

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE ORIENTE
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA



TESIS:

“TEORIA DE GRAFOS Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES
A LA TOPOLOGIA”

PRESENTA:

ERICK YOVANI HERNÁNDEZ PEREZ

PARA OPTAR AL TITULO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

FEBRERO DE 2013

SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR.

RECTOR: Ing. Mario Roberto Nieto Lovo

VICERRECTORA ACADEMICA: Maestra Ana María Glower de Alvarado

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO: Lic. Salvador Castillo (interino)

SECRETARIA GENERAL: Dra. Ana Leticia de Amaya

FACULTA MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL.

DECANO: Lic. Cristóbal Hernán Ríos Benítez

VICEDECANO: Lic. Carlos Alexander Díaz.

ADMINISTRACION ACADEMICA: Lic. Jeovanny Trejos Cabrera.

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA.

JEFE: Lic. José Enry García.

SECCION DE MATEMATICA

COORDINADOR: Ing. Benedicto Saravia.

TRABAJO DE GRADUACION APROBADO POR:

Msc. Oscar Ulises Lizama Vigil.

Coordinador de Procesos de Graduación

Depto. de Ciencias Naturales y Matemática

Msc. Jorge Alberto Martínez Gutiérrez

Asesor Director

Licda. María Olga Quintanilla de Lovo

Asesor Metodológico.

AGRADECIMIENTOS.

A **Dios**, por darme salud, fortaleza, sabiduría y protección; a mis **padres** por haberme apoyado en cada momento, por su confianza, cariño y soportar tantos momentos difíciles; a mis **hermanos/as** por comprenderme durante mis ausencias.

A mis **tías, tíos y abuelos** por su amor incondicional y al recuerdo de los que ya no están entre nosotros y que tuve la oportunidad de recibir su amor.

A mis **amigos** que me brindaron su amistad y cariño y a los que de alguna forma formaron parte de mi vida.

Y en especial a las personas que aportaron a mi formación académica **Licda. María del Tránsito Reyes**, por ayudarme en todos los momentos en los cuales necesite de un consejo, **Lic. Jorge Alberto Martínez** y **Licda. María Olga Quintanilla de Lovo**, por haber aceptado la oportunidad de ser mis asesores y siempre aconsejarme y apoyarme, al **Prof. Francisco Madrid**, por enseñarme y guiarme en el trayecto de mi carrera.

Índice general

Formalidades	i
Firmas	ii
Agradecimientos	iii
Introducción	8
Capítulo 1: Grafos y Subgrafo	10
1.1 Grafos y Grafos Simples	10
1.2 Grafos Isomorfos	13
1.3 Grafos Completos	15
1.4 Grafos Bipartitos	15
1.5 Ramos de Círculos	16
1.6 Matrices de Incidencia y de Adyacencia	17
1.6.1 Matriz de Incidencia	17
1.6.2 Matriz de Adyacencia	18
1.7 Direcciones en Grafos	20

1.8	Subgrafos	21
1.9	Grado de un Vértice	23
1.10	Alguna Clases Importantes de Grafos: Caminos, Trayectorias y Ciclos de Conexión	25
1.11	Árboles	28
1.11.1	Representaciones Topológicas, Subdivisiones y Homomorfismos de Grafos	30
1.12	Arista-Complemento	33
1.12.1	Productos Cartesiano	33
1.13	Suspensiones	34
1.14	Las Fusiones	35
1.15	Superficies e Incrustaciones	36
1.15.1	Superficies Orientables	36
1.15.2	Superficies no Orientables	38
1.16	Incrustaciones	40
1.17	Ecuación de Euler's para la Esfera	45

Capítulo 2: Conexidad	46
2.1 Conexidad y Limites de la Regiones	46
2.2 Aristas de Contracciones y Conexidad	48
Capítulo 3: Planaridad	53
3.1 Grafos Planos	53
3.2 Grafos de Kuratoswski´s	54
3.3 Género de la Superficie y de los Grafos	57
3.4 El Toroide	59
3.5 Grafos Duales	65
3.6 Teorema de Planaridad para Grafos 3-conexo	67
3.7 Grafos que no son 3-conexos	70
3.8 Algoritmo	75
3.9 Otros Criterios de Planaridad	78

Capítulo 4: Aplicaciones	80
4.1 Conceptos Topológicos Básicos	80
4.2 Grafos Planares	85
Bibliografía	96

Introducción.

En la historia de las matemáticas, los campos que han tenido los periodos largos en su gestión han resultado tener impacto profundo en muchas áreas de esta, tal es el caso de la Topología y la Teoría de Grafos.

Ya que la Teoría de Grafos es una de las ramas importante de la matemática, como lo es también la Topología que es una de las ramas probablemente más jóvenes.

Para el estudio de la Teoría de Grafos Topológicos, necesitamos prepararnos de varias maneras ya sea para desarrollar operaciones Topológicas y para discutir las relaciones que existen entre las operaciones Topológicas y los conceptos de la Teoría de Grafos.

Así la Teoría de Grafos es una rama relativamente nueva de las matemáticas, pues su nacimiento tuvo lugar en el año 1736 de la mano del matemático Leonhard Euler. Su objetivo era encontrar una solución al famoso problema de los siete puentes de Königsberg y, usando una simple pero efectiva herramienta matemática de su invención, descubrió que dicho problema no tenía solución.

Esta herramienta se ha ido desarrollando por diversos matemáticos, entre ellos el propio Euler, y es lo que ahora conocemos como la Teoría de Grafos.

Aunque simple en su planteamiento o definiciones básicas, la teoría de Grafos es aún un campo en pleno desarrollo del que quedan muchos problemas por resolver y por demostrar.

Así el objetivo principal del trabajo estará enfocado en el estudio de la teoría de grafos y algunas de sus aplicaciones a la topología, apoyándonos de las definiciones de teoría de grafos.

El estudio de grafos está ligado habitualmente a la Topología. Un grafo es sencillamente un conjunto de puntos (vértices), algunos de los cuales están ligados entre ellos por medio de líneas (aristas). La naturaleza geométrica de estos arcos no tiene importancia, sólo cuenta la manera en la que los vértices están conectados.

El contenido de este trabajo abarca diversos temas muy diferenciados entre ellos. En el primer capítulo se intenta dar un breve pero detallado resumen de las definiciones más usadas y los resultados relacionados con ellas. En el resto de los capítulos nos adentramos en el estudio de la Teoría de Grafos y algunas de sus Aplicaciones a la Topología.

CAPITULO 1

GRAFOS Y SUBGRAFOS

1 GRAFOS Y SUBGRAFOS.

1.1 GRAFOS Y GRAFOS SIMPLES.

En la Teoría de Grafos Topológicos, desde un punto de vista intuitivo un grafo es una red de nodos y arcos curvos, o algunos nodos que están conectados entre ellos mismos. Sin embargo es conveniente adoptar una definición combinatoria, antes que una definición Topológica.

Definición 1.1.1. Un grafo G es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito y E es un multiconjunto de pares no ordenados de aristas. Denotamos $V(G)$ al conjunto de vértices del grafo G y por $E(G)$ el conjunto de aristas del grafo G . Además $V(G)$ y $E(G)$ denotan el número de vértices y el número de aristas G respectivamente.

En un contexto formal, definiremos el conjunto $I_G = \{V_G(e) / e \in E(G)\}$ la estructura incidencia. Cuando G es un grafo se considera ó se omite los subíndices y se escribe V y E por $V(G)$ y $E(G)$.

Todo grafo finito puede ser representado geoméricamente por un trazo obtenido de la siguiente manera.

Primero, tracemos un punto para cada vértice, entonces para cada arista $e \in E$ con dos puntos finales, trazamos una línea entre dos puntos representados por vértices de $V(e)$ para cada arista en un solo un vértice, se traza una línea desde el punto que representa tal vértice en sí.

Ejemplo 1.1. Sea $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, y sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ también sea $V(e_1) = \{v_1, v_2\}$, $V(e_2) = \{v_1, v_3\}$, $V(e_3) = \{v_2, v_3\}$, $V(e_4) = \{v_3, v_4\}$; el trazo de este grafo en la **figura 1.1**

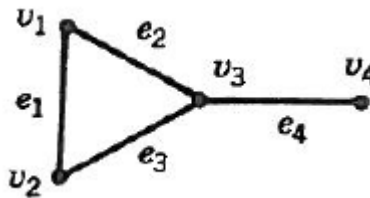


Figura 1.1 Grafo de Ejemplo 1.1.

Ejemplo 1.2. Sea $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, y sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ también sea $V(e_1) = \{v_1\}$, $V(e_2) = \{v_1, v_2\}$, $V(e_3) = \{v_2, v_3\}$ y $V(e_4) = \{v_2, v_3\}$; la **Figura 1.2** muestra dos trazos diferentes de este grafo.



Figura 1.2 Grafo de Ejemplo 1.2.

Algunos Grafos no se pueden dibujar sobre una superficie plana, sin *línea-cruce*. Por otra parte, por motivo de ilustración o por conveniencia, un trazo de un grafo en ocasiones contiene más *línea-cruce* de lo necesario.

Definición 1.1.2. Grafo simple son aquellos en los cuales dos vértices pueden estar unidos a lo sumo por una arista.

Los grafos de la **figura 1.3** son grafo simples. Gran parte de la teoría de grafos se ocupa del estudio de grafos simples.

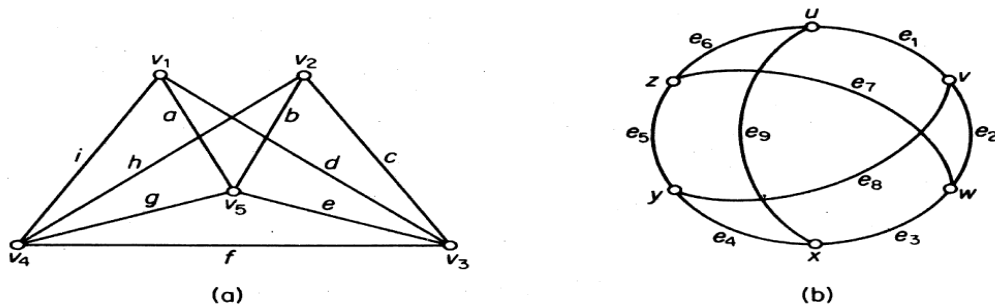


Figura 1.3 Grafo Simples.

En un trazo de un grafo, los vértices están representados solamente por los puntos, no por *líneas-cruce*.

Por el ejemplo anterior, si un grafo tiene una arista con un único punto final, entonces Harary lo llamo pseudografo. Esta distinción de Harary's ha sido ampliamente adoptada para muchos propósitos que permite una discusión más eficiente.

1.2 GRAFOS ISOMORFOS

Sean G y G' grafos. Un “ grafo mapa ” $f: G \rightarrow G'$ consiste en una función de vértices $V_G \rightarrow V_{G'}$ y una función de aristas $E_G \rightarrow E_{G'}$ tal que la incidencia esta preservada, en el sentido que para todo $e \in E_{G'}$ la función de vértice traza los puntos finales de e sobre los puntos finales de la imagen e .

Se denotaran ambas como función vértices y función aristas por el mismo símbolo que el mapa grafo, es decir, f .

Bajo un grafo mapa, un lazo puede ser la imagen de una arista adecuada, pero una arista adecuada no puede ser la imagen de un lazo.

Definición 1.2.1. *Un grafo mapa $G \rightarrow G'$ es llamado “Isomorfismo” si tanto su función vértice y su función arista sean uno a uno y sobre. Dos grafos se llaman **Isomorfo** si existe un isomorfismo a partir del uno al otro.*

Los isomorfismos de un grafo a sí mismo se llaman **Automorfismos**. En las operaciones de composición, la familia de todo los automorfismo de un grafo forma a un grupo, llamado “**El grupo de automorfismos del grafo**” y se denota por $\text{Auto}(G)$.

Ejemplo 1.3. En la **Figura 1.4.** Se muestran dos grafos G y G' . Suponga que la función f tiene los valores.

$$f(v_1) = v_1 \quad f(v_2) = f(v_3) = v_2 \quad f(e_1) = f(e_2) = e_1' \quad f(e_3) = e_2'$$

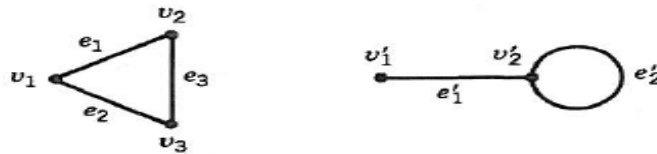


Figura 1.4. El dominio de G y el Rango de G' de un mapa grafo son $f: G \rightarrow G'$

Ejemplo 1.4. Considere un mapa grafo $h: H \rightarrow H'$ en el grafo izquierdo H de la **Figura 1.5**, dado que h tiene los valores:

$$h(u_1) = u_3 \quad h(u_2) = u_2 \quad h(u_3) = u_1 \quad h(u_4) = u_4$$

$$h(d_1) = d_2 \quad h(d_2) = d_1 \quad h(d_3) = d_4 \quad h(d_4) = d_3 \quad h(d_5) = d_5$$

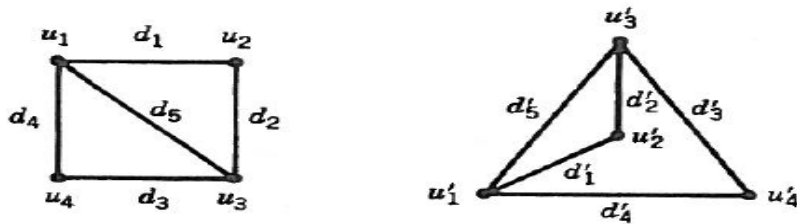


Figura 1.5 Dos Gráfico isomorfos

Alternativamente, usando la notación de permutación cíclica la notación disjunta, el mapa grafo h puede ser escrito como sigue:

$$\text{Mapa de vértices } h = (u_1 u_3)(u_2)(u_4)$$

$$\text{Mapa de aristas } h = (d_1 d_2)(d_3 d_4)(d_5).$$

Entonces h es Automorfismo.

1.3 GRAFOS COMPLETOS

Un grafo simple se llama **completo** si cada par de vértices es adyacente. Si dos grafos completos tienen el mismo número de vértice, entonces son isomorfos. El modelo estándar de un grafo completo de n vértices se denota K_n .

Definición 1.3.1. Un grafo simple $G = (V, E)$ se dice completo si cada vértice está conectado a cualquier otro vértice en G . **Figura 1.6** muestran los grafos completos K_n , para $n = 1, \dots, 6$. El grafo de K_1 a veces se llama el Grafo Trivial.

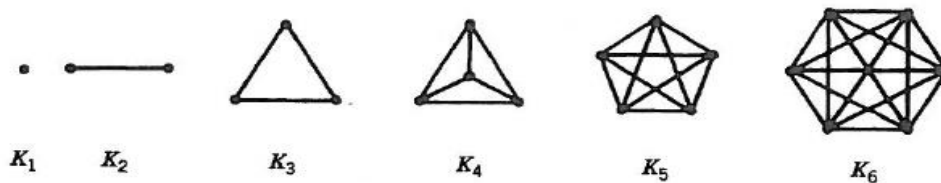


Figura 1.6 Algunos Grafos Completos.

1.4 GRAFOS BIPARTITOS

Un grafo se llama bipartito si su conjunto de vértices se puede dividir en dos subconjuntos U y W tal que los vértices en U no son mutuamente adyacentes y los vértices en W no son mutuamente adyacentes.

Si todos los puntos de U son adyacentes a cada puntos de W , entonces el grafo se denomina bipartito completo sobre los conjuntos U y W .

El modelo de un grafo bipartito completo en un conjunto de vértices m y n vértices se denota $K_{m,n}$.

Definición 1.4.1. Un grafo donde el conjunto de vértices V está dividido en dos subconjuntos V_1 y V_2 , y cada vértice de uno de los subconjuntos se une con todos los del otro (y viceversa), pero no con los de su mismo subconjunto, se denomina grafo bipartito completo. La **figura 1.7** ilustra el grafo bipartito completo $K_{3,4}$.

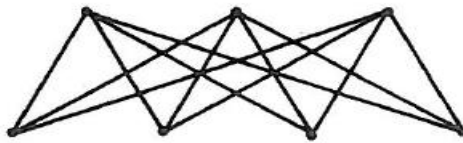


Figura 1.7 El grafo Bipartito Completo $K_{3,4}$.

1.5 RAMOS DE CÍRCULOS

Para la teoría de grafos topológicos otra tipo de grafos que se debe introducir desde el principio son los Ramos de Círculos.

Definición 1.5.1. Un ramo de n -círculos es un grafo con un vértice y n lazos. El cual se denota por B_n . El ramo B_3 se ilustra en la **Figura 1.8**.

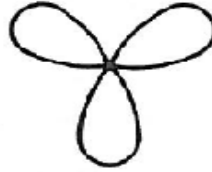


Figura 1.8. Un ramo de tres círculos.

1.6 MATRICES DE INCIDENCIA Y DE ADYACENCIA

1.6.1 MATRIZ DE INCIDENCIA

La matriz de incidencia para un grafo G tiene $\# V$ filas y $\# E$ columnas, donde $\# S$ denota la cardinalidad de un conjunto S .

La entrada en las filas i y las columnas j es 1 si $v_i \in V(e_j)$ y $\# V(e_j) = 2$, 2 si $\{v_i\} = V(e_j)$, y 0 si $v_i \notin V(e_j)$.

Como ejemplo tomaremos los grafos del **Ejemplo 1.1** y **1.2**, tienen las siguientes matrices de incidencia respectivamente

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 2 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Figura 1.9 Matriz Incidencia.

La matriz de incidencia sólo contiene ceros y unos (matriz binaria). Como cada arista incide exactamente en dos vértices, cada columna tiene exactamente dos unos.

El número de unos que aparece en cada fila es igual al grado del vértice correspondiente. Una fila compuesta sólo por ceros corresponde a un vértice aislado.

1.6.2 MATRIZ DE ADYACENCIA

Dos vértices de un grafo se llaman “*Adyacentes*” si son los puntos finales de una misma arista. Se llama “*Multiplicación adyacente*” si hay dos ó más aristas que tienen a ambas como puntos finales.

La “*multiplicidad de su adyacencia*” está definida como el número de aristas que tienen a ellas misma como puntos final, posiblemente cero.

Definición 1.6.2.1. Un vértice es llamado el mismo adyacente si hay una arista para la cual este es el único punto final. La multiplicidad de su auto-adyacente se define como el número de aristas para las cuales es el único punto final.

Definición 1.6.2.2. Una arista con un único punto final es llamado “lazo”. Si una arista no es un lazo, entonces es llamada “arista apropiada”.

La matriz de adyacencia de un grafo G es cuadrada, si el número de V filas y columnas son iguales. La entrada en las filas i y columnas j es la multiplicidad de la adyacencia entre los vértices v_i y v_j . Se define como una matriz de adyacencia si la diagonal principal es simétrica.

Un lazo contribuye únicamente con unos en la entrada de la diagonal principal. Así la suma de filas ó columnas no es necesariamente la valencia de un vértice.

Los grafos de los **Ejemplos 1.1** y **1.2** tienen matriz de adyacencia respectivamente.

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 v_1 & v_2 & v_3 \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 2 \\
 0 & 2 & 0
 \end{bmatrix}$$

Figura 1.10 Matriz de Adyacencia.

1.7 DIRECCIONES EN GRAFOS

Definición 1.7.1. Una dirección para una arista e es una función de la forma $\{\text{inicial}, \text{terminal}\} \rightarrow V(e)$. Las imágenes inicial y terminal se llaman “punto inicial” y “punto terminal” respectivamente.

Se dice que una arista es dirigida si va desde su punto inicial hasta su punto terminal. En la estructura de incidencia de un formato de lista de un grafo, la dirección de una arista propia puede ser indicada poniendo el punto inicial primero y luego su punto final en la arista.

En la Teoría de Grafos Topológicos, es frecuente considerar a cada arista e (a veces un lazo) debe tener dos direcciones, arbitrariamente indistinguibles como la dirección más e^+ y menos e^- .

En un trazo de un grafo, la punta de una flecha se utiliza para mostrar la dirección más, con el punto inicial por detrás la punta de la flecha y el punto terminal delante de él.

En la **Figura 1.11** se muestra como las puntas de las flechas se colocan en la izquierda del trazo, de la **Figura 1.12** si la dirección e_2^+ es desde v_2 a v_1 y la dirección de e_3^+ y e_4^+ son tanto desde v_3 a v_2 .

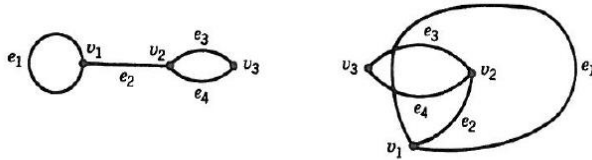


Figura 1.11 Dos ilustraciones de grafo, uno flecha para indica sin línea-cruce, el otro con los cruces.

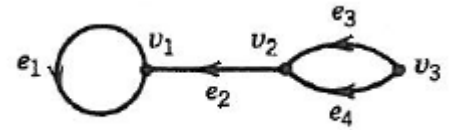


Figura 1.12 Uso de puntas de Direcciones en las aristas del grafo.

Una arista e junto con su dirección ya sea más ó menos en su dirección es llamada **Arista Dirigida** y se denota e^+ o e^- , respectivamente.

1.8 SUBGRAFOS

Hay muchas maneras de extraer las partes de un grafo, hacer combinaciones, o hacer otras operaciones en los grafos a fin de obtener nuevos grafos.

Si G y G' son grafos, entonces G' se llama un subgrafo de G si y sólo si $V_{G'}$, $E_{G'}$ y $I_{G'}$ son subconjuntos de V_G , E_G y I_G respectivamente. Si además $V_G = V_{G'}$, entonces se dice que el subgrafo G' se extiende al grafo G .

Definición 1.8.1. Un subgrafo de un grafo es un subconjunto de vértices del grafo original, y un Subconjunto del original. La **Figura 1.13** ilustra un grafo a la izquierda y dos de los subgrafo.

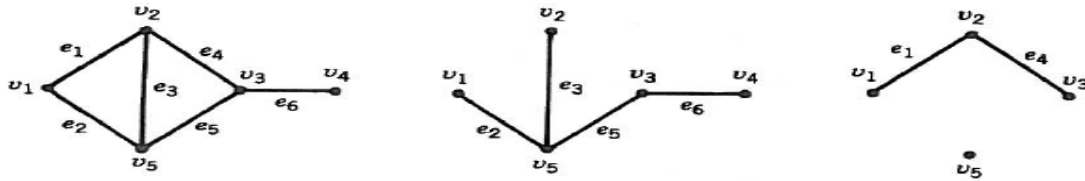


Figura 1.13 Un Grafo y dos de sus Subgrafo

Ejemplo 1.5. Todo grafo simple de n -vértices es isomorfo a un subgrafo del grafo completo K_n . Además, el n -camino P_n es isomorfo a un subgrafo $(n + k)$ -camino P_{n+k} , para cualquier entero no negativo k . Sin embargo, el m -ciclo no es isomorfo a un subgrafo del n -ciclo a menos que $m = n$.

Para cualquier grafo G , sea $V' \subset V_G$ el subgrafo inducido en el subconjunto vértice V' es el subgrafo cuyo conjunto de vértices es V' y cuyo conjunto de aristas está formado por todas las aristas e de G , cuyo punto final de $V(e)$ se encuentra en V' .

En la **Figura 1.14** el subgrafo G_1 es un subgrafo inducido de G , pero el subgrafo G_2 no lo es.

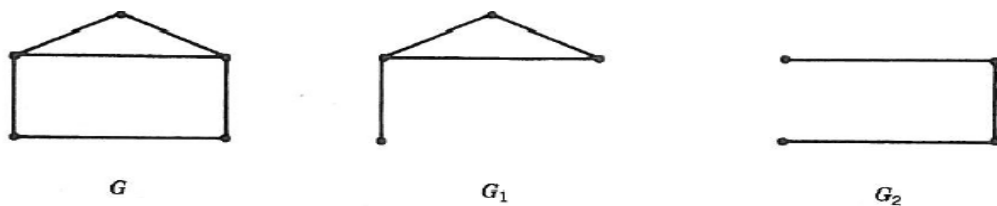


Figura 1.14. Un Grafo y dos de sus Subgrafo,

1.9 GRADO DE UN VERTICE

Sea $G = (V, E)$ un grafo (no vacío). El conjunto de vértices v en G se denota por $N_G(v)$, o brevemente por $N(v)$. De manera más general para $U \subseteq V$, las vecindades de $V \setminus U$ de vértices en U son llamados vecindad de U ; el conjunto se denota por $N(U)$.

Definición 1.9.1. El grado (o valencia) de un vértice v denotado por $d_G(v) = d(v)$, es el número mínimo de líneas cruzadas que se producen mientras se dibuja un pequeño círculo alrededor del punto que representa v en un trazo de un grafo.

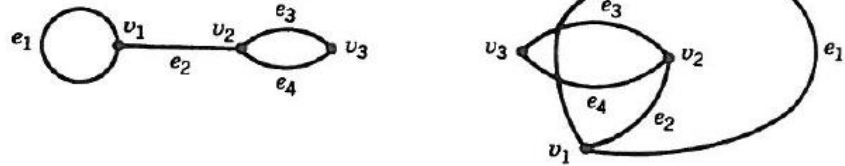
Al vértice de grado (o valencia) nulo se le llama *aislado*. En relación con el grafo G se distinguen tres tipos de valencia:

Valencia mínima de G : $\delta(G) = \min\{d(v): v \in V(G)\}$

Valencia máxima de G : $\Delta(G) = \max\{d(v): v \in V(G)\}$

Valencia media de G : $d(G) = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{v(G)}$

Las valencias de v_1 , v_2 , y v_3 en los Ejemplos 1.2 son 3, 3 y 2 respectivamente.



En general se dice a veces que la valencia de v es el número de aristas que inciden en v ; pero para conseguir el número correcto, debe tenerse el cuidado para contar las aristas dos veces si v es solamente un punto final.

Alternativamente, se puede dar una definición estricta del combinatorio de valencia de v como la suma de las entradas en la fila correspondiente de la matriz de incidencia.

Teorema 1.9.2. *La suma de la valencia de los vértices de un gráfico es igual a dos veces el número de aristas.*

Prueba. Cada arista contribuye exactamente 2 con la suma de valencia. Como alternativa se puede observar que la suma de las filas en la matriz de incidencia son las valencias y que cada suma columna es 2, correspondientes a la contribución de cada arista. Por supuesto, el total de las sumas de las filas es igual al total de las sumas de las columnas. ///

1.10 CLASES IMPORTANTES DE GRAFOS: CAMINOS, TRAYECTORIAS Y CICLOS DE CONEXIDAD

Existen numerosas clases de grafos, los cuales surgen en álgebra o geometría, como también en sus combinaciones ó en la topología, son de especial interés en la teoría de grafos topológicos.

Definición 1.10.1. Un camino es un grafo G de sucesiones finitas de vértices y aristas alternas, las cuales pueden cruzarse o volver sobre si mismo hacia atrás o hacia adelante, de manera arbitraria. Precisamente, si u y v son vértices de un grafo G , entonces un camino de longitud n de u a v es una secuencia alterna de vértices y aristas dirigidas.

$$W = v_0, e^{\sigma_1}, v_1 e^{\sigma_2}, \dots, e^{\sigma_n}, v_n \text{ (Cada } \sigma_i = + \text{ o } -)$$

Cuyo primer vértice v_0 es u y cuyo vértice final v_n es v , para todo $i = 1, \dots, n$, de las aristas dirigidas $e_1^{\delta_1}$ que va desde el vértice v_{i-1} al vértice v_i Si $u \neq v$, entonces W es llamado Camino Abierto. Si $u = v$, entonces W es llamada Camino Cerrado.

Definición 1.10.2. Un camino abierto es llamado **trayectoria** si sus vértices son distintos. Por tanto, una trayectoria de acceso es el análogo combinatorio de una imagen homomórfica de un segmento de línea cerrada. La trayectoria estándar con n vértices se llama **n -trayectoria** y se denota por P_n .

La **Figura 1.15** ilustra un camino, y una trayectoria en un grafo.
 Camino: $uavfyfvgyhwbv$; Trayectoria: $xcwhy euav$

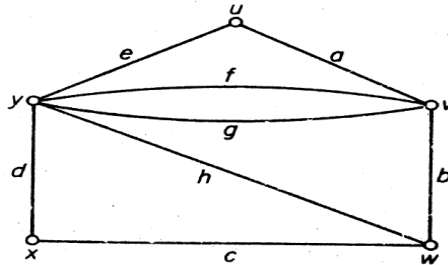


Figura 1.15 camino y una trayectoria

Definición 1.10.3. Un camino cerrado es llamado **Ciclo** si para todo par de vértices excepto el de su partida y llegada son distintos.

Por lo tanto, un ciclo es la contrapartida combinatoria a la imagen homomorfa de un círculo. El ciclo estándar con n vértices se llama **n -ciclo** y se denota por C_n .

La **figura 1.16** ilustra un ciclo. Dicho *Ciclo* es: $xaubvhx$

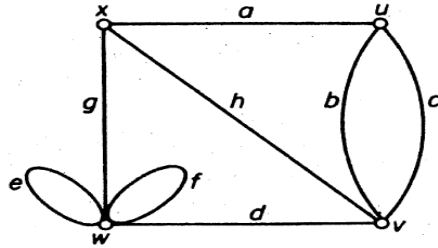


Figura 1.16 Un Ciclo.

Definición 1.10.4. Un grafo se denomina **Conexo** si para todo par de vértices u y v , hay un camino de u a v . Especificando la dirección positiva, de algunas de las aristas no afecta la conexión del grafo, puesto que la dirección sobre una arista es un camino, que permite ser el opuesto de la dirección positiva.

La **figura 1.17** ilustra un grafo conexo.

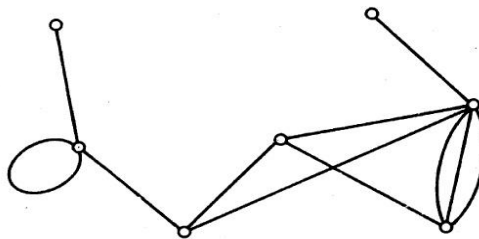


Figura 1.17 Un grafo conexo.

1.11 ÁRBOLES

Definición 1.11.1. Un árbol es un grafo conexo con ningún ciclo. Esta es una de las ideas más importantes de la teoría de grafos y sus aplicaciones. Además un árbol T es un grafo en el cual cada par de vértices distintos están unidos por una única cadena simple.

Definición 1.11.2. Sea G un grafo, decimos que T es un árbol extendido de G si es un subgrafo extendido que además es un árbol.

Como se ilustra en la **Figura 1.18**. Es una de las clases más importantes de grafos tanto en aplicaciones y en la teoría.

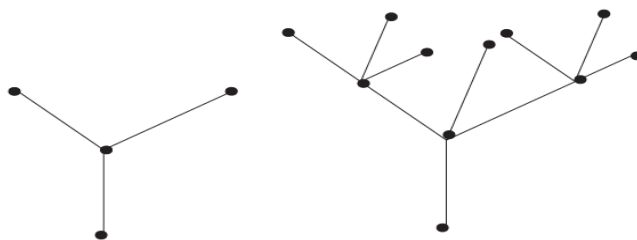


Figura 1.18 Dos Árboles.

Teorema 1.11.3. Sean u y v los vértices de un árbol T . Entonces hay un camino único en T desde u hasta v .

Prueba: Puesto que el árbol T es conexo, existe un camino P desde u hasta v . Supongamos que P' es otro camino desde u hasta v . Entonces sea w el primer vértice de P y P' , a medida que avancemos desde u hasta v , cuyo sucesor en el camino de P no es su sucesor en el camino de P' . Sea w' el siguiente vértice de P después de w , que también se encuentra en el camino P' . Entonces el segmento trazado de w a w' en P se combina con el segmento trazado de w a w' en P' para formar un ciclo en T , lo cuál contradice el hecho de que los árboles no tienen ningún ciclo. ///

Teorema 1.11.4. *Sea T un árbol. Entonces $\#V_T = \#E_T + 1$.*

Prueba: Si $\#V_T = 1$, entonces $\#E_T = 0$; de lo contrario existiría un lazo, que produce un ciclo. Por inducción, asumiremos que la proposición es verdadera para los árboles con p vértices o menos, y sea T que tiene $p + 1$ vértices.

Se deduce a partir del **Teorema 1.11.3** que al eliminar una arista e de T que se desconexo en dos pequeños árboles T' y T'' , de modo que $\#V_T = \#V_{T'} + \#V_{T''}$ y $\#E_T = \#E_{T'} + \#E_{T''} + 1$. Por la hipótesis inductiva $\#V_{T'} = \#E_{T'} + 1$ y $\#V_{T''} = \#E_{T''} + 1$. Se deduce que $\#V_T = \#E_T + 1$.
///

Teorema 1.11.5. *Todo árbol no trivial T tiene al menos dos vértices de valencia uno.*

Prueba. Por el **Teorema 1.9.2** para cualquier grafo, la suma de las valencias es dos veces el número de aristas. Por el **Teorema 1.11.4** $2\# E_T = 2\# V_T - 2$, puesto que T es un árbol. Mediante la combinación de estos dos factores, se obtiene la ecuación.

$$\sum_{v \in V_T} \text{valencia}(v) = 2\# E_T - 2$$

Puesto que cada vértice del árbol tiene valencia por lo menos 1, debe haber al menos dos vértices de valencias exactamente 1. ///

1.12 REPRESENTACIONES TOPOLOGICAS, SUBDIVISIONES Y HOMOMORFISMOS DE GRAFOS

Todo grafo G puede ser representado por un espacio topológico, en el planteamiento siguiente: Cada vértice está representado por un punto distinto y cada arista por un arco distinto, homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$.

Naturalmente, los puntos límites de un arco representan los puntos finales de la arista correspondiente. (Por supuesto, los interiores de los arcos son mutuamente disjuntos y no reúne a los puntos finales que corresponden a los vértices). Tal espacio se llama una representación Topológica de G .

Definición 1.12.1. Una subdivisión elemental de un grafo G se obtiene al remplazar un arco (u, v) en G por dos arcos (u, w) y (w, v) , donde w es un nuevo vértice.

Subdivisión es una operación que no cambia el tipo de homeomorfismo de una representación Topológica de un grafo. Para simplificar, primero se considera el efecto de la operación en una sola arista e de un grafo G , con un conjunto de punto final $V(e) = \{v_1, v_2\}$.

Desde el punto de vista informal de imágenes de un trazo, se subdivide la arista e en dos nuevas aristas e' y e'' , colocando un nuevo vértice v en cualquier lugar en su interior, como se muestra en la **Figura 1.19**.

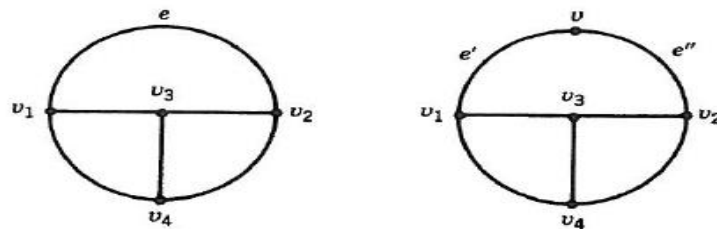


Figura 1.19 El grafo de la derecha se obtiene a partir del grafo de la izquierda mediante la subdivisión de arista e .

Desde un punto de vista formal, el resultado de subdividir la arista e , en un punto final de v_1 y v_2 es un nuevo grafo, cuyo conjunto de vértices es la unión de V y $\{v\}$, cuyo conjunto de aristas es $(E - \{e\}) \cup \{e', e''\}$, y con una estructura de incidencia $(I - V(e)) \cup \{V(e'), V(e'')\}$, donde $V(e) = \{v_1, v_2\}$ y $V(e'') = \{v_2, v\}$.

En general, una subdivisión de un grafo se obtiene mediante una secuencia finita de subdivisiones de aristas.

En otras aplicaciones, las subdivisiones pueden hacer que un grafo sea simple. El primer paso consiste en subdividir cada lazo. El siguiente y último paso consiste en subdividir todas las aristas, pero en cada una de adyacencia múltiple.

Los grafos G y H , son llamados homeomorfos si tienen respectivas subdivisiones G' y H' tal que G' y H' son grafos isomorfos. Se puede observar que, dos grafos son homeomorfos si y sólo si las representaciones Topológicas son homeomorfos como espacios topológicos. La **Figura 1.20** muestra dos grafos homeomorfos tal que ninguno es una subdivisión del otro.

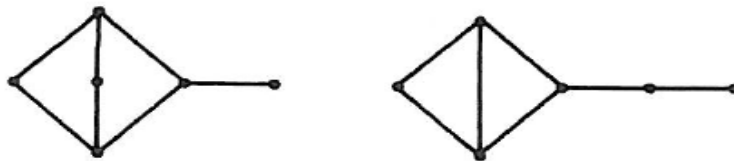


Figura 1.20 Dos Grafos Homeomórficos.

Ejemplo 1.6. Para cualquiera de los dos números enteros positivos m y n , el m -ciclo C_m y n -ciclo C_n son grafos homeomorfos.

Ejemplo 1.7. Para cualquier par de números enteros $m, n \geq 2$, m -camino P_m y n -camino P_n son homeomorfos.

1.13 ARISTA-COMPLEMENTO

Definición 1.13.1. Arista-complemento se define como el grafo con el mismo conjunto de vértices en G , pero de tal manera que dos vértices son adyacentes si y sólo si no son adyacentes en G . La arista-complementaria de un grafo G simple se denota G^c .

Ejemplo 1.8 El complemento de aristas K_n^c del grafo completo no tiene aristas en absoluto, sino n vértices.

1.13.1 PRODUCTO CARTESIANO

El producto cartesiano del grafo G y G' se denota $G \times G'$ y se define como el grafo con un conjunto de vértices $V_G \times V_{G'}$ y conjunto de aristas $(E_G \times V_{G'}) \cup (V_G \times E_{G'})$.

Si la arista $(e, v') \in E_G \times V_{G'}$ y si el punto final de la arista e son v_1 y v_2 , entonces el punto final de la arista (e, v') son los vértices (v_1, v') y (v_2, v') .

Si $(v, e') \in V_G \times E_{G'}$ y si el punto final de las arista e' son v'_1 y v'_2 , entonces el punto final de la arista (v, e') son (v', v_1) y (v, v_2') . La **Figura 1.21** muestra el producto cartesiano de 2-camino y el 3-camino.

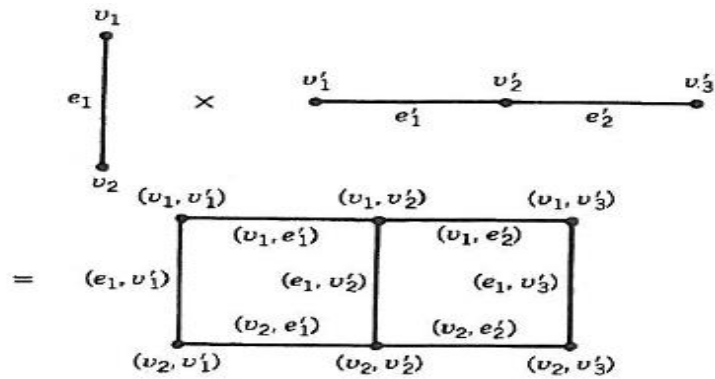


Figura 1.21 El producto Cartesiano de dos Grafos.

1.14 SUSPENSIONES

La suspensión (de otra manera llamada unión) de un grafo G a un grafo G' se obtiene mediante cada vértice adyacente de G a cada vértice de G' , y se denota $G + G'$. Por lo tanto, el conjunto de vértices es $V_G \cup V_{G'}$ y su conjunto de arista es $E_G \cup E_{G'} \cup (V_G \times V_{G'})$.

Los puntos finales de una arista $G + G'$, que surgen a partir de E_G o de $E_{G'}$ son exactamente como en los grafos G o G' , respectivamente. Los puntos finales de una arista (v, v') que surge a partir de $V_G \times V_{G'}$ son los vértices v y v' .

La **Figura 1.22** muestra la suspensión un 3-trayectoria a partir de un 2-trayectoria.



Figura 1.22 La suspensión de un 3-trayectoria de una 2-trayectoria.

Ejemplo 1.9. El grafo completo K_{n+1} es isomorfo a la suspensión del grafo completo K_n del grafo K_1 .

1.15 LAS FUSIONES

Sean G y G' grafos, y sea $f: H \rightarrow H'$ un isomorfismo de un subgrafo H de G a un subgrafo H' de G' . La fusión $G *_f G'$ se obtiene de la unión de G y de G' identificando los subgrafo, H y H' de acuerdo con el isomorfismo.

La **Figura 1.23** muestra la fusión de un 3-ciclo y el 4-ciclo a lo largo de la arista engrosado.

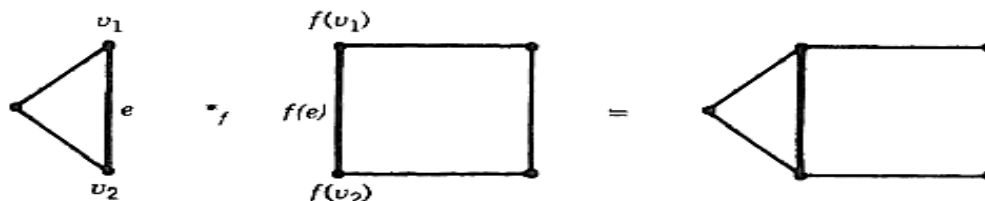


Figura 1.23 La fusión de los dos Grafos.

Ejemplo 1.10. El ramo de B_{n+k} es una fusión del ramo B_n y B_k de cada vértice.

1.16 SUPERFICIES E INCRUSTACIONES

En la teoría de grafos topológicos consiste en la colocación de un grafo en las superficies. Ordinariamente, tales superficies están *cerradas* y son compactas y sin límite.

Si el plano no es cerrado, por supuesto, pero difiere de la esfera por un único punto, se deduce que dado un grafo puede ser incrustado en el plano si y solo si puede ser incrustado en la esfera. Por consiguiente, no se pierde nada al considerar incrustaciones en la esfera, como es la práctica actual, y no en el plano.

1.16.1 SUPERFICIES ORIENTABLES

Hay dos tipos de superficies cerradas: orientables y no orientables. La esfera, toroide, el doble toro, el toro triple, y así sucesivamente, como se ilustra en la *Figura 1.24*, son orientables. Se denotan comúnmente $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$. Cada superficie cerrada conectada orientable es homeomorfa a una de ellas.

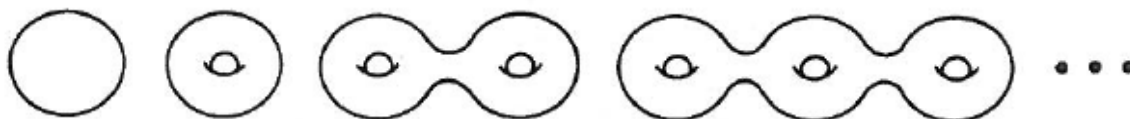


Figura 1.24 La Superficie Orientable Cerrada.

Otra caracterización de las superficies cerradas orientables es que cada una puede obtenerse mediante la adición de algunos identificadores en una esfera en 3 -espacio. Agregando un identificador S_1 , agregando dos producciones S_2 , y así sucesivamente.

A partir de esta caracterización, se ve fácilmente que todo grafo (finito) se puede extraer, sin cruces de aristas en algunas superficies cerradas, de la siguiente manera. En primer lugar, trazar el grafo sobre la esfera, posiblemente con los cruces. Ahora suponga que la arista e cruza a la arista e' . Como una operación quirúrgica, cortar un agujero en la superficie en cada lado de e' , cerca del cruce por e , lo suficientemente pequeño como para que toque ninguna arista.

A continuación conecte un identificador de un pequeño orificio a la otra. Luego, la arista e se re encamina de forma que atraviesa el identificador en lugar de cruzar la arista e' . Este procedimiento, se ilustra en la **Figura 1.25** puede repetirse hasta que todos los cruces son eliminados.

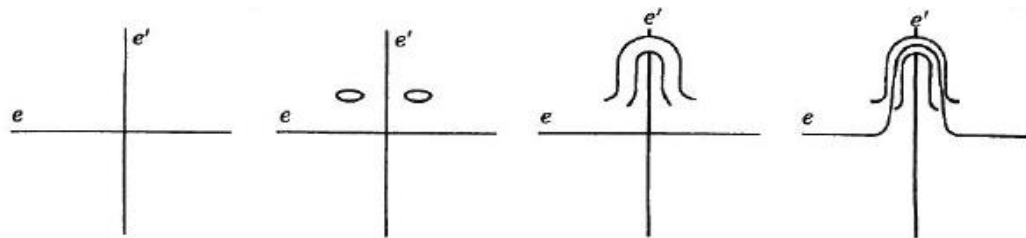


Figura 1.25 Adición de un Identificador para eliminar una arista de cruce

1.16.2 SUPERFICIES NO ORIENTABLES

La banda de Moebius es una superficie que no es ni cerrado ni orientable. Para obtener una copia física de una banda de Moebius, comienza con un trozo papel rectangular. Entonces, como se ilustra en la **Figura 1.26** dar a la tira una *media-torsión*, así como para intercambiar la parte superior e inferior en un lado, y terminar pegando el lado derecho al izquierdo.

Si bien una banda de Moebius es compacta, tiene un borde, la cual es homeomorfo al círculo, así esta no es cerrada.

Lo que la hace no orientable es que si un sistema de coordenadas 2×2 especificando una dirección hacia adelante y hacia la derecha se traduce en la dirección hacia adelante una vez alrededor del centro de la banda, entonces la orientación de la dirección correcta se invierte. Desde una perspectiva local que un ejemplar físico de una banda de Moebius es de dos caras. Sin embargo, se puede colorear ambos lados en un solo tono sin levantar el lápiz o cruzar la frontera.



Figura 1.26 La Construcción de una Banda de Moebius.

La unilateralidad de la banda de Moebius en 3 -espacio es el resultado de la incrustación en 3 -espacio, no es una propiedad intrínseca de la banda de Moebius. Por ejemplo, el espacio incrustado $Mb \times [0,1]$, donde Mb es la banda Moebius y $[0,1]$ es la unidad del intervalo la *transversal-sección* $Mb \times \{1/2\}$ es de dos caras.

Si se perfora un agujero en una esfera, el borde resultante es homeomorfo al círculo, justamente como esta en el borde de la banda de Moebius. La superficie obtenida uniendo una banda de Moebius a lo largo de su límite para el agujero de la esfera, de tal manera de conseguir el cierre del agujero, se le llama un *plano descriptivo*.

Cada superficie cerrada, orientable conectada se puede obtener mediante la reducción de los agujeros en una esfera y después cerrándolos con la banda de Moebius. Para $k = 0,1,\dots$, la superficie obtenida cortando los agujeros k y el cierre de ellos con bandas de Moebius k se denota N_k .

En este contexto, una banda de Moebius es a menudo llamado un *límite cruz*. Finalmente, a partir de la discusión aquí, se puede inferir que una superficie cerrada es orientable si y sólo si, no tiene un subespacio homeomorfo a la banda de Moebius.

1.17 INCRUSTACIONES

Definición 1.17.1. Un grafo se dice que está incrustado a una superficie G si sus vértices están representados por puntos en G y cada uno de sus aristas están representados por una curva en G , que une los puntos correspondientes de G de tal manera que ninguna curva se intercepta y dos curvas se interceptan entre sí, únicamente en un vértice común.

Para la mayoría de los propósitos, es lógico abusar de la terminología al referirse a la imagen de la representación Topológica en el grafo. Si un grafo conexo está incrustado en una esfera, entonces el complemento de la imagen es una familia de regiones (o caras), cada una homeomorfo a un disco abierto.

En superficies más complicadas, las regiones no tienen que ser discos abiertos. Si ocurre que todos los discos son abiertos entonces la incrustación se llama *2-celdas* incrustadas. Si el borde de un disco es abierto, tiene uno o más vértices repetidos, entonces la clausura de la región no es un disco cerrado.

No obstante, si la incrustación es una incrustación de *2-celdas* depende únicamente de si todas las regiones son discos abiertos, ninguna de las clausuras de las regiones son discos cerrados.

Una notación conveniente para el conjunto de regiones de un grafo de la incrustación $i: G \rightarrow S$ es F_G , donde la letra F recuerda una de las regiones que son algo así como la cara de un poliedro. Si hay más de una incrustación de G es considerado, entonces el nombre de la incrustación debe aparecer en algún lugar de la notación de las regiones.

El número de lados (o tamaño) de una región f se define como el número de *aristas-lados* que se encuentran al atravesar un circuito simple justo dentro del límite de la región, y se denotan por S_f .

Como se ilustra en la región exterior de la **Figura 1.27**, el número de lados de una región no necesita ser igual al número de aristas en su borde.

Se puede observar que la incrustación en la **Figura 1.27** tiene una región de un lado que se llama “monografía”.

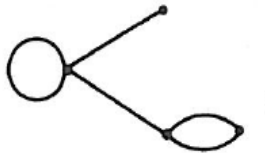


Figura 1.27 Una Incrustación Esférica.

1.18 ECUACION DE EULER'S PARA LA ESFERA

En una carta dirigida a Goldbach, Euler's (1750) escribió que había encontrado una nueva fórmula sobre el número de vértices, aristas y caras (esférica) de un poliedro:

$$\#V - \#E + \#F = 2$$

Cauchy (1813) dio fundamentalmente una prueba teórica de grafo de esta ecuación de Euler's, pero fue Lhuillier (1811) quien clasifica las excepciones aparentes (las caras deben ser *2-celdas* y la superficie no puede tener agujeros) y generaliza la ecuación de Euler para las superficies cerradas orientables.

En (1861) se utilizó la ecuación de Euler's para estudiar con detalle las superficies; este trabajo es comúnmente considerado como el principio de la Topología.

El lado izquierdo de la ecuación de Euler's se llama la *fórmula de Euler's*. El lado derecho se llama característica de Euler's de la superficie. Así, el número 2 es la característica de Euler's de la esfera.

Antes de demostrar la ecuación de Euler para la esfera, puede ser muy ilustrativo evaluar la *fórmula de Euler's* para los dos Ejemplos representados en la **Figura 1.28**.

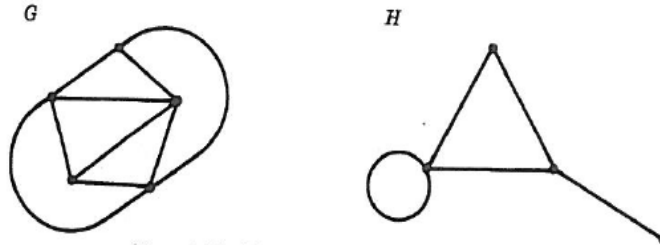


Figura 1.28 Dos grafos incrustaciones en la esfera.

El grafo *G* en la **Figura 1.28** tiene cinco vértices y nueve aristas. Cada una de las regiones, incluyendo la región exterior, es de tres lados. Hay seis regiones en todo, ya que la región exterior siempre se cuenta en los cálculos de la fórmula de Euler.

Así,

$$\#V - \#E + \#F = 5 - 9 + 6 = 2.$$

El grafo *H* en **Figura 1.28** tiene cuatro vértices y cinco aristas. La incrustación tiene tres regiones. Por lo tanto,

$$\#V - \#E + \#F = 4 - 5 + 3 = 2.$$

Teorema 1.18.1 Sea $G, i: G \rightarrow S_0$ una incrustación de un grafo conexo en la esfera. Entonces $\#V - \#E + \#F = 2$.

Prueba. Esta prueba procede por inducción en el número $\#F$ de regiones. En primer lugar, observamos que si $\#F_G = 1$, entonces G debe ser un árbol, ya que el teorema de la curva de Jordán implica que cualquier ciclo se separarían de la esfera. Así, por el **Teorema 1.11.4**.

$$\#V_G - \#E_G = 1.$$

Partir de la cual se deduce que

$$\#V_G - \#E_G + \#F_G = 2.$$

Ahora supongamos que la ecuación de Euler se mantiene cuando el número de regiones es a lo sumo n , y supongamos que $\#F_G = n + 1$.

Entonces algunas aristas e se encuentra en el circuito del límite de dos regiones distintas. Puesto que las dos regiones son distintas, el subgrafo G' se obtiene eliminando la arista e está conectada. Entonces,

$$\#V_{G'} = \#F_G - 1 = n,$$

Así por inducción

$$\# V_{G'} - \# E_{G'} + \# F_{G'} = 2, \text{ donde}$$

$$\# V_{G'} = \# V_G, \quad \# E_{G'} = E_G - 1 \quad \text{y} \quad \# F_{G'} = F_G - 1, \text{ se deduce que}$$

$$\# V_G - \# E_G + \# F_G = 2. \quad ///$$

CAPITULO 2

CONEXIDAD

2 CONEXIDAD

2.1 CONEXIDAD Y LÍMITES DE LA REGION

Al imaginarse las regiones de una incrustación plana, se tiende a imaginar polígonos circulares (es decir, convexo) cuyos límites son los ciclos del grafo integrado, sin ningún vértice repetido. Desde luego, la región no acotada no es convexa, pero imágenes fijas en el límite de esta región es un ciclo simple. Esta imagen de límites de la región como ciclos simples no es totalmente exacta. Para incrustar planos, el problema es fácil de determinarse por medio del siguiente teorema.

***Teorema 2.1.1** Cada región de una incrustación plana de un grafo G tiene un ciclo simple de límite si y sólo si G es 2-conexo.*

Prueba. Supongamos que el límite de alguna región r no es un ciclo, pero algún otro tipo de camino cerrado, de modo que el vértice v ocurre dos veces, como a la izquierda de la *figura 2.1*.

Entonces hay un camino cerrado simple en el plano que sale desde el vértice v entre dos aristas de la frontera de r , se mantiene todo el tiempo dentro de la región r , y después vuelve al vértice v entre un par diferente de aristas, como se muestra en el lado derecho de la *figura 2.1*.

Esta trayectoria cerrada separa el plano en dos piezas, las cuales contienen las partes del grafo G . Puesto que la trayectoria corta al grafo sólo en el vértice v , se deduce que v es un punto de corte del grafo G . Por lo tanto, G no es *2-conexo*.



Figura 2.1 La región r (sombreado) y el vértice v .

Sobre un recorrido de un pequeño círculo en torno al vértice v , se debe encontrar en algún lugar una arista d de H (con punto final v) seguido inmediatamente por una arista e de K (con v de punto final). Considere la región r con el ángulo en v entre las aristas de d y e .

Puesto que las aristas d se encuentra en el subgrafo H y puesto que v es un punto de corte, sin arista del subgrafo K que se encuentra hasta que el límite regresa a v .

Dado que la arista e de K debe ocurrir en alguna parte de ese recorrido de la frontera, y desde ese camino cerrado debe volver al vértice v , se concluye que el límite de la región r no es un ciclo simple. ///

La situación del género de mayor superficie es más complicada. La mitad del *Teorema 2.1.1* generalizado, es decir, si G un punto de corte, la incrustación de cada G en cualquier superficie tiene una región cuya frontera no es un ciclo, ya que la demostración dada anterior se aplica textualmente.

Por otro lado, es fácil determinar una incrustación de un grafo *2-conexo* en el toroide que tiene una región cuya frontera no es un ciclo.

2.2 ARISTAS DE CONTRACCIONES Y DE CONEXIDAD

Supongamos que el grafo G' se obtiene a partir del grafo G mediante la contracción de la arista e con extremos u y v para el único vértice v' .

Si G es *k-conexo*, entonces G' es al menos $(k - 1)$ -conexo ya que cualquier conjunto de m vértices, desconexo a G' se puede convertir en un conjunto de $m+1$

vértices en la mayoría desconexo de G dividiendo el vértice v' nuevamente dentro del vértices u y v .

Por otro lado, es posible que G' no sea k -conexo. De hecho, si los identificados vértices u y v están en un conjunto K de vértices que se desconecta de G , entonces el mismo conjunto de vértices, con u y v remplazado por v' , forma un conjunto de $K - 1$ vértices desconexo de G' .

La **figura 2.2** ilustra un ejemplo en el que los grafo G original es 3 -conexo y el grafo contraído es 2 -conexo.

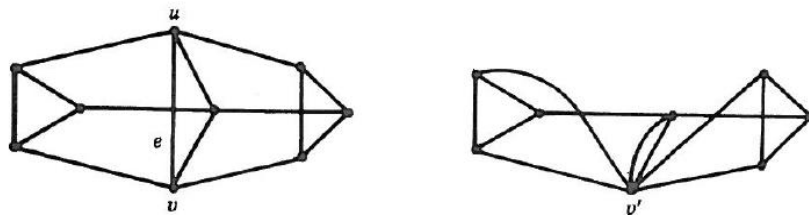


Figura 2.2 Una contracción de aristas de un grafo 3 -conexo a un grafo 2 -conexo.

Para grafos 3 -conexos, es suficiente con que el grafo G' obtenido mediante contraer una arista e del grafo original G siendo 3 -conexo.

El análisis anterior muestra que esto podría no ser el caso si la arista e fue seleccionada de forma aleatoria. Así, el siguiente teorema es un principio fundamental en la prueba de Thomassen's.

Teorema 2.2.1. *Sea G un grafo 3-conexo con cinco o más vértices. Entonces hay alguna arista e de tal manera que el grafo G/e obtenido por contraer e también es 3-conexo.*

Prueba. (Thomassen). Supongamos, a modo de contradicción que, para cada arista e , el contraído grafo G/e tiene un conjunto de dos vértices desconexo. Uno de esos dos vértices debe ser el vértice obtenido mediante la identificación de los dos extremos de la arista e ; de lo contrario, el mismo conjunto de dos vértices también es desconexo a G , lo que contradice 3-conectividad de G . Así, para cada arista e , los extremos de u y v de e , junto con algún tercer vértice w desconexo a G .

En consecuencia, vamos a elegir una arista e , y un vértice w tal que H es el mayor componente del grafo $G - \{u, v, w\}$ y es el más grande posible, para cualquier conjunto desconexo que consta de tres vértices, dos de los cuales son adyacentes.

Sea x un vértice adyacente a w tal que x se encuentra en un componente de $G - \{u, v, w\}$ distinto del componente máximo H . Dado que los vértices w y x son los extremos de una arista de G , se deduce que G tiene un conjunto desconexo de la forma $\{u, v, w\}$.

Afirmamos que algún componente de $G - \{u, v, w\}$ es mayor que H , lo cual es una contradicción. Para ver esto, sea H' el subgrafo de G inducido por los vértices de H , junto con u y v .

Dado que tanto u como v son adyacentes a los vértices de H (de lo contrario no sería G 3-conexo), el subgrafo H' es conexo.

Por una parte, quizás el vértice y no está en H' . Dado que w y x no están en H ó bien, se deduce que H' está contenida en un componente de G , en contradicción con la maximalidad de H .

Por otro lado, tal vez y está en H' . Si $H' - y$ es conexo, entonces existe nuevamente una contradicción sobre la maximalidad de H , ya que $H' - y$ tiene más de un vértice H .

Si $H' - y$ no es conexo, entonces un componente de $H' - y$ contiene tanto a u y v vértices, ya que u es adyacente a v ; y, por tanto, todos los demás componentes de $H' - y$ son conexo al resto de el grafo G a través de los vértices y y w .

Esto implicaría que $\{y,w\}$ es desconexo a G , en contradicción con 3 -conectividad de G . Llegamos a la conclusión de que por alguna arista e , el grafo G contraído es 3 -conexo. ///

CAPITULO 3

PLANARIDAD

3 PLANARIDAD

3.1 GRAFOS PLANOS

El estudio de la incrustación del plano tiene una larga historia que se entrelaza con la teoría de grafos cromática, análisis algorítmico, la enumeración y muchas otras cosas. Sin embargo, a diferencia de las superficies de *mayor-género* del plano, la esfera en el plano son homológica triviales, es decir, demasiado simple en un sentido topológico.

En consecuencia, los métodos utilizados para estudiar incrustaciones planas son menos topológicos que los de principal interés. Sin embargo, el teorema de Kuratowski's podría ser el teorema más famoso de toda la teoría de grafos.

Un grafo plano es un par (V, E) de conjuntos finitos, con las propiedades siguientes:

- I. $V \subseteq \mathbb{R}^2$;
- II. Cada arista es un arco entre dos vértices.
- III. Diferentes aristas tienen diferentes conjuntos de puntos finales.
- IV. El interior de un borde no contiene ningún vértice al igual no contiene el punto de cualquier otra arista.

Definición 3.1.1. Un grafo G es plano si puede ser dibujado en el plano sin que sus arcos se intercepten.

3.2 GRAFOS DE KURATOWSKI'S

La ecuación de Euler's se utiliza a menudo conjuntamente con una relación entre el número de aristas y regiones; para demostrar que cierto grafo no se puede incrustar en la esfera. Esta relación, llamada desigualdad de *arista-región*, se establece en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. Sea $i: G \rightarrow S$ una incrustación de un grafo simple conexo, con al menos tres vértices en cualquier superficie. Entonces $2\#E \geq 3\#F$.

Prueba. La suma $\sum_{f \in F} S_f$ del número de lados de las regiones cuenta cada arista exactamente dos veces. Así

$$2\#E = \sum_{f \in F} S_f$$

Dado que no existen lazos o aristas múltiples en el grafo simple G , no hay monografía o diagonales en la incrustación. Así, para cada región f , $S_f \geq 3$, Resulta que $2\#E \geq 3\#F$. ///

El grafo completo K_5 y grafo bipartito completo $K_{3,3}$ se llama grafo de Kuratowski's (o el grafo Kuratowski's) porque Kuratowski's (1930) demostró que son un conjunto completo de obstrucciones para incrustar el grafo en la esfera, en el siguiente sentido:

Teorema de Kuratowski's. *El grafo G tiene una incrustación en la esfera si y sólo si no contiene ningún homeomorfismo de K_5 o de $K_{3,3}$.*

Para ver que K_5 no es esférico, se tiene en cuenta que tiene cinco vértices y 10 aristas. Por la ecuación de Euler $\#V - \#E + \#F = 2$, tendría que ser de siete regiones para cualquier incrustación esférica. Sin embargo, esto violaría la desigualdad de arista-región $2\#E \geq 3\#F$ ya que $2 * 10 < 3 * 7$.

Una prueba de que $K_{3,3}$ no es esférico comienza en la misma forma. Puesto que $K_{3,3}$ tiene seis vértices y nueve aristas, la ecuación de Euler's implica que la incrustación

esférica tendría cinco regiones. Sin embargo, la desigualdad de la *arista-región* se satisface, porque $2 * 9 \geq 3 * 5$.

Esta prueba se continúa después de un reforzamiento de la desigualdad de *arista-región*, lo que implica el concepto de la circunferencia.

La circunferencia de un grafo es el número de aristas de su ciclo más corto. Si un grafo tiene un lazo, entonces su circunferencia es 1. De lo contrario, es por lo menos 2. Si además no tiene aristas múltiples, entonces su circunferencia es de al menos 3.

La circunferencia de un árbol es infinita.

Teorema 3.2.2. *Sea G un grafo conexo que no es un árbol, y sea $i: G \rightarrow S$ una incrustación. Entonces $2\#E \geq \text{circunferencia}(G) * \#F$.*

Un sentido del teorema de Kuratowski's no es fácil de probar. Puesto que K_5 y $K_{3,3}$ son no esférica, un grafo G con una incrustación en la esfera no es posible contener un homeomorfismo de cualquiera de ellos.

3.3 GENERO DE LAS SUPERFICIES Y DE LOS GRAFOS

Definición 3.3.1. Definiremos como el número de identificadores que hay que añadir a la esfera para obtener este tipo homeomorfismo. Es decir, el género de la superficie orientable S_g es g .

Si una superficie es no orientable, entonces su número de “Crosscap” se define como el número de bandas de Moebius, es necesario unirlas a la esfera para obtener este tipo de homeomorfismo.

Así, el número “crosscap” de la superficie no orientable N_k es K para $K \geq 1$. La notación N_0 significa que la 2-esfera, es orientable.

El género (orientable) de un grafo G , se denota $\gamma(G)$ o simplemente γ , si G es el grafo solamente en su contexto, se define como el número más pequeño g tal que el grafo G incrusta en la superficie orientable S_g .

El número crosscap del grafo G , denotado $\bar{\gamma}(\bar{G})$ o simplemente $\bar{\gamma}$, es el menor número k tal que G incrusta en la superficie N_k . Algunas veces llamada $\bar{\gamma}(G)$ el género no orientable de G .

Dado que ni K_5 ni tampoco $K_{3,3}$ incrusta en la esfera, los dos tienen género positivo y número positivo de crosscap.

La **Figura 3.1** establece que tanto K_5 y $K_{3,3}$ tienen incrustaciones en la banda de Moebius, y por lo tanto en el plano proyectivo N_1 . Por lo que ambos tienen el número crosscap 1.

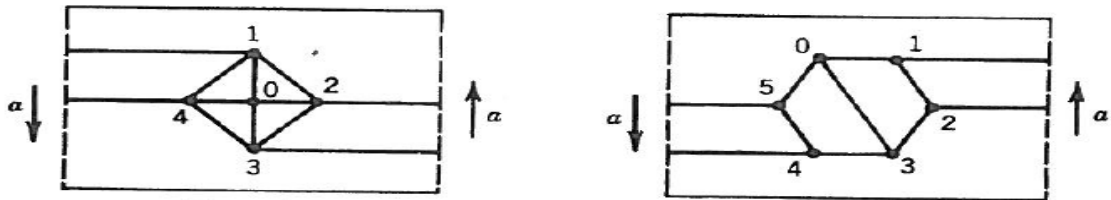


Figura 3.1 Incrustaciones de K_5 y $K_{3,3}$ en la Banda de Moebius.

La incrustación de K_5 en **la figura 3.1** muestra los vértices, todas excepto dos de las aristas en el *centro* de la banda de Moebius.

La arista del vértice 2 al vértice 4 funciona a través del centro de la arista y pega a las aristas del vértice 1 al vértice 3 también pasa a través de la arista 0.

Es precisamente la *media-torsión* antes de pegar que hace que la incrustación sea posible. La incrustación de $K_{3,3}$ depende del mismo proceso.

El método descrito anteriormente en esta sección para el uso de identificadores para eliminar los cruces no proporciona un límite superior muy bueno, obligado sobre el género orientable, por lo general es muy ineficiente, enviar solamente una arista a través de un identificador.

Por ejemplo, es imposible trazar K_6 en la esfera, con al menos de tres cruces, pero sólo un identificador se necesita para eliminar todos los cruces.

3.4 EL TOROIDE

Así como la banda de Mobius se puede cortar, abrir y aplastar en un rectángulo, también se puede hacer con el toro, permitiendo así dibujar una incrustación sobre un pedazo de papel.

Para recuperar el toro de un rectángulo, primero pega la parte superior del rectángulo a la parte inferior, con el fin de obtener un tubo.

Luego, pega el extremo derecho del tubo a la izquierda, lo cual produce el toro, como se ilustra en la *Figura 3.2*.

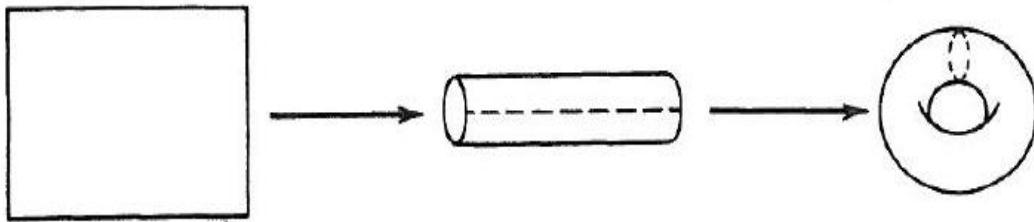


Figura 3.2 La construcción de un Toro de un Rectángulo.

Con el fin de mostrar una incrustación de un grafo en un toro, se puede dibujar algunas de las aristas del grafo a través de los lados de un rectángulo, teniendo cuidado en cada ocasión de continuar en la posición correspondiente del lado opuesto.

Por ejemplo, la *Figura 3.3* muestra la incrustación de K_5 y $K_{3,3}$ en el toro. Ya se ha demostrado que ni K_5 ni $K_{3,3}$ incrusta en la esfera. De la *figura 3.1* se deduce que ambos tienen género orientable 1.

Aunque K_5 tiene el mismo género no orientable como género orientable, como lo hace $K_{3,3}$, para la mayoría de grafos el género orientable y el género no orientable difieren.

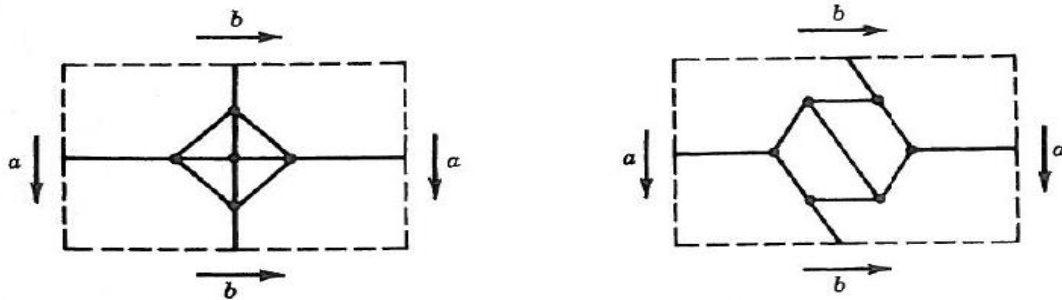


Figura 3.3 Incrustaciones de K_5 y $K_{3,3}$ en el Toro.

De las muchas pruebas publicadas, se ha seleccionado una cuya organización se debe a Thomassen (1980). No es la más corta, y no es la más fácil. Sin embargo, es significativa ya que también produce otros resultados sobre incrustaciones planas.

Uno es el Teorema de Fary's el cual las arista de una incrustación plana de un grafo simple se pueden elegir para formar líneas rectas.

Otro es el Teorema de Tutte que las regiones, de un grafo plano de incrustación 3-conexo se puede elegir para ser convexa. Aún otro es el teorema de Whitney que un grafo plano 3-conexo simple tiene sólo una incrustación plana.

Además, la prueba Thomassen se convierte fácilmente en un algoritmo que es la planicidad polinómica en el número de vértices.

Thomassen's prueba que el teorema de Kuratowski's depende del uso de las contracciones simples de aristas. La contracción de arista puede ser una herramienta peligrosa, ya que una contracción de una sola arista se puede reducir el género de un grafo de forma particular.

Por otro lado, para grafos planos, donde el género está reducido ya que, la contracción de arista es segura y natural porque una contracción de aristas de un grafo plano produce un grafo plano.

Un grafo que contiene un homeomorfismo de cualquiera de los grafos completos K_5 , o el grafo completo bipartito $K_{3,3}$ no pueden ser planares. Por lo tanto, el Teorema de Kuratowski's se comprueba y se establece para cada grafo G lo siguiente:

(*K T*) Si el grafo G no contiene ningún homeomorfismo de K_5 o de $K_{3,3}$, entonces G es plano. La demostración es por inducción sobre el número de vértices en el grafo G .

Paso de la base. La afirmación $(K T)$ es verdadero para todos los grafos con cuatro o menos vértices.

Hipótesis de Inducción. Suponemos que el enunciado $(K T)$ es verdadero para todos los grafos con menos de n vértices, donde n es cualquier número mayor que o igual a 5.

Paso de Inducción. Sea G un grafo con n vértices, y sea G el cual no contiene ningún homeomorfismo de K_5 o $K_{3,3}$. Vamos a demostrar que G es plano.

Sea e la arista de cualquier grafo G , y supongamos que sus extremos son los vértices u y v . Sea G' el grafo obtenido a partir de G por una contradicción simple de la arista e , se le da el nombre de v' al vértice e al cual se contrae. Se interrumpen momentáneamente la demostración del teorema de Kuratowski's para establecer un lema.

Lema 3.4.1. *Sea G un grafo que no contiene homeomorfismo de K_5 o $K_{3,3}$, y sea e cualquier arista de G . Entonces el resultado simple de **contraer** el grafo G en la arista e es un grafo G' que no contiene homeomorfismo de K_5 o de $K_{3,3}$.*

Prueba. Sabemos que el teorema de Kuratowski's es cierto, incrustamos en el plano G , la simplicidad de contraer e dentro de la incrustación, y obtener así una incrustación de lo contraído del grafo G' . (Sin embargo, nuestra tarea consiste en este lema, sin utilizar el teorema Kuratowski's).

Supongamos que el grafo G' contiene un **contracción** homeomorfa de K_5 o de $K_{3,3}$. Entonces G contendrá un subgrafo H de tal manera que la contracción de una sola arista e de H produce un homeomorfismo de K_5 o de $K_{3,3}$. Utilizando reversión de la contracción, vemos que sólo hay tres posibilidades esencialmente diferentes de H , al homeomorfismo; que se ilustran en la **figura 3.4**.

En cada caso, el subgrafo H en sí contiene un homeomorfo de K_5 o de $K_{3,3}$, en contradicción con la hipótesis para el original grafo G . A la izquierda, el subgrafo H es homeomorfo a $K_{3,3}$, y en el centro de H es homeomorfo a K_5 .

A la derecha, simplemente se eliminan las dos aristas horizontales para obtener una homeomorfa de $K_{3,3}$ en el cual el vértice v , x , y forma la mitad de la bipartición.

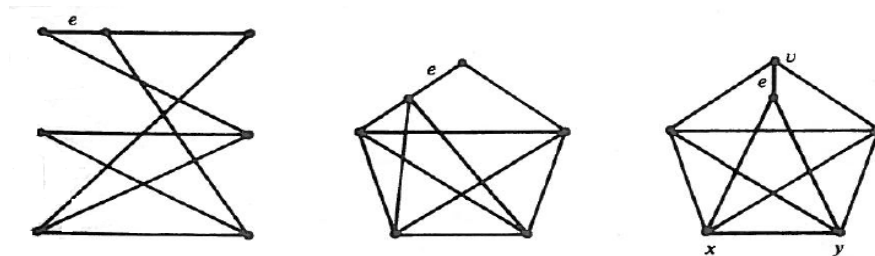


Figura 3.4 El subgrafo H obtenido revirtiendo la contracción de la arista e .

Una vez establecido el lema, se reanuda la demostración del teorema de Kuratowski's, no es seguro que el grafo G' contiene ningún homeomorfismo de K_5 o de $K_{3,3}$. En la hipótesis de inducción, sabemos que no es una incrustación plana de G' .

3.5 GRAFOS DUALES

Dado un grafo G , una superficie cerrada S , y una incrustación de 2-celda $i: G \rightarrow S$, hay una idea, debido a Poincaré para la construcción de lo que se llama un **grafo doble y una doble incrustación**.

En primer lugar, para cada región f de la incrustación $i: G \rightarrow S$ coloque un vértice f^* en sus interiores.

Luego, para cada arista e del grafo G , dibuja una arista e^* entre los vértices realizado recientemente en el interior de las regiones que contienen e . (Si ambos lados de la arista e se encuentran en la misma región f , entonces la arista doble e^* es un lazo basado en el vértice doble f).

El grafo resultante con vértices f^* y aristas e^* se llama el **grafo doble** para la incrustación $i: G \rightarrow S$ y se denota G^{*i} , o simplemente G^* , si i es la incrustación

únicamente bajo ciertas consideraciones. La incrustación resultante del grafo G en la superficie S es llamada **Doble Incrustación**.

El grafo original G y la incrustación original i son llamado *Grafo Principal e Incrustación Principal* respectivamente. La **figura 3.5** muestra cómo dos incrustaciones diferentes del mismo grafo en la misma superficie pueden producir diferentes grafos doble.

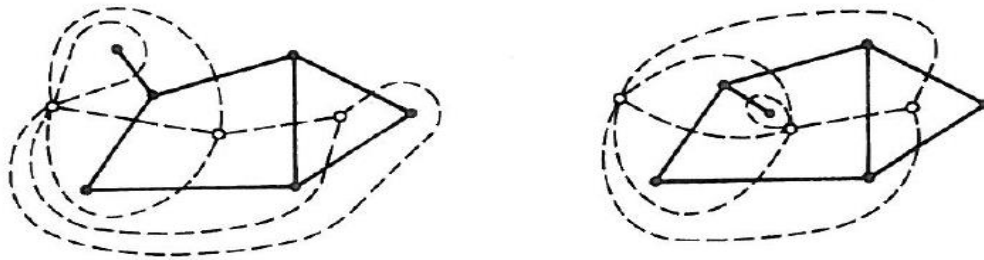


Figura 3.5 Dos duales diferentes el mismo grafo de la Esfera.

En la **figura 3.5** el grafo principal se dibuja con puntos sólidos de vértices y líneas sólidas para las aristas, mientras que los grafos dobles son dibujados con puntos abiertos para los vértices y las líneas discontinuas de las aristas.

Dado que el grafo doble de la izquierda tiene un vértice de valencia 7, y la máxima valencia en el grafo doble de la derecha es 6, ambos duales no son isomorfos.

Se puede observar que para cualquier región f de la incrustación primaria, la valencia del doble vértice f^* es igual al número de lados de f .

La **Figura 3.6** muestra la construcción de la dualidad en el toro. El grafo primario tiene dos vértices y tres aristas entre ellos, y sólo hay una región primaria. El grafo doble tiene un solo vértice, en la que tres lazos están basados. Cabe destacar que si se fuera a construir la doble de la doble incrustación, entonces la incrustación primaria del grafo primario sería restaurada. Esto es lo que justifica el uso del término dual.

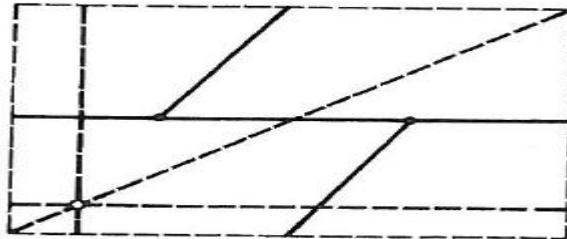


Figura 3.6 Un grafo en el toro y su dual.

3.6 TEOREMAS DE PLANARIDAD PARA GRAFOS 3-CONEXO

Teorema 3.6.1. *Si G es un grafo 3-conexo que no contiene ningún homeomorfismo de K_5 o $K_{3,3}$, entonces G es plano.*

Prueba. (Thomassen). La demostración es por inducción sobre el número de vértices de G .

Por el **Teorema 2.2.1**, las aristas contraídas pueden ser elegidas para que el nuevo grafo G' siga siendo *3-conexo*. Esto significa que la parte *3-conexo* de la hipótesis de inducción se cumple para G' . También significa que el grafo obtenido a partir de G' eliminando el vértice v' es *2-conexo*.

También significa que el grafo obtenido a partir del **Teorema 2.1.1** que la cara resultante que contiene al vértice v' está delimitada por un ciclo, y por lo tanto, el resto de la prueba inicial es aplicable.

La otra parte de la hipótesis de inducción, es que G' no contiene ningún homeomorfismo de K_5 o $K_{3,3}$. Por lo tanto, el teorema de Kuratowski's es válido para todos los grafos *3-conexos*. ///

La demostración del teorema de Kuratowski's en el caso *3-conexo* se puede refinar con el fin de conservar las propiedades geométricas de incrustaciones.

Supongamos que las regiones delimitadas de la incrustación plana para el grafo contraído G' son todos convexos y que todas las aristas son segmentos de línea recta.

Entonces cuando vértice v' se divide de nuevo en vértices u y v , si u y v se eligen lo suficientemente cerca de v' , la incrustación resultante para G también se puede hacer para tener regiones convexas y aristas de línea recta.

Thomassen's prueba que el teorema Kuratowski's proporciona también pruebas inductivas de los teoremas siguientes, los cuales presentan pasos claves para la inducción para la incrustación plana de K_4 .

Teorema 3.6.2 (Tutte, 1960). *Cualquier grafo plano 3-conexo es una incrustación plana de tal manera que cada región delimitada es convexa.*

Teorema 3.6.3 (Fary, 1948). *Cualquier grafo plano 3-conexo tiene una incrustación plana tal que cada arista es un segmento de línea recta.*

Es evidente a partir del **Teorema 2.1.1** que el teorema de Tutte's no es válido para grafos planos 1-conexo. Además, no se mantiene incluso para grafos planos 2-conexo. Por otro lado, el teorema de Fary's se cumple para todos los grafos planos, como veremos más adelante.

Hay otra observación que vale la pena hacer sobre la prueba del Teorema de Kuratowski's en el caso 3-conexo.

Cuando el vértice v' se divide nuevamente en los vértices u y v , realmente no existe elección de cómo la incrustación resultante es en u y v .

Por lo tanto, no hay solamente una forma de incrustar G en el plano. Pero básicamente de una manera, nos referimos a un homeomorfismo de parejas.

Cualquiera que esté familiarizado tanto con la prueba Thomassen's y el concepto de unicidad reconocerá que la prueba Thomassen's y el teorema de Kuratowski's pueden adaptarse para probar el siguiente resultado de Whitney, una vez más utilizando una inducción sobre la base de K_4 .

***Teorema 3.6.4** (Whitney, 1933). Existe una única forma de incrustar un grafo plano 3-conexo en el plano.*

3.7 GRAFOS QUE NO SON 3-CONEXOS

El siguiente teorema es una herramienta básica para deducir resultados sobre grafos planos que no son 3-conexo.

***Teorema 3.7.1.** Sean H y K grafos planos. Entonces el grafo obtenido mediante la fusión de H y K , ya sea en un solo vértice v ó a lo largo de una única arista e es plano.*

Prueba. Si los grafos H y K son incrustación disjuntos en el plano como en la **figura 3.7**, de manera que ambas copias del vértice v ó de la arista e que se encuentran en la región exterior, sería fácil de construir una incrustación plana de la fusión.

Para obtener una fusión de vértice, simplemente se tira de cada copia del vértice v se separan del resto del grafo H ó K , por un camino sin tocar el resto de su grafo correspondiente, mientras se arrastra a lo largo de las aristas incidencia en v .

Para obtener una arista fusión, hay un paso preliminar topológicamente reduciendo todas las copias de e hasta que sea poco mayor que un vértice, después del cual se hace al igual separándolo de un vértice.

Para conseguir copias respectivas de v ó e a la región exterior, dado que H y K se incrustan primero en distintas copias de la 2 -esfera, y seleccionando en cada copia una región que contiene v ó e en su límite. A continuación, elimine el interior de un disco cerrado de ambas regiones seleccionadas.

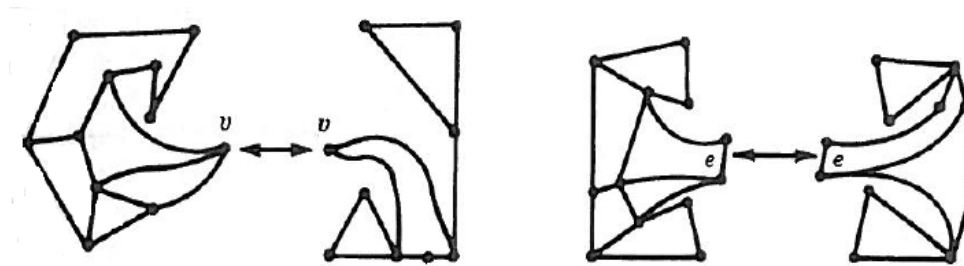


Figura 3.7 Dos fusiones incrustadas planas.

Entonces se pegan ambas superficies resultantes conjuntamente al identificar los límites de los discos eliminados, formando de este modo una nueva 2 -esfera, en el que el grafo H y K están incrustadas de manera que ambas copias de v ó e se encuentran en el límite de la misma región. ///

El **Teorema 3.7.1**. Conduce directamente a una demostración del teorema de Kuratowski's de todos los grafos, 3-conexo o no, a partir del **Teorema 3.6.1**, para grafos 3-conexos. La demostración del **Teorema 3.7.1** causa estragos en los segmentos de líneas rectas. Por consiguiente, tomamos un camino diferente, de la siguiente manera.

Si un grafo no contiene homeomorfismo de K_5 o $K_{3,3}$, y no es 3-conexo, entonces le sumamos tantas aristas al grafo como sea posible sin generar K_5 ó $K_{3,3}$.

Si las aristas adicionales hacen que el grafo resultante sea 3-conexo, el teorema de Kuratowski's y el teorema de Fary's se mantendrán para el grafo original, debido a que es un subgrafo de un grafo 3-conexo. El teorema siguiente es lo que se necesita.

Teorema 3.7.2. *Sea G un grafo que no contiene homeomorfismo de K_5 ó $K_{3,3}$ tal que la adición de cualquier arista G crea dicha homeomorfismo. Entonces G es 3-conexo.*

Prueba. La prueba es por inducción sobre el número n de vértices de G . Como un paso básico, se observa que el teorema es verdadero para $n = 5$, ya que $K_5 - e$ es 3-conexo.

Supongamos ahora que el teorema es verdadero para todos los grafos con menos de n vértices, donde $n > 5$, y suponemos que el grafo G tiene n vértices.

Supongamos, a modo de contradicción, que G es sólo 2 -conexo, por lo que es la fusión de los grafos H y K en dos vértices u y v . Afirmamos que los vértices u y v son adyacentes en el grafo G .

Supongamos que no. Entonces el grafo H' se obtiene a partir de H mediante la adición de una arista e desde u hasta v aún no contendrá un homeomorfismo de K_5 ó $K_{3,3}$, ya que cualquier homeomorfismo estaría contenido en G (con un camino a través de K desempeñando el papel de la arista e).

También, la adición de cualquiera de las aristas de H' creará un homógrafo de K_5 ó $K_{3,3}$ en el grafo G original; ya que el homeomorfo no puede ser inconexo por la eliminación de los vértices u y v , que es homeomorfo deberá contener en H' también.

Así por inducción, H' es 3 -conexo y por lo tanto plano. Del mismo modo, el grafo K obtenido mediante la adición de una arista e desde u hasta v es 3 -conexo y plano. La fusión de H' y K' a lo largo de la arista e entonces es un plano por el **Teorema 3.7.1**.

En particular, que la fusión no contiene homeomorfismo de K_5 ó $K_{3,3}$. Esto contradice la maximalidad del grafo G original, ya que la fusión de H' y K' a lo largo de la arista e es simplemente G con la arista e añadida.

Por lo tanto, suponemos que la fusión del grafo H y K a lo largo de la arista e , y que comparten H y K la propiedad de maximalidad misma de G con respecto al homeomorfismo de K_5 y $K_{3,3}$.

En la hipótesis de inducción, el grafo H y K son 3 -conexo, y por lo tanto, plana. Por el **Teorema 3.7.1**, el grafo G es plano.

De ello se deduce que, en cualquier incrustación plana de G , H , ó K no puede existir regiones con cuatro o más lados.

Caso contrario una arista diagonal a través de la región se podría añadir, creando un grafo plano con una arista más, lo que contradice la maximalidad del grafo dado (hay un pequeño problema si los vértices que quieran unirse por una diagonal ya están unidos por una arista en otra parte de la incrustación).

Dado que los grafos que se están tratando no tienen lazos o aristas múltiples, cada región debe tener tres lados. Por la ecuación de Euler's se deduce que $\# E = 3 * \# V - 6$ para el conjunto de aristas y vértices de alguno de los grafos G , H y K .

Pero dado que G es la fusión de H y K a lo largo de una sola arista.

$$\# V (G) = \# V (H) + \# V (K) - 2 \text{ y } \# E (G) = \# E (H) + \# E (K) - 1;$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\# E (G) &= \# E (H) + E (K) - 1 \\ &= 3 \# V (H) - 6 + 3 \# V (K) - 6 \\ &= 3 \# V (H) + 3 \# V (K) - 13 \\ &= 3 (\# V (H) + \# V (K) - 2) - 7 \neq 3 \# V (G) - 7\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción.

Se concluye que G no puede ser la fusión de dos grafos H y K en dos vértices.

Un argumento similar se aplica, pero más fácil si G es 1 -conexo, pero no 2 -conexo. ///

Corolario 3.7.3: *El teorema de Kuratowski's y el teorema de Fary's son para grafos que no sean 3-conexo.*

3.8 ALGORITMO

El número de pasos requeridos por la esfericidad de Naive (o Planaridad) el algoritmo propuesto en la capítulo 3, es una función exponencial del número n de vértices de un grafo G .

Dado que el diseño de *Thomassen* para una demostración del teorema de *Kuratowski's* conduce a un algoritmo cuyo tiempo de ejecución es una función polinómica de n .

En primer lugar, suponemos que el grafo G a analizar es *3-conexo*. En ese caso, según el **Teorema 2.2.1**, existe una arista e de tal manera que la contracción de G en e se obtiene un grafo *3-conexo*. Este paso se repite para el nuevo grafo que sea *3-conexo*, y reiterado hasta que un grafo de *4-vértices* se obtenga.

Análisis de Tiempo de ejecución: Se necesita $n - 4$ aristas, contracciones de convertir un grafo de n vértices en un grafo de *4-vértices*.

Supongamos que antes de cada contracción de aristas, consideramos necesario hacer una búsqueda exhaustiva sobre todas las aristas antes de encontrarnos con una contracción de tal manera que se preserve *3-conexo*.

Dado que el grafo G original tiene n vértices, el número de sus aristas no puede exceder de $(n^2 - n) / 2$. En efecto, si G tiene más de $3n - 6$ aristas, entonces G no es planar.

El número de pasos necesarios para construir el grafo que resultaría de contracción es, el peor de los casos, del mismo orden de magnitud como el tamaño del grafo mismo.

Ingenuamente, se podría pensar en la eliminación de cada subconjunto 2 -vértice posible y comprobar si el resultado es conexo. Sin embargo, los únicos dos vértices subconjuntos que deben ser comprobados son los que contienen el nuevo vértice a la que la arista e se contrajo.

El tiempo necesario para comprobar si el resultado de la eliminación de tal subconjunto 2 -vértice es conexo es a lo sumo lineal en n , si se utiliza una búsqueda en profundidad para comprobar la conexión.

Así, el número total de pasos necesarios para contraer iterativamente el grafo original G hasta un grafo 4 -vértice, en el peor de los casos, el orden de magnitud del polinomio es:

$$(n - 4) * (3n - 6) * n * n$$

En otras palabras, el número de pasos requeridos para *arista-contracción* es parte del algoritmo, es a lo sumo de orden cuatro al número de vértices.

Por supuesto, ya que el grafo completo K_4 es el único grafo 3 -conexo de 4 -vértice, debe ser el grafo que en última instancia se obtenga a partir de la secuencia de las contracciones. En este punto, se incrusta K_4 en el plano, y de forma iterativa revertir cada una de las contracciones, o bien hasta que cierta reversión que se obtiene sea una copia de un grafo de Kuratowski's, o hasta que tengamos una incrustación plana del grafo original G en el plano.

En cada contracción inversa, cuando un vértice v' se divide de nuevo en dos vértices u y v , el ciclo C de vértices adyacentes a v' se verifica por los siguientes:

- 1) Tres vértices del ciclo C adyacente a u y v .
- 2) Cuatro vértices del ciclo C dispuestos de manera que cuando C es recorrida, los adyacentes a u se alternan con los adyacentes a v .

Los incisos 1 y 2 conducen a un homeomorfismo de K_5 y $K_{3,3}$, respectivamente. Si ninguno de los patrones es encontrado, entonces de nuevo v divide a u y v esto conduce inmediatamente a una incrustación plana del grafo resultante.

3.9 OTROS CRITERIOS DE PLANARIDAD

Existen muchos otros, criterio de Planicidad además de los criterios de Kuratowski's. Se dan dos criterios más que se deben a los matemáticos más famosos por su trabajo en la topología y el álgebra, Whitney y MacLane. Aunque de estos criterios no son especialmente útiles, que tienen que ver con las aplicaciones distinguidas de dualidad y la estructura del ciclo de un grafo.

Consideremos el doble grafo G^* para una incrustación plana del grafo G . Cada ciclo C del grafo G separa las regiones de la incrustación en dos colecciones: *aquellos dentro del ciclo y fuera del ciclo*.

En cuanto el doble grafo, la colección C^* de aristas dobles para aquellos en ciclo C , cuando se elimina del grafo G^* , separando G^* en dos partes disjuntas tales que cada arista en C^* va de una parte a la otra. En general, tal colección de aristas se denomina *enlace*. Ninguna de las dos partes se requiere que sea conexa.

Es un poco difícil de ver, pero sigue siendo cierto que, por el contrario, todos los enlaces de G^* corresponde a un ciclo de G . Lo más sorprendente es que esta relación entre un grafo y uno de sus planos duales caracteriza la Planaridad.

Teorema 3.9.1 (Whitney, 1932). *Un grafo G 2-conexo es plano si y sólo si existe un grafo G^* cuyas aristas son uno a uno con las de G tal que los ciclos de G corresponden a enlaces en G^* .*

Teorema 3.9.2 (Mac Lane, 1937). *Un grafo 2-conexo es plano si y sólo si tiene 2-bases.*

CAPITULO 4

APLICACIONES

4 APLICACIONES

4.1 CONCEPTOS TOPOLOGICOS BASICOS

En esta sección se revisaran brevemente algunas definiciones topológicas básicas y hechos necesarios para uso posterior. Todos estos hechos tienen (por ahora) pruebas sencillas y conocidas. Dado que estas pruebas no contienen la teoría de grafos, no se repetirán, nuestro objetivo es recoger con precisión los hechos topológicos que necesitamos, que no requieren pruebas, porque nuestro objetivo por hoy es la teoría de grafos. Por lo que el material que se presenta ahora ayudará a mantener argumentos elementales topológicos en aquellas pruebas al mínimo.

Un segmento de línea recta en el plano euclidiano es un subconjunto de \mathbb{R}^2 que tiene la forma de $\{p + \lambda(q - p) / 0 \leq \lambda \leq 1\}$ puntos distintos $p, q \in \mathbb{R}^2$.

Definición 4.1.1. *Un polígono es un subconjunto de \mathbb{R}^2 , que es la unión de un número finito de segmentos de línea recta y es homeomorfo al círculo unidad. Aquí, como más adelante, cualquier subconjunto de un espacio topológico se asume que llevan la topología del subespacio.*

Definición 4.1.2. *Un arco poligonal es un subconjunto de \mathbb{R}^2 , que es la unión de un número finito de segmentos de línea recta y es homeomorfa a la unidad del intervalo cerrado $[0, 1]$.*

Las imágenes de 0 y de 1 en un homeomorfismo son los extremos de este arco poligonal, lo que les une y se extiende entre ellos.

En lugar de arco poligonal simplemente se dirá arco. Si P es un arco entre x e y , se denota el conjunto de puntos $P \setminus \{x, y\}$, el interior de P , por P° .

Sea $O \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. Siendo unidos por un arco en O se define una relación de equivalencia en O . Las clases de equivalencia correspondientes son de nuevo abiertas, que son las regiones de O . Un conjunto cerrado $O \subseteq \mathbb{R}^2$ se dice que separa O si $O \setminus X$ tiene más de una región. La frontera de un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^2$ es el conjunto Y de todos los puntos $y \in \mathbb{R}^2$ tal que cada vecindad de y cumple tanto X como $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Note que si X es abierto entonces su frontera se encuentra en $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

La frontera de una región O de $\mathbb{R}^2 \setminus X$, donde X es una unión finita de puntos y arcos, tiene dos propiedades importantes. La primera es la accesibilidad: si x se encuentra en la frontera de O , entonces x se puede vincular a un cierto punto en O por un segmento de línea recta cuyo interior se encuentra totalmente dentro O .

En consecuencia, dos puntos cualesquiera de la frontera de O se pueden enlazar por un arco cuyo interior se encuentra en O . La segunda característica notable de la frontera de O es que separa O del resto de \mathbb{R}^2 .

En efecto, si $\varphi : [0,1] \rightarrow P \subseteq \mathbb{R}^2$ es continua, con $\varphi(0) \in O$ y $\varphi(1) \notin O$, entonces P cumple con la frontera de O por lo menos en el punto $\varphi(y)$ para $y = \inf \{x / \varphi(x) \notin O\}$ el primer punto de P en $\mathbb{R}^2 \setminus O$.

Teorema 4.1.3. (Teorema de la curva de Jordán para polígonos). Cada polígono $P \subseteq \mathbb{R}^2$, el conjunto P tiene exactamente dos regiones, de las cuales una exactamente está acotada. Cada una de las dos regiones tiene el polígono P entero como su frontera.

Lema 4.1.4. Sea $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ conjuntos disjuntos, cada uno de la unión de un número finito de puntos y arcos, y sea P un arco entre un punto en X_1 y uno de X_2 cuyo interior es P° se encuentra en una región O de $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$. Entonces $O \setminus P^\circ$ es una región de $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup P \cup X_2)$. (Véase **figura 4.1**)

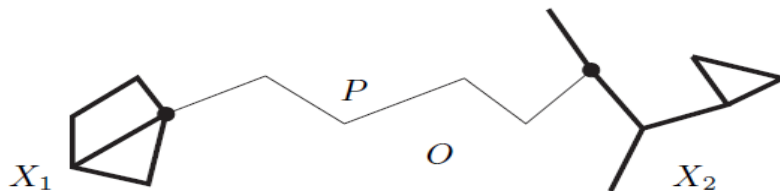


Figura 4.1. P no separa la región O de $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$.

Como es usual, se denota por S^n la esfera n -dimensional, el conjunto de puntos en \mathbb{R}^{n+1} a distancia 1 del origen. La 2-esfera menos su polo norte $(0, 0, 1)$ es homeomorfo al plano, vamos a elegir un homomorfismo fijo tal $\pi : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si $P \subseteq \mathbb{R}^2$ es un polígono y O es la región limitada de $\mathbb{R}^2 \setminus P$, llamémosle $C = \pi^{-1}(P)$ un círculo en S^2 , y los conjuntos $\pi^{-1}(O)$ y $S^2 \setminus \pi^{-1}(P \cup O)$ de las regiones de C .

4.2 GRAFOS PLANARES

Un grafo plano (V, E) define un grafo G en V de una manera natural. Siempre y cuando no pueda haber confusión, vamos a utilizar el nombre de G de este grafo abstracto también para el grafo plano (V, E) , o para el conjunto de puntos $V \cup E$.

Un grafo se dice que es incrustable en el plano, o planar, si se puede dibujar en el plano de manera que sus aristas se cruzan sólo en los extremos. Tal dibujo de un grafo plano G se denomina *incrustación plana de G* . Una incrustación planar \tilde{G} de G en sí puede considerarse como un grafo isomorfo a G ; el conjunto de vértices de \tilde{G} es el conjunto de puntos que representan los vértices de G , el conjunto de aristas de \tilde{G} es el conjunto de líneas que representan las aristas de G , y un vértice de \tilde{G} es incidente con todas las aristas de \tilde{G} que lo contienen.

Por lo tanto, algunas veces nos referimos a una incrustación plana de un grafo plano como un *grafo plano*. La Figura 4.2 b muestra una incrustación planar del grafo plano en la Figura 4.2 a.

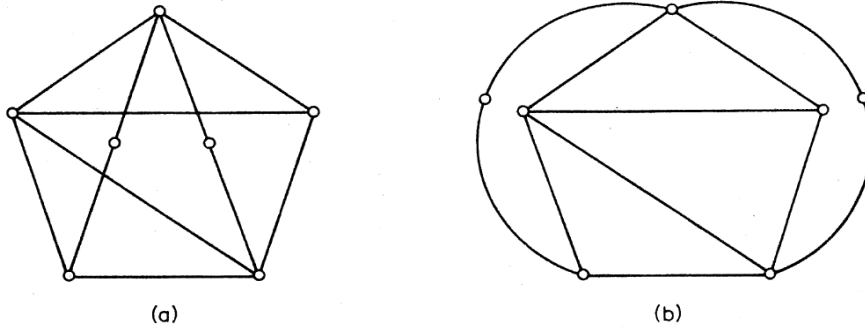


Figura 4.2 (a) Un grafo G plano; (b) una incrustación plana de \tilde{G} .

Es claro que la definición anterior que en el estudio de los grafos planares implica necesariamente la topología en el plano.

Los resultados de la topología que son especialmente relevantes en el estudio de los grafos planares son los que se relacionan con la curva de Jordán. (La curva de Jordán es continua sin *auto-intersección*, cuyo origen y extremo coinciden.).

La unión de las aristas en un ciclo de un grafo plano constituye una curva de Jordán; esta es la razón por la que las propiedades de las curvas de Jordán entran en juego en la teoría de grafo plano. Vamos a recordar un conocido teorema acerca de la curva de Jordán y lo utilizan para demostrar la no planaridad de K_5 .

Sea J una curva de Jordán en el plano. Entonces el resto del plano se divide en dos conjuntos disjuntos abiertos llamados el *interior* y el *exterior* de J . Denotaremos el interior y el exterior de J , respectivamente, por $int J$ y $ext J$, y su clausura por $Int J$ y $Ext J$. Es evidente $Int J \cap Ext J = J$. El teorema de la curva de Jordán afirma que cualquier línea que une un punto en $int J$ a un punto en $ext J$ debe satisfacer J en algún punto (véase figura 4.3). A un que este teorema intuitivamente es obvio la demostración formal es un poco difícil y no se considera en este trabajo.

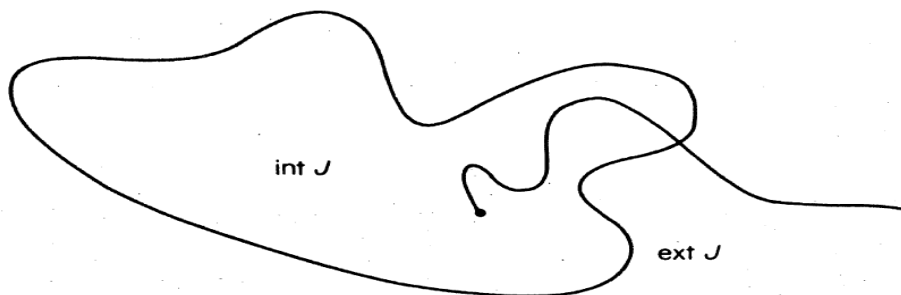


Figura 4.3 Curva de Jordán.

Definición 4.2.1. Una curva diferenciable en \mathbb{R}^2 es una curva de Jordán si puede deformarse (sin romperse) hasta convertirla en una circunferencia (es decir, si es cerrada y simple)

Teorema 4.2.2. (Teorema de la curva de Jordán) Dada una curva de Jordán J , cualquier línea que una un punto de $int J$ con un punto de $ext J$ debe cortar a J en al menos un punto. (Ver Figura 4.4)

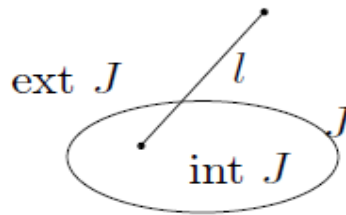


Figura 4.4 La línea l corta a J en un punto.

Teorema 4.2.3 K_5 es no planar.

Prueba. La prueba se realiza por contradicción así que, supongamos que existe un grafo plano G correspondiente a K_5 . Se denota los vértices de G por v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 . Puesto que G es completo, cualquiera par de vértices de G que están unidos por una arista. Así, consideremos el ciclo $C = v_1v_2v_3v_1$ que es una curva de Jordán en el plano, y el punto v_4 debe estar en el $int C$ o en el $ext C$.

Supongamos que $v_4 \in int C$. (El caso donde $v_4 \in ext C$ puede ser analizado de una manera similar). Entonces las aristas v_4v_1, v_4v_2 y v_4v_3 dividen el $int C$ en las tres regiones $int C_1, int C_2$ y $int C_3$, donde $C_1 = v_1v_4v_2v_1, C_2 = v_2v_4v_3v_2, C_3 = v_3v_4v_1v_3$ (véase Figura 4.5).

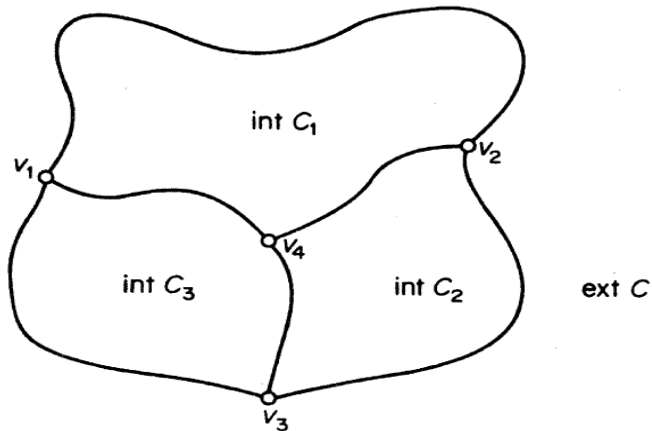


Figura 4.5 Si $v_4 \in \text{int } C$

Ahora v_5 pertenece a una de las cuatro regiones $\text{ext } C$, $\text{int } C_1$, $\text{int } C_2$, y $\text{int } C_3$. Si $v_5 \in \text{ext } C$ entonces, dado que $v_4 \in \text{int } C$, a partir del teorema de la curva de Jordán, la arista v_4v_5 se cortan con C en algún punto. Pero esto contradice la suposición de que G es un grafo plano. En los casos $v_5 \in \text{int } C_i$, con $i = 1,2,3$, se puede analizar de la misma manera. Por lo tanto K_5 no es planar ///

Teorema 4.2.4. $K_{3,3}$ es no planar.

Prueba. Por contradicción. Supongamos que existe un grafo plano G que se corresponde con una representación planar de $K_{3,3}$. Se denotan los vértices de G por v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6 . Como G es bipartito completo, podemos suponer que $(\{v_1, v_3, v_5\}, \{v_2, v_4, v_6\})$ es la partición de su conjunto de vértices y los vértices del primer conjunto están unidos a cualquier otro del segundo conjunto y viceversa.

Así, se puede considerar el ciclo C formado por los vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 en este orden, $C = v_1v_2v_3v_4v_1$ abusando de la notación. C es una curva de Jordán en el plano. El vértice v_5 , al no estar en el ciclo C , pertenece o bien a $int C$ o bien a $ext C$.

Supongamos que $v_5 \in int C$. En este caso, las aristas v_5v_2 y v_5v_4 dividen $int C$ en dos regiones $int C_1, int C_3$, donde $C_1 = v_2v_3v_4v_5v_2$ y $C_3 = v_1v_2v_5v_4v_1$.

(Ver Figura 4.6).

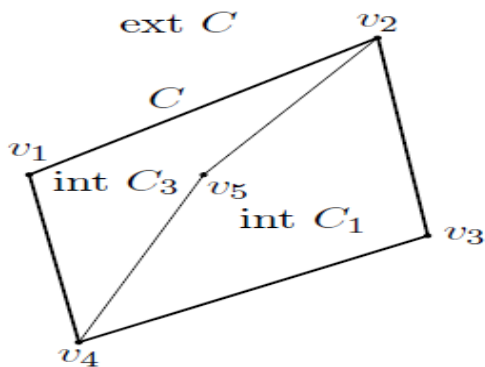


Figura 4.6 Si $v_5 \in int C$

Ahora v_6 pertenece a una de las 3 regiones siguientes: $ext C, int C_1$ o $int C_3$. Si $v_6 \in int C$ entonces, por el Teorema de la curva de Jordán, la arista v_6v_5 se corta con C en algún punto, hecho que contradice la suposición de que G es un grafo plano. En los casos $v_6 \in int C_i$, con $i = 1, 3$, la arista v_6v_i une v_6 , que está en $int C_i$, con el vértice v_i que, por construcción, no está ni en C_i ni en $int C_i$. La arista v_6v_i , por tanto, debe pasar por dos regiones diferentes, obligando a que dicha arista corte a alguna otra arista y llegando a contradicción con la suposición de que G es un grafo plano. ///

Todo grafo no planar contiene una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$. El concepto de una incrustación plana se extiende a otra superficie. Un grafo G se dice que es incrustable en una superficie S si se puede dibujar en S de manera que sus aristas se cruzan sólo en sus extremos; como un dibujo (si existe) se llama una incrustación de G en S .

La figura 4.7 *a* muestra una incrustación de K_5 en el toro, y la figura 4.7 *b* muestra la incrustación de $K_{3,3}$ en la banda de Moebius.

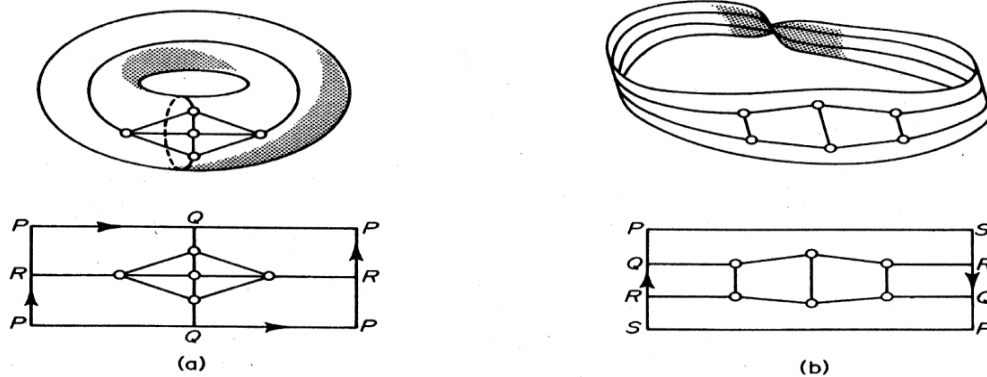


Figure 4.7 (a) Una inmersión de K_5 en el toro; (b) una incrustación de $K_{3,3}$ en la banda de Moebius.

Teorema 4.2.5. *Un grafo G es incrustable en el plano si y sólo si es incrustable en la esfera.*

Prueba. Supongamos que G tiene una incrustación de \tilde{G} sobre la esfera. Elige un punto z que no pertenece a la esfera en \tilde{G} . Entonces la imagen de \tilde{G} bajo la proyección

estereográfica de z es una incrustación de G en el plano. Lo contrario se prueba de manera similar. ///

Lema 4.2.6. *Sea G un grafo plano y e una arista de G .*

- I. Si X es la frontera de una cara de G , entonces sea $e \subseteq X$ o $X \cap e^\circ = \emptyset$.
- II. Si e se encuentra en un ciclo de $C \subseteq G$, entonces e se encuentra en la frontera de exactamente dos caras de G , y éstas están contenidas en caras distintas de C .
- III. Si e no está en ningún ciclo, entonces e encuentra en la frontera de exactamente una cara de G .

Prueba. Probamos las tres afirmaciones juntas. Vamos a empezar por considerar un punto $x_0 \in e^\circ$. Se demuestra que x_0 se encuentra en la frontera ya sea exactamente en dos caras o una exactamente, a medida que e se encuentra en un ciclo de G o no. Luego mostrar que todos los demás puntos en e° se encuentra en la frontera exactamente con los mismas caras como x_0 .

Entonces los puntos finales de e también se encuentran en la frontera de estas caras, simplemente porque cada vecindad de un extremo de e es también la vecindad de un punto interior de e . G es la unión de un número finito de segmentos de líneas rectas, se puede suponer que cualesquiera dos de ellos se cruzan a lo sumo en un punto.

Alrededor de cada punto $x_0 \in e^\circ$ se puede encontrar un disco abierto D_x , con centro x que cumple únicamente con aquellos (uno o dos) segmentos de línea recta que contienen a x . Seleccionemos un punto x_0 interior de un segmento de línea recta $S \subseteq e$.

Entonces $D_{x_0} \cap G = D_{x_0} \cap S$, para $D_{x_0} \setminus G$ es la unión de dos abiertos *medios-discos*. Dado que estos *medios-discos* no cumplen con G , cada uno de ellos se encuentra en una cara de G . Denotemos estas caras por f_1 y f_2 , son las únicas caras de G con x_0 en su frontera, y es posible que coincidan. (Véase figura 4.8)

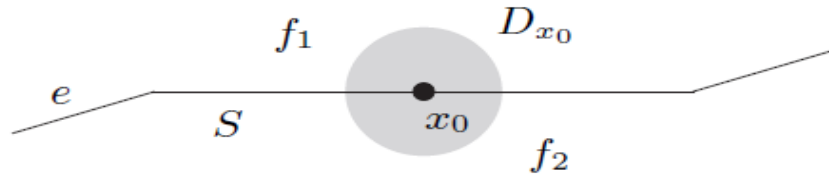


Figura 4.8 Caras f_1, f_2 de G .

Si e se encuentra en un ciclo $C \subseteq G$, entonces D_{x_0} cumple con las dos caras de C (**Teorema 4.1.3**). Las caras f_1, f_2 de G , por lo tanto contienen, caras distintas de C dado que $C \subseteq G$, cada cara de G es un subconjunto de una cara de C y en particular $f_1 \neq f_2$.

Si e no se encuentra en cualquier ciclo, entonces e es un puente y por lo tanto enlaza dos conjuntos de puntos disjuntos X_1, X_2 con $X_1 \cup X_2 = G \setminus e^\circ$. Claramente, $f_1 \cup e^\circ \cup f_2$ es el subconjunto de una cara f de $G - e$.

Por el **Lema 4.1.4**, $f \setminus e^\circ$ es una cara de G . Pero $f \setminus e^\circ$ contiene f_1 y f_2 , por definición de f , por lo que $f_1 = f \setminus e^\circ = f_2$, puesto f_1, f_2 y f son todas las caras de G .

Consideremos ahora cualquier otro punto $x_1 \in e^\circ$. Sea P el arco de x_0 a x_1 contenido en e . Como P es compacto, un número finito de los discos de D_x con $x \in P$ cubierto por P . Vamos a enumerar estos discos como D_0, \dots, D_n en el orden natural de sus centros a lo largo de P ; añadiendo D_{x_0} o D_{x_1} en caso necesario, se puede suponer que $D_0 = D_{x_0}$ y $D_n = D_{x_1}$. Por inducción sobre n , fácilmente se puede demostrar que cada punto $y \in D_n \setminus e^\circ$ puede ser unido por un arco en el interior de $(D_0 \cup \dots \cup D_n) \setminus e$ para un punto $z \in D_0 \setminus e$. (Fig. 4.9).

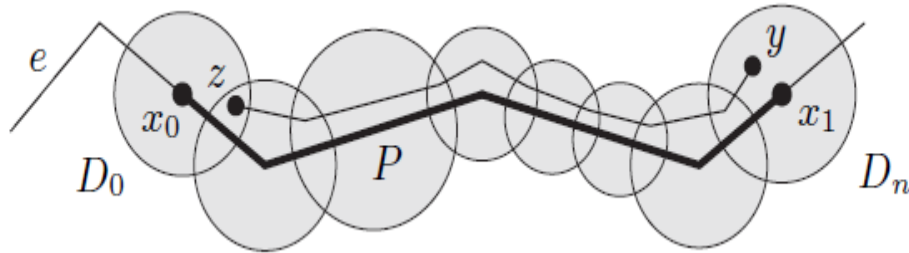


Figura 4.9. Un arco desde y a D_0 , cerrado en P .

Entonces y y z son equivalentes en $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Por lo tanto, cada punto de $D_n \setminus e$ se encuentra en f_1 o f_2 , por lo que x_1 no puede estar en la frontera de cualquier otra cara de G . Dado que los dos *medio-discos* de $D_0 \setminus e$ pueden estar vinculados a $D_n \setminus e$ de esta

manera (al intercambiar las funciones de D_0 y D_n), se encuentra que x_1 se encuentra en la frontera de ambas f_1 y f_2 . ///

Proposición 4.2.7. *Un grafo es 2-conexo si y sólo si puede ser construido a partir de un ciclo por la adición sucesiva de H -caminos a los grafos de H ya construidos.*

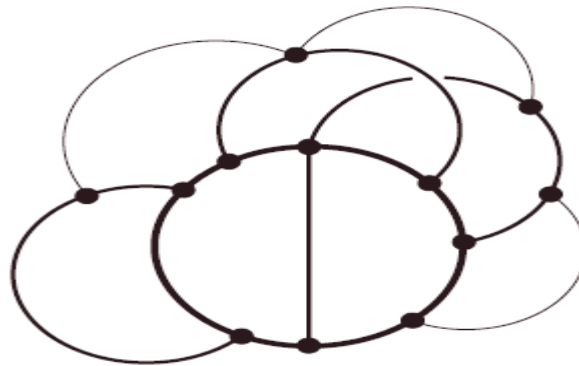


Figura 4.10 La construcción de Grafo 2-conexo.

Prueba. Es evidente que para cada grafo construido como se describe es 2-conexo. Recíprocamente, sea G un grafo 2-conexo. Entonces G contiene un ciclo, y por lo tanto cuenta con un subgrafo H máximo construible. Para cualquier arista $xy \in E(G) \setminus E(H)$ con $x, y \in H$ define un H -camino, donde H es un subgrafo inducido de G . Así si $H \neq G$, entonces por conexidad de G hay una arista vw con $v \in G - H$ y $w \in H$. Como G es 2-conexo, $G - w$ contiene $v - H$ camino P .

Entonces wvP es un H -camino en G , y $H \cup wvP$ es un subgrafo construible de G más grande que H . Esto contradice la maximalidad de H . ///

Lema 4.2.8. Si G es 3-conexo y $|G| > 4$, entonces G tiene una arista e tal que G / e es nuevamente 3-conexo.

Prueba. Supongamos que no hay tal arista e . Entonces, para cada arista $xy \in G$, el grafo G / xy contiene un conjunto S de separación de no más de 2 vértices.

Puesto que $k(G) \geq 3$, el vértice contraído v_{xy} de G / xy , se encuentra en S y $|S| = 2$, i.e. G tiene un vértice $z \notin \{x, y\}$ tal que $\{v_{xy}, z\}$ separan G / xy . Entonces para cualquier par de vértices separados por $\{v_{xy}, z\}$ en G / xy se separan en G por $T = \{x, y, z\}$. Puesto que ningún subconjunto propio de T separa a G , cada vértice en T tiene una vecindad en cada componente C de $G - T$.

Elegimos la arista xy , y el vértice z , y el componente C de manera que $|C|$ es tan pequeño como sea posible, y elegir una vecindad v de z en C . (véase figura 4.11).

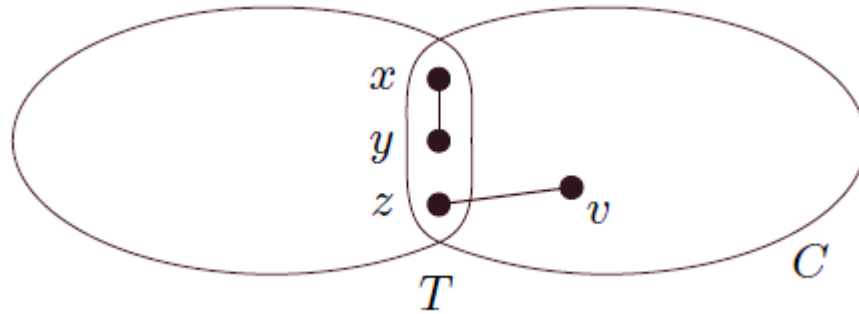


Figura 4.11 La separación de los vértices.

Por hipótesis, G / zv no es nuevamente 3-conexo, por lo que de nuevo hay un vértice w tal que $\{z, v, w\}$ separan G , y como antes de cualquier vértice en $\{z, v, w\}$ tiene un vecindad en todos los componentes de $G - \{z, v, w\}$. Como x e y son adyacentes, $G - \{z, v, w\}$ tiene un componente D tal que $D \cap \{x, y\} = \emptyset$. Entonces, cada vecindad de v en D se encuentra en C (puesto $v \in C$), de forma que $D \cap C \neq \emptyset$ y por lo tanto $D \subsetneq C$ por la elección de D . Lo cual contradice la selección de xy, z en C . ///

BIBLIOGRAFIA.

- Gary Chartrand; Introductory Graph Theory.
- Wilson Robin James; Introduction to Graph Theory. (3rd edición)
- Topological / Jonathan L. Cross. Thomas W. Tucker.
- webdelprofesor.ula.ve/ciencias/jlchacon/materias/discreta/grafos.pdf .
- www.investigacion-operaciones.com/.../Teoría%20de%20Grafos.pdf