….….….57

1.3.11 Construir un ángulo igual a otro dado…………………………….……..58

1.3.12 Trazar la bisectriz de un ángulo……………………….….……………..61

1.3.13 Trazar una tangente por el punto A de la circunferencia…………..……62

1.3.14 Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa……......….65

CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS ALGEBRAICOS.

2.1 Fundamentos Algebraicos para las Construcciones de Figuras Geométricas…………………………………………………..………....67

2.2 Construcciones Imposibles…………………………………...….….…….88

2.3 Polígonos Regulares……………………….…………………………..…91

2.3.1 Construcción del polígono regular de 17 lados…………….……......95

2.3.4 Otras observaciones sobre los números de Fermat….……….......103

CAPÍTULO III: CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS.

Sección I: Construcciones Geométricas con Regla y Compás

3.1 Construcciones Geométricas con Regla y Compás…………….….……106

3.1.1 Construir un triángulo equilátero…………………..……...……..107

3.1.2 Construir un cuadrado inscrito en una circunferencia……...……109

3.1.3 Construir un pentágono regular inscrito en una circunferencia….111

3.1.4 Construir un hexágono regular inscrito en una circunferencia…..116

3.1.5 Construir un octágono regular inscrito en una circunferencia…...117

3.1.6 Construir un decágono regular inscrito en una circunferencia…..120

3.1.7 Construir un dodecágono inscrito en una circunferencia……..…..122

3.1.8 Cuadratura de un triángulo rectángulo……………………….…..125

3.1.9 Cuadratura de un rectángulo……………………………......….132

3.1.10 Construcción del Pentadecágono Regular………………….......135

3.1.11 Construcción del Heptadecágono Regular………………….……..138

Sección II: Aproximaciones de algunas construcciones Geométricas con regla y compás.

3.2.1 Construir un heptágono regular en una circunferencia…….…….145

3.2.2 Aproximación de la construcción del nonágono regular…..….....148

3.2.3 Método para aproximar cualquier polígono regular…….……….152

3.2.4 Construcción de un Mosaico con regla y compás………..…..…..157

Bibliografía……………………………………………………………………….182

BREVE DESCRIPCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN:

El desarrollo de este trabajo se realiza en tres capítulos, a continuación se hace una breve descripción de cada uno de ellos:

El **Capítulo I** se ha dividido en tres secciones. En la **Sección I** se hace un enfoque teórico de conceptos y propiedades algebraicas, anillos, anillos de polinomios, campo, extensiones de campo, grado de una extensión, entre otras definiciones básicas necesarias. En la **Sección II** se hace un enfoque geométrico en donde se exponen los conceptos básicos de la geometría euclidiana tales como la definición de punto, recta, ángulo, segmento, entre otras. En la **Sección III** se dan a conocer algunas construcciones básicas, realizadas solamente con una regla no graduada y un compás, para el desarrollo de este documento.

En el **Capítulo II** se ve desde el punto de vista algebraico. Lo propio de nuestro enfoque es ver cuales figuras son construibles y cuáles no, además del estudio de los comportamientos al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos.

El **Capítulo III** se procede con la parte fundamental de esta investigación, se da desde la perspectiva euclidiana, se introducirán los métodos para poder construir figuras geométricas solamente con la ayuda de una regla no graduada y un compás, dicho capítulo se dividirá en dos secciones. La **Sección I** se estudia la construcción de polígonos regulares, como el pentágono, heptadecágono entre otros. En la **Sección II** se desarrollan las aproximaciones de algunos polígonos regulares como el heptágono, el nonágono entre otros.

INTRODUCCIÓN.

El presente trabajo da a conocer las herramientas necesarias, tanto del álgebra abstracta como de la geometría plana, para que el estudiante pueda identificar las construcciones geométricas que se pueden realizar con el uso de una regla no graduada (sin marcas), un compás, un marcador y una hoja de papel.

Se inicia desarrollando un enfoque teórico de conceptos y propiedades algebraicas de anillos, campos y extensiones de campos. Luego contextos geométricos; elementos que se consideran necesarios para el desarrollo de este trabajo. Además, se brindan las construcciones básicas que son fundamentales para poder trazar figuras más complejas como los polígonos regulares.

Así podemos hacer una relación entre la geometría y el álgebra, esta última nos dará las bases necesarias para saber cuáles figuras geométricas pueden construirse con regla y compás para luego crearlas con la ayuda de la geometría. También se estudia la genialidad de **Carl Gauss** que da como resultado la construcción del heptadecágono regular.

También se comprende porque los tres problemas clásicos de la antigüedad, la trisección del ángulo, la duplicación del cubo, y la cuadratura del círculo, no son resolubles utilizando únicamente nuestras herramientas.

NOTA HISTÓRICA.

Las matemáticas han estado presentes desde los orígenes de la humanidad. Son tan antiguas como antiguo es el hombre mismo, algo que puede ser apreciado al observar las evidencias, en el sentido geométrico, que poseen por ejemplo los diseños prehistóricos de cerámica, tejidos, entre otros. Asimismo, los sistemas de cálculo primitivos estaban basados, seguramente, en el uso de los dedos de las manos, lo que resulta evidente por la gran abundancia de los sistemas de base cinco y decimal.

Esta ciencia surgió por la necesidad de resolver problemas sociales concretos, obstáculos que aquejaban a la humanidad tanto individual como colectivamente. Algunos de esos problemas de la vida real fueron: resolver distribuciones de terrenos en cuanto a su extensión, encontrar la distancia menor entre ciudades, la necesidad de herramientas de trabajo.

Desde sus orígenes, el hombre ha tratado de comunicarse mediante grafismos y dibujos. Las primeras representaciones que conocemos son las pinturas rupestres. En ellas no solo se intentaba representar la realidad que le rodeaba, animales, astros, al propio ser humano, etc., sino también sensaciones, como la alegría de las danzas, o la tensión de las cacerías.

La geometría es una de las más antiguas ciencias. Inicialmente constituida en un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, áreas y volúmenes. En el Antiguo Egipto estaba muy desarrollada, según los textos de **Heródoto**, **Estrabón** y **Diodoro Sículo**. **Euclides**, en el siglo III A. C, configuró la geometría en forma axiomática, tratamiento que estableció una norma a seguir durante muchos siglos: la geometría euclidiana descrita por **Euclides** en **«Los Elementos»**.

El estudio de la astronomía y la cartografía, tratando de determinar las posiciones de estrellas y planetas en la esfera celeste, sirvió como importante fuente de resolución de problemas geométricos durante más de un milenio. **René Descartes** desarrolló simultáneamente el álgebra y la geometría, marcando una nueva etapa, donde las figuras geométricas, tales como las curvas planas, podrían ser representadas analíticamente, es decir, con funciones y ecuaciones. La geometría se enriquece con el estudio de la estructura intrínseca de los entes geométricos que analizan **Euler** y **Gauss**, que condujo a la creación de la topología y la geometría diferencial.

El primer gran avance de la Geometría se produjo en Grecia. Tal fue el avance que los elementos de **Euclides** fueron el primer modelo de sistema axiomático. Pero la importancia de la geometría griega no es solo en el aspecto teórico, sino también en el práctico: se preocuparon por construir sistemáticamente cada figura que imaginaban.

Para tal fin crearon una gran cantidad de herramientas, entre ellas regla, compás y utensilios especiales para trisecar ángulos. Pero curiosamente la regla y el compás, tuvieron una especial preponderancia, pues una construcción se consideraba mucho más elegante si solo necesitaban de ellas para su realización.

Esta "afición" de los griegos por este tipo de construcciones fue transmitida al Mundo Árabe y al Renacimiento como un juego o reto, más que por su utilidad. Se fueron aportando más y más construcciones, pero no se avanzó mucho acerca de las limitaciones que estas herramientas podían presentar. Se encontraron diversas situaciones en las que la regla y el compás parecían no ser suficientes, pero no se podía saber algo riguroso acerca de ellas.

Estas limitaciones, aunque evidentes, no minimizaron el interés de los matemáticos por esta modalidad, sino que incluso apareció una cierta corriente de ellos que pusieron más horas de dedicación para hacer construcciones.

Por ejemplo, cabe destacar al persa del siglo X, **Abul Wefa**, que se preocupó por los objetos que podían ser construidos solo con regla y compás rígido. Se entiende por compás rígido o compás oxidado un instrumento que permite trazar circunferencias de un único radio prefijado. El propio **Leonardo da Vinci** y otros grandes pensadores del Renacimiento se preocuparon por este tipo de construcciones, pero no fue hasta 1673 cuando apareció en Ámsterdam un libro anónimo (luego se supo que el autor fue **George Mohr**) llamado **"Compednius Euclidis Curiosi"** que daba un tratamiento serio al problema. Posteriormente, un agrimensor londinense, **William Leybourn**, escribió un libro acerca de **"juegos y pasatiempos con regla y tenedor"** (un tenedor puede hacer las veces de un compás rígido).

En el siglo XIX el francés **Poncelet** demostró que toda construcción con regla y compás puede ser llevada a cabo únicamente con una regla y un compás rígido. Por otra parte, el suizo **Jacob Steiner** probó que bastaba únicamente con una regla y una circunferencia fija en el papel. Finalmente, en el siglo XX se probó que solo hacía falta la regla, el centro de la circunferencia y un arco de tamaño arbitrario de la misma.

Por otra parte, el italiano **Lorenzo Mascherani** probó en 1794 que toda construcción con regla y compás podía ser realizada únicamente por el compás, aunque esto ya lo había demostrado el desconocido **George Mohr** un siglo antes. Se cuenta que **Napoleón** le propuso a **Mascherani** la posibilidad de realizar cualquier construcción de regla y compás a partir de una colección infinita de palillos de dientes planos del mismo tamaño. La demostración de este hecho se produjo en 1939 por **Dawson**.

Pero volviendo a la regla y el compás, vamos a hablar de tres construcciones que se plantearon en la Antigua Grecia y que no se pudieron resolver. Se trata de la trisección de un ángulo arbitrario, lo duplicación de un cubo y la cuadratura del círculo.

Trisección de un ángulo.

Dada la facilidad para realizar la bisectriz de un ángulo y la trisección de un segmento, parece natural que en el 500 A.C algunos griegos se plantearán como dividir un ángulo en tres partes iguales. Encontraron solución a casos concretos (por ejemplo, para trisecar el ángulo de 90 grados basta con construir un triángulo equilátero y hacerle la bisectriz). A lo largo de la historia han aparecido falsas demostraciones e incluso soluciones aproximadas.

Es curioso que aparezcan demostraciones como la del **padre Callaham**, de EE.UU, en 1921, a pesar que en 1837 el francés **Wantzel** demostró la imposibilidad de trisecar un ángulo arbitrario. El padre llegó incluso a reclamar que existía una conspiración en su contra por parte de los matemáticos profesionales. Lógicamente la comunidad matemática ya no prestaba atención a esta “secta de trisecadores”, que se empeñó en proporcionar demostraciones que resultaban difícil encontrar donde estaba el error.

Duplicación del cubo.

La historia de este problema es muy curiosa. Se cuenta que en el año 429 A.C. murió Pericles, tirano de Atenas, y la ciudad cayó en una profunda crisis. Los atenienses, se dirigieron al Oráculo de Delos para pedirle una solución. Y la respuesta del oráculo fue que la crisis desaparecería si construían para los dioses un altar con el doble de volumen que el ya existente.

Como la forma del altar era cúbica, los atenienses crearon un altar con el doble de la longitud de la arista que el anterior; pero la gran crisis solo no se solucionó sino que empeoró. Desesperados, los atenienses se dirigieron al Oráculo de nuevo, a lo que este reprocho que el nuevo altar no tenía el doble de volumen, sino que era ocho veces más grande.

Los atenienses lo intentaron por todos los medios, pero lo seguro es que no lo consiguieron basándose solo de regla y compás. Grandes pensadores estudiaron este problema, como: **Arquitas de Tarento**. **Hipócrates de Quío**, **Menecmo**, **Eratóstenes de Cirene**. Pero nuevamente **Wantzel** probó su imposibilidad.

Cuadratura del círculo.

Este problema fue propuesto por **Anaxágoras** en el 500 A.C, en el cual se trata de construir un cuadrado de igual área que un círculo dado. Esto nace de la necesidad de medir superficies comparándolas con unidades de medidas cuadradas.

Se encontraron numerosas soluciones aproximadas con regla y compás, y soluciones exactas utilizando otras herramientas. Ha sido uno de los problemas que más importancia ha tenido en la historia y su estudio ha propiciado numerosos adelantos en la matemática.

Es curioso como el álgebra, que nace a partir de la geometría, puede llegar más de 2000 años después para ayudar a la geometría. Recordemos que el álgebra nació como un intento de abstracción de operaciones tan geométricas como la unión de segmentos, el cálculo de áreas o la determinación de volúmenes. Es decir, en principio, el álgebra tenía sus pies en la geometría, porque todos sus teoremas se basaban en una demostración geométrica. La curiosidad aparece cuando la geometría requiere del álgebra para demostrar sus proposiciones. Esos nuevos desarrollos algebraicos junto con la teoría de **Galois** fueron el comienzo del álgebra moderna.

JUSTIFICACIÓN.

Más de 50 millones de personas en el mundo, desde estudiantes de básica hasta Geómetras, desde albañiles hasta ingenieros, se enfrentan a diario a problemas que para solucionarlos se necesita hacer uso de la Geometría, pero que sucede con aquellos problemas que no admiten solución en la ciencia Geométrica utilizando únicamente los instrumentos ideales según **Platón**, llamados regla y compás, debido a esta deficiencia, el hombre se ha visto obligado a estudiar otras áreas de la matemática como lo es Álgebra Abstracta.

Además, sabemos que el gusto por alguna ciencia surge por el contacto que el estudiante tenga con algún aspecto interesante, que le provoque querer saber más, y ante este éxito puede incluso llegar a apasionarse, es por eso que con este proyecto se pretende contribuir de manera positiva en mejorar la actitud que el estudiante muestra hacia estas áreas y generalmente a la Matemática, orientándolo hacia temas de mayor interés, los cuales sirvan para atraer su atención e interesarlo en su estudio.

Esta investigación bibliográfica se realiza con el objetivo de presentar una información completa que aclare dudas, actualice conceptos y otorgue bases para solucionar los múltiples problemas que enfrentan los estudiantes del área de Geometría como también Álgebra Abstracta, así como construir un aporte que sea de suma importancia para todos los docentes que imparten estas cátedras hoy en día.

OBJETIVOS.

Objetivos Generales:

- Presentar dos perspectivas distintas que se complementan para darle soluciones a las construcciones con regla y compás.
- Estudiar las figuras geométricas construibles y no construibles con regla y compás.

Objetivos Específicos:

- Elaborar un trabajo que proporcione elementos necesarios para estudios posteriores en álgebra.
- Proporcionar al lector los diferentes métodos para la construcción de figuras geométricas con regla y compás.
- Enriquecer el conocimiento sobre la teoría para la construcción de figuras geométricas con regla y compás.
- Dar a conocer los tres problemas clásicos griegos (La duplicación del cubo, trisección de un ángulo y cuadratura de un círculo).

CAPÍTULO I.

Este capítulo se ha dividido en tres secciones. En la primera sección se exponen algunas definiciones y propiedades de grupo, anillos, anillos de polinomios, polinomios sobre los racionales, campo, extensiones de campo entre otras. En la segunda sección se enuncian definiciones y propiedades de Geometría: punto, segmento, ángulo etc. En la tercera se muestran algunas construcciones básicas.

Sección I: Preliminares Algebraicos.

1.1.1 Grupo.

Definición 1.1.1.1 Un conjunto no vacío $\boldsymbol{G}$, se dice que forma un grupo, si en $\boldsymbol{G}$ esta definida una operación binaria $(*)$ llamada producto, denotado por $(\boldsymbol{G}, *)$ tal que:

a) $a , b \in \boldsymbol{G} \Rightarrow a * b \in \boldsymbol{G}.$ (Prop. Cierre)

b) $(a * b) * c = a * (b * c)$; $\forall a , b , c \in \boldsymbol{G}.$ (Prop. Asociativa)

c) $\exists\ e \in \boldsymbol{G},$ tal que $a * e = e * a = a;\ \forall a \in \boldsymbol{G}.$ (Prop. Elemento Neutro)

d) $\forall a \in \boldsymbol{G}, \exists\ a^{-1} \in \boldsymbol{G}$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$ (Prop. Elemento Inverso)

1.1.2 Sub-Grupo.

Definición 1.1.2.1 Dado un grupo $(\boldsymbol{G},*)$ y un subconjunto no vacío $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{G}$. Se dice que $(\boldsymbol{H},*)$ es un subgrupo de $(\boldsymbol{G},*)$ si y solo si $(\boldsymbol{H},*)$ es grupo.

1.1.3 Anillos.

Los *anillos* serán dotados con adición y multiplicación, y estas están sujetas a muchas de las reglas conocidas de la aritmética.

Definición 1.1.3.1 Se dice que un conjunto no vacío $\boldsymbol{R}$ dotado de dos operaciones $+$ y $\cdot$, es un *anillo* si se cumplen las siguientes propiedades:

a) $a, b \in \boldsymbol{R} \Rightarrow a + b \in \boldsymbol{R}$. (Prop. Cierre)

b) $a + b = b + a$; $\forall\, a, b \in \boldsymbol{R}$. (Prop. Conmutativa)

c) $(a + b) + c = a + (b + c)$; $\forall\, a, b, c \in \boldsymbol{R}$. (Prop. Asociativa)

d) $\exists\, 0 \in \boldsymbol{R}$ tal que $a + 0 = a$; $\forall\, a \in \boldsymbol{R}$. (Elemento Neutro)

e) Dado $a \in \boldsymbol{R}, \exists\, b \in \boldsymbol{R}$ tal que $a + b = 0$. (b se expresara como $-a$). (Inverso)

f) $a, b \in \boldsymbol{R} \Rightarrow a \cdot b \in \boldsymbol{R}$. (Prop. Cierre)

g) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$; $\forall\, a, b, c \in \boldsymbol{R}$. (Prop. Asociativa)

h) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Prop. Distributiva del producto sobre la suma)

$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$; $\forall\, a, b, c \in \boldsymbol{R}$.

Nota: Se dice que ***R*** es un *anillo con unidad* si $\exists\ 1 \in \boldsymbol{R}$ tal que: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; $\forall\, a \in \boldsymbol{R}$

Definición 1.1.3.2 Un anillo conmutativo ***R*** es un *dominio de integridad* si $a \cdot \mathrm{b} = 0$ en ***R*** implica que $a = 0$ o bien $b = 0$.

Nota: Un anillo ***R*** sin divisores de cero se llama *dominio de integridad.*

Definición 1.1.3.3 Se dice que un anillo con unidad ***R***, es un *anillo con división* si $\forall a \neq 0$ en ***R***, $\exists b \in \boldsymbol{R}$ (se expresa como a^{-1}) tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Definición 1.1.3.4 Se dice que un anillo ***R***, es un *campo* si ***R*** es un *anillo con división conmutativo.*

Definición 1.1.3.5 Un elemento $a \neq 0$ de un *anillo* ***R*** es un divisor de cero en ***R*** si $ab = 0$, para algún $b \neq 0$ en ***R***.

Nota: En realidad lo que se acaba de definir se debería de llamar divisor de cero por la izquierda; sin embargo, dado que estamos tratando principalmente de *anillos* *conmutativos*, no se necesita ninguna distinción izquierda-derecha para los divisores de cero.

1.1.4 Sub-Anillo.

Definición 1.1.4.1 Un **sub-anillo** de un anillo $\boldsymbol{R}$ es un subgrupo de $\boldsymbol{R}$, que es cerrado bajo la multiplicación.

Nota: Un sub-anillo $\boldsymbol{S}$ es propio cuando no coincide con todo el anillo, es decir, si $\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{R}$.

1.1.5 Homomorfismo, Isomorfismo, Automorfismo y Endomorfismo de grupos.

Definición 1.1.5.1 Se dice que la función $\varphi : \boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{H}$ es un *homomorfismo de grupos* si para todo a y b en $\boldsymbol{G}$, $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

Con esta definición se ve que la imagen de φ se define de la siguiente manera

$im(\varphi) = \varphi(\boldsymbol{G}) = \{g \in \boldsymbol{G},\ \varphi(g) = h;\ tal\ que\ h \in \boldsymbol{H}\}$, es un subgrupo de $(\boldsymbol{H},*)$.

Definición 1.1.5.2 Se define el núcleo de φ como el conjunto

$$ker(\varphi) = \{g \in \boldsymbol{G} : \varphi(g) = e\}$$

Definición 1.1.5.3 Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos grupos y sea f una aplicación de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$, f es un ***Isomorfismo*** si cumple las condiciones siguientes:

1. f es biyectiva.
2. f es un homomorfismo.

Nota: Se dice que un homomorfismo es un **Monomorfismo**, un **Epimorfismo** o un **Isomorfismo** si es, respectivamente, **Inyectivo, Sobreyectivo o Biyectivo**.

Un **Homomorfismo** de un grupo $\boldsymbol{G}$ en sí mismo se dice un endomorfismo, mientras que un isomorfismo de un grupo $\boldsymbol{G}$ en sí mismo se dice un **Automorfismo**.

1.1.6 Anillos de Polinomios.

Definición 1.1.6.1 Sea $\boldsymbol{F}$ un campo, el *anillo de polinomios* en x sobre $\boldsymbol{F}$, denotado por $\boldsymbol{F}[x]$, se define como el conjunto de todas las expresiones formales

$p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, donde los a_i, llamados coeficientes del polinomio $p(x)$, están en $\boldsymbol{F}$.

En $\boldsymbol{F}[x]$ se definen igualdad, suma y producto de dos polinomios para hacer de $\boldsymbol{F}[x]$ un *anillo conmutativo* como sigue:

1. **Igualdad.** Se dice que $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$. Son iguales si y solo si sus coeficientes correspondientes son iguales, es decir, $a_i = b_i$; $\forall i \geq 0$.
2. **Adición.** Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots + b_mx^m$ donde $m > n$.

   Se define $p(x) + q(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_n x^n + \cdots + c_mx^m$. Donde para cada $i \leq n$, $c_i = a_i + b_i$ y para $i > n$ será $c_i = b_i$
3. **Multiplicación.** Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$. Se define $p(x)\, q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_l\, x^l$. Donde los c_i se determinan multiplicando la expresión formalmente (es decir, en cuanto la forma), utilizando las leyes distributivas y las reglas de los exponentes.

   $c_i = a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + \ldots + a_1b_{i-1} + a_0b_i; \forall i.$

Definición 1.1.6.2 Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ y $a_n \neq 0$, entonces el grado de $p(x)$, denotado por $grd\, p(x)$, es n.

Lema 1.1.6.3 Si $p(x), q(x)$ son elementos no ceros de $\boldsymbol{F}[x]$, entonces

$grd\big(p(x)q(x)\big) = grd\big(p(x)\big) + grd(q(x))$

Ver demostración en **Álgebra Abstracta, Herstein, 3^a Edición**, pág. 154.

Teorema 1.1.6.4 **(Algoritmo de la División).** Sean los polinomios $f(x), g(x) \in \boldsymbol{F}[x]$, donde $g(x) \neq 0$, se cumple entonces que $f(x) = q(x)\, g(x) + r(x)$, con $q(x), r(x) \in \boldsymbol{F}[x]$ y $r(x) = 0$ ó bien $grd\, r(x) < grd\, g(x)$.

Ver demostración en **Álgebra Abstracta, Herstein, 3^a Edición**, pág. 155.

Definición 1.1.6.5 $f(x) \in \boldsymbol{F}[x]$ es un *polinomio mónico* si el coeficiente de su potencia más alta es 1.

Definición 1.1.6.6 Si $f(x)$ y $g(x) \neq 0 \in \boldsymbol{F}[x]$, entonces se dice que $g(x)$ divide a $f(x)$, expresado como $g(x)|f(x)$, si $f(x) = a(x)\, g(x)$ para algún $a(x) \in \boldsymbol{F}[x]$.

Definición 1.1.6.7 Se dice que el polinomio $d(x) \in \boldsymbol{F}[x]$ es el *máximo común divisor* de $f(x), g(x) \in \boldsymbol{F}[x]$ [donde no son a la vez $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$]. Si $d(x)$ es un *polinomio mónico* tal que:

a) $d(x)|f(x)$ y $d(x)|g(x)$

b) Si $h(x)|f(x)$ y $h(x)|g(x)$, entonces $h(x)|d(x)$.

Definición 1.1.6.8 Se dice que dos polinomios $f(x), g(x)\ en\ \boldsymbol{F}[x]$ son primos entre sí, si su máximo común divisor es1.

Definición 1.1.6.9 Un polinomio $p(x) \in \boldsymbol{F}[x]$ de grado positivo es irreducible en $\boldsymbol{F}[x]$ si, dado cualquier polinomio $f(x)$ en $\boldsymbol{F}[x]$, entonces $p(x)|f(x)$ o bien $p(x)$ es primo respecto a $f(x)$.

1.1.7 Polinomios Sobre los Racionales.

Lema 1.1.7.1 Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$; entonces

$$f(x) = \frac{u}{m}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)$$

Donde $u, m, a_0, \ldots, a_n$ son enteros y los $a_0, \ldots, a_n$ no tienen factor común mayor que 1 (es decir, son relativamente primos) y $mcd(u,m) = 1$.

Ver demostración en **Álgebra Abstracta, Herstein, 3^a Edición**, pág. 166.

***Teorema 1.1.7.2* (Criterio de Eisenstein):** Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros. Supóngase que existe algún primo p tal que:

$p|a_1$, $p|a_2$,…,$p|a_n$. Pero $p^2 \nmid a_0$ entonces $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

Ver demostración en **Álgebra Abstracta, Herstein, 3^a Edición**, pág. 169.

1.1.8 Campos.

Definición 1.1.8.1 Un campo $\boldsymbol{F}$ es un anillo conmutativo con elemento unidad 1 tal que para todo $a \in \boldsymbol{F}$ distinto de cero existe un elemento $a^{-1} \in \boldsymbol{F}$ de tal que $aa^{-1} = 1$.

Nota: $\mathbb{Q}$, Campo de los números racionales

$\mathbb{R}$, Campo de los números Reales

$\mathbb{C}$, Campo de los números complejos

Definición 1.1.8.2 Se dice que un campo ***F*** tiene (o es de) característica $p \neq 0$ para ciertos enteros positivos p, $px = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p\ veces} = 0$ para algún $x \in \boldsymbol{F}$.

Teorema 1.1.8.3 La característica de un campo es cero o bien un número primo.

Ver demostración en **Álgebra Abstracta de David S. Dummit**, pág. 422.

1.1.9 Extensiones de Campos.

A lo largo del trabajo se observarán relaciones entre campos como ***K*** y ***F*** , donde ***K*** ⊃ ***F***, se le llama a ***K*** una extensión (o campo extensión) de ***F***, y ***F*** un sub campo de ***K.***

Teorema 1.1.9.1 Sean ***L***⊃ ***K*** ⊃ ***F*** tres campos tales que ambas [***L: K***] y [***K: F***] son finitas. Entonces ***L*** es una extensión finita de ***F*** y [***L: F***] = [***L: K***][***K: F***].

Ver demostración en Capítulo II: Fundamentos Algebraicos, pág. 80.

Corolario 1.1.9.2 Si ***L*** ⊃ ***K*** ⊃ ***F*** son tres campos tales que [***L: F***] es finito, entonces [***K: F***] es finito y divide a [***L: F***].

Ver demostración en **Álgebra Abstracta, Herstein, 3^a Edición**, pág. 193.

Definición 1.1.9.3 Si $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{F}$ son campos tales que $\boldsymbol{K} \supset \boldsymbol{F}$, entonces se dice que $a \in \boldsymbol{K}$ es *algebraico sobre* $\boldsymbol{F}$ si existe un polinomio $p(x) \neq 0$ en $\boldsymbol{F}[x]$ tal que $p(a) = 0$.

Nota: Por $p(a)$ se entiende el elemento $\alpha_n a^n + \alpha_{n-1} a^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ de $\boldsymbol{K}$, donde

$p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_0$.

Lema 1.1.9.4 Sea $a \in \boldsymbol{K}$ algebraico sobre $\boldsymbol{F}$ con polinomio mínimo $p(x)$ en $\boldsymbol{F}[x]$. Entonces $p(x)$ es irreducible en $\boldsymbol{F}[x]$.

Ver demostración en **Álgebra Abstracta, Herstein, 3^a Edición, pág**. 195.

Nota: De ahora en adelante se supone que el polinomio $p(x)$ es mónico; se le llama *polinomio mínimo* de a sobre $\boldsymbol{F}$.

Teorema 1.1.9.5 Supóngase que $\boldsymbol{K} \supset \boldsymbol{F}$ y que a en $\boldsymbol{K}$ es algebraico sobre $\boldsymbol{F}$ de grado n. Entonces $\boldsymbol{F}(a)$, el campo obtenido agregando a a $\boldsymbol{F}$, es una extensión finita de $\boldsymbol{F}$ y $[\boldsymbol{F}(a): \boldsymbol{F}] = n$.

Ver demostración en **Álgebra Abstracta, Herstein, 3^a Edición**, pág. 196.

1.1.10 Grupo Cíclico.

Definición 1.1.10.1 Un ***Grupo Cíclico*** es un grupo que puede ser generado por un solo elemento.

Es decir, hay un elemento a del grupo $\boldsymbol{G}$ (llamado "generador" de $\boldsymbol{G}$), tal que todo elemento de $\boldsymbol{G}$ puede ser expresado como una potencia de a. Si la operación del grupo se denota aditivamente, se dirá que todo elemento de $\boldsymbol{G}$ se puede expresar como na, para n entero.

En otras palabras, $\boldsymbol{G}$ es cíclico, con generador a, si $\boldsymbol{G} = \{an|n \in \mathbb{Z}\}$. Dado que un grupo generado por un elemento de $\boldsymbol{G}$ es, en sí mismo, un subgrupo de $\boldsymbol{G}$, basta con demostrar que el único subgrupo de $\boldsymbol{G}$ que contiene a a es el mismo $\boldsymbol{G}$ para probar que éste es cíclico.

1.1.11 Grupo de Galois.

Sea $Aut(\boldsymbol{F})$ el grupo de todos los automorfismos de $\boldsymbol{F}$, esto es, funciones biyectivas de $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{F}$ que preservan las operaciones. Sea $\boldsymbol{F}$ una extensión del campo $\boldsymbol{K}$. El grupo de

Galois de $\boldsymbol{F}$ sobre $\boldsymbol{K}$ se define como el grupo de los automorfismos de $\boldsymbol{F}$ que dejan fijo al cuerpo $\boldsymbol{K}$, es decir, $Gal(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{K}) = \{\varphi \in Aut(\boldsymbol{F}) : \varphi(a) = a; \ \forall a \in \boldsymbol{K}\}$

1.1.12 Polinomios Ciclotómicos.

Definición 1.1.12.1 El n-ésimo *polinomio ciclotómico* está definido por el hecho de que sus ceros son precisamente las n-ésimas raíces primitivas de la unidad, cada una con multiplicidad 1.

El polinomio tiene coeficientes enteros y es un polinomio irreducible sobre los números racionales (es decir, no puede ser escrito como producto de dos polinomios de grado positivo con coeficientes racionales). El caso del primo n, que es más sencillo que la afirmación general, se obtiene del criterio de Eisenstein.

Cada n-ésima raíz de la unidad es una d-ésima raíz primitiva de la unidad para exactamente un divisor positivo d de n.

Esto implica que

$$z^n - 1 = \prod_{d/n} \varphi_d(z).$$

Esta fórmula representa la factorización del polinomio $z^n - 1$ en factores irreducibles.

$$z^1 - 1 = z - 1$$

$$z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$$

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

$$z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z^2 + 1)$$

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

$$z^6 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1)$$

$$z^7 - 1 = (z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

1.1.12.2 Cuerpos Ciclotómicos.

Adjuntando una *n*-ésima raíz primitiva de la unidad a $\mathbb{Q}$, obtenemos el cuerpo ciclotómico *n*-ésimo $\boldsymbol{F}_n$. Este cuerpo contiene todas las *n*-ésimas raíces de la unidad y es el cuerpo de descomposición de los *n*-ésimos polinomios ciclotómicos sobre $\mathbb{Q}$. La extensión $\boldsymbol{F}_n/\mathbb{Q}$ tiene grado $\varphi(n)$ y su grupo de Galois es naturalmente isomorfo al grupo multiplicativo de las unidades del anillo $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$.

Como el grupo de Galois de $\boldsymbol{F}_n/\mathbb{Q}$ es abeliano, tenemos una extensión abeliana. Cada subcuerpo de uno ciclotómico es una extensión abeliana de los racionales. En estos casos la teoría de Galois se puede escribir en términos bastante explícitos de sumas gaussianas: esta teoría de las **Disquisitiones Arithmeticae** de **Carl Friedrich Gauss** se publicó muchos años antes de Galois.

1.1.13 Teorema de Fermat.

Teorema 1.1.13.1 **(Construcción de polígonos regulares con regla y compás)**

Un polígono regular de n lados es construible con regla y compás con las condiciones clásicas si y sólo si la descomposición en factores primos de n es de la forma $n = 2^r \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ siendo $r \geq 0$ y los p_i primos de **Fermat** distintos entre sí (recordemos que un primo de Fermat es un número primo que sea de la forma $2^{2^n} + 1$).

Ver demostración en Capítulo II: Fundamentos Algebraicos, pág. 101.

Corolario 1.1.13.2 Sea $n = p^{a_1}{}_1 + p^{a_2}{}_2 + \cdots + p^{a_k}{}_k$ donde $p_{1,}$ $p_{2,}, , , , p_k$ son primos distintos. A continuación, n −gono regular es construible si y sólo si, para cada $p^{a_i}{}_i$, un $p^{a_i}{}_i -$ agono regular es construible

Lema 1.1.13.3 Supongamos que p es un número primo y el p^n −agono regular es construible para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea γ una $(p^n)^{th}$ raíz de la unidad en $\mathbb{C}$. Entonces el grado mínimo del polinomio γ sobre $\mathbb{Q}$ es de potencia 2

Lema 1.1.13.4 Sea p primo y γ un primitivo $(p)^{th}$ raíz de la unidad en $\mathbb{C}$. Entonces el polinomio mínimo de γ por encima de $\mathbb{Q}$ es $g(x) = 1 + x^p + \cdots + x^{p(p-1)}$

Lema 1.1.13.5 Sea p primo y γ un primitivo $(p^2)^{th}$ raíz de la unidad en $\mathbb{C}$. Entonces el polinomio mínimo de γ por encima de $\mathbb{Q}$ es $g(x) = 1 + x^p + \cdots + x^{p(p-1)}$

Ver demostraciones en **Construcciones con regla y compás con Teoría de Campos, de Isaac M. Davis**, pág. 6. **Teoría de Galois.**

1.1.14 Phi un número Trascendental.

En 1882 Linderman probó que π es trascendente es decir no es algebraico sobre $\mathbb{Q}$. Esto es, no verifica ningún polinomio con coeficientes racionales.

Sección II: Preliminares Geométricos.

1.2.1 El punto.

Definición Un *punto* es el elemento base de la geometría, porque con él determinamos las rectas y los planos.

Se define también como la intersección de dos líneas, sirve para indicar una posición y no tiene dimensión. Se denotan con letras mayúsculas como P, M, B, A, etc.

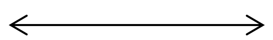
1.2.2 La recta.

Definición Una *recta* es una sucesión ininterrumpida de puntos. Dos puntos determinan una recta, tienen una dimensión, *la longitud*. Se denotaran las rectas como ℓ, ℓ', etc…

1.2.2.1 Tipos de rectas.

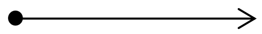
- **Recta**.

  La recta propiamente dicha se caracteriza por que los puntos que la forman son colíneales. Tiene una sola dirección y dos sentidos. No se puede medir.



- **Semirrecta.**

Es una línea recta que tiene origen pero no tiene fin, tiene sólo un sentido, y no se puede medir.

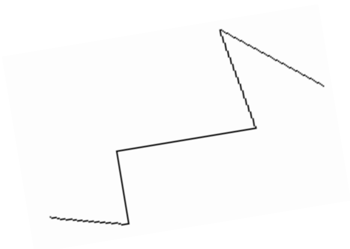


- **Segmento.**

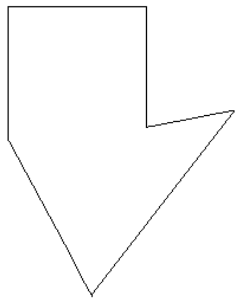
Un segmento es una línea recta que tiene principio y fin, un segmento se puede medir. Lo denotaremos como $\overline{AB}$

- **Poligonal.**

Se llama recta poligonal aquella que está formada por varias porciones de rectas que están unas a continuación de otras, pero no están alineadas. La línea poligonal puede ser abierta (cuando ningún extremo se une) o cerrada (cuando el primer extremo se une con el último). La línea poligonal cerrada forma una figura plana que se llama polígono.



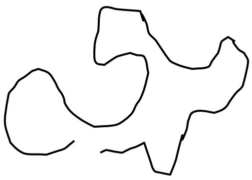
Poligonal abierta



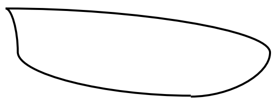
Poligonal cerrada

- **Curva.**

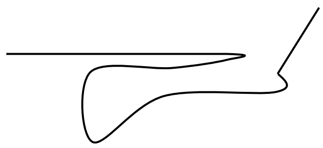
  Una curva está formada por puntos que no son colineales. Puede ser curva abierta (los extremos no se unen) curva cerrada (cuyos extremos se unen) y curva mixta (formada por líneas rectas y curvas unidas).



Curva Abierta



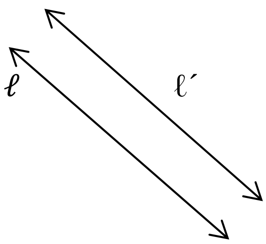
Curva Cerrada



Curva Mixta

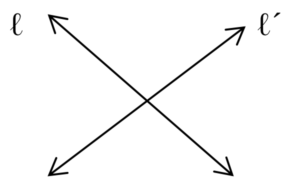
1.2.2.2 Posiciones de las rectas.

- **Dos rectas son paralelas:** si no tienen ningún punto en común. Se denotan dos rectas paralelas como $\ell \parallel \ell'$.



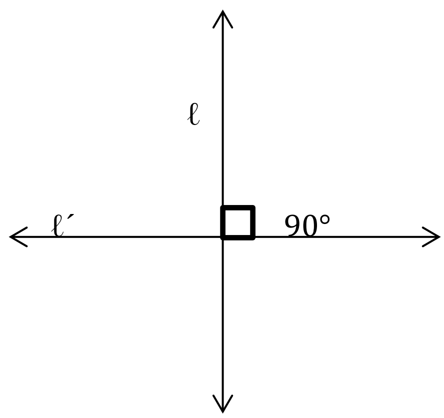
- **Dos rectas son secantes:** Cuando tienen un punto en común.

  Se denotan como $\ell \times \ell'$.

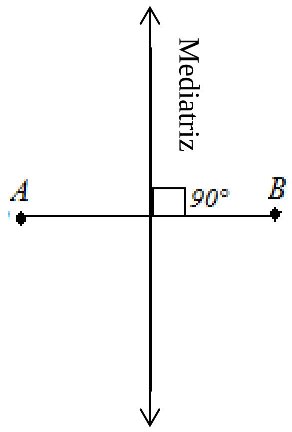


- **Dos rectas son perpendiculares**: Cuando al intersectarse forman cuatro ángulos rectos

  Se denotara como $\ell \perp \ell'$.

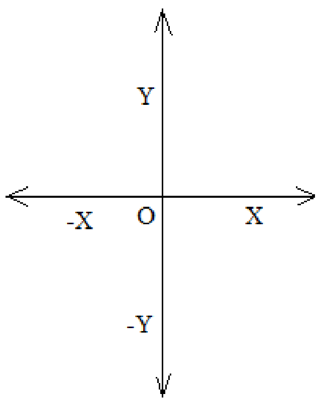


- **Mediatriz de un segmento:** Es la recta que es perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio del segmento.



1.2.3 Plano cartesiano.

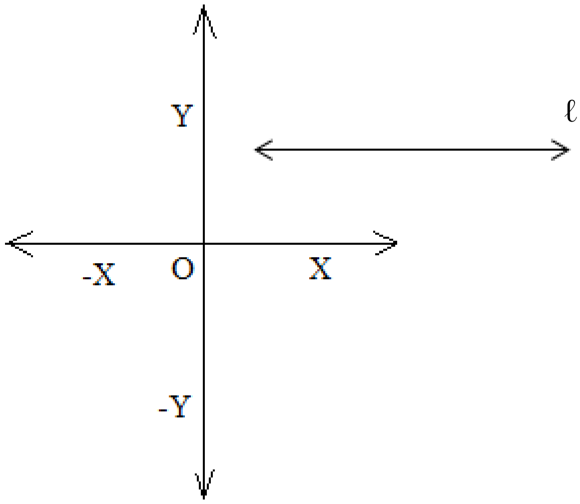
Definición El *plano cartesiano* es un sistema de referencia que se encuentra conformado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical. A la recta horizontal se le llama eje de las abscisas o eje X y la recta vertical eje de las ordenadas o eje Y. En tanto el punto en el cual se cortaran dichas rectas se denomina origen y se denota por O. La **finalidad de este plano será el de describir la posición de puntos, los cuales se encontrarán representados por sus coordenadas o pares ordenados. Las coordenadas se formarán asociando un valor del eje X y otro del eje Y.**



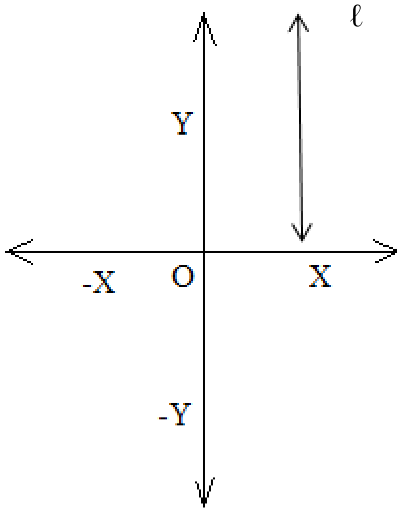
1.2.3.1 Posición de las rectas en el plano.

Las rectas pueden ser:

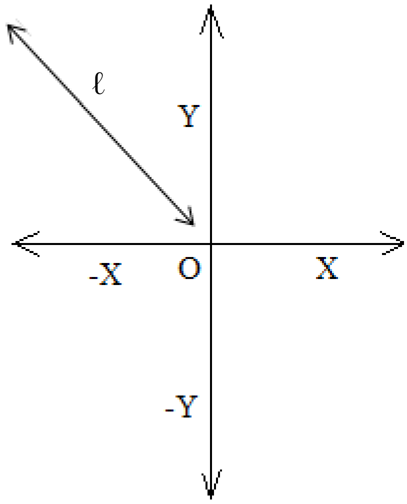
- Horizontal



- Vertical



- Inclinada

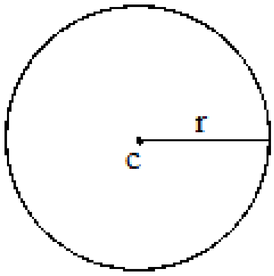


1.2.3.2 Par Ordenado

Definición Un *Par Ordenado* es una pareja de números tal que $a, b, \epsilon \ \mathbb{R}$, en la que se distingue un primer elemento a que pertenece al eje X y un segundo elemento b que pertenece al eje Y. Denotado como (a, b)

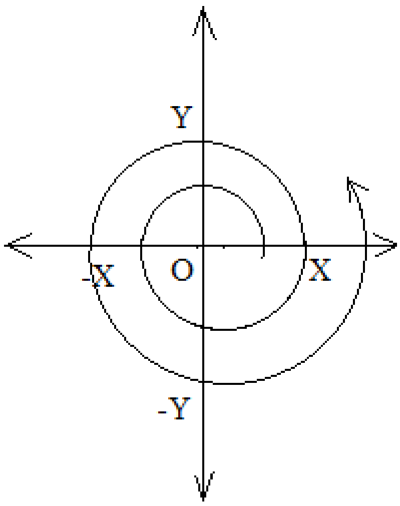
1.2.3.3 La línea curva puede ser.

- **Circunferencia:** Es una curva regular cerrada, cuyos puntos están todos a la misma distancia de otro punto llamado centro.



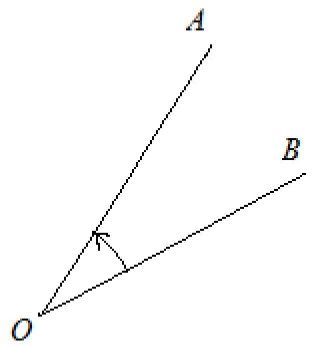
Circunferencia con centro en c y radio r, denotado como $C(c, r)$

- **Radio de una Circunferencia:** Es cualquier segmento que va desde su centro a cualquier punto de dicha circunferencia como se muestra en la figura anterior.
- **Espiral:** Es una curva regular abierta que gira sobre sí misma.



1.2.4 Ángulos.

Definición Es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado ¨ vértice¨ las semirrectas se llaman ¨lados¨. Se utilizan tres letras mayúsculas de manera que quede en el medio la letra que está situada en el vértice del ángulo. Denotado como $\measuredangle AOB$

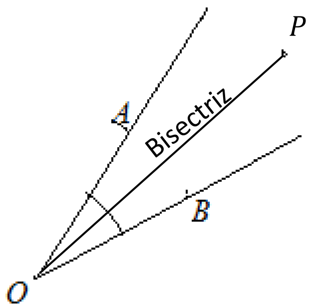


Un ángulo está formado por:

- ✓ Lado de un ángulo: cada una de las dos semirrectas.
- ✓ Vértice de un ángulo: punto en el que coinciden las dos semirrectas.
- ✓ Amplitud: lo más importante del ángulo, es la abertura que hay entre los lados.

1.2.4.1 bisectriz de un ángulo

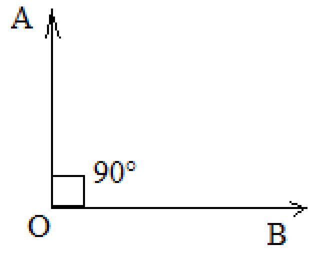
Definición. La *bisectriz de un ángulo* es la semirrecta que pasando por el vértice, divide el ángulo en dos ángulos iguales.



Se tiene que $\measuredangle AOP = \measuredangle POB$

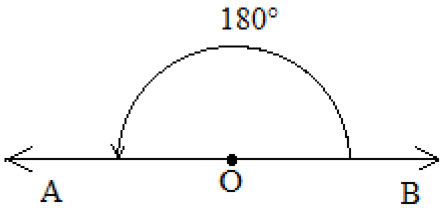
1.2.4.2 Clasificación de los ángulos:

1. **Ángulo recto:** Su amplitud es de 90º.



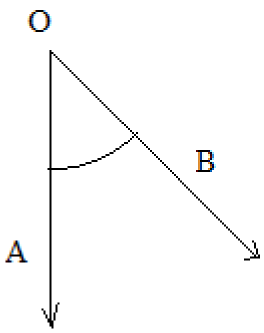
$\measuredangle AOB = 90°$

2. **Ángulo llano**: Su amplitud es de 180º.



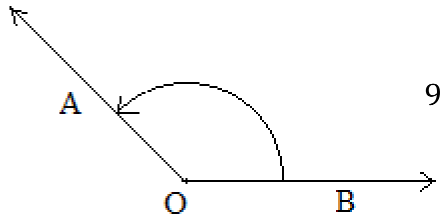
$\measuredangle AOB = 180°$

3. **Ángulo agudo**: Su amplitud es mayor que 0º y menor que 90º.



$0 < \measuredangle AOB < 90°$

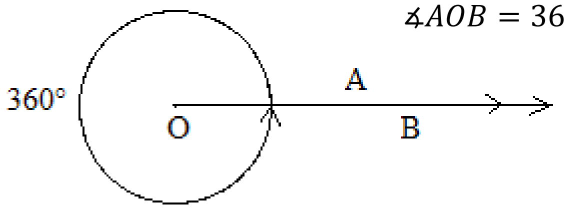
4. **Ángulo obtuso:** Su amplitud es mayor que 90º y menor que 180º.



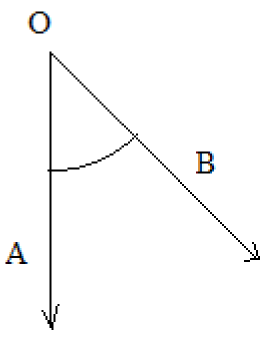
$90° < \measuredangle AOB < 180°$

5. **Ángulo completo:** Su amplitud es de 360º.

$\measuredangle AOB = 360°$

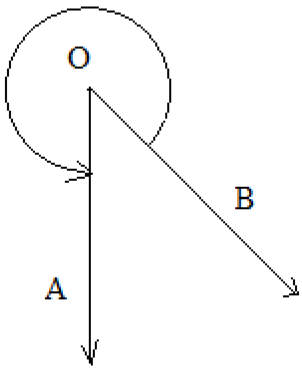


6. **Ángulo convexo:** Su amplitud es mayor que 0º y menor que 180º.



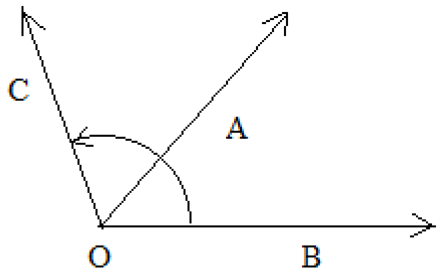
$0 < \measuredangle AOB < 180°$

7. **Ángulo cóncavo:** Su amplitud es mayor que 180º.



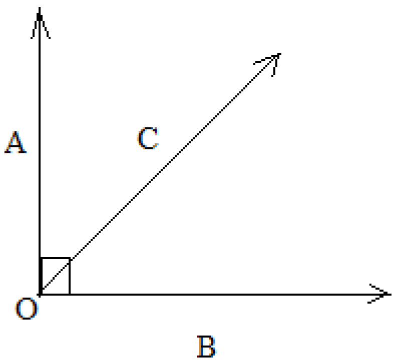
$180° < \measuredangle AOB$

8. **Ángulos consecutivos**: Dos ángulos son consecutivos cuando tienen el vértice y un lado común.



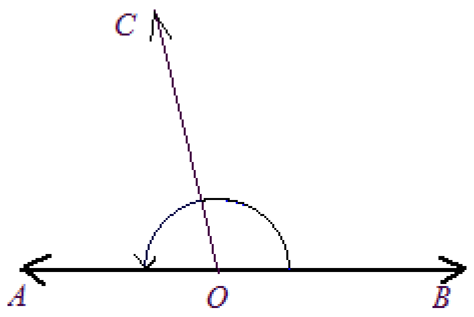
$\measuredangle COB = \measuredangle AOB + \measuredangle AOC$

9. **Ángulos complementarios:** Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus amplitudes es de 90º.



$\measuredangle AOC + \measuredangle COB = 90°$

10. **Ángulos suplementarios:** Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus amplitudes es de 180º.



$$\measuredangle AOC + \measuredangle COB = 180°$$

1.2.5 Los polígonos.

Definición. Un *polígono* es toda porción de plano limitada por una línea poligonal cerrada**.**

1.2.5.1 Elementos de un polígono.

- **Contorno del polígono:** Es la línea poligonal que lo limita.
- **Lados del polígono**: Segmentos rectilíneos que forman el contorno.
- **Vértices del polígono:** Puntos donde se unen dos lados consecutivos del polígono.
- **Ángulos interiores del polígono:** Formados por cada dos lados consecutivos.

- **Diagonal del polígono:** Segmento que une dos vértices que no son consecutivos.

1.2.5.2 El perímetro del polígono:

Cuando hablamos del **perímetro del polígono**, nos referimos a la suma de las longitudes de todos sus lados, es decir, la medida de su contorno.

1.2.5.3 Suma de los ángulos de un polígono.

La suma de los ángulos de un polígono es: $(n-2)\cdot 180, n \geq 3$. Donde "n" es el número de lados del polígono.

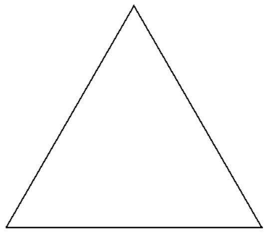
1.2.5.4 Número de diagonales de un polígono.

El número de diagonales de un polígono es igual a $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$, siendo "n" el número de lados del polígono.

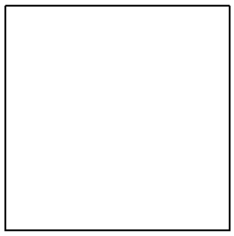
1.2.5.5 Clases de polígonos.

Los polígonos se pueden clasificar siguiendo diferentes criterios:

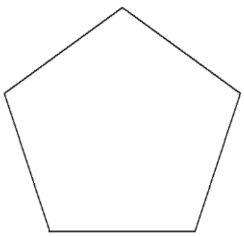
- **Según el número de lados:**
  - *Triángulo* es el que consta de 3 lados



- *Cuadrilátero*, tiene 4 lados



- *Pentágono*, tiene 5 lados



- y así sucesivamente, hexágono, heptágono, octágono, etc...

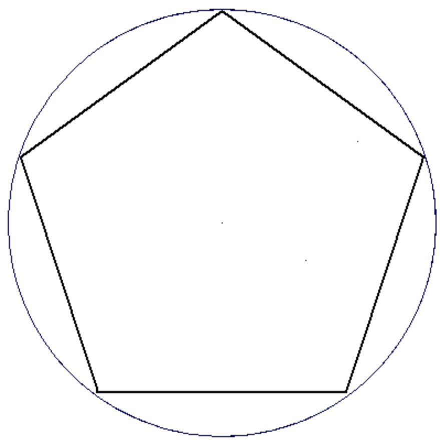
- **Según sus ángulos:**
  - *Polígono convexo* en el que todos sus ángulos son convexos, es decir menores que 180º
  - *Polígono cóncavo* que tiene algún ángulo cóncavo, es decir su ángulo mide más de 180º
- **Según la igualdad de lados y ángulos:**
  - *Polígono equilátero* que tiene sus lados iguales.
  - *Polígono equiángulo* en el que sus ángulos son iguales.
  - *Polígono regular* que tiene sus lados iguales y sus ángulos iguales**.**

1.2.5.6 Elementos comunes en un polígono regular.

- **Centro del polígono:** Es el punto que equidista de los vértices.
- **Radio del polígono**: Cualquier segmento que une el centro con algún vértice.
- **Apotema del polígono:** Cualquier segmento que une el centro con el punto medio de cualquier lado.

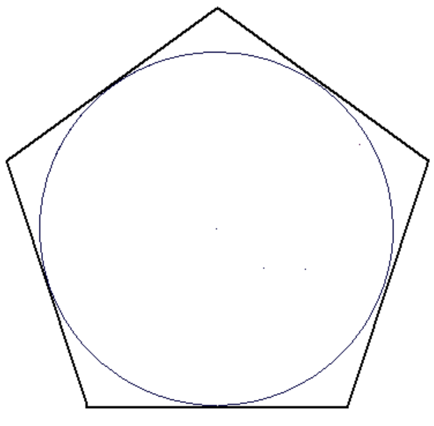
1.2.5.7 Polígono inscrito.

Definición Un *Polígono inscrito* es el polígono que tiene sus vértices en una circunferencia.



1.2.5.8 Polígono circunscrito.

Definición. Un *Polígono circunscrito* es aquel en el que sus lados son tangentes en una circunferencia.



1.2.5.9 Clases de ángulos de un polígono regular.

En un polígono regular encontramos:

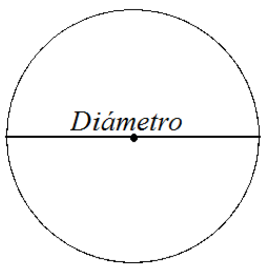
- **Ángulo central:** Es el formado por dos radios consecutivos. El ángulo central es igual a $\frac{360°}{n}$
- **Ángulo interior**: Es el formado por dos lados consecutivos. Un ángulo interior es igual a **180º - ángulo central ;** $180° - \frac{360°}{n}$
- **Ángulo exterior:** Es el formado por un lado y la prolongación de un lado consecutivo y es igual al **ángulo central.**

1.2.6 El círculo.

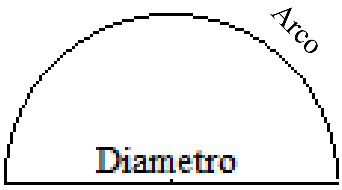
Definición Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al centro es menor o igual que el radio; en pocas palabras un círculo es una superficie plana limitada por una circunferencia.

1.2.6.1 Elementos del círculo.

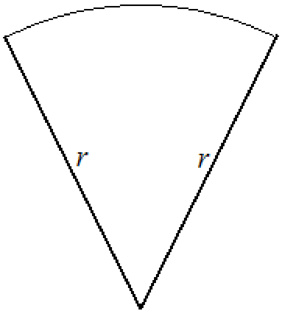
Diámetro: Es el segmento de recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de una circunferencia.



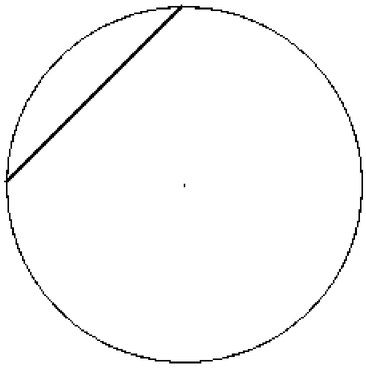
- **Semicírculos**: La porción de círculo limitada por un diámetro y su arco correspondiente. Equivale a la mitad del círculo.



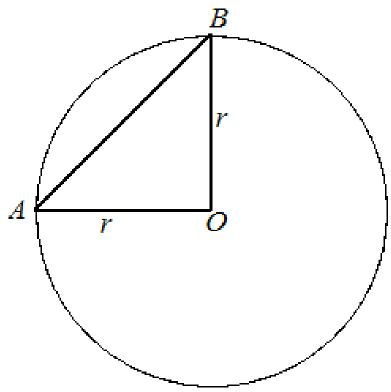
- **Sector circular:** Es la porción de círculo limitada por dos radios y su arco correspondiente.



- **Segmento circular**: Es la parte del círculo limitada por una cuerda y su arco.

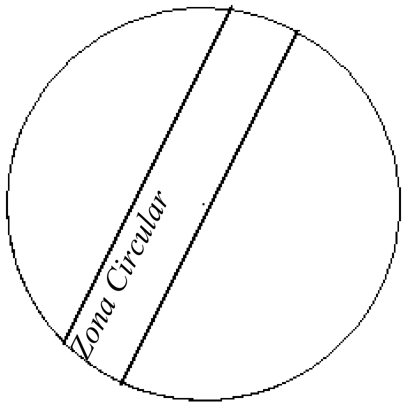


- **Área de un segmento Circular:** Es el área del sector circular menos el área del triángulo que se forma con el segmento circular y los radios.

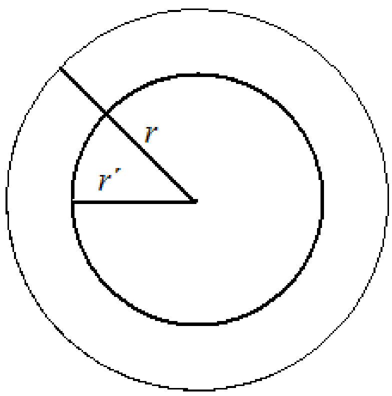


$$\acute{A}rea\ del\ segmento\ Circular\ = \acute{a}rea\ del\ sector\ Circular\ AOB - \ Area\ de\ \Delta AOB$$

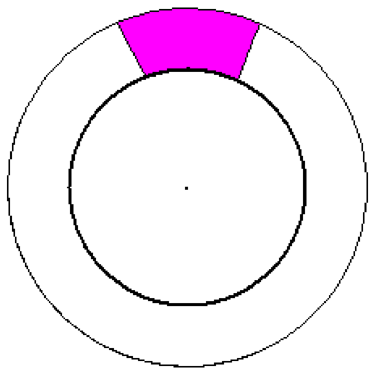
- **Zona circular:** Es la porción de círculo limitada por dos cuerdas.



- **Corona circular:** Es la porción de círculo limitada por dos circunferencias concéntricas.



- **Trapecio circular**: Es la porción de círculo limitada por dos radios y una corona circular.

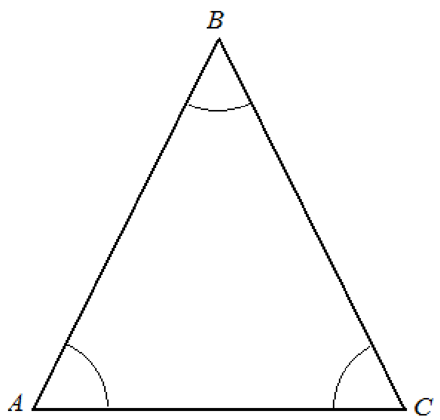


1.2.7 El Triángulo.

Un triángulo se compone de:

- **Base**: cualquiera de sus lados (lado opuesto al vértice).
- **Vértice**: la intersección de los lados congruentes (que conforman el ángulo)
- **Altura**: es el segmento perpendicular a una base o a su prolongación, trazada desde el vértice opuesto.
- **Lados:** son tres y conjuntamente con los ángulos definen las clases o tipos de triángulos.

$\boldsymbol{Triángulo\ \Delta ABC}$

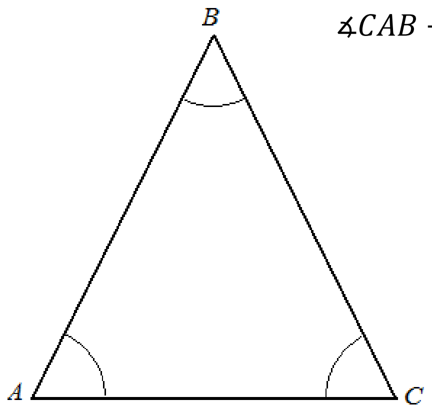


Características:

- Son figuras planas.
- Tienen área pero no volumen.
- Los triángulos son polígonos.

1.2.7.1 Propiedades de Triángulos.

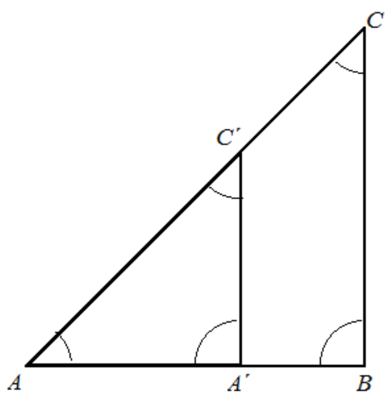
✓ La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º.



$$\measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCA = 180°$$

✓ Semejanza de triángulos. Proporcionalidad de sus lados.

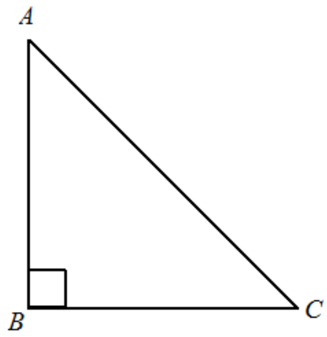
Dos triángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta A'B'C'$ son semejantes si tienen los mismos ángulos y los lados son proporcionales dos a dos.



$$\measuredangle ACB = \measuredangle AC'B; \measuredangle ABC = \measuredangle AA'C'$$

$$\frac{AB}{AA'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{CB}{C'A'}$$

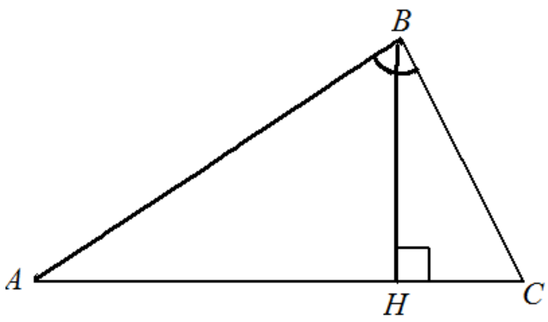
- ✓ Teorema de Pitágoras.



El ΔABC es rectángulo en B si y solo si

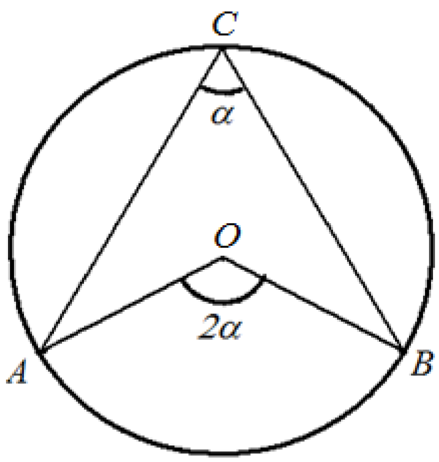
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

- ✓ Teorema de la altura.

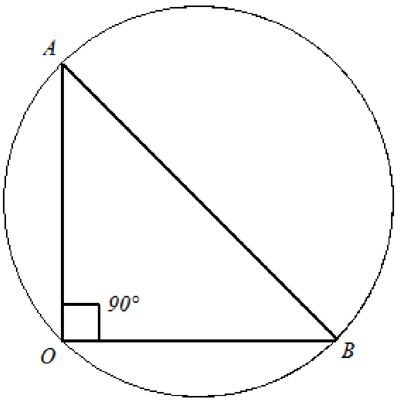


$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AH} \cdot \overline{HC}}$$

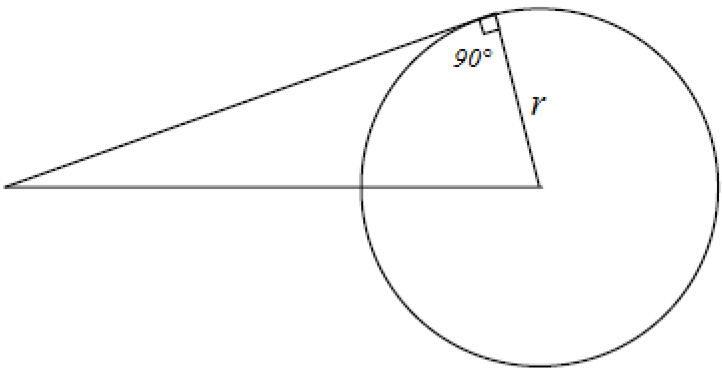
- ✓ Ángulos inscrito y central de un arco en una circunferencia. El ángulo inscrito es la mitad que el ángulo central. $\measuredangle ACB = \frac{1}{2} \measuredangle AOB$



- ✓ El ángulo inscrito que abarca un diámetro es recto (es decir de 90º) .



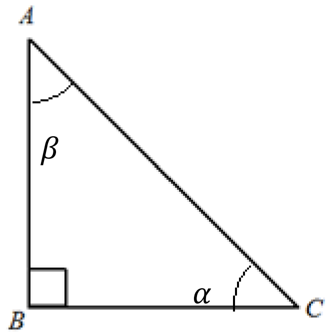
- ✓ La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.



1.2.8 Razones Trigonométricas.

Las razones trigonemétricas se utilizan fundamentalmente en la solución de triángulos rectángulos

$\measuredangle BAC = \beta;\ \measuredangle BCA = \alpha\ ;\measuredangle ABC = 90°$



Se tomará el ángulo α para definir las razones trigonométricas

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}; \qquad csc\ \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$cos\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}; \qquad sec\ \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$tan\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}; \qquad cot\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

1.2.27 Identidades trigonométricas.

- ✓ $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- ✓ $\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1$
- ✓ $\csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 1$
- ✓ $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$
- ✓ $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$
- ✓ $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$
- ✓ $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$
- ✓ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$
- ✓ $tan2\alpha = \frac{2\tan(\alpha)}{1-tan^2(\alpha)}$
- ✓ $\operatorname{sen}\alpha + \sin\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
- ✓ $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

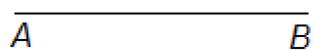
Sección III: Construcciones Básicas.

En esta sección se mostraran algunas construcciones que son las elementales para poder trazar figuras con un mayor grado de dificultad.

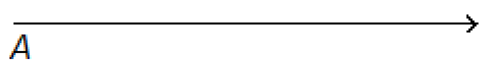
Construcción 1.3.1

Construcción de un segmento de recta igual a otro dado.

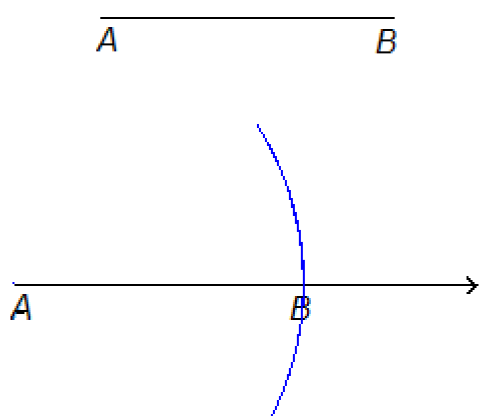
Paso 1: Trazar el segmento $\overline{AB}$



Paso 2: Trazar una semirrecta con origen en A.



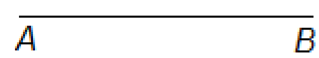
Paso 3: Tomar la medida $\overline{AB}$ con el compás con centro en A corte la semirrecta y marcar el punto con la letra B.



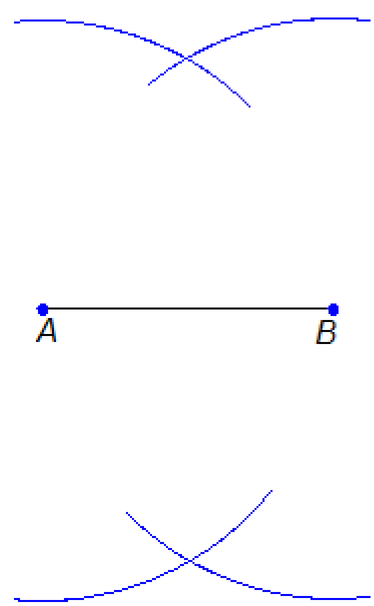
Construcción 1.3.2

Construcción del punto medio de un segmento.

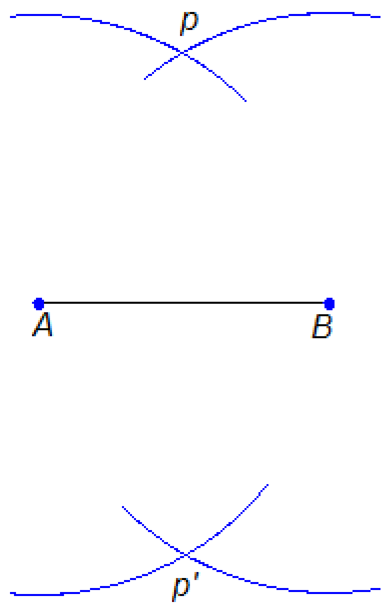
Paso 1: Trazar un segmento $\overline{AB}$



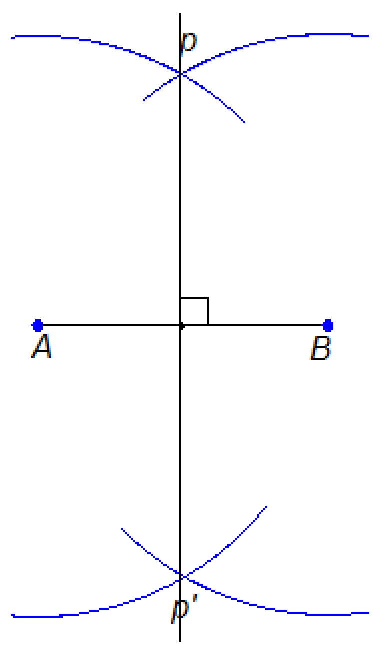
Paso 2: Con centro en A que pase por B y luego centro en B, trazar arcos que se corten arriba y abajo. No debe variar la medida del compás.



Paso 3: Marcar las intersecciones con las letras P y P'



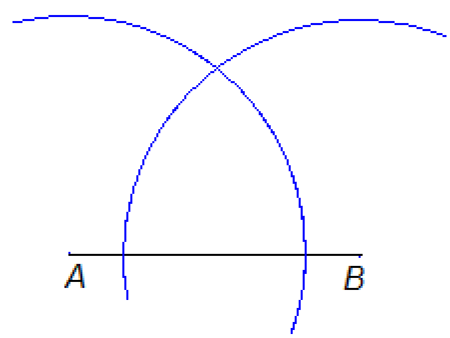
Paso 4: Unir P con P'. Estas dos rectas son perpendiculares



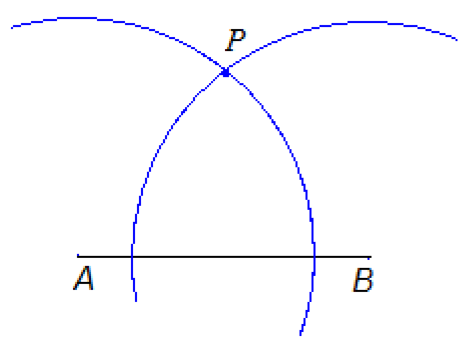
Construcción 1.3.3

Hallar un punto equidistante de los extremos de una recta dada.

Paso 1: Trazar dos arcos iguales sobre el segmento $\overline{AB}$, uno con centro en A y el otro con centro en B



Paso 2: Marcar la intersección con la letra P

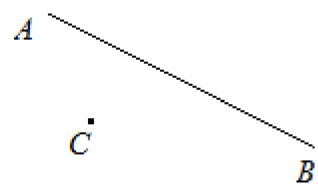


Este punto equidista de A y de B

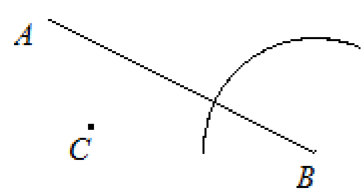
Construcción 1.3.4

Construir un punto simétrico al punto C dado, con respecto al segmento $\overline{AB}$.

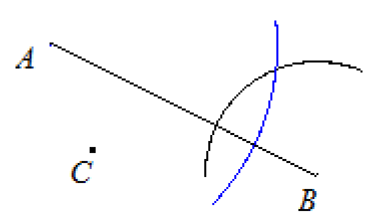
Paso 1: Trazar el segmento $\overline{AB}$ y marcar el punto libre C



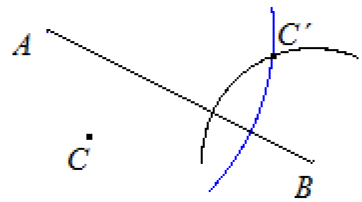
Paso 2: Tomar la medida de A al punto C y trace un arco con centro en B



Paso 3: Tomar la medida desde B al punto C y trace un arco desde A que corte al primer arco trazado



Paso 5: Marcar la intersección de los arcos con la letra $C´$

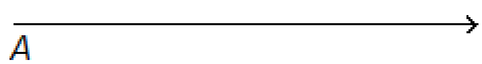


El punto $C´$ es el punto simétrico buscado.

Construcción 1.3.5

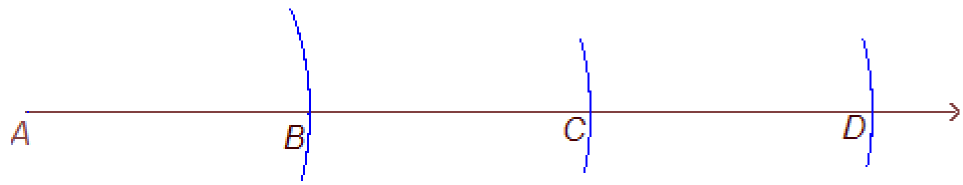
Trazar un segmento n veces mayor que un segmento dado.

Paso 1: Trazar una recta y marcar el punto A



Paso 2: Copiar con el compás la medida del segmento $\overline{AB}$

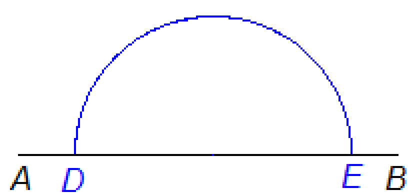
Paso 3: Desde A copiar la medida tantas veces como sea necesario.



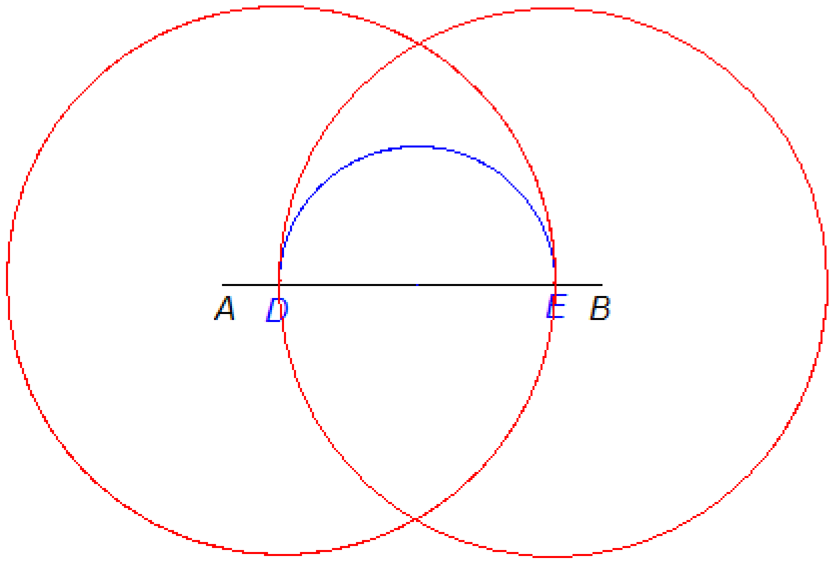
Construcción 1.3.6

Dividir un arco de circunferencia en dos partes iguales.

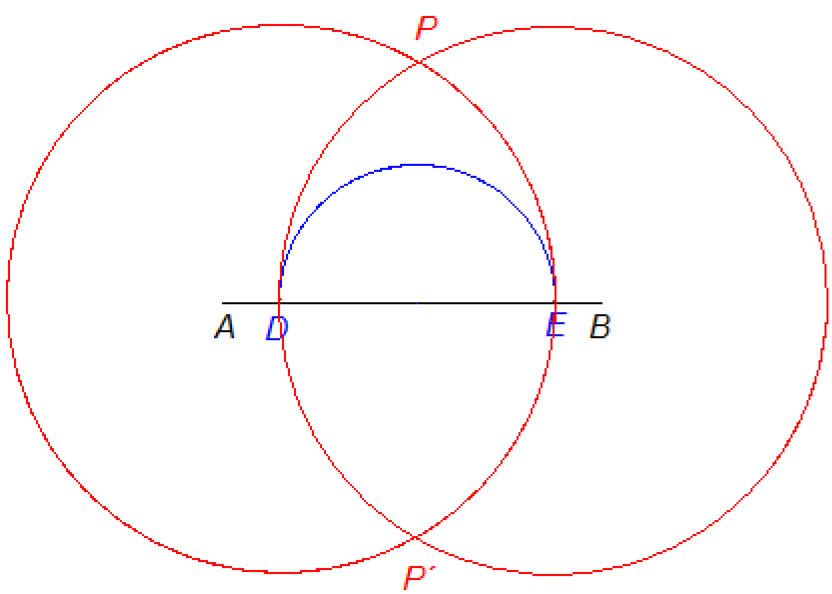
Paso 1: Trazar un arco DE



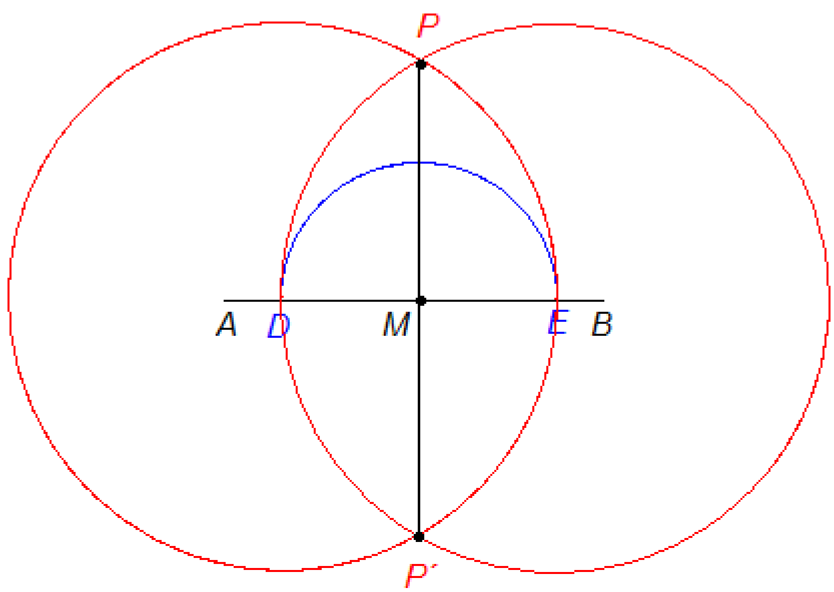
Paso 2: Con centro en D y luego en E trazar círculos con radios $\overline{DE}$ que se corten arriba y abajo.



Paso 3: Marcar estas intersecciones con las letras *P* y *P´*



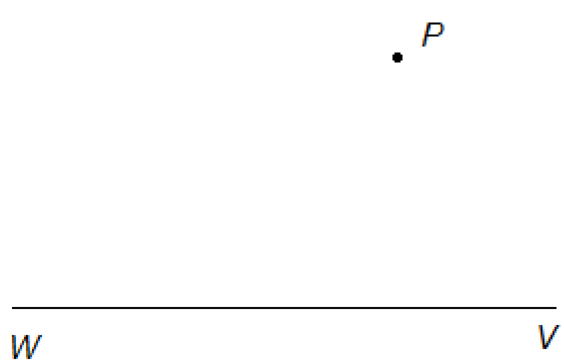
Paso 4: Unir P con P' y marcar la intersección de los dos segmentos con la letra M. El punto M es el punto medio de la recta $\overline{DE}$



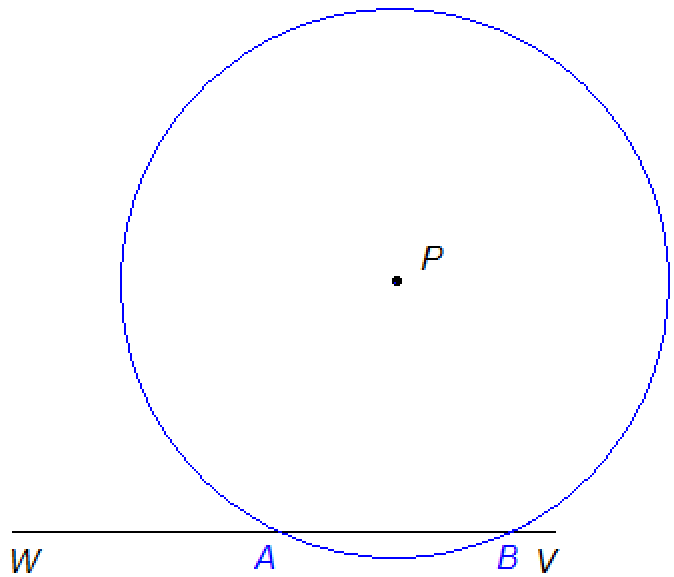
Construcción 1.3.7

Construir una perpendicular por un punto fuera de la recta dada.

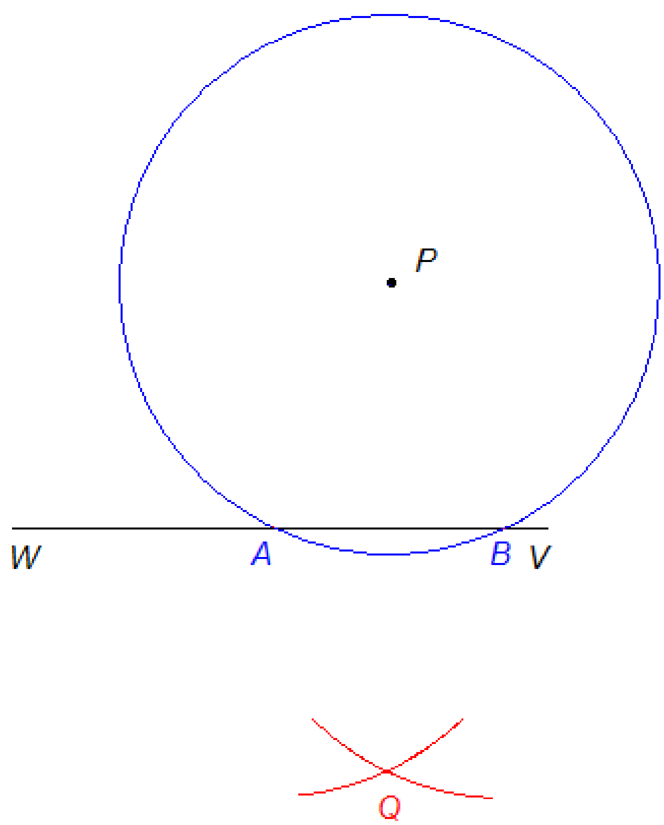
Paso 1: Trazar un segmento $\overline{WV}$ y un punto P, que no está en $\overline{WV}$.



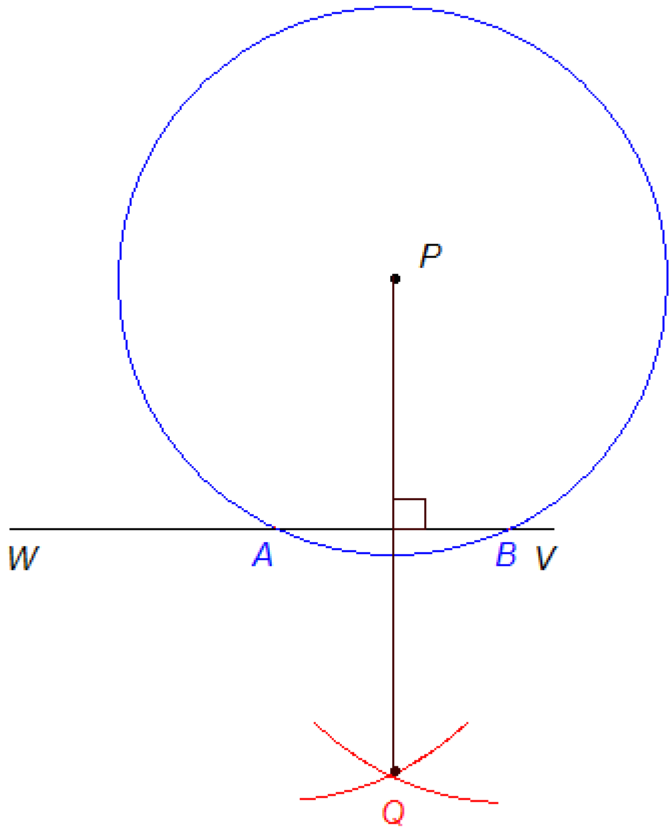
Paso 2: Apoyando el compás con centro en P trazamos un circulo que corten el segmento en A y B.



Paso 3: Ahora vamos a trazar, con el mismo radio, haciendo centro en A y luego en B dos arcos que se corten en Q.



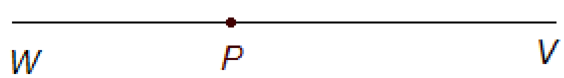
Paso 4: Unir Q con P y este segmento es perpendicular a $\overline{WV}$.



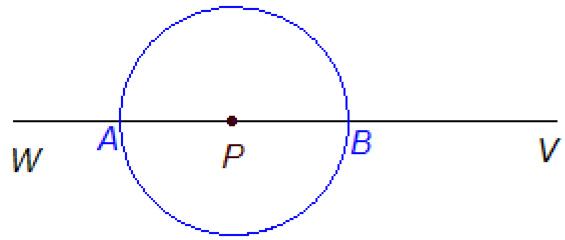
Construcción 1.3.8

Levantar una perpendicular desde cualquier punto de una recta.

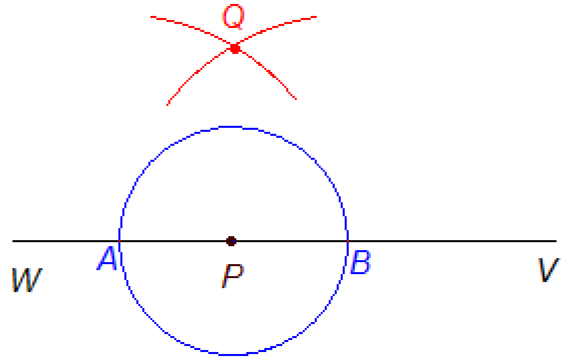
Paso 1: Trazar el segmento $\overline{WV}$ y un punto P en $\overline{WV}$.



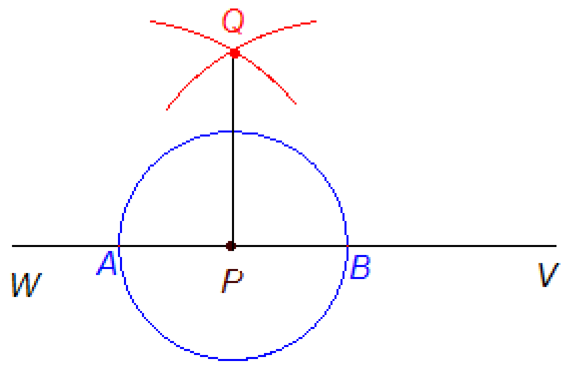
Paso 2: Con centro en P trazar una circunferencia que corte en A y en B el segmento.



Paso 3: Desde A y luego desde B trazar arcos de igual medida, marque la intersección con la letra Q.



Paso 4: Trazar un segmento desde Q hasta P.



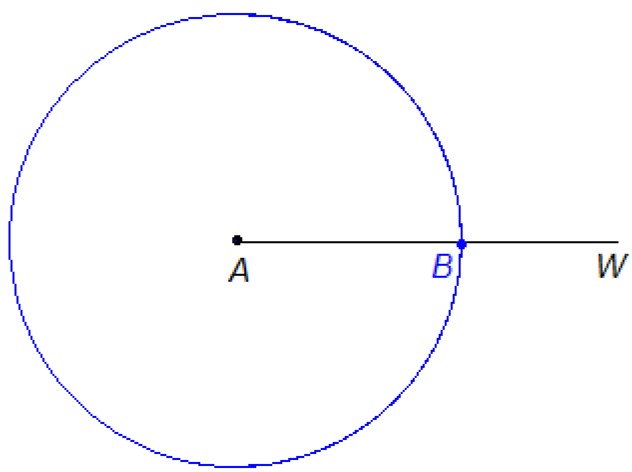
El segmento $\overline{PQ}$ es perpendicular a $\overline{WV}$

Construcción 1.3.9

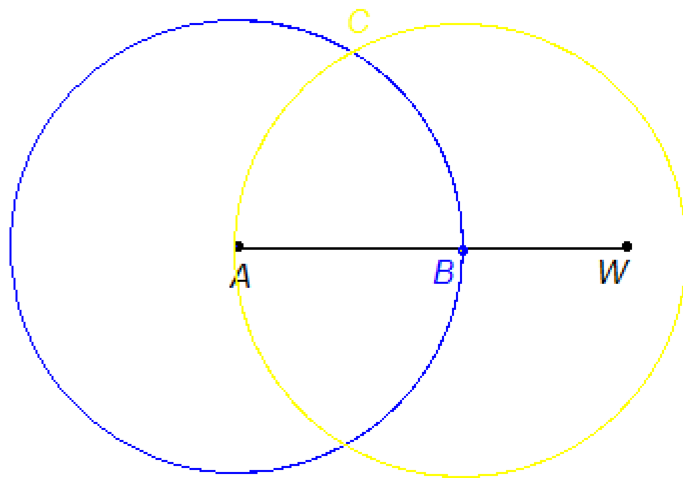
Levantar una perpendicular en el extremo A del segmento $\overline{AW}$.

Paso 1: Trazar el segmento $\overline{AW}$.

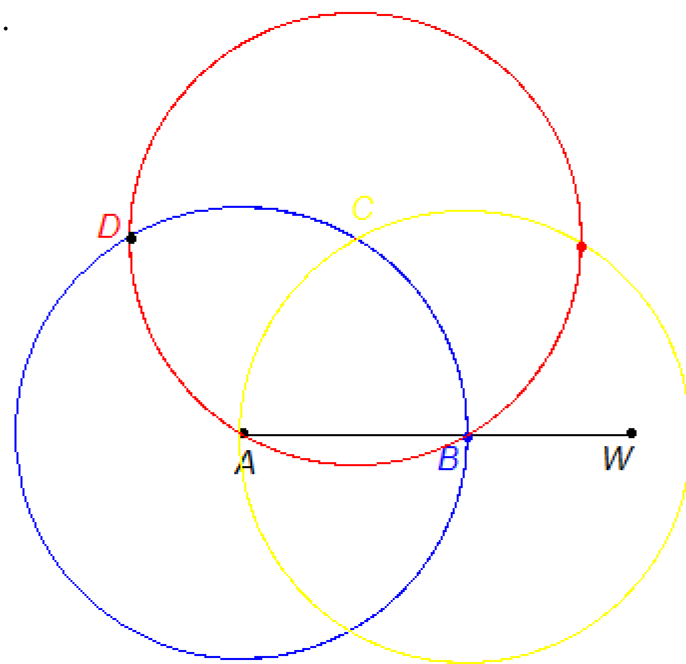
Paso 2: Trazar una circunferencia con centro en A y marcar la intersección con la letra B.



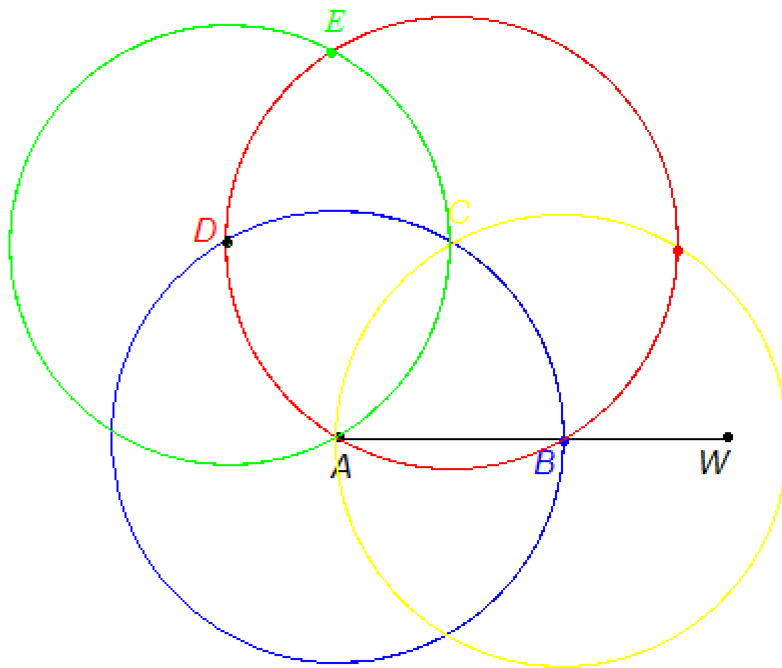
Paso 3: Trazar una circunferencia con centro en B y que pase por A, marcar la intersección de las circunferencias con la letra C.



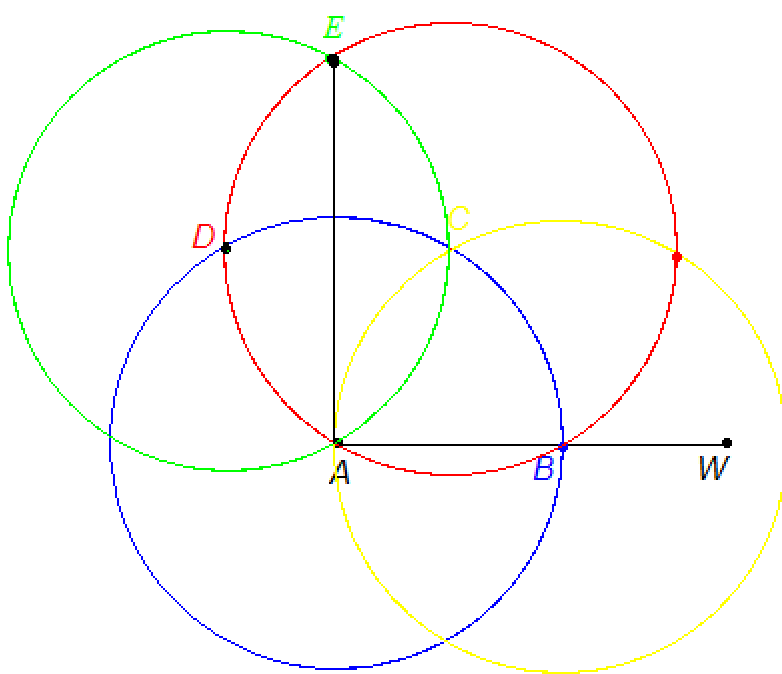
Paso 4: Trazar una circunferencia con centro en C y que pase por B, marcar la intersección con la letra D.



Paso 5: Trazar una circunferencia con centro en D y que pase por C, marcar la intersección con la letra E.



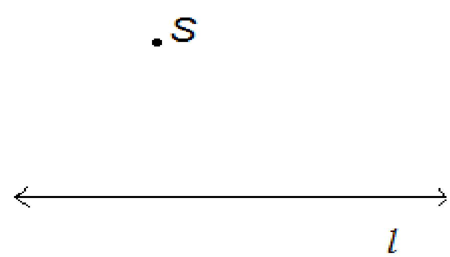
Paso 6: Unir E con A y se obtiene una recta perpendicular.



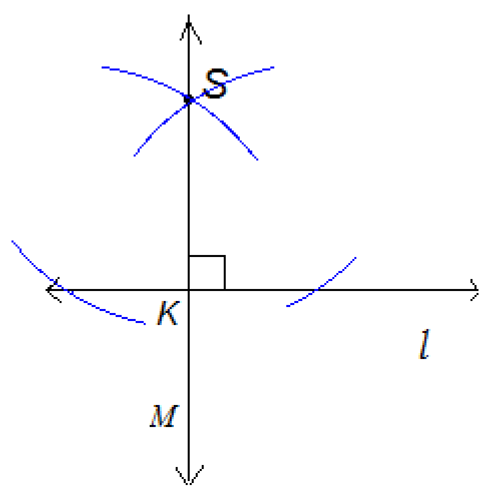
Construcción 1.3.10

Construir una paralela a una recta pasando por un punto S dado fuera de la recta.

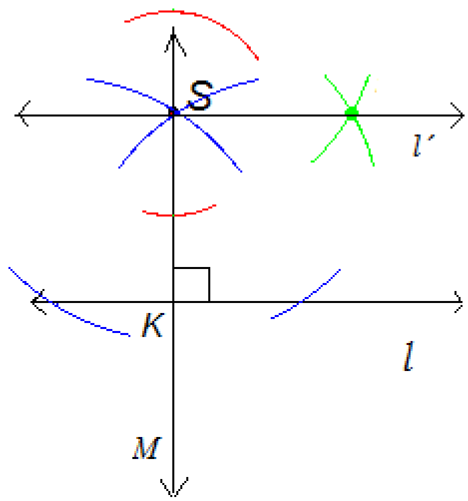
Paso 1: Trazar la recta l y el punto S fuera de la recta.



Paso 2: Trazar una perpendicular a la recta l (Constr. 1.3.7) desde el punto S marque el punto K



Paso 3: Trazar una recta l' perpendicular a la recta M (Constr. 1.3.8) que pase por el punto S.

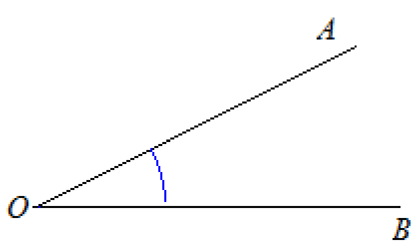


Esta recta obtenida es la recta paralela. $l \parallel l'$

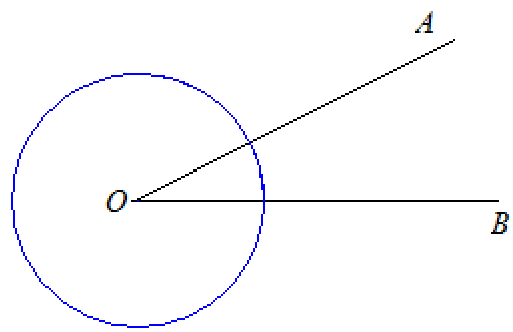
Construcción 1.3.11

Construir un ángulo igual a otro dado.

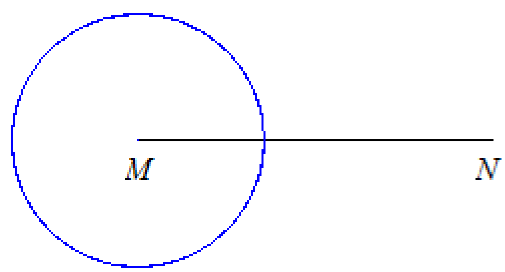
Paso 1: Trazar el ángulo $\measuredangle AOB$



Paso 2: Trazar una circunferencia con centro en O

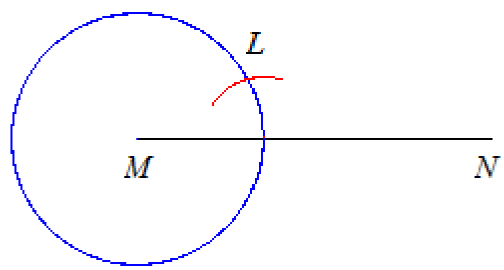


Paso 3: creamos un segmento $\overline{MN}$, con el mismo radio de la circunferencia trazada en el paso 2 dibujamos una circunferencia con centro en el extremo M del segmento $\overline{MN}$

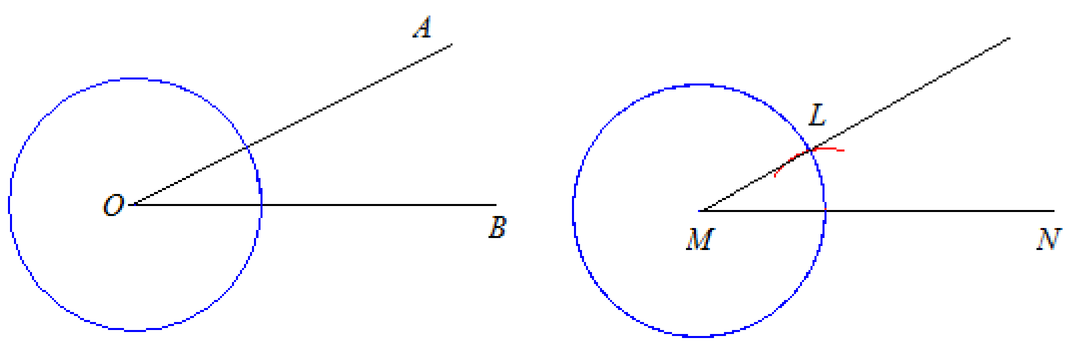


Paso 4: Ahora medimos con el compás la distancia entre las intersecciones de la circunferencia con los lados del ángulo.

Paso 5: Con esta abertura del compás apoyándonos en la intersección de la circunferencia con el segmento $\overline{MN}$ cortamos la circunferencia en el punto L



Paso 6: finalmente trazamos el otro lado del ángulo dibujando una recta que pase por los puntos M y L

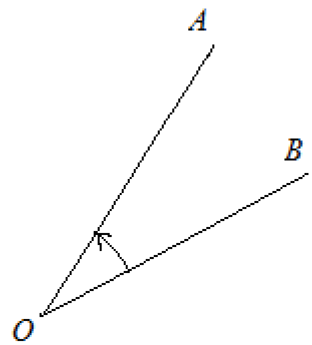


$$\measuredangle AOB = \measuredangle LMN$$

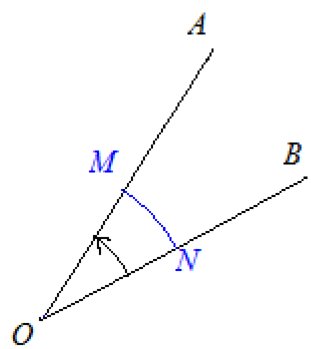
Construcción 1.3.12

Trazar la bisectriz de un ángulo

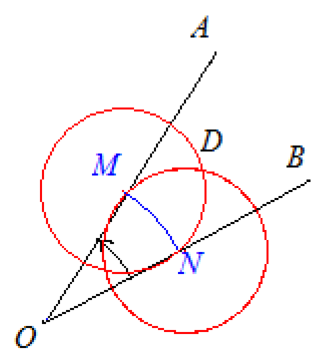
Paso 1: Trazar el ángulo $\measuredangle AOB$.



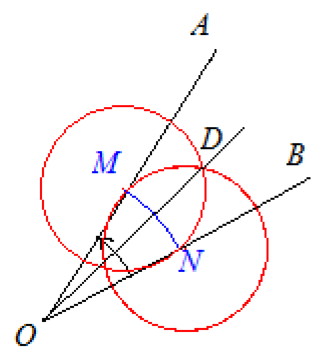
Paso 2: Con centro en O trazar un arco que corte los lados del ángulo en M y N .



Paso 3: Desde M y N trazar dos circunferencias de radio $\overline{MN}$, marcar la intersección con la letra D.



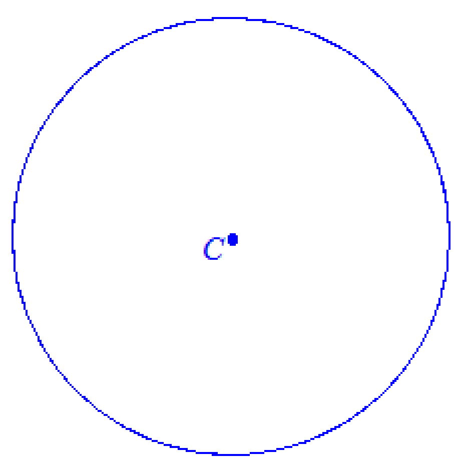
Paso 4: La recta que pasa por los puntos O y D divide al angulo $\measuredangle AOB$ en dos ángulos iguales donde $\overline{OD}$ es la bisectriz



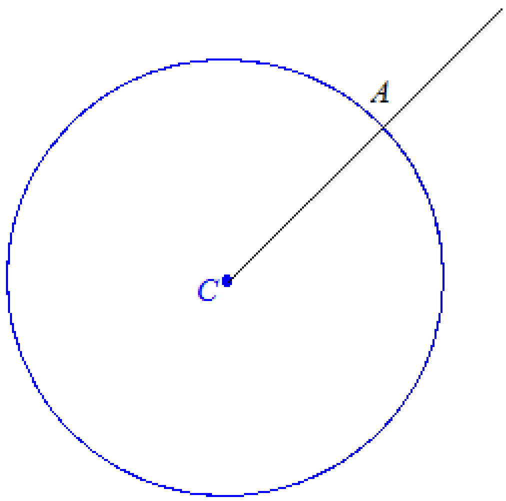
Construcción 1.3.13

Trazar una tangente por el punto A de la circunferencia

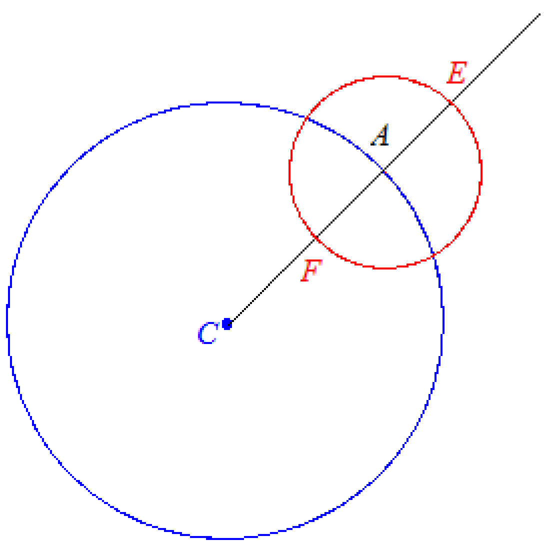
Paso 1: Trazar una circunferencia con centro C.



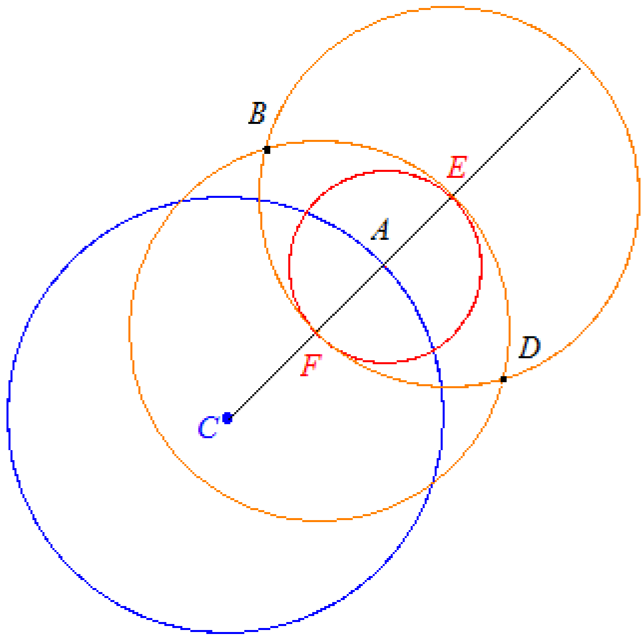
Paso 2: Desde C trazar una semirrecta y marcar la intersección con la letra A.



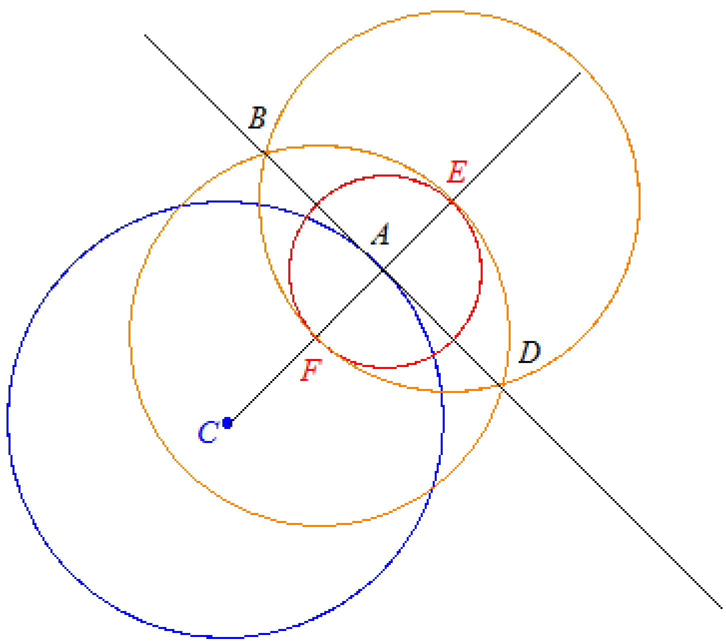
Paso 3: Con centro en A trazar una circunferencia y marcar las intersecciones E y F.



Paso 4: Trazar dos circunferencias con centro en E , F y radio $\overline{FE}$, marque las intersecciones B y D.



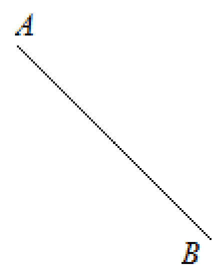
Paso 5: Unir B con D y se obtiene la recta tangente a la circunferencia con centro en C.



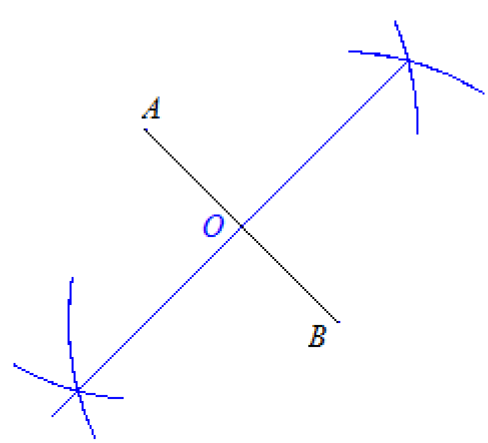
Construcción 1.3.14

Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa.

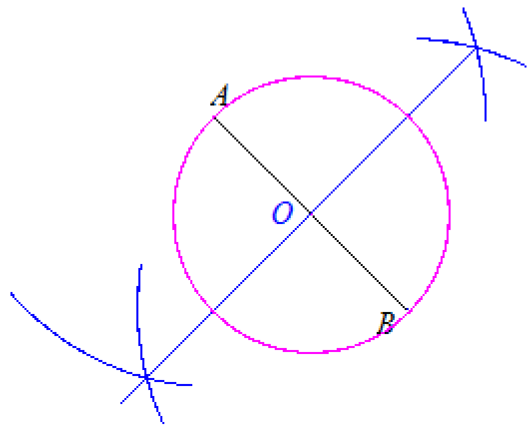
Paso 1: Trazar el lado $\overline{AB}$ del triángulo (hipotenusa).



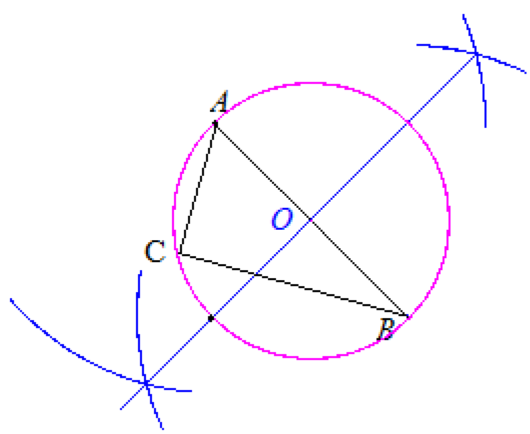
Paso 2: Buscar el punto medio (O) del segmento $\overline{AB}$.



Paso 3: Con centro en O trazar una circunferencia que pase por A y B.



Paso 4: Colocar un punto C sobre la circunferencia y una los puntos, obtendrá un ángulo rectángulo.



CAPÍTULO II.

En la antigua Grecia, a diferencia de las otras culturas de la época, los Matemáticos Griegos se interesaron en el estudio de esta Ciencia como una disciplina abstracta más bien que como un caudal de habilidades pragmáticas para hacer cuentas o realizar mediciones. Desarrollaron notables intereses y resultados en la teoría de los números y, de manera muy especial, en Geometría. En dichas áreas formularon cuestiones perspicaces. Los problemas que plantearon en geometría son aún de interés y sustanciosos.

2.1 Fundamentos Algebraicos para las Construcciones de Figuras Geométricas.

Definición 2.1.1 (Constructibilidad). Un punto $p \in R^2$ se dice que es construible en un solo paso de P_0, si p es la intersección de dos círculos, dos líneas, o una línea y un círculo construible en P_0. Si $r_i = (x_i, y_i)$ se puede construir en un solo paso de P_{i-1}, denotamos $P_i = P_{i-1} \cup \{r_i\}$.

Un punto r_n se dice que es construible a partir de P_0 si existe una sucesión finita de puntos $r_1, r_2, \dots, r_n \in R^2$ tal que para todo $i \in \{1, \dots n\}$, r_i se puede construir en un solo paso a partir del conjunto $P_0 \cup \{r_1, \dots, r_{n-1}\}$.

Definición 2.1.2 (Campo Punto). Sea P_0 un conjunto de puntos en R^2. Entonces el campo punto de P_0, denotado como K_0, es el más pequeño subcampo de R que contiene cada coordenada de cada punto en P_0. Si algún punto $r_i = (x_i, y_i)$ se puede construir en un solo paso de P_{i-1}, entonces el campo punto K_i de $P_i = P_{i-1} \cup \{r_i\}$ es el más pequeño subcampo de R que contiene a K_{i-1}, x_i y y_i.

Un resultado muy sencillo se desprende de la definición de un campo punto.

Lema 2.1.3. Sea $r_i = (x_i, y_i)$ un punto construible a partir de P_0, y sea K_i el campo punto de P_i. Entonces ambos x_i y y_i son las raíces de un polinomio de segundo grado sobre el campo K_{i-1}.

Demostración. Se tiene en cuenta que si r_i es construible a partir de P_0, debe ser construible en un solo paso a partir de un conjunto de puntos P_{i-1}. Por lo tanto debe ser r_i la intersección de dos líneas, dos círculos, o un círculo y una línea construible en P_{i-1}, y sólo tenemos que demostrar el lema para estos tres casos. Estos pueden ser probados con geometría de coordenadas simple.

- ✓ *Probaremos para un círculo y una línea construible en P_{i-1} de aquí los demás casos se demuestran similarmente:*

Considere una línea desde $A = (p, q)$ hasta $B = (r, s)$, y un círculo centrado en

$C = (t, u)$ con radio w, donde w es la distancia entre el centro y un punto en P_{i-1}, y sea $D = (x_0, y_0)$ un punto de intersección.

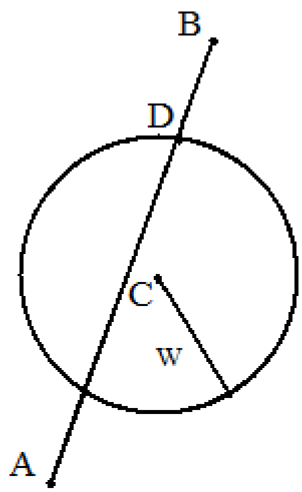


Figura 1

Encontraremos la ecuación de $\overline{AB}$:

$$m = \frac{s-q}{r-p}; \textit{la pendiente de la recta}$$

$$y - q = \frac{s-q}{r-p}(x-p); \textit{ecuación punto pendiente}$$

$$y = \frac{s-q}{r-p}(x-p) + q$$

La ecuación del círculo es $(x-t)^2 + (y-u)^2 = w^2$ $\quad$ $(\mathbf{2.1})$

Resolviendo para x_0 entonces $(x_0 - t)^2 + \left[\left(\frac{(s-q)}{(r-p)}(x_0 - p) + q\right) - u\right]^2 - w^2 = 0$

Las coordenadas de $A, B, C,$ y D son todos los elementos de K_{i-1}, como son w y w^2. Por lo tanto, la ecuación $(\mathbf{2.1})$ es una ecuación de segundo grado sobre K_{i-1}, y x_0 es una raíz de una ecuación de segundo grado sobre K_{i-1}. Despejando y_0 da una ecuación de segundo grado similar.

- ✓ *Probaremos para la intersección de dos líneas.*

Considere el segmento $\overline{AB}$ desde $A = (p, q)$ hasta $B = (r, s)$ y sea el segmento $\overline{MN}$ desde $M = (m, n)$ hasta $N = (k, l)$

Sea la ecuación del segmento $\overline{AB}$:

$$y - q = \frac{s - q}{r - p}(x - p)$$

Sea la ecuación del segmento $\overline{MN}$:

$$y - m = \frac{l - m}{k - n}(x - n)$$

Igualando y obteniendo x_0

$$\frac{s - q}{r - p}(x - p) + q = \frac{l - m}{k - n}(x - n) + m$$

Donde $\frac{s-q}{r-p} \neq \frac{l-m}{k-n}$ y están definidas.

$$\frac{x(s - q)}{r - p} - \frac{p(s - q)}{r - p} + q = \frac{x(l - m)}{k - n} - \frac{n(l - m)}{k - n} + m$$

$$\frac{x(s-q)}{r-p}-\frac{p(s-q)}{r-p}-\frac{x(l-m)}{k-n}+\frac{n(l-m)}{k-n}+q-m=0 \qquad (\mathbf{2.2})$$

Por lo tanto, la ecuación $(\mathbf{2.2})$ es una ecuación de primer grado sobre K_{i-1}, y x_0 es una raíz de una ecuación de primer grado sobre K_{i-1}. De manera similar se encuentra el valor de y_0 .

- ✓ *Probaremos para la intersección de dos círculos.*

Sean las ecuaciones $\qquad (x-t)^2+(y-u)^2=w^2$

$$(x-t')^2+(y-u')^2=w'^2$$

$$x^2-2tx+t^2+y^2-2uy+u^2=w^2 \qquad (\mathbf{2.3})$$

$$x^2-2t'x+t'^2+y^2-2u'y+u'^2=w'^2 \qquad (\mathbf{2.4})$$

Restando $(\mathbf{2.4})$ de $(\mathbf{2.3})$ obtenemos

$$2x(t'-t)-t'^2+t^2+2y(u'-u)-u'^2+u^2=w^2-w'^2$$

$$2x(t'-t)+2y(u'-u)=w^2-w'^2+t'^2-t^2+u'^2-u^2 \qquad (\mathbf{2.5})$$

Encontraremos la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las circunferencias siendo $\qquad y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)+y_0$

Resolviendo $(\mathbf{2.5})$ para x_0 entonces

$$2x_0(t' - t) + 2\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_0 - x_0) + y_0\right)(u' - u) - w^2 + w'^2 - t'^2 + t^2 - u'^2 + u^2 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación $(\mathbf{2.5})$ es una ecuación de primer grado sobre K_{i-1}, y x_0 es una solución de una ecuación de primer grado sobre K_{i-1}. De manera similar se encuentra el valor de y_0 .

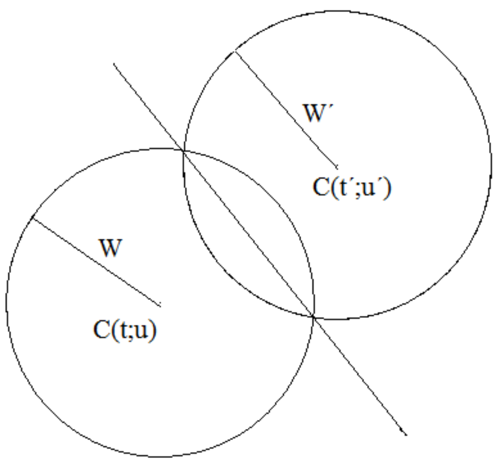


Figura 2

Lema 2.1.4 Si los puntos finales de cualquier segmento de línea en el plano son construibles, entonces también lo es el punto medio.

Demostración. Sea P y Q puntos construibles en el plano. Sea S y T los puntos donde el círculo centrado en P y que pasa por Q intersecan el círculo centrado en Q y que pasa por P. Entonces S y T son puntos construibles en el plano, y el punto R en el que el segmento $\overline{ST}$ intersecta el segmento $\overline{PQ}$ y es el punto medio. Así, este punto medio es un punto construible (ver Figura 3).

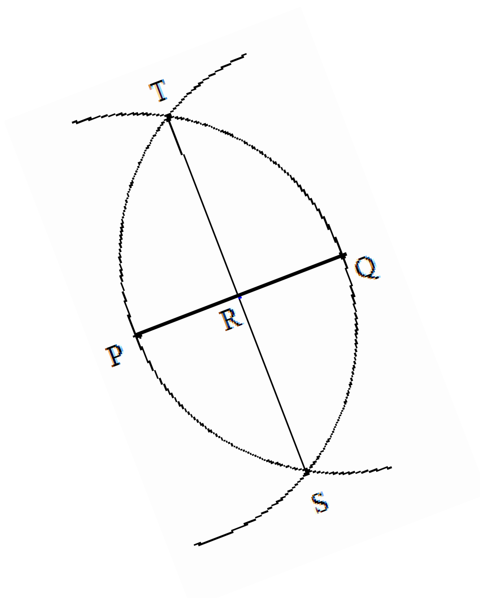


Figura 3. Bisección de un segmento de línea. □

Lema 2.1.5 Si tres vértices de un paralelogramo en el plano son construibles, entonces también lo es el cuarto vértice.

Demostración. Sean A, B, C y D los vértices del paralelogramo enumeradas en el sentido anti-horario (o en las agujas del reloj), donde A, B y D son puntos construibles. Debemos demostrar que C también es construible. Ahora, el punto medio E del segmento de línea $\overline{BD}$ es un punto construible, y el círculo con centro en E y que pasa por A cruzará a $\overline{AE}$ en el punto C. Por lo tanto C es un punto construible, según sea necesario (ver Figura 4).

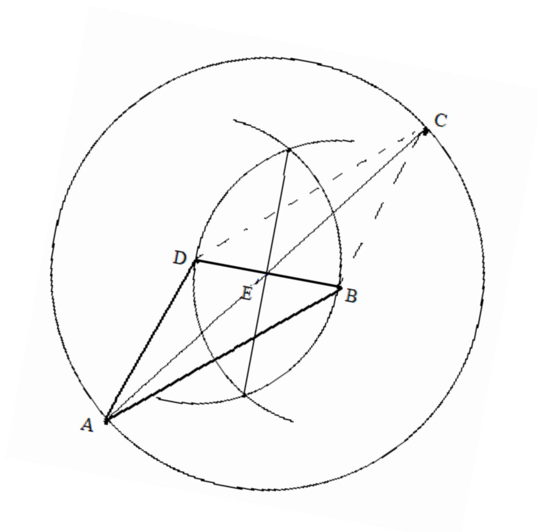


Figura 4. Completando un cuadrilátero □

Teorema 2.1.6. Sea $\boldsymbol{K}$ el conjunto de todos números reales x para los cuales el punto $(x, 0)$ es construible con regla y compás únicamente. Entonces $\boldsymbol{K}$ es un subcampo del campo de los números reales, y un punto (x, y) del plano es construible usando solo regla y compás, si y sólo si $x \in \boldsymbol{K}$ y $y \in \boldsymbol{K}$. Además, si $x \in \boldsymbol{K}$ y $x > 0$, entonces $\sqrt{x} \in \boldsymbol{K}$

Demostración. Evidentemente $0 \in \boldsymbol{K}$ y $1 \in \boldsymbol{K}$.

Sean x y n números reales que pertenecen a $\boldsymbol{K}$. Entonces $(x,\ 0)$ y $(n,\ 0)$ son puntos construibles del plano. Sea M el punto medio del segmento de línea cuyos extremos son $(x,\ 0)$ y $(n,\ 0)$.

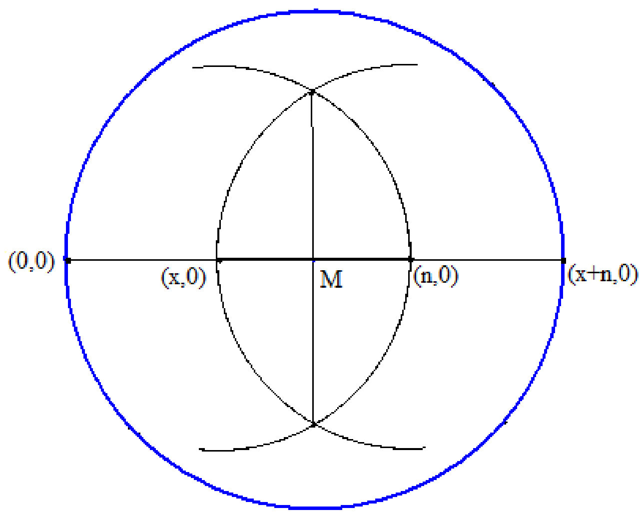


Figura 5. Adición de números construibles.

Entonces M es construible (*Lema 2.1.4*), y $M\ = (\frac{1}{2}(x+n), 0)$. El círculo centrado en M y que pasa por el origen intersecta el eje X en el origen y en el punto $(x+n, 0)$. Por lo tanto $(x+n, 0)$ es un punto construible, además $(x\ +\ n) \in \boldsymbol{K}$ (ver Figura 5). También el círculo centrado en el origen y pasa a través de $(x,\ 0)$ intersecta el eje X en $(-x,\ 0)$. Luego $(-x,\ 0)$ es un punto construible, y por lo tanto $-x \in \boldsymbol{K}$. Supongamos que si $x \in \boldsymbol{K}$, entonces el punto $(0,\ x)$ es construible. Ahora bien, si $x \in \boldsymbol{K}$ y $x\ \neq\ 0$ entonces $(x,\ 0)$ y $(-x,\ 0)$ son puntos construibles, y el círculo centrado en $(x,\ 0)$ y que pasa por $(-x,\ 0)$ intersecta el círculo centrado en $(-x,\ 0)$ y que pasa por $(x,\ 0)$ en dos puntos que están en el eje Y. Estos dos puntos $(0, \sqrt{3}\,x)$ y $(0, -\sqrt{3}\,x)$ son construibles, y por lo tanto el círculo centrado en el origen y que pasa por $(x, 0)$ intersecta el eje Y en dos puntos que son construibles $(0, x)$ y $(0, -x)$. Así, si $x \in K$ entonces el punto $(0, x)$ es construible

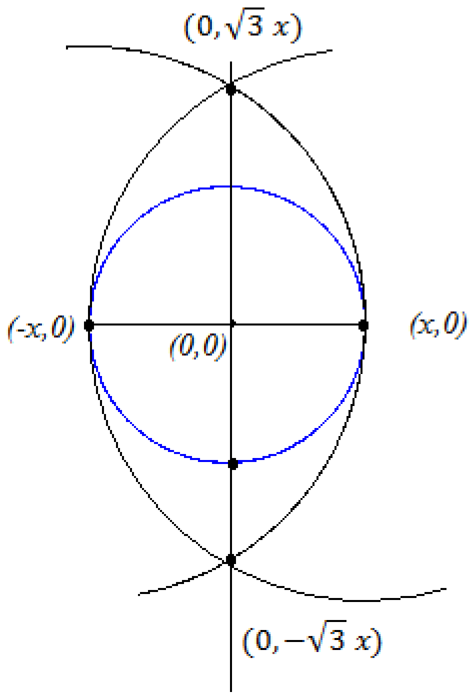
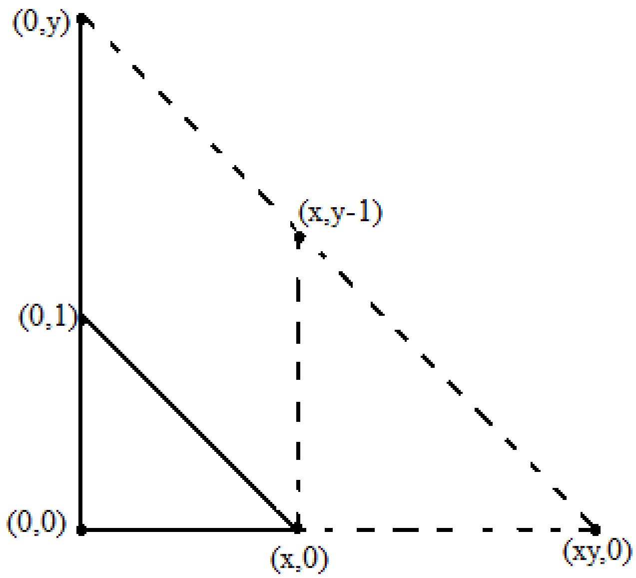


Figura 6. Construcción de $(0, x)$.

Nota: Se encuentra $\sqrt{3}x$ al aplicar Pitágoras ya que la hipotenusa es $2x$ y uno de sus catetos x.

Sea x e y números reales que pertenecen a $\boldsymbol{K}$. Entonces los puntos $(x, 0)$, $(0, y)$ y $(0, 1)$ son construibles. El punto $(x, y-1)$ es construible, puesto que es el cuarto vértice de un paralelogramo que tiene tres vértices en los puntos construibles $(x, 0)$, $(0, y)$ y $(0, 1)$ (*Lema 2.1.5*). Pero la línea que pasa a través de los dos puntos construibles

$(0,\ y)$ y $(x,\ y-1)$ intersecta el eje X en el punto $(xy,\ 0)$. Entonces el punto $(x,\ 0)$ es construible, y por lo tanto $xy \in \boldsymbol{K}$



Figuras 7.

Construcción de $(xy, 0)$ ya que la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, y)$ y $(x, y-1)$ es $Y = \frac{-X}{x} + y$

Ahora bien, supongamos que $x, y \in \boldsymbol{K}$ y $y \neq 0$. El punto $(x, 1 - y)$ es construible, ya que es el cuarto vértice de un paralelogramo con vértices en los puntos construibles $(x, 0), (0, y)$ y $(0, 1)$. El segmento de recta que une los puntos construibles $(0, 1)$ y $(x, 1 - y)$ intersecta el eje X en el punto $(xy^{-1}, 0)$. Por lo tanto $(xy^{-1}) \in \boldsymbol{K}$.

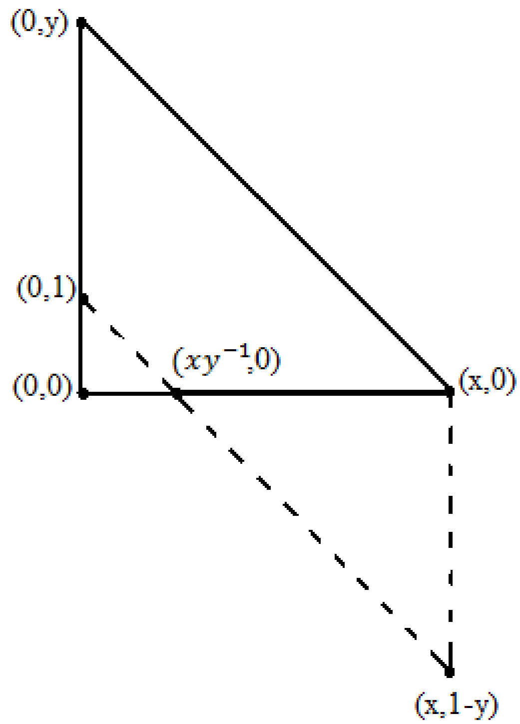


Figura 8.

Construcción de $(xy^{-1}, 0)$ ya que la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,1)$ y $(x, 1 - y)$ es $Y = 1 - \frac{Xy}{x}$

Supongamos que $x \in \boldsymbol{K}$ y que $x > 0$. Entonces $(x + 1) \in \boldsymbol{K}$. Así, si $B = (x + 1,0)$ $C = (\frac{x+1}{2}, 0)$ son puntos construibles. Con centro en C trazamos la circunferencia de radio $\frac{x+1}{2}$. Trazamos la recta perpendicular al eje de las abscisas que pasa por el punto $E = (1, 0)$ y la intersección de esta recta con la circunferencia la llamamos

$F = (1, z)$. La construcción obtenida es la siguiente:

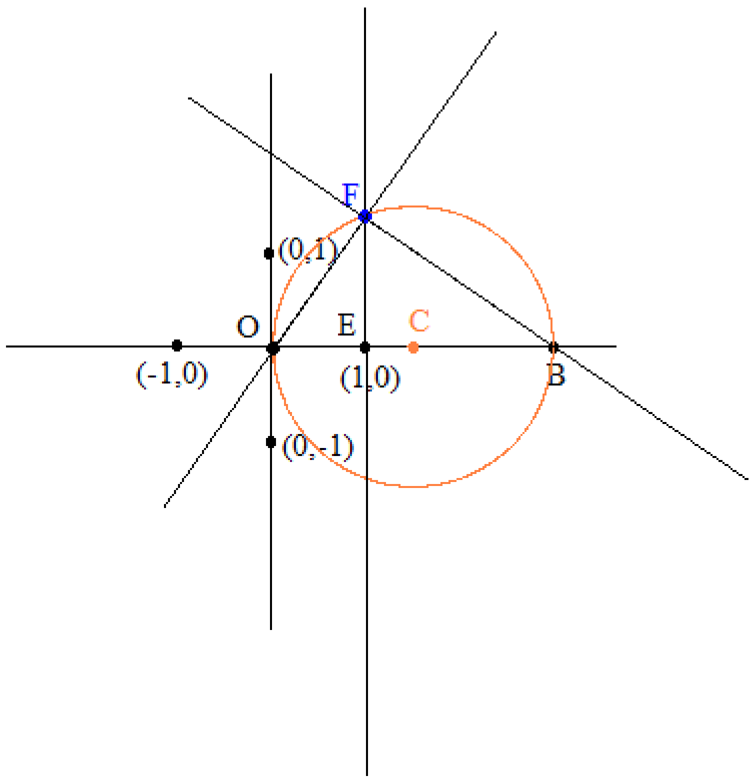


Figura 9.

$(\overline{OF})^2 = (\overline{OE})^2 + (\overline{EF})^2$; $(\overline{FB})^2 = (\overline{FE})^2 + (\overline{EB})^2$

Sumando ambas identidades y volviendo a usar Pitágoras tenemos que

$$2(\overline{EF})^2 + (\overline{OE})^2 + (\overline{EB})^2 = (\overline{OE} + \overline{EB})^2$$

$$(\overline{EF})^2 = \overline{OE}.\overline{EB}$$

Usando que $\overline{OE} = 1$ y que $\overline{EB} = x$ tenemos $z^2 = x$ por lo tanto $z = \sqrt{x}$ es un numero construible.

Los resultados anteriores muestran que $\boldsymbol{K}$ es un sub campo del campo de los números reales. Además si $x,\, y \in \boldsymbol{K}$ y entonces el punto (x, y) es construible, ya que es el cuarto vértice de un rectángulo con vértices en los puntos construibles (0, 0), $(x$, 0) y (0, y). Por el contrario, supongamos que el punto $(x,\, y)$ es construible. Afirmamos que el punto $(x$, 0) es construible y por lo tanto $x \in \boldsymbol{K}$. Este resultado es obviamente cierto si y = 0.

Si $y \neq 0$ entonces los círculos centrados en los puntos (0, 0) y (1, 0) y que pasan por (x, y) se intersectan en los dos puntos (x, y) y $(x, -y)$. El punto $(x$, 0) es así el punto en el que la línea que pasa por los puntos construibles (x, y) y $(x, -y)$ intersecta el eje X, y así sí es construible. El punto $(0, y)$ es entonces el cuarto vértice de un rectángulo con vértices en los puntos construibles (0,0), $(x, 0)$ y (x, y), y es así sí construible. El círculo centrado en el origen y pasando por $(0, y)$ intersecta el eje X en $(y, 0)$. Entonces $(y, 0)$ es construible, y por lo tanto $y \in \boldsymbol{K}$.

Así, hemos demostrado que un punto (x, y) es construible usando regla y compás únicamente si y sólo si $x, y \in \boldsymbol{K}$ según sea necesario. □

Teorema 2.1.7 Sea $\boldsymbol{L} \supset \boldsymbol{K} \supset \boldsymbol{F}$ tres campos tales que ambas $[\boldsymbol{L}\!:\boldsymbol{K}]$ y $[\boldsymbol{K}\!:\boldsymbol{F}]$ son finitas. Entonces $\boldsymbol{L}$ es una extensión finita de $\boldsymbol{F}$ y $[\boldsymbol{L}\!:\boldsymbol{F}] = [\boldsymbol{L}\!:\boldsymbol{K}][\boldsymbol{K}\!:\boldsymbol{F}]$.

Demostración. Se probará que $\boldsymbol{L}$ es una extensión de $\boldsymbol{F}$ mostrando explícitamente una base finita de $\boldsymbol{L}$ sobre $\boldsymbol{F}$. Al hacerlo se obtendrá el resultado más fuerte afirmando en el teorema, a saber que $[\boldsymbol{L}\!:\boldsymbol{F}] = [\boldsymbol{L}\!:\boldsymbol{K}][\boldsymbol{K}\!:\boldsymbol{F}]$.

Supóngase que $[\boldsymbol{L}:\boldsymbol{K}] = m$ y $[\boldsymbol{K}:\boldsymbol{F}] = n$; entonces $\boldsymbol{L}$ tiene su base $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_m$ sobre $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{K}$ tiene una base $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots, w_n$ sobre $\boldsymbol{F}$. Se probará que los mn elementos $v_i w_j$, donde $i = 1,2, \ldots, m$ y $j = 1,2, \ldots, n$ constituyen un base de $\boldsymbol{L}$ sobre $\boldsymbol{F}$.

Se empieza por demostrar que, por lo menos, estos elementos generan $\boldsymbol{L}$ sobre $\boldsymbol{F}$; esto demostrará que L es una extensión finita de $\boldsymbol{F}$. Sea $a \in \boldsymbol{L}$; dado que los elementos $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_m$ forman una base $\boldsymbol{L}$ sobre $\boldsymbol{K}$, se tiene $a = k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m$, donde $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_m$ están en $\boldsymbol{K}$. Puesto que $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots, w_n$ es una base de $\boldsymbol{K}$ sobre $\boldsymbol{F}$, se puede expresar cada k_i como $k_i = f_{i1} v_1 + f_{i2} v_2 + \cdots + f_{in} v_n$, donde los f_{ij} están en $\boldsymbol{F}$. Sustituyendo esta expresión de los k_i en la expresión anterior de a, se obtiene

$$a = (f_{11} v_1 + f_{12} v_2 + \cdots + f_{1n} v_n) w_1 + \cdots + (f_{m1} v_1 + f_{m2} v_2 + \cdots + f_{mn} v_n) w_m.$$

Por lo tanto, descifrando explícitamente esta suma, se obtiene que

$$a = f_{11} v_1 w_1 + f_{12} v_2 w_1 + \cdots + f_{ij} v_j w_i + \cdots + f_{mn} v_n w_m.$$

De esta manera los mn elementos $v_i w_j$ de $\boldsymbol{L}$ generan $\boldsymbol{L}$ sobre $\boldsymbol{F}$; por lo tanto, $[\boldsymbol{L}:\boldsymbol{F}]$ es finita y, en efecto $[\boldsymbol{L}:\boldsymbol{F}] \leq mn$.

Para demostrar que $[\boldsymbol{L}:\boldsymbol{F}] = mn$, se necesita solamente probar que los mn elementos $v_i w_j$ anteriores son linealmente independientes sobre $\boldsymbol{F}$, ya que entonces, junto con el hecho de que generan $\boldsymbol{L}$ sobre $\boldsymbol{F}$, se tendrían que forman una base de $\boldsymbol{L}$ sobre $\boldsymbol{F}$. Donde, por *Teorema 1.1.9.1* se llegaría al resultado deseado donde $[\boldsymbol{L}:\boldsymbol{F}] = mn = [\boldsymbol{L}:\boldsymbol{K}][\boldsymbol{K}:\boldsymbol{F}]$.

Supóngase entonces que para algún b_{ij} en $\boldsymbol{F}$ se tiene la relación

$$0 = b_{11}v_1w_1 + b_{12}v_1w_1 + \cdots + b_{1n}v_1w_1 + b_{21}v_2w_1 + \cdots + b_{2n}v_2w_n + \cdots + b_{m1}v_mw_1$$
$$+ \cdots + b_{mn}v_mw_n$$

Reuniendo términos en esta suma, se obtiene que $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_mv_m = 0$, donde $c_1 = b_{11}w_1 + \cdots + b_{1n}w_n, .., c_m = b_{m1}w_1 + \cdots + b_{mn}w_n$ puesto que los c_i son elementos de K, se tiene que $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. Por consiguiente, solo la combinación lineal trivial, con todos los coeficientes cero, de los elementos v_iw_j sobre $\boldsymbol{F}$ puede ser cero. Por lo tanto, los v_iw_j son linealmente independientes sobre $\boldsymbol{F}$. Anteriormente se vio que esto era suficiente para probar el teorema. $\square$

Teorema 2.1.8 (criterio de Wantzel) Sea $P_0 \subseteq R^{\mathbf{2}}$, y sea K_0 será su campo de punto. A continuación, para todos los puntos construibles $r = (x, y)$, los grados $[K_0\ (x): K_0]\ y\ [K_0\ (y): K_0]$ son potencias de 2.

Demostración. El punto $r = (x, y)$ se puede construir a partir de P_0, por lo que existe una sucesión infinita de puntos $r_1, \ldots\ldots r_n$ tal que para todo $i \in \{1, \ldots n\}$, r_i es construible en un paso de $P_0 \cup \{r_1, \ldots r_{i-1}\}$. Por *Teorema 2.1.7*, si $r_i = (x_i, y_i)$, entonces $[K_{I-1}\ (x_i): K_{I-1}]$ es 1 si el polinomio cuadrático sobre K_{I-1} de la que x_i es una raíz es reducible más K_{I-1}, o 2 si es irreducible. Lo mismo vale para $[K_{I-1}\ (y_i): K_{I-1}]$.

Así que, tenemos

$[K_{i-1}(x_i, y_i),: K_{i-1}] = [K_{i-1}(x_i, y_i): K_{i-1}(x_i)][K_{i-1}(x_i) : K_{i-1}] = 2^n$

donde $n = 0, 1, o$ 2, y $K_i = K_{I-1}(x_i, y_i)$, por lo que $[K_i : K_{i-1}]$ es una potencia de 2. Si K_n es el campo de punto de P_n, a continuación.

$[K_n : K_0] = [K_n : K_{n-1}] \dots . [K_1 : K_0]$ y $[K_n : K_0]$ es una potencia de 2, ya que el grado de cada $[K_l : K_{l-1}]$ es 2 con $1 \leq l \leq n$.

Sino $[K_n : K_0] = [K_n : K_0(x)][K_0(x) : K_0]$ para $[K_0(x) : K_0]$ es una potencia de 2. Pasos similares muestran el mismo para $[K_0\ (y): K_0]$. □

Nota: Dado un subconjunto A de R^2; vamos a denotar por $\bar{A}$ al conjunto de las coordenadas de los elementos de A**.**

Lema 2.1.9 Sea A un subconjunto de $\mathbb{C}$ y $P = (a, b) \in R^2$. Si P es construible con regla y compas en un paso a partir de A entonces $[\mathbb{Q}(\bar{A} \cup \{a, b\}) : \mathbb{Q}(\bar{A})] \leq 2$.

Demostración. Tomemos $\boldsymbol{K} = \mathbb{Q}(\bar{A})$ y tendremos que demostrar que $z = a + bi$ es construible en un paso a partir de A si y solo si $[\boldsymbol{K}(a, b): \boldsymbol{K}] \leq 2$.

Empezamos suponiendo que $z = a + bi = (a, b)$ es construible en un paso a partir de A y consideremos las tres construcciones posibles:

✓ *z está en la intersección de dos rectas distintas que pasan por dos parejas de puntos de A.*

Supongamos que las rectas son ℓ_1 y ℓ_2 y las parejas de puntos respectivas son

$P_1 = (p_{11}, p_{12}), Q_1 = (q_{11}, q_{12}))$ y $P_2 = (p_{21}, p_{22}), Q_2 = (q_{21}, q_{22}))$ respectivamente, con lo que las coordenadas de estos cuatro puntos están en $\bar{A}$. Ademas las ecuaciones de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son

$$\frac{x - p_{11}}{q_{11} - p_{11}} = \frac{y - p_{12}}{q_{12} - p_{12}} \qquad (\mathbf{2.6})$$

$$\frac{x - p_{21}}{q_{21} - p_{21}} = \frac{y - p_{22}}{q_{22} - p_{22}} \qquad (\mathbf{2.7})$$

Trabajaremos $(\mathbf{2.6})$;

$$x - p_{11} = \frac{q_{11} - p_{11}}{q_{12} - p_{12}}(y - p_{12})$$

$$x - p_{11} = \frac{q_3}{p_3}(y - p_{12}) \qquad donde\ q_3, p_3 \neq 0\ pertencen\ a\ \boldsymbol{K}$$

$$x - p_{11} = r_3 y - r_3 p_{12} \qquad donde\ r_3 = \frac{q_3}{p_3}\ esta\ en\ \boldsymbol{K}$$

$$a_{11}x - r_3 y - p_{11} - r_3 p_{11} = 0 \qquad donde\ a_{11} = 1$$

$$a_{11}x + (-r_3)y - b_1 = 0$$

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \qquad donde\ a_{11}, a_{12}\ y\ b_1\ estan\ en\ \boldsymbol{K}$$

De igual forma para $(\mathbf{2.7})$.

Que se convierten en dos ecuaciones lineales

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Con $a_{ij} \in \boldsymbol{K}$ para todo i, j. Como las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son distintas el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado, es decir el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de 0, y las coordenadas a y b del punto $z = (a, b)$, solución del sistema, se expresa mediante la Regla de Cramer a partir de los coeficientes de la ecuación mediante operaciones suma, resta, producto y cociente, con lo que a y b están en $\boldsymbol{K}$ y por tanto $[\boldsymbol{K}(a, b): \boldsymbol{K}] = 1$.

- ✓ *z está en la intersección de una recta ℓ que pasa por dos puntos de A* y *una circunferencia C centrada en un punto de A y de radio la distancia entre dos puntos de A*.

Como en el caso anterior la ecuación de la recta $px + qy = n$ tiene coeficientes en $\boldsymbol{K}$. También tiene coeficientes en K la ecuación de la circunferencia

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

donde (c_1, c_2) es el centro y $r^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2$, siendo (p_1, q_1) y (p_2, q_2) dos puntos de A**.** Por tanto (a, b) es una de las soluciones del sistema de ecuaciones

$$px + qy = n$$

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

Y solo hay que mostrar que las soluciones pertenecen a una extensión de grado ≤ 2 de $\boldsymbol{K}$. Como $p \neq 0$ o $q \neq 0$, por simetría podemos suponer que $q \neq 0$, con lo que despejando y en la primera ecuación obtenemos $y = \frac{n-px}{q}$ y sustituyendo en la segunda obtenemos

$$(x - c_1)^2 + \left(\frac{n - px}{q} - c_2\right)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2c_1x + c_1^2 + \left(\frac{n - px}{q}\right)^2 - 2\left(\frac{n - px}{q}\right)c_2 + c_2^2 = r^2$$

$$x^2 - 2c_1x + c_1^2 + \frac{n^2 - 2npx + p^2x^2}{q^2} - \frac{2c_2n - 2c_2px}{q} + c_2^2 - r^2 = 0$$

$$0 = q^2x^2 - 2q^2c_1x + 2q^2{c_1}^2 + n^2 - 2npx + p^2x^2 - 2c_2nq - 2c_2pqx + c_2^2q^2 - r^2$$

$$0 = (p^2 + q^2)x^2 + (-2q^2c_1 - 2np - 2c_2pq)x + (2q^2{c_1}^2 + n^2 - 2c_2nq + c_2^2q^2 - r^2)$$

$$0 = jx^2 + hx + k$$

Cuyas soluciones pertenecen a $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{K}(\sqrt{\Delta})$ donde $\Delta = \sqrt{h^2 - 4jk}$.

Entonces $a, b = \frac{r-pa}{q} \in \boldsymbol{E}$ y concluimos que $[\boldsymbol{K}(a,b):\boldsymbol{K}] \leq [\boldsymbol{E}:\boldsymbol{K}] \leq 2$.

- ✓ *z está en la intersección de dos circunferencias con centros en A y radios las distancias entre parejas de puntos de A.*

En este caso se plantea un sistema de dos ecuaciones cuadráticas con coeficientes en $\boldsymbol{K}$:

$$(x - c_{11})^2 + (y - c_{12})^2 = r_1^2$$

$$(x - c_{21})^2 + (y - c_{22})^2 = r_2^2$$

Que después de desarrollar se convierten en

$$x^2 + y^2 + a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0$$

Que a su vez se puede convertir en el siguiente sistema

$$x^2 + y^2 + a_{11}X + a_{12}Y + b_1 = 0$$

$$(a_{21} - a_{11})X + (a_{22} - b_{12})Y + (b_2 - b_1) = 0$$

Y razonando como en el caso anterior concluimos que $[\boldsymbol{K}(a,b):\boldsymbol{K}] \leq 2$. □

2.2 Construcciones Imposibles.

Ahora vamos a hablar de tres construcciones que se plantearon en la Antigua Grecia y que no se pudieron resolver.

Se trata de

- ✓ La trisección de un Ángulo.
- ✓ La duplicación de un Cubo.
- ✓ La cuadratura del Círculo.

Trisección de un Ángulo.

Dado un ángulo, construir con regla y compás la tercera parte de ese ángulo.

Corolario 2.2.1 El problema de Trisección del Ángulo no tiene solución general.

Demostración. Para ello basta ver un ángulo construible que no se pueda trisecar con regla y compás. Que se pueda construir un ángulo α, equivale a que el punto $\left(\cos(\alpha)\,,sen(\alpha)\right)$, se puede construir pues este punto es la intersección de la circunferencia centrada en el origen con la semirrecta que parte del origen y forma un ángulo α con la parte positiva de la parte real. Como $sen(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$, se tiene que el ángulo α es construible si y solo si $\cos(\alpha)$ es construible. Por ejemplo el angulo π es construible pues $\cos(\pi) = -1$ es construible y este ángulo se puede trisecar pues $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Sin embargo $\frac{\pi}{3}$ no se puede trisecar con regla y compás, o lo que es lo mismo el ángulo $\frac{\pi}{9}$ no es construible. Para ver esto calculamos el polinomio mínimo de $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$. De las fórmulas del coseno y seno, de la suma de ángulos deducimos que si $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, entonces

$$\frac{1}{2} = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{9}\right) = cos\left(\frac{\pi}{9}\right) cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - sen\left(\frac{\pi}{9}\right) sen\left(\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$= cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\left(cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) - 2sen^2\left(\frac{\pi}{9}\right) cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$= cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3cos\left(\frac{\pi}{9}\right) sen^2\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$= cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\left(1 - cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)$$

$$= 4cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$= 4\alpha^3 - 3\alpha. \qquad \text{Donde } \alpha = cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

Entonces α es una raíz del polinomio $8x^3 - 6x - 1 = f(2a - 1)$

donde $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ que es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ por el Criterio de Eisenstein pues no tiene raíces en $\mathbb{Q}$. Eso implica que $[\mathbb{Q}(2a - 1): \mathbb{Q}] = 3$, y deducimos que α no es construible con regla y compás por *Teorema 2.1.8*.

Cuadratura del Círculo.

Construir con regla y compás un cuadrado que tenga la misma área que un círculo.

Corolario 2.2.2 Es imposible cuadrar un círculo con regla y compás.

Demostración. Para cuadrar un círculo de radio 1 necesitaríamos poder construir con regla y compás un número cuyo cuadrado sea el área del círculo, es decir $A = \pi r^2 = \pi$. Si esto fuera posible el número π sería construible con regla y compás, en particular $[\mathbb{Q}(\pi): \mathbb{Q}]$ seria finito, es decir π seria algebraico. Sin embargo π es trascendente como se dio a conocer en la teoría preliminar. □

Duplicación del Cubo.

Construir un Cubo que tenga el doble del volumen de un cubo dado.

Corolario 2.2.3 Es imposible duplicar un Cubo arbitrario.

Demostración. Duplicar el cubo de lado 1 equivale a construir el lado α de un cubo cuyo volumen fuera 2, es decir, eso equivale a construir $\sqrt[3]{2}$ donde esta es una raíz del polinomio mínimal $x^3 - 2$ el cual es irreducible por el Criterio de Eisenstein, y además $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right): \mathbb{Q}\right] = 3$ que no es una potencia de 2. □

2.3 Polígonos Regulares.

En esta sección trataremos el problema de la Constructibilidad de polígonos regulares con regla y compás. Se entiende que los datos dados son el centro y uno de los vértices, podemos fijar el sistema de coordenadas de forma que el centro sea $0 = (0,0)$ y uno de los vértices sea $1 = (1,0)$. Entonces los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen y uno de cuyos vértices sea 1, son las $n - esimas\, raíces$ de la unidad. Como estas raíces son las potencias de una $n - esima$ raíz primitiva de la unidad.

Ahora considérese el campo de descomposición del polinomio $x^n - 1$ sobre $\mathbb{Q}$. Las raíces de este polinomio son llamadas las $n - esimas$ raíces de la unidad.

Recordemos que cada número complejo diferente de cero $a + bi \in \mathbb{C}$ puede escribirse únicamente de la forma

$$re^{i\theta} = r(cos\theta + isen\theta) \qquad r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$$

La cual es simplemente una representación del punto $a + bi$ en el plano complejo en términos de coordenadas polares; r es la distancia de (a, b) al origen y θ es el ángulo formado con el eje real. En $\mathbb{C}$ existen distintas soluciones de la ecuación

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) \qquad \mathbf{(2.8)}$$

Nombremos los elementos

$$\xi_n = e^{2\pi ki/n} = cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

Para $k = 0,1,2, \dots, n-1$.

$\xi_n = e^{2\pi i/n} = \left(cos\frac{2\pi}{n}, sen\frac{2\pi}{n}\right)$, el polígono regular de n lados es construible con regla y compás si y solo si ξ_n es construible con regla y compás, lo que equivale a que $cos\frac{2\pi}{n}$ sea construible. Vamos a ver cuándo esto es así, por ejemplo es fácil construir con regla y compás los polígonos regulares de 3, 4 y 5 lados.

- ✓ Construcción del polígono regular de 3 lados.

Prueba. Consideremos el polinomio $x^3 - 1$ de esto que

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ ya que $x - 1 \neq 0$ obtenemos el siguiente resultado

$x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

De otra manera $\xi_3 = e^{2\pi i/3} = \left(cos\frac{2\pi}{3}, sen\frac{2\pi}{3}\right) = cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto el polígono regular de 3 lados es construible con regla y compás ya que $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ es un número algebraico.

- ✓ Construcción del polígono regular de 4 lados.

Prueba. Consideremos el polinomio $x^4 - 1$

El polígono regular de cuatro lados es construible con regla y compás ya que cumple que

$\xi_4 = e^{2\pi i/4} = i$ donde se demostró por el *Lema 2.1.9* que i es construible.

- ✓ Construcción del pentágono regular.

Consideremos el pentágono regular inscrito en la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 con vértice en el (1,0). Las coordenadas del vértice en el primer cuadrante son $\left(cos\frac{2\pi}{5}, sen\frac{2\pi}{5}\right)$, lo cual $\xi_5 = e^{2\pi i/5} = \left(cos\frac{2\pi}{5}, sen\frac{2\pi}{5}\right) = cos\frac{2\pi}{5} + isen\frac{2\pi}{5}$.

Por lo tanto tenemos que ξ_5 es raíz del polinomio

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Como $\xi_5 \neq 1$ resulta que satisface que ${\xi_5}^4 + {\xi_5}^3 + {\xi_5}^2 + \xi_5 + 1 = 0$; sacando factor común ${\xi_5}^2$, se tiene que

$${\xi_5}^2 + \xi_5 + 1 + {\xi_5}^{-1} + {\xi_5}^{-2} = (\xi_5 + {\xi_5}^{-2})^2 + \left(\xi_5 + {\xi_5}^{-1}\right) - 1 = 0$$

Pero $\left(\xi_5 + {\xi_5}^{-1}\right) = cos\frac{2\pi}{5} + isen\frac{2\pi}{5} + cos\frac{2\pi}{5} - isen\frac{2\pi}{5} = 2cos\frac{2\pi}{5}$.

Con lo que $2cos\frac{2\pi}{5}$ resulta ser la raíz positiva del polinomio $x^2 + x - 1$, y entonces es igual a $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Teorema 2.3.1 (1) Si un $n - agono$ regular es construible y m divide a n entonces el $m - agono$ regular es también construible.

(2) Si un $n - agono$ y un $m - agono$ son construibles y $mcd(m, n) = 1$, entonces el $mn - agono$ es también construible.

Demostración. (1) Supongamos que el $n - agono$ regular es construible y $n = md$ donde $d \in \mathbb{Z}^+$. Dibujando una línea a través de cada par de vértices no consecutivos resulta en un $m - agono$ regular.

(2) Supongamos que el $n - agono$ y $m - agono$ regular son construibles, y $mcd(m, n) = 1$. Entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que

$$am + bn = 1$$

Esto implica que

$$\frac{1}{mn} = a\frac{1}{n} + b\frac{1}{m}$$

De esta ecuación y *Teorema 2.1.6* podemos, dados ángulos de $\frac{2\pi}{m}$ y $\frac{2\pi}{n}$, construir un ángulo de $\frac{2\pi}{mn}$, y replicar este ángulo mn veces para crear los vértices de un $mn-agono$.

Se ha garantizado la construcción con regla y compás del Triángulo Equilátero, Cuadrado y Pentágono Regular, y como además en el Capítulo de Preliminares se verificó que se puede bisecar cualquier ángulo arbitrario usando solamente regla y compás, entonces son construibles todos los polígonos regulares de $2^n \cdot 3$, $2^n \cdot 4$, $2^n \cdot 5$ lados, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 0$.

2.3.1 Construcción del polígono regular de 17 lados.

- ✓ La genialidad de Gauss.

Gauss se ocupa del caso especial $p = 17$. Si una de las raíces es $r = e^{i\frac{2\pi}{17}}$, las otras raíces son las potencias sucesivas de r, es decir r^m.

Gauss crea una tabla con las 17 raíces ordenadas según las potencias expresadas en módulo 17.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m=3k(mod17)	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

La tabla de Gauss permite construir ecuaciones resolventes agrupando las raíces de 8 en 8, de 4 en 4 o de 2 en 2. Gauss comienza con dos periodos de 8 raíces

$$p_1 = w_1 + w_9 + w_{13} + w_{15} + w_{16} + w_8 + w_4 + w_2$$

$$p_2 = w_3 + w_{10} + w_5 + w_{11} + w_{14} + w_7 + w_{12} + w_6$$

Tanto p_1 como p_2 contienen al mismo tiempo a w_n y a su inversa w_{17-n}.

La suma de $p_1 + p_2 = -1$, ya que la suma de las 17 raices de $x^{17} - 1 = 0$, las 16 de p_1 y p_2 mas la raíz 1, ha de ser 0. Y como $w_a w_b = w_c$ donde $c \equiv a + b(mod 17)$.

Donde se obtiene que

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 = {} & w_1(w_3 + w_{10} + w_5 + w_{11} + w_{14} + w_7 + w_{12} + w_6) \\ & + w_9(w_3 + w_{10} + w_5 + w_{11} + w_{14} + w_7 + w_{12} + w_6) \\ & + w_{13}(w_3 + w_{10} + w_5 + w_{11} + w_{14} + w_7 + w_{12} + w_6) \\ & + w_{15}(w_3 + w_{10} + w_5 + w_{11} + w_{14} + w_7 + w_{12} + w_6) \\ & + w_{16}(w_3 + w_{10} + w_5 + w_{11} + w_{14} + w_7 + w_{12} + w_6) \\ & + w_8(w_3 + w_{10} + w_5 + w_{11} + w_{14} + w_7 + w_{12} + w_6) \\ & + w_4(w_3 + w_{10} + w_5 + w_{11} + w_{14} + w_7 + w_{12} + w_6) \\ & + w_2(w_3 + w_{10} + w_5 + w_{11} + w_{14} + w_7 + w_{12} + w_6) \end{aligned}$$

$$= w_4 + w_{11} + w_6 + w_{12} + w_{15} + w_8 + w_{13} + w_7$$

$$+w_{12} + w_2 + w_{14} + w_3 + w_6 + w_{16} + w_4 + w_{15}$$

$$+w_{16} + w_6 + w_1 + w_7 + w_{10} + w_3 + w_8 + w_2$$

$$+w_1 + w_8 + w_3 + w_9 + w_{12} + w_5 + w_{10} + w_4$$

$$+w_2 + w_9 + w_4 + w_{10} + w_{13} + w_6 + w_{11} + w_5$$

$$+w_{11} + w_1 + w_{13} + w_2 + w_{15} + w_5 + w_3 + w_{14}$$

$$+w_7 + w_{14} + w_9 + w_{15} + w_1 + w_{11} + w_{16} + w_{10}$$

$$+w_5 + w_{12} + w_7 + w_{13} + w_{16} + w_9 + w_{14} + w_8$$

$$= 4w_1 + 4w_2 + 4w_3 + 4w_4 + 4w_5 + 4w_6 + 4w_7 + 4w_8 + 4w_9 + 4w_{10} + 4w_{11}$$
$$+ 4w_{12} + 4w_{13} + 4w_{14} + 4w_{15} + 4w_{16}$$

$$= 4(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7 + w_8 + w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{14}$$
$$+ w_{15} + w_{16})$$

$$= -4.$$

El producto $p_1 \cdot p_2 = -4$

De modo que p_1 y p_2 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 + x - 4 = 0$$

A continuación Gauss agrupa las raíces de p_1 y p_2 en cuatro periodos de 4 raíces

$$\begin{cases} q_1 = w_1 + w_{13} + w_{16} + w_4 \\ q_2 = w_9 + w_{15} + w_8 + w_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} q_3 = w_3 + w_5 + w_{14} + w_{12} \\ q_4 = w_{10} + w_{11} + w_7 + w_6 \end{cases}$$

Se prueba que

$$q_1 + q_2 = p_1; \qquad q_1 \cdot q_2 = p_1 + p_2 = -1$$

Y por tanto q_1 y q_2 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - p_1 x - 1 = 0$$

Análogamente

$$q_3 + q_4 = p_2; \qquad q_3 \cdot q_4 = p_1 + p_2 = -1$$

Y por tanto q_3 y q_4 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - p_2 x - 1 = 0$$

Se comprueba que $w_a + w_{17-a} = 2cos\frac{2a\pi}{17}$

Así que $q_1 = 2cos\frac{2\pi}{17} + 2cos\frac{8\pi}{17}$ y $q_2 = 2cos\frac{4\pi}{17} + 2cos\frac{16\pi}{17}$

Con la ecuación $x^2 - p_2 x - 1 = 0$ obtenemos que:

$q_3 = 2cos\frac{6\pi}{17} + 2cos\frac{10\pi}{17}$ y $q_4 = 2cos\frac{12\pi}{17} + 2cos\frac{14\pi}{17}$

Por fin, formando periodos de 2 en 2 tendremos $r_1 = w_1 + w_{16}$; $r_2 = w_{13} + w_4$

Y por tanto;

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = q_1 \\ r_1 \cdot r_2 = q_3 \end{cases}$$

Así: $r_1 = 2cos\frac{2\pi}{17}$ y $r_2 = 2cos\frac{8\pi}{17}$

Y reemplazando en los valores de p_i tendremos… es solo un problema de paciencia…

$$p_1 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2};\ p_2 = \frac{\sqrt{17} + 1}{2}$$

q_i:

$$q_1 = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}\ ;$$

$$q_2 = \frac{p_1 - \sqrt{p_1^2 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}\ ;$$

$$q_3 = \frac{p_2 + \sqrt{p_2^2 + 4}}{2} = \frac{-\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}\ ;$$

$$q_4 = \frac{p_2 + \sqrt{p_2^2 + 4}}{2} = \frac{-\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}\ ;$$

Y por fin r_i:

$$\frac{r_1}{2} = cos\frac{2A}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

Sustituyendo en las sucesivas ecuaciones podemos calcular las 16 raíces de la ecuación.

Teorema 2.3.2 Un número de Fermat del tipo $2^{2^r} + 1$ es igual al producto de todos los anteriores más 2.

Prueba por inducción:

$$N_0 = 3$$

$$N_1 = 5 = N_0 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$N_2 = 17 = N_0 N_1 + 2 = (3)(5) + 2 = 17$$

Suponer que se cumple para n

$$N_n = N_0 N_1 N_2 \cdots N_{n-1} + 2$$

Probar que se cumple para *n+1*

$$N_0 N_1 N_2 \dots N_{n-1} N_n + 2 = \left(N_n - 2\right) N_n + 2 = N^2{}_n - 2N_n + 2 = (N_n - 1)^2 + 1$$

$$N^2{}_n - 2N_n + 2 = (2^{2^n} + 1)^2 - 2\left(2^{2^n} + 1\right) + 2$$

$$= 2^{2.2^n} + 2(2^{2^n}) + 1 - 2(2^{2^n}) - 2 + 2$$

$$= 2^{2.2^n} + 1$$

$$N_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1$$

$$N_{n+1} = 2^{2^k} + 1\,; \quad k = n + 1$$

Teorema 2.3.3 Un $n - agono$ regular es construible con regla y compás si

$$n = 2^r p_1 \cdots p_s$$

Donde r y s son enteros no negativos, y cada p_i es un primo distinto de la forma $p = 2^{2^{s_i}} + 1$, un Primo de Fermat.

La prueba de la construcción del $n - agono$ regular implica que n es el producto de distintos primos impares de Fermat.

Demostración. Suponga que un $n - agono$ regular es construible. Todo entero positivo n puede ser escrito como $n = 2^r {p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_s}^{\alpha_s}$, donde $p_1, \dots, p_s$ son primos impares distintos.

Por *Corolario 1.1.13.1*, se sigue que para cada p_i, un ${p_i}^{\alpha_i} - agono$ es construible. Suponga que $\alpha_i \geq 2$. Entonces ${p_i}^2$ divide a ${p_i}^{\alpha_i}$, así por *Teorema 2.3.1*, un ${p_i}^2 - agono$ regular es construible. Sin embargo, por *Lema 1.1.13.4*, el grado de el polinomio minimal sobre $\mathbb{Q}$ de la $({p_i}^2)^{th}$ raíz de la unidad es $p_i(p_i - 1)$. Y por *Lema 1.1.13.2*, este grado debe ser una potencia de 2. Pero p_i es impar, así $p_i(p_i - 1)$ no puede ser de potencia 2. Esto es una contradicción. Por lo cual, para todo p_i tenemos

$$\alpha_i = 1.$$

Así para cada p_i, un $p_i - agono$ regular es construible. Por *Lema 1.1.13.2* y *1.1.13.3*, se sigue que $p_i - 1$ es de potencia 2, así tenemos

$$p_i - 1 = 2^{s_i}. \qquad (\mathbf{2.9})$$

Suponga que s_i tiene algún divisor impar a mayor que 1. Entonces la ecuación $(\mathbf{2.9})$ se convierte en

$$p_i = (2^b)^a + 1 = (2^b + 1)\left((2^b)^{(a-1)} + \cdots + (2^b) + 1\right) \qquad (\mathbf{2.10})$$

Pero esto implica que p_i no es primo, por lo que s_i sólo puede tener incluso divisor, y por lo tanto debe ser una potencia de 2. Esto nos da

$$s_i = 2^{r_i}.$$

Al conectar esta de vuelta en la ecuación $(\mathbf{2.9})$ nos da ahora

$$p_i = 2^{2^{r_i}} + 1.$$

Por lo tanto si un $n - agono$ regular es construible, n debe ser el producto de una potencia de 2 y primos distintos de Fermat.

Esto quiere decir, que un polígono regular es construible, sí, el número de lados del polígono es una potencia de 2, producto de una potencia de 2 y varios primos de Fermat distintos. De esta manera tenemos determinados los polígonos regulares que podemos construir con regla y compás, así por ejemplo, son construibles con regla y compás los siguientes polígonos.

El triángulo, $(2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3)$

El cuadrado, $(2^2 = 4)$

El pentágono, $(2^{2^1} + 1 = 2^{\,2} + 1 = 4 + 1 = 5)$

El hexágono, $(2\left(2^{2^0} + 1\right) = 2(2^1 + 1) = 6)$

El octágono, $(2^3 = 8)$

Por lo tanto, entre otros, el **heptágono** regular $(2^{2^n} + 1 \neq 7\ \forall n)$ y el **eneágono** regular $(2^{2^n} + 1 \neq 3^2 = 9\ \forall n)$ no son construibles con regla y compás.

2.3.4 Otras observaciones sobre los números de Fermat.

Teniendo la expresión $n = 2^a \cdot {p_1}^b \cdot {p_1}^c \cdot {p_1}^d \cdots$ podemos realizar las siguientes consideraciones: que los exponentes de los primos sean todos cero, entonces $n = 2^r$, ahora, si $r \geq 0$, tenemos entonces $n = 2^{2^r} + 1$, veamos algunos de la forma $n = 2^a \cdot {p_1}^b \cdot {p_1}^c \cdot {p_1}^d \cdots$

A continuación se darán algunos ejemplos teniendo en cuenta algunas condiciones, empezaremos con los números de la forma $n = 2^r, r \geq 2$, tomaremos algunos valores para r. Cuando $r = 2$, entonces el polígono de $2^2 = 4$ lados se puede construir, cuando $r = 3$, entonces el polígono de $2^3 = 8$ lados se puede construir, cuando $r = 4$, entonces el polígono de $2^4 = 16$ lados se puede construir, cuando $r = 5$, entonces el polígono de $2^5 = 32$ lados se puede construir, etc., entonces los polígonos regulares cuyo número de lados son una potencia de dos se pueden construir.

Si los números son de la forma $n = 2^{2^r} + 1$, r ≥ 0, tomemos algunos valores para r. Cuando $r = 0$, entonces el polígono de $2^{2^0} + 1 = 3$ lados se puede construir, cuando $r = 1$, entonces el polígono de $2^{2^1} + 1 = 5$ lados se puede construir, cuando $r = 2$, entonces el polígono de $2^{2^2} + 1 = 17$ lados se puede construir, cuando $r = 3$, entonces el polígono de $2^{2^3} + 1 = 257$ lados puede construir, entonces los polígonos regulares cuyo número de lados son un primo de Fermat se pueden construir.

Ahora si los números son de la forma $n = 2^m\left(2^{2^r} + 1\right)$, para algunos enteros $m, r \geq 0$, examinaremos algunos polígonos regulares con el siguiente número de lados. El polígono regular de 3 lados (triángulos equilátero), se puede construir porque 3 es un primo de Fermat y además es de la forma $2^m\left(2^{2^r} + 1\right)$, $m = 0\ y\ r = 0$, El polígono regular de 6 lados (hexágono), se puede construir porque $6 = (2)(3)$ donde 2 es una potencia de 2 y 3 es un primo de Fermat y además 6 es un número de la forma $2^m\left(2^{2^r} + 1\right)$, $m = 1\ y\ r = 0$, El polígono regula de 7 lados (heptágono), no se puede construir porque para ningún m y r, 7 no es de la forma $2^m\left(2^{2^r}+1\right)$, además 7 no es un primo de Fermat, el polígono regular de 9 lados (eneágono), no se puede construir porque para ningún m y r, 9 no es de la forma $2^m\left(2^{2^r}+1\right)$, además 9 no es un primo de Fermat, el polígono regular de 10 lados (decágono) se puede construir porque $10 = (2)(5)$ de donde 2 es una potencia de 2 y 5 es un primo de Fermat y además es de la forma $2^m\left(2^{2^r}+1\right)$, $m = 1$ y $r = 1$.

¿Es posible construir polígonos regulares de 45, 48, 47, 52, 53, 2748, etc.? Para verificar si estos polígonos regulares son construibles con regla y compás, se tomara cada número y se hallara su descomposición factorial y se aplica el criterio de construcción.

La descomposición de factorial $45 = 3^2 \cdot 5$, entonces, este polígono regular no se puede construir porque 3 y 5 son primos de Fermat pero 3 se repite, la descomposición de factorial $48 = 2^4 \cdot 3$, entonces, este polígono regular si se puede construir porque la descomposición factorial de 48 es una potencia de 2 y 3 es un primo de Fermat, como 47 es un número primo no tiene descomposición factorial, y además no es primo de Fermat, entonces no se puede construir, la descomposición de factorial de $52 = 2^4 \cdot 13$, no se puede construir porque 13 no es un primo de Fermat, como 53 es un número primo no tiene descomposición factorial, y no es primo de Fermat, entonces no se puede construir, la descomposición factorial de $2748 = 2^2 \cdot 3 \cdot 229$, aunque 2 es una potencia de dos, y 3 es un primo de Fermat no se puede construir porque 229 no es un primo de Fermat.

CAPITULO III.

Por Construcciones Geométricas se suele entender la geometría que se puede construir con regla sin escala y compás. La célebre geometría de Euclides (euclidiana) se fundó sobre las construcciones geométricas y a partir de estas construcciones se han podido fundamentar muchas teorías de la geometría.

La restricción para el uso del compás y la regla sin escala, exclusivamente, en el estudio de la geometría fue establecida por primera vez por los griegos. Fue motivada por su deseo de mantener a la geometría como una ciencia sencilla y atractivamente estética. Para ellos, la introducción de instrumentos adicionales habría destruido el valor de la geometría como un ejercicio creativo, intelectual y analítico, el introducir otros elementos era considerado indigno de un pensador. Los griegos no estaban interesados en las aplicaciones prácticas de sus construcciones, estaban fascinados en encontrar el mayor número de construcciones posibles con el uso de los instrumentos a los cuales se había autorrestringido.

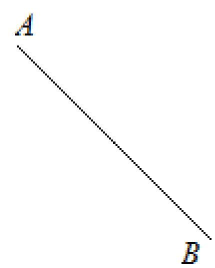
Sección I: *Construcciones Geométricas con regla y compás.*

Se construirán algunas figuras geométricas, tomando como base las construcciones que se mostraron en el Capítulo I: Construcciones Básicas.

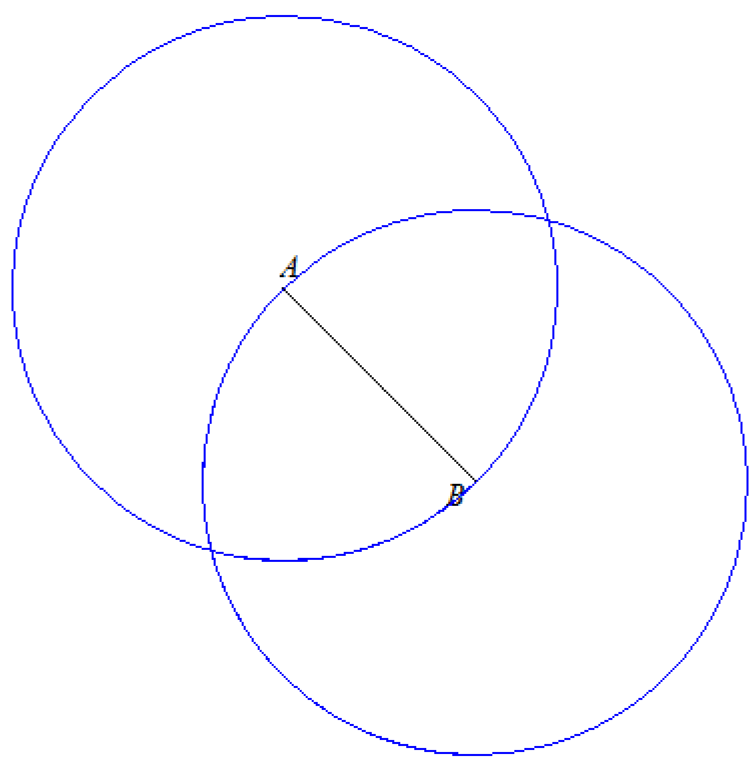
Construcción 3.1.1

Construir un triángulo equilátero.

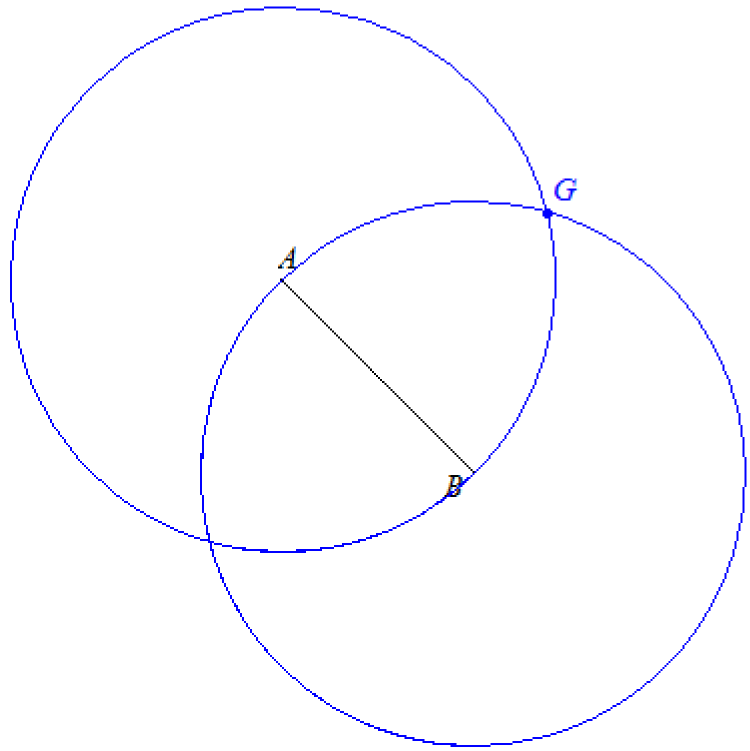
Paso 1: Trazar un segmento $\overline{AB}$.



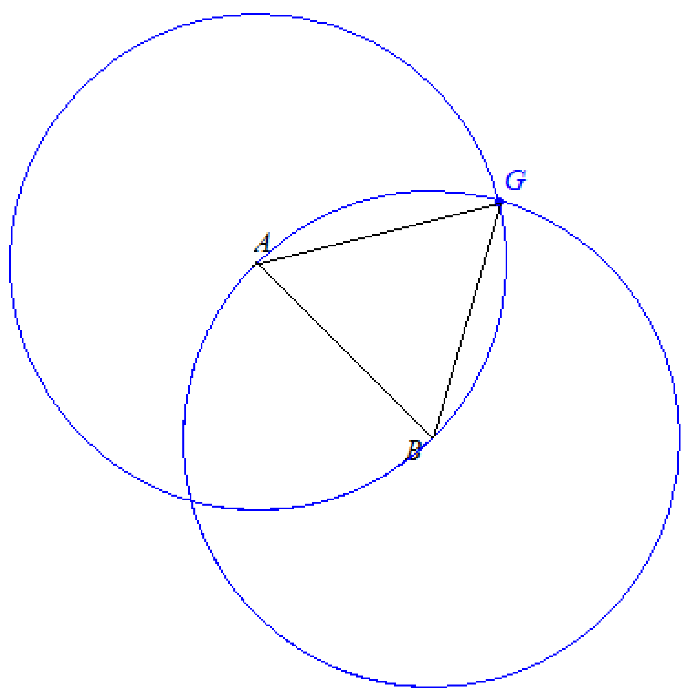
Paso 2: Trazar dos circunferencias una con centro en A que pase por B y la otra con centro en B que pase por A.



Paso 3: Marcar la intersección con la letra G.



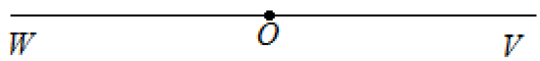
Paso 4: Unir G con A y G con B, se obtiene el triángulo.



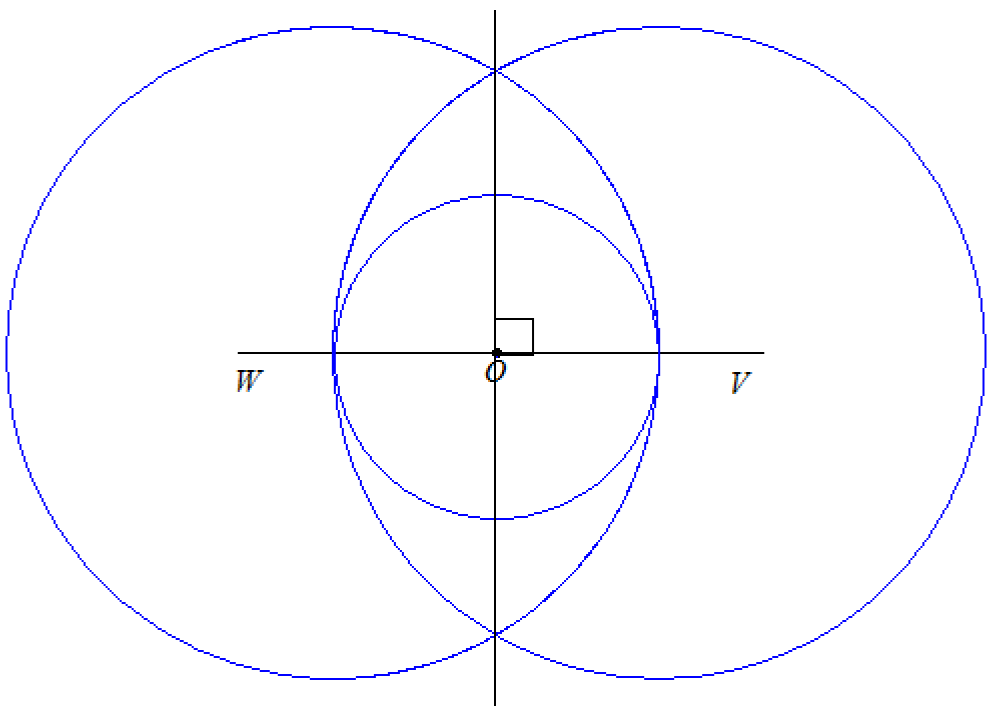
Construcción 3.1.2

Construir un cuadrado inscrito en una circunferencia.

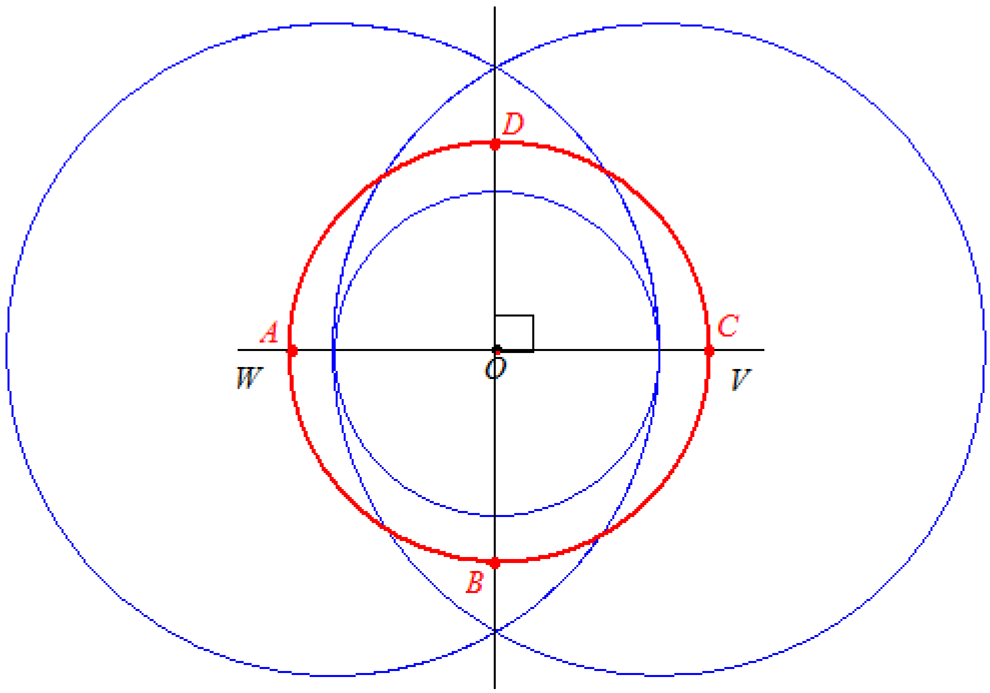
Paso 1: Trace el segmento $\overline{WV}$ y marque un punto O en el segmento.



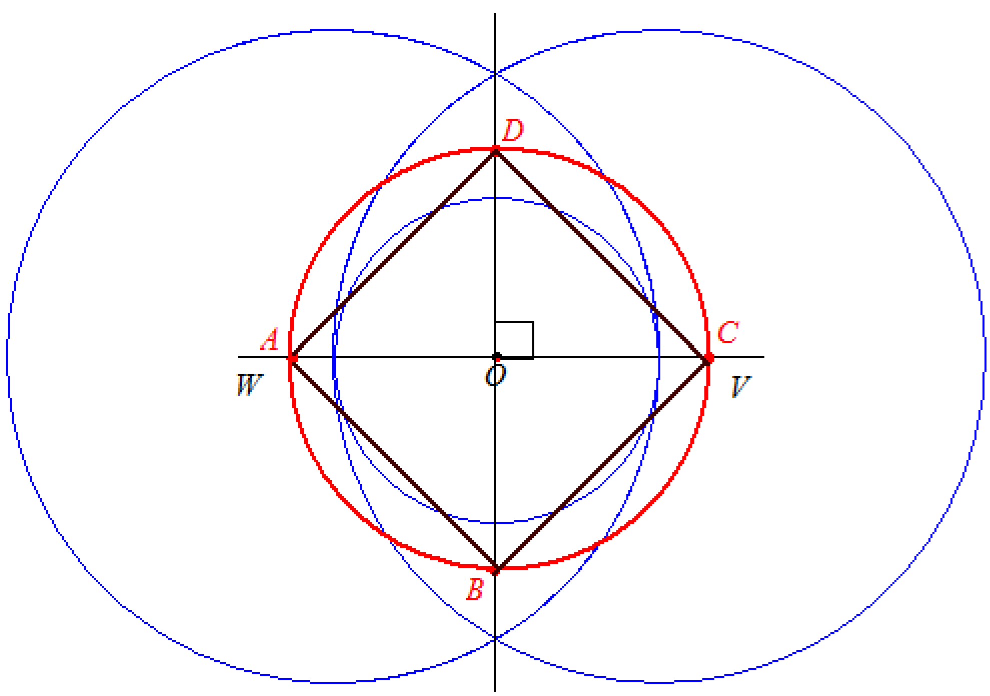
Paso 2: Por O trace una perpendicular



Paso 3: Trazar una circunferencia con centro en O y marque los puntos de intersección con las letras A, B, C y D.



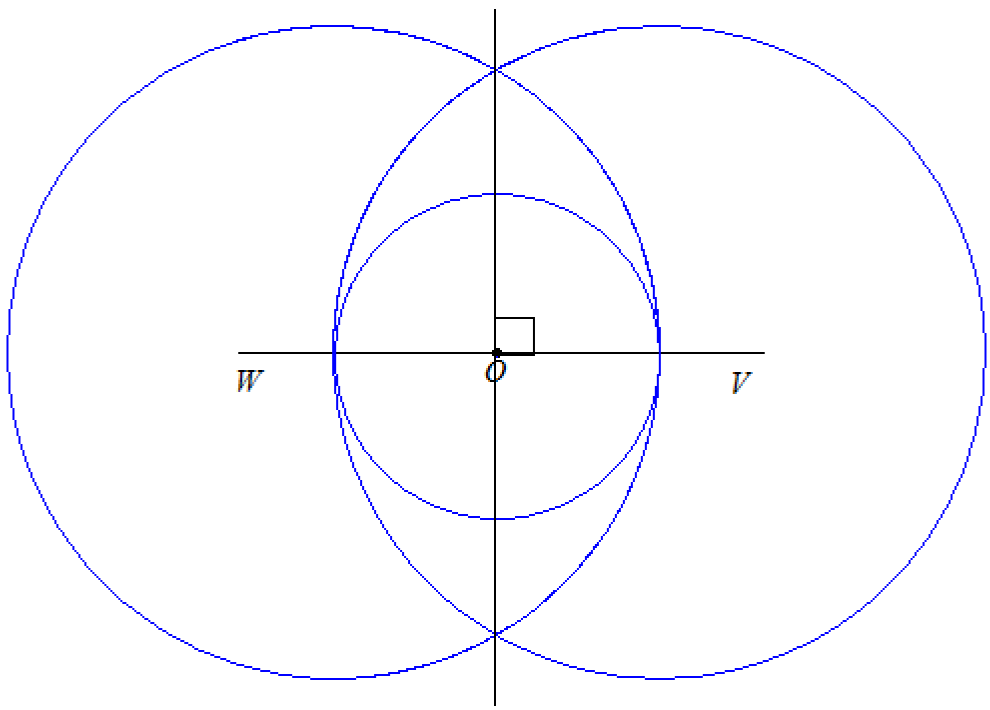
Paso 4: Unir los puntos A, B, C y D así obtiene el cuadrado.



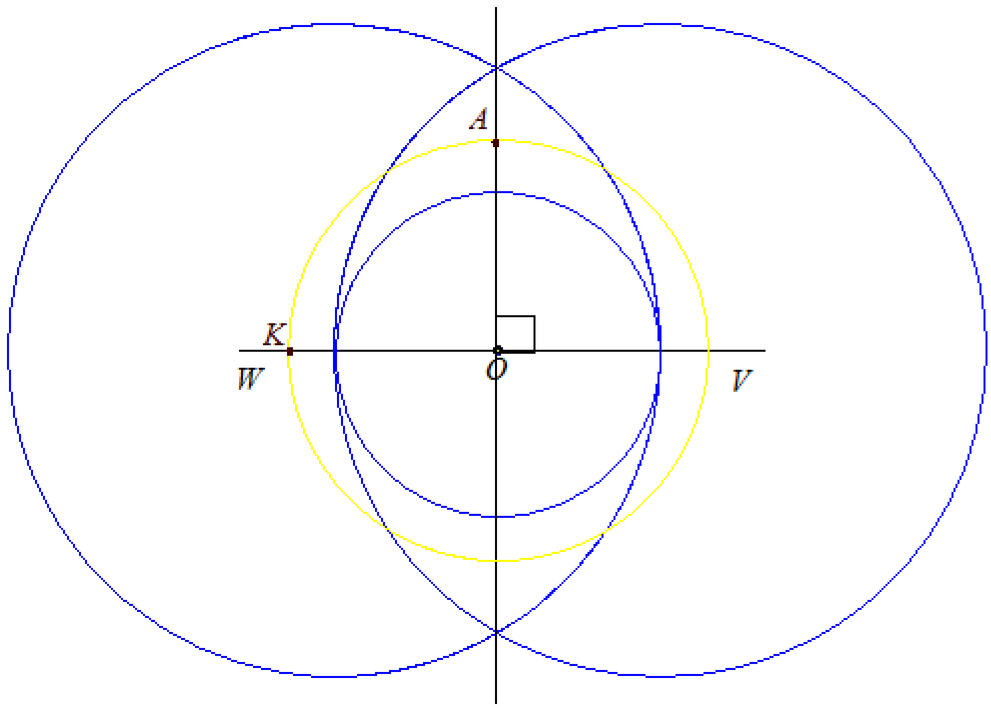
Construcción 3.1.3

Construir un pentágono regular inscrito en una circunferencia.

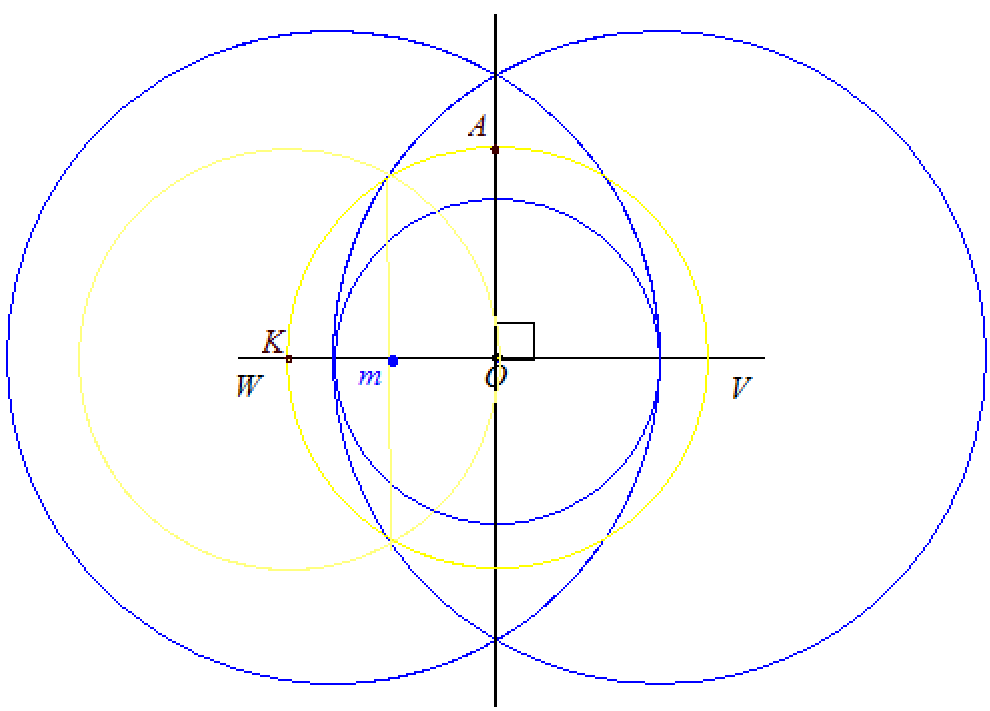
Paso 1: Trazar un segmento $\overline{WV}$ y marque un punto O y levante una perpendicular.



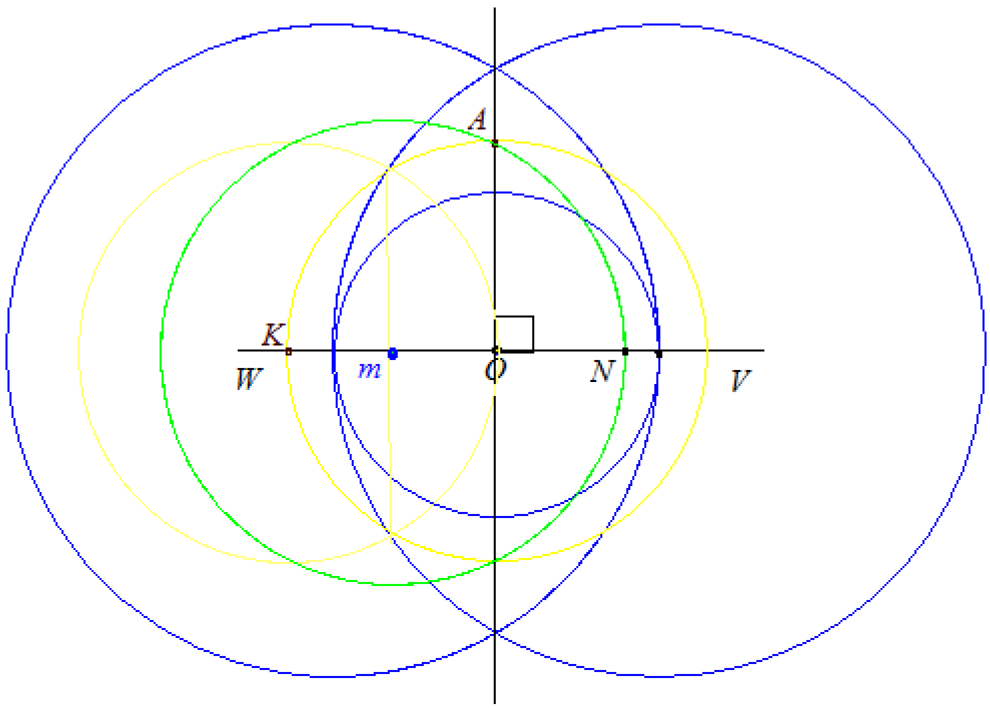
Paso 2: Con centro en O trace una circunferencia y marque los puntos K y A, uno en $\overline{WV}$ y en la recta perpendicular a esta correspondientemente.



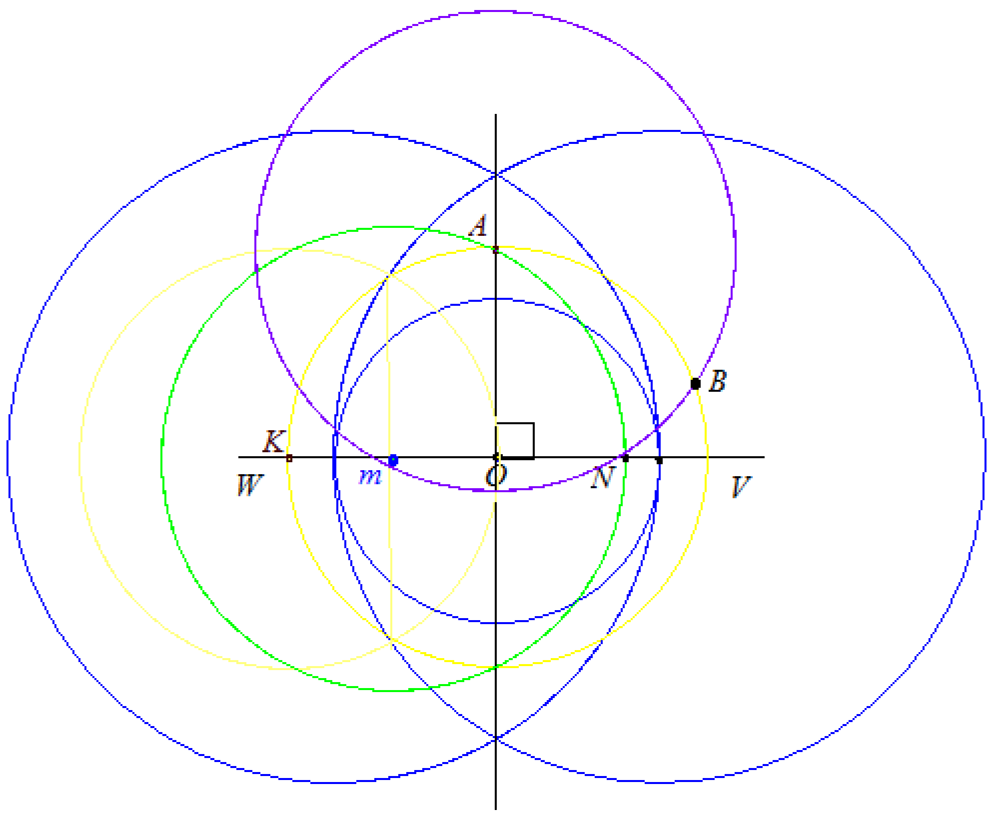
Paso 3: Marcar con m el punto medio de $\overline{KO}$.



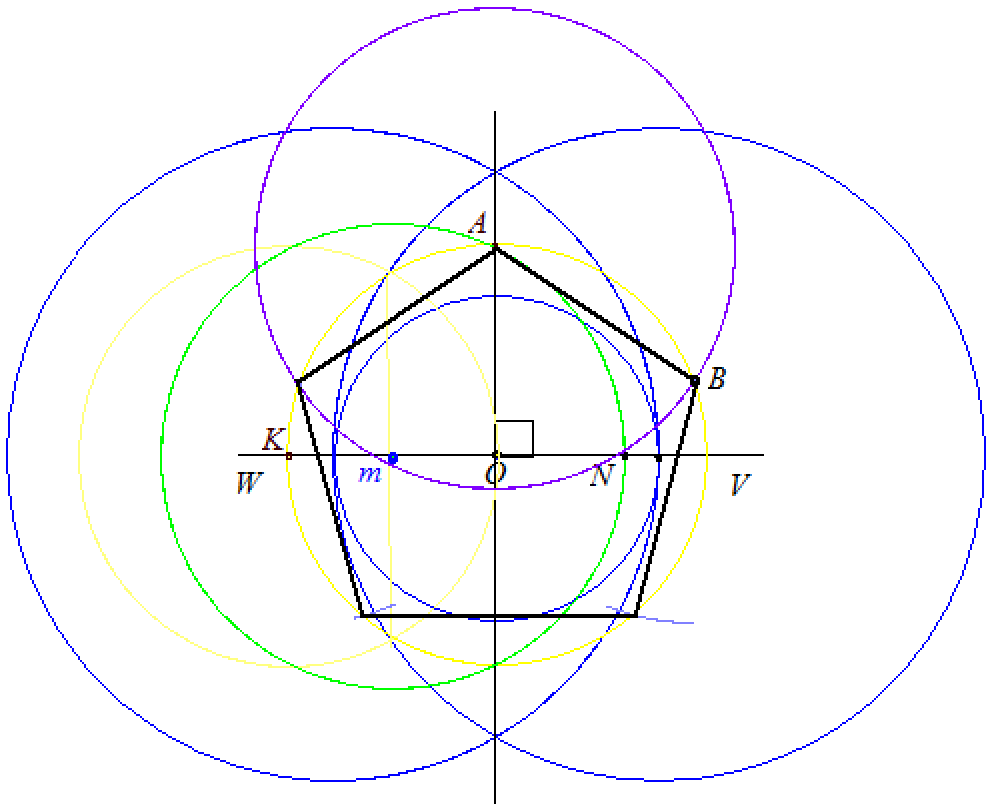
Paso 4: Trazar una circunferencia con centro en m y que pase por A, marque con N la intersección del segmento $\overline{WV}$ con la circunferencia obteniendo.



Paso 5: Trazar una circunferencia con centro en A y que pase por N, marque la intersección B con la circunferencia.



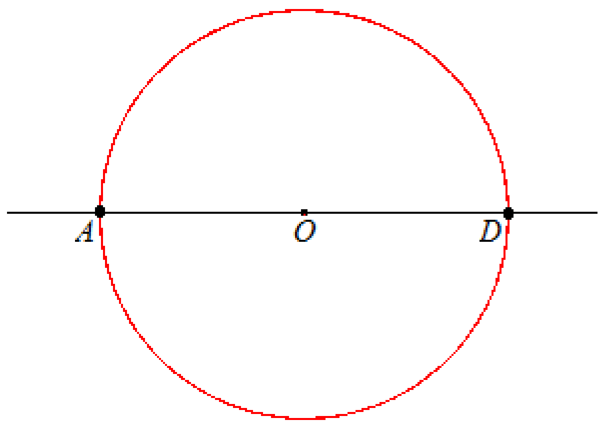
Paso 6: $\overline{AB}$ es el lado del pentágono, luego copie el segmento $\overline{AB}$ 4 veces para obtener el pentágono.



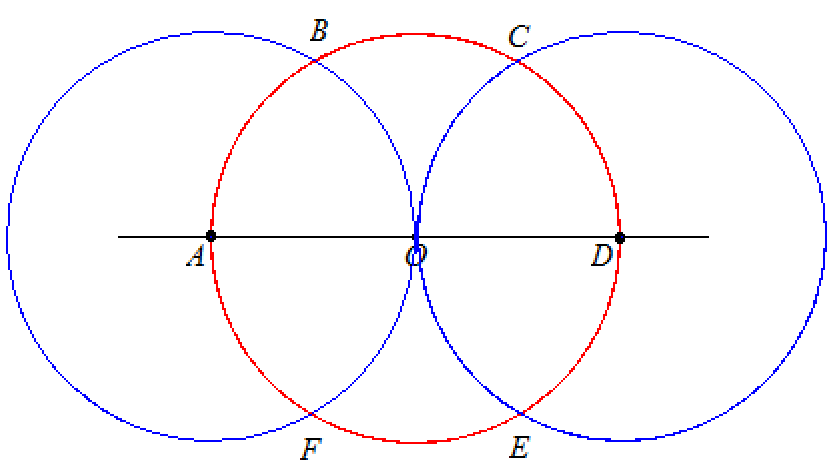
Construcción 3.1.4

Construir un hexágono regular inscrito en una circunferencia.

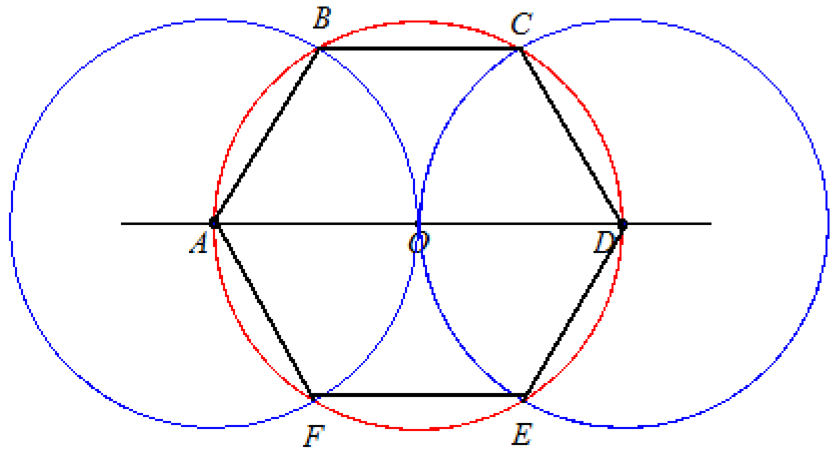
Paso 1: Trazar una recta y una circunferencia en O que corte la recta, marque los puntos A y D.



Paso 2: Con centro en A y en D trazar circunferencias que pasen por O, marque todas las intersecciones B, C, F y E.



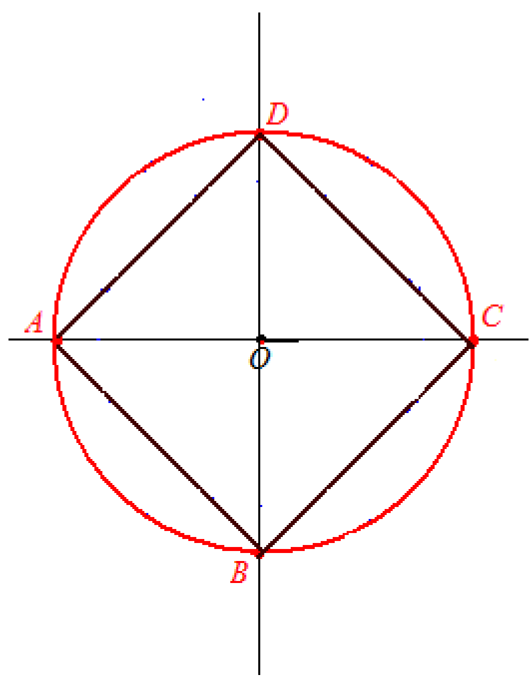
Paso 3: Unir todos los puntos y obtiene un hexágono.



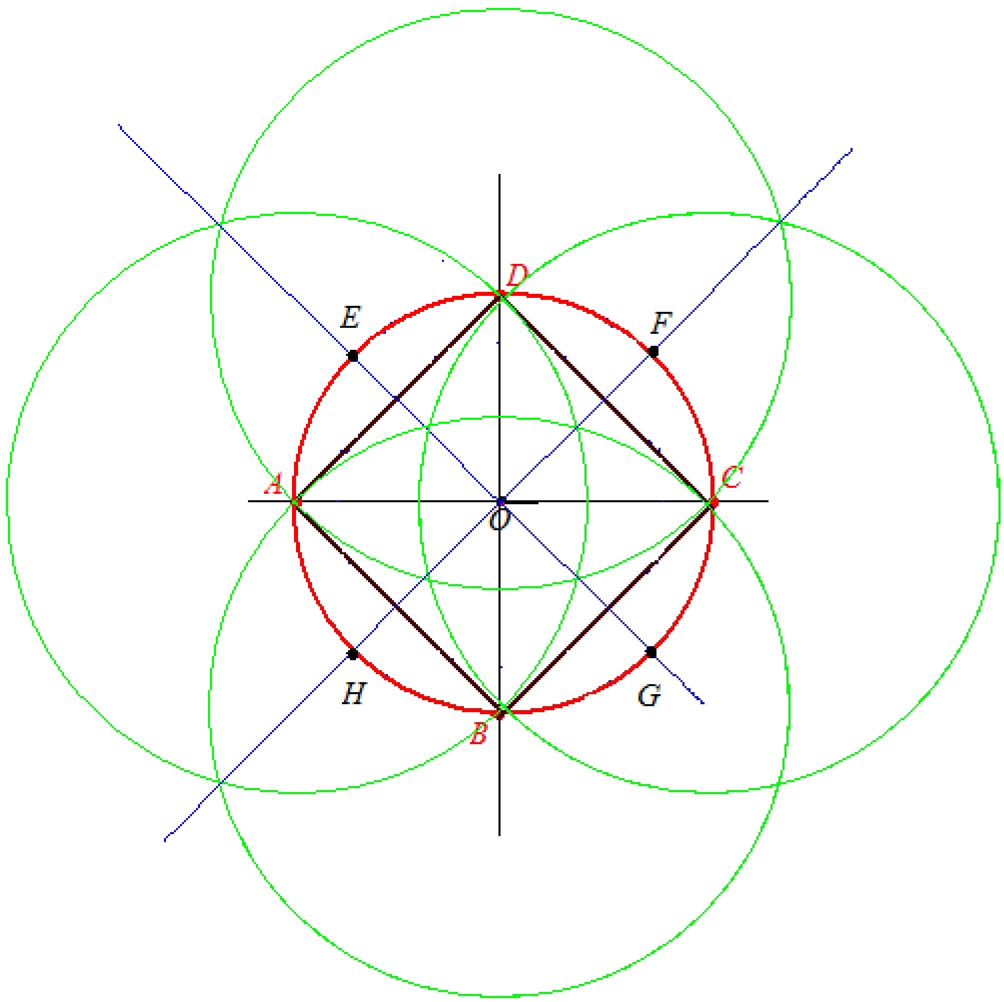
Construcción 3.1.5

Construir un octágono regular inscrito en una circunferencia.

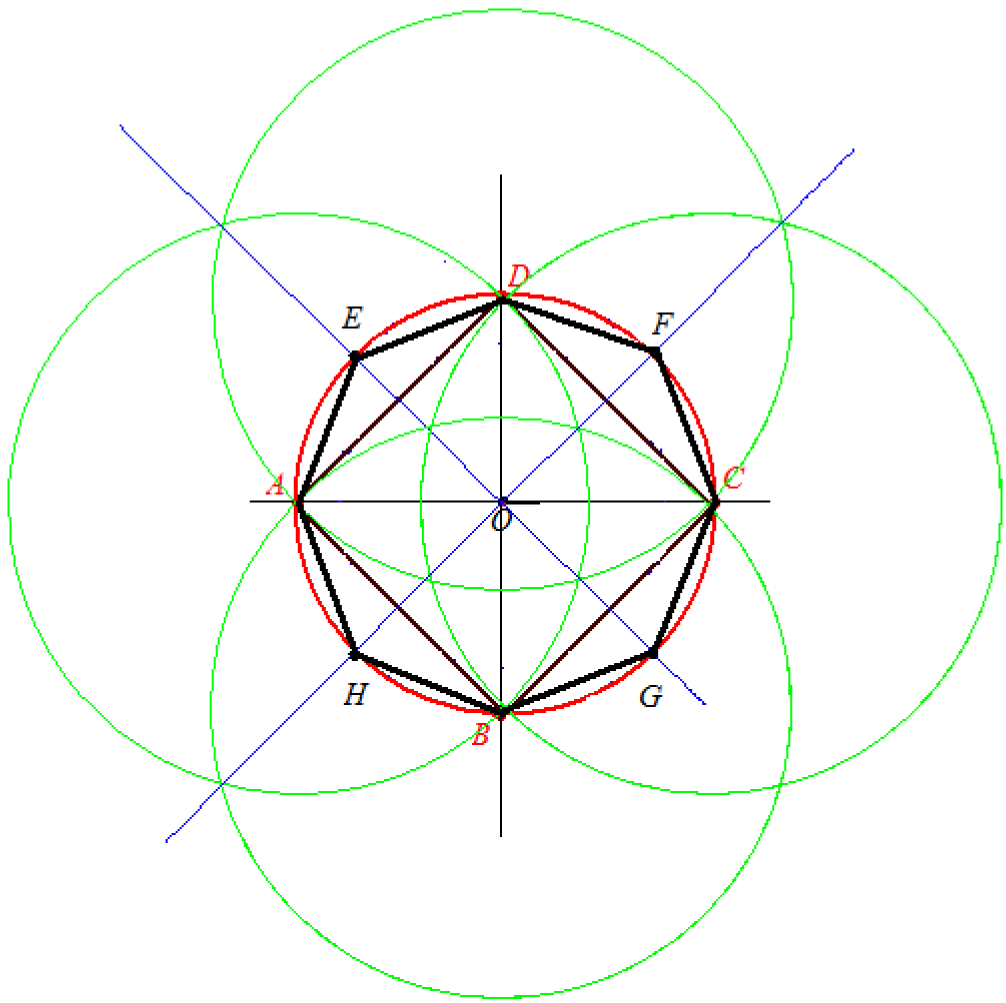
Paso 1: Construir un cuadrado A, B, C, D (Constr. 3.1.2)



Paso 2: Sacar las mediatrices de los lados del cuadrado rectos (Constr. 1.3.12), marque las intersecciones E, F, G, H, con la circunferencia.



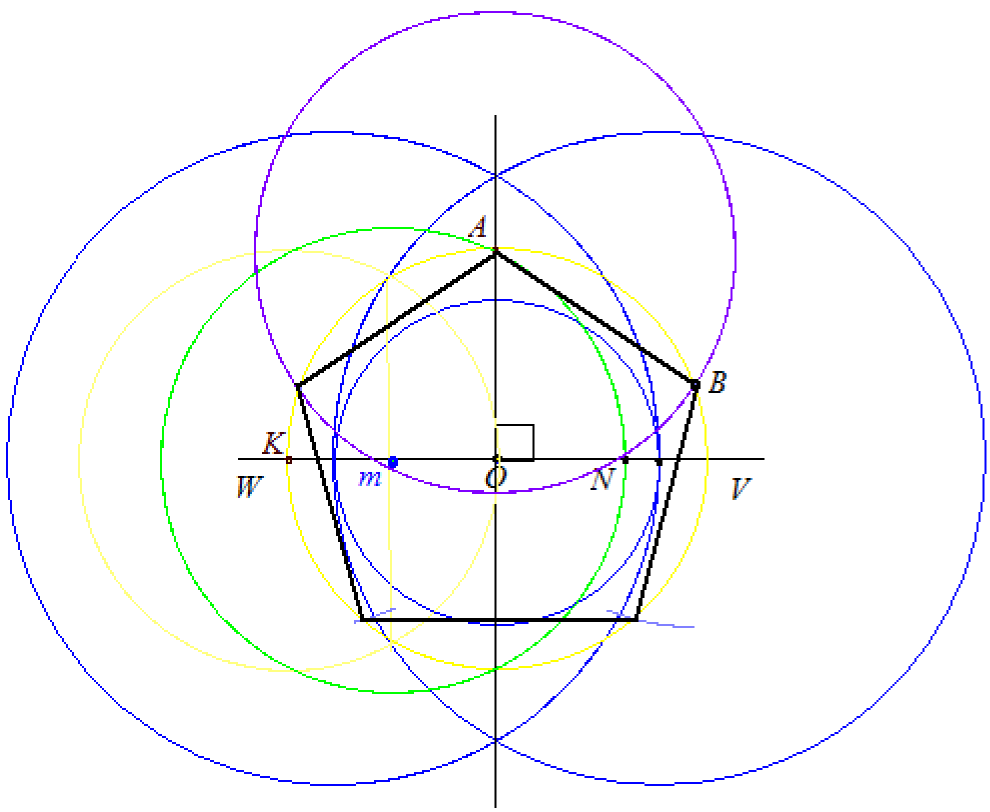
Paso 3: Unir todos los puntos y obtiene un octágono.



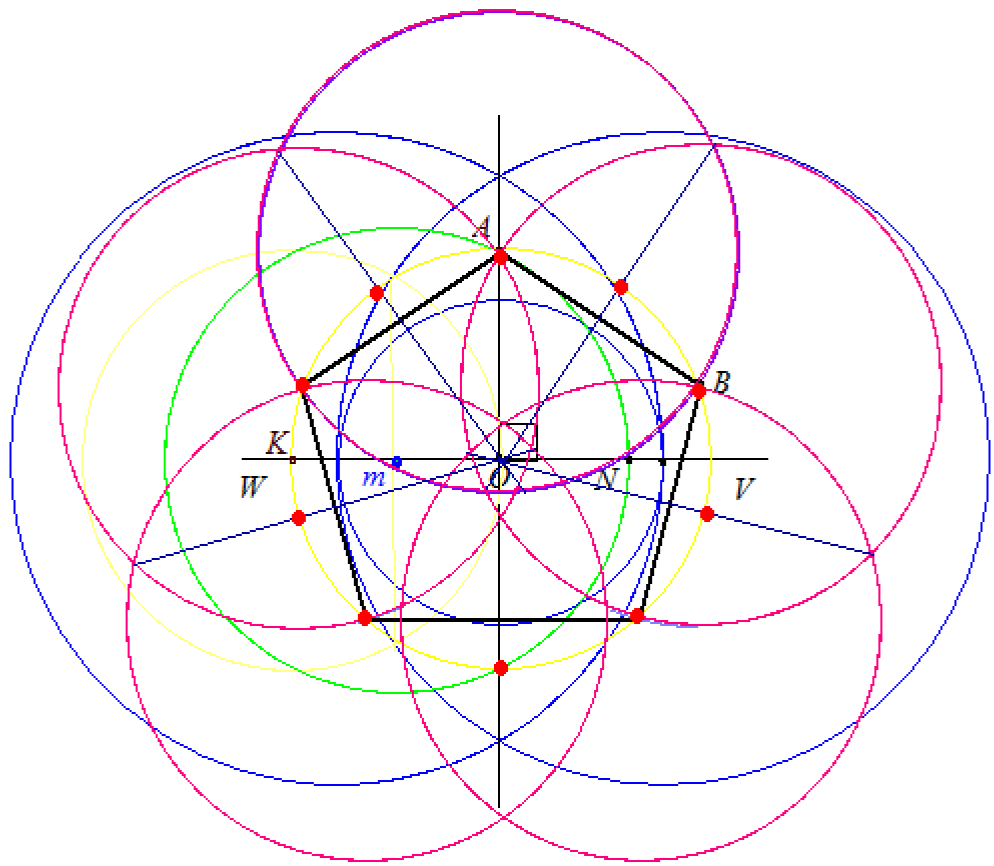
Construcción 3.1.6

Construir un decágono regular inscrito en una circunferencia.

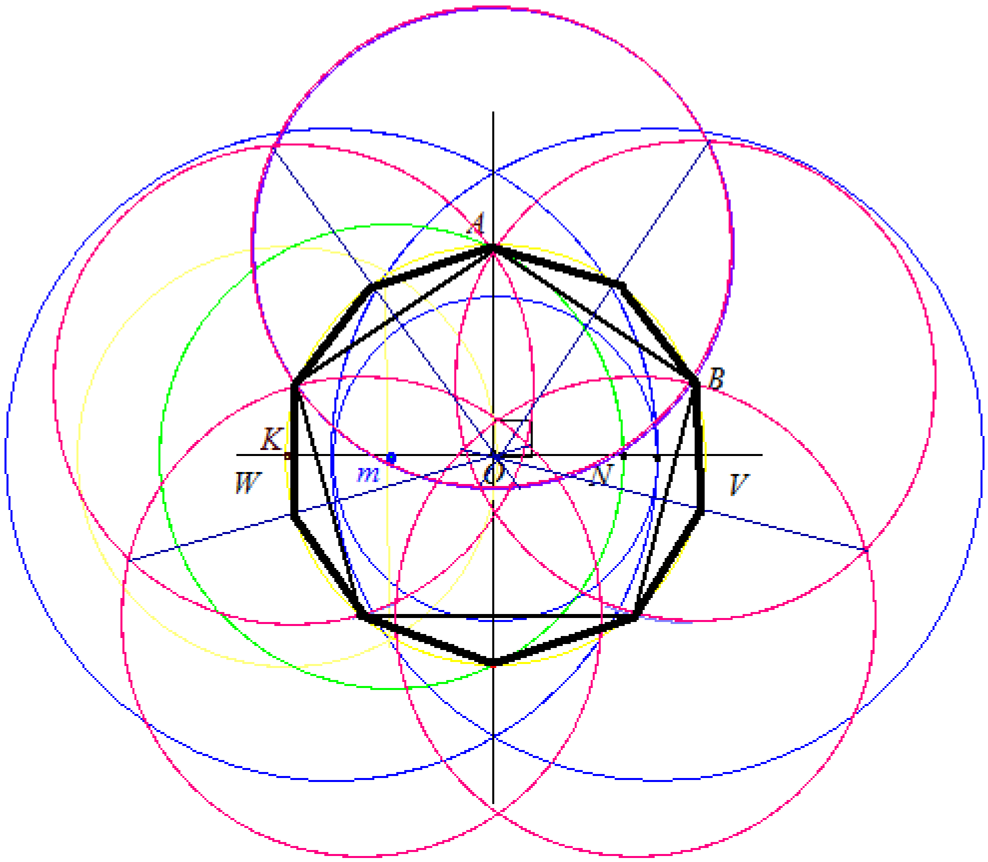
Paso 1: Construir un pentágono (Constr. 3.1.3)



Paso 2: Trazar todas las bisectrices de los ángulos del pentágono regular y marcar las intersecciones con la circunferencia (circunferencia de color amarillo).



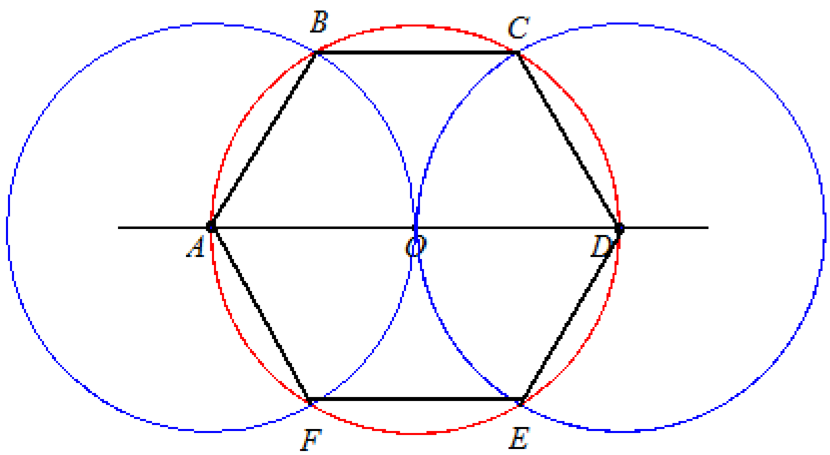
Paso 3: Unir todos los vértices y obtiene le decágono.



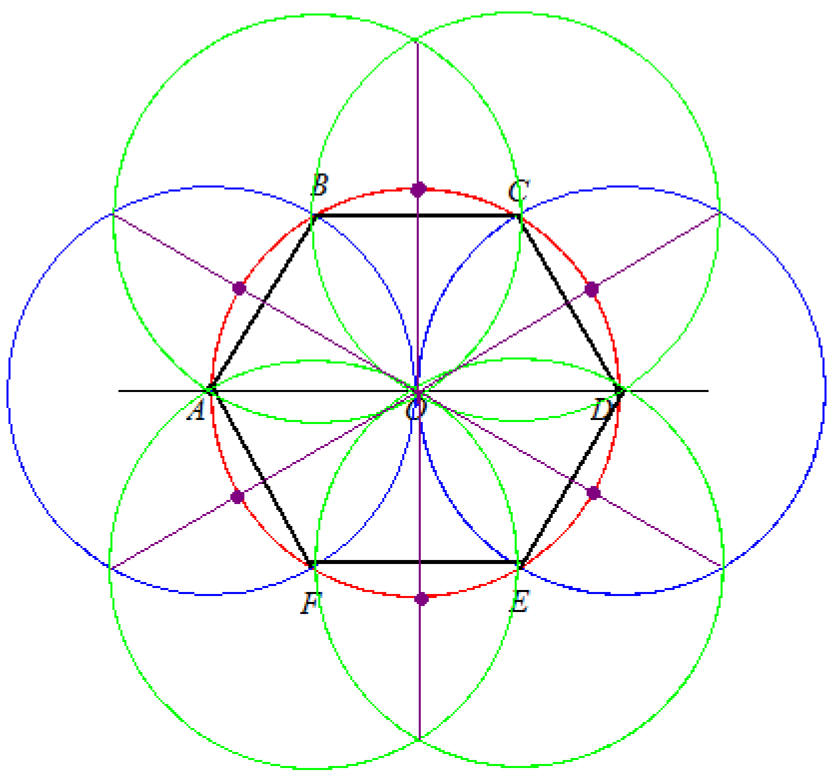
Construcción 3.1.7

Construir un dodecágono inscrito en una circunferencia.

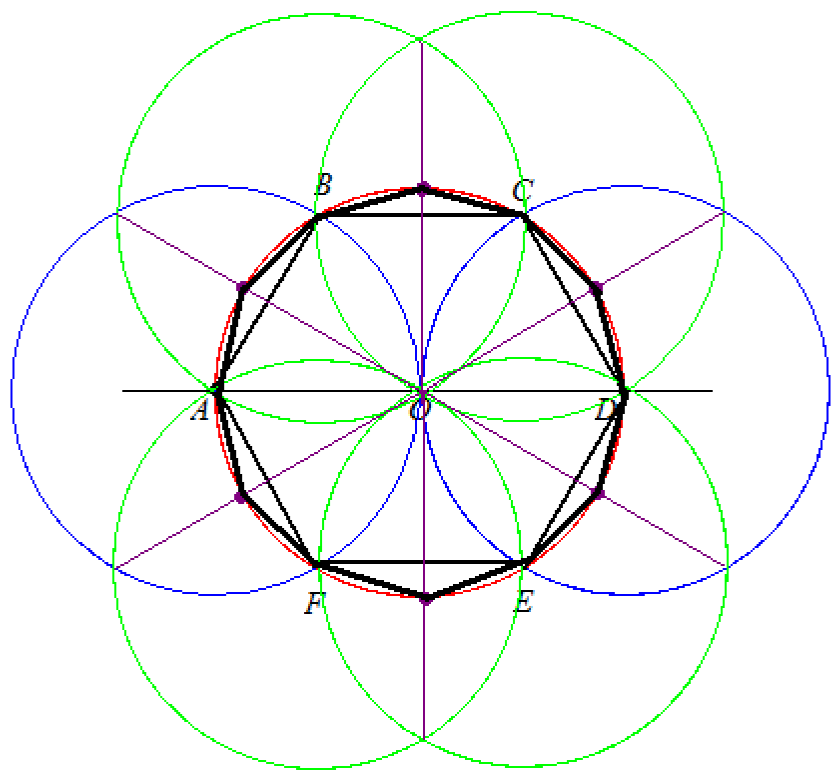
Paso 1: Construir un hexágono regular (Constr. 3.1.4).



Paso 2: Trazar todas las bisectrices y marque las intersecciones.



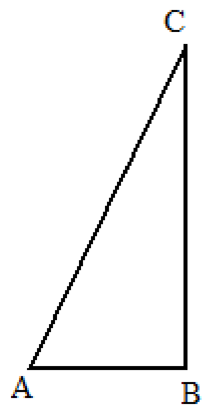
Paso 3: Unir todos los vértices y obtiene el dodecágono.



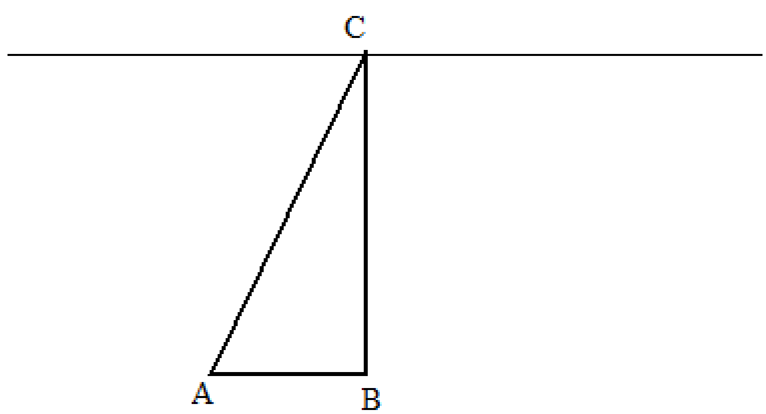
Construcción 3.1.8

Cuadratura de un triángulo rectángulo.

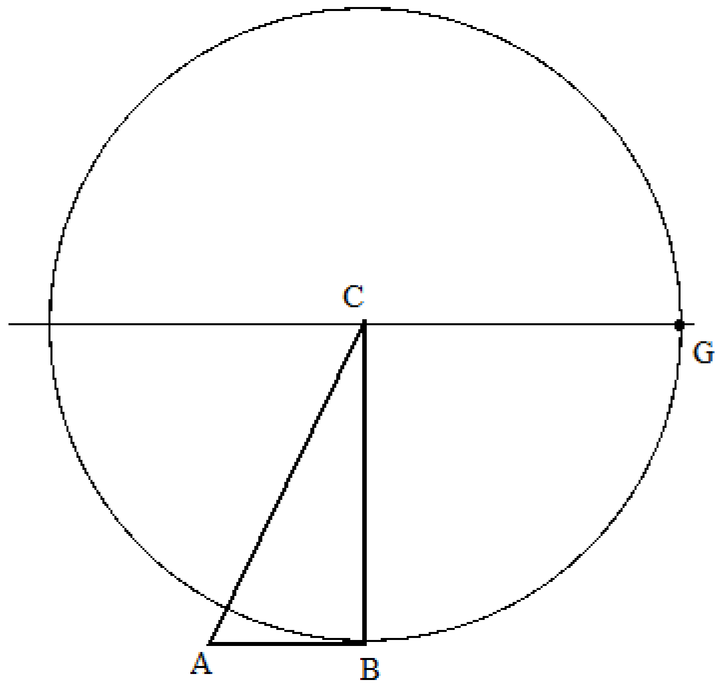
Paso 1: Trazar el triángulo ΔABC.



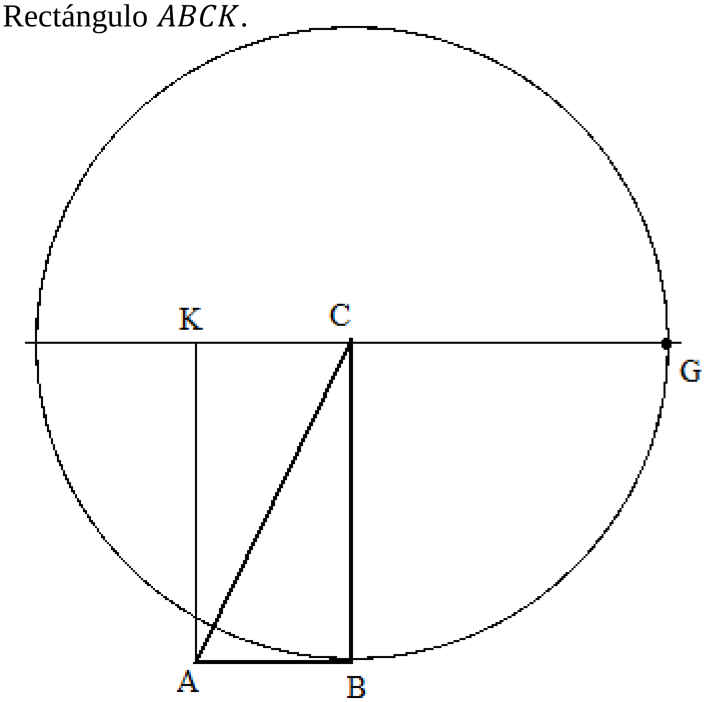
Paso 2: trazar una recta perpendicular a $\overline{BC}$



Paso 3: Con centro en C trace una circunferencia que pase por B y marque el Punto G.

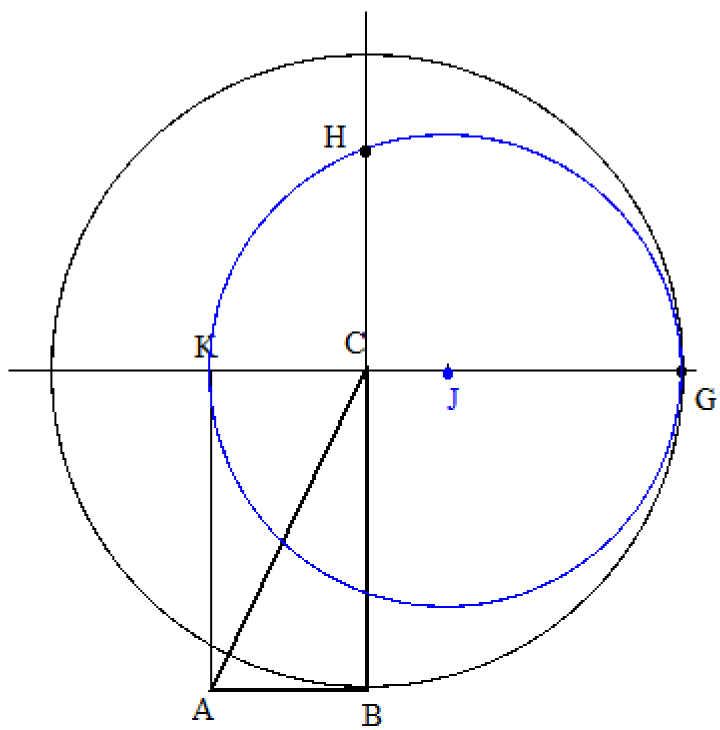


Paso 4: Construya el Rectángulo $ABCK$.

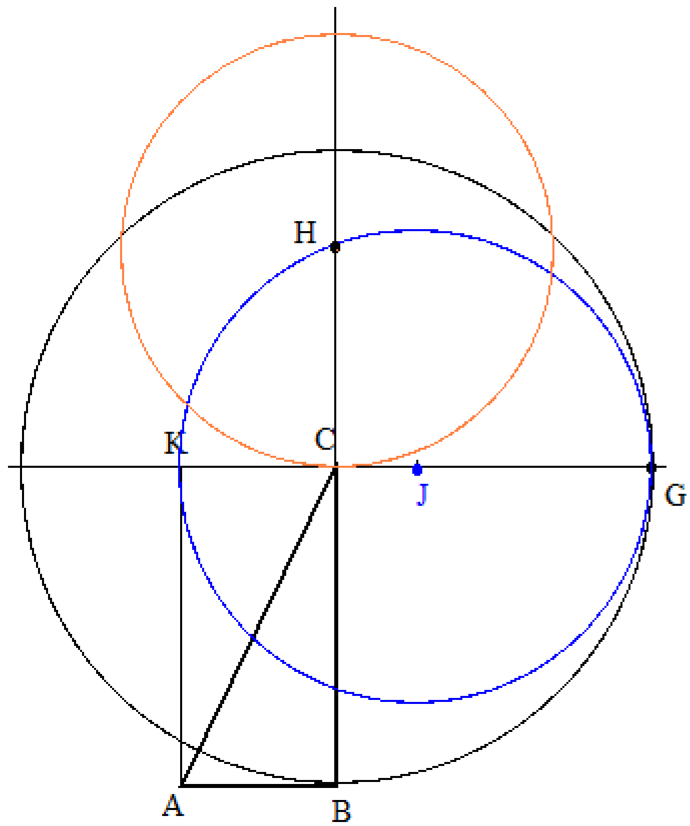


Paso 5: Trazar una circunferencia por J que es el punto medio de $\overline{KG}$ y marcar la intersección H

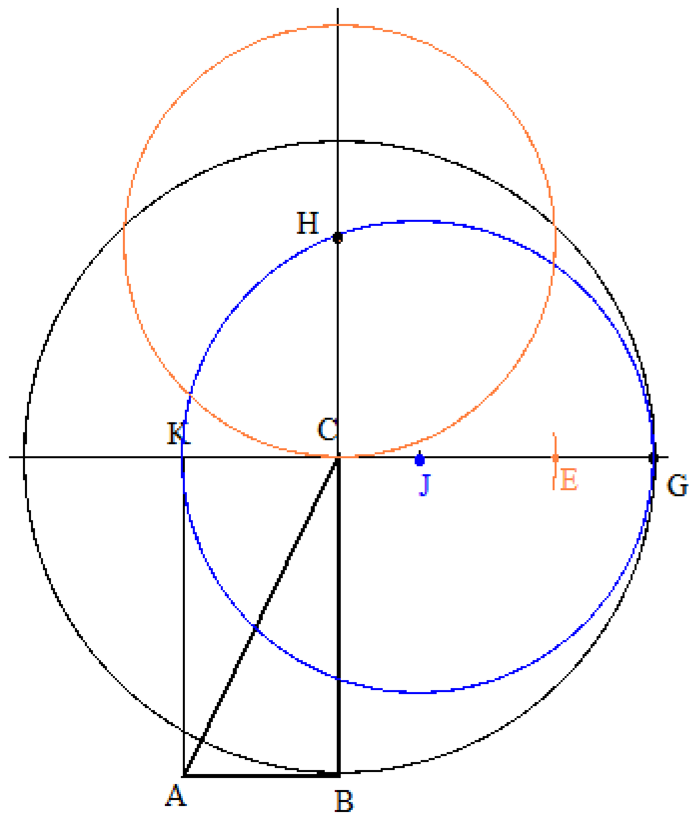
.



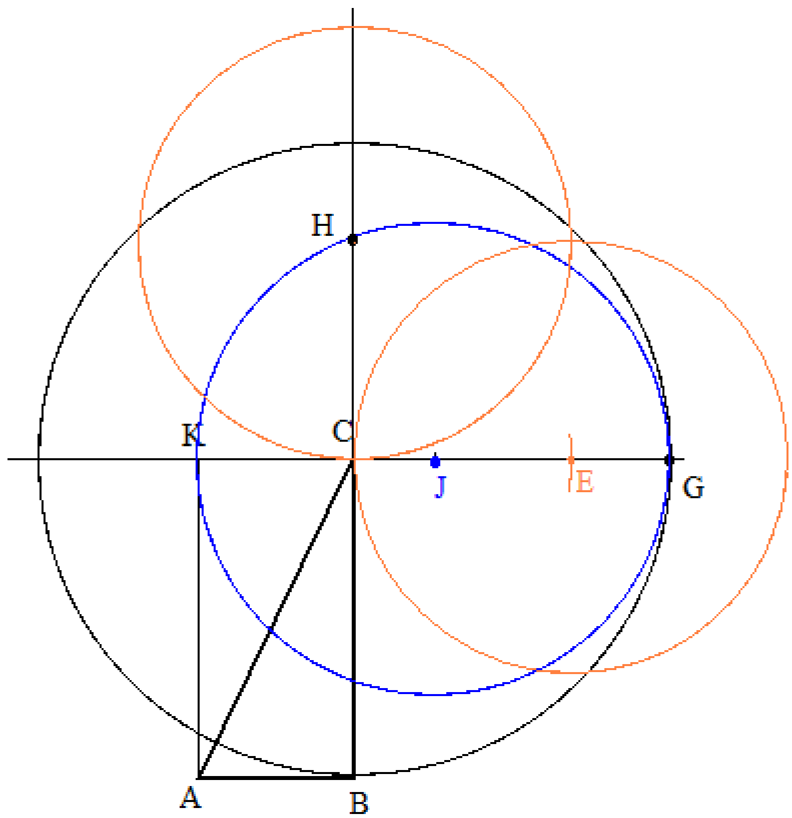
Paso 6: trazar una circunferencia con centro en $\overline{H}$ y radio $\overline{HC}$.



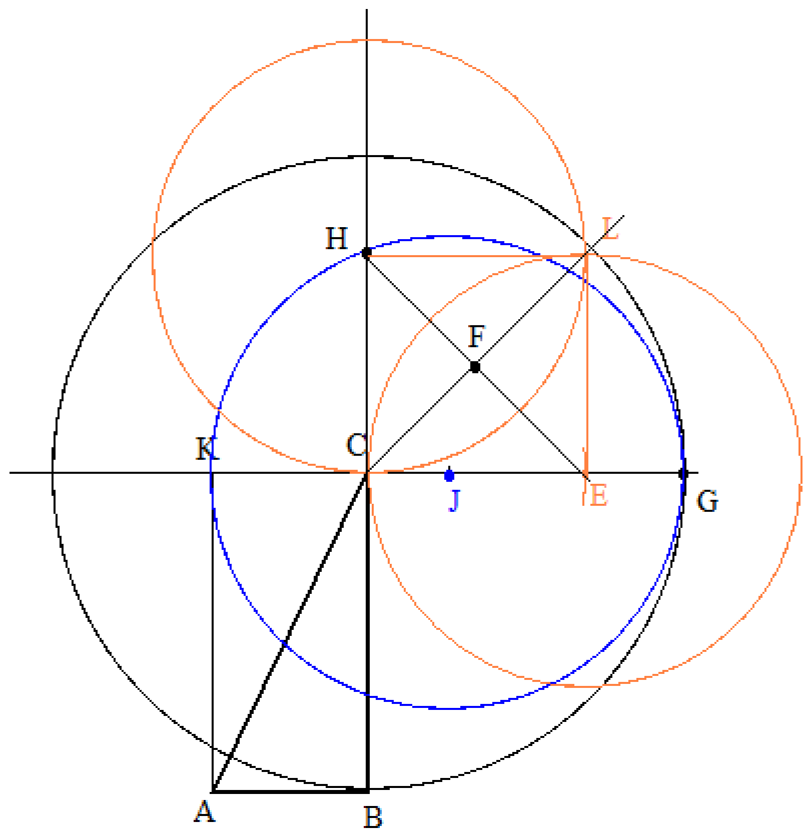
Paso 7: copiar $\overline{HC}$ en $\overline{CG}$



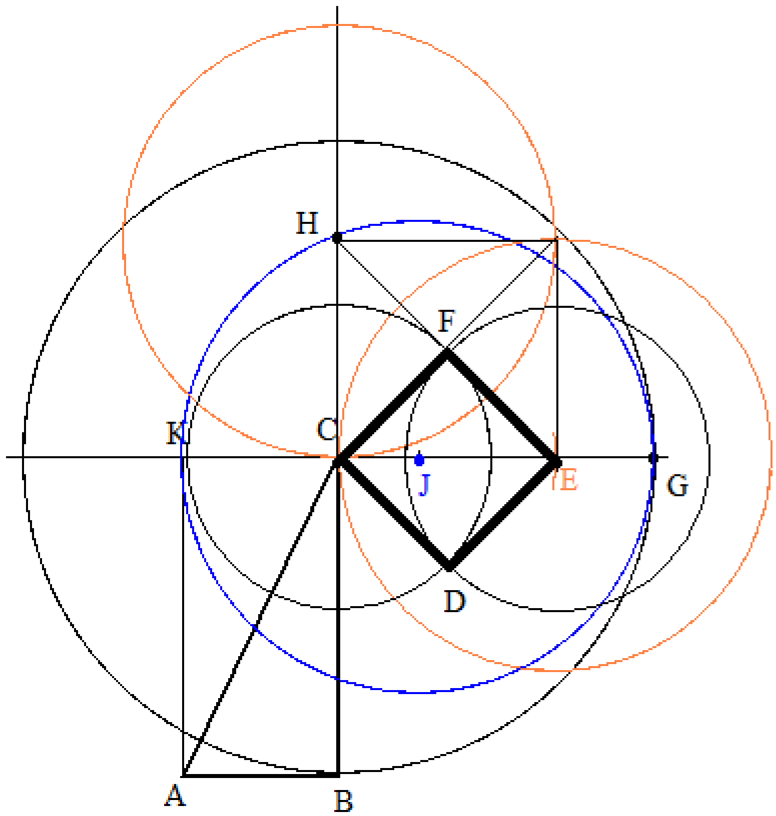
Paso 8: trazar una circunferencia con centro en E y radio $\overline{CE}$



Paso 9: Construya el cuadrado $CHLE$ y trace sus diagonales, marque el punto F.



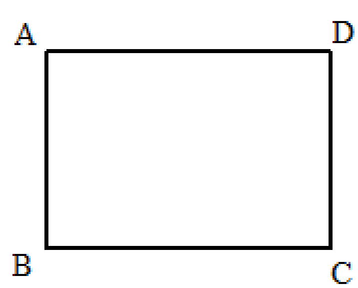
Paso 10: Construya el cuadrado $CFED$, que es de área igual al rectángulo.



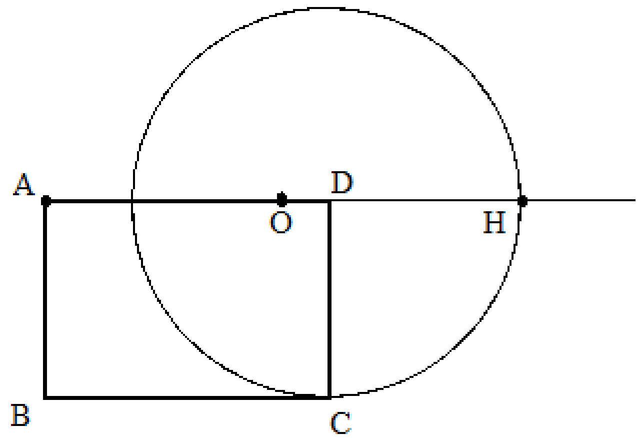
Construcción 3.1.9

Cuadratura de un rectángulo

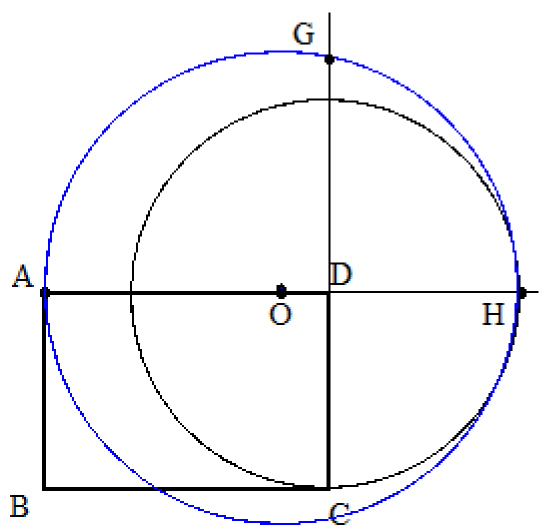
Paso 1: Trazar el rectángulo $ABCD$.



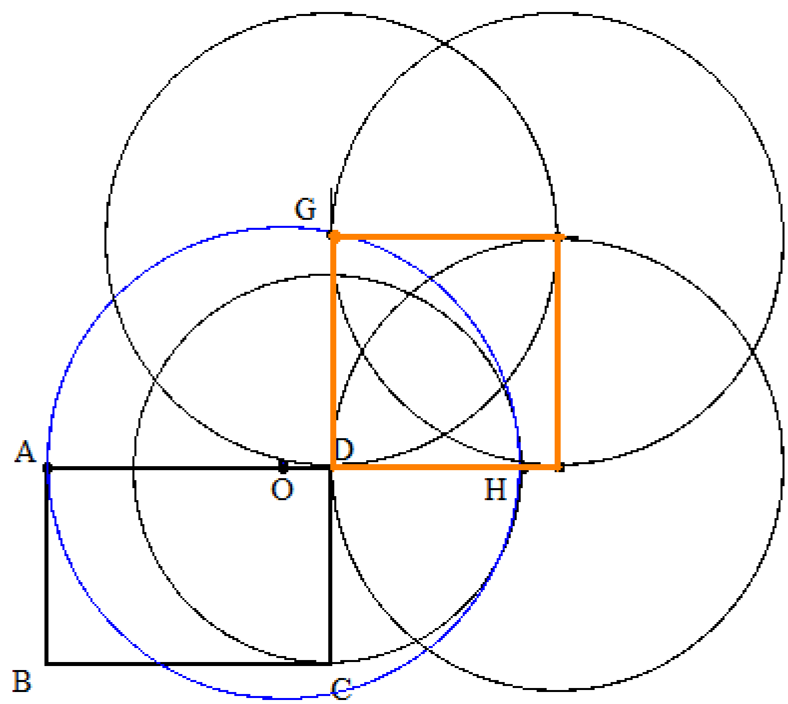
Paso 2: Trazar una circunferencia con centro en D que pase por C , prolongue $\overline{AD}$ y marque la intersección H, O es el punto medio de $\overline{\text{AH}}$.



Paso 3: Con centro en O y radio $\overline{\text{OH}}$ trace una circunferencia, prolongar $\overline{CD}$ y marque la intersección G.

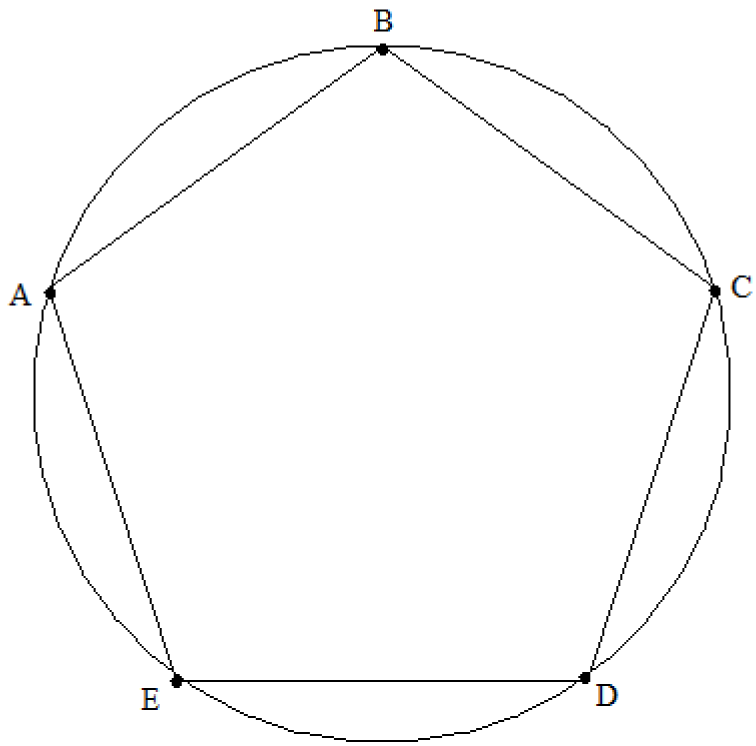


Paso 4: Trace el cuadrado pedido con lados $\overline{DG}$.

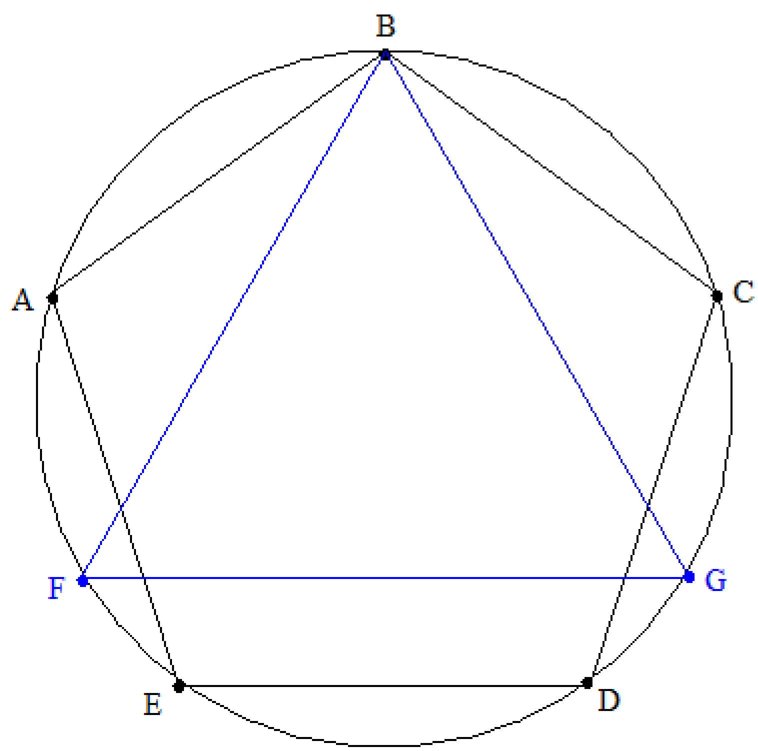


3.1.10 Construcción del Pentadecágono Regular

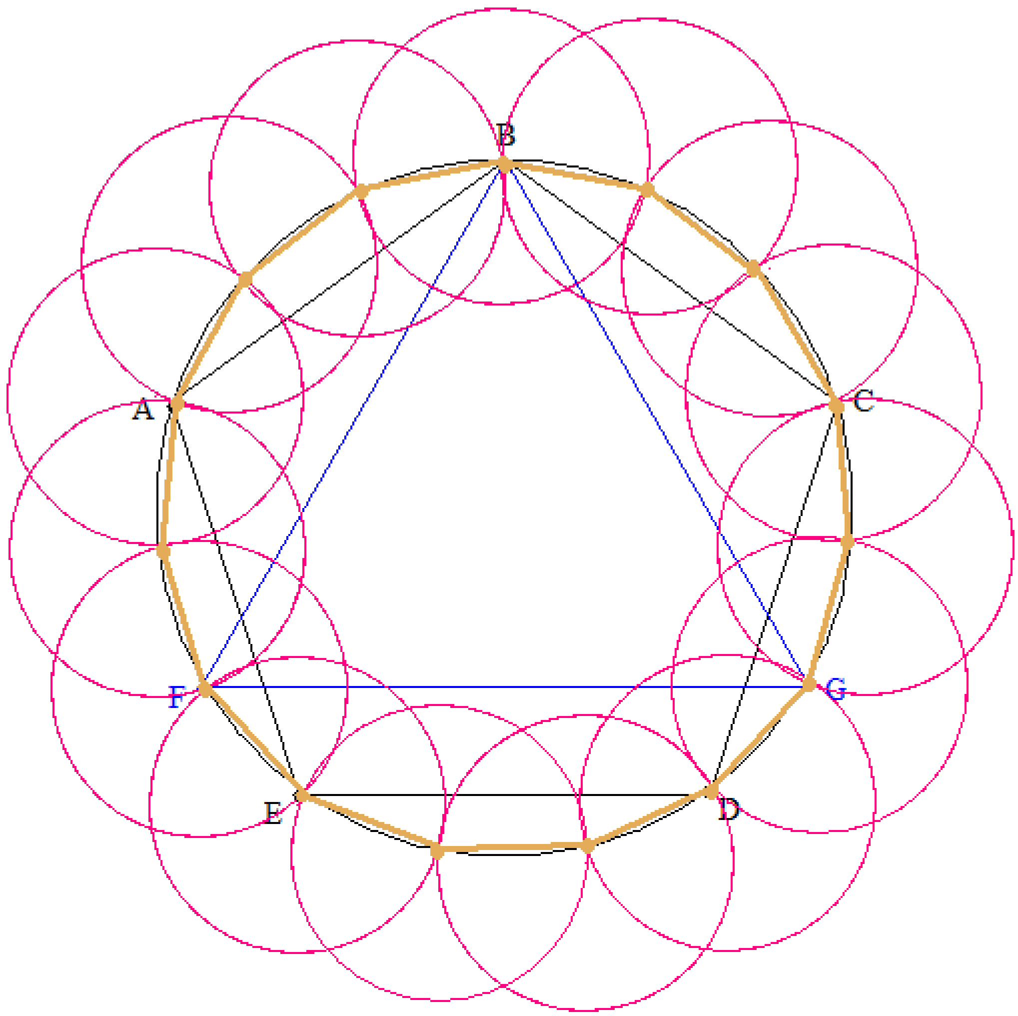
Paso 1. Construir un pentágono regular con vértices A, B, C, D, E.



Paso 2. Construir del vértice B un triángulo equilátero, marcar los vértices F, G .

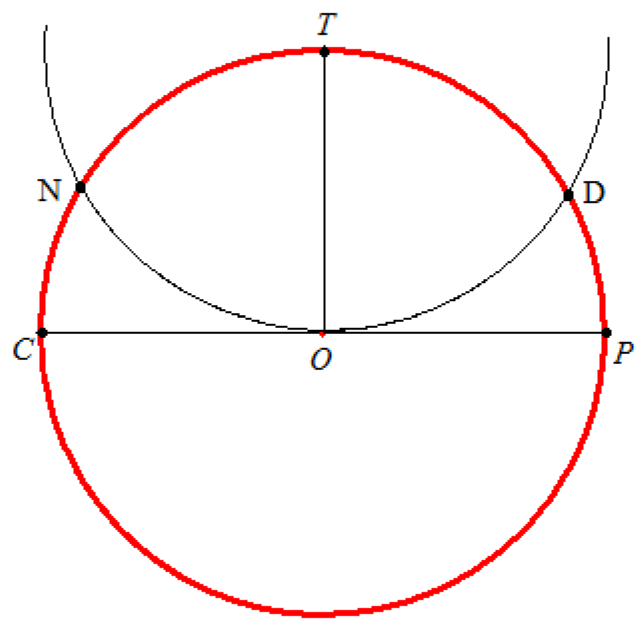


Paso 3. $\overline{EF} = \overline{DG}$ lados del Pentadecágono .

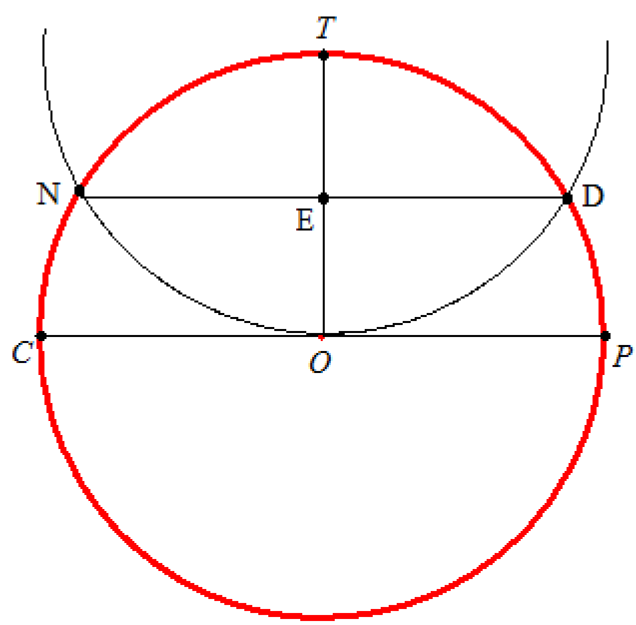


3.1.11 Construcción del Heptadecágono Regular.

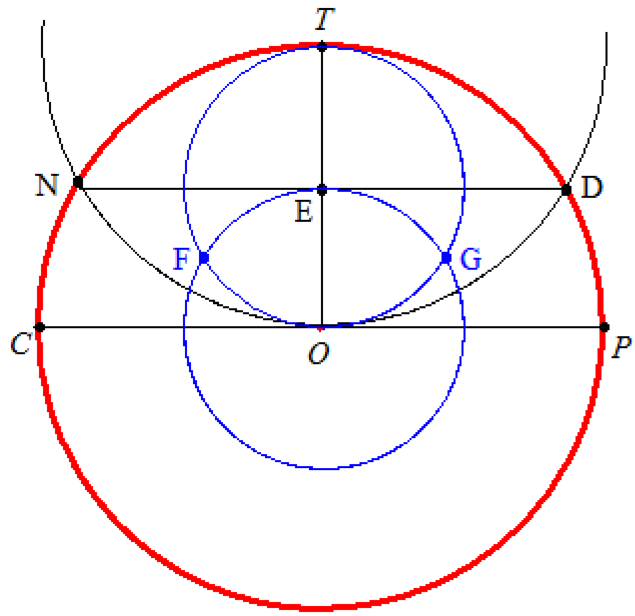
Paso 1. Trazar una circunferencia con centro en T y radio $\overline{TO}$, marcar las intersecciones de las circunferencias con N, D.



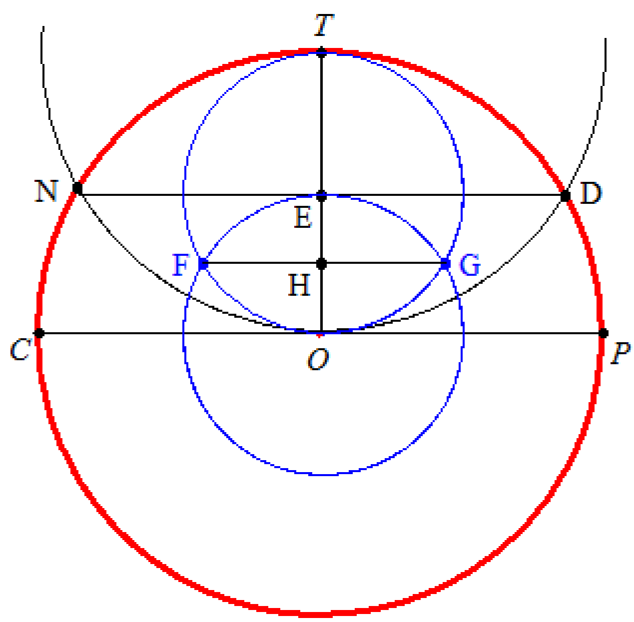
Paso 2. Unir N, D y marcar la intersección de $\overline{TO}$ y $\overline{ND}$ con E.



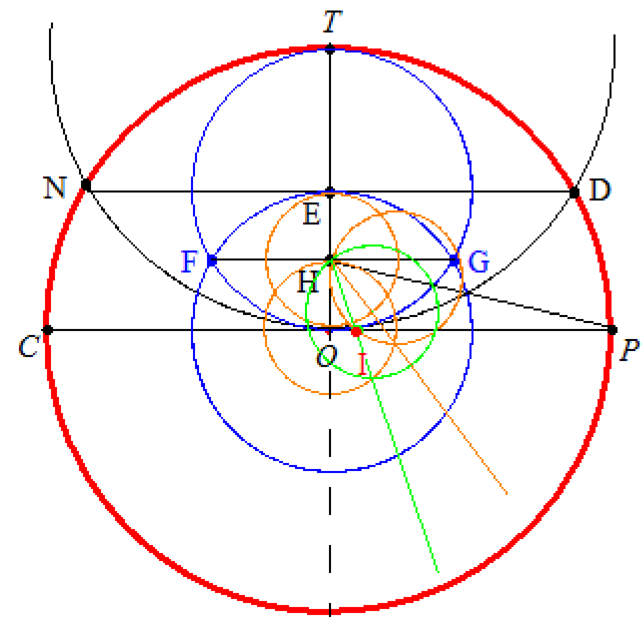
Paso 3. Trazar las circunferencias de radio $\overline{OE}$ que tienen sus centros en O y en E, y marcamos los dos puntos de intersección entre ellas F y G.



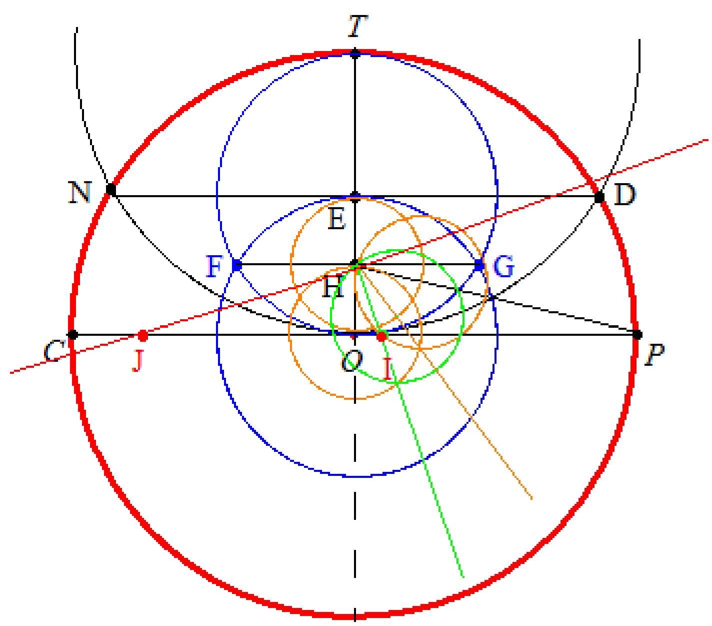
Paso 4. Unir F y G marcar con H el punto de intersección entre $\overline{FG}$ y $\overline{TO}$.



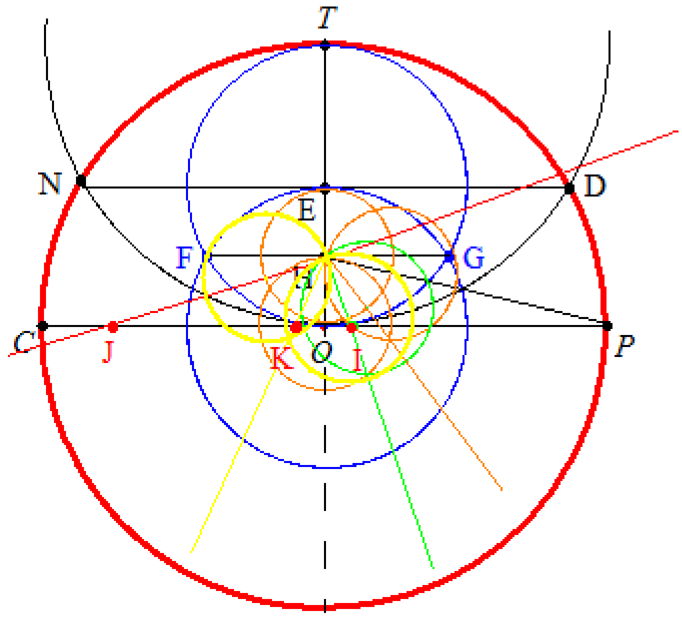
Paso 5. El ángulo $\measuredangle OHI$ es la cuarta parte del ángulo $\measuredangle OHP$.



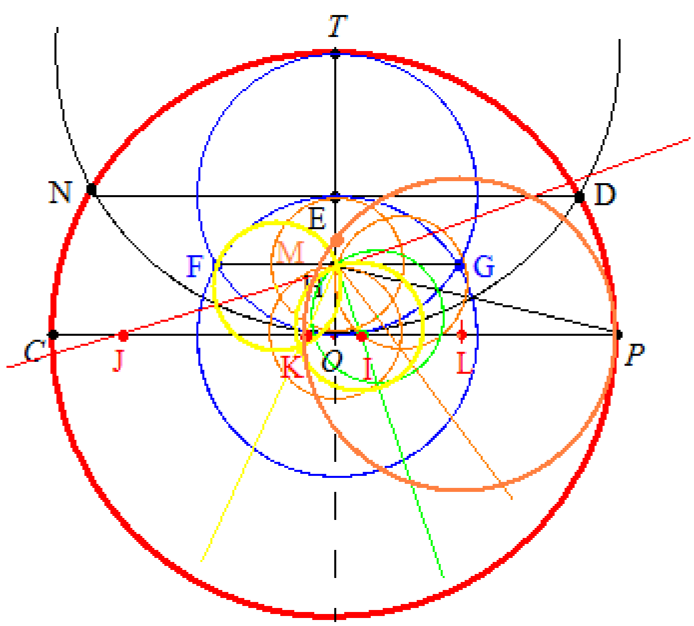
Paso 6. Trazar la perpendicular al segmento $\overline{HI}$ que pase por el punto H, marcar con J la intersecccion con el segmento $\overline{CO}$.



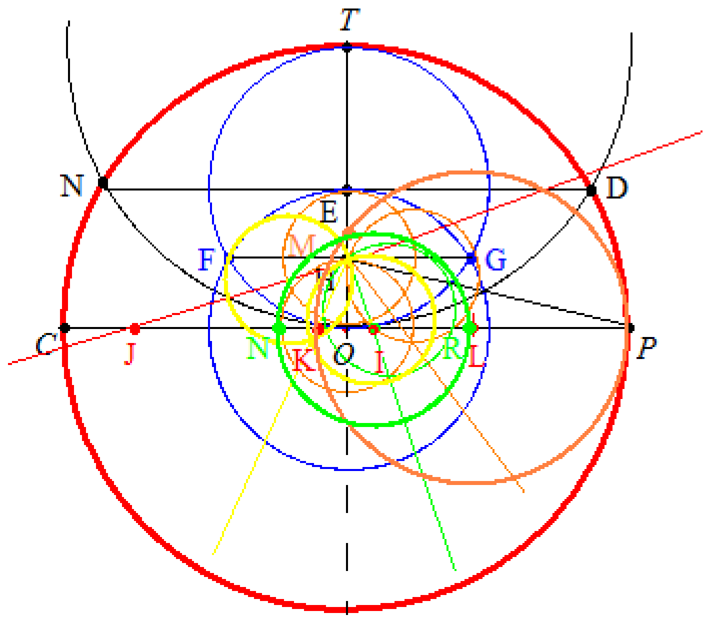
Paso 7. Trazar la bisectriz del $\measuredangle JHI$ y marcar con K el punto de intersección con el segmento $\overline{JO}$.



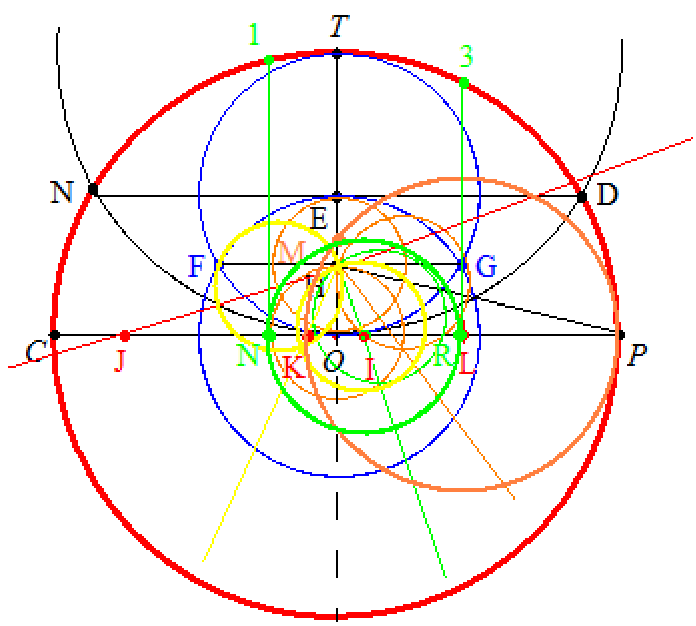
Paso 8. Construir el punto medio del segmento $\overline{KP}$ y llamarlo L. Trazar la circunferencia de centro L y radio $\overline{LK}$. Llamar M al punto de corte de esta circunferencia con el segmento $\overline{EO}$.



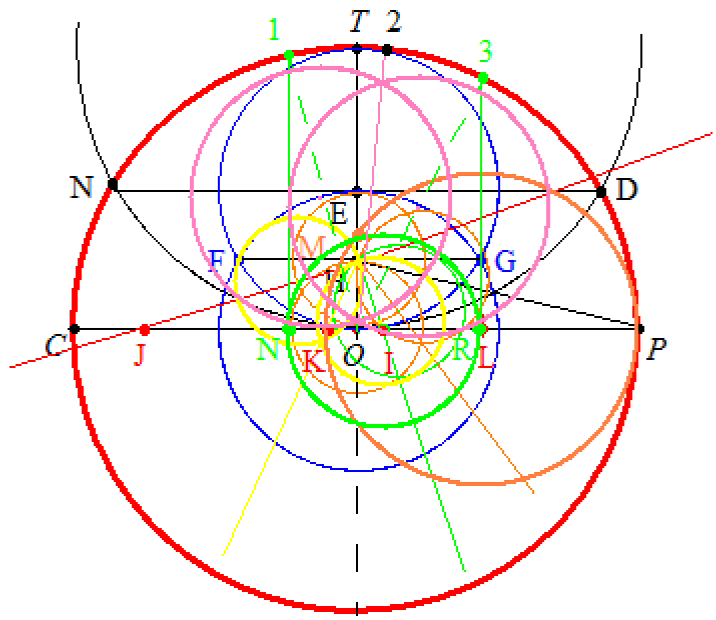
Paso 9. Trazar la circunferencia de centro I y radio $\overline{IM}$ y marcamos como N y R a los puntos de corte de la misma con el segmento $\overline{CP}$.



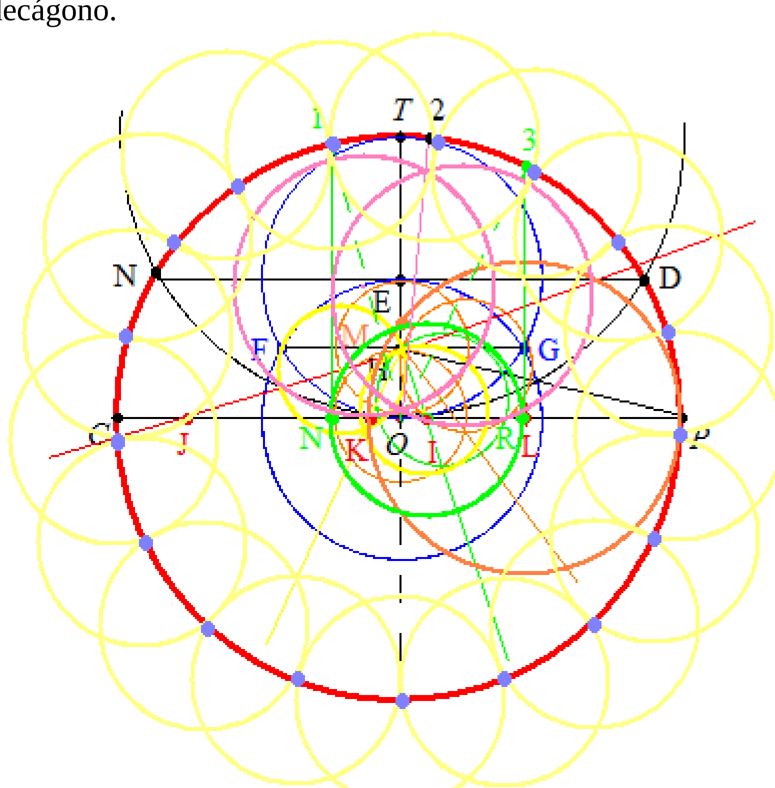
Paso 10. Trazar las perpendiculares al segmento $\overline{CP}$ que pasan por N y por R. Estas perpendiculares cortan a la circunferencia inicial en 1 y 3, que son dos de los vértices del heptadecágono.



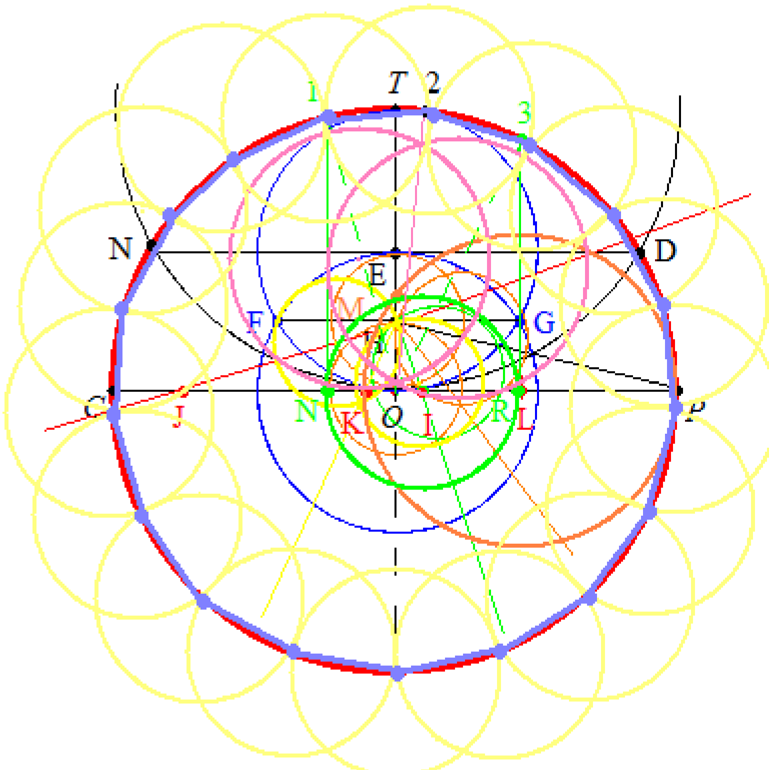
Paso 11. Trazar la bisectriz del ángulo $\measuredangle 1O3$ que corte a la circunferencia inicial en el punto 2, que es también uno de los vértices del heptadecágono.



Paso 12. Copie el segmento $\overline{1-2}$ sobre la circunferencia hasta obtener el heptadecágono.



Paso 13. Unir los puntos de intersección de las circunferencias trazadas.



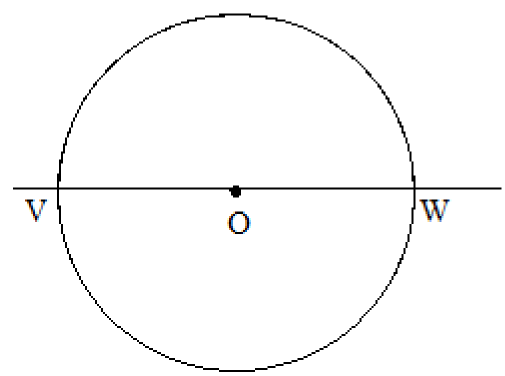
Sección II. *Aproximaciones de algunas Construcciones Geométricas con Regla y Compás.*

En esta sección se estudiara algunas aproximaciones de las construcciones de polígonos no regulares como el heptágono, nonágono y se desarrolla un método general para construir un polígono de cualquier número de lados.

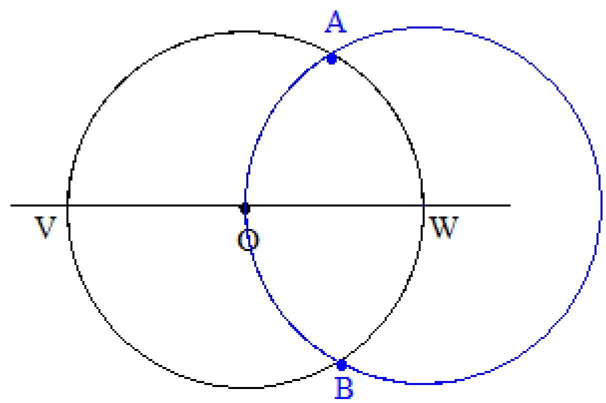
Construcción 3.2.1.

Construir un heptágono regular en una circunferencia.

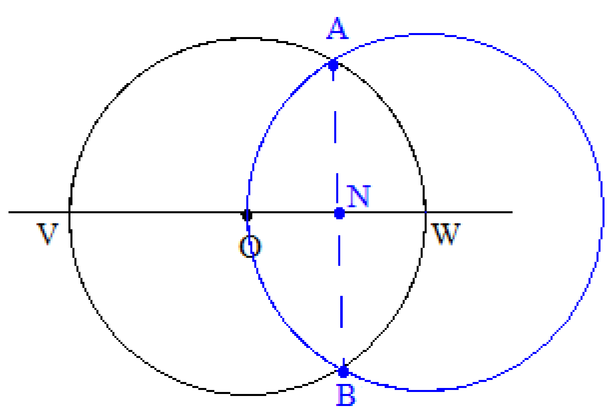
Paso 1. Trace una recta y sobre esta una circunferencia con centro en O y marque las intersecciones V, W.



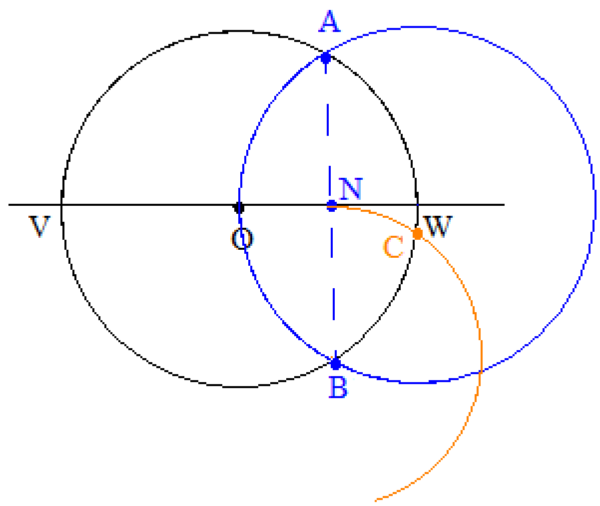
Paso 2. Desde W trace una circunferencia que pase por O, marque las intersecciones de las circunferencias A y B.



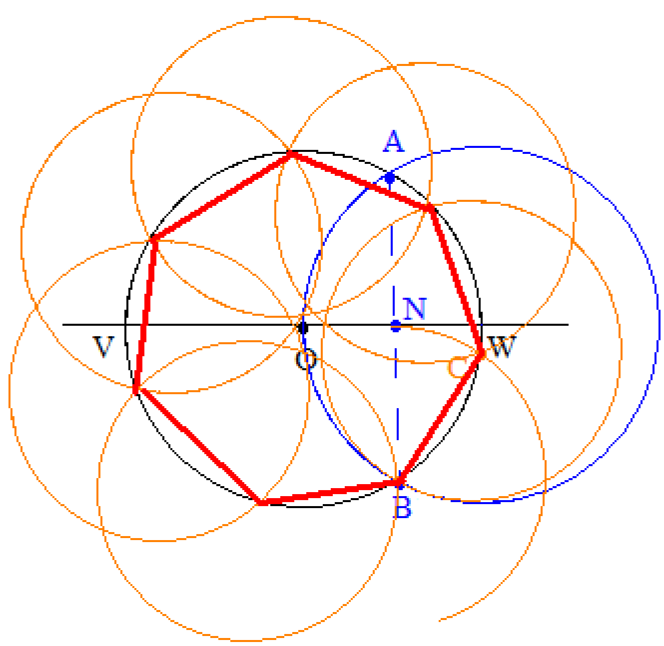
Paso 3.Trazar el segmento $\overline{AB}$, marcar con N la intersección $\overline{OW}$ y $\overline{AB}$.



Paso 4. Desde B trace un arco que pase por N y corte la circunferencia en C.



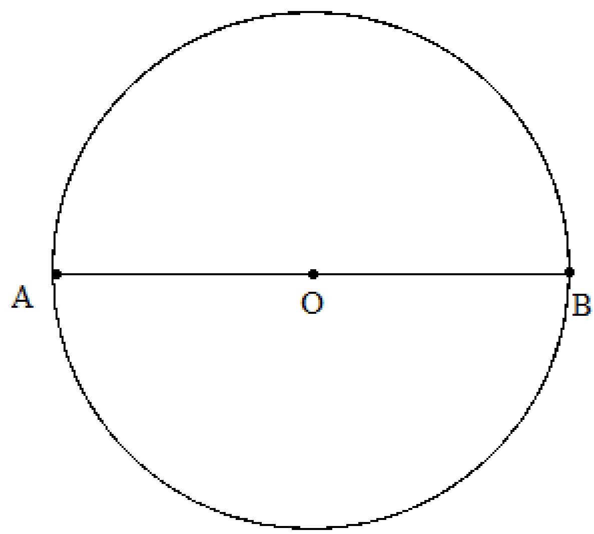
Paso 5. $\overline{BC}$ es la medida del lado del heptágono.



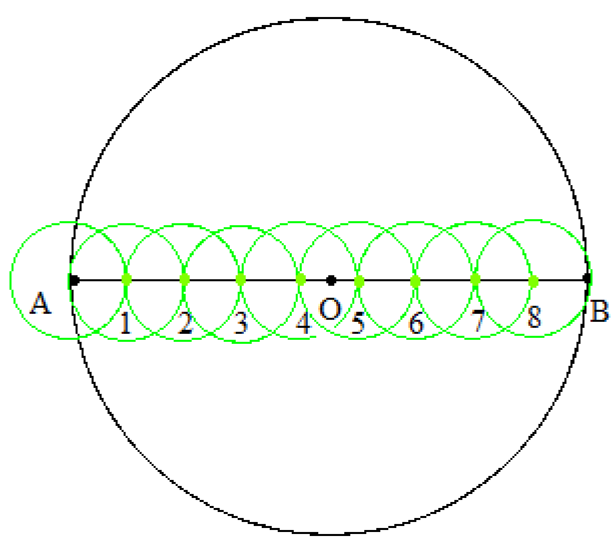
Construcción 3.2.2. Aproximación de la construcción del nonágono regular

Polígono de nueve lados es también una figura imposible de construir únicamente con el compás y una regla. Puede, sin embargo, ser aproximada.

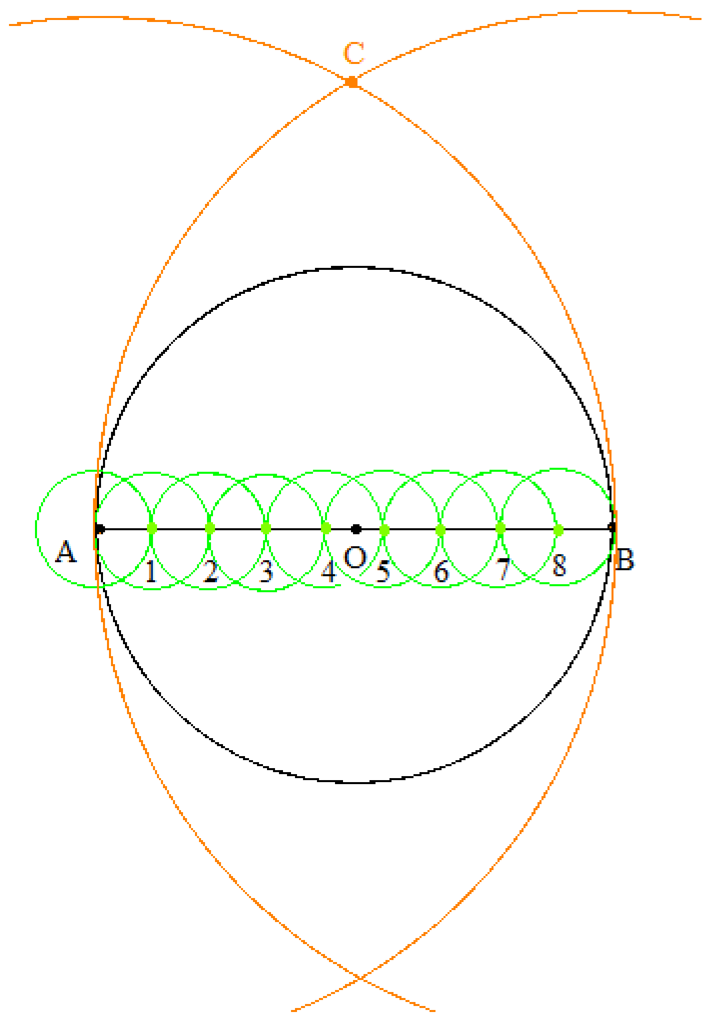
Paso 1. Dibujar circunferencia con centro en O y diámetro $\overline{AB}$.



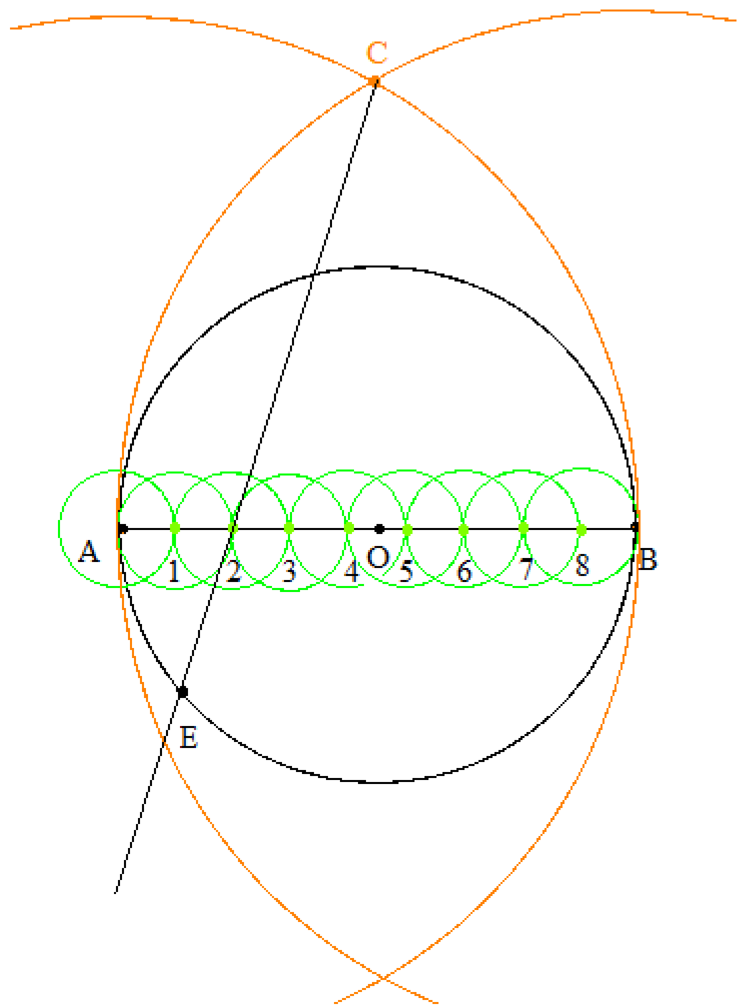
Paso 2. Divida $\overline{AB}$ en 9 partes iguales, numerar los puntos del 1 al 8.



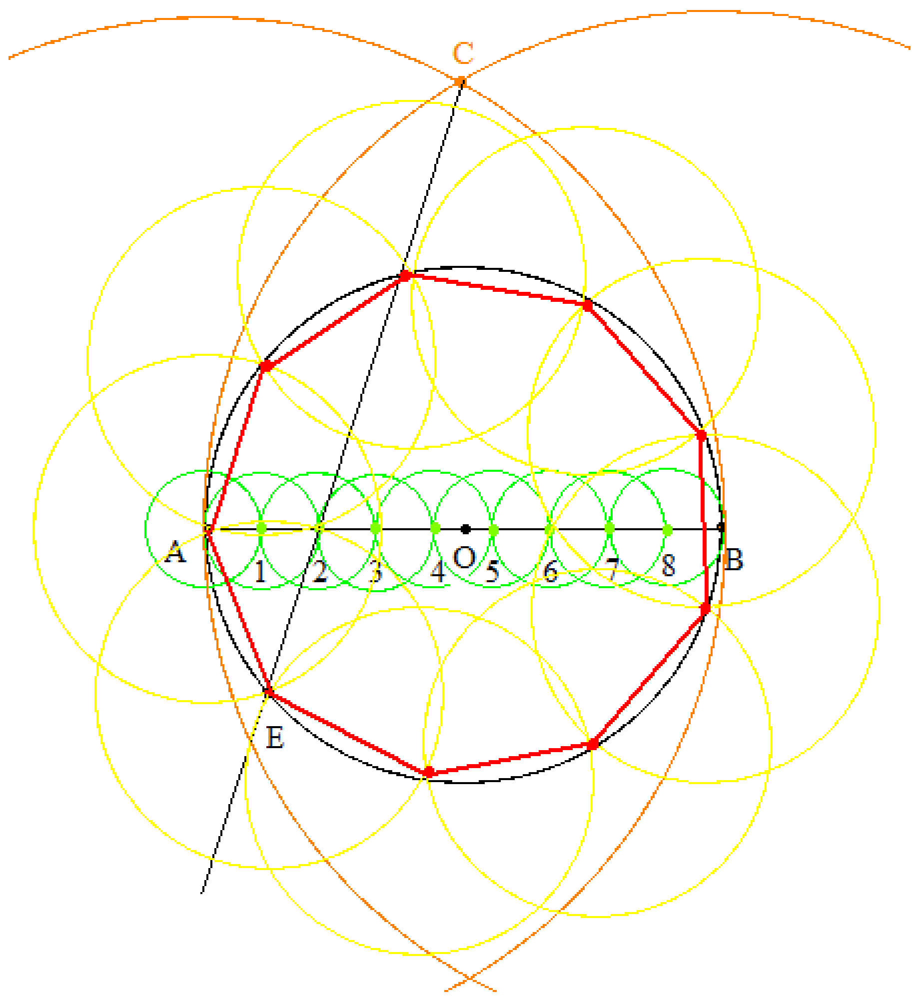
Paso 3. Dibuje dos circunferencia una en centro en A y otra centro B, cada una con radio $\overline{AB}$. Se intersectan en C.



Paso 4. Trazar una recta que pase por los puntos 2, C y E será la intersección de la recta con la circunferencia.

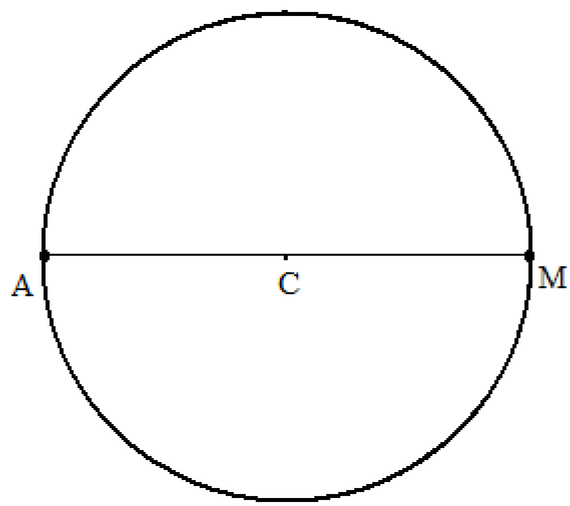


Paso 5. $\overline{AE}$ es la longitud de un lado del nonágono.

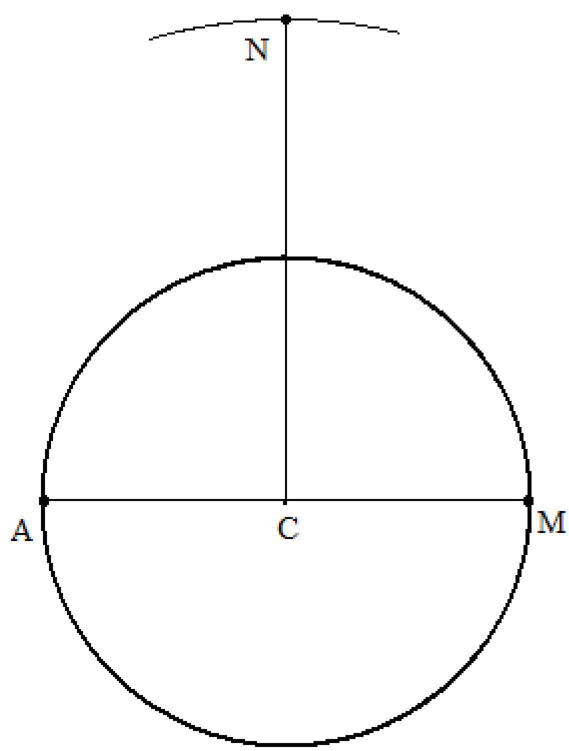


3.2.3 Método para aproximar cualquier polígono regular

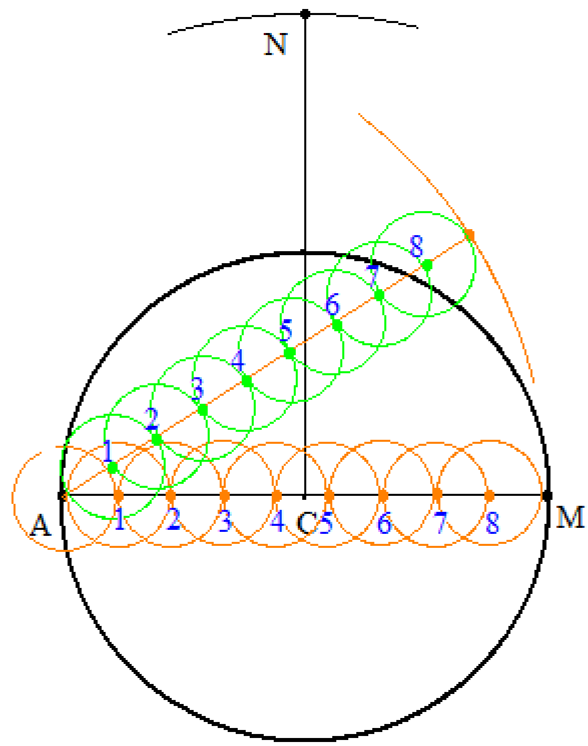
Paso 1. $\overline{AM}$ Diámetro de la circunferencia con centro C.



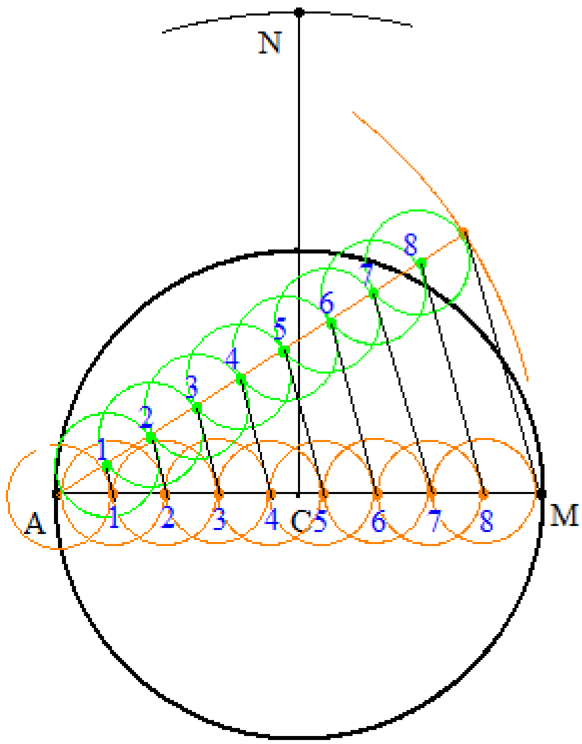
Paso 2. Trace una perpendicular por C donde $\overline{CN} = \overline{AM}$.



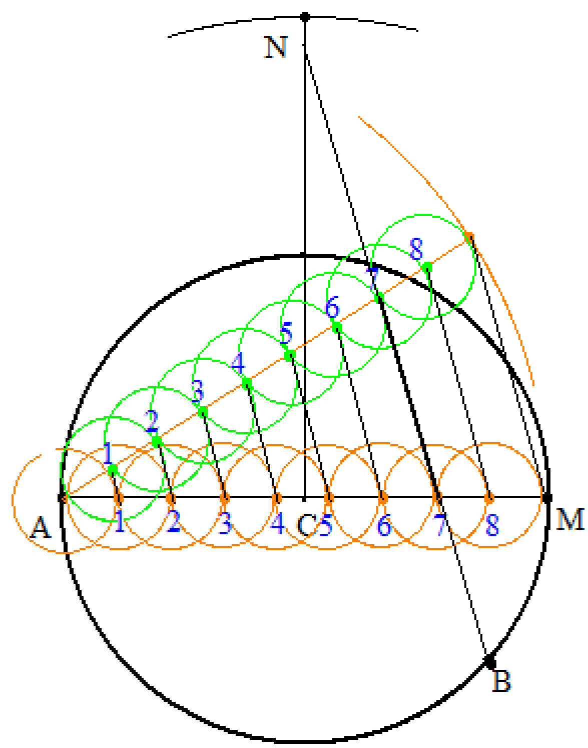
Paso 3. Trace una recta desde A que intersecte la circunferencia y pase ente $\overline{CN}$ y sobre ella copie medidas iguales, tantas como lados desee que tenga el polígono inscrito.



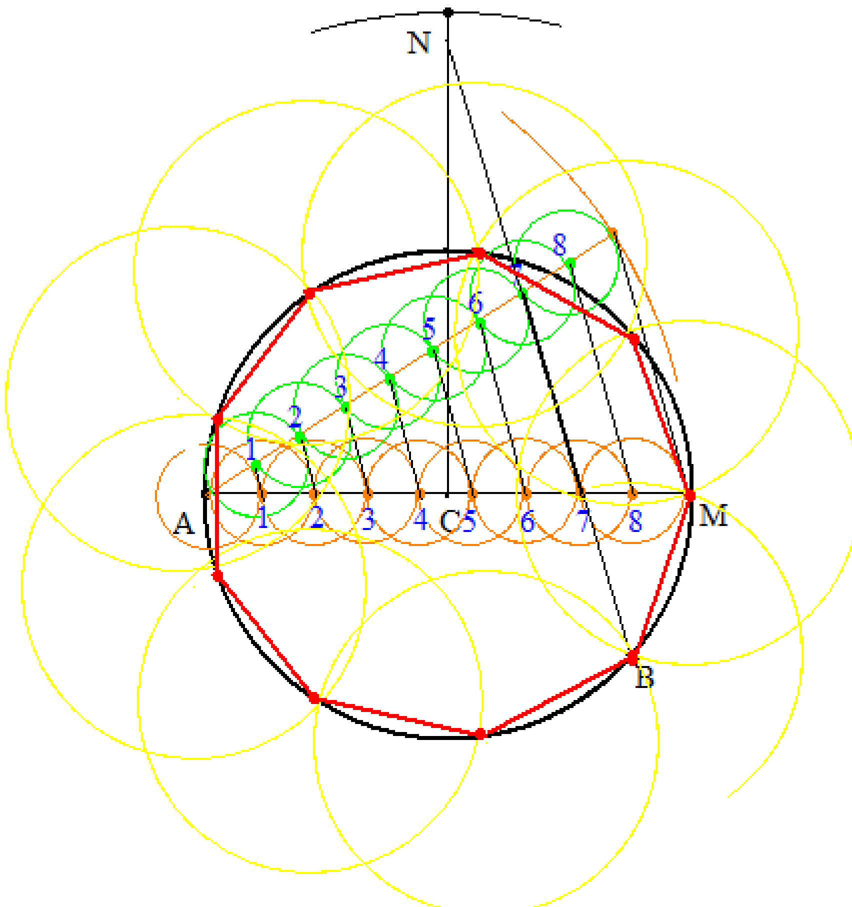
Paso 4. Una la última división con M y luego trace paralelas por cada punto, marque las intersecciones con el diámetro.



Paso 5. Trace una semirrecta que pase por la séptima división y que corte la circunferencia en B.

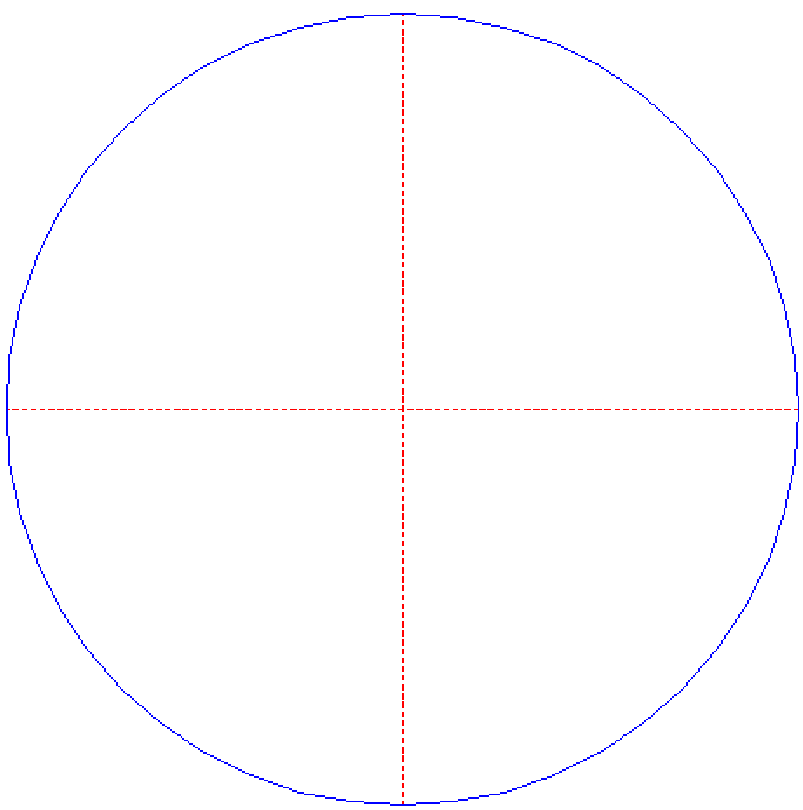


Paso 6. $\overline{BM}$ es el lado del polígono regular buscado.

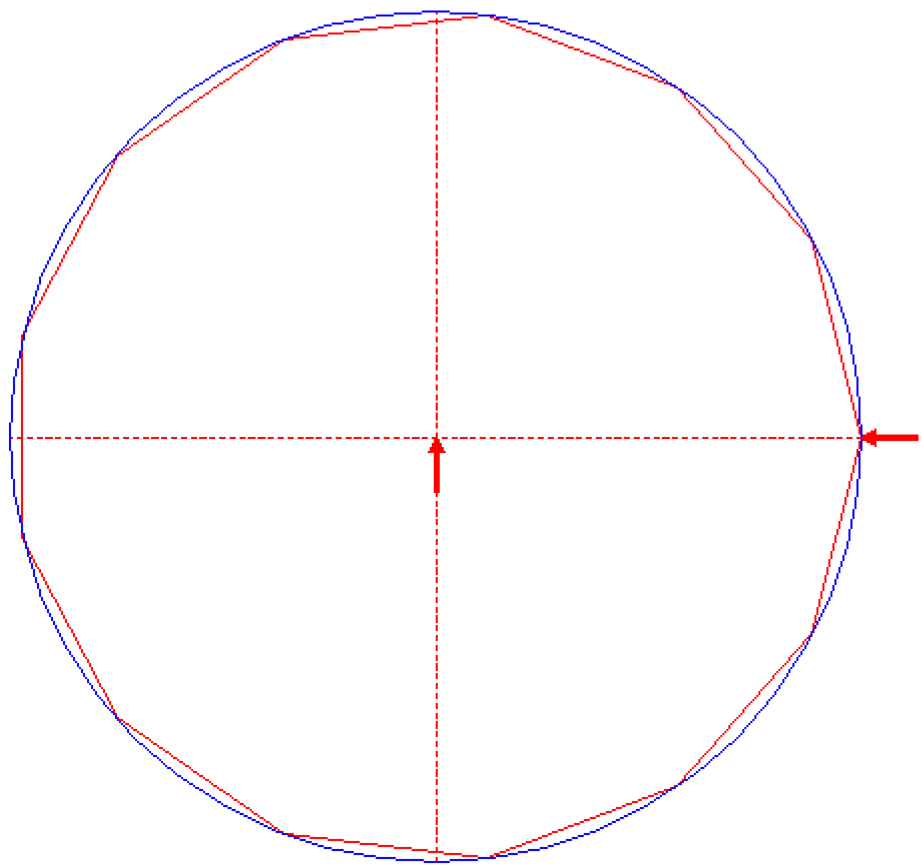


3.2.4 Construcción de un Mosaico con regla y compas.

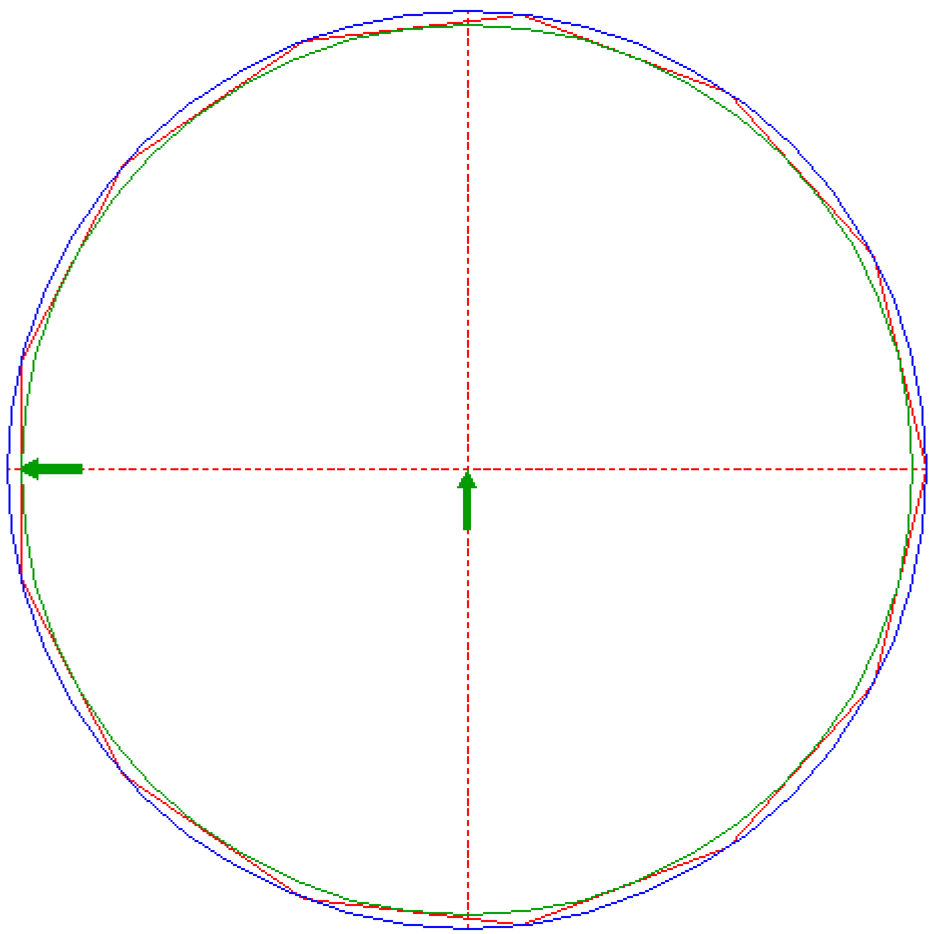
Paso 1. Dibuja un círculo y dibujar las líneas horizontal y vertical cuyo intersecto sea el centro de la circunferencia



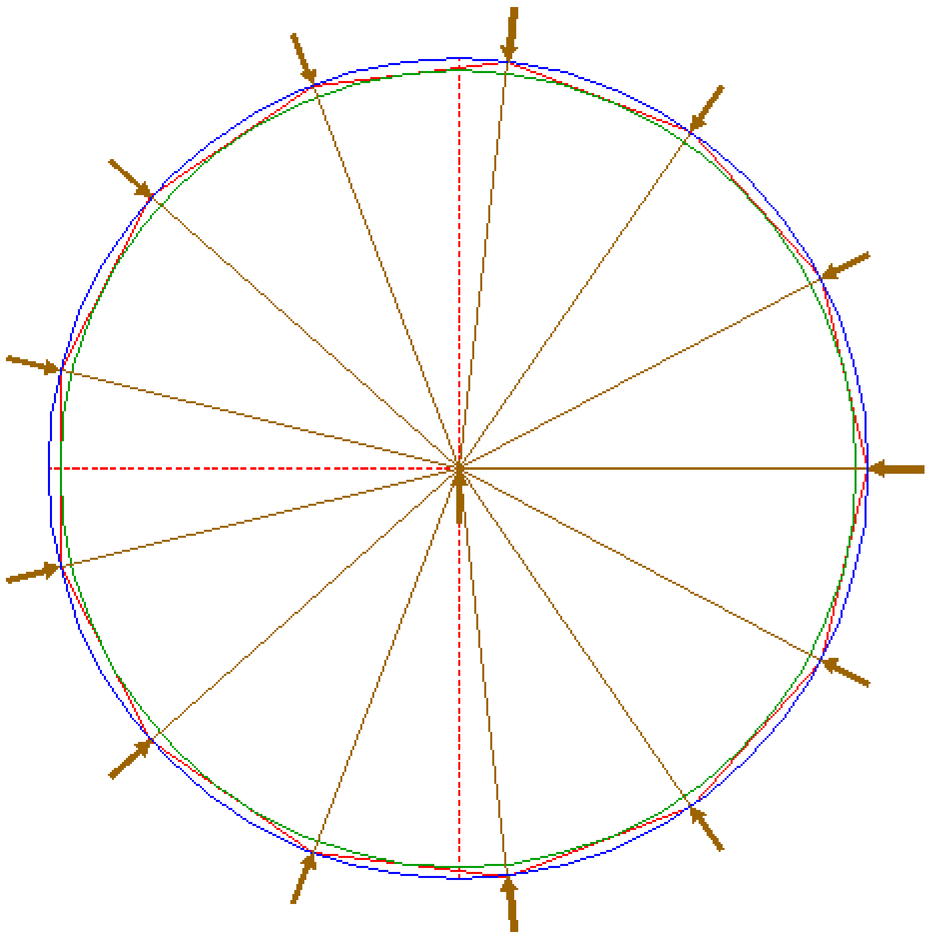
Paso 2.Dibujar un polígono de 13 lados inscrito en la circunferencia trazada en el paso 1



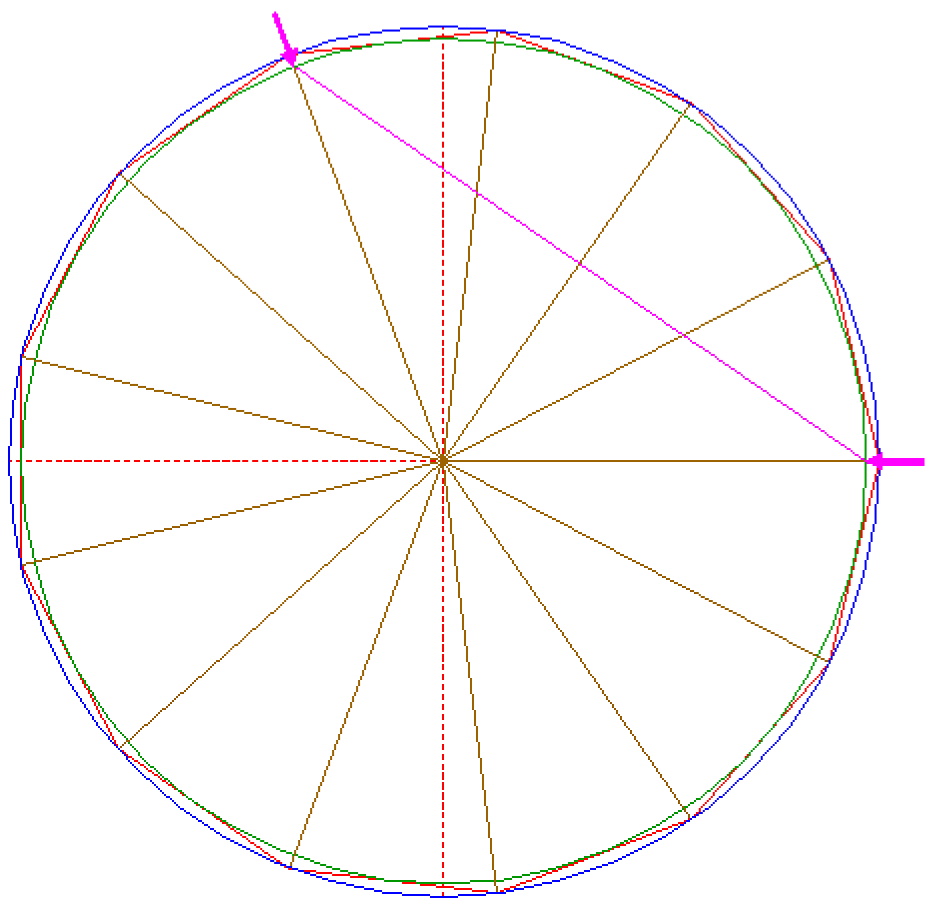
Paso 3. Construir un circulo inscrito en el polígono de 13 lados .



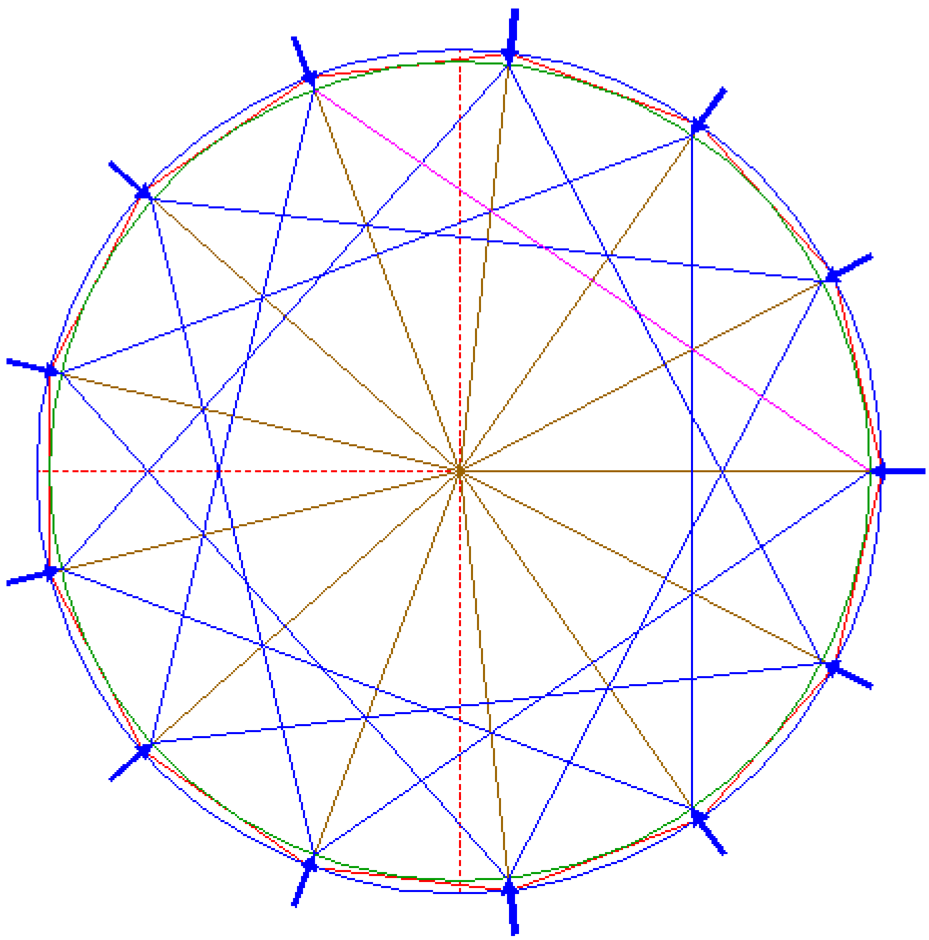
Paso 4**.** Trace rayos del polígono de 13 lados .



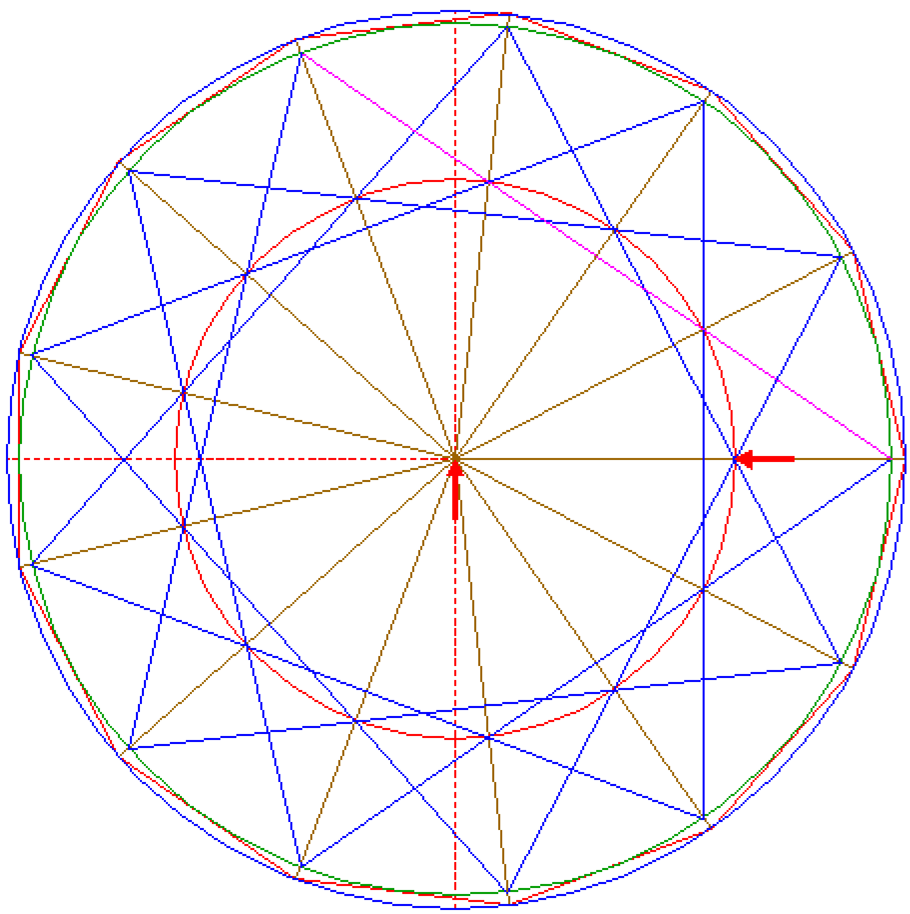
Paso 5**.** Dibuje la línea de conexión entre las intersecciones de círculo inscrito en el polígono de 13 lados con el cuarto rayo consecutivo que queda a la derecha, como se muestra.



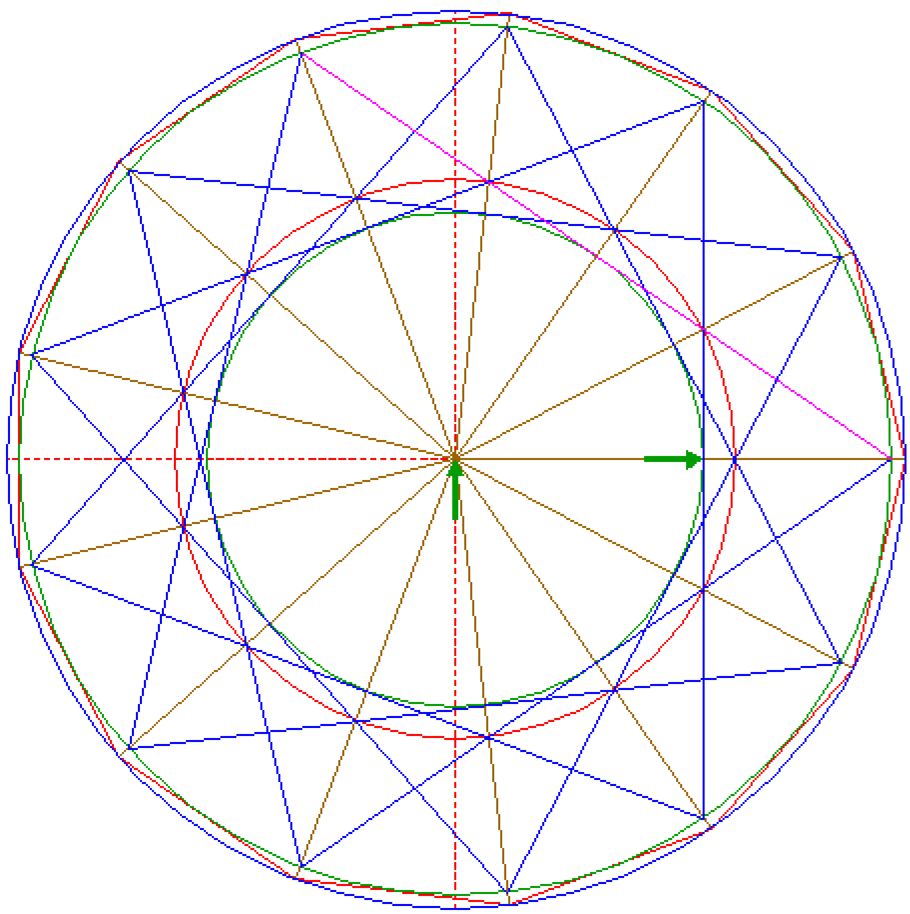
Paso 6. Trazar de la misma forma que en el paso 5 líneas similares para los correspondientes pares de intersecciones de círculo inscrito en el polígono de 13 lados con todos los otros rayos, doce líneas en total.



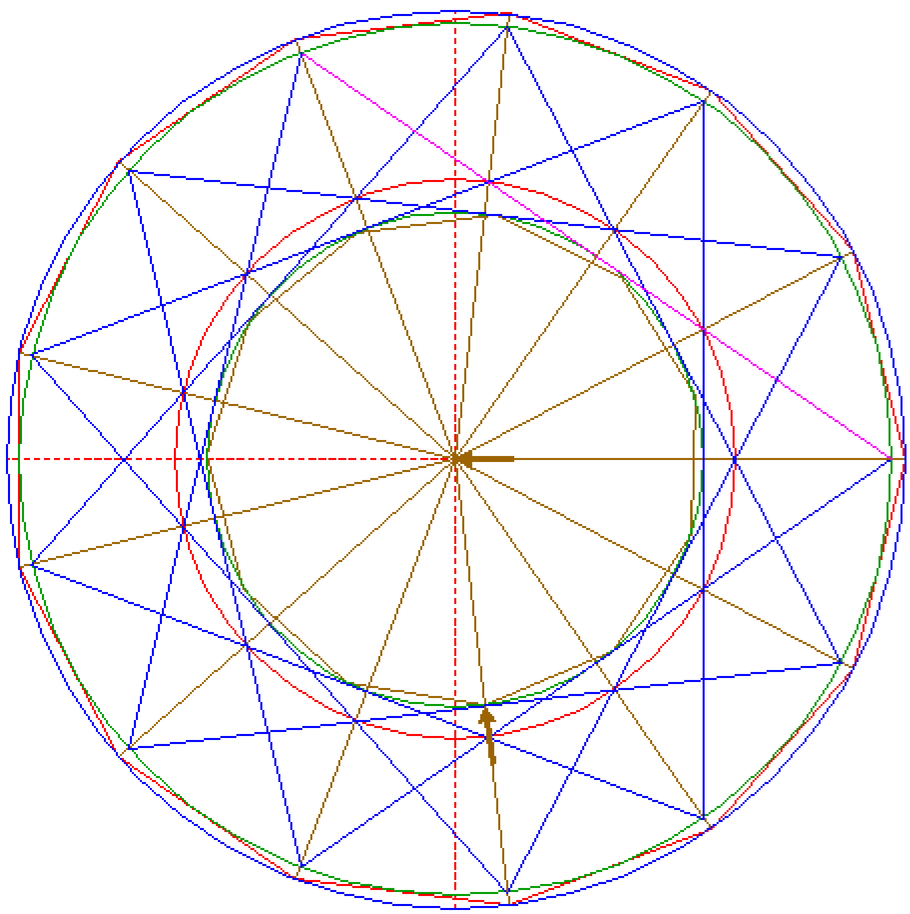
Paso 7**.** Construir un círculo con centro igual al centro de la circunferencia trazado en el paso 1, que pase a través del segundo anillo de intersecciones de las líneas de conexión en los pasos 5 y 6 , contados desde fuera.



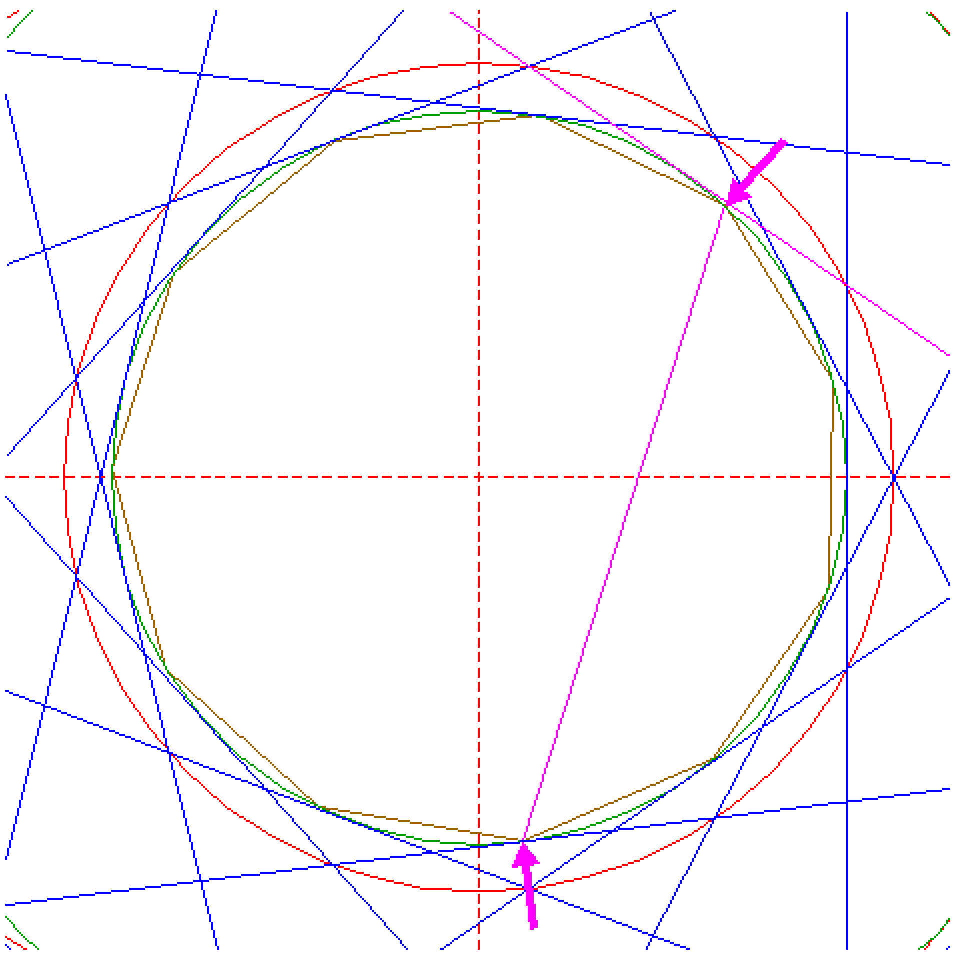
Paso 8. Construir el círculo inscrito al círculo trazado en el paso 7, donde las líneas creadas en los pasos 5 y 6 son tangentes a dicho círculo a construir. 13 líneas tangentes en total.



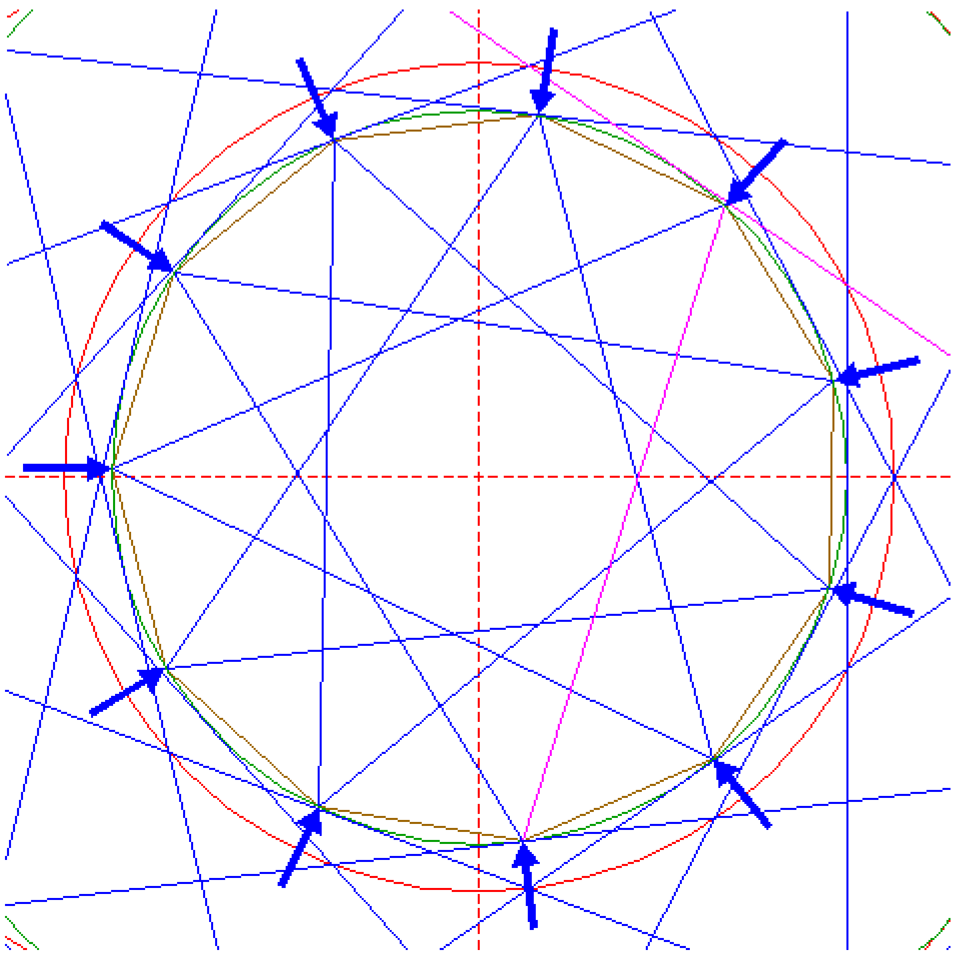
Paso 9. Construir un polígono de 11 lados circunscrito en el círculo trazado en el paso 8. Los vértices del polígono intersectan a los rayos trazados en el paso 4.



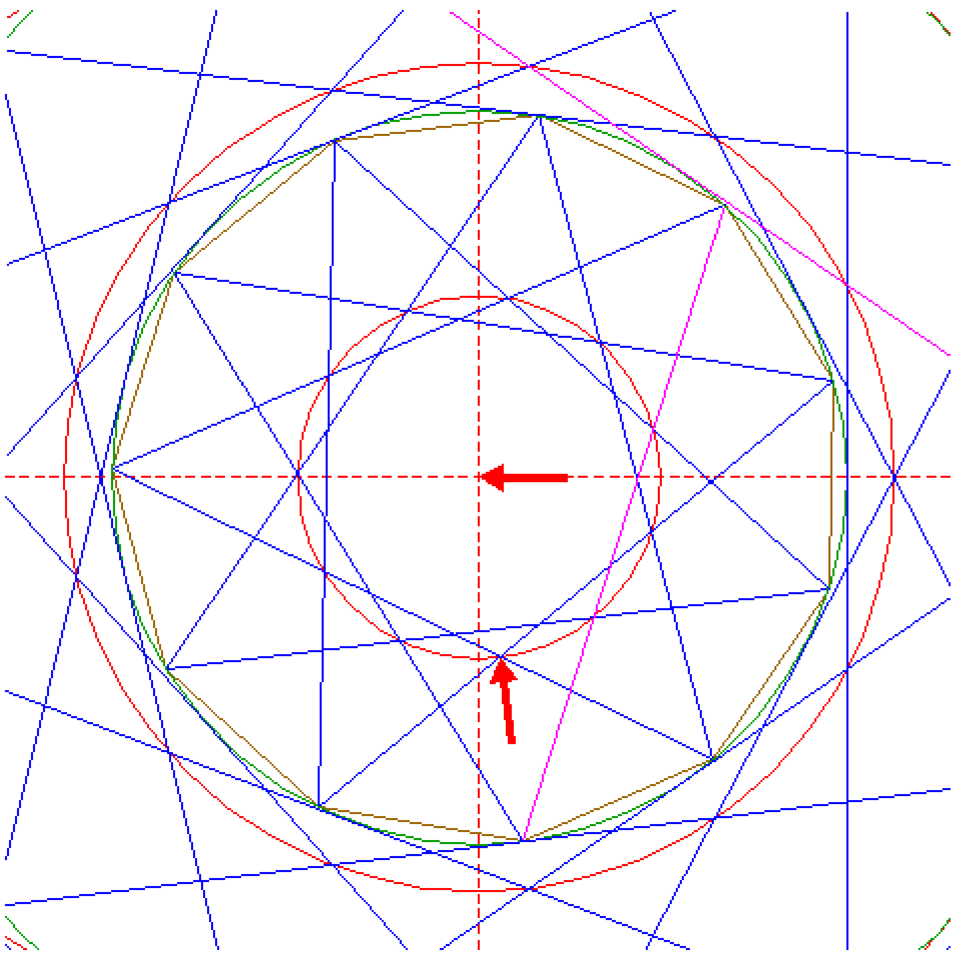
Paso 10. Conecta los vértices del polígono de 11 lados, de la forma que un vértice se conecte con el cuarto vértice consecutivo.



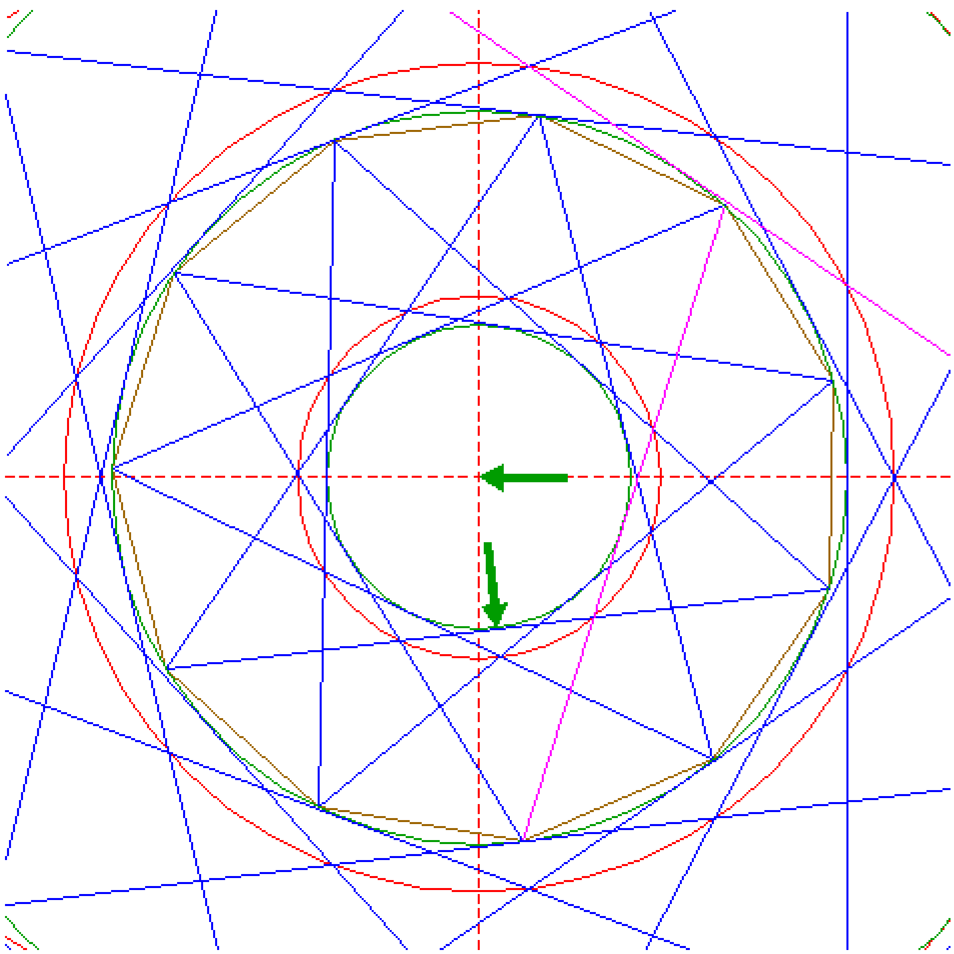
Paso 11. Trazar las líneas de conexión de todos los vértices del polígono de 11 lados, de igual forma que en el paso 10.



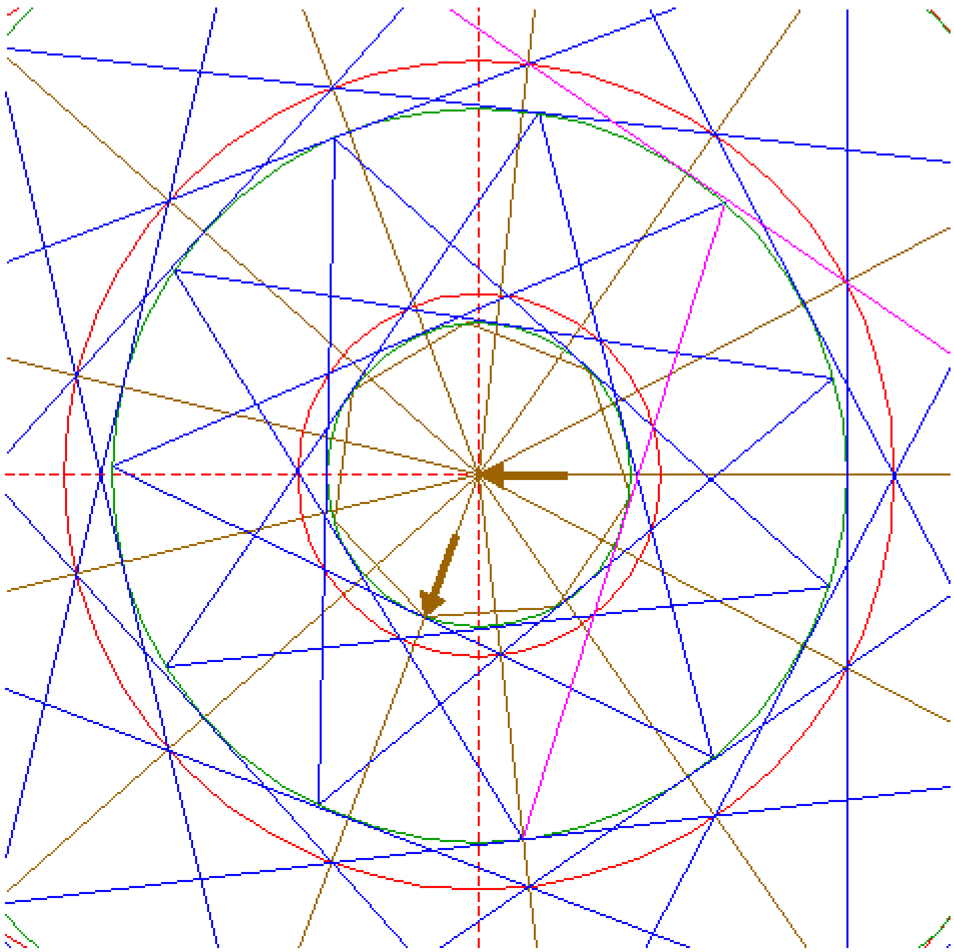
Paso 12**.** Construir un círculo con centro igual al centro de la circunferencia trazado en el paso 1, que pase a través del segundo anillo de intersecciones de las líneas de conexión en los pasos 10 y 11 , contados desde fuera.



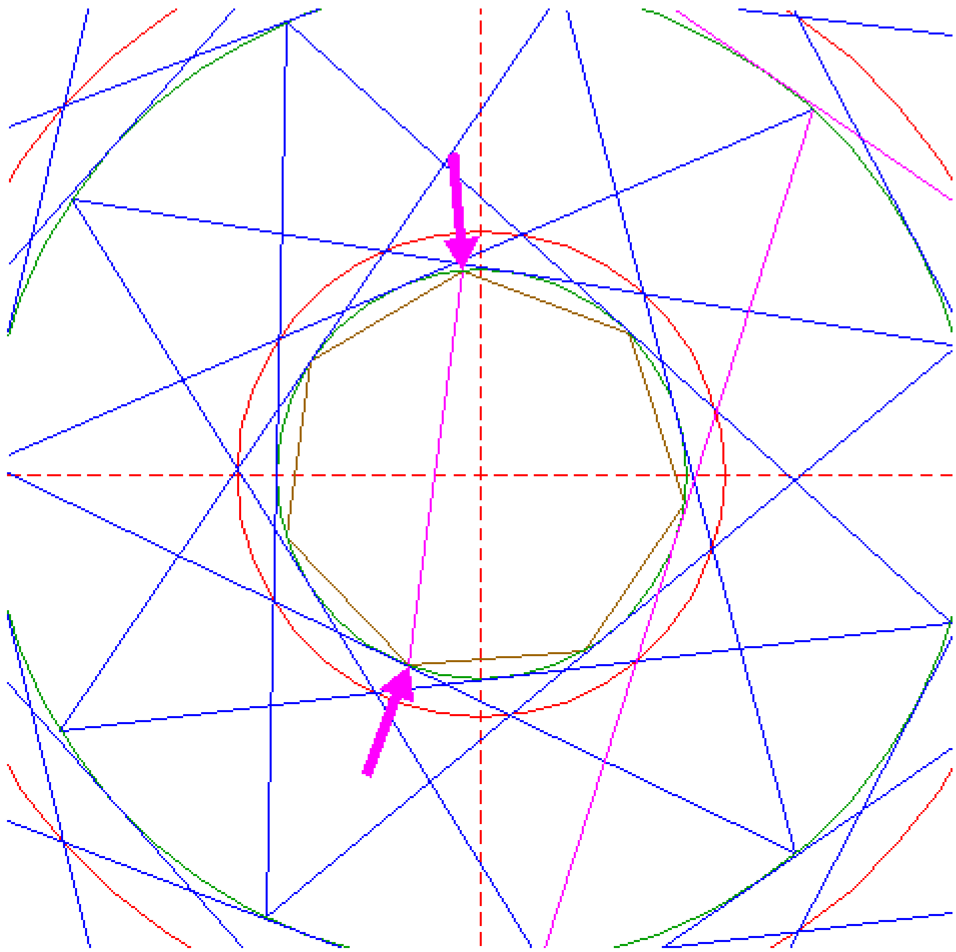
Paso 13. Construir el círculo inscrito al círculo trazado en el paso 12, donde las líneas creadas en los pasos 10 y 11 son tangentes a dicho círculo a construir.



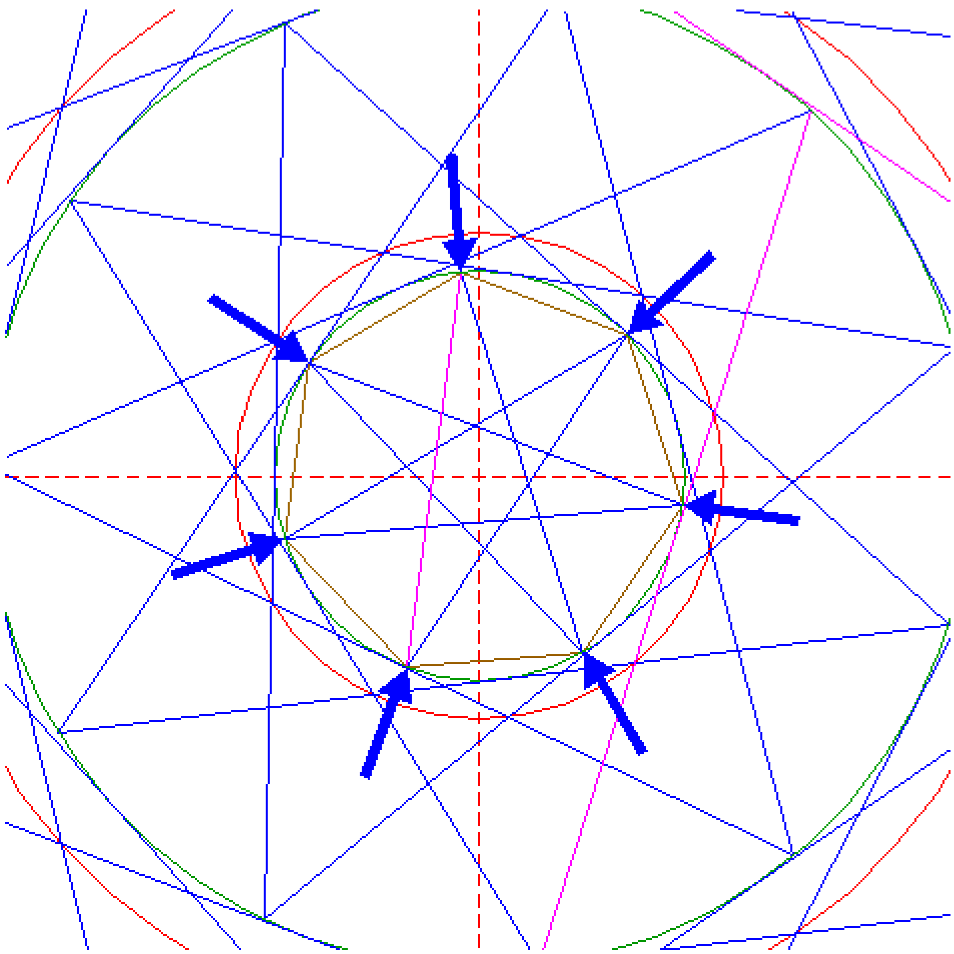
Paso 14. Construir el heptágono inscrito del círculo trazado en el paso 13.



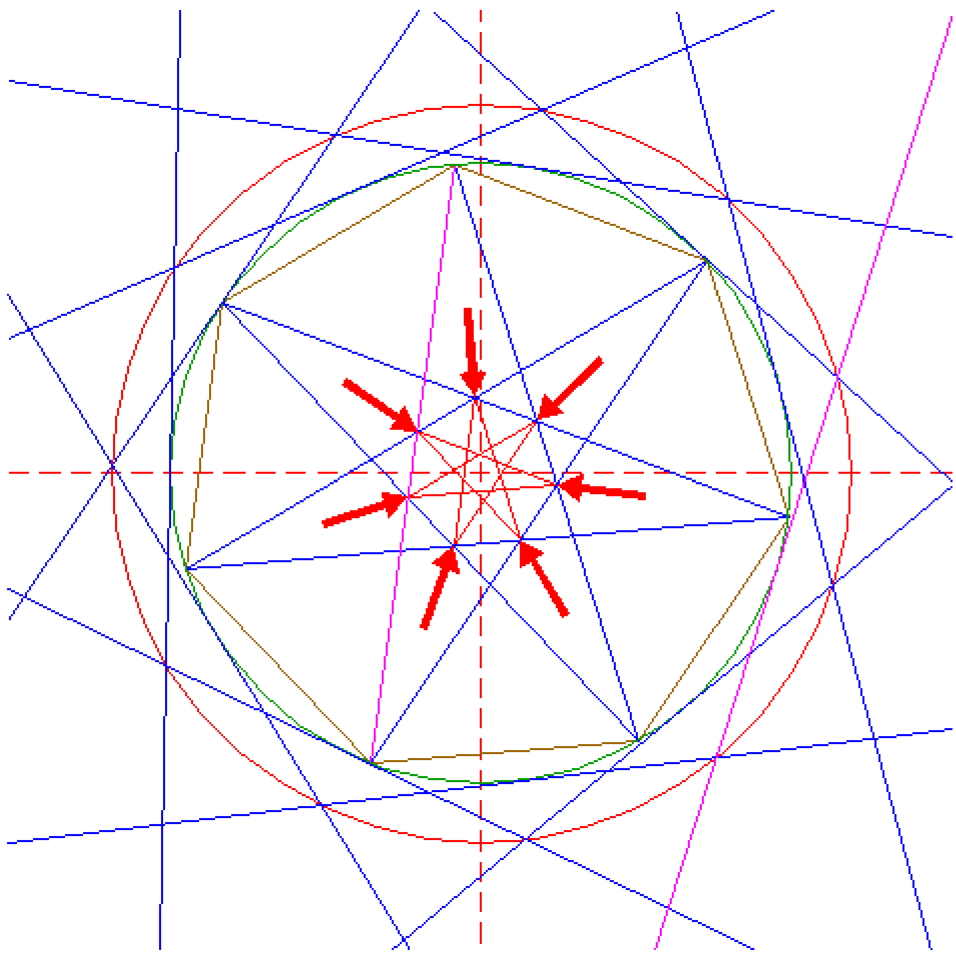
Paso 15. Conecta los vértices del polígono de 7 lados, de la forma que un vértice se conecte con el tercer vértice consecutivo, contando en el sentido anti-horario.



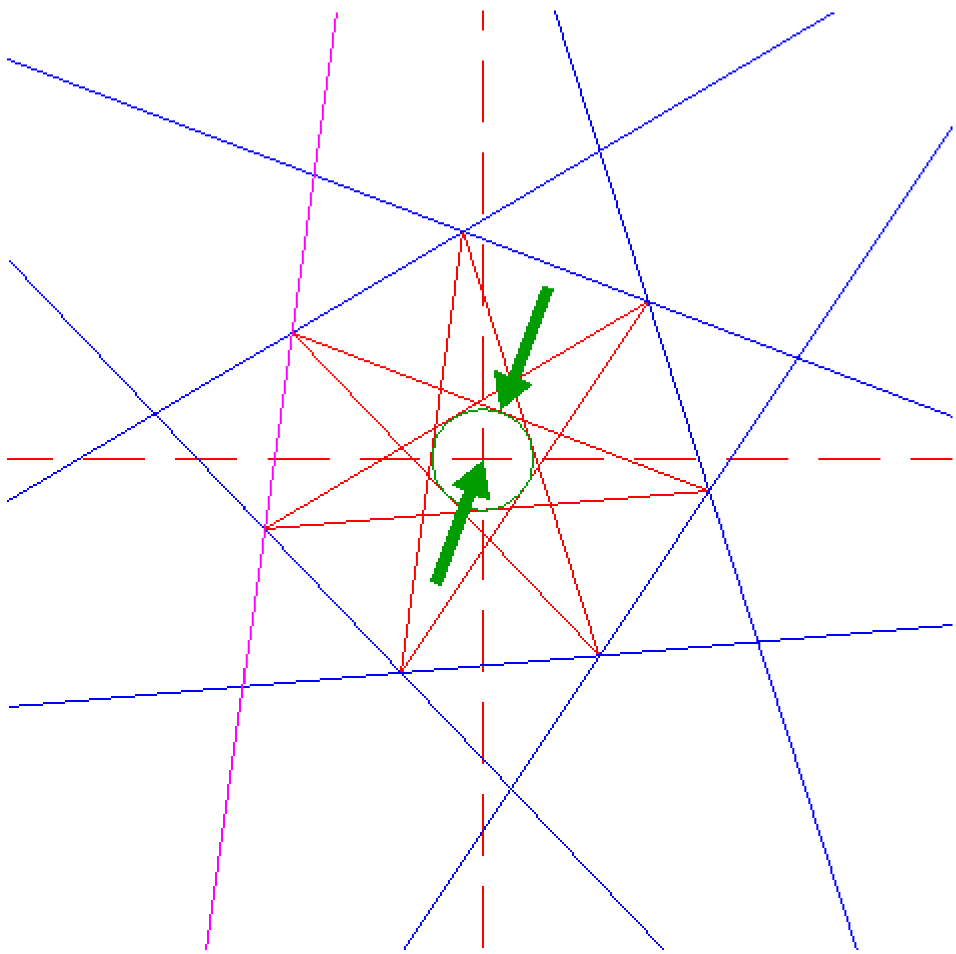
Paso 16. Dibujar líneas similares para los otros pares correspondientes de los puntos de intersección de los vértices del heptágono



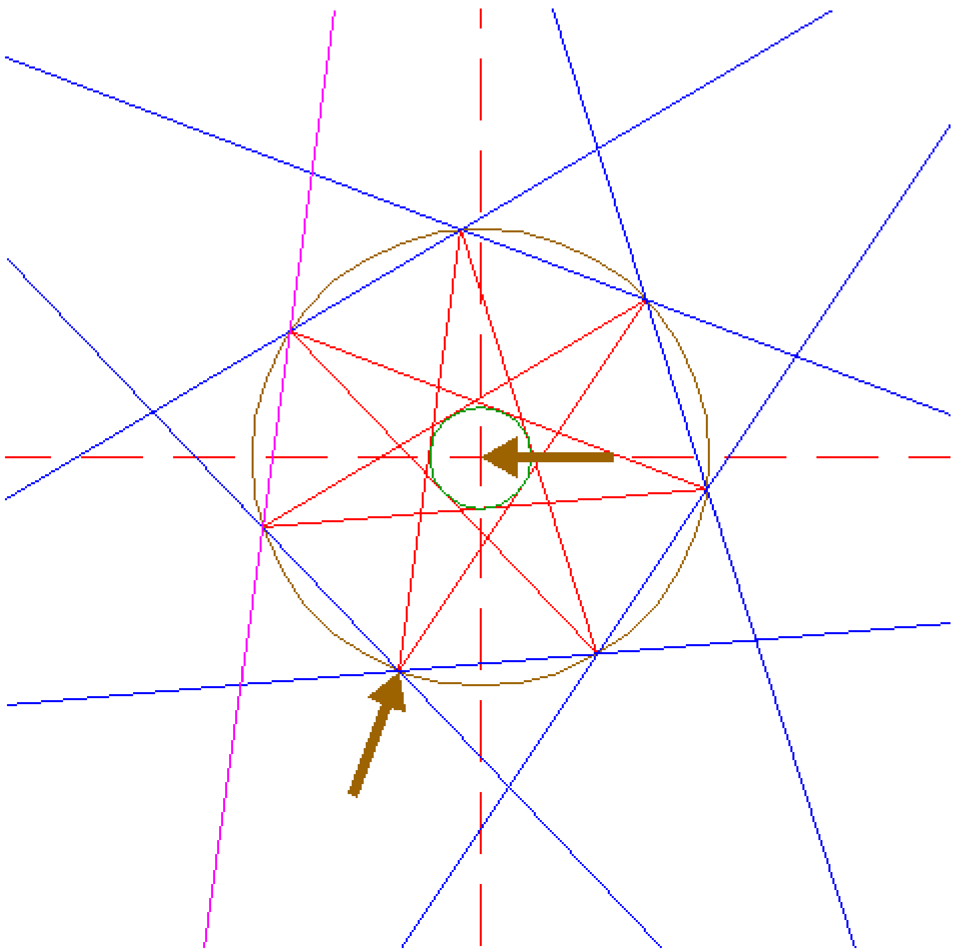
Paso 17. Construir una estrella de siete puntas limitados por las líneas trazadas en los pasos 15 y 16.



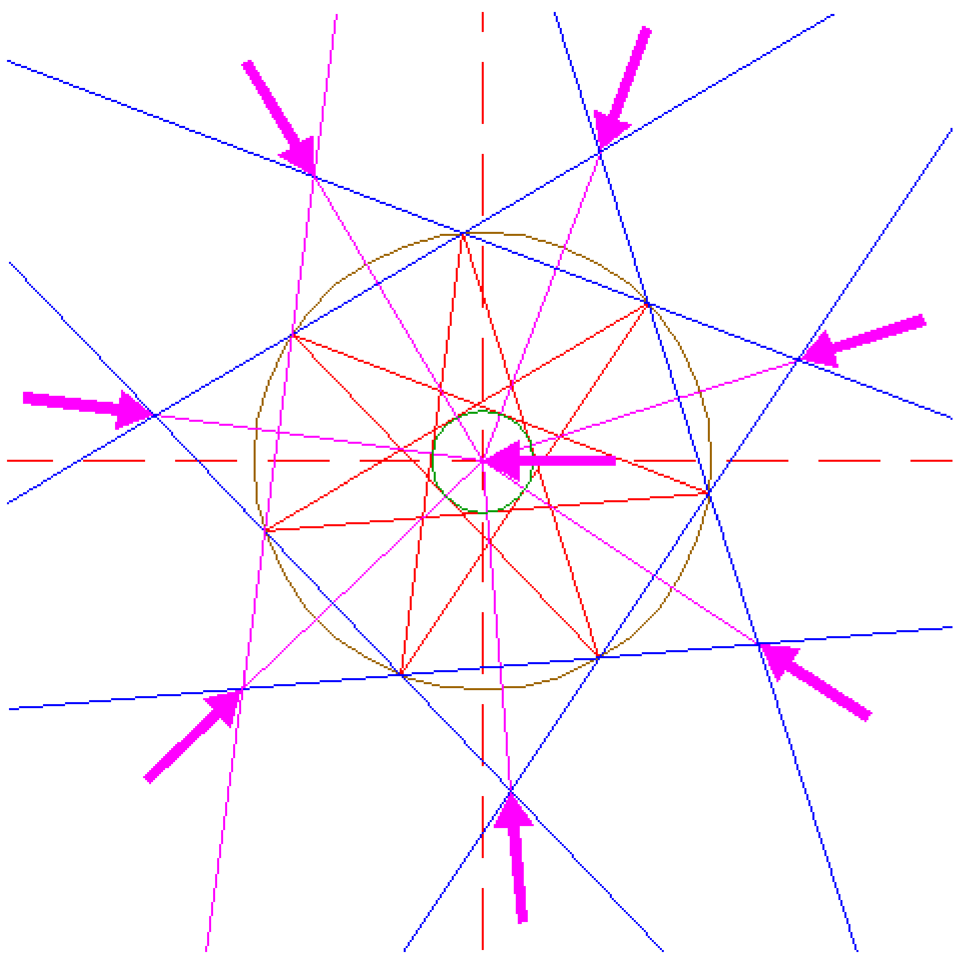
Paso 18. Construir el círculo inscrito del heptágono encerrada por la estrella trazada en el paso 17.



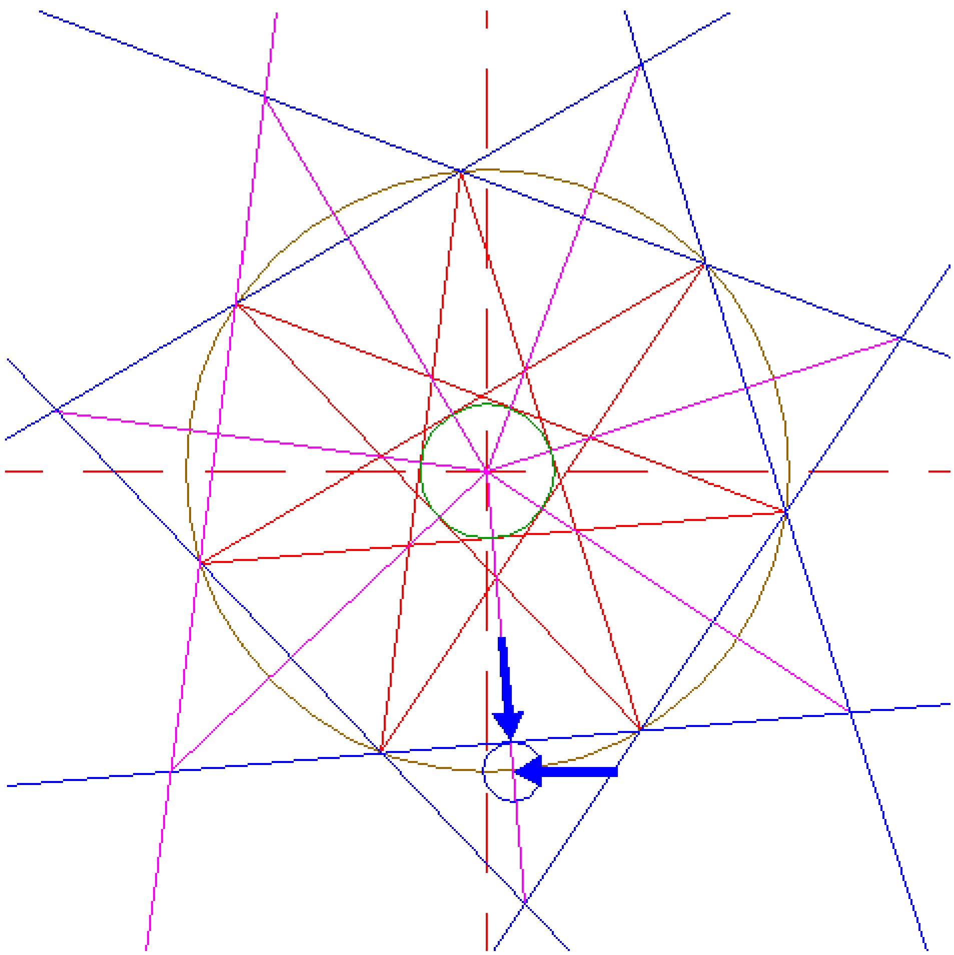
Paso 19**.** Construir el círculo inscrito en la estrella trazada en el paso 17.



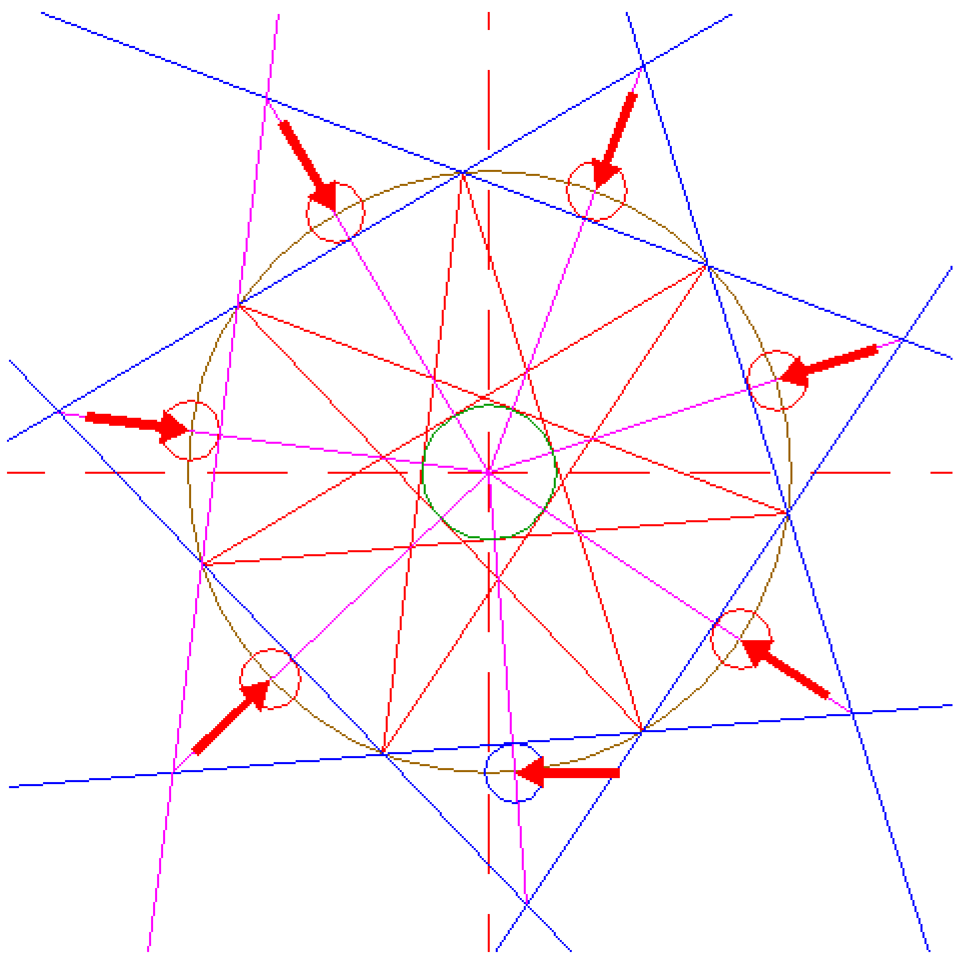
Paso 20. Dibujar los siete rayos desde el centro del círculo del paso 19 a los puntos vértices de la estrella de siete puntas que rodea círculo del paso 19 (y delimitada por las líneas de los pasos 15 y 16), tal como se muestra.



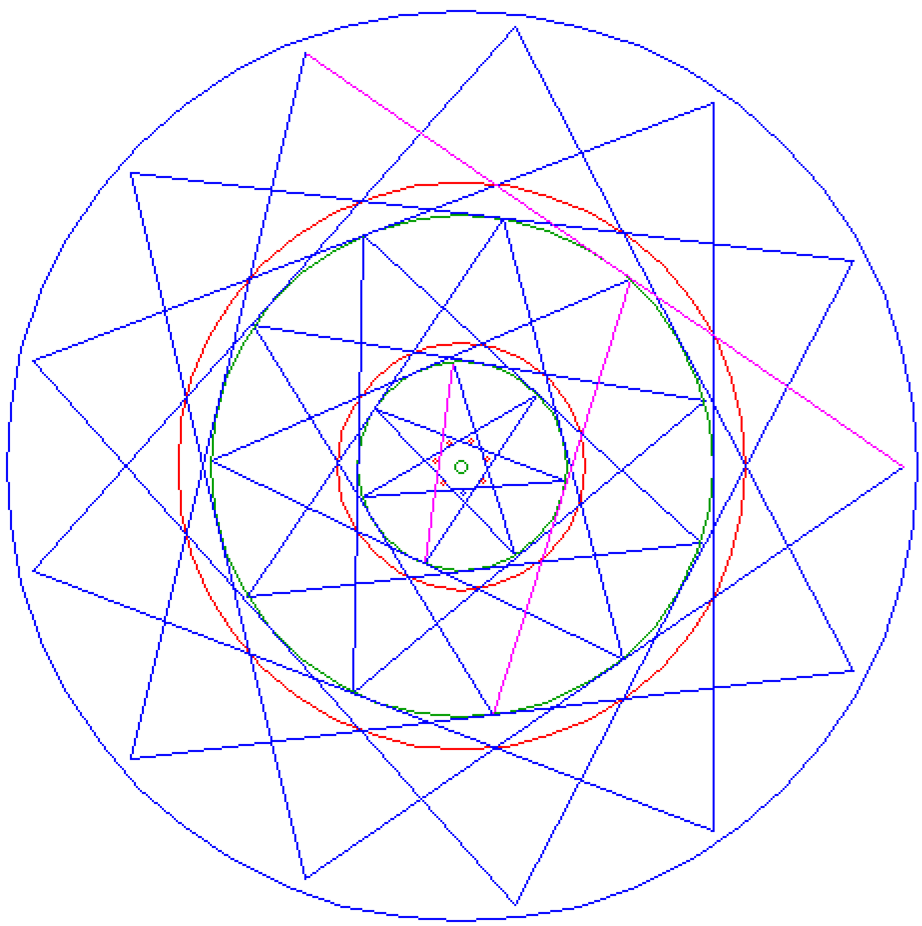
Paso 21. Construir un círculo centrado en la intersección del círculo trazado en el paso 19 y el rayo más bajo trazado en el paso 20, tangente a la línea más cercana trazadas en el paso 16, como se muestra.



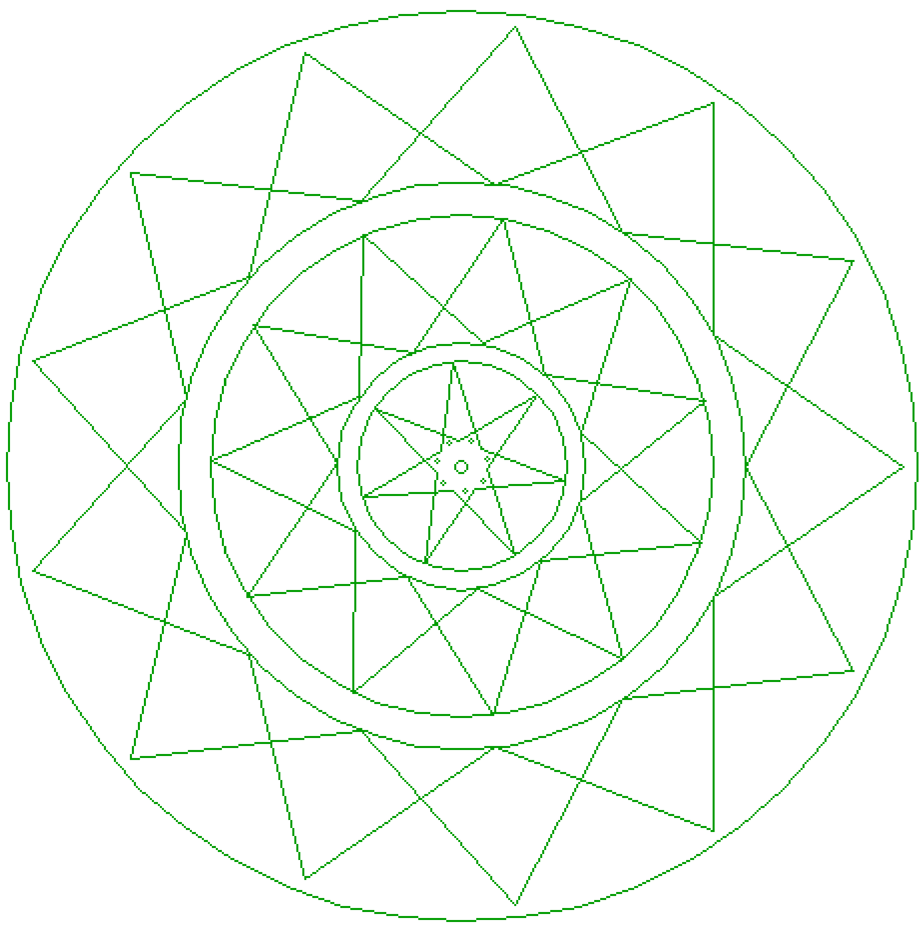
Paso 22**.** Copia círculo del paso 21 seis veces, hasta la intersección de círculo del paso 19 y los otros rayos trazados en el paso 20.



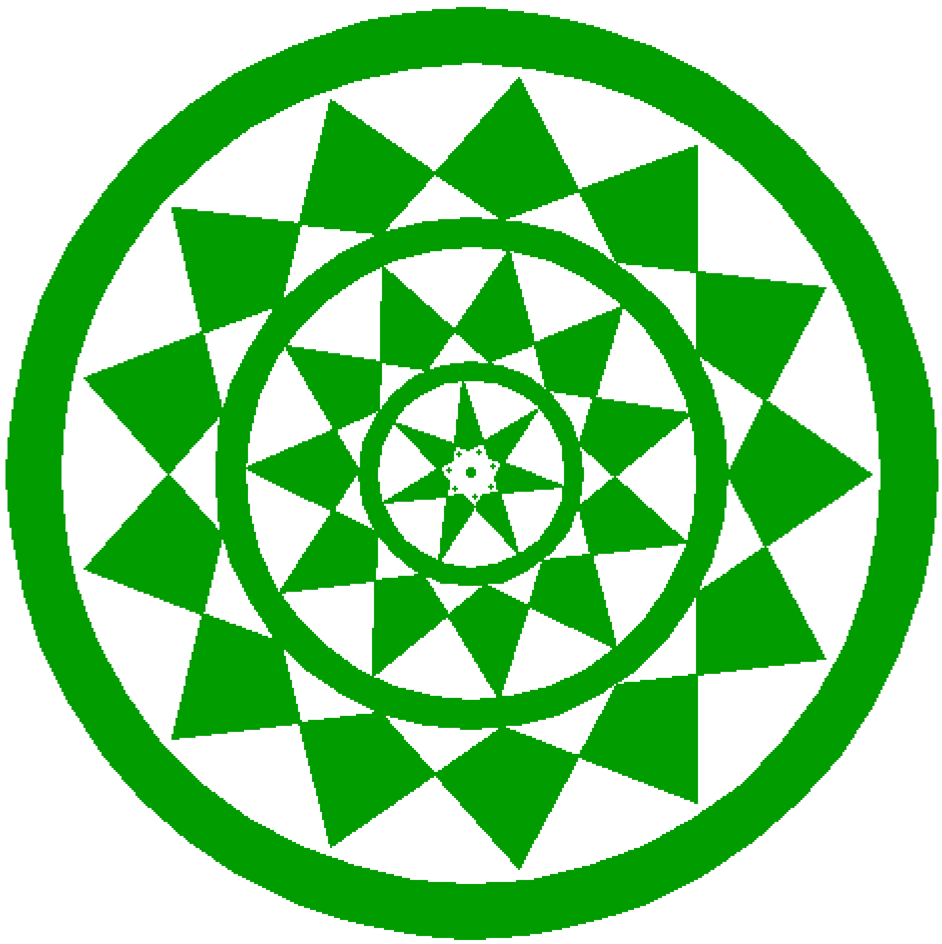
Paso 23**.** Círculos de los pasos 1, 7, 8, 12, 13, 18, 21 y 22, y las líneas trazadas en los pasos 5, 6, 10, 11, 15 y 16, en conjunto, conforman todas las piezas necesarias para la reconstrucción final.



Paso 24**.** Borrar todas las partes que hay entre el segundo y tercer círculo, de igual forma las del cuarto y quinto círculo. Dejándolo como se muestra.



Paso 25**.** Pintar.



BIBLIOGRAFÍA.

[1] Gauss, Carl F. *Disquisitiones Arithmeticae*, New Haven and London, Yale University Press, 1966.

[2] Rivero, Francisco, *A l g e b r a: Estructuras Algebraicas*, Universidad de Los Andes, 1996

[3] Fraleig, John. *A First Course In Abstract Algebra*, editorial Addison Wesley, edición 7, 2003

[4] Ayres, Frank. *Algebra Moderna*- Serie Schaum, Editorial McGrawhill

[5] Porras, Olga. *Una Introducción a las Estructuras Algebraicas Básicas*, Universidad de los Andes 2010,

[6] González, Miguel. *Apuntes de Estructuras Algebraicas*, 2012

[7] Castillo, Carlos I. *Geometría*.

[8] Herstein, I.N. *Álgebra Abstracta*, edición 3.

[9] Dummit, David S. *Álgebra Abstracta.*

[10] Davis, Isaac M. *Construcciones con regla y compás con Teoría de campos*.