

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**  
**ESCUELA DE FÍSICA**



**TITULO:**  
**“INTRODUCCIÓN A LA COSMOLOGÍA”**

**PARA OPTAR AL GRADO DE:**  
**LICENCIADO EN FÍSICA**

**PRESENTADO POR:**  
**MANUEL OVIDIO MORENO AGUIRRE**

**ASESOR:**  
**LIC. FRANCISCO AMÉRICO MEJÍA.**

**SEPTIEMBRE DE 2008**  
**SAN SALVADOR 25 DE MARZO 2008**

## **AUTORIDADES UNIVERSITARIAS**

RECTOR: M. SC. RUFINO ANTONIO QUEZADA SÁNCHEZ

FISCAL GENERAL. DR. RENE MADECADEL PERLA JIMÉNEZ

SECRETARIO GENERAL. LIC. DOUGLAS VLADIMIR ALFARO

## **FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS.**

DECANO: Dr. RAFAEL ANTONIO GÓMEZ ESCOTO

SECRETARIO: LIC. TRINIDAD TRIGUEROS DE CASTRO

DIRECTOR DE LA ESCUELA: LIC. FRANCISCO AMÉRICO MEJÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, 25 DE MARZO DEL 2008

## **AGRADECIMIENTOS**

Queremos expresar nuestros agradecimientos a todas aquellas personas que de alguna forma colaboraron en el desarrollo de este trabajo; en especial a mi asesor, Lic. Francisco Américo Mejía, por el interés que mostraron para hacer posible esta investigación, a los compañeros de la Escuela de Física en San Salvador y a los compañeros del Departamento de Física en Santa Ana.

## **DEDICATORIA**

A DIOS TODO PODEROSO:

Por haberme dado sabiduría y guiado por el buen camino.

A MIS PADRES

Elida Moreno, Agustín Aguirre. (Q. E. P. D) y que un día Dios tenga infinita misericordia a través de un indulto por sus almas.

Por la sabia orientación que me dieron y por el apoyo que me brindaron para realizar unos de mis objetivos en mi vida.

Agradeciendo con todo mi corazón la confianza depositada en mí, ofreciéndole este triunfo como resultado de mi esfuerzo.

A MIS HERMANOS Y DEMÁS

Por el apoyo desinteresado y permanente, así como el ánimo constante en los momentos más difíciles.

MIEMBROS DE LA FAMILIA

En especial para Nelson Moreno y Teresa Aguirre que un día Dios tenga infinita misericordia por sus almas a través de un indulto.

# ÍNDICE

	Pag.
<b>Introducción</b>	i
<b>TEMA I.</b>	
<b>TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD.</b>	<b>1</b>
I.1. Relatividad Clásica.	1
I.1.1. Principio Clásico, Invariancia de las leyes de Newton	1
I.1.2. Transformaciones Galileanas	1
Gráfico 1. Transformaciones Galileanas	2
I.2. Teoría especial de la Relatividad	3
I.2.1. Breve Introducción	3
I.2.2. Postulados de la Teoría Especial de la Relatividad	4
I.3. Transformaciones de Lorentz	5
Gráfico 2. Transformaciones de Lorentz	5
I.3.1. Transformaciones Inversas	5
I.3.2. Matrices de Lorentz	6
I.3.3. Transformación Inversa	7
I.4. Transformaciones de la Velocidad	7
I.5. Transformaciones de la Aceleración	7
I.6. Transformaciones del Momento y Energía	8
I.6.1. Introducción	8
I.6.2. Transformaciones del Momento - Energía	9
I.6.3. Transformaciones Inversas del Momento y Energía	9
I.6.4. Matrices de Momento y Energía	9

I.6.5. Transformaciones Inversas de las Matrices del Momento y Energía	9
I.7. Consecuencias de la transformación de Lorentz	9
I.7.1. Dilatación de la longitud e intervalos temporales	9
a) Dilatación de la longitud	10
Gráfico 3. Dilatación de la longitud	10
b) Dilatación del tiempo	11
Gráfico 4. Dilatación del tiempo	11
I.8. Masa, Equivalencia masa – energía, Energía Cinética, Energía Total y Momento	12
I.8.1. Masa	12
I.8.2. Equivalencia masa-energía	22
Gráfico 5. Equivalencia masa-energía	23
I.8.3. Energía Cinética	24
I.8.4. Energía Total	25
I.8.5. Momento	27
I.9. Evento y Línea del Mundo o Universo.	27
Gráfico 6. Línea de Universo	28
I.9.1. Invariancia de Intervalos	28
I.9.2. Diagramas de Minkowski	30
Gráfico 7. Diagrama de Minkowski	31
Gráfico 8. Ejemplos diagramas de Minkowski	33
I.9.3. Intervalos Tipo Tiempo	33
I.9.4. Intervalos Tipo Luz	34
I.9.5. Intervalo Tipo Espacial	34
I.9.6. Métrica Euclídea	34
I.9.7. Métrica de Minkowski	34
I.10. Tensores en Relatividad Especial	36
I.10.1. Breve repaso tensores	36

I.10.2. Cuadrivectores en espacio de Minkowski	37
I.10.3. Transformación de Lorentz en cuadrivectores	38
I.10.4. Velocidad Cuadridimensional	39
I.10.5. Tetramomento	40
I.10.6. Tensor Energía - Momento	40
I.11. Problemas Resueltos y Propuestos	41
I.11.1. Problemas Resueltos	41
I.11.2. Problemas Propuestos	46
<b>TEMA II.</b>	
<b>INTRODUCCIÓN TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD</b>	48
II.1. Introducción	48
II.2. Geometría no Euclidiana	51
Gráfico 9. Geometría no Euclidiana	52
II.3. Principio de Equivalencia	53
Gráfico 10. Principio de equivalencia	54
II.4. Campos Gravitatorios en la Mecánica no Relativista y Relativista	54
II.5. Coordenadas Curvilíneas	59
II.6. Derivadas Covariantes	62
II.6.1. Derivada Covariante de un vector Contravariante	63
II.6.2. Principio de Acoplamiento Mínimo	64
II.7. Relación Símbolos de Christoffel y el tensor métrico	64
II.8. Geodésicas	66
II.9. Ecuación de Einstein	66
II.10. Principales Tensores usados en la Relatividad General	67
II.11. Predicciones de la Relatividad General	70
II.12. Problemas resueltos y Propuestos	74
II.12.1. Problemas Resueltos	74
II.12.2. Problemas Propuestos	87

## **TEMA III**

<b>COSMOLOGÍA.</b>	91
III.1. Introducción	91
III.2. Presentación breve de los modelos históricos más importantes de Cosmología	93
Gráfico 11. Sistema Ptolomeico	95
III.3. Cosmología Moderna	96
III.3.1. Introducción	96
III.4. Deducción de la métrica de Robertson-Walker	97
III.5. Solución de la ecuación de Einstein, usando la métrica de Robertson- Walker, para obtener los modelos de Friedmann	100
III.6. Deducción de la ecuación del fluido Perfecto	116
III.6.1. Deducción cosmológica del Fluido perfecto (haciendo $c=1$ ).	116
III.7. Deducción de la aceleración en el modelo de Friedmann	117
III.8. Clasificación de los Modelos Cosmológicos	119
Gráfico 12. Modelos cosmológicos	120
III.9. Modelo del Big Bang	120
III.9.1. Introducción	120
III.9.2. Principios básicos donde descansa	121
III.9.3. Definición del Big Bang	124
III.9.4. Grandes Épocas del Modelo del Big Bang	124
Gráfico 13. Grandes épocas del Big Bang	124
Gráfico 14. Nucleosíntesis	127
III.9.5. Consistencias del Big Bang	128
III.9.6. Debilidades del Big Bang	132
III.10. Problemas Resueltos y Propuestos	133
III.10.1. Problemas Resueltos	133
III.10.2. Problemas Propuestos	137
Gráfico 15. Esfera Newtoniana	138



III.11. Modelo Inflacionario	139
III.11.1. En que consiste brevemente el Modelo Inflacionario	139
Gráfico 16. Modelo Inflacionario	139
III.12. Últimas Investigaciones	140
III.12.1. Teoría de Cuerdas	140
III.12.2. Teoría M	141
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>142</b>

# *ÍNDICE DE GRÁFICOS*

	Pag.
1. Transformaciones Galileanas	1
2. Transformaciones de Lorentz	5
3. Dilatación de la longitud	10
4. Dilatación del tiempo	11
5. Equivalencia masa-energía	23
6. Línea del universo	28
7. Diagrama de Minkowski	31
8. Ejemplos Diagramas de Minkowski	33
10. Geometría no Euclidiana	52
11. Principio de Equivalencia	54
12. Sistema Ptolomeico	95
13. Modelos Cosmológicos	120
14. Grandes épocas del Big Bang	124
15. Núcleo Síntesis del Big Bang	127
16. Esfera Newtoniana	138
17. Modelo Inflacionario	139

## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo, pretende con toda humildad ser un material de apoyo para una materia electiva, que se llame: Introducción a la Cosmología o Introducción a la Relatividad General que se imparta en la carrera de Licenciatura en Física, para un nivel de cuarto o quinto año con prerrequisitos de: Física Moderna, Análisis Vectorial y Tensorial, Introducción de Física de Partículas.

Se comienza con el Tema I, La Teoría Especial de la Relatividad, en este tema se hace un brevísimo recordatorio de la Relatividad Clásica: El Principio de Relatividad Clásico, La invariancia de las leyes de la Física y las transformaciones Galileanas; luego se prosigue con una introducción breve de la Teoría Especial de la Relatividad, los postulados donde descansa, las transformaciones de las coordenadas de Lorentz, sus inversas, la representación de las transformaciones de las coordenadas de Lorentz por un cuadrivector posición, la representación matricial y su expresión inversa; a continuación las transformaciones de la velocidad, la aceleración, el momento y la energía.

Las consecuencias de la transformación de Lorentz, como: la contracción de la longitud, dilatación el tiempo, los efectos que produce en: la masa, momento, energía total, energía cinética, el principio de equivalencia masa-energía.

En la siguiente parte se trata de dar un enfoque geométrico o Minkowskiano a la relatividad especial, con los términos siguientes: evento, línea del mundo o universo, invariancia de los intervalos, diagrama de Minkowski, métrica de Euclides, métrica de Minkowski, métrica de Riemann, intervalos tipo: tiempo, luz o null y espacial.

Luego se hace un breve repaso del uso de tensores en relatividad especial y los cuadvectores en el espacio de Minkowski, como: tetravector posición contravariante, covariante, velocidad cuadridimensional y tetramomento.

Por último al final de cada capítulo se agregan los problemas resueltos y propuestos.

En el Tema II, Introducción a la Teoría de la Relatividad General, se comienza con una pequeña introducción y a continuación se tratan los siguientes subtemas en su orden: uso de Geometría no Euclidiana, principio de equivalencia, campos gravitatorios en la Mecánica no Relativista y Relativista, las coordenadas curvilíneas, derivadas covariantes, derivada covariante de un vector contravariante, principio de acoplamiento mínimo, relación entre los símbolos de Christoffel, geodésicas, ecuación de Einstein, los principales tensores usados en la Relatividad General y las predicciones.

En el tema III, de Cosmología, se presentan brevemente los modelos históricos más importantes de Cosmología que han habido, una breve introducción a la Cosmología Moderna, se prosigue el desarrollo en el orden siguiente: deducción de la métrica de Robertson-Walker, la solución de la ecuación de Einstein usando la métrica de Robertson- Walker, para obtener los modelos dinámicos cosmológicos de Friedmann, la deducción de la ecuación del fluido perfecto, las ecuaciones de Friedmann, la clasificación de los modelos cosmológicos, el modelo del Big Bang, su introducción, los principios básicos donde descansa, sintéticamente que es el Big Bang, breve descripción de las grandes épocas del Big Bang, las consistencias, sus debilidades. Brevemente en que consiste el modelo inflacionario, el apoyo que le proporciona al Big Bang y el gráfico de este modelo. Una breve descripción donde se encuentran las últimas investigaciones: La Teoría de Cuerdas y la Teoría M y por último una descripción de la bibliografía usada.

# TEMA I.

## TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

### I.1. Relatividad Clásica

#### I.1.1. Principio Clásico y la Invariancia de las leyes de Newton.

Por Relatividad entendemos o decimos “La apariencia que presenta la naturaleza a un observador y su relación con la apariencia que presenta a otro observador, que se mueve con relación al primero”.

El principio de relatividad implica la inexistencia de un movimiento absoluto en la naturaleza y por lo tanto es una ley general de ella.

La invariancia en mecánica clásica significa que las leyes del movimiento de Newton son invariantes bajo las transformaciones de Galileo, en esta invariancia el tiempo se considera absoluto o sea el mismo en todos los sistemas inerciales.

Por lo que podemos decir que la relatividad Clásica o Galileana se puede resumir así: “Todas las leyes de la naturaleza deben ser las mismas para todos los observadores inerciales que se mueven uno con respecto a otros a velocidad constante.”

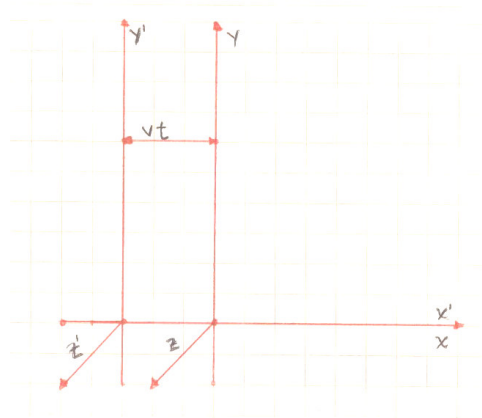
#### I.1.2. Transformaciones Galileanas.

La transformación de Galileo es una transformación de coordenadas y velocidades de un sistema de referencia inercial a otro inercial que deja invariante las ecuaciones de Newton.

Asumiendo que en ambos Sistemas de Coordenadas  $t=t'$  del gráfico 1, obtenemos las transformaciones galileanas.

#### Gráfico 1

#### Transformaciones Galileanas



### Transformaciones Galileanas

$$x' = x - Vt$$

$$y' = y \quad (I.1)$$

$$z' = z$$

Las transformaciones Galileanas Inversas son:

$$x = x' + Vt$$

$$y = y' \quad (I.2)$$

$$z = z'$$

Derivando con respecto al tiempo las transformaciones de Galileo obtenemos:

$$x' = x - Vt$$

$$u'_x = u_x - V$$

$$u'_y = u_y$$

$$u'_z = u_z \quad (I.3)$$

$$u'_z = u_z$$

Derivando de nuevo obtenemos:

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt} = \frac{du_x}{dt} = a_x$$

$$a'_y = \frac{du'_y}{dt} = \frac{du_y}{dt} = a_y$$

$$a'_z = \frac{du'_z}{dt} = \frac{du_z}{dt} = a_z$$

$$\Rightarrow F = ma = ma' = F' \quad (I.4)$$

Esto implica que las leyes de Newton son invariantes bajo las transformaciones Galileanas.

Dentro de las características más importantes de la mecánica clásica podemos mencionar:

- a) El concepto de distancia es relativo
- b) El tiempo no cambia, es absoluto
- c) Vale la composición de velocidades clásica
- d) El intervalo temporal entre dos eventos es igual en todos los sistemas de referencia ya que  $t = t'$

También la mecánica clásica asume que:

- 1) La isotropía del espacio: posee iguales propiedades en todas direcciones.
- 2) La homogeneidad del espacio: se ve igual en cualquier punto donde estemos ubicados (posición).
- 3) El carácter euclidiano del espacio
- 4) La conservación de la masa o materia y de la energía son independientes.

Los numerales 1 y 2 también son asumidos por la Relatividad Especial de Einstein.

## **I.2. Teoría Especial de la Relatividad**

### **I.2.I. Breve Introducción**

Una breve introducción: a finales del siglo XIX, la teoría Electromagnética de Maxwell y la Mecánica Newtoniana eran incompatibles; las ecuaciones de Newton eran invariantes bajo las Transformaciones de Galileo y las ecuaciones de Maxwell no lo eran, el hecho que las ecuaciones de Maxwell no lo fueran podría tener las siguientes causas:

- 1) Las ecuaciones de Maxwell no eran válidas
- 2) Existe un Sistema de referencia preferido (el éter)
- 3) Las transformaciones de Galileo no son las adecuadas

El famoso experimento de Michelson-Morley en 1887 que consistía en probar la existencia del éter y para determinar la velocidad de la luz con respecto al éter. Este famoso experimento demostró que la velocidad de la luz era constante independientemente si el observador estaba en reposo o en movimiento, esto significaba que no existía el sistema de referencia preferido o éter y además que existía una velocidad límite en la naturaleza y la mecánica clásica predecía que si se medía la velocidad de la luz con relación al éter en la dirección del movimiento de la tierra tenía que obtenerse un valor mayor que  $c$  (velocidad de la luz).

La constancia de la velocidad de la luz constituyó el segundo postulado de la relatividad especial y la velocidad límite en la naturaleza el primer postulado.

En 1905 Einstein presentó la Teoría Especial de la Relatividad y condujo a una revisión radical de los conceptos newtonianos de espacio y tiempo, la equivalencia de masa y energía que une la conservación de materia y energía con la famosa ecuación:  $E_t = m_r c^2$ , donde  $E_t$  es la energía total o sea la suma de la energía en reposo mas la energía cinética. Este es uno de los descubrimientos más importantes de la Relatividad Especial y nos dice que la masa o materia es una forma de energía. La más dramática comprobación de la ecuación es la creación de la bomba atómica por medio de la fisión nuclear, la masa de las partes resultantes es menor que la del núcleo original, la diferencia de masas se ha transformado en energía liberada con terribles consecuencias destructivas. La relatividad especial ha jugado un papel muy importante en el desarrollo posterior de la física moderna y los en los avances tecnológicos y científicos actuales.

### **1.2.2. Postulados de la Teoría Especial de la Relatividad**

- a) Principio de Relatividad: Las leyes de la Física son las mismas en los marcos de referencia inerciales.
- b) Invariancia de la velocidad de la luz: La velocidad de la luz en el vacío es constante e independiente si el observador está en reposo o está en movimiento.



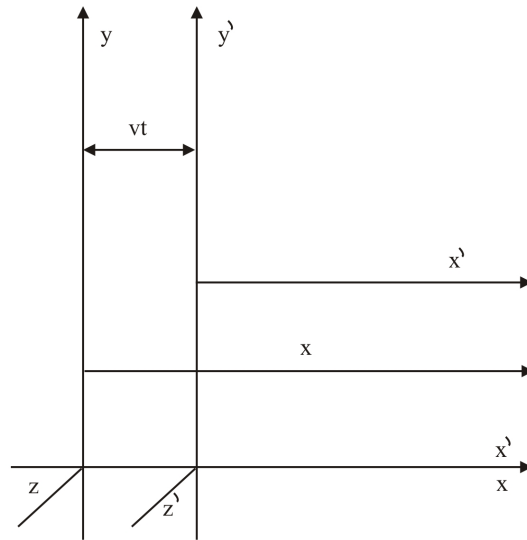
### I.3. Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz son un conjunto de ecuaciones que establecieron la base matemática de la teoría especial de la relatividad de Einstein.

Las transformaciones de Lorentz precisan el tipo de geometría del espacio-tiempo requerida por la teoría especial de la relatividad.

Las Transformaciones de las coordenadas según Galileo no satisfacen el postulado 2 de la relatividad especial de Einstein y para lograrlo Lorentz introdujo las siguientes transformaciones de las coordenadas:

**Gráfico 2. Transformaciones de Lorentz**



$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - Vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)\end{aligned}\quad (I.5)$$

donde  $\gamma$  es el factor de Lorentz y  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  como:  $v < c \Rightarrow \gamma > 1$

### I.3.1. Transformaciones inversas

En las transformaciones inversas se sustituye el signo menos por el signo más.

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + Vt') \\t &= \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right) \\y &= y' \\z &= z' \\ \beta &= \frac{V}{c}\end{aligned} \quad (I.6)$$

### I.3.2. Matrices de Lorentz

$x'^u = [L]_v^u x^v$ , donde  $[L]_v^u$  es la matriz de transformación de Lorentz y es igual a:

$$[L]_v^u = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.7)$$

Luego las transformaciones de Lorentz en forma matricial se escriben así:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (I.8)$$

donde  $[L]$  es la matriz de Transformación de Lorentz y haciendo  $x^2 = x'^2$  ( $y = y'$ ) y

$x^3 = x'^3$  ( $z = z'$ ) se puede transformar en (omitiendo la parte que no cambia):

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \quad (I.9)$$

### I.3.3. Transformaciones inversas

$$x^u = [\bar{L}]_v^u x^v \quad [\bar{L}]_v^u = \frac{1}{[L]_v^u} \text{ es la matriz inversa y:}$$

$$[\bar{L}]_v^u = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.10)$$

Luego las transformaciones inversas se escriben así:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (I.11)$$

### I.4. Transformaciones de la velocidad

Donde  $v'_x, v'_y$  y  $v'_z$  son las componentes de la velocidad en los ejes  $x', y', z'$  y  $v_x, v_y, v_z$  son las componentes de la velocidad en los ejes  $x, y, z$ .

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (I.12)$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \beta^2}$$

### I.5. Transformación de la aceleración

Las componentes de la aceleración en los ejes  $x', y', z'$  se obtienen derivando con respecto al tiempo las velocidades  $v'_x, v'_y, v'_z$

$$\begin{aligned}
a'_x &= \frac{a_x (1 - \beta^2)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)^3} \\
a'_y &= \frac{a_y + (a_x v_y - v_x a_y)}{\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)^3} (1 - \beta^2) \quad (I.13) \\
a'_z &= \frac{a_z + (a_x v_z - v_x a_z)}{\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)^3} (1 - \beta^2)
\end{aligned}$$

## I.6. Transformaciones del Momento y Energía.

### I.6.1. Introducción

El principio de Covarianza de la Relatividad Especial requiere que cualquier magnitud vectorial de la Mecánica Newtoniana venga representada en Mecánica Relativista por un Cuadrivector o Cuadritensor. Así, el Momento Lineal requiere ser ampliado a un cuadrivector llamado Cuadrivector Energía-Momento o Cuadrimomento, que viene dado por cuatro componentes, una componente temporal (energía) y tres componentes espaciales (momentos lineales en cada dirección coordenada).

$$\begin{aligned}
P &= (P^0, P^1, P^2, P^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = \{\gamma m_0 c, \gamma m_0 v\} \\
P^0 &= \frac{E}{c} = m_0 c \gamma \quad (I.14) \\
P &= m v \gamma \\
P^\alpha &= \{\gamma m_0 c, \gamma m_0 v\}
\end{aligned}$$

$m_0$  = la masa en reposo de la partícula es invariante

$$E_i = P^0 c = \gamma m_0 c (c) = \gamma m c (c) = \gamma m c^2 \quad (I.15)$$

### I.6.2. Transformaciones de Momento-Energía.

$$\begin{aligned}P'_x &= \gamma \left( p_x - E \frac{V}{c^2} \right) \\E' &= \gamma (E - V p_x) \\p'_y &= p_y \\p'_z &= p_z\end{aligned} \quad (I.16)$$

### I.6.3. Transformaciones Inversas de Momento -Energía

$$\begin{aligned}P_x &= \gamma \left( p'_x + E' \frac{V}{c^2} \right) \\E &= \gamma (E' + V p'_x) \\p_y &= p'_y \\p_z &= p'_z\end{aligned} \quad (I.17)$$

### I.6.4. Matrices de Momento –Energía

Las dos expresiones anteriores se pueden expresar en forma matricial en las siguientes formas:

$$\begin{bmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (I.18)$$

### I.6.5. Matrices Inversas de Momento -Energía

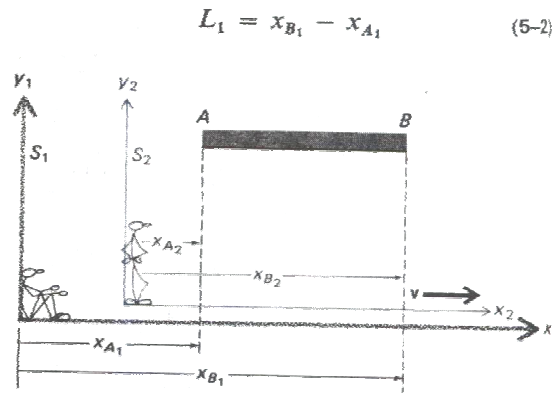
$$\begin{bmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} \quad (I.19)$$

## I.7. Consecuencias de la transformación de Lorentz

### 1.7.1 Dilatación de la longitud e Intervalos temporales

**a) Dilatación de la longitud**

**Gráfico 3. Dilatación de la longitud**



Del marco de referencia  $S_2$  y considerando que la longitud de la barra es de un metro vista desde el marco de reposo  $S_2$ . Si la barra yace paralela al eje  $x$  en este marco, la distancia desde el extremo A, en  $x_{A_2}$ , al extremo B, en  $x_{B_2}$  es  $L_2$ . La longitud de la barra en  $S_2$  es:  $L_2 = x_{B_2} - x_{A_2}$

Ahora miremos esta misma barra como observadores situados en el marco de referencia  $S_1$ . Dejemos que el marco  $S_2$  se mueva con velocidad  $\vec{v}$  en una dirección paralela al eje  $x$  de  $S_1$ . Mirando a la barra como observadores en  $S_1$ , definimos la longitud así:

$$L_1 = x_{B_1} - x_{A_1}$$

Haciendo uso de las transformaciones de Lorentz, llegamos a la expresión matemática siguiente:

$$\begin{aligned} x_{B_2} - x_{A_2} &= \gamma(x_{B_1} - x_{A_1}) \\ L_2 &= \gamma L_1 \end{aligned} \quad (1.20)$$

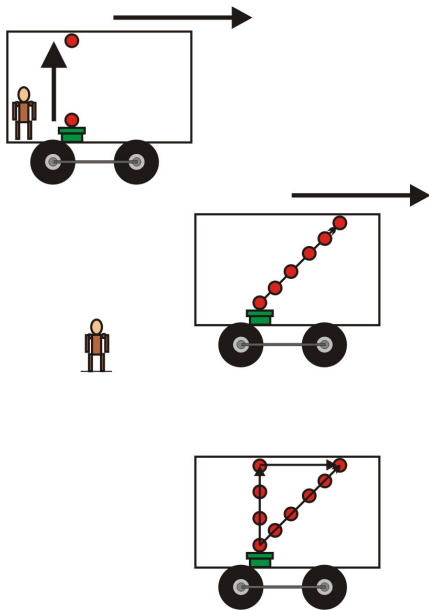
Donde el factor de Lorentz:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  y  $v$  debe ser siempre menor que  $c$ , entonces

$\gamma$  debe ser mayor que 1.

Concluimos que:  $L_1 < L_2$  o sea que la longitud observada cuando la barra en movimiento con respecto al observador en reposo  $S_1$  parece ser más corta, que la longitud observada cuando la barra esta en reposo con respecto al observador en movimiento  $S_2$

### b) Dilatación del tiempo

**Gráfico 4. Dilatación del tiempo**



Imaginemos que en un vagón que se mueve con velocidad  $v$ , próxima a la velocidad de la luz, un viajero enciende una lámpara apuntando al techo y supongamos que dos observadores ven como un fotón que sale de la lámpara choca contra el techo.

1. Observador en el vagón

Observado dentro del vagón el fotón recorre una distancia  $s$  en un tiempo  $t'$ , por tanto  $s = ct'$

2. Observador fuera del vagón

Observado desde fuera del vagón el fotón ha recorrido una distancia  $s'$  en un tiempo  $t$ , por tanto  $s' = ct$

3. Relación entre  $t$  en reposo y  $t'$  en movimiento (en el vagón).

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 s'^2 &= s^2 + d^2 \\
 c^2 t^2 &= c^2 t'^2 + v^2 t^2 \\
 (c^2 - v^2) t^2 &= c^2 t'^2 \\
 t &= \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 t &= \gamma t' \quad (I.21)
 \end{aligned}$$

Como  $\gamma$  es mayor que 1,  $t$  es mayor que  $t'$

## **I.8. Masa, Equivalencia Masa -Energía, Energía Cinética, Energía Total y Momento**

### **I.8.1. Masa**

La cuestión si la masa cambia o no cambia es una discusión de hace mucho tiempo y sobre la cual no hay acuerdo general aún. La disputa se originó después de la formulación geométrica de la relatividad especial por parte de Minkowski y también por parte de los físicos de partículas en la década de 1930, que asumieron que las partículas elementales, como el electrón al ser acelerados no cambiaba su masa en reposo, algunos físicos teóricos de renombre, como: Born, Pauli, De Broglie, se opusieron a esta postura.

Con humildad y reconociendo el genio de Einstein, mi opinión de lo que he leído al respecto es que Einstein, no dejó bien claro este concepto, desconozco los motivos,



porque ya trabajaba en Princeton en E.U. cuando se originó este debate.

En el libro de Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad de Robert Resnick se plantea que se puede trabajar con las dos interpretaciones de la cantidad de movimiento relativista, esto lo apoya Hugo Fernández, Profesor titular de Física Moderna de la Universidad Tecnológica Nacional de Argentina, ya que el tiene un curso de Relatividad Especial disponible en Internet y al cual le escribí por email. También existen otros físicos teóricos que apoyan esta propuesta. Con ello se demostrará que ningún tratamiento es equivocado, sino que las diferencias son cuestiones de gusto.

En la primera interpretación se puede considerar que la masa es una cantidad escalar invariante. Por lo tanto, en la ecuación relativista de la cantidad de movimiento el

factor  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  se relaciona con la velocidad ordinaria, en lugar de hacerlo con la

masa. Es decir, se puede decir  $p = m_0 \left( \frac{dx}{d\tau} \right)$ , donde  $\frac{dx}{d\tau}$  es la velocidad relativista.

Aquí, la masa  $m_0$  es invariante y el intervalo de tiempo propio  $d\tau$  también es invariante.

Tal formulación es útil porque enfatiza cantidades invariantes. Además, concuerda con la idea fundamental de la relatividad, en este sentido la relatividad modifica los conceptos de espacio y tiempo, y de este modo se espera que cambien cantidades cinemáticas tales como espacio y tiempo, mientras que debe conservarse el concepto que se tenía sobre otras propiedades de cuerpos, las cuales no están directamente relacionadas con el tiempo y el espacio, tales como la masa y la carga. Si, por ejemplo,

se compara la ecuación clásica de la cantidad de movimiento:  $p = m_0 \left( \frac{dx}{dt} \right)$ , con la

forma relativista:  $p = m_0 \left( \frac{dx}{d\tau} \right)$ , se ve que la diferencia que hay entre ellas no es

causada por una diferencia del valor de la masa, sino por la diferencia entre el tiempo

propio  $d\tau$  y el tiempo impropio  $dt$ . En verdad, debe notarse que si se identifica el factor  $\gamma$  con la masa o con la velocidad, entonces el origen de este factor en las mediciones de colisión es cinemática; es decir, se debe a la relatividad de las mediciones de tiempo.

En la segunda interpretación y es la que asumo, la masa de un cuerpo o partícula es una medida de su inercia y depende de su contenido de energía. La inercia es una medida de la resistencia que opone un cuerpo para cambiar el estado de movimiento o de reposo. Existe también la inercia térmica que mide la dificultad con la que un cuerpo cambia su temperatura al estar en contacto con otros cuerpos o ser calentado. La inercia térmica depende de la cantidad de masa y de la capacidad calorífica.

La masa relativista, la representaremos así  $m_r$  y la masa en reposo o invariante como  $m_0$ .

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (I.22)$$

La cantidad de movimiento la escribo así:

$$P = m_r v = \gamma m_0 v \quad (I.23) \quad \text{donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ y afectaría a la masa en reposo.}$$

$$\text{La energía total o relativista como } E_t = m_r c^2 = \gamma m_0 c^2 \quad (I.24)$$

Esta interpretación tiene formas más simples.

En un breve trabajo en Septiembre de 1905 intitulado “¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido de energía?”, Einstein escribe: “Si un cuerpo libera energía  $E$  en forma de radiación, su masa disminuye en  $\frac{E}{c^2}$  “. El hecho de que la energía que sale del cuerpo se convierta en energía de radiación, se llega a la conclusión más general de que la masa de un cuerpo es una medida del contenido de energía. La

teoría ha sido puesta a prueba experimentalmente exitosamente y la radiación conduce inercia entre los cuerpos que la emiten y absorben.

De esto se puede decir que a la energía de reposo se le llame energía interna.

Se sabe que:  $m = \frac{E_t}{c^2}$  de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{1}{c^2} \frac{dE_t}{dt} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{1}{dt} (K + m_0 c^2) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{dK}{dt} \end{aligned}$$

De donde:  $\frac{dK}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt}$  (1.25)

Lo cual indica que un cambio en la energía cinética de una partícula origina un cambio proporcional en su masa (relativista). Es decir, que la masa y la energía son equivalentes, difiriendo sus unidades en un factor  $c^2$ . Si se considera a la energía cinética de un cuerpo como una forma de energía externa, entonces la energía de la masa en reposo puede considerarse como la energía interna. Esta energía interna consiste en parte, de movimiento molecular, que cambia cuando el cuerpo absorbe o emite energía térmica, o bien, energía potencial intermolecular, que cambia cuando se producen las reacciones químicas como disociación o recombinación. La energía interna también puede manifestarse como energía potencial atómica, que puede cambiar cuando un átomo absorbe radiación y se excita o emite radiación y se desexcita, o como energía potencial nuclear, que puede cambiar por reacciones nucleares. Sin embargo, la mayor contribución a la energía interna, es la energía total de la masa en reposo proporcionada por las partículas fundamentales, a quienes se considera como la fuente primaria de la energía interna.

De la expresión para la masa relativista:

$$m_r = m_0 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = m_0 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{2} m_0 v^2 \right) + \dots \quad (I.26)$$

Esto demuestra que la masa relativista de una partícula moviéndose lentamente excede a la masa en reposo en  $\frac{1}{c^2}$  veces la energía cinética.

Este aumento bien pequeñísimo nunca ha sido observado en colisiones elásticas clásicas en los laboratorios<sup>1</sup>.

También si la velocidad aumenta grandemente, la masa en exceso aumenta.

Un cambio en la energía cinética contribuye a la masa relativista  $\frac{dK}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt}$ , esto implica que los fotones que son radiación electromagnética deben poseer masa relativista, por poseer solamente energía cinética (energía en reposo cero), aunque también se propone que el fotón encerrado en una caja debe tener masa en reposo.<sup>2</sup>

Entonces todas las formas de energía deben tener masa.<sup>3</sup>

Por lo tanto cualquier masa es un recurso para el campo gravitacional y los fotones deben tener un campo gravitacional.

Si se calcula la masa del fotón por medio de la expresión relativista:  $m_r = \frac{E_\gamma}{c^2}$  desde los rayos gamma,  $\mathbf{x}$ , ultravioleta, visibles, tv-radar, etc.

---

<sup>1</sup> Ver capítulo 6, Relativity, Special, General and Cosmological, 2 Ed. Rindler, Oxford, 2006.

<sup>2</sup> Ver capítulo 4, Mechanics of Special Relativity, del libro Relativity : An Introduction to Special and General Relativity, 3Ed., de Hans Stephani, Cambridge, 2004.

<sup>3</sup> Ver capítulo 4. The elements of relativistic mechanics del Libro Introducing Einstein's Relativity, Ray D'Inverno, Oxford University Press, 1998.

Se obtienen los resultados:  $4.4 \times 10^{-27}$ ,  $2.2 \times 10^{-28}$ ,  $4.4 \times 10^{-31}$ ,  $3.1 \times 10^{-33}$  gramos, estos resultados estarían de acuerdo con la expresión relativista:

$$E_i = m_r c^2 \quad (1.27)$$

$$dE_r \propto dm$$

La energía relativista es proporcional a la masa relativista y la constante de proporcionalidad es la velocidad de la luz al cuadrado, a medida que va disminuyendo la energía va aumentando la masa en el espectro electromagnético y apoyaría el viejo dilema que la luz o radiación electromagnética es dual y los cambios de frecuencia que experimentan los fotones, por ejemplo, cuando interactúa con un electrón libre (efecto Compton).

Un fotón es la unidad mínima de energía electromagnética asociada a una longitud de onda específica. Un fotón es tanto una partícula como una onda.

La luz es una perturbación eléctrica y magnética que viaja por espacio, su energía es transportada por fotones y tiene comportamiento dual materia o corpúsculo (fotón) y como onda cuando muchos fotones viajan en la misma dirección y con la misma energía.

Así el principio de equivalencia de masa-energía de la relatividad especial de Einstein, no incluye solamente la cinemática, sino la mecánica (masa y energía) y otras áreas de la física como: el electromagnetismo, la relatividad general, la física de partículas, etc.

En las últimas ediciones de los libros de Física de Serway, Tipler se plantea el no uso de la masa relativista, pero no hay una respuesta clara, cuando dicen lo siguiente: “ En condiciones relativistas cuando la velocidad  $v$  de una partícula es paralela a la

fuerza  $F$  y a la aceleración  $a$  y que viene dada por la ecuación:  $a_{\square} = \vec{F} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$

(1.28) . Vemos que cuando la rapidez de la partícula se aproxima a  $c$ , la aceleración causada por cualquier fuerza finita se aproxima a cero. En consecuencia, es imposible acelerar una partícula desde el reposo hasta una rapidez  $u \geq c$ . Este argumento demuestra que la disminución de la aceleración, solamente puede ser debida al aumento de la masa inercial o (relativista), esto no lo explican en tales libros.

Y cuando la fuerza aplicada  $F$  es paralela a la aceleración  $a$  y perpendicular a la velocidad  $v$  la ecuación es:  $a = \frac{F}{m}$  (1.29)

La masa es una de las propiedades más importantes de cualquier cuerpo: Nosotros estamos acostumbrados que siempre es invariable. “En particular, la masa no depende de la velocidad”. Esto se debe a que al aplicar una fuerza constante, la velocidad crece proporcionalmente al tiempo de acción de la fuerza.

A velocidades muy grandes, la velocidad no crece proporcionalmente al tiempo de acción de la fuerza, sino más lentamente debido a que existe una velocidad máxima.

A medida que la velocidad del cuerpo se aproxima a la velocidad de la luz, su crecimiento es más lento siendo la fuerza invariable y por lo tanto, la velocidad máxima nunca será superada. Cuando la velocidad del cuerpo llega a ser comparable con la velocidad de la luz, la proporcionalidad entre el tiempo y la velocidad del cuerpo desaparece y la masa ( $m$ ) comienza a depender de la velocidad.

$$m_r = \gamma m_0 \quad (1.30)$$

Donde:  $m_0$  es la masa en reposo o invariante y es independiente del observador a velocidades  $v \ll c$  que es la velocidad con la cual vivimos prácticamente todos los humanos.

La física contemporánea es capaz de comparar la masa de los electrones que se mueven a una velocidad enorme, con la masa de los electrones en reposo. Los resultados experimentales han confirmado totalmente la dependencia entre la masa y la velocidad; además cualquier trabajo efectuado sobre el cuerpo, cualquier aumento de la energía, aumenta su masa. Por esto un cuerpo calentado tiene mayor masa que el cuerpo frío, el resorte contraído tiene mayor masa que el resorte aflojado.

Cuando un electrón en reposo choca con un antielectrón en reposo, después de la colisión desaparece la masa del electrón y el antielectrón y aparecen dos fotones gamma (energía electromagnética) y en todos los casos de antimateria no se conserva la masa en reposo después del choque (protón con antiprotón, etc.).

En las dos ecuaciones relativistas:

$$P = \gamma m v \quad \text{y} \quad P = \gamma m_0 v \quad (I.31)$$

En la primera interpretación el factor  $\gamma$  va ligado a la velocidad y en la segunda interpretación va ligado a la masa, no existe ninguna objeción.

$$E = m_0 c^2 \quad (I.32)$$

En la primera interpretación, como la masa es invariante, no podemos llegar a la equivalencia de masa y energía o sea no podemos hacer el desarrollo; porque tendríamos dos constantes la masa y la velocidad de la luz.

Usando la segunda interpretación, donde la masa va ligada con el factor gamma.

$$E_t = m_r c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 + m_0 \frac{v^2}{2} + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

el tercer término es siempre más pequeño que el segundo y se desprecia, usando la fórmula del binomio:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

$$E_t = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (I.33)$$

el primer término es la energía de reposo y el segundo término, la energía cinética clásica.

Como resultado se obtiene: La energía total = energía en reposo + la energía cinética clásica newtoniana, esto demuestra que la Relatividad Especial coincide con la Mecánica Clásica, cuando las velocidades son pequeñas.

Si la masa fuera invariante como lo propone la primera interpretación, no se cumpliría esta última deducción y no se cumpliría la famosa ecuación de Einstein de la equivalencia de masa (materia) y energía:  $E_t = m_r c^2$  esta ecuación nos dice que la masa o materia es una forma de energía y además en la ecuación:  $E = mc^2$  si  $c^2$  es constante y m es una constante, entonces la energía también sería constante y sabemos que la energía no es constante se transforma de una forma a otra.

La revolución de Einstein no fue solamente con los conceptos de espacio y tiempo, sino de masa y energía, porque la mecánica clásica consideraba la masa o materia una cosa y la energía otra cosa y la conservación de la materia y la energía aparte, pero la famosa ecuación de la relatividad especial:  $E = mc^2$ ; reúne la conservación de materia y energía en una sola y por lo tanto podemos transformar materia en energía o viceversa(cualquier clase de energía) y decir que la masa es una forma de energía



y además si consideramos  $E = mc^2$ , donde la masa es un invariante y  $c^2$  una constante, esto implicaría que la energía es constante, pero si matemáticamente lo expresamos así:  $E \propto m$  podemos decir que la energía es proporcional a la masa y la constante de proporcionalidad sería la velocidad de la luz.

Que debido a que el coeficiente de proporcionalidad entre el cambio de masa y el cambio de energía es demasiado pequeño, y para aumentar la masa de un cuerpo en un gramo, se necesita comunicar a este cuerpo una energía de 25 millones de kilovatios-hora. Y por eso es precisamente por lo que el cambio de masa de los cuerpos, en condiciones normales, es sumamente insignificante y se escapa de las mediciones más exactas.

Por lo que la masa se podría considerar invariante o replantear el concepto de masa y decir masa-energía en vez de solamente masa en relatividad especial.

- masa válida para todas las partículas, incluyendo las que se mueven a la velocidad de la luz:

$$m_r = \frac{E_t}{c^2} \quad (I.34)$$

$m_r$  = masa de cualquier partícula,  $E_t$  = energía total,  $c^2$  = es la velocidad de luz al cuadrado.

- masa para partículas no masivas (fotones)

$$m_r = \frac{h\nu}{c^2} \quad (I.35) \quad (\text{R.V. Pound y G. A. Rebka, Jr., efectuaron en 1960 un}$$

experimento valiéndose del efecto Mossbauer y encontraron que la masa de un fotón moviéndose a la velocidad de la luz, la única a la que puede viajar, está dada

$$\text{por } m = \frac{h\nu}{c^2} \quad (I.36) \quad \text{de acuerdo con la ecuación } E = h\nu = mc^2 \quad (I.37).$$

El efecto Mossbauer permite determinar con muchísima precisión cambios pequeñísimos de la energía de fotones gamma.

### **I.8.2. Equivalencia masa- energía:**

La más célebre fórmula en la historia de la ciencia, conocida como Principio de Equivalencia entre masa y energía:  $E = mc^2$  y nos dice que la masa es una forma de energía a diferencia de la mecánica de Newton que las consideraba diferentes.

Calentar un sistema macroscópico, darle cuerda a un reloj, aumentar la velocidad de una partícula, o la absorción de radiación por parte de un gas, son distintos ejemplos de procesos que provocan un incremento de la inercia (masa) del sistema que se trate, que cumple con:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

Siendo  $\Delta E$  la energía entregada al sistema en el proceso. La magnitud que mide la inercia es la masa relativista.

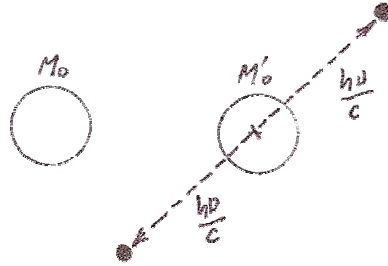
Por supuesto que si el sistema pierde energía por algún proceso cualquiera (radiación, enfriamiento, etc.), el sistema disminuye su masa de acuerdo con la misma relación.

La producción de energía en los procesos de fisión nuclear (reactores y centrales nucleares) y fusión nuclear y otros muchos procesos (como la fabricación de la bomba atómica) son explicables por medio de esta revolucionaria hipótesis.

Un ejemplo de la equivalencia de masa – energía y la dependencia de la masa en reposo de la energía interna es el siguiente:

Consideremos un sistema aislado consistente de un núcleo atómico en estado excitado. Nos situamos en el marco en que el núcleo está en reposo. Supongamos que el núcleo decae a su estado fundamental emitiendo dos fotones de la misma energía y en direcciones opuestas como se representa en la siguiente figura.

### Gráfico 5. Equivalencia masa-energía



En el sistema del núcleo el momento inicial es nulo (núcleo en reposo), y en el final los momentos de los dos fotones se cancelan por lo que el núcleo continúa en reposo.

Para que el momento se conserve en cualquier sistema inercial es necesario que la cuarta componente  $p^0 = E/c$  también sea independiente del tiempo. Antes del decaimiento ésta es:

$$E = M_0 c^2$$

Luego del decaimiento está formada por la energía del núcleo, que continúa en reposo y la de los dos fotones que se llevan la excitación  $\Delta E_{\text{int}}$  del núcleo:

$$\begin{aligned} E &= M'_0 c^2 + 2h\nu \\ &= M'_0 c^2 + \Delta E_{\text{int}} \end{aligned}$$

La masa en reposo del núcleo ha cambiado de la siguiente manera:

$$M'_0 - M_0 = \Delta M_0 = -\frac{\Delta_{\text{int}}}{c^2} \quad (I.38)$$

Este resultado nacido de la propuesta de que el momento  $\vec{P}$  de un sistema aislado se conserva con en el tiempo nos dice que la masa en reposo de un sistema depende de su energía interna. Este es el caso cuando un núcleo se libera de la energía  $\Delta_{\text{int}}$  mediante la emisión de de dos fotones, su masa inercial disminuye en la cantidad  $\frac{\Delta_{\text{int}}}{c^2}$ .

Un caso más general es cuando un núcleo excitado inicialmente en reposo decae emitiendo un solo fotón.

### I.8.3. Energía Cinética

La energía cinética, o sea el trabajo neto hecho sobre la partícula, es

$$K_c = \int_0^r F \bullet dr \quad (I.39)$$

Donde:  $K_c$  = energía cinética

$F$  = Fuerza

$dr$  = desplazamiento

$$K_c = \int_0^r \frac{m_0}{\left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{3/2}} \frac{dv}{dt} \bullet dr$$

Ya que:  $dr = v dt$ ,  $v \bullet dv = v dv$ ,  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Tenemos:  $K_c = \int_0^v \frac{m_0}{\left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{3/2}} v dv$

Que integrado da:

$$K_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} - m_0 c^2$$

$$K_c = m_r c^2 - m_0 c^2 \quad (I.40)$$

$$K_c = E_r - E_0$$

$$K_c = (m_r - m_0) c^2 \quad (I.41)$$

De donde la energía cinética es igual a la energía total relativista menos la energía en reposo o  $K_c = \Delta m c^2$  la energía cinética ser igual al cambio de masa por la velocidad de la luz al cuadrado.

#### I.8.4. Energía total

Donde  $E_t = m_r c^2 =$  energía relativista total

$$E_t = E_o + K_c$$

$$E_t = m_0 c^2 + K_c \quad (I.42)$$

$$E_t = E_0^2 + P^2 c^2$$

La energía relativista total se puede representar de las tres formas anteriores.

Donde la energía relativista total es igual a la energía en reposo más la energía cinética.

$E_0 = m_0 c^2$  la energía en reposo es igual a la masa en reposo por la velocidad de la luz al cuadrado.

$m_o$  es la masa en reposo es invariante en cualquier marco de referencia.

De la última expresión se puede ver que  $P^2 c^2$  también representa la energía cinética.

Desarrollando la energía relativista total  $E_t$ :

$$E_t = m_r c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 + m_0 \frac{v^2}{2} + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

el tercer término es siempre más pequeño que el segundo y se desprecia, usando la fórmula del binomio:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

$E_t = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$  (I.43) , el primer término es la energía de reposo y el segundo término la energía cinética clásica.

Como resultado se obtiene: La energía total = energía en reposo + la energía cinética clásica newtoniana, esto demuestra que la Relatividad Especial coincide con la Mecánica Clásica, cuando las velocidades son pequeñas.

La física prerrelativista conoce dos principios de conservación fundamentales: el de conservación de la masa y el de la energía; la teoría de la relatividad los funde en uno solo: la conservación de masa-energía.

- 1) La conservación de la energía sale de la uniformidad del tiempo.
- 2) La conservación de la cantidad de movimiento es consecuencia de la homogeneidad del espacio.
- 3) La conservación del momento angular resulta de la isotropía del espacio.

Deducción de la energía relativista total  $E_t$

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m_r \left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = m_0 \quad \text{elevando al cuadrado ambos lados}$$

$$m_r^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2$$

$$m_r^2 \left( \frac{c^2 - v^2}{c^2} \right) = m_0^2$$

$$m_r^2 (c^2 - v^2) = m_0^2 c^2 \quad \text{trasladando el término } c^2 \text{ a la derecha.}$$

$$m_r^2 c^2 - m_r^2 v^2 = m_0^2 c^2 \quad \text{multiplicando ambos lados por } c^2$$

$$m_r^2 c^4 - m_r^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$E_t^2 - (m_r^2 v^2) c^2 = E_0^2$$

$$E_t^2 - p^2 c^2 = E_0^2 \quad (I.44)$$

$$E_t^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

$E_t$  = energía total       $E_0$  = energía de reposo       $m_0$  = masa en reposo inercial

$m_r$  = masa inercial relativista       $p^2 c^2$  = energía cinética relativista

### I.8.5. Momento

i.  $p = mv$  (I.45) clásicamente m es invariante para velocidades mucho menores que la velocidad de la luz, que es prácticamente el mundo en que vivimos.

ii.  $p = \gamma m_0 v$  (I.46) para velocidades cercanas a la de la luz.

$m_0$  es la masa en reposo       $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  es el factor gamma y va ligado a la

masa y no a la velocidad.

iii. Cantidad de movimiento de un fotón

$$p = h\lambda = \frac{h\nu}{c} \quad (I.48)$$

### I.9. Evento y línea de mundo o universo

Evento o Suceso: Se define por el lugar que ocurre y por el instante en que ocurre y matemáticamente se define por: (x, y, z, c t).

En el espacio-tiempo, los eventos se representan por puntos, llamados puntos en el Universo y a cada partícula le corresponde cierta línea llamada línea del Universo.

En el gráfico 6 tenemos el movimiento de una partícula en el espacio-tiempo y el tetravector  $u$  es la tangente de la partícula en la trayectoria llamada línea del mundo o universo  $x^\alpha_{(\tau)}$  y representa la derivada del tetravector posición  $U^\mu$  con respecto al tiempo propio  $\tau$  que es el tiempo medido por un observador en movimiento.

**Gráfico 6. Línea de Universo**



**I.9.1. Invariancia de Intervalos.**

Se define un suceso al conjunto  $(x, y, z, t)$  que determinan el punto en el espacio y en el instante en que ocurre. Los sucesos pertenecen a un espacio matemático tetradimensional donde cada punto, llamado punto del Universo, representa un suceso. El movimiento de una partícula puntual en este espacio será una curva denominada curva del Universo.

Expresión matemática del principio de la invariancia de la velocidad de la luz.

Sean  $K$  y  $K'$  dos Sistemas de referencia que se mueven con movimiento relativo uniforme.

Elijamos los ejes de coordenadas de tal manera que  $X$  y  $X'$  coinciden, mientras que los ejes  $Y$  y  $Z$  son paralelos a los ejes  $Y'$  y  $Z'$ ; representemos el tiempo en los sistemas  $K$  y  $K'$  por  $t$  y  $t'$ .



Supongamos que el primer suceso consiste en la emisión de una señal, que se propaga a la velocidad de la luz, desde un punto de coordenadas  $x_1, y_1, z_1$  en el sistema  $K$  y en el instante  $t_1$  de este mismo sistema. La propagación de esta señal se observa desde el sistema  $K$ . Supongamos que el segundo suceso consiste en la llegada de la señal al punto  $x_2, y_2, z_2$  en el instante  $t_2$ . La señal se propaga con la velocidad  $c$ ; la distancia recorrida por ella es:  $c(t_2 - t_1)$  Pero, esta misma distancia es igual a:

$$\left[ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right] = c^2 (t_2 - t_1)^2$$

Podemos escribir, por lo tanto la siguiente relación entre las coordenadas de ambos sucesos en el sistema  $K$ :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 = 0 \quad (I.49)$$

Los mismos dos sucesos, es decir. La propagación de la señal, se pueden observar desde el sistema  $K'$ .

Sean  $x'_1, y'_1, z'_1, t'_1$  y  $x'_2, y'_2, z'_2, t'_2$  las coordenadas en el sistema  $K'$  del primer y segundo suceso, respectivamente. Dado que la velocidad de la luz es la misma en los sistemas  $K$  y  $K'$ , tenemos, como en (1):

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2 (t'_2 - t'_1)^2 = 0 \quad (I.50)$$

La cantidad:  $s^2_{12} = \left[ c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \right] = 0$  se llama intervalo entre dos sucesos.

Del principio de invariancia de la velocidad de la luz se concluye, por consiguiente, que si el intervalo entre dos sucesos es cero  $s^2_{12} = 0$ , en un sistema de referencia, es también igual a cero en cualquier otro sistema de referencia:

$$s_{12}^2 = s_{12}'^2 = 0 \Rightarrow s_{12}^2 = s_{12}'^2 = s_{13}'^3 = \dots = 0$$

### **I.9.2. Diagramas de Minkowski**

Los diagramas de Minkowski permiten un enfoque geométrico de la relatividad especial.

Aunque la Teoría Especial de la Relatividad fue presentada por Einstein en 1905, no se convirtió en un modelo popular hasta 1908. Esto fue posible gracias a los trabajos del matemático alemán Hermann Minkowski y que había sido profesor de Einstein, quien desarrolló los Diagramas de espacio-tiempo (geometrización de la teoría especial de la relatividad), la Métrica y las Transformaciones de Lorentz y convirtió el espacio-tiempo de Einstein diferente al espacio y tiempo de Newton.

La descripción espacio-tiempo de Minkowski puede ser visualizada fácilmente como un espacio plano (el típico plano de la geometría euclidiana) donde la dimensión tiempo es perpendicular al plano(x, y, z).

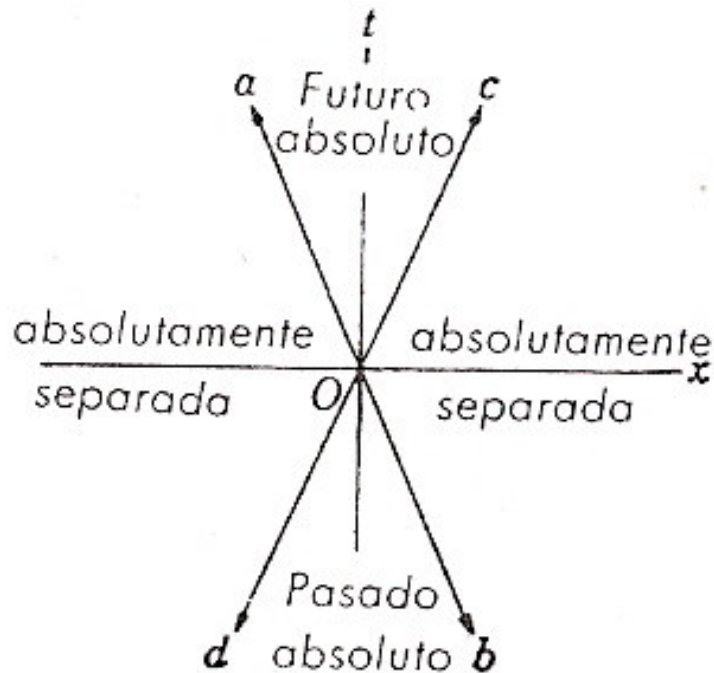
Minkowski demostró que los eventos establecidos en la teoría especial de la relatividad de Einstein pueden ser descritos en forma geométrica usando el espacio-tiempo.

El trabajo de Minkowski tuvo dos efectos importantes.

- 1) Permitió popularizar las ideas de Einstein, ya que su planteamiento geométrico lo hacía más accesible.
- 2) Ayudó a Einstein a visualizar las leyes de la naturaleza con la geometría y en especial la gravedad (sistemas acelerados).

- Ejemplo de un diagrama espacio-tiempo de Minkowski.

**Gráfico 7. Diagrama de Minkowski**



Un cono de luz (o diagramas de Minkowski) es una representación del espacio-tiempo con arreglo a la teoría de la Relatividad Especial. Según dicha teoría, el cono de luz es un modelo útil para describir la evolución en el tiempo de un haz luminoso en el espacio-tiempo de Minkowski. El cono de luz sirve asimismo como representación del principio de causalidad, que enlaza entre sí el principio de causa y efecto. El fenómeno real cuatridimensional (tres dimensiones espaciales más la dimensión temporal) puede visualizarse a través de un gráfico en el cual en el eje horizontal se usa la  $x$  (como la parte espacial) y en el eje vertical la dimensión temporal ( $ct$ ).

El cono de luz se diseña del siguiente modo: Tomemos como origen del sistema de coordenadas espacio-temporales un evento cualquiera  $O$ . Con otras palabras, en el sistema de coordenadas cuatridimensional, cuyos ejes se indican por  $x, y, z, t$ , el punto del universo del evento  $O$  es el origen de de coordenadas. Veamos ahora que relación

liga los demás sucesos con el suceso dado O. Para facilitar la intuición, consideraremos sólo una dimensión espacial y el tiempo, representándolos sobre dos ejes (gráfico). El movimiento rectilíneo y uniforme de una partícula que pasa por  $x=0$  en el instante  $t=0$  se representa por una recta que pasa por O y cuya pendiente respecto del eje t es igual a la velocidad de la partícula. Dado que la velocidad máxima es c, el ángulo entre esta recta y el eje t no puede superar un cierto valor máximo ( $45^\circ$ ). En la figura (7) se representan las dos rectas que corresponden a la propagación de dos señales (con la velocidad de la luz) en sentidos opuestos y que pasan por el suceso O (es decir, que pasan por  $x=0$  en el instante  $t=0$ ). Todas las rectas que representan movimientos de partículas pueden estar sólo en las regiones: a0c y d0b. Sobre las rectas a b y c d, evidentemente las ecuaciones son:  $x = \pm ct$ . Consideremos primero sucesos cuyos puntos de universo se encuentran en la región a0c. Es fácil ver que para todos los puntos de esta región es  $c^2t^2 - x^2 > 0$ . Dicho de otro modo, el intervalo entre un suceso cualquiera de esta región y el suceso t es temporal, están causalmente conectados, pertenecen al futuro o sea que todos los sucesos ocurren después que O y están dentro del cono de luz. Pero dos sucesos que están separados por un intervalo temporal, en ningún sistema de referencia pueden ser simultáneos. Por consiguiente, es imposible encontrar un sistema de referencia en el que un suceso cualquiera de la región a0c ocurra antes que el suceso O. Esta región se puede llamar el futuro absoluto respecto del suceso O. Exactamente de la misma manera, todos los sucesos en la región b O d pertenecen al pasado absoluto respecto del suceso O, es decir que ocurren antes que el suceso O en todos los sistemas de referencia y están dentro del cono de luz.

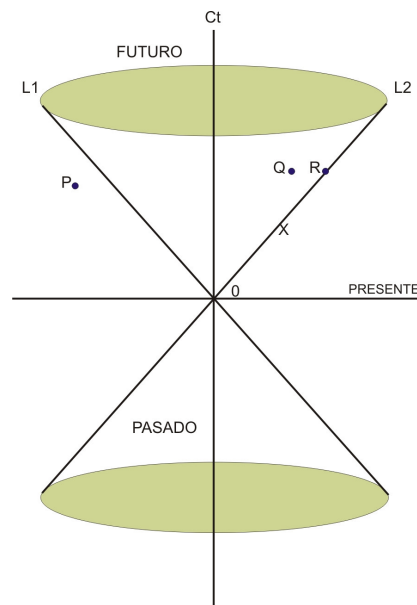
Los sucesos que están en el intervalo:  $c^2t^2 = 0$  a  $45^\circ$  se les llama intervalos tipo luz o null.

Consideremos finalmente las regiones: d0a y b0c. El intervalo entre un suceso cualquiera de esta región y el suceso 0 es espacial:  $c^2t^2 - x^2 < 0$ . Estos sucesos ocurren en puntos diferentes del espacio respecto de cualquier sistema de referencia. Estas

regiones se pueden calificar de absolutamente separadas respecto de O. Sin embargo, los conceptos simultáneos “antes y después” son relativos para estos sucesos. Para un suceso cualquiera de esta región existen sistemas de referencia en los que el suceso ocurre después que el suceso O, sistemas en los que ocurre antes y, finalmente sistemas de referencia en los que dicho suceso y O son simultáneos.

Ejemplos de intervalos en diagramas de Minkowski.

**Gráfico 8. Ejemplos diagramas de Minkowski**



### I.9.3. Intervalo Tipo Tiempo

Se le llama intervalo tipo tiempo al intervalo entre los eventos  $O$  y  $Q$ , en el cual el evento  $Q$  sucede después del evento  $O$  o sea están causalmente conectados, no pueden suceder simultáneamente, esta es la característica mas importante de los intervalos tipo tiempo o temporales sea que se encuentren en el cono de luz absoluto del futuro o del pasado y el valor del intervalo  $ds^2$  es mayor que cero.

En el caso del intervalo  $ds^2$  de los eventos entre  $OQ$  están en el futuro absoluto.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0 \quad (I.57) \rightarrow , \text{ se llama intervalo tipo temporal}$$

#### I.9.4. Intervalo Tipo Luz (Null )

Se llama intervalo tipo luz o Null al intervalo entre los eventos O y R ubicado en la recta  $L_2$  está en el futuro, los eventos están causalmente conectados, pero puede estar ubicado en el pasado también y pertenecer a la recta  $L_1$  y forman un ángulo de  $45^\circ$  con la recta del presente(x).

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0 \quad (I.58) \rightarrow , \text{ se llama intervalo tipo null o luz}$$

#### I.9.5. Intervalo Tipo Espacial

Se llama intervalo tipo espacial aquellos eventos que no están causalmente conectados, como los eventos P y O y el valor del intervalo es negativo.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0 \quad (I.59) , \text{ se llama intervalo tipo espacial (P)}$$

#### I.9.6. Métrica Euclídea

En coordenadas cartesianas el tensor métrico es igual al delta de Kronecker:  $g_{ik} = \delta_{ik}$  donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker y  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ .

El elemento de línea o intervalo  $ds^2$  viene dado por la expresión siguiente:

$$ds^2 = \delta_{ik} dx^i dx^k \quad (I.51)$$

Donde el intervalo:  $ds^2 \geq 0$  (es mayor o igual a cero).

la matriz de la métrica se representa así: 
$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.52)$$

#### I.9.7. Métrica de Minkowski.

El espacio de Minkowski es un espacio tetradimensional afín o sea la relación entre

cada punto, evento o suceso y el espacio-tiempo tetradimensional ( $\square^4$ ) dotado de una métrica seudoeuclídea  $\eta_{\mu\nu}$  y de una topología del espacio euclídeo.

En el espacio de Minkowski la métrica  $g_{ij}$  es igual a la métrica minkowskiana  $\eta_{\mu\nu}$  ( $\eta_{\mu\nu} = g_{ik}$ ) y el intervalo  $ds^2$  viene dado por la expresión:

$$ds^2 = cdt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (I.53)$$

$ds^2 =$  es el intervalo en la métrica de Minkowski,  $cdt^2 =$  es la parte temporal y  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  la parte espacial.

En forma tensorial se escribe así:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (I.54)$$

$\eta_{\mu\nu} =$  la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = [1, -1, -1, -1] = [1, 1, 1, -1]$

$\eta_{\mu\nu} =$  representa la matriz de la métrica Minkowskiana.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.55)$$

representa la matriz de la métrica de Minkowski, la primera es la más usada comúnmente.

El espacio-tiempo de Minkowski es una variedad Lorentziana de cuatro dimensiones, una temporal y tres espaciales de tal manera que forman una 4-variedad con curvatura nula, usada para describir los fenómenos físicos en el marco de la teoría especial de la relatividad de Einstein. Es una métrica seudoeuclídea, ya que en la diagonal de la matriz, existen números negativos y el intervalo  $ds^2$ , puede ser no solamente mayor o

igual a cero, sino también menor que cero y la métrica euclídea solo puede ser mayor o igual a cero y pseudoriemanniana, porque para que fuese Riemanniana tendría que ser también mayor o igual a cero y además el tensor métrico  $g_{ij}$  variar de un punto a otro o sea:  $g_{ij}(x^k)$  ser función de las coordenadas  $x^k$  curvilíneas y n-dimensional.

El intervalo en la métrica Riemanniana se representa así:

$ds^2 = g_{ij}(x^k) dx^i dy^j$  (I.56) , en el que:  $g_{ij}(x^k) \neq \eta_{\mu\nu}$  en el cual  $\eta_{\mu\nu}$  es la matriz de la métrica de Minkowski y  $g_{ij} = f(x^k)$  el tensor métrico de la geometría de Riemann.

Se denomina métrica de Riemann en una región del espacio  $\square^n$  con las coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  a un conjunto de funciones  $g_{ij} = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , siendo  $(g_{ij})$  una matriz definida positiva.

## I.10. Tensores en Relatividad especial

### I.10.1. Breve repaso de tensores

Existen dos maneras de definir un tensor:

- ✓ La manera usual de la física de definir los tensores es en términos de objetos cuyas componentes se transforman según ciertas reglas, introduciendo la idea de transformaciones covariantes o contravariantes.
- ✓ Un tensor es cierta clase de entidad geométrica, que generaliza los conceptos de escalar, vector y operador lineal de una manera que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas elegido.

La teoría tensorial, que es parte de la geometría diferencial, que utiliza los métodos del cálculo diferencial, fue desarrollada por varios matemáticos como Gregorio Ricci-Curbastro, Tullio Levi-Civita, alrededor de 1890 o sea aún antes que Albert Einstein, formulara la Teoría Especial de la Relatividad y la Teoría General de la Relatividad.



- Resumen de tensores

i)  $A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k$  Tensor Contravariante de primer orden.

ii)  $A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$  Tensor Covariante de primer orden.

iii)  $A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}$  Tensor Contravariante de segundo orden.

iv)  $A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}$  Tensor Covariante de segundo orden.

v)  $A^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'^l_m$  Tensor Mixto de segundo orden.

vi)  $g_{ik} =$  tensor métrico.

vii)  $g^{ik} = \frac{Adj \cdot g_{ik}}{g}$  Tensor Recíproco y  $Adj \cdot g_{ik}$  es el adjunto del tensor métrico.

viii)  $g = |g_{ik}|$  es el determinante del tensor métrico.

viii)  $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$  donde  $ds^2$  es el elemento de línea o diferencial de longitud de arco.

### I.10.2. Cuadrivectores en espacio de Minkowski

1. Cuadrivectores: Al conjunto de las cuatro coordenadas de un suceso (c t, x, y, z) se puede considerar como componentes de un vector posición en cuatro dimensiones o

cuadrivector posición y lo representaremos como  $X^u$ , donde  $u=0, 1, 2, 3$ .

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \quad (I.60)$$

En general, se llamará vector cuatridimensional o cuadrivector a un conjunto de cuatro cantidades  $x^u$  que en las transformaciones del sistema cuatridimensional de coordenadas se transforman como las componentes del cuadrivector posición  $x^u$ .

También agregar que los vectores son tensores de primer orden en este caso contravariante.

2.  $X^u = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -x, -y, -z)$  (I.61) se llama Cuadrivector Posición o Tetraposición Contravariante.

3.  $X_u = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -x, -y, -z)$  (I.62) Cuadrivector o Cuadritensor Tetraposición Covariante

La relación entre los diferentes tipos de componentes de los cuadritensores se determina mediante la siguiente regla general: el subir o bajar el índice temporal (0) no cambia signo de la componente, pero el subir o bajar un índice espacial (1, 2, 3) cambia dicho signo. Así

$$\begin{aligned} A_{00} &= A^{00}, A_{01} = -A^{01}, A_{11} = A^{11} & (I.63) \\ A_0^0 &= A^{00}, A_0^1 = A^{01}, A_1^0 = -A^{01}, A_1^1 = -A^{11}, \dots \end{aligned}$$

### I.10.3. Transformación de Lorentz en cuadrivectores

1. Tetravector Posición Contravariante.

$$X^0 = \frac{X'^0 + \frac{V}{c} X'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, X^1 = \frac{X'^1 + \frac{V}{c} X'^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, X^2 = X'^2, X^3 = X'^3 \quad (I.64)$$

2. Tetravector Posición Covariante.

$$X_0 = \frac{X'_0 - \frac{V}{c} X'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, X_1 = \frac{X'_1 - \frac{V}{c} X'_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, X_2 = X'_2, X_3 = X'_3 \quad (I.65)$$

#### I.10.4. $U^u$ Velocidad Cuadridimensional

La cuadrivelocidad es una magnitud vectorial asociada al movimiento de una partícula, usada en el contexto de la teoría especial de la relatividad, que es tangente a la trayectoria de dicha partícula a través del espaciotiempo cuatridimensional y es la derivada temporal de las coordenadas de posición respecto al tiempo propio de la partícula  $U^u$

$$U^u = \frac{dx^u}{dT} \quad (1.66) \quad T \text{ el tiempo propio y representa el tiempo medido por un}$$

observador que se mueve en el espacio-tiempo.

$$U^u = \frac{dx^u}{dT} = \frac{dx^u}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{dx^u}{dt} \gamma$$

$$U^u = \frac{dx^u}{dT} = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma v^1 \\ \gamma v^2 \\ \gamma v^3 \end{bmatrix} \quad U^0 = \frac{dx^0}{dT} = \frac{d(ct)}{dT} = \gamma c, \quad U = \frac{dx}{dT} = \gamma \frac{dx}{dt} = \gamma v$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De  $t = \gamma T$  es el factor de Lorentz,  $T$  el tiempo propio (no de reposo) y  $t$  es el tiempo de reposo.

$$\frac{dt}{dT} = \gamma$$

$$dt = \gamma dT \quad (1.67)$$

La cuadrivelocidad  $U^u = \frac{dx^u}{dT}$  es diferente de la velocidad ordinaria  $v = \frac{dx^u}{dt}$  ya que esta es la derivada de la posición con respecto al tiempo de reposo  $dt$ .

### I.10.5. Tetramomento

-Cuadrivector momento o cuádrimomento: es el producto de la cuádrivelocidad por la masa de la partícula.

El cuádrimomento o tetramomento de una partícula es un momento tridimensional

$\vec{P} = (P^x, P^y, P^z)$  y energía E:

$$P = P^\mu = \left( \frac{E}{c}, P^x, P^y, P^z \right) \quad (1.68)$$

$$P^\mu = mU^\mu = m(\gamma c, \gamma u^x, \gamma u^y, \gamma u^z) = \left( \frac{E}{c}, \gamma P_x, \gamma P_y, \gamma P_z \right) = \begin{bmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 v^1 \\ \gamma m_0 v^2 \\ \gamma m_0 v^3 \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = m_0^2 c^2 \quad (1.70)$$

$$\text{Donde } P^\mu P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{P}|^2 = m_0^2 c^2 \quad (1.71)$$

La  $m_0$  masa en reposo es invariante

$$E = P^0 c = mc^2 = \gamma mc^2 \quad (1.72)$$

la energía total es conservada

### I.10.6. Tensor energía-momento

La manera más directa y más física es a través del tensor  $T^{ik}$  y es el flujo del cuádrimomento  $P^i$  a través de una superficie  $x^k$  constante. Es un tensor contravariante de segundo orden y simétrico.

En la teoría de la relatividad especial, se considera el modelo del fluido más simple (campo de materia) constituido por partículas no interactuantes llamado polvo y sobre las cuales no actúa fuerza externa ni viscosidad y conducción de calor.

$$T^{ij} = \rho u^i u^j \quad (1.73)$$

$T^{ij}$  = Tensor Energía-Momento

$u^i$  = tetravelocidad en la dirección i

$u^j$  = tetravelocidad en la dirección j

$\rho$  = densidad de masa del cuerpo.

## I.11. Problemas Resueltos y Propuestos

### I.11.1. Resueltos.

- 1) Hallar la ley de transformación de las componentes:  $A^{00}$  y  $A^{11}$  de un cuadritensor simétrico  $A^{ik}$  en la transformación de Lorentz.

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} A'^0, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3$$

$$A^{00} = ?$$

$$A^0 \cdot A^0 = \left[ \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right] \cdot \left[ \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right]$$

$$A^{00} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left[ A'^{00} + A'^0 A'^1 \frac{V}{c} + A'^1 A'^0 \frac{V}{c} + \frac{V^2}{c^2} A'^{11} \right]$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left[ A'^{00} + 2A'^0 A'^1 + \frac{V^2}{c^2} A'^{11} \right]$$

Solución.

$$A^{00} = ?$$

$$A^0 \cdot A^0 = \left[ \frac{A^{00} + \frac{V}{c} A^{01}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right] \cdot \left[ \frac{A^{00} + \frac{V}{c} A^{01}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right]$$

$$A^{00} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left[ A^{000} + A^{00} A^{01} \frac{V}{c} + A^{01} A^{00} \frac{V}{c} + \frac{V^2}{c^2} A^{011} \right]$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left[ A^{000} + 2A^{00} A^{01} + \frac{V^2}{c^2} A^{011} \right]$$

$$A^{11} = ?$$

$$A^1 = \frac{A^{01} + \frac{V}{c} A^{00}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad A^2 = A^{12} \quad A^3 = A^{13}$$

$$A^1 \cdot A^1 = \left[ \frac{A^{01} + \frac{V}{c} A^{00}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right] \cdot \left[ \frac{A^{01} + \frac{V}{c} A^{00}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right]$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left[ A^{011} + A^{00} A^{01} \frac{V}{c} + A^{01} A^{00} \frac{V}{c} + A^{000} \frac{V^2}{c^2} \right]$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left[ A^{011} + 2A^{00} A^{01} \frac{V}{c} + A^{000} \frac{V^2}{c^2} \right]$$

- 2) Obtener las transformaciones del cuadrivector de Lorentz como rotación imaginaria en el plano  $x^0 x^1$  y  $Y$  y  $Z$  no cambian.

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

La expresión anterior se puede reducir a:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

Asumiendo que:

$$x'^2 = x^2$$

$$x'^3 = x^3$$

Y si hacemos:

$$\cosh = \gamma$$

$$\sinh = \beta\gamma$$

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

$$i^2 = -1$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Obtenemos: 
$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:  $x'^0 = \cosh\phi - \sinh\phi x^1$

si denotamos  $\phi = i\theta$  tenemos que:  $\cos\phi = \cos\theta$   $\sinh\phi = i\sin\theta$

Por tanto:  $x'^0 = \cos\theta - i\sin\theta$  que es lo mismo que:

$ix'^0 = \cosh i\phi - \text{sen}\theta x^1$ , con lo que queda la expresión:

$$\begin{pmatrix} ix'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \quad \text{que es la expresión de una rotación.}$$

3) Sea  $V^2$  un espacio bi-dimensional Minkowskiano, con componentes contravariantes de el vector de posición  $\vec{X} = (x^0, x^1)$  donde  $x^0 = ct, x^1 = x$  respectivamente.

- Escriba las componentes covariantes del vector de posición:  $\vec{X}$
- Calcule el cuadrado del vector de posición:  $\vec{X}^2$
- Sea  $a^{ik}$  un tensor de componentes covariantes y  $a^i$  y  $b^k$  dos vectores.

Escriba las componentes en la expresión

$$a^i = \alpha_{ik} b^k, i = 0, 1$$

Solución.

- $X_i = (x^0, -x^1)$
- $X^2 = X_i X^i = X_0 X^0 + X_1 X^1 = ct^2 - x^2$
- $$a_0 = \alpha_{0k} b^k = \alpha_{00} b^0 + \alpha_{01} b^1$$

$$b_1 = \alpha_{1k} b^k = \alpha_{10} b^0 + \alpha_{11} b^1$$

4) En un marco de referencia con coordenadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  las componentes de tensor simétrico de segundo orden dado por  $A^{03} = -2, A^{13} = 1, A^{02} = -1$  y

siendo las otras componentes cero. Encontrar el valor de la componente  $A'^{03}$  del tensor en un marco de referencia obtenido por la transformación de coordenadas.



$$x'^0 = 4x^0 - 13x^1 + 4x^2 - 15x^3$$

$$x'^1 = -13x^0 + 14x^1 - 3x^2 + 12x^3$$

$$x'^2 = x^0 - 4x^1 + 11x^2 - 5x^3$$

$$x'^3 = 8x^0 + 14x^1 - 3x^2 + 17x^3$$

Las leyes de transformación del tensor contravariante es dado por:

$$A'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} A^{lm}$$

$$A'^{03} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^l} \frac{\partial x'^3}{\partial x^m} A^{lm} = \left( \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} + \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} \right) A^{02} + \left( \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} + \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} \right) A^{03} + \left( \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} + \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} \right) A^{13}$$

$$[4x14 + (-13)x8]x(-1) + [4x17 + (-15)x8]x(-2) +$$

$$[(-13)x17 + (-15)x14]x1 = -279$$

5) Suponga que  $T^i$  es un vector contravariante en  $\mathbb{R}^2$  y que  $T^i = (x^2, x^1)$  en el sistema  $x^i$ .

Calcular  $T'^i$  en el sistema  $x'^i$ , bajo el cambio de coordenadas.

$$x'^1 = (x^2)^2 \neq 0$$

$$x'^2 = x^1 x^2$$

$$\text{Donde } T'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} T^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^1} T^1 + \frac{\partial x'^i}{\partial x^2} T^2$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix}$$

$$T'^1 = T^1(0) + T^2(2x^2) = 2x^1x^2$$

$$T'^2 = T^1(x^2) + T^2(x^1) = (x^2)^2 + (x^1)^2$$

$$T'^1 = 2x'^2, \quad T'^2 = x'^1 + \frac{(x'^2)^2}{x'^1}$$

### I.11.2. Propuestas

- 1) Calcule  $T'_i$  en el sistema  $x'^i$  si  $V = (T_i) = (x^2, x^1 + 2x^2)$  es un vector covariante bajo la transformación de coordenadas:

$$x'^1 = (x^2)^2 \neq 0, \quad x'^2 = x^1x^2$$

$$T'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} T_k = \frac{\partial x^1}{\partial x'^i} T_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^i} T_2$$

- 2) Si el tensor momento-energía en la relatividad especial viene dado por  $T^{ij} = \rho u^i u^j$  (polvo), demostrar que:

$$T^{ij} = \rho_0 c^2 \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_x}{c} & \frac{u_y}{c} & \frac{u_z}{c} \\ \frac{u_x}{c} & \frac{u_x^2}{c^2} & \frac{u_x u_y}{c^2} & \frac{u_x u_z}{c^2} \\ \frac{u_y}{c} & \frac{u_y u_x}{c^2} & \frac{u_y^2}{c^2} & \frac{u_y u_z}{c^2} \\ \frac{u_z}{c} & \frac{u_z u_x}{c^2} & \frac{u_z u_y}{c^2} & \frac{u_z^2}{c^2} \end{pmatrix}$$

- 3) En un sistema coordinado con coordenadas  $x^u$ ,

$$\text{El elemento de línea invariante es } ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Si las coordenadas se transforman como:  $x^u \rightarrow x'^u$

Demuestra que el elemento de línea es:

$ds^2 = g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu}$ , y exprese  $g_{\mu\nu}$  en términos de las derivadas parciales.  $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}$

Para dos arbitrarios 4-vectores U y V, demuestre que:

$$U \cdot V = U^{\alpha} V^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = U'^{\alpha} V'^{\beta} g_{\alpha\beta}$$

4) Demostrar que la cuadiaceleración  $a^i$  y la tetravelocidad  $u^i$  son perpendiculares entre si.

5) Demuestre que las transformaciones de Lorentz:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \quad y' = y, \quad z' = z$$

Pueden ser transformadas en la forma:

$$t' = t \cosh u - x \operatorname{senh} u$$

$$x' = -t \operatorname{senh} u + x \cosh u$$

Haciendo uso de:  $v = \tanh u$

6) Las componentes de un tensor covariante en coordenadas rectangulares son  $xy, 2y - z^2, xz$ . Hallar sus componentes covariantes en coordenadas esféricas.

7) Demostrar que la contracción del producto externo de los tensores  $A^p$  y  $B_q$  es un escalar o invariante.

## **TEMA II.**

### **INTRODUCCIÓN TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD**

#### **II.1. Introducción**

En 1907 Einstein empezó a tratar de extender la Relatividad Especial a la Relatividad General o sea a sistemas acelerados o gravitatorios, se dio cuenta que la Relatividad Especial no era compatible con la gravedad newtoniana, por ser esta última una interacción instantánea a distancia.

Dos hechos ayudaron a Einstein:

- a) La geometrización de la Relatividad Especial por parte del matemático alemán Hermann Minkowski , le permitió visualizar a Einstein la Relatividad General o sea la gravedad, como la geometrización del espacio-tiempo y no como una fuerza newtoniana.
- b) El principio de equivalencia que consiste en la igualdad de la masa inercial y la masa gravitatoria, que la mecánica de Newton la veía como una casualidad y Einstein creía que había en este principio algo más profundo de la naturaleza.

También agregar que Marcel Grossman, amigo personal y matemático experto en Geometría Diferencial le ayudó a Einstein en la formulación matemática de la famosa Teoría General de la Relatividad en 1915.

De acuerdo con la famosa Teoría General de la Relatividad, la gravedad es una manifestación de la geometría local del espacio-tiempo o sea que la gravedad para Einstein es una teoría geométrica, la materia y energía curvan al espacio; esta teoría difiere de la de Isaac Newton en que éste la considera una fuerza atractiva y de acción instantánea a distancia e inversamente al cuadrado de la distancia. La curvatura del espacio producida por la presencia de materia y energía, significa que la geometría del espacio-tiempo es no euclídea.

La geometría de un espacio se caracteriza a través de su métrica. Una métrica es una definición de la distancia que separa dos puntos cualesquiera infinitamente próximos entre sí en el espacio. Más concretamente una métrica es una forma matemática que nos indica como medir la distancia en un espacio o en un cuerpo geométrico. El espacio a que nos referimos cotidianamente se conoce como euclidiano. Se denomina así por Euclides, matemático griego del 300a. c. que explicó, las propiedades de este espacio en su libro “Elementos” inspirado en la experiencia.

La métrica en un espacio euclidiano se representa por el delta de Kronecker, que se simboliza así:  $\delta_{ij}$  y  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  (II.1)

Y además  $e_i \cdot e_j = g_{ij} = \delta_{ij}$  que es el delta de Kronecker ( $\delta_{ij}$ ) (II.2)

Para un espacio euclidiano bidimensional podemos ocupar el intervalo:  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  donde la representación del elemento distancia ds en función de las coordenadas de los puntos es lo que se llama intervalo y en tres dimensiones, el intervalo viene dado por:  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

El espacio tridimensional plano de Euclides se convierte en la Teoría Especial de la Relatividad en un espacio plano cuatridimensional. La métrica que define este espacio-tiempo plano recibe el nombre de métrica de Minkowski en honor del científico ruso Hermann Minkowski, que fue el primero en usar el tiempo como la cuarta dimensión.

Como la materia y energía curva el espacio-tiempo o en otras palabras la materia (energía) le dice al espacio-tiempo como curvarse o el espacio-tiempo le dice a la materia y energía como moverse, esta curvatura del espacio-tiempo significa que la geometría es no euclidiana y la menor distancia entre dos puntos en un espacio curvo

se le llama geodésica y en los espacios curvos se puede usar varias métricas para solucionar las ecuaciones de campo de Einstein y dentro de ellas mencionamos algunas:

- 1) La solución para el espacio vacío alrededor de una distribución de masa esférica simétrica, estática, es la métrica de Schwarzschild.
- 2) La solución para el espacio vacío alrededor de una distribución de masa de simetría axial en rotación es la métrica de Kerr. Se aplica a una estrella que rota y conduce a la predicción de la existencia posible de un agujero negro en rotación de masa dada M y momento angular L, del cual la energía rotatoria puede ser extraída.
- 3) La solución para un Universo Isotrópico (iguales propiedades en todas direcciones) y Homogéneo (se ve igual en cualquier posición donde estemos), es la métrica de Robertson-Walker.

La famosa Teoría General de la Relatividad formulada por Albert Einstein descansa sobre 4 principios básicos que son:

- 1) Las partículas se mueven en geodésicas que es la distancia más corta entre dos puntos en un espacio curvo (no euclidiano).
- 2) Principio de equivalencia: Describe la aceleración y la gravedad como aspectos distintos de la misma realidad o los efectos de la gravedad son equivalentes a los efectos de la aceleración.
- 3) Principio de la covariación general: la forma de las ecuaciones de la física es la misma independientemente del sistema de coordenadas espacio-temporales usadas para expresar dichas leyes y matemáticamente las ecuaciones deben expresarse en forma tensorial covariantemente. Por ejemplo la ecuación de campo tensorial de Einstein escrita en la siguiente forma:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ij}$$

no esta escrita covariantemente, porque el lado izquierdo de la ecuación está escrita en forma covariante, pero el lado derecho está escrita en forma contravariante; pero si la escribimos de la siguiente manera:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

se puede observar que el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación está escrito en forma covariante y por lo tanto en forma correcta.

#### 4) Ecuaciones del campo de Einstein.

Las ecuaciones de campo de Einstein describen la curvatura del espacio-tiempo producida por la presencia de materia-energía y se escriben tensorialmente así:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

El lado izquierdo de la ecuación representa la geometría del espacio-tiempo y en el se encuentran los tensores de Ricci:  $R_{ij}$ , el tensor métrico  $g_{ij}$  y el escalar de curvatura  $R$  éstos se estudiarán más adelante; el lado derecho representa la materia y energía del universo y en este lado se encuentran: la constante  $\rho_i = \pi$ , la constante de gravitación universal  $G$ , la velocidad de la luz  $c$  y el tensor de momento-energía  $T_{ij}$ .

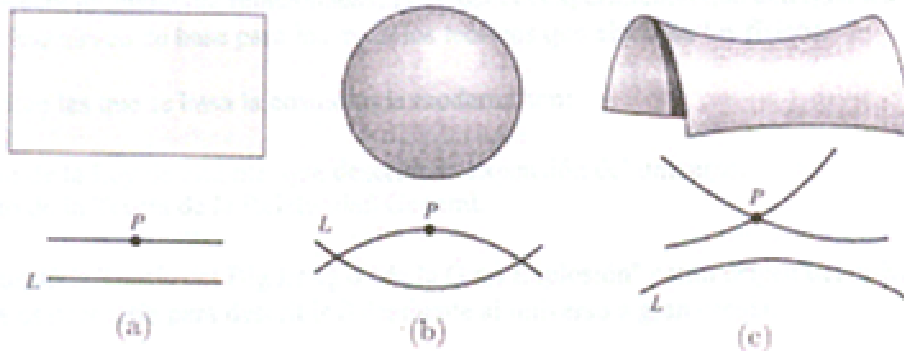
## II.2. Geometría no euclidiana.

La geometría no euclidiana se fundamenta en el quinto postulado de Euclides, que expresado en forma sencilla como nos enseñan en las escuelas primarias y secundarias dice que: “Por un punto exterior a una recta, solo se puede trazar una y una sola paralela a ella y al prolongarse nunca se cortarán”

Dentro de algunos matemáticos que ayudaron a construir la Geometría no Euclidiana, podemos mencionar: Gauss, Riemann, Bolyai, Lobachevski, etc.

- Ejemplos gráficos de geometrías euclidianas y no euclidianas.

### Gráfico 9. Geometrías no euclidianas



Según su curvatura constante, que mide la no planitud del espacio y nos dice cuán alejado se encuentra del euclídeo el espacio, los espacios pueden clasificarse en tres categorías diferentes: a) Espacios euclídeos, de curvatura nula, b) espacios esféricos, de curvatura positiva y c) hiperbólicos, de curvatura negativa.

La curvatura la representaremos con la letra  $K$  y el radio de curvatura con la letra  $r$ .

a) Espacios euclídeos, de curvatura nula ( $K = 0$ ), es el espacio ordinario y en el cual se trabaja desde la escuela primaria hasta el nivel universitario y están basados en los trabajos del matemático griego Euclides en el siglo III a. c y en el cual dos proposiciones importantes son: i) la suma de los ángulos internos en un triángulo es igual a  $180^0$  y ii) dos rectas paralelas no se cortarán por más que se prolonguen, ver figura a).

b) Espacios esféricos de curvatura positiva  $\left(K = \frac{1}{r^2}\right)$ , en éstos la suma de los tres ángulos internos es mayor que  $180^0$  y dos rectas paralelas convergen progresivamente y terminan por cortarse entre sí, difiriendo de la geometría de Euclides, ver figura b).



- c) Espacios hiperbólicos, de curvatura negativa  $\left(K = -\frac{1}{r^2}\right)$ , en éstos la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es menor que  $180^\circ$  y las rectas paralelas divergen progresivamente, como ejemplo es la silla de montar un caballo, ver figura c).

### II.3. Principio de Equivalencia.

El principio fundamental sobre el cual descansa la Relatividad General es el Principio de Equivalencia, el cual expresa que la masa inercial es igual a la masa gravitatoria y que la mecánica clásica lo veía como una casualidad.

Actualmente los físicos expresan que el principio de equivalencia se puede expresar de dos maneras:

- i. El Principio de Equivalencia Débil o Galileano: El cual dice que la masa inercial es igual a la masa gravitatoria o sea:  $m_i = m_g$  y que es equivalente a decir que en un medio sin resistencia: Todos los cuerpos caen con la misma aceleración.

$$\begin{aligned}
 F_i &= F_g \\
 m_i &= m_g \\
 m_i \frac{d^2 r}{dt^2} &= m_g \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} g t^2 \right) \\
 m_i a_i &= m_g g \Rightarrow m_i = m_g \quad (II.3)
 \end{aligned}$$

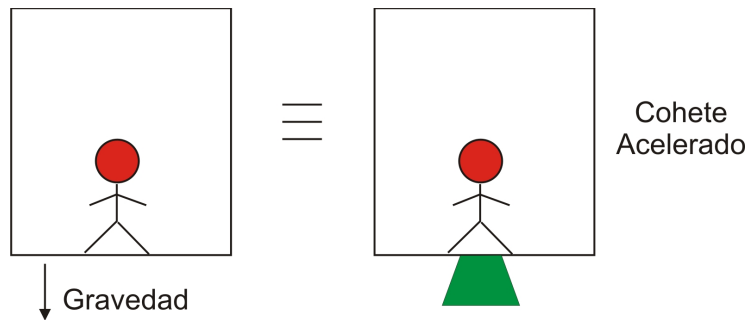
Si la masa inercial es igual a la masa gravitatoria, entonces la fuerza inercia es igual a la fuerza gravitatoria, luego sustituyendo en el lado izquierdo de la ecuación, la fuerza inercial por su equivalente masa inercial por aceleración inercial y en el lado derecho la masa gravitatoria por la aceleración gravitatoria se llega a la conclusión que la masa inercial es igual a la masa gravitatoria.

- ii. El Principio de Equivalencia Fuerte.

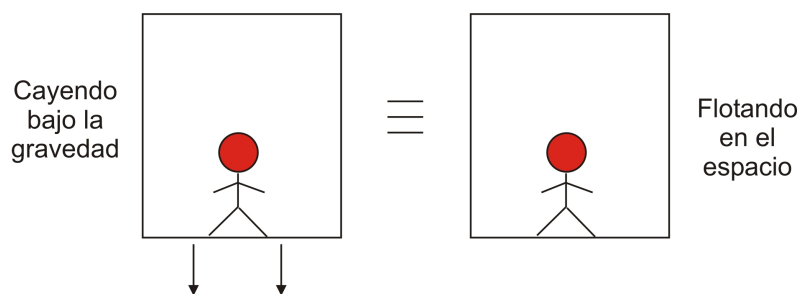
- 1) Que en forma sencilla dice que un Sistema de Referencia no Inercial o Acelerado equivale a un cierto Campo Gravitatorio
- 2) Describe la Aceleración y la Gravedad como aspectos distintos de la misma realidad.
- 3) Los efectos de la gravedad son equivalentes a los efectos de la aceleración.

.-Ejemplo sobre el principio de equivalencia.

**Gráfico 10. Principio de equivalencia**



Imagínese usted mismo en un cuarto cerrado, por el principio de equivalencia usted no podría decir, si usted está sobre la Tierra o en el espacio en un cohete acelerando.



Ahora imagínese usted mismo cayendo en un cuarto cerrado, por el principio de equivalencia usted no podría decir, si usted está cayendo hacia la tierra o flotando en el espacio.

#### **II.4. Campos gravitatorios en la Mecánica no Relativista y Relativista.**

- 1) Mecánica no Relativista.

i) Los llamados Campos Gravitatorios tienen la propiedad fundamental que todos los cuerpos se mueven en ellos de la misma manera con independencia de su masa con tal que las condiciones iniciales sean las mismas.

La ecuación (II.4) es la ecuación de Newton de la fuerza gravitatoria para dos masas que interactúan y la ecuación (II.5) es la ecuación de la fuerza gravitatoria para una masa en un campo gravitatorio.

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} \quad (II.4) \quad F_g = mg \quad (II.5)$$

Igualando la ecuación (II.4) con la ecuación (II.5) obtenemos el campo gravitatorio  $g$  para una masa puntual  $M$ , (ecuación II.6).

$$\begin{aligned} mg &= \frac{GMm}{r^2} \\ g &= \frac{GM}{r^2} \end{aligned} \quad (II.6)$$

La energía potencial se representa en la mayoría de los casos con la letra  $U$  y es igual

a:  $U = -\frac{GMm}{r}$  (II.7) de acá podemos encontrar el potencial gravitatorio:  $\phi_{(r)}$

$$\phi_{(r)} = \frac{U_{(r)}}{m} \Rightarrow \phi_{(r)} = -\frac{GM}{r} \quad (II.8)$$

De donde el campo gravitatorio  $g = -\nabla\phi_{(r)}$  (II.9)

Igualando la fuerza gravitatoria  $\vec{F}_{(r)} = mg_{(r)}$  y  $\vec{F} = m\vec{r}''$  que es la segunda ley de Newton, obtenemos:  $m\vec{g}_{(r)} = m\vec{r}'' \Rightarrow \vec{g}_{(r)} = \vec{r}''$  (II.10) la aceleración de la gravedad es igual a la aceleración de la segunda ley de Newton.

De donde la aceleración de la segunda ley de Newton se puede escribir:

$$\ddot{r} = -\nabla\phi \quad (II.11)$$

La ecuación de Laplace se representa así:

$$\nabla^2\phi_{(r)} = 0 \quad (II.12)$$

el operador laplaciano de segundo orden es igual a cero en ausencia de materia o sea en el vacío.

La ecuación de Poisson se escribe así:

$$\nabla^2\phi_{(r)} = 4\pi G\rho \quad (II.13)$$

, esta es la ecuación de Poisson del potencial newtoniano en presencia de materia, donde  $\pi, G$  son constantes y  $\rho$  es la densidad de la materia.

Las ecuaciones (II.11) y (II.13) son esencialmente las ecuaciones de la teoría de Newton de la gravedad. En el desarrollo de la relatividad especial no se asume la presencia de campos gravitacionales. Existen problemas al tratar de introducir la gravedad newtoniana en las ecuaciones de la relatividad Especial.

Por ejemplo la ecuación  $\ddot{r} \left( \frac{d^2 r}{dt^2} \right) = -\nabla\phi \left( \frac{\partial\phi}{\partial r^i} \right)$  (II.11) está en forma

tridimensional y tendría que ser modificada a una forma cuadridimensional:  $\frac{d^2 x^u}{d\tau^2}$

donde  $\tau$  es el tiempo propio.

La ecuación de Laplace  $\nabla^2\phi_{(r)} = 4\pi G\rho$  (II.13) no es un invariante de

Lorentz, ya que aparece el operador tridimensional laplaciano en lugar del operador cuadridimensional D'Alembertiano:  $\square^2$ , que es la generalización del operador nabla ( $\nabla$ ) a un espacio de Minkowski cuadridimensional. Esto significa que el potencial  $\phi$  responde instantáneamente a cambios en la densidad ( $\rho$ ) a largas distancias, es decir, que el campo newtoniano se propaga con velocidad infinita.

El operador D'Alembertiano se define así:

$\square^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu$  esta forma manifiestamente covariante implica la invarianza de este operador frente a las transformaciones de Lorentz.

En el espacio de Minkowski el D'Alembertiano es:

$$\square^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (\text{II.14})$$

Donde el operador nabla ( $\nabla$ ) es un operador diferencial de primer orden:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

También comparando la ecuación del potencial gravitatorio newtoniano de Poisson (II.13) con la ecuación de campo tensorial de Einstein (II.14)

$$\nabla^2 \phi_{(r)} = 4\pi G \rho \quad (\text{II.13})$$

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G T_{ij}}{c^4} \quad (\text{II.14})$$

El lado izquierdo en la ecuación (II.13) vemos un operador laplaciano tridimensional diferencial de segundo orden  $\nabla^2$  actuando sobre el potencial gravitatorio  $\phi_{(r)}$ ; esto significa que el potencial  $\phi_{(r)}$  responde instantáneamente a cambios en la densidad  $\rho$  a largas distancias, es decir que el campo gravitatorio newtoniano se propaga con velocidad infinita y es proporcional a la densidad de la materia  $\rho$ , ya que  $\pi$  y  $G$  son constantes

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G T_{ij}}{c^4} \quad (\text{II.14})$$

El lado izquierdo de la ecuación (II.14) de Einstein, representa la geometría del espacio-tiempo y el tensor métrico de segundo orden covariante  $g_{ij}(y^k)$  reemplaza al operador laplaciano  $\nabla^2$  de segundo orden actuando sobre el potencial gravitatorio newtoniano  $\phi_{(r)}$  y en el lado derecho la densidad de la materia newtoniana no incluye a la energía, debido a que la mecánica newtoniana consideraba la materia y la energía dos cosas distintas, es reemplazada por el tensor de energía-momento covariante de segundo orden  $T_{ij}$ .

ii) A distancias infinitas de los cuerpos que producen el campo. Un Campo Gravitatorio real tiende a cero, pero el equivalente al sistema no inercial o acelerado incrementa o se mantiene constante.

## 2) Campo Gravitatorio en Mecánica Relativista.

i) La propiedad fundamental de los campos Gravitatorios que hemos señalado en la Mecánica no relativista es que “Todos los cuerpos caen con la misma aceleración”. Conservando su validez también en la mecánica relativista, esto implica que subsiste la analogía entre Campos gravitatorios y Sistemas de referencia no Inerciales o Acelerados”.

ii) También se parte de esta analogía.

En un sistema de referencia inercial y en coordenadas cartesianas, el intervalo  $ds$  viene dado por la ecuación:

$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$  al pasar a cualquier otro sistema de referencia inercial, es decir en una transformación de Lorentz, el intervalo como sabemos, conserva la misma forma.

En un sistema no inercial de referencia, el cuadrado del intervalo aparece, pues, como una forma cuadrática en las diferenciales de las coordenadas de tipo general.

$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ , donde las  $g_{ij}(x^k)$  son funciones de las coordenadas espaciales  $x^1, x^2, x^3$  y de la coordenada temporal  $x^0 = ct$ , esto significa que el sistema de coordenadas es curvilíneo. Las cantidades  $g_{ij}(x^k)$ , que determinan las propiedades geométricas de cada sistema de coordenadas curvilíneas, representan la métrica del espacio-tiempo.

Todo campo gravitatorio no es sino un cambio en la métrica del espacio-tiempo, en correspondencia con el cual el campo viene determinado por las cantidades  $g_{ij}(x^k)$ .

Este importante hecho significa que las propiedades geométricas del espacio-tiempo (su métrica) están determinadas por fenómenos físicos y no son propiedades invariables del espacio-tiempo.

Un campo gravitatorio real no se puede anular por una transformación de coordenadas.

Del Principio de Equivalencia Fuerte se deducen los resultados de desviaciones de un rayo de luz, la desviación hacia la frecuencia del rojo y la dilatación del tiempo.

## II.5. Coordenadas Curvilíneas.

Consideremos el paso de un sistema de coordenadas  $x^0, x^1, x^2, x^3$  al sistema primado  $x'^0, x'^1, x'^2, x'^3$ :  $x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ , donde las  $f^i$  son funciones de las coordenadas  $x'^0, x'^1, x'^2, x'^3$ . Cuando transformamos las coordenadas, sus diferenciales se transforman de acuerdo con la relación:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k \quad (\text{II.15})$$

Las magnitudes que transforman como  $dx^i$  se llaman el diferencial del cuadrivector contravariante, cuando el índice va colocado arriba; pero si va colocado abajo, como subíndice se llama diferencial covariante.

Todo conjunto de cuatro cantidades  $A^i (i = 0,1,2,3)$ , que en una transformación de coordenadas se transforma como  $A^i$  se llama cuadrivector contravariante o tensor contravariante de primer orden.

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k \quad (\text{II.16}) \quad , \text{ se llama cuadrivector contravariante o tensor}$$

contravariante de primer orden.

Sea  $\phi$  un escalar. En una transformación de coordenadas, las cuatro coordenadas  $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$

$$\text{se transforman de acuerdo con la fórmula } \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \quad (\text{II.17}) \quad \text{Todo conjunto de}$$

cuatro coordenadas  $A_i$  que, en una transformación de coordenadas, se transforman como las derivadas de un escalar, se llama cuadrivector covariante.

Así:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \quad (\text{II.18}) \quad \text{se llama cuadrivector covariante o tensor covariante de}$$

primer orden.

Se puede generalizar con los siguientes ejemplos:

$$\begin{aligned} A^{ik} &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm} \\ A_{ik} &= \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm} \\ A^i_k &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$



Donde  $A^{ik}$  es un tensor contravariante de segundo orden,  $A_{ik}$  es un tensor covariante de segundo orden y  $A^i_k$  es un tensor mixto de segundo orden.

El producto punto, interno o escalar entre dos cuadritensores viene dado por

$$A^i B_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'^l B'_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'^l B'_m = A'^l B'_l \quad (\text{II.20})$$

La definición del cuadritensor unidad  $\delta^i_k$  no cambia al pasar a coordenadas curvilíneas sus componentes son de nuevo  $\delta^i_k = 0$  para  $i \neq k$  e iguales a 1 para  $i = k$ .

Si  $A^k$  es un cuadvivector, al multiplicarlo por  $\delta^i_k$  obtendremos:

$$A^k \delta^i_k = A^i \quad (\text{II.21}) \quad \text{es decir, de nuevo un cuadvivector; esto}$$

precisamente prueba que  $\delta^i_k$  es un tensor.

El cuadrado del elemento de línea, longitud o intervalo en coordenadas curvilíneas es una forma cuadrática en las diferenciales  $dx^i$ :  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$  donde  $g_{ij}(x^k)$  son funciones de las coordenadas  $x^k$ ; las componentes  $g_{ij} = g_{ji}$  son simétricas respecto de los índices  $ij$  y  $g_{ij}$  es llamado tensor métrico covariante de segundo orden.

$$\text{Dos tensores } A_{ik} \text{ y } B^{ik} \text{ se dice que son inversos uno del otro si } A_{ik} B^{kl} = \delta^l_i \quad (\text{II.22})$$

$$\text{En particular, se llama tensor métrico contravariante } g^{ik} \text{ al tensor inverso del tensor métrico } g_{ik}, \text{ es decir, } g_{ik} g^{kl} = \delta^l_i \quad (\text{II.23})$$

Una misma magnitud vectorial física se puede representar tanto mediante componentes contravariantes como covariantes, haciendo uso del tensor métrico. Dicha relación viene dada por las fórmulas:

$$A^i = g^{ik} A_k \quad A_i = g_{ik} A^k \quad (\text{II.24})$$

## II.6. Derivada Covariante

Es un operador diferencial que transforma un tensor en otro tensor, por medio de la derivada parcial más un factor de corrección lineal (la conexión por un vector).

El tensor covariante de segundo orden:  $a_{ij}$  cuya ley de transformación es:

$$a'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} a_{kl} \quad (\text{II.25})$$

Definición: Se llama vector covariante  $v_i$  o tensor de orden 1 a un conjunto de  $n$  componentes  $v_i$  que por un cambio de coordenadas se transforman según la ley:

$$v'_i = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} v_k \quad (\text{II.26})$$

Derivándola con respecto a  $j$  para saber si la derivada de un vector o tensor de orden 1 es de nuevo un tensor:

$$v'_{i,j} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial x'_i \partial x'_j} v_k + \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} \quad (\text{II.27})$$

El primer término no transforma como un tensor, pero el segundo sí, por lo tanto las derivadas parciales de un vector no son componentes de un tensor a menos que la transformación  $x'_i = x'_i(x'_j)$  sea afín (exista la conexión  $(\Gamma^k_{ij})$  y se sustituya la

expresión  $\frac{\partial^2 x_k}{\partial x'_i \partial x'_j}$  en el primer término.

La derivada covariante constituye uno de los conceptos más importantes sobre los cuales gira la teoría de la relatividad general, fue definida por primera vez por el matemático italiano Tullio Levi-Civita.

La derivada covariante de un tensor es de nuevo un tensor, sea contravariante o covariante, está asociada con los Símbolos de Christoffel o Conexión Afín  $\Gamma$  y con el transporte paralelo en coordenadas curvilíneas; en cambio la derivada parcial de un tensor no es un tensor y coinciden solamente cuando:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , es decir el espacio-tiempo es localmente euclidiano plano o Minkowskiano, ya que  $\eta_{\mu\nu}$ , es la matriz de la métrica de Minkowski.

### II.6.1. Derivada Covariante de un vector contravariante.

Sea el vector  $\vec{V} = V^u \vec{e}_u$  (II.28)

Derivando con respecto a  $x^v$  ambos lados de la expresión, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^v} &= \frac{\partial V^u}{\partial x^v} \vec{e}_u + V^u \frac{\partial \vec{e}_u}{\partial x^v} \\ &= \frac{\partial V^u}{\partial x^v} \vec{e}_u + V^u \Gamma_{uv}^\alpha \vec{e}_u \\ &= \left( \frac{\partial V^u}{\partial x^v} + \Gamma_{\sigma v}^\alpha V^\sigma \right) \vec{e}_u \\ V_{;v}^u &= V^u_{,v} + \Gamma_{\sigma v}^\alpha V^\sigma \end{aligned} \quad (II.29)$$

El término entre paréntesis  $V_{;v}^u$  es un tensor mixto de segundo orden, se le llama derivada covariante del vector contravariante  $V^u$  respecto de la conexión  $\Gamma_{\sigma v}^\alpha$ .

Al término  $\Gamma_{\sigma v}^\alpha$  se le llama Conexión de Levi-Civita, Conexión Afín o Símbolos de Christoffel.

La derivada ordinaria se aplica exclusivamente sobre las componentes de un vector, mientras que la derivada covariante se aplica también sobre las bases del espacio vectorial.

### II.6.2. Principio de Acoplamiento Mínimo:

En un espacio-tiempo curvo, las leyes de la física se modifican mediante el Principio de Acoplamiento Mínimo que consiste en:

- i. La derivada parcial ordinaria se sustituye por la derivada covariante y se puede simbolizar de las siguientes maneras:

$$\partial_v \rightarrow \vec{V}_{;v}, \nabla_v \vec{V} \quad \text{o} \quad D_v \vec{V}$$

La derivada parcial ordinaria se representa por una coma y la derivada covariante por punto y coma.

$\vec{V}_{;v} \neq V^u_{;v}$  son diferentes por lo tanto.

- ii. La métrica de Minkowski es sustituida por una formulación general del tensor métrico.

$$\eta_{uv} \rightarrow g_{uv}(x^k)$$

“El reemplazo consistente de las derivadas parciales regulares por derivadas covariantes lleva las leyes de la Física (por componentes) desde un espacio-tiempo plano al espacio-tiempo curvo (Riemanniano) de la Relatividad General. Realmente, esta sustitución puede ser tomada como una declaración matemática del Principio de Equivalencia”.

### II.7. Relación entre los Símbolos de Christoffel y el Tensor Métrico.

Los Símbolos de Christoffel fueron introducidos en las Matemática a finales del siglo XIX, por el matemático alemán Edwin Bruno Christoffel (1889-1900) junto con Bernard Riemann, fueron los primeros en establecer el concepto de Tensor.

- Los Símbolos de Christoffel, conexión o conexión afín:

Se definen para facilitar la descripción de desplazamientos paralelos en coordenadas curvilíneas.

En coordenadas cartesianas son cero.

“Si un tensor es cero en un sistema de coordenadas es también cero en cualquier sistema de coordenadas, por lo tanto los símbolos de Christoffel no son tensores”.

$$\nabla_{\vec{e}_j} \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \vec{e}_j} = \Gamma_{ij}^k \vec{e}^k \quad (\text{II.30})$$

En el que:  $\Gamma_{ij}^k$  son las coordenadas del vector:  $\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \vec{e}_i}$  en la base  $\vec{e}^k$  y  $\Gamma_{ij}^k$  no es una

matriz de transformación de coordenadas y por lo tanto también podemos decir que los símbolos de Christoffel no son tensores.

- Si la métrica es de coeficientes constantes, entonces, los símbolos de Christoffel son nulos.

- Símbolos de Christoffel o simplemente la conexión, se definen para facilitar la descripción de desplazamientos paralelos de vectores en sistemas de coordenadas no cartesianos y son expresiones en coordenadas espaciales para la conexión de Levi-Civita (derivada covariante) derivadas del tensor métrico y por lo tanto no son tensores.

En Geometría Diferencial, la conexión es una manera de especificar la diferenciación covariante en una variedad diferenciable.

a) Símbolos de Christoffel de primera clase:

$$\Gamma_{ijk} = [ij, k] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right] \quad (\text{II.31})$$

Los símbolos de Christoffel de primera clase se pueden representar de las siguientes maneras:

$$[ij, k] = \Gamma_{ijk} = \{ij, k\} = (ij, k) \quad (\text{II.32})$$

Propiedades:

1. Simetría:

$$[ij, k] = [ji, k] \quad (\text{II.33})$$

En efecto:

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right] = [ji, k]$$

b) Símbolos de Christoffel de segunda clase

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = \Gamma_{ij}^k = g^{kl} [ij, l] \quad (\text{II.34}) \quad \text{en donde } [ij, l] \text{ son los símbolos de}$$

Christoffel de primera clase.

## II.8. Geodésicas.

Se define como la línea de menor longitud que une dos puntos en una superficie curva.

La ecuación diferencial de las geodésicas es:

$$\frac{dr^2}{ds^2} + \Gamma_{pq}^s \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0 \quad (\text{II.35})$$

$\Gamma_{pq}^s = 0$  Los símbolos de Christoffel son cero para la geometría euclidiana y

$\frac{dr^2}{ds^2} = 0$  representa un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad constante.

## II.9. Ecuación de Einstein.

Las ecuaciones de Einstein constituyen la base del aparato predictivo de la relatividad General.

-La ecuación de campo de Einstein se puede escribir así:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \quad (\text{II.36})$$

El lado izquierdo representa la geometría del espacio-tiempo y el lado derecho el contenido de materia y energía del Universo. El tensor de Ricci  $R_{ik}$ , el escalar de

curvatura  $R$  y el tensor métrico  $g_{ik}$  están ligados a la geometría o curvatura del espacio-tiempo y en el lado derecho  $c$  la velocidad de la luz al igual que  $\pi$  y  $G$  la constante de Cavendish son constantes.

Y en el tensor de momento-energía  $T^{ik}$  está contenida la materia y energía del universo.

## II.10. Principales Tensores usados en la relatividad general.

### 1. Curvatura y tensor de Riemann.

Curvatura: “Mide la no plenitud del espacio y nos dice cuan alejado se encuentra del Euclideo y en la mayoría de los casos se representa con la letra  $K$ ”.

$K = \frac{1}{r^2}$  para la métrica esférica,  $K = -\frac{1}{r^2}$  métrica hiperboloide o de Lobachevsky,

$K = 0$  métrica de Euclides.

2. Tensor de Riemann o Riemann-Christoffel:  $R^i_{jkl}$  : Se puede interpretar como la medida de la no conmutatividad de la derivada covariante.”

$$U_{i;jk} \neq U_{i;kj} \Rightarrow U_{i;jk} - U_{i;kj} = R^l_{ijk} U_l \quad (\text{II.37}) \quad \text{donde } R^l_{ijk} \text{ es el tensor}$$

de Riemann o Riemann-Christoffel.

Existen otras maneras para expresar el tensor de Riemann, como:

$$- \quad |\nabla_v, \nabla_u| = \nabla_v \nabla_u - \nabla_u \nabla_v \quad (\text{II.38})$$

- Describe la curvatura de la variedad métrica, es decir da el grado de desviación relativo de dos curvas geodésicas próximas, se determina enteramente a partir de los símbolos de Christoffel.

Existen dos clases de tensores de Riemann o Riemann-Christoffel:

b) Tensor de Riemann de segunda clase: Se obtiene a partir de los símbolos de Christoffel.

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^l} + \Gamma_{jl}^r \Gamma_{rk}^i - \Gamma_{jk}^r \Gamma_{rl}^i \quad (\text{II.39})$$

c) Tensor de Riemann de primera clase: Se obtiene por la contracción del tensor de Riemann de segunda clase.

$$R_{ijkl} = g_{ir} R_{jkl}^r \quad (\text{II.40})$$

3. Tensor de Ricci de primera clase:  $R_{ik}$  y se define como una contracción del tensor de Riemann de segunda clase:

$$R_{ij} = R_{ij}^k \quad (2.41)$$

b) Tensor de Ricci de segunda clase:

Usando el tensor métrico conjugado para subir índices.

$$R_j^i = g^{ik} R_{kj} \quad (2.42)$$

4. Tensor métrico:  $g_{ik}$  en él está contenida toda la información del campo gravitatorio es covariante, de segundo orden y simétrico.

$$g_{ik} = g_{ki} \quad (2.43)$$

5. Escalar de curvatura:  $R$  y se define como la contracción del tensor de Ricci de primera clase:  $R = g^{ik} R_{ik}$  (2.44)

6. Tensor de momento-energía:  $T_{ik}$

El tensor de Momento-Energía para un cuerpo macroscópico continuo ideal



$$T^{uv} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.45) \quad \text{el fluido se considera:}$$

a) no viscoso.

b) no hay conducción del calor.

$\varepsilon$  = densidad de energía y es igual a  $\varepsilon = \rho c^2$

$\rho$  = densidad de masa o cuerpo

$c^2$  = velocidad de la luz al cuadrado

$$\varepsilon = \frac{M}{L^3} \frac{L^2}{T^2} = \left( M \frac{L^2}{T^2} \right) \frac{1}{L^3} = \left( \frac{\text{energía}}{\text{volumen}} \right)$$

$$\rho = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{M \left( \frac{L^2}{T^2} \right)}{\left( \frac{L^2}{T^2} \right) (L^3)} = \left( \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} \right)$$

$$T^{uv} = (p + \rho) u^u u^v - p g^{uv} \quad (2.46)$$

$$u^u \cdot u^v = u^u \otimes u^v \quad (2.47)$$

## 7. Tensor de Einstein.

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \quad (2.48)$$

En el cual  $G_{ik}$  se llama Tensor de Einstein y es un tensor puramente geométrico y es simétrico  $G_{ik} = G_{ki}$  y se puede sustituir en el lado izquierdo de la ecuación de Einstein para representar la curvatura del espacio-tiempo (la geometría).

$$G_{ik} = K T_{ik} \quad (2.49)$$

$$\text{Donde: } K = \frac{8\pi G}{c^4}$$

## II.11. Predicciones de la Relatividad General

Predicciones de la Teoría General de la Relatividad.

<b>Predicción Experimental.</b>	<b>Confirmación</b>
1) La luz se desvía al pasar por el sol	Eddington en el eclipse solar del 24 de mayo de 1922.
2) Precesión de la órbita de Mercurio.	Conocida antes de que Einstein formulara la Teoría General de la Relatividad
3) Cambio en la rapidez con la que fluye el tiempo en un campo gravitacional.	Medido experimentalmente por J. C. Hafele y R. Keating en 1971
4) Ondas gravitacionales:	Evidencia indirecta por observaciones del sistema binario PSR 1913 realizadas por Hulse y Taylor en 1975.
5) Agujeros Negros	Varias observaciones de núcleos galácticos activos.
6) Efecto de lente gravitacional	Observado a diario con potentes telescopios
7) Equivalencia entre masa gravitatoria y masa inercial	Comprobada por Roll, Krotkov y Dicke en 1964
8) Corrimiento espectral hacia el rojo de la luz en un campo gravitacional	Medido por Pound y Rebka en 1960

Las tres predicciones primeras: 1. La luz se desvía al pasar por el sol, 2. La precesión de órbita de Mercurio y 3. Cambio en la rapidez con la que fluye el tiempo en un campo gravitacional se conocen como los tres tests clásicos de la relatividad general.

1) La desviación de la luz al pasar por el sol, viene dada por la expresión:

$$\Delta\phi = \frac{4\pi M}{rc^2} \quad \text{donde : } \Delta\phi \text{ es la deflexión o desviación del rayo de luz, } \pi \text{ es una}$$

constante,  $M$  es la masa del sol,  $c^2$  es la velocidad de la luz y  $r$  es la distancia desde el centro del sol hasta donde efectuamos la medida. Para el caso del sol  $\Delta\phi = 1.75$  segundos de grado. Esto fue comprobado mediante la observación de eclipses.

2) La precesión de la órbita de mercurio.

La órbita de Mercurio parecía que girara o tuviera movimiento de precesión muy lento; en ausencia de la influencia de los planetas exteriores la órbita de Mercurio debía ser una elipse perfecta de acuerdo a la mecánica clásica, pero las observaciones revelaban que mientras Mercurio giraba alrededor de su órbita, la órbita había girado lentamente. Como resultado el planeta Mercurio estaba trazando una figura de rosetas en lugar de una verdadera elipse. De acuerdo con los cálculos de Einstein la razón de precesión del perihelio de Mercurio debería ser 43 segundos de arco por siglo.

$$\delta\phi = \frac{3\pi r^*}{(1+e)r_{\min}}$$

$r_{\square}^*$  = radio solar de Schwarzschild = 2.95 km       $e = 0.206$  excentricidad de

Mercurio       $r_{\min} = 4.6 \times 10^7 \text{ km}$       el avance del perihelio       $\delta\phi = 5 \times 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{rev}}$  o

$5 \times 10^{-7} \times \frac{180}{\pi} \times 60 \times 60 = 0.103''$  segundos de arco por revolución. En términos del

avance por siglo:       $0.103 \times \frac{100 \text{ años}}{0.241 \text{ años período de mercurio}} = 43'' \text{ por siglo}$

3) El Cambio en la rapidez con la que fluye el tiempo en un campo gravitacional viene dado por la expresión:

$$d\tau' = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} dt$$
 , donde:  $\tau'$  es el tiempo propio (medido en movimiento),  $t$  es el tiempo medido en reposo,  $r_s$  es el radio de Schwarzschild ( $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ ) y  $r$  es la distancia desde el astro hasta donde medimos.

Como  $r_s < r \Rightarrow$  que la raíz del radical es menor que uno y que el tiempo propio ( $\tau'$ ) es menor que el tiempo medido en reposo  $t$ .

#### 4) Agujero Negro.

Las estrellas pueden llegar a morir de tres maneras:

**Enanas Blancas:** Es el remanente estelar que resulta del agotamiento del combustible nuclear de una estrella de masa menor que 8 masas solares.

**Estrella de Neutrones:** Es el remanente estelar dejado por una estrella después de agotar el combustible nuclear en su núcleo y explotar como una supernova Tipo II (explosiones que ocurren en estrellas entre 9 y 10 masas solares).

La masa original de la estrella debe ser mayor que 8 masas solares y menor que 10.

Los pulsares son estrellas de neutrones que emiten radiación pulsante periódica.

**Agujeros Negros:**

La masa original de la estrella debe ser mayor límite superior de la estrella de neutrones y la estrella degenera en un agujero negro.

Un agujero Negro u hoyo negro es una región finita del espacio-tiempo provocada por una gran concentración de masa en su interior, con enorme aumento de la densidad, lo que provoca un campo gravitacional tal que ninguna partícula material, ni siquiera la luz, puede escapar de dicha región.

Si el Sol se convirtiera en un agujero negro toda su masa se concentraría dentro de una esfera cuyo radio sería de 3 Kilómetros. Este radio en general se llama el “Horizonte de Eventos o el Horizonte Causal”. Se le llama “horizonte de eventos” porque cualquier evento que ocurra dentro de esta región nunca podrá ser comunicado al mundo exterior ya que ninguna señal puede salir del agujero negro. Para que un objeto sea absorbido por el agujero negro, éste debe acercarse a una distancia menor que el radio del “horizonte de eventos”.

Agujero Blanco: Es el término propuesto para definir una entidad física, cuya existencia no se ha probado aún. Se trataría de una región finita del espacio-tiempo, visible como objeto celeste con una densidad tal que deforma el espacio, pero que, a diferencia del agujero negro, deja escapar materia y energía en lugar de absorberla.

Los Agujeros Negros son completamente caracterizados por tres parámetros, los cuales son:

- i. Masa
- ii. Carga
- iii. Momento Angular

Esta caracterización resulta en tres clases generales de Agujeros Negros:

- 1) Agujeros Negros Estáticos no cargados, explicados por la solución de Schwarzschild.
- 2) Agujeros Negros con carga eléctrica, explicados por la solución de Reisser-Nordstrom.
- 3) Agujeros Negros Rotacionales, explicados por la solución de Kerr-Newmann.

Según su origen, teóricamente pueden existir al menos tres clases de agujeros negros:

- i. Agujeros negros primordiales, creados temprano en la historia del Universo. Sus masas pueden ser variadas y ninguno ha sido observado.

- ii. Agujeros negros supermasivos, con masas de varios millones de masas solares. Son el corazón de muchas galaxias. Se forman en el mismo proceso que da origen a las componentes esféricas de las galaxias.
- iii. Agujeros negros de masa solar. Se forman cuando una estrella de masa mayor que entre 10 masas solares se convierte en una supernova e implosiona. Su núcleo se concentra en un volumen muy pequeño que cada vez se va reduciendo más.

8. El Corrimiento espectral hacia el rojo de la luz en un campo gravitacional.

$$\frac{\nu_{rec} - \nu_{em}}{\nu_{em}} = -\frac{\Phi_{rec} - \Phi_{em}}{c^2} \quad \Phi = -\frac{Gm}{r}$$

Un rayo de luz emitido tendrá un potencial

menor que el potencial recibido  $\Phi_{em} < \Phi_{rec}$  y la frecuencia emitida  $\nu_{em}$  será mayor que la frecuencia recibida  $\nu_{rec}$  o sea hay un corrimiento de la frecuencia del fotón recibido.

## II.12. Problemas Resueltos y Propuestos.

### II.12.1. Resueltos

1) Expresar el tensor métrico en coordenadas: a) cilíndricas y b) esféricas.

Solución.

a) cilíndricas.

El elemento de línea o intervalo viene dado por:  $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$

Si

$$x^1 = \rho, x^2 = \phi, x^3 = z \rightarrow g_{11} = 1, g_{22} = \rho^2, g_{33} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{23} = g_{32} = 0, g_{13} = g_{31} = 0.$$

El tensor métrico en forma matricial se escribe así:

$$g_{jk} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En coordenadas curvilíneas ortogonales en general  $g_{jk} = 0$ , para  $j \neq k$

b) esféricas.

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Si  $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$  y  $g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$  ya que  $g_{jk} = 0$  para  $j \neq k$  y  $e_j \cdot e_k = g_{jk}$

El tensor métrico es:  $g_{jk} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{22} & g_{33} \\ g_{21} & g_{22} & g_{33} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

2) Desarrollar el determinante de las coordenadas cilíndricas por los elementos de la segunda fila con sus correspondientes adjuntos, b) Demostrar que  $g_{jk} G_{jk} = g$ , siendo  $G_{jk}$  el adjunto del elemento  $g_{jk}$  de  $g$ , y en donde la suma se efectúa sobre el índice k únicamente.

Solución.

$$\text{Adjunto de } g_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Adjunto de } g_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

$$\text{Adjunto de } g_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$g_{21} G_{21} + g_{22} G_{22} + g_{23} G_{23} = g$$

b) luego:  $0 \cdot 0 + \rho^2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = \rho^2$

$$g = \rho^2$$

3) Expresar el tensor métrico conjugado en coordenadas:

a) cilíndricas.

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$

$$g_{11} = 1, g_{22} = \rho^2, g_{33} = 1$$

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2$$

$$g^{11} = \frac{Adj.g_{11}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$g^{22} = \frac{Adj.g_{22}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2}$$

$$g^{33} = \frac{Adj.g_{33}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{vmatrix} = 1$$

$$g^{12} = -\frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Análogamente,  $g^{jk} = 0$  si  $j \neq k$ . La matriz del tensor métrico conjugado es:

$$g^{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) en coordenadas esféricas:

$$(x, y, z) = (r, \theta, \phi) = (x^1, x^2, x^3) \rightarrow x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$x = r \sin \phi \cos \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cos \phi$$

El elemento de línea o intervalo en coordenadas esféricas viene dado por:



$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

El tensor métrico  $g_{ij}$  se expresa así: 
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$  , ya que:  $g_{ij} = 0$  para  $i \neq j$

$$e_i \cdot e_j = g_{ij}$$

El valor del determinante  $g$  viene dado por:

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = r^4 \sin^2 \theta$$

Como en (a) se deducen los elementos del tensor métrico conjugado:

$$g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{r^2}, g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \text{ y } g^{jk} = 0 \text{ para } j \neq k.$$

El tensor métrico conjugado se escribe en forma matricial así:

$$g^{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

- 4) Expresar los símbolos de Christoffel de segunda clase:  $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = \Gamma_{ij}^k$  en coordenadas:  
a) rectangulares , b) cilíndricas, c) esféricas.

Solución.

- a) En coordenadas rectangulares  $g_{ij} = 1$ , con lo que  $\Gamma_{ij}^k = 0$

b) coordenadas cilíndricas.

Solución.

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$

$$x^1 = \rho, x^2 = \phi, x^3 = z$$

$$g_{11} = 1, g_{22} = \rho^2, g_{33} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{23} = g_{32} = 0, g_{31} = g_{13} = 0$$

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl} [ij, l]$$

$$\Gamma_{23}^1 = g^{11} [23, 1]$$

$$\Gamma_{23}^1 = g^{11} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{21}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} \right] \right\}$$

$$= 1 \left\{ \frac{1}{2} [0 + 0 - 0] \right\} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = g^{11} \left\{ \frac{1}{2} [22, 1] \right\}$$

$$= 1 \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{21}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}^0}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right] \right\}$$

$$= 1 \left\{ \frac{1}{2} \left[ -\frac{\rho^2}{\partial \rho} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (-2\rho)$$

$$= -\rho$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^2 &= g^{22} [21, 2] \\
&= g^{22} \left\{ \frac{1}{2} [21, 2] \right\} \\
&= \frac{1}{\rho^2} x \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}^0}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}^0}{\partial x^2} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\rho^2} x \left\{ \frac{1}{2} [2, \rho] \right\} \\
&= \frac{1}{\rho}
\end{aligned}$$

Se puede demostrar que los términos:

$$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = 0, \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{13}^1 = 0, \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = 0, \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = 0, \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{12}^3 = 0$$

Solamente los términos no nulos son:  $\Gamma_{22}^1, \Gamma_{21}^2$

c) coordenadas esféricas.

Solución.

$$(x, y, z) = (r, \theta, \phi) = (x^1, x^2, x^3) \rightarrow x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 \sin^2 \theta \quad , \text{ya que: } g_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j$$

$$g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{r^2}, g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$e_i \cdot e_j = g_{ij}$$

Los únicos símbolos de Christoffel de segunda clase no nulos son los siguientes:

$$\Gamma_{22}^1, \Gamma_{21}^2, \Gamma_{33}^1, \Gamma_{33}^2, \Gamma_{31}^3, \Gamma_{32}^3$$

a)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= g^{11}x \left\{ \frac{1}{2} [22, 1] \right\} \\
&= g^{11}x \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{21}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}^0}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right] \right\} \\
&= 1x - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial (r^2)}{\partial r} \\
&= -\frac{1}{\mathcal{Z}} (\mathcal{Z}r) \\
&= -r
\end{aligned}$$

b)  $\Gamma_{21}^2 = g^{22}x [21, 2]$

$$\begin{aligned}
&g^{22}x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} \right] \\
&= \frac{1}{r^2}x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}^0}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}^0}{\partial x^2} \right] \\
&= \frac{1}{r^2}x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial r^2}{\partial r} + 0 - 0 \right] \\
&= \frac{1}{r^2}x \frac{1}{\mathcal{Z}} [\mathcal{Z}r] \\
&= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= g^{11}x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{31}^0}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}^0}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right] \\
&= 1x \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial r^2 \text{sen}^2 \theta}{\partial r} \right] \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}}x \left[ -\mathcal{Z}r \text{sen}^2 \theta \right] \\
&= -r \text{sen}^2 \theta
\end{aligned}$$

$$c) \Gamma_{33}^2 = g^{22} x \frac{1}{2} [33, 2]$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{32}^0}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}^0}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} x \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial r^2 \text{sen}^2 \theta}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} x \frac{1}{2} \left[ -2 r^2 \text{sen} \theta \cos \theta \right] \\ &= -\text{sen} \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$d) \Gamma_{31}^3 = g^{33} x \frac{1}{2} [31, 3]$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}^0}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}^0}{\partial x^3} \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (r^2 \text{sen}^2 \theta)}{\partial r} \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} x \frac{1}{2} \left[ 2 r \text{sen}^2 \theta \right] \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{32}^3 = g^{33} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}^0}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}^0}{\partial x^3} \right]$$

$$\begin{aligned} e) &= \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (r^2 \text{sen}^2 \theta)}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} x \frac{1}{2} \left[ 2 r^2 \text{sen} \theta \cos \theta \right] \\ &= \cot \theta \end{aligned}$$

5) Sea la métrica de las coordenadas esféricas:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1 dx^2)^2 + (x^1 \operatorname{sen}^2 x^2 dx^3)^2$$

$$\text{Donde: } x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$g_{11} = 1, g_{22} = (x^1)^2, g_{33} = (x^1)^2 \operatorname{sen}^2 x^2$$

$$g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{(x^1)^2}, g^{33} = \frac{1}{(x^1)^2 \operatorname{sen}^2 x^2}$$

$$i = 1 \quad \Gamma_{22}^1 = -x^1, \Gamma_{33}^1 = -x^1 \operatorname{sen}^2 x^2$$

$$i = 2 \quad \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{x^1}, \Gamma_{33}^2 = -\operatorname{sen} x^2 \cos x^2$$

$$i = 3 \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{x^1}, \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot x^2$$

Encontrar los tensores de Riemann-Christoffel de segunda clase:

a)  $R^1_{212}$ , b)  $R^1_{313}$  c)  $R^2_{323}$

Solución.

a) El tensor de Riemann-Christoffel de segunda clase viene dado por:

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^r_{jl} \Gamma^i_{rk} - \Gamma^r_{jk} \Gamma^i_{rl}$$

$$R^1_{212} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial x^2} + \Gamma^r_{22} \Gamma^1_{r1} - \Gamma^r_{21} \Gamma^1_{r2} = -1 - \Gamma^1_{22} \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{22} = 0$$

$$b) \quad R^1_{313} = \frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial x^1} + \Gamma^r_{22} \Gamma^1_{r1} - \Gamma^r_{31} \Gamma^1_{r3} = -\operatorname{sen}^2 x^2 + \Gamma^1_{33} \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{31} \Gamma^1_{33} = 0$$

$$c) \quad \Gamma_{323}^2 = \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{32}^2}{\partial x^3} + \Gamma_{33}^r \Gamma_{r2}^2 - \Gamma_{32}^r \Gamma_{r3}^2 = -\cos 2x^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 = -\cos 2x^2 - \text{sen}^2 x^2 + \cos^2 x^2 = 0$$

6) Sea la geometría de Riemann de cualquier punto  $(x^i)$  en 3- dimensiones, los tensores métricos vienen dados por:  $g_{11} = 1, g_{22} = 2x^1, g_{33} = 2x^2, g_{ij} = 0, \text{ si } i \neq j$

$$g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{2x^1}, g^{33} = \frac{1}{2x^2}$$

Y los símbolos de Christoffel vienen dados por:

$$\Gamma_{22}^1 = -1, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2x^1}, \Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2x^1}$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2x^2}$$

Estos son los símbolos de Christoffel no nulos.

Calcule: a) El tensor de Ricci  $R_{ij}$  de primera clase:

b) El escalar de Curvatura:  $R$

Solución.

$$a) \quad R_{ij} = R^k_{ijk} = R^1_{ij1} + R^2_{ij2} + R^3_{ij3} \quad \text{y} \quad g_{ij} = 0, \text{ para } i \neq j$$

$$R_{ij} = g^{11} R_{1ij1} + g^{22} R_{2ij2} + g^{33} R_{3ij3}$$

$$\text{Donde: } g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{2x^1}, g^{33} = \frac{1}{2x^2}$$

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^r_{jl} \Gamma^i_{rk} - \Gamma^r_{jk} \Gamma^i_{rl}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{212} &= \frac{\partial \mathcal{F}^1_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathcal{F}^1_{21}}{\partial x^2} + \Gamma^1_{22} \mathcal{F}^1_{11} - \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{22} = \\
&= -\Gamma^2_{21} \Gamma^1_{22} \\
&= -\frac{1}{2x^1} x(-1) \\
&= \frac{1}{2x^1}
\end{aligned}$$

$$R_{1212} = g_{11} x R^1_{212} = (1) \left( \frac{1}{2x^1} \right) = \frac{1}{2x^1}$$

$$R_{1221} = -R_{1212} = -\left( \frac{1}{2x^1} \right)$$

$$\begin{aligned}
R^3_{123} &= \frac{\partial \mathcal{F}^1_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathcal{F}^3_{12}}{\partial x^3} + \mathcal{F}^3_{13} \mathcal{F}^3_{32} - \Gamma^2_{12} \Gamma^3_{23} \\
&= -\Gamma^2_{12} \Gamma^3_{23} \\
&= -\left( \frac{1}{2x^1} \right) \left( \frac{1}{2x^2} \right) \\
&= -\left( \frac{1}{4x^1 x^2} \right)
\end{aligned}$$

$$R_{3123} = -R_{3132} = g_{33} x R^3_{123} = (\cancel{2} x^2) \left( -\frac{1}{\cancel{4} x^1 x^2} \right) = \left( -\frac{1}{2x^1} \right)$$

$$\begin{aligned}
R^2_{323} &= \frac{\partial \mathcal{F}^2_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathcal{F}^2_{32}}{\partial x^3} + \Gamma^2_{33} \mathcal{F}^2_{22} - \Gamma^3_{32} \Gamma^2_{33} \\
&= -\Gamma^3_{32} \Gamma^2_{33} = -\left[ \left( \frac{1}{2x^2} \right) \left( -\frac{1}{2x^1} \right) \right] \\
&= \left( \frac{1}{4x^1 x^2} \right)
\end{aligned}$$

$$R_{2323} = g_{22} x R^2_{323} = (\cancel{2} x^1) \left( \frac{1}{\cancel{4} x^1 x^2} \right) = \frac{1}{2x^2}$$



$$R_{2323} = -R_{2332} = -\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$

Los tensores de Ricci se encuentran de la siguiente forma:

$$R_{11} = g^{11}R_{2112} = \left(\frac{1}{2x^1}\right)\left(-\frac{1}{2x^1}\right) = -\frac{1}{4(x^1)^2}$$

$$R_{22} = g^{11}R_{1221} + g^{33}R_{3223}$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= (1)\left(-\frac{1}{2x^1}\right) + \left(\frac{1}{2x^2}\right)\left(-\frac{1}{2x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2x^1} - \frac{1}{4(x^2)^2} \end{aligned}$$

$$R_{33} = g^{22}R_{2332} = \left(\frac{1}{2x^1}\right)\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\left(\frac{1}{4x^1x^2}\right)$$

$$R_{12} = g^{33}R_{3123} = \left(\frac{1}{2x^2}\right)\left(-\frac{1}{2x^1}\right) = \left(-\frac{1}{4x^1x^2}\right)$$

$$\text{b) } R = R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 + R_4^4$$

$$R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$$

$$R = (1)\left(-\frac{1}{4(x^1)^2}\right) + \frac{1}{2x^1}\left[-\frac{1}{2x^1} - \frac{1}{4(x^2)^2}\right] + \frac{1}{2x^2}\left(-\frac{1}{4x^1x^2}\right)$$

$$R = -\frac{1}{4(x^1)^2} + \frac{1}{2x^1}\left[\frac{-2(x^2)^2 - x^1}{4x^1(x^2)^2}\right] - \frac{1}{8x^1(x^2)^2}$$

$$R = -\frac{1}{4(x^1)^2} - \frac{[2(x^2)^2 + x^1]}{8(x^1)^2(x^2)^2} - \frac{1}{8x^1x^2}$$

$$R = \frac{-2(x^2)^2 - 2(x^2)^2 - x^1 - x^1}{8(x^1)(x^2)^2}$$

$$R = \frac{-4(x^2)^2 - 2x^1}{8(x^1)^2(x^2)^2}$$

$$R = \frac{-2[2(x^2)^2 + x^1]}{8(x^1)^2(x^2)^2}$$

$$R = \frac{-[2(x^2)^2 + x^1]}{4(x^1)^2(x^2)^2}$$

7) Encontrar la derivada covariante de la expresión:

$\nabla_{\alpha} V^{\alpha}$  o  $V_{;\alpha}^{\alpha}$  de  $\vec{V} = r^2 \cos \theta e_{\theta} - \text{sen} \theta e_{\theta}$  considerar las coordenadas polares.

Solución.

$$\vec{V}_{;\alpha}^{\alpha} = \nabla_r V^r + \nabla_{\theta} V^{\theta}$$

$$\nabla_r V^r = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \Gamma_{\alpha r}^r V^{\alpha} = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \Gamma_{rr}^r V^r + \Gamma_{\theta r}^r V^{\theta}$$

$$\nabla_{\theta} V^{\theta} = \frac{\partial V^{\theta}}{\partial \theta} + \Gamma_{\alpha \theta}^{\theta} V^{\alpha} = \frac{\partial V^{\theta}}{\partial \theta} + \Gamma_{r\theta}^{\theta} V^r + \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} V^{\theta}$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r} \quad \text{y} \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r$$

$$\nabla_r V^r = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \Gamma_{rr}^r V^r + \Gamma_{\theta r}^r V^{\theta} = \frac{\partial V^r}{\partial r}$$

$$\nabla_{\theta} V^{\theta} = \frac{\partial V^{\theta}}{\partial \theta} + \Gamma_{r\theta}^{\theta} V^r + \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} V^{\theta} = \frac{\partial V^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} V^r$$

$$\nabla_{\alpha} V^{\alpha} = \nabla_r V^r + \nabla_{\theta} V^{\theta} = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{1}{r} V^r + \frac{\partial V^{\theta}}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned} \vec{V} &= r^2 \cos \theta e_r - \sin \theta e_{\theta} \\ \text{De: } \nabla_{\alpha} \vec{V}^{\alpha} &= \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{1}{r} V^r + \frac{\partial V^{\theta}}{\partial \theta} = 2r \cos \theta + r \cos \theta - \cos \theta = 3r \cos \theta - \cos \theta \\ &= \cos \theta (3r - 1) \end{aligned}$$

### II.12.2. Propuestos.

- 1) Encontrar la derivada covariante de un vector covariante  $V_i$ . Para ello tomar un vector contravariante cualquiera  $U^i$  y considerar el producto escalar.

$$S = U^i \cdot V_i$$

- 2) Encontrar el tensor de Riemann-Christoffel:  $R_{\nu\rho\mu}^{\sigma}$  a partir de la expresión:

$$D_u \vec{e}_\nu = \Gamma_{uv}^{\rho} \vec{e}_\rho$$

- 3) En un espacio de Riemann  $\square^3$  con métrica:

$$g_{11} = 1, g_{22} = g_{33} = (x^1)^2 + 1, \text{ con } g_{ij} = 0, (i \neq j)$$

Y con los símbolos de Christoffel siguientes:

$$\Gamma_{22}^1 = -x^1, \Gamma_{33}^1 = -x^1, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{x^1}{(x^1)^2 + 1}, \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{x^1}{(x^1)^2 + 1}$$

Encontrar los tensores de Riemann de segunda clase siguientes:

$$a) R_{212}^1, b) R_{313}^1, c) R_{323}^2, d) R_{213}^1 = R_{123}^2 = R_{132}^3.$$

Y los tensores de Riemann de primera clase siguientes:

$$a) R_{1212}, b) R_{1313}, c) R_{2323}$$

4) Considere la métrica del espacio-tiempo

$$ds^2 = -2dudv - R^{-2}z^2dv^2 + dz^2$$

Donde: R es una constante y las componentes del tensor:  $g_{uv}$  son:

$$g_{uv} = -1, g_{vv} = -R^{-2}z^2, g_{zz} = 1$$

Encuentre:

- Las componentes del tensor conjugado  $g^{uv}$ .
- Los símbolos de Christoffel no nulos.

5) Considere un espacio-tiempo 3-dimensional con métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{t}{T}(dx^2 + dy^2)$$

Donde T es una constante.

Encontrar:

- Los símbolos de Christoffel no nulos.
- Los elementos del tensor de Riemann no nulos.
- El tensor de Ricci y el escalar de Ricci (o escalar de curvatura).

6) Dada la métrica siguiente:

$$ds^2 = (x^1)^{-2} (dx^1)^2 + (x^1)^{-2} (dx^2)^2 + (x^1)^{-2} (dx^3)^2$$

Encontrar:

a) Los símbolos de Christoffel no nulos siguientes:

$$\Gamma_{11}^1, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{33}^1, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2, \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3$$

b) Los tensores de Riemann- Christoffel de segunda clase siguientes:

$$R_{212}^1, R_{313}^1, R_{323}^2, R_{213}^1 = R_{123}^2 = R_{132}^3$$

c) Los tensores de Riemann-Christoffel de primera clase:

$$R_{1212} = R_{1313} = R_{2323}$$

7) De la métrica de Riemann para una esfera 2-dimensiones

$$ds^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$$

Encuentre:

a) Los tensores de Riemann

$$R_{\phi\theta\phi}^{\theta}, R_{\theta\phi\theta}^{\phi}$$

b) Las componentes del tensor de Ricci:

$$R_{\theta\theta}, R_{\phi\phi}, R_{\theta\phi}$$

c) El escalar de Ricci o escalar de curvatura: R

8) Considere la métrica 2-dimensional:

$$ds^2 = a^2 (d\chi^2 + \text{senh}^2\chi d\phi^2)$$

Encuentre:

a) Los símbolos de Christoffel:  $\Gamma_{jk}^i$

b) Las componentes del tensor de Riemann:  $R_{jkl}^i$

c) Las componentes del tensor de Ricci:  $R_{ij}$

9) De la métrica de Lobachevsky:

$$ds^2 = y^{-2}(x^2 + y^2)$$

Usar la notación:  $x^1 = x, x^2 = y$

Encontrar:

a) Los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^{22}, \Gamma_{11}^2$$

b) Las componentes del tensor de Riemann  $R_{jkl}^i$

c) Las componentes del tensor de Riemann  $R_{ijkl}$

d) El escalar de Ricci o curvatura escalar  $R$

10) Considere la métrica:  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$

Escriba dos ecuaciones que resultan de las ecuaciones geodésicas

11) A partir de la segunda identidad de Bianchi:

$$R_{ijkl,u} + R_{ijlu,k} + R_{ijuk,l} = 0$$

$$\text{Comprobar que: } \left( R_i^r - \frac{1}{2} \delta_r^i R \right)_{,r} = 0$$

o  $G_{i,r}^r = 0$  donde:  $G_i^r$  es el tensor de Einstein y

$$\left( R_i^r - \frac{1}{2} \delta_i^r R \right) = G_i^r$$

## **TEMA III. COSMOLOGÍA**

### **III.1. Introducción**

La Cosmología tal como la conocemos actualmente ha venido evolucionando a partir del Modelo Mágico, donde se creía que los espíritus lo controlaban; el Modelo Mitológico, donde la mitología a través de semidioses, dioses creaban el Universo e intervenían en la vida de los hombres y en los fenómenos naturales, el Modelo Geocéntrico donde la Tierra era el centro del Universo, el Modelo Heliocéntrico, donde el Sol era el centro del Universo, el Modelo Newtoniano o Mecanicista, con un Universo estático, homogéneo, isotrópico, infinito en espacio (Euclídeo), tiempo y materia.

La Cosmología Moderna se inicia con la presentación de la relatividad general por Einstein en 1915, el descubrimiento de la expansión del Universo en 1929 por Hubble y la solución de las ecuaciones de campo por Friedmann en 1922, donde aparecen los modelos dinámicos del Universo que actualmente se trabajan.

La Cosmología Moderna estudia el origen, la estructura, la evolución y el posible destino del Universo.

Las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la curvatura y la masa-energía del Universo y si consideramos la métrica de Robertson- Walker que es una descripción de la geometría del espacio-tiempo cuando tenemos isotropía y homogeneidad se llega a la ecuación de Friedmann. La ecuación de Friedmann nos dice como el Universo se expande de acuerdo a la densidad de energía y a la curvatura que posee. El espacio-tiempo puede ser plano con curvatura nula, como la superficie de una esfera con curvatura positiva y como la silla de montar con curvatura negativa, por lo que

tendremos diferentes maneras en que el Universo se expande al considerar distintas curvaturas.

En la ecuación de Friedmann podemos definir una densidad de energía crítica que es la densidad de energía necesaria para tener un Universo con curvatura cero (plano) y el cociente entre la densidad de energía y la densidad de energía crítica se denomina parámetro de densidad  $\Omega$ , el cual nos indicará si el Universo es plano ( $\Omega = 1$ ), con curvatura positiva ( $\Omega > 1$ ) o con curvatura negativa ( $\Omega < 1$ ). O sea, si conocemos la densidad crítica y la densidad de energía sabremos que curvatura posee el Universo.

El parámetro de densidad total corresponderá a la suma de los parámetros de densidad de las componentes del Universo, es decir de las partículas no relativistas, la radiación y la constante cosmológica ( $\Lambda$ ) o sea  $\Omega_{total} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$ .

Todo lo que contiene materia ayuda a frenar la expansión del Universo por medio de la gravedad, por lo que durante mucho tiempo se pensó que nuestro Universo se estaba expandiendo cada vez mas lento, pero a comienzos de este siglo, gracias a los resultados obtenidos midiendo la luz de las Supernovas muy lejanas, se demostró que el Universo se expande aceleradamente, no linealmente, a grandes distancias, pero ¿qué produce esta expansión acelerada? Una posible explicación a este fenómeno es que existe una especie de fuerza repulsiva que hace que el espacio se expanda, dicha fuerza recibe el nombre de Energía Oscura y que constituye el 73 % de la composición del Universo.

La materia oscura forma el 23 % y la materia bariónica visible el 4 %.

El origen de Energía Oscura es un misterio aún y se puede modelar agregando un término en la ecuación de Friedmann denominado constante cosmológica  $\Lambda$  que es constante en el tiempo y no depende del volumen del espacio y también posee una



densidad de energía.

En el modelo actual, la evidencia observacional sugiere que vivimos en un Universo casi plano, con una expansión actualmente dominada por la Energía Oscura y con parámetros de densidad de materia  $\Omega_m = 0.3$ , un aproximadamente 0 para  $\Omega_r$  y un parámetro de densidad asociado a la Constante Cosmológica  $\Lambda = 0.7$ . Un hecho interesante es que en el parámetro de densidad asociado a la materia  $\Omega_m$  la materia que conocemos normalmente denominada materia bariónica (partículas compuestas de 3 quarks por ejemplo los protones, neutrones, etc.) aporta solo un  $\Omega_{bar} = 0.04$  y el resto lo aporta la denominada Materia Oscura o no bariónica  $\Omega_{no\ bar} = 0.26$ , que al igual que la Energía Oscura, su origen aún no está muy claro.

### **III.2. Presentación breve de los modelos históricos más importantes de Cosmología**

i. El Modelo Mágico, se le llama así, porque las primeras sociedades humanas creían que el mundo estaba poblado por espíritus que controlaban toda la manifestación de la vida y que se posesionaban de los animales, de las plantas y de las cosas.

Como ejemplo creían que los espíritus manifestaban su poder a través de las violentas fuerzas desencadenadas durante las tormentas, huracanes, erupciones, sequías, etc.

ii. El Modelo Mítico, se trató de explicar el origen del universo a partir de mitos, donde dioses, semidioses y héroes humanos y semihumanos forjaron un cosmos. En sus mitologías fue factor común permanente la lucha entre las fuerzas del bien y del mal representadas por dioses portadores de luz o de tinieblas.

Como ejemplos tenemos los siguientes:

a) a) Los Sumerios decían que el universo sumerio fue poblado por dioses y diosas engendrados por el caos, personificado por Tiamat, la diosa madre, y por Apsu, el dios padre identificado con el océano, y de cuya unión surgieron el hombre y los

animales. En una lucha entre Marduk (Júpiter) y las deidades protectoras de Tiamat, éste las aniquiló incluyéndola a ella. Después partió el cadáver divino en dos: levantando una parte formó el cielo, mientras que la otra la puso a sus pies y surgió entonces la tierra.

- b) Un modelo chino antiguo afirmaba que el Universo era como un huevo cuya yema sería la Tierra, que descansaba sobre el agua, mientras que el cielo, sostenido por vapores emanados del océano, equivalía al cascarón.
- c) En los Incas, Viracocha: Esplendor originario, Señor, Maestro del mundo, surgió del agua, creó el cielo y la tierra y la primera generación de gigantes que vivían en la oscuridad. Etc.

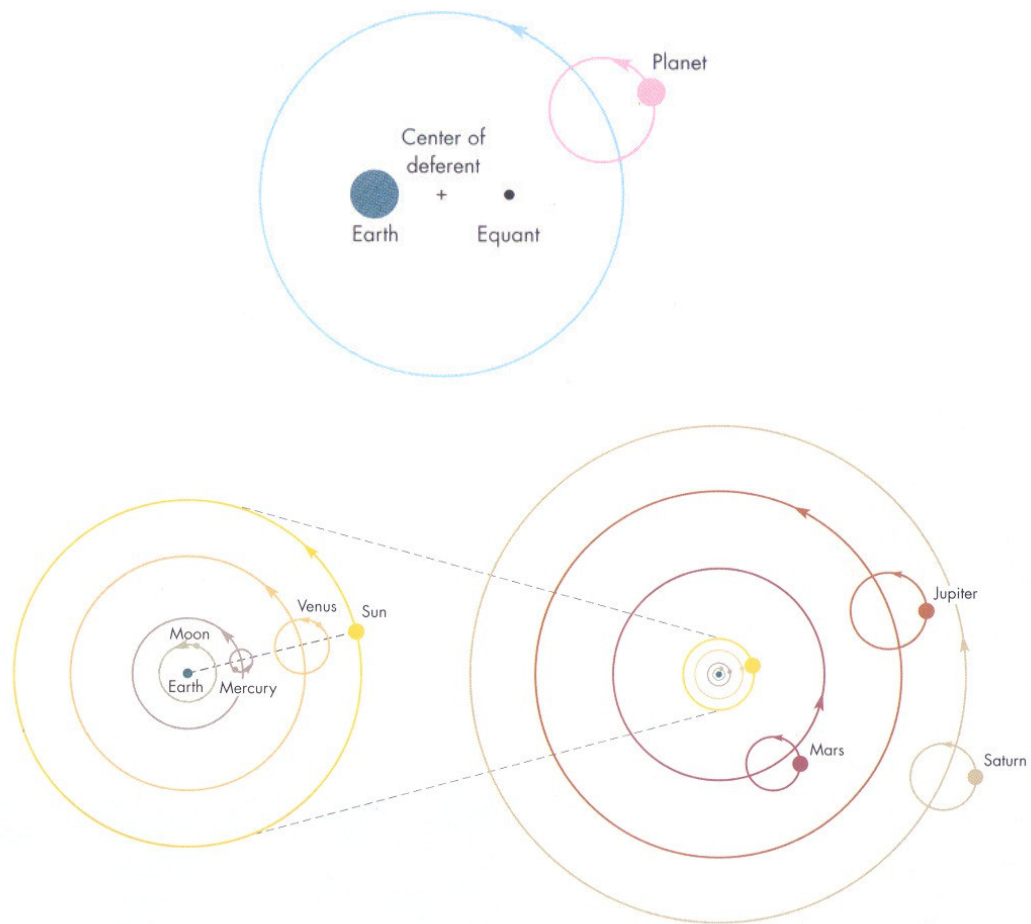
Así las diferentes culturas, en América desarrollaron sus propias cosmogonías.

### iii. El Modelo Geocéntrico

La teoría geocéntrica es la teoría que coloca a la Tierra en el centro del Universo y los planetas, incluido el Sol, giran alrededor de ella. Esta teoría fue formulada por Aristóteles (en su forma más acabada desde el sentido común) y mantenida hasta el siglo XVI, fue completada por Claudio Ptolomeo en el siglo II a. d. C en su obra El Almagesto, introduciendo los llamados epiciclos y deferentes.

En el sistema Ptolomeico, cada planeta es movido por dos o más esferas: una esfera es su deferente que se centra en la tierra, la otra esfera es el epiciclo que se encaja en el deferente. El planeta se encaja en la esfera del epiciclo. El deferente rota alrededor de la tierra mientras que el epiciclo rota alrededor del deferente, haciendo el planeta moverse más cercano y más lejos desde la tierra en diversos puntos en su órbita.

Gráfico 11. Sistema Ptolomeico



#### iv. El modelo Heliocéntrico.

La teoría heliocéntrica fue propuesta por Nicolás Copérnico con la publicación en 1543, del libro *De Revolutionibus*, el cual afirma que la Tierra y los demás planetas giraban en torno al Sol estacionario. Esta publicación marcó el comienzo de una revolución en astronomía.

La teoría dice que la Tierra se movía en el espacio (en una órbita elíptica, corrección debida a Kepler, que fue adoptada con las teorías de Newton), como un planeta más, y que el complicado movimiento de los planetas en el cielo era el resultado del movimiento de la Tierra alrededor del Sol combinado con la propia rotación terrestre.

Después los trabajos de Tycho Brahe, Kepler, Galileo y Newton confirmaron la teoría heliocéntrica.

Sin embargo, fue Aristarco de Samos quien primero propuso la teoría heliocéntrica, basándose en medidas sencillas de la distancia de la tierra al sol, que determinaban un tamaño del Sol mucho mayor que el de nuestro planeta. Por esta razón, Aristarco propuso que era la Tierra la que giraba alrededor del Sol y no a la inversa.

v. Modelo de Isaac Newton.

Consideró al Universo como un todo, estático, eterno, homogéneo, isotrópico, infinito, el tiempo absoluto e independiente del espacio, éste absoluto, infinito y Euclídeo tridimensional y la gravedad como una fuerza atractiva y de acción instantánea a distancia.

Los tres modelos cosmológicos anteriores se les consideran dentro de la cosmología clásica.

### **III.3. Cosmología Moderna**

#### **III.3.1. Introducción**

La Cosmología Moderna se inicia desde dos facetas: i) una teórica, ii) una experimental.

i) La Teórica se inicia con la presentación en 1915 de la Teoría General de la Relatividad por el físico judío-alemán Albert Einstein, y que plantea que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo producida por la presencia de la materia y energía y no una fuerza atractiva y de acción instantánea que era la teoría de Isaac Newton (1642-1727).

ii) La aparición de nuevos y potentes instrumentos astronómicos; como los grandes telescopios de reflexión y radiotelescopios.

En 1924, el astrónomo estadounidense Edwin Hubble (1889-1953), con el más avanzado telescopio de su época en el Monte Wilson, California, descubrió que todas las galaxias se alejaban de la Vía Láctea y lo hacen con una velocidad tanto más grande cuanto más lejanas se encuentran (mayor desplazamiento al rojo de su espectro). Lo anterior implica, nada más y nada menos, que aceptar que el Universo se expande y no es estático.

Dentro de los diferentes modelos sobre el universo tenemos varias teorías o modelos, pero el más aceptado por la comunidad científica sean astrónomos, astrofísicos, cosmólogos, etc. es el “Modelo Estándar Cosmológico, Big Bang o Gran Explosión, y actualmente, es objeto de mucha investigación teórica y experimental. Este modelo descansa sobre algunos pilares teóricos que han sido comprobados experimentalmente a través de los años, por equipos de experimentación cada vez más avanzados en los países más desarrollados, como son la expansión del universo, la edad finita del universo, la radiación cósmica de fondo, etc.

La Cosmología es la rama de la física que estudia: el origen, la estructura, evolución y destino del universo, actualmente el modelo que se usa para las pruebas experimentales es el “Modelo Estándar o Big Bang” que se apoya en la moderna astronomía, astrofísica, el modelo estándar de la física de partículas, etc.

#### **III.4. Deducción de la métrica de Robertson-Walker**

La métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker o modelo FLRW es una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein de la relatividad general, describe un Universo en expansión o contracción, homogéneo e isótropo (principio cosmológico) y describe un Universo lleno de un fluido ideal con densidad y presión dada por las ecuaciones de Friedmann. También asume que la componente espacial de la métrica debe ser dependiente del tiempo.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (III.1)$$

En la ecuación anterior  $\left( \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right)$  representa la parte espacial,  $c^2 dt^2$  la parte temporal y  $R_{(t)}^2$  (algunas veces se usa, como simbología  $a_{(t)}^2$ ) el factor de escala dependiente únicamente del tiempo y afectando la parte espacial.

### 1) Métrica de Robertson-Walker.

Deducción.

Sean las coordenadas:  $x^1 = x$ ;  $x^2 = y$ ;  $x^3 = z$  (III.2)

$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = a^2$  (III.3) la ecuación de la hiperesfera de radio  $a$ .

El elemento de línea viene dado por la expresión:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (III.4)$$

Despejando:  $(x^4)^2$  de la ecuación (III.3) tenemos:

$$(x^4)^2 = a^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] \quad (III.5)$$

Diferenciando la ecuación (III.3) obtenemos:

$2x^1 dx^1 + 2x^2 dx^2 + 2x^3 dx^3 + 2x^4 dx^4 = 0$  (III.6) dividiendo entre (2) se obtiene la expresión:

$$x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 + x^4 dx^4 = 0 \quad (III.7)$$

$$\text{despejando } dx^4 = -\left( \frac{x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3}{x^4} \right) \quad (III.8)$$

Pero:  $x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 = r dr$  (III.9) luego sustituyendo (III.9) en la ecuación (III.8) se obtiene la expresión:

$$dx^4 = -\frac{r dr}{x^4} \quad (III.10) \text{ elevando al cuadrado esta expresión obtenemos:}$$

$$(dx^4)^2 = \frac{r^2 dr^2}{(x^4)^2} \quad (III.11) \text{ sustituyendo la ecuación (III.11) y (III.5) en la}$$

ecuación (III.4) se obtiene la expresión

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2} \quad (III.12)$$

De las coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}x^1 &= r \sin \theta \cos \phi \\x^2 &= r \sin \theta \sin \phi \\x^3 &= r \cos \theta\end{aligned}\quad (\text{III.13})$$

Calculando los diferenciales al cuadrado en las coordenadas esféricas:

$(dx^1)^2, (dx^2)^2, (dx^3)^2$  se obtiene la expresión siguiente:

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + r^2 d\theta^2 \quad (\text{III.14}) \text{ y sustituyendo en el elemento de}$$

línea  $dl^2$  se obtiene la expresión:

$$dl^2 = dr^2 + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{III.15}) \text{ agrupando términos.}$$

$$= \frac{(a^2 - r^2) dr^2 + r^2 dr^2}{a^2 - r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$= \frac{a^2 dr^2 - r^2 \cancel{dr^2} + r^2 \cancel{dr^2}}{a^2 - r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \text{ dividiendo entre } a^2 \text{ el primer término de la}$$

expresión en el lado derecho.

$$\begin{aligned}& \frac{\cancel{a^2} dr^2}{\cancel{a^2}} \\&= \frac{\cancel{a^2}}{\cancel{a^2} - r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\& \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{III.16})\end{aligned}$$

Usando la métrica de un espacio homogéneo e isótropo.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R_{(t)}^2 dl^2 \quad (\text{III.17}) \text{ forma general} \quad \text{el factor}$$

de escala  $R_{(t)}^2$ , que mide la expansión o contracción del Universo, es una función solamente del tiempo.

Sustituyendo  $dl^2$  y  $a^{-2} = K$  en la métrica de un espacio homogéneo e isótropo obtenemos la Métrica de Robertson- Walker.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R_{(t)}^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (\text{III.18})$$

$k$ = constante de curvatura, toma los valores:  $k = 0$  (espacio plano),  $k = 1$  (espacio esférico),  $k = -1$  (espacio hiperbólico).

### III.5. Solución de la ecuación de Einstein, usando la métrica de Robertson-Walker, para obtener los modelos de Friedmann.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (III.19)$$

una ecuación tetradimensional con coordenadas  $(ct, r, \theta, \phi)$  donde:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi \quad (III.20)$$

Es decir, podemos identificar los términos del tensor métrico

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -\frac{R^2}{1-Kr^2}, \quad g_{22} = -R^2 r^2, \quad g_{33} = -R^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (III.21)$$

$$g_{ik} = 0 \quad \text{si } i \neq k$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R^2}{(1-kr^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (III.22)$$

El determinante del tensor métrico  $g_{ik}$  se puede obtener por medio de los elementos adjuntos de la tercera fila:

$$g_{20}^0 G(2,0) + g_{21}^0 G(2,1) + g_{22}^0 G(2,2) + g_{23}^0 G(2,3) = g$$

$$g_{22}^0 G(2,2) = g$$

$$-R^2 r^2 G(2,2) = g \quad (III.23)$$

$$G(2,2) = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R^2}{1-Kr^2} & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix}$$

$$= (1) \left\{ 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -R^2 & 0 \\ 0 & -R^2 r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} (0) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R^2 r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} (0) \begin{vmatrix} 0 & -R^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$



$$= (1) \left[ \left( \frac{-R^2}{1-Kr^2} \right) (-R^2 r^2 \text{sen}^2 \theta) - (0)(0) \right] + 0 + 0$$

$$G = \frac{R^4 r^2 \text{sen}^2 \theta}{1-Kr^2}$$

$$g = g_{22} G(2, 2)$$

$$g = \frac{R^4 r^2 \text{sen}^2 \theta}{1-Kr^2} x(-R^2 r^2)$$

$$g = -\frac{R^6 r^4 \text{sen}^2 \theta}{1-Kr^2} \quad (III.25)$$

Los componentes de la matriz conjugada se calculan a partir de la expresión:

$$g^{ik} = \frac{\text{adj}.g^{ik}}{g} \quad (III.26)$$

$g^{ik}$  se le llama tensor métrico conjugado y es cero, si  $i \neq k$

$$g^{00} = \frac{\text{Adj}.g_{00}}{g}$$

$$\text{Adj}.g_{00} = (-1)^{0+0} \begin{vmatrix} -R^2 & 0 & 0 \\ 1-Kr^2 & 0 & 0 \\ 0 & -R^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 r^2 \text{sen}^2 \theta \end{vmatrix}$$

$$= \left( \frac{-R^2}{(1-Kr^2)} \right) x(-R^2 r^2) x(-R^2 r^2 \text{sen}^2 \theta)$$

$$= \frac{-R^6 r^4 \text{sen}^2 \theta}{1-Kr^2} \quad (III.27)$$

$$g^{00} = \frac{\frac{-R^6 r^4 \text{sen}^2 \theta}{1-Kr^2}}{\frac{-R^6 r^4 \text{sen}^2 \theta}{1-Kr^2}} = 1$$

$$g^{00} = 1 \quad (III.28)$$

$$g^{11} = \frac{Adj.g_{11}}{g} \quad (III.29)$$

$$\begin{aligned} Adj.g_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -R^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 r^2 \text{sen}^2 \theta \end{vmatrix} \\ &= (1)x(-R^2 r^2)x(-R^2 r^2 \text{sen}^2 \theta) \\ &= R^4 r^4 \text{sen}^2 \theta \end{aligned} \quad (III.30)$$

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{\mathcal{K}^4 \gamma^4 \text{sen}^2 \theta}{\frac{-\mathcal{K}^6 \gamma^4 \text{sen}^2 \theta}{1 - Kr^2}} \\ g^{11} &= -\frac{(1 - Kr^2)}{R^2} \end{aligned} \quad (III.31)$$

$$g^{22} = \frac{G(2,2)}{g} \quad (III.32)$$

$$\begin{aligned} G(2,2) &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-R^2}{1 - Kr^2} & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 r^2 \text{sen}^2 \theta \end{vmatrix} \\ &= (1)x\left(\frac{-R^2}{1 - Kr^2}\right)x(-R^2 r^2 \text{sen}^2 \theta) \\ &= \frac{R^4 r^2 \text{sen}^2 \theta}{1 - Kr^2} \end{aligned} \quad (III.33)$$

$$\begin{aligned} g^{22} &= \frac{G(2,2)}{g} = \frac{\frac{R^4 r^2 \text{sen}^2 \theta}{1 - Kr^2}}{\frac{-R^6 r^4 \text{sen}^2 \theta}{1 - Kr^2}} = \frac{(1 - Kr^2)(R^4 r^2 \text{sen}^2 \theta)}{(1 - Kr^2)(-R^6 r^4 \text{sen}^2 \theta)} \\ g^{22} &= -\frac{1}{R^2 r^2} = -(Rr)^{-2} \end{aligned} \quad (III.34)$$

$$g^{33} = \frac{G(3,3)}{g} \quad (III.35)$$

$$G(3,3) = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-R^2}{1-Kr^2} & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 r^2 \end{vmatrix} = (1) \left( \frac{-R^2}{1-Kr^2} \right) (-R^2 r^2)$$

$$G(3,3) = \frac{R^4 r^2}{1-Kr^2} \quad (III.36)$$

$$g^{33} = \frac{\frac{R^4 r^2}{1-Kr^2}}{-\frac{R^6 r^4 \text{sen}^2 \theta}{1-Kr^2}} = -\frac{(1-Kr^2)(R^4 r^2)}{(1-Kr^2)(R^6 r^4 \text{sen}^2 \theta)}$$

$$g^{33} = -\frac{1}{R^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} = -(rR \text{sen} \theta)^{-2} \quad (III.37)$$

Cálculo de los símbolos de Christoffel de segunda clase, usando los tensores métricos y sus conjugados.

Se pueden simbolizar de las siguientes maneras:  $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = \Gamma_{jk}^i$

Usaremos el símbolo:  $\Gamma_{jk}^i$

Se definen como una relación entre los símbolos de Christoffel de primera especie  $[jk, l]$  y las componentes contravariantes del tensor métrico fundamental  $g^{il}$ .

$$\Gamma_{jk}^i = g^{il} [jk, l] \quad (III.38)$$

Donde el símbolo de Christoffel de primera clase se simboliza así:

$\Gamma_{ijk} = [ij, k]$  y se definen así:

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(g_{jk})}{\partial x^i} + \frac{\partial(g_{ik})}{\partial x^j} - \frac{\partial(g_{ij})}{\partial x^k} \right] \quad (III.39)$$

usando el símbolo  $[ij, k]$

$$\Gamma_{jk}^i = g^{il} [jk, l]$$

$$g^{il} = 0 \rightarrow i \neq l$$

Para calcular los símbolos de Christoffel de segunda especie no nulos, haremos uso de los tensores métricos conjugados:  $g^{00}, g^{11}, g^{22}, g^{33}$ , los símbolos de Christoffel de primera especie  $[jk, l]$  y los tensores métricos:  $g_{00}, g_{11}, g_{22}$  y  $g_{33}$  ya encontrados.

$$g^{00} = 1, g^{11} = -\frac{(1-Kr^2)}{R^2}, g^{22} = -\frac{1}{R^2 r^2}, g^{33} = -\frac{1}{R^2 r^2 \sin^2 \theta}$$

$$g_{00} = 1, g_{11} = -\frac{R^2}{1-Kr^2}, g_{22} = -R^2 r^2, g_{33} = -R^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (III.40)$$

$$1) \Gamma_{11}^0, 2) \Gamma_{22}^0, 3) \Gamma_{33}^0 \quad (III.41)$$

$$1) \Gamma_{11}^0 = g^{00} [11, 0] = g^{00} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right]$$

$$\Gamma_{11}^0 = 1x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{10}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}^0}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \left( -\frac{R^2}{1-Kr^2} \right)}{\partial ct} \right]$$

$$= \frac{1}{Z} \left[ \frac{\partial \left( -Z R \dot{R} \right)}{c(1-Kr^2)} \right] = \frac{c^{-1} R \dot{R}}{1-Kr^2} \quad (III.42)$$

$$2) \Gamma_{22}^0 = g^{00} x \frac{1}{2} [22, 0]$$

$$= g^{00} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{20}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}^0}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \right]$$

$$= 1x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \left( -r^2 R^2 \right)}{\partial ct} \right]$$

$$= \frac{1}{Z} \left( \frac{Z r^2 R \dot{R}}{c} \right)$$

$$= c^{-1} r^2 R \dot{R} \quad (III.43)$$

$$\begin{aligned}
3) \Gamma_{33}^0 &= g^{00} x \frac{1}{2} [33,0] = g^{00} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{30}^0}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}^0}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}^0}{\partial x^0} \right] \\
&= 1x \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial (-R^2 r^2 \text{sen}^2 \theta)}{\partial ct} \right] \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}} \left[ -\frac{\mathcal{Z} R \dot{R} r^2 \text{sen}^2 \theta}{c} \right] \\
&= c^{-1} R \dot{R} r^2 \text{sen}^2 \theta \quad (III.44)
\end{aligned}$$

Calculo de: 4)  $\Gamma_{01}^1$  5)  $\Gamma_{11}^1$  6)  $\Gamma_{22}^1$  7)  $\Gamma_{33}^1$

$$\begin{aligned}
4) \Gamma_{01}^1 &= g^{11} x [01,1] = g^{11} x \left[ \frac{\partial g_{11}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}^0}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}^0}{\partial x^1} \right] \\
&= \frac{-(1-Kr^2)}{R^2} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \left( \frac{-R^2}{1-Kr^2} \right)}{\partial ct} \right] \\
&= \frac{-(1-Kr^2)}{R^2} x \frac{1}{\mathcal{Z}} \left[ \frac{-\mathcal{Z} \dot{R} R}{1-Kr^2} \right] \\
&= \frac{c^{-1} \dot{R}}{R} \quad (III.45)
\end{aligned}$$

$$5) \Gamma_{11}^1 = g^{11} x \frac{1}{2} [11,1] = g^{11} x \left[ \frac{\partial g_{11}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}^0}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}^0}{\partial x^1} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= g^{11}x \left[ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right] \\
&= -\frac{(1-Kr^2)}{R^2} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \left( -\frac{R^2}{1-Kr^2} \right)}{\partial r} \right] \\
&= -\frac{(1-Kr^2)}{R^2} x \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-Kr^2) \cdot \partial r (R^2) - (R^2) \partial r (1-Kr^2)}{(1-Kr^2)^2} \right] \\
&= \frac{(-R^2)(-2Kr)}{2R^2(1-Kr^2)} \\
&= \frac{2R^2 Kr}{2R^2(1-Kr^2)} \\
&= \frac{Kr}{1-Kr^2} \quad (III.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \Gamma_{22}^1 &= g^{11}x[22,1] = g^{11}x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{21}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}^0}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right] \\
&= -\frac{(1-Kr^2)}{R^2} x \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right] \\
&= -\frac{(1-Kr^2)}{R^2} x \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial (-r^2 R^2)}{\partial r} \right] \\
&= -\frac{(1-Kr^2)}{R^2} x \frac{1}{2} \left[ 2rR^2 \right] \\
&= -r(1-Kr^2) \quad (III.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) \Gamma_{33}^1 &= g^{11}x[33,1] = g^{11}x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{31}^0}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}^0}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right] \\
&= -\frac{1-Kr^2}{R^2} x \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial (-R^2 r^2 \text{sen}^2 \theta)}{\partial r} \right] \\
&= -\frac{1-Kr^2}{R^2} x \frac{1}{2} \left[ R^2 2r \text{sen}^2 \theta \right] \\
&= -r(1-Kr^2) \text{sen}^2 \theta \quad (III.48)
\end{aligned}$$

Cálculo de los símbolos de Christoffel:

8)  $\Gamma_{02}^2$ , 9)  $\Gamma_{12}^2$ , 10)  $\Gamma_{33}^2$  11)  $\Gamma_{03}^3$ , 12)  $\Gamma_{13}^3$ , 13)  $\Gamma_{23}^3$

$$\begin{aligned}
 8) \Gamma_{02}^2 &= g^{22} x [02, 2] = g^{22} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{02}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}^0}{\partial x^0} \right] \\
 &= -(rR)^{-2} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(-r^2 R^2)}{\partial ct} \right] \\
 &= -(rR)^{-2} x \frac{1}{\mathcal{Z}} \left[ \frac{-r^2 \mathcal{Z} R \dot{R}}{c} \right] \\
 &= \frac{\mathcal{Y}^2 R \dot{R}}{c (\mathcal{Y} R)^2} \\
 &= \frac{\dot{R} c^{-1}}{R} \quad (III.49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \Gamma_{12}^2 &= g^{22} x [12, 2] = g^{22} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}^0}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}^0}{\partial x^2} \right] \\
 &= -(rR)^{-2} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(-r^2 R^2)}{\partial r} \right] \\
 &= -\frac{1}{(r\mathcal{K})^2} x \frac{1}{\mathcal{Z}} [-\mathcal{Z} r \mathcal{K}^2] \\
 &= \frac{1}{r} \quad (III.50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \Gamma_{33}^2 &= g^{22} x [33, 2] = g^{22} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{32}^0}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{23}^0}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right] \\
 &= -(rR)^{-2} x \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial(-R^2 r^2 \text{sen}^2 \theta)}{\partial \theta} \right] \\
 &= -(rR)^{-2} x \frac{1}{\mathcal{Z}} [-(-R^2 r^2 \mathcal{Z} \text{sen} \theta \cos \theta)] \\
 &= -(r\mathcal{K})^{-2} x (\mathcal{K}^2 r^2) \text{sen} \theta \cos \theta \\
 &= -\text{sen} \theta \cos \theta \quad (III.51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11) \Gamma_{03}^3 &= g^{33} x [03,3] = g^{33} x \left[ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{30}^0}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{03}^0}{\partial x^3} \right] \\
&= -(rR \operatorname{sen} \theta)^{-2} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (-R^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}{\partial ct} \right] \\
&= -\frac{1}{(rR \operatorname{sen} \theta)^2} x \frac{1}{\mathcal{Z}} \left[ \frac{-\mathcal{Z} R \dot{R} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{c} \right] \\
&= \frac{c^{-1} \dot{R}}{R} \quad (III.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12) \Gamma_{13}^3 &= g^{33} x [13,3] = g^{33} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{31}^0}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}^0}{\partial x^3} \right] \\
&= -\frac{1}{r^2 R^2 \operatorname{sen}^2 \theta} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (-R^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}{\partial r} \right] \\
&= -\frac{1}{r^2 R^2 \operatorname{sen}^2 \theta} x \frac{1}{2} \left[ -R^2 \mathcal{Z} r \operatorname{sen}^2 \theta \right] \\
&= \frac{1}{r} \quad (III.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13) \Gamma_{23}^3 &= g^{33} [23,3] = g^{33} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{32}^0}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}^0}{\partial x^3} \right] \\
&= -\frac{1}{r^2 R^2 \operatorname{sen}^2 \theta} x \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (-R^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}{\partial \theta} \right] \\
&= -\frac{1}{r^2 R^2 \operatorname{sen}^2 \theta} x \frac{1}{\mathcal{Z}} \left[ -R^2 r^2 \mathcal{Z} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right] \\
&= \cot \theta \quad (III.54)
\end{aligned}$$

Cálculo del tensor de Ricci.

a) El tensor de Ricci de primera clase es  $R_{ij}$  es covariante de segundo orden y es definido como una contracción del tensor de Riemann de segunda clase  $R^l_{ijk}$  o sea si igualamos  $l=k$  obtenemos  $R_{ij} = R^k_{ijk}$  donde  $R^k_{ijk}$  es un tensor de cuarto orden tres veces covariante y una vez contravariante.



$$R_{ij} = R_{ijk}^k = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^k \quad (III.55)$$

Usando los símbolos de Christoffel no nulos calculados, para encontrar el tensor de Ricci  $R_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{c^{-1} R \dot{R}}{1 - Kr^2}, \quad \Gamma_{22}^0 = c^{-1} r^2 R \dot{R}, \quad \Gamma_{33}^0 = c^{-1} R \dot{R} r^2 \text{sen}^2 \theta \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{Kr}{1 - Kr^2}, \quad \Gamma_{01}^1 = \frac{c^{-1} \dot{R}}{R}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1 - Kr^2), \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1 - Kr^2) \text{sen}^2 \theta \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{Rc^{-1}}{R}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\text{sen} \theta \cos \theta \\ \Gamma_{23}^3 &= \frac{c^{-1} \dot{R}}{R}, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \end{aligned} \quad (III.56)$$

$$\begin{aligned} 1) \quad R_{00} &= \frac{\partial \mathcal{V}_{00}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^0} + \mathcal{V}_{00}^l \Gamma_{l1}^1 - \Gamma_{01}^l \Gamma_{0l}^1 \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{R}}{cR} \right) - \left( \frac{\dot{R}}{cR} \right) \left( \frac{\dot{R}}{cR} \right) \\ &= -\frac{R \left( \ddot{R} \right) - \left( \dot{R} \right) \left( \dot{R} \right)}{c^2 R^2} - \left( \frac{\dot{R}}{cR} \right) \left( \frac{\dot{R}}{cR} \right) \\ &= -\frac{R \left( \ddot{R} \right) + \left( \dot{R} \right)^2 - \left( \dot{R} \right)^2}{c^2 R^2} \\ &= -\frac{\mathcal{K} \left( \ddot{R} \right)}{c^2 R^2} \\ R_{00} &= -\frac{\ddot{R}}{c^2 R} \quad (III.57) \end{aligned}$$

$$2) \quad R_{00} = \frac{\partial \mathcal{V}_{00}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{20}^2}{\partial x^0} + \Gamma_{2l}^2 \mathcal{V}_{00}^l - \Gamma_{02}^l \Gamma_{0l}^2$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial}{ct} \left[ \frac{\dot{R}}{cR} \right] - \left( \frac{\dot{R}}{cR} \right) \left( \frac{\dot{R}}{cR} \right) \\
&= -\frac{R \left( \ddot{R} \right) - \left( \dot{R} \right) \left( \dot{R} \right)}{cR^2} - \frac{\left( \dot{R} \right)^2}{c^2 R^2} \\
&= \frac{-R \left( \ddot{R} \right) + \left( \dot{R} \right)^2 - \left( \dot{R} \right)^2}{c^2 R^2} \\
&= \frac{-R \left( \ddot{R} \right)}{c^2 R^2} \\
R_{00} &= -\frac{\ddot{R}}{c^2 R} \quad (III.58)
\end{aligned}$$

$$3) \quad R_{00} = \frac{\partial \mathcal{F}_{00}^3}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_{30}^3}{\partial x^0} + \Gamma_{3l}^3 \mathcal{F}_{00}^l - \Gamma_{03}^l \Gamma_{0l}^3$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{\partial}{ct} \left[ \frac{\dot{R}}{cR} \right] - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 \\
R_{00} &= -\frac{R \left( \ddot{R} \right) - \dot{R} \dot{R}}{c^2 R^2} - \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} \\
R_{00} &= \frac{-R \left( \ddot{R} \right) + \left( \dot{R} \right)^2 - \left( \dot{R} \right)^2}{c^2 R^2} \\
R_{00} &= -\frac{\ddot{R}}{c^2 R} \quad (III.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= (1) + (2) + (3) \\
&= -\frac{\ddot{R}}{c^2 R^2} - \frac{\ddot{R}}{c^2 R^2} - \frac{\ddot{R}}{c^2 R^2} \\
R_{00} &= -3 \frac{\ddot{R}}{c^2 R^2} \quad (III.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) R_{11} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathcal{Y}_{10}^0}{\partial x^1} + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{11}^0 \mathcal{Y}_{00}^0 \\
R_{11} &= \frac{\partial}{\partial ct} \left[ \frac{R \dot{R}}{c(1-Kr^2)} \right] + \left( \frac{\mathcal{K} \dot{R}}{c(1-Kr^2)} \right) \left( \frac{\dot{R}}{c\mathcal{K}} \right) \\
R_{11} &= \frac{R(\ddot{R}) + (\dot{R})^2}{c^2(1-Kr^2)} + \frac{(\dot{R})^2}{c^2(1-Kr^2)} \\
R_{11} &= \frac{R(\ddot{R}) + 2(\dot{R})^2}{c^2(1-Kr^2)} \quad (III.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) R_{11} &= \frac{\partial \mathcal{Y}_{11}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2 \\
R_{11} &= -\partial r \left( \frac{1}{r} \right) + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 \\
R_{11} &= \frac{1}{r^2} + \frac{K\mathcal{Y}}{1-Kr^2} x \frac{1}{\mathcal{Y}} - \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r} \right) \\
R_{11} &= \frac{1}{\mathcal{Y}^2} + \frac{K}{1-Kr^2} - \frac{1}{\mathcal{Y}^2} \\
R_{11} &= \frac{K}{1-Kr^2} \quad (III.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) R_{11} &= \frac{\partial \mathcal{Y}_{11}^3}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial x^1} + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{13}^3 \\
R_{11} &= -\partial r \left( \frac{1}{r} \right) + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3 \\
R_{11} &= \frac{1}{r^2} + \left( \frac{1}{\mathcal{Y}} \right) \left( \frac{K\mathcal{Y}}{1-Kr^2} \right) - \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r} \right) \\
R_{11} &= \frac{1}{\mathcal{Y}^2} + \frac{K}{1-Kr^2} - \frac{1}{\mathcal{Y}^2} \\
R_{11} &= \frac{K}{1-Kr^2} \quad (III.63)
\end{aligned}$$

$$R_{11} = (4) + (5) + (6)$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{R(\ddot{R}) + 2(\dot{R})^2}{c^2(1-Kr^2)} + \frac{K}{1-Kr^2} + \frac{K}{1-Kr^2} \\
R_{11} &= \frac{R(\ddot{R}) + 2(\dot{R})^2 + 2c^2K}{c^2(1-Kr^2)} \quad (III.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) R_{22} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^0}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathcal{F}_{02}^0}{\partial x^0} + \mathcal{F}_{0l}^0 \Gamma_{22}^l - \mathcal{F}_{20}^l \Gamma_{2l}^0 \\
R_{22} &= \frac{\partial}{\partial ct} \left( \frac{r^2 R \dot{R}}{c} \right) \\
R_{22} &= \frac{r^2}{c^2} \left[ R \left( \ddot{R} \right) + \left( \dot{R} \right)^2 \right] \\
R_{22} &= \left[ \frac{r^2 R \left( \ddot{R} \right) + \left( \dot{R} \right)^2}{c^2} \right] \quad (III.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) R_{22} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathcal{F}_{12}^1}{\partial x^2} + \Gamma_{1l}^1 \Gamma_{22}^l - \Gamma_{21}^l \Gamma_{1l}^1 \\
R_{22} &= \partial r \left( -r(1 - Kr^2) \right) + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{21}^2 \mathcal{F}_{12}^1 \\
R_{22} &= \partial r \left( -r + Kr^3 \right) + \left( \frac{Kr}{1 - Kr^2} \right) \left[ -r(1 - Kr^2) \right] \\
R_{22} &= -1 + 3Kr^2 - Kr^2 \\
R_{22} &= -1 + 2Kr^2 \quad (III.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9) R_{22} &= \frac{\partial \mathcal{F}_{22}^3}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial x^2} + \Gamma_{3l}^3 \Gamma_{22}^l - \Gamma_{23}^l \Gamma_{3l}^3 \\
R_{22} &= -\partial \theta (\cot \theta) + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\
R_{22} &= -(-\csc^2 \theta) + \left( \frac{\dot{R}}{c\dot{R}} \right) \left( \frac{r^2 \dot{R} \dot{R}}{c} \right) - (\cot \theta)(\cot \theta) \\
R_{22} &= \csc^2 \theta + \frac{r^2 \left( \dot{R} \right)^2}{c^2} - \cot^2 \theta \\
R_{22} &= 1 + \cancel{\cot^2 \theta} - \cancel{\cot^2 \theta} + \frac{r^2 \left( \dot{R} \right)^2}{c^2} \\
R_{22} &= 1 + \frac{r^2 \left( \dot{R} \right)^2}{c^2} \quad (III.67)
\end{aligned}$$

$$R_{22} = (7) + (8) + (9)$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \frac{r^2 R \left( \ddot{R} \right) + r^2 \left( \dot{R} \right)^2}{c^2} - \lambda + 2Kr^2 + \lambda + \frac{r^2 \left( \dot{R} \right)^2}{c^2} \\
R_{22} &= \frac{r^2 R \left( \ddot{R} \right) + r^2 \left( \dot{R} \right)^2 + 2Kc^2 r^2 + r^2 \left( \dot{R} \right)^2}{c^2} \\
R_{22} &= \frac{r^2 R \left( \dot{R} \right)^2 + 2r^2 \left( \dot{R} \right)^2 + 2Kc^2 r^2}{c^2} \\
R_{22} &= \frac{r^2 \left[ R \ddot{R} + 2 \left( \dot{R} \right)^2 + 2c^2 K \right]}{c^2} \quad (III.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10) R_{33} &= \frac{\partial \Gamma_{33}^0}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathcal{F}_{03}^3}{\partial x^3} + \mathcal{F}_{0l}^0 \Gamma_{33}^l - \Gamma_{30}^l \Gamma_{3l}^0 \\
R_{33} &= \frac{\partial}{\partial ct} \left[ \frac{r^2 \text{sen}^2 \theta R \dot{R}}{c} \right] + \mathcal{F}_{03}^0 \Gamma_{33}^3 - \mathcal{F}_{30}^0 \Gamma_{30}^0 \\
R_{33} &= \frac{r^2 \text{sen}^2 \theta \left[ R \ddot{R} + \left( \dot{R} \right)^2 \right]}{c^2} \\
R_{33} &= \frac{r^2 \text{sen}^2 \theta R \left( \ddot{R} \right) + r^2 \text{sen}^2 \theta \left( \dot{R} \right)^2}{c^2} \quad (III.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11) R_{33} &= \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathcal{F}_{13}^1}{\partial x^3} + \Gamma_{1l}^1 \Gamma_{33}^l - \mathcal{F}_{31}^l \Gamma_{3l}^1 \\
R_{33} &= \partial r \left( -r \left( 1 - Kr^2 \right) \text{sen}^2 \theta \right) + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^1 - \mathcal{F}_{31}^1 \Gamma_{33}^1 \\
R_{33} &= \partial r \left( -r \left( 1 + Kr^3 \right) \text{sen}^2 \theta \right) + \left( \frac{Kr}{1 - Kr^2} \right) x \left[ -r \left( 1 - Kr^2 \right) \text{sen}^2 \theta \right] \\
R_{33} &= -\text{sen}^2 \theta + 3Kr^2 \text{sen}^2 \theta + \left( \frac{Kr}{1 - Kr^2} \right) x \left[ -r \left( 1 - Kr^2 \right) \text{sen}^2 \theta \right] \\
R_{33} &= -\text{sen}^2 \theta + 3Kr^2 \text{sen}^2 \theta - Kr^2 \text{sen}^2 \theta \\
R_{33} &= -\text{sen}^2 \theta + 2Kr^2 \text{sen}^2 \theta \quad (III.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12) R_{33} &= \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathcal{V}_{23}^2}{\partial x^3} + \Gamma_{2l}^2 \Gamma_{33}^l - \Gamma_{32}^l \Gamma_{3l}^2 \\
R_{33} &= \partial \theta (-\text{sen} \theta \cos \theta) + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
R_{33} &= -[\cos \theta \cos \theta - \text{sen} \theta \text{sen} \theta] + \left( \frac{\dot{R}}{cK} \right) x \left( \frac{r^2 \text{sen}^2 \theta \dot{R}}{c} \right) - [\cot \theta x - \text{sen} \theta \cos \theta] \\
R_{33} &= -[\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta] + r^2 \text{sen}^2 \theta \left( \frac{\dot{R}}{c^2} \right)^2 - \left[ \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} x - \text{sen} \theta \cos \theta \right] \\
R_{33} &= -\text{cosec}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta + r^2 \text{sen}^2 \theta \left( \frac{\dot{R}}{c^2} \right)^2 + \text{cosec}^2 \theta \\
R_{33} &= \text{sen}^2 \theta + \frac{r^2 \text{sen}^2 \theta \left( \dot{R} \right)^2}{c^2} \quad (III.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= (10) + (11) + (12) \\
R_{33} &= \frac{r^2 \text{sen}^2 \theta \left[ R \left( \ddot{R} \right) \right]}{c^2} + \frac{r^2 \text{sen}^2 \theta \left( \dot{R} \right)^2}{c^2} - \text{sen}^2 \theta + 2kr^2 \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta + \frac{r^2 \text{sen}^2 \theta \left( \dot{R} \right)^2}{c^2} \\
R_{33} &= \frac{1}{c^2} r^2 \text{sen}^2 \theta \left[ R \left( \ddot{R} \right) + 2 \left( \dot{R} \right)^2 + 2c^2 K \right] \quad (III.72)
\end{aligned}$$

Calculo del escalar de curvatura  $R$

El escalar de curvatura  $R$  se define como la contracción del tensor de Ricci de primera clase  $R_{ij}$  o sea  $R = g^{ij} R_{ij}$ .

$$\begin{aligned}
R &= g^{ij} R_{ij} \quad (III.73) \\
R &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= (1) \left( -\frac{3\ddot{R}}{c^2 R} \right) - \left[ \frac{(1-Kr^2)}{R^2} \right] \left[ \frac{R \left( \ddot{R} \right) + 2 \left( \dot{R} \right)^2 + 2c^2 K}{c^2 (1-Kr^2)} \right] - \frac{1}{(rR)^2} \left[ \frac{r^2 \left[ R \left( \ddot{R} \right) + 2c^2 K \right]}{c^2} \right] - \frac{1}{(rR \text{sen} \theta)^2} x \left\{ \frac{1}{c^2} \bullet r^2 \text{sen}^2 \theta \left[ R \left( \ddot{R} \right) + 2 \left( \dot{R} \right)^2 + 2c^2 K \right] \right\} \\
R &= -\frac{3 \left( \ddot{R} \right)}{c^2 R} - \frac{R \left( \ddot{R} \right) + 2 \left( \dot{R} \right)^2 + 2c^2 K}{R^2 c^2} - \frac{\gamma^2 \left[ R \left( \ddot{R} \right) + 2 \left( \dot{R} \right)^2 + 2c^2 K \right]}{\gamma^2 R^2 c^2} - \frac{\gamma^2 \text{sen}^2 \theta \left[ R \left( \ddot{R} \right) + 2 \left( \dot{R} \right)^2 + 2c^2 K \right]}{(\gamma R \text{sen} \theta)^2 c^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{3\ddot{R}}{c^2 R} - \frac{R(\ddot{R}) + 2(\dot{R})^2 + 2c^2 K}{R^2 c^2} - \frac{R(\ddot{R}) + 2(\dot{R})^2 + 2c^2 K}{R^2 c^2} - \frac{R(\ddot{R}) + 2(\dot{R})^2 + 2c^2 K}{R^2 c^2} \\
R &= \frac{1}{c^2} \left[ \frac{3(\ddot{R})R + 3R(\ddot{R}) + 6(\dot{R})^2 + 6c^2 K}{R^2} \right] \\
R &= -\frac{6}{c^2} \left[ \frac{R(\ddot{R}) + (\dot{R})^2 + c^2 K}{R^2} \right] \quad (III.74)
\end{aligned}$$

Escribiendo la ecuación de Einstein.

Sustituyendo las componente temporales de los tensores: de Ricci:  $R_{00}$ , tensor métrico  $g_{00}$ , escalar de curvatura  $R$  y el tensor momento-energía  $T_{00}$ .

$$\begin{aligned}
R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R &= \left( \frac{8\pi G}{c^4} \right) T_{ij} \quad (III.75) \\
R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R &= \frac{6}{c^2} \left[ \frac{R(\ddot{R}) + (\dot{R})^2 + c^2 K}{R^2} \right] = \left( \frac{8\pi G}{c^4} \right) T_{00} \\
-\frac{3(\ddot{R})}{c^2 R} + 3 \left[ \frac{R(\ddot{R}) + (\dot{R})^2 + c^2 K}{R^2} \right] &= \left( \frac{8\pi G}{c^4} \right) \bullet \rho \\
-3\cancel{R}(\ddot{R}) + 3\cancel{R}(\ddot{R}) + 3 \left[ (\dot{R})^2 + c^2 K \right] &= \frac{8\pi G}{c^4} \bullet \rho R^2 \cancel{R}^2 \\
3 \left[ (\dot{R})^2 + c^2 K \right] &= \frac{8\pi G \rho R^2}{c^2} \\
(\dot{R})^2 + c^2 K &= \frac{8\pi G}{3c^2} \rho R^2 \\
\left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 &= \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{Kc^2}{R^2} \quad (III.76)
\end{aligned}$$

$\dot{R} = V$  velocidad de expansión o contracción.

$R =$  factor de escala en el Universo.

$\pi =$  constante

$G =$  constante Universal de Cavendish

$C =$  velocidad de la luz.

$\rho =$  es la densidad de la materia y está relacionada con la densidad de energía  $\mathcal{E}$

de la manera siguiente:  $\rho = \frac{\mathcal{E}}{c^2}$

$K =$  es una constante de curvatura que puede tomar los valores de:  $K=0$ , el Universo es plano y obedece la geometría de Euclides; si  $K= 1$ , la geometría es esférica y si  $K= -1$ , la geometría es hiperboloide o de Lobachevsky.

### III.6. Deducción de la ecuación del fluido perfecto

Fluido perfecto (isotrópico): Se define como aquel para el cual un observador moviéndose con la velocidad del fluido en un punto ve el fluido isotrópico. Esta definición supone que el camino libre medio entre colisiones de las partículas que forman el fluido es pequeño en comparación con la escala de longitud utilizada por el observador y no se considera la viscosidad y la conducción del calor.

Así un flujo perfecto queda descrito por la función densidad propia  $\rho_{0(x)}$ , el campo de las cuadrivelocidades  $u^\mu$  y el campo escalar de presión propia  $p_{0(x)}$ .

Usaremos el tensor de momento-energía para un cuerpo macroscópico continuo.

$$T^{uv} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (\text{III.77}) \quad \rho \text{ es la densidad de la materia y } p \text{ es}$$

la presión.

$$\mathcal{E} = \rho c^2 = \frac{\text{energía}}{\text{volumen}} \quad \rho = \frac{\mathcal{E}}{c^2} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} \text{ es la densidad del cuerpo}$$



$$T^{uv} = (p + \rho) u^u u^v - p g^{uv} \quad (III.78)$$

$$T^{00} = \rho, T^{11} = p, T^{22} = p, T^{33} = p \quad (III.79)$$

### III.6.1. Deducción cosmológica del Fluido perfecto (haciendo c=1).

La generalización de la derivada covariante:

$$V^u{}_{;v} = V^u{}_{,v} + \Gamma^u_{v\lambda} V^\lambda \quad (III.80) \quad \text{al tensor: } T^{uv}{}_{;v} = 0 \text{ o}$$

$$T^{uv}{}_{;v} = 0$$

$$\partial_u T^{uv} + \Gamma^u_{vu} T^{\sigma v} + \Gamma^v_{v\sigma} T^{u\sigma} = 0$$

$$\partial_0 T^{00} + \Gamma^0_{00} T^{00} + \Gamma^1_{01} T^{00} + \Gamma^2_{02} T^{00} + \Gamma^3_{03} T^{00} +$$

$$\Gamma^1_{01} T^{11} + \Gamma^2_{02} T^{22} + \Gamma^3_{03} T^{33} = 0$$

$$\partial_t(\rho) + \Gamma^1_{01} T^{00} + \Gamma^2_{02} T^{00} + \Gamma^3_{03} T^{00} + \Gamma^1_{01} T^{11} + \Gamma^2_{02} T^{22} + \Gamma^3_{03} T^{33} = 0$$

$$\dot{\rho} + \frac{\dot{R}}{R}(\rho) + \frac{\dot{R}}{R}(\rho) + \frac{\dot{R}}{R}(\rho) + \frac{\dot{R}}{R}(p) + \frac{\dot{R}}{R}(p) + \frac{\dot{R}}{R}(p) = 0$$

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \rho + 3 \frac{\dot{R}}{R} p = 0$$

$$\dot{\rho} + 3(p + \rho) \frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad (III.81)$$

La ecuación (III.81) es la ecuación del fluido perfecto.

### III.7. Deducción de la aceleración en el modelo de Friedmann.

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad \text{de la ecuación (III.76)}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} - kc^2 a^{-2} \quad (2) \quad \text{derivando con respecto a } t$$

$$\frac{a^2(2\dot{a} \ddot{a}) - (a^{\cdot 2})(2a\dot{a})}{a^4} = \frac{8\pi G \rho^{\cdot}}{3} + 2kc^2 a^{-3} \dot{a}$$

$$\frac{2\dot{a} \ddot{a}}{a^2} \left[ \frac{aa^{\cdot 2} - a^{\cdot 2}}{a^2} \right] = \frac{8\pi G \rho^{\cdot}}{3} + \frac{2kc^2 \dot{a}}{a^3}$$

$$\frac{2\dot{a}}{a} \frac{aa^{\cdot 2} - a^{\cdot 2}}{a^2} = \frac{8\pi G \rho^{\cdot}}{3} + \frac{2kc^2 \dot{a}}{a^3} \quad (III.82)$$

Sustituyendo la ecuación  $\rho^{\cdot} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$  en la ecuación (III.82)

$$2\frac{\dot{a}}{a} \left[ \frac{aa^{\cdot 2} - a^{\cdot 2}}{a^2} \right] = \frac{8\pi G}{3} \left[ -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \right] + \frac{2kc^2 \dot{a}}{a^3}$$

dividiendo entre  $2\dot{a}$  ambos lados de la ecuación.

$$\frac{1}{a} \left[ \frac{aa^{\cdot 2} - a^{\cdot 2}}{a^2} \right] = -\frac{4\pi G}{a}(\rho + p) + \frac{kc^2}{a^3}$$

multiplicando por  $a$  ambos lados

$$\frac{aa^{\cdot 2} - a^{\cdot 2}}{a^2} = -4\pi G(\rho + p) + \frac{kc^2}{a^2}$$

$$\frac{a^{\cdot 2}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G(\rho + p) + \frac{kc^2}{a^2} \quad (III.83)$$

Usando de nuevo la ecuación (III.76) y sustituyéndola en (III.83) tenemos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\left[ \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \right] = -4\pi G(\rho + p) + \frac{kc^2}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G \rho}{3} + \frac{kc^2}{a^2} = -4\pi G\rho - 4\pi Gp + \frac{kc^2}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G \rho - 12\pi G \rho}{3} - 4\pi Gp$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G \rho}{3} - 4\pi Gp$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a \quad (III.84)$$

Las ecuaciones (III.76) y (III.84) se les llama ecuaciones cosmológicas dinámicas de Friedmann.

La ecuación (III.84) es una ecuación muy importante en cosmología, porque está incluida la aceleración del Universo.

La aceleración es positiva solamente si  $(\rho + 3p) < 0$ ; puesto que la densidad ( $\rho$ ) siempre es positiva, sólo la presión podrá ser negativa. Por tanto, para que nuestro Universo se acelere debe estar lleno de una materia con presión negativa. El término  $\Lambda$  (constante cosmológica, asociada a la presión repulsiva negativa llamada Energía Oscura) equivalente a una materia que llena homogéneamente todo el Universo y cuya presión es negativa:  $p = -\rho c^2$

### III.8. Clasificación de los modelos cosmológicos

Observaciones evidentes sugieren que la materia domina en el Universo y que la presión es insignificante comparada con la densidad. Los modelos estándares de Friedmann surgen de considerar  $p=0$ .

Resolviendo la siguiente ecuación con  $p = 0$

$$\dot{\rho} + (\rho + p) \left( \frac{3\dot{R}}{R} \right) = 0 \quad (III.85)$$

$$\text{de } \dot{\rho} + 3 \frac{\rho \dot{R}}{R} = 0 \quad (III.86)$$

$$\text{Obtenemos: } \rho R^3 = \text{constante} \Rightarrow \rho R^3 = \rho_0 R_0^3 \quad (III.87)$$

$$\text{En la ecuación de Friedmann haciendo } c=1 : \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{Kc^2}{R^2}$$

$$\text{Obtenemos } \dot{R}^2 + K = \frac{8\pi G \rho R^2}{3} \quad (III.88)$$

$$\text{De (3.87) obtenemos: } \rho R^2 = \frac{\rho_0 R_0^3}{R} \quad \text{y sustituyendo en la ecuación (III.88)}$$

$$\text{tenemos: } \dot{R}^2 + K = \frac{H_0^2}{R} \quad (III.89)$$

Donde: 
$$H_0^2 = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3} \quad (\text{III.90}) \quad \text{y} \quad H_0^2 > 0$$

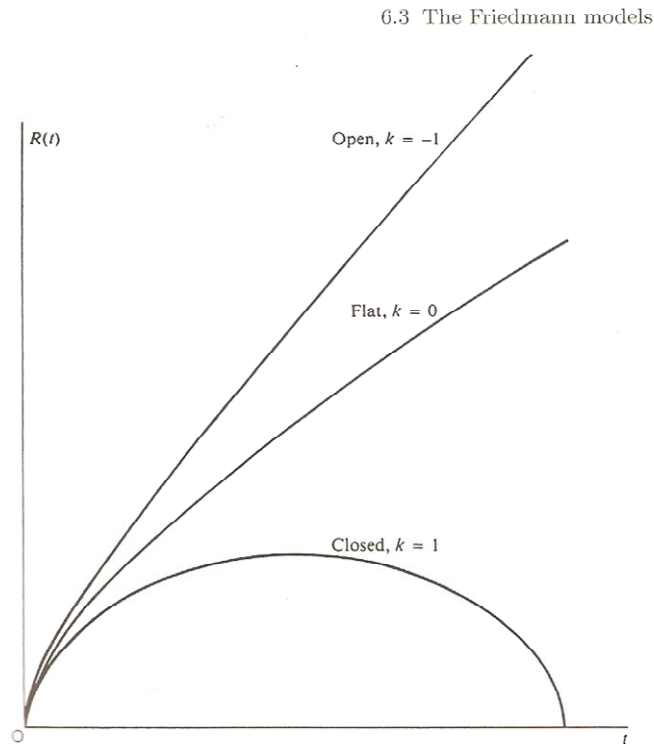
Integrando la ecuación (III.89) podemos obtener los modelos cosmológicos siguientes:

i) Modelo plano  $K = 0$  y  $\rho = \rho_0$

ii) Modelo cerrado  $K = 1$   $\rho_0 > \rho$

III) Modelo Abierto  $K = -1$  y  $\rho_0 < \rho$

### Gráfico 12. Modelos Cosmológicos



## III.9. Modelo del Big Bang

### III.9.1. Introducción

La Teoría del Big Bang se desarrolló a partir de observaciones a nivel astronómico y avances de la física teórica (Relatividad General de Einstein).

- En 1910, el astrónomo estadounidense Vesto Slipher y después Carl Wilhelm Wirtz determinaron que la mayoría de las nebulosas espirales se alejaban de la Tierra; pero no llegaron a darse cuenta de las implicaciones cosmológicas de esta observación, ni tampoco que las supuestas nebulosas eran en realidad galaxias más allá de nuestra propia galaxia (Vía Láctea).
- En la segunda década del siglo XX, la teoría de Albert Einstein sobre la Relatividad General y en 1929, Edwin Hubble realizó observaciones que sirvieron de base para comprobar que el Universo está en expansión. Descubrió que las galaxias se alejaban entre ellas a velocidades relativas a la Tierra, directamente proporcionales a su distancia, este hecho se conoce como la ley de Hubble.
- Desde el descubrimiento de la radiación cósmica de fondo de microondas en 1965, ha sido considerada la mejor teoría para explicar el origen y evolución del Universo.
- Con una temperatura de unos pocos grados Celsius por encima del cero absoluto, la radiación cósmica de fondo presenta dos propiedades extraordinarias: Una Isotropía casi perfecta, en cuya virtud la intensidad de la radiación es la misma en cualquier dirección del firmamento, y su espectro, cuya descomposición en frecuencias obedece a la ley de Cuerpo Negro con asombrosa exactitud.

### **III.9.2. Principios básicos donde descansa**

- i. La universalidad de las leyes de la física.  
Las leyes de la física en la Tierra son aplicables a todo el Universo y a todas las escalas de tiempo.
- ii. El principio Cosmológico.  
Este principio descansa en que el Universo a gran escala es:
  - a) Homogéneo (posición): El Universo se ve igual en cada punto, donde estemos ubicados.
  - b) Isótropo (dirección): El Universo se ve el mismo en todas direcciones.

- iii. El principio Copernicano: Dice que el lugar que ocupamos en el Universo no es especial.
- iv. La Relatividad General en combinación con las predicciones de la física nuclear, la física de partículas e interacciones.
- v. La ley de Hubble (expansión del Universo)

La ley de Hubble es una ley en cosmología que establece que el corrimiento al rojo de una galaxia es proporcional a la distancia a la que ésta se encuentra. La ley fue formulada por Edwin Hubble y su colaborador Milton Humason en 1929 después de cerca de una década de observaciones. Es considerada como la primera evidencia observacional del paradigma de la expansión del Universo y actualmente sirve como una de las piezas más citadas como prueba de soporte del Big Bang.

Las galaxias se alejan unas de otras a una velocidad proporcional a su distancia, relación más general que se conoce como relación velocidad-distancia y a veces es confundida con la ley de Hubble.

La expresión matemática de la ley de Hubble viene dada por:

$$cz = H_0 D \quad (III.91)$$

$v = cz$   $v$  es la velocidad de recesión

$$D = \frac{cz}{H_0}$$

$$z = \frac{\lambda_{observada} - \lambda_{emitida}}{\lambda_{emitida}}, \quad \lambda = \text{longitud de onda}$$

$$1 + z = \frac{\lambda_{observada}}{\lambda_{emitida}}$$

$$z = \frac{\lambda_{emitida}}{\lambda_{observada}} - 1 \quad (III.92)$$

$z$  también se puede expresar en función de la frecuencia

$$z = \frac{f_{emitida} - f_{observada}}{f_{observada}}, \quad f \text{ es la frecuencia}$$

$$1 + z = \frac{f_{emitida}}{f_{observada}}$$

$$z = \frac{f_{emitida}}{f_{observada}} - 1 \quad (III.93)$$

$z$  el corrimiento al rojo, un número sin dimensiones

$c$  la velocidad de la luz

$D$  la distancia actual a la galaxia en mega Pársec(3.6 años luz) (Mpc).

$H_0$  la constante de Hubble en el momento de la observación.

El valor de la constante de Hubble ha ido modificándose ha medida que se han ido mejorando los instrumentos para medirla, dentro de las últimas medidas que se han

efectuado a partir del 2001 con el telescopio espacial Hubble fue de  $72 \pm 8 \frac{km/s}{Mpc}$ , en el

2003 con el satélite W M A P (Wilkinson Microwave Anisotropic Probe) el valor fue

de  $71 \pm 4 \frac{(km/s)}{Mpc}$  y en el 2006 de nuevo con el satélite W M A P el valor fue de

$$70 \frac{(km/s)}{Mpc}, \quad +2.4/-3.2.$$

La expresión matemática más general y muchas veces confundida con la ley de Hubble se formula así:

$$v = HD \quad (III.94) \text{ siendo:}$$

$v$  la velocidad de recesión debida a la expansión del Universo generalmente en  $\frac{km}{s}$

$D$  la distancia actual a la galaxia en mega parsec Mpc

$H$  la constante de Hubble.

### III.9.3. Definición del Big Bang

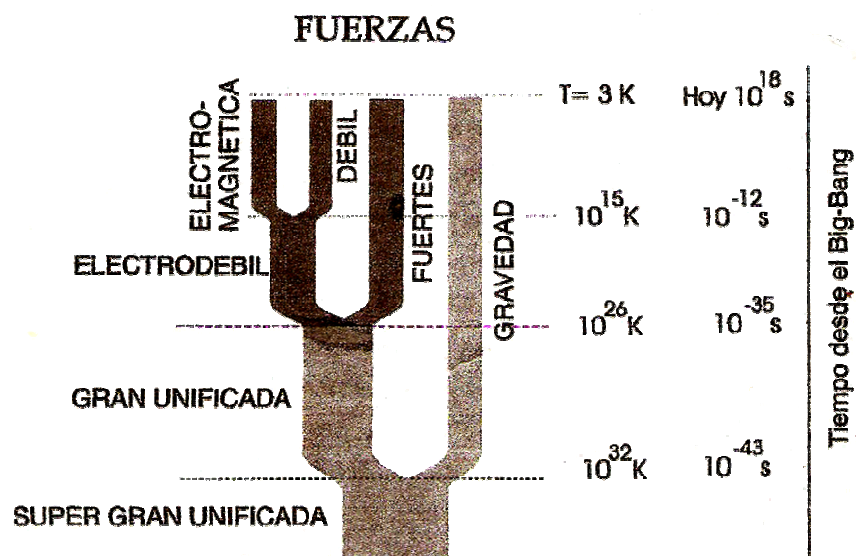
Este modelo de evolución sugiere que el Universo se originó hace unos 13,000 ó 14,000 millones de años a partir de una singularidad ( $t=0$ ) con una gran explosión del espacio en un estado de densidad y temperatura extremadamente altas:  $T = 10^{32} K$  y  $\rho = 10^{94} \text{ gr/cm}^3$ .

Según este modelo, el Universo se ha estado expandiendo, tornándose menos denso y enfriándose desde su inicio.

Este modelo explica la expansión del Universo, la existencia de un pasado denso y caliente, el origen de los elementos químicos primordiales (75% H, 25% He y trazas de  ${}^2_1D$ ,  ${}^7_3Li$ ,  ${}^{11}_4Be$ , y la formación de los objetos astronómicos que se observan como: estrellas, galaxias, cúmulos de Galaxias, etc.

### III.9.4. Grandes épocas del Modelo del Big Bang.

Gráfico 13. Grandes épocas del Big Bang





1) Desde la singularidad  $t=0$  seg. hasta  $10^{-43}$  seg. se llama Era Cúantica o de Planck,

$$\rho = 10^{94} \text{ gr/cm}^3 \quad T = 10^{32} \text{ K} .$$

En este período las cuatro fuerzas fundamentales del Universo estaban unidas: la electromagnética, la nuclear débil, la nuclear fuerte y la gravedad se le puede llamar Super Gran Unificada.

No existe todavía una teoría desarrollada que las una, pero existe mucha investigación teórica, como por ejemplo: la teoría de cuerdas, la teoría- M, quantum Loop Gravity y otras teorías sobre gravitación cuántica.

Cuando la edad del Universo era de  $t=10^{-43}$  seg tiene lugar la primera ruptura espontánea de la unidad inicial y la gravedad aparece como una fuerza separada.

2) Entre  $t=10^{-43}$  seg hasta  $t=10^{-35}$  seg  $10^{32} \text{ K} > T > 10^{27} \text{ K}$

Comienza un período denominado GUT (Grand Unified Theories), el Universo se expandía, pero las fuerzas electromagnéticas, nuclear débil y la nuclear fuerte seguían unidas y la gravedad ya estaba separada.

3) Entre  $t=10^{-35}$  seg hasta  $10^{-11}$  seg y  $T$  está entre  $10^{27} \text{ K}$  y  $10^{15} \text{ K}$

Era Hadrónica.

Las GUT (Gran Unified Force) son separadas en la Nuclear Fuerte y la Fuerza Electrodébil.

Entre  $t=10^{-35}$  seg. y  $t=10^{-32}$  seg y a  $T=10^{26} \text{ K}$  ocurrió un cambio de fase en la constitución de la materia se separó la Fuerza Nuclear Fuerte de la Electrodébil (GTU). La energía liberada en este proceso sería tan grande que el Universo se expandiría en forma rápida y gigantesca por un factor de  $10^{30}$  y dando origen a un

fenómeno que se ha bautizado como Inflación. Aquí se considera la aparición de la materia en forma de un plasma caliente de partículas elementales: quarks, antiquarks, gluones, leptones, antileptones, fotones, etc.

Esta expansión exponencial hace la geometría plana y son creados  $10^9 + 1$  quarks por  $10^9$  antiquarks y  $10^9 + 1$  leptones por  $10^9$  antileptones.

4) Entre  $t = 10^{-11} \text{ seg}$  y  $t = 10^{-2} \text{ seg}$  y  $10^{15} \text{ K} < T < 10^{11} \text{ K}$

Era Leptónica.

Se produce otro cambio de fase en la constitución de la materia, la fuerza electrodébil se separa en electromagnética débil.

Los quarks y antiquarks se aniquilan.

El Universo ahora es dominado por los leptones: electrones, positrones, neutrinos, antineutrinos, etc.

5) Entre  $t = 10^{-2} \text{ seg}$  y  $t = 10^{11} \text{ seg}$   $10^{11} \text{ K} < T < 10^5 \text{ K}$

Era de la Radiación.

Los electrones y los positrones se aniquilan,

Los Neutrinos se desacoplan de los electrones y se forma la radiación cósmica de neutrinos.

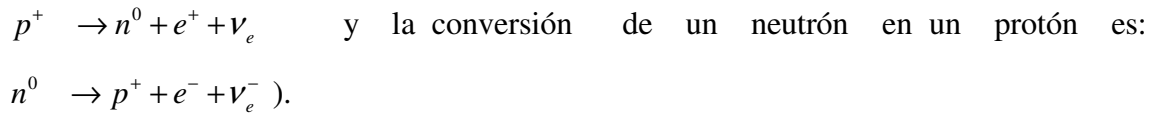
La Radiación domina sobre la densidad de energía del Universo.

Entre  $t = 1 \text{ seg}$  a  $t = 200 \text{ seg}$  se produce la Nucleosíntesis Primordial.

La Nucleosíntesis primordial o Nucleosíntesis del Big Bang se refiere al período durante el cual se formaron fundamentalmente núcleos de hidrógeno 75 % , 25 %

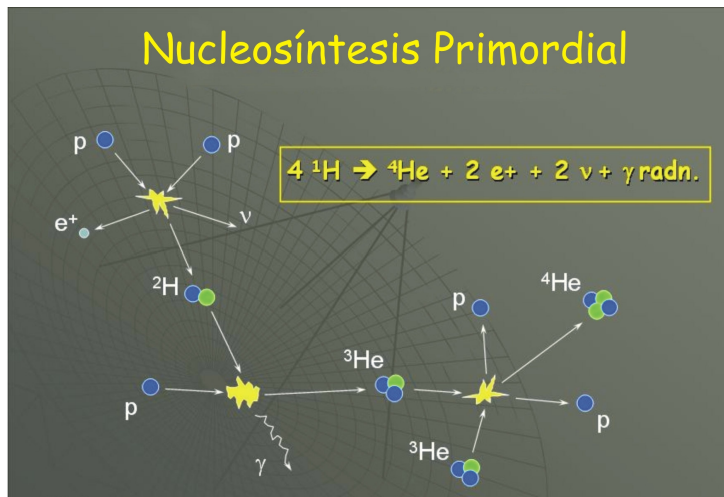
Helio, adicionalmente pequeñas cantidades de Deuterio ( ${}^2_1D$ ), Helio ( ${}^3_2H_e$ ) y algunas trazas de Litio ( ${}^7_3L_i$ ) y Berilio.

Tomando como base la conversión de un protón en un neutrón:

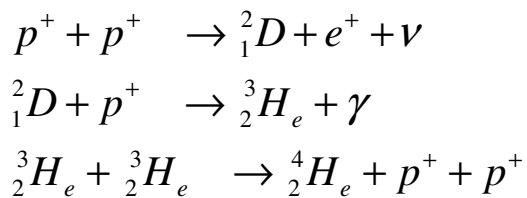


Las reacciones nucleares de Fusión protón-protón ( $p-p$ ) da principio a una cadena de reacciones conocidas como combustión del helio, las cuales provocan la producción de helio:

**Gráfico 14. Nucleosíntesis**



Las reacciones nucleares escritas serían así:



A  $t = 10 \text{ seg}$  hay 7 protones por cada Neutrón y a la temperatura de  $T = 10^9 \text{ K}$ .

6) Entre  $t = 10^{11} \text{ seg}$  y  $t = 10^{16} \text{ seg}$  y  $10^5 K < T < 10K$

Era de la materia.

El Universo se expande y la densidad de la energía baja más rápido que la densidad de la materia y la materia comienza a dominar.

A  $t = 10^{13} \text{ seg}$  (aproximadamente 370,000 años) los electrones y los protones se combinan para formar átomos de Hidrógeno y la Materia y la radiación se desacoplan y la Radiación Cósmica de Fondo fluye libremente.

Entre  $t = 370,000$  años y  $t = 200$  millones de años se forma la Era Negra.

En  $t$  aproximadamente 200 millones de años se forman las primeras estrellas.

En aproximadamente 1 Gyr ( $10^9 \text{ años}$ ) se forman las Galaxias.

En aproximadamente 1 Gyr ¿se forma la Era de la Energía Oscura?

### III.9.5. Consistencias del Big Bang

#### Tabla de consistencia del Big Bang.

Se enumeran las predicciones de la teoría y los hechos que se deberían cumplir para que la teoría sea auto-consistente. Al lado se anota la evidencia experimental correspondiente. Bajo la columna de probabilidad se le asigna a cada predicción un puntaje que básicamente designa la probabilidad de que la predicción haya quedado probada. Este puntaje no es riguroso, es propuesto por el autor y se basa solamente en su experiencia en el tema y por lo que se refleja en trabajos de otros investigadores del tema.

Predicción	Confirmación	Prob
1. <u>Expansión del espacio</u> por A. Friedmann en 1922 y G. Lemaître en 1930	<u>Observada</u> por E. Hubble en 1929 demostrando la relación entre velocidad y distancia de galaxias lejanas. La velocidad de expansión determinada por el Telescopio	100

Predicción	Confirmación	Prob
	Espacial Hubble y consistente con el valor medido por WMAP es de 22 Km/seg por cada millón de años-luz de distancia.	
2. <u>Edad finita del universo</u> por A. Friedmann en 1922 y G. Lemaître en 1930	13.700 millones de años con un error del 1%, medida por <u>WMAP</u> y consistente con las edades de las estrellas más viejas y las <u>mediciones de la edad del universo</u> realizadas por el Telescopio Espacial Hubble	100
3. El universo fue más caliente y denso en el pasado. G. Gamow, 1946.	La temperatura de la RCF aumenta a medida que se observa más lejanamente. Mediciones de espectros de nubes de gas intergalácticas revelan una temperatura de la RCF creciente con la distancia.	100
4. <u>Composición de elementos primordiales</u> por G. Gamow en 1946	75% hidrógeno, 25% helio y una pequeña fracción de deuterio (ver siguiente punto) y litio medidos en espectros estelares	95
5. Presencia de deuterio en el universo	Observando líneas de absorción de la luz de quásares lejanos por gas intergaláctico se ha determinado una abundancia universal de deuterio de $2 \times 10^{-4}$ relativa al hidrógeno. El deuterio no puede originarse en las estrellas, el Big Bang es el único mecanismo existente para crear este deuterio.	90
6. <u>Radiación Cósmica de Fondo</u> (RCF) por G. Gamow, R. Alpher y R. Herman en 1948 y R. Dicke y J. Peebles en 1965.	Detectada por A. Penzias y R. Wilson en 1964. Firmemente establecido su origen cosmológico y estudiado en gran detalle por decenas de experimentos en tierra, globos y	100

Predicción	Confirmación	Prob
	plataformas satelitales.	
7. <u>Espectro térmico</u> de la RCF por G. Gamow, R. Alpher y R. Herman en 1948	Distribución espectral de cuerpo negro con desviaciones no mayores que 0.01% y con temperatura de $2,725 \pm 0,002$ Kelvin medido por los proyectos <u>COBE</u> y <u>COBRA</u> en 1990.	100
8. <u>Anisotropías</u> en la RCF a escalas mayores que 1 grado. Sachs y Wolfe 1967.	Detectadas por el <u>proyecto COBE</u> en 1992 con una amplitud característica $\Delta T/T = 10^{-5}$ .	90
9. <u>Ondas acústicas</u> en el plasma primordial, por R. A. Sunyaev y Y. B. Zeldovich en 1970.	Detectadas por el <u>experimento Boomerang</u> en el 2000 y confirmada por <u>WMAP</u> y decenas más de experimentos observando desde la tierra y montados en globos.	90
10. <u>Polarización</u> de la RCF	Detectada por el experimento <u>DASI</u> en el 2002	60
11. Anti-correlación de la temperatura y la polarización de la RCF	Detectada por WMAP en el 2003	70
12. Coherencia de la polarización de la RCF a escalas angulares $> 1^\circ$	Observada por WMAP en el 2003	60
13. Interacción de la RCF con nubes de gas en cúmulos galácticos. R. A. Sunyaev y Y. B. Zeldovich en 1969.	Observado por Birkinshaw et. al. 1981 midiendo deformaciones del espectro de la RCF en direcciones de cúmulos conocidos.	70
14. Formación de estructura a gran escala a partir de inhomogeneidades en densidad del	La concentración de materia en galaxias y cúmulos de galaxias ha sido medida por medio de observaciones profundas del cielo.	80

Predicción	Confirmación	Prob
plasma primordial, estudiada por E. Lifshitz en 1946, y J. Silk en 1967.	Estas mediciones son compatibles con la amplitud de las perturbaciones en el plasma a una edad de 380 mil años, según se infieren de las mediciones de anisotropías en la RCF.	
15. Número de familias de <u>neutrinos</u> por G. Steigman, D. Schram y J. Gunn en 1977	Solo 3 familias. <u>Confirmado por experimentos</u> en el acelerador de <u>partículas</u> del CERN midiendo la vida media del bosón intermedio $Z_0$ y consistente con la <u>nucleosíntesis</u> en el Big Bang (ver puntos 4 y 5).	80
16. El universo es finito (H. Olbers, 1823)	La noche es oscura. El universo no puede ser infinito en extensión, de lo contrario en cualquier dirección de observación del cielo nos encontraríamos con una estrella y la noche sería tan brillante como el día.	90
17. Debe existir materia oscura no bariónica.	Al momento no ha habido detección exitosa de materia oscura no bariónica que satisfaga los requerimientos de la teoría. Los neutrinos quedan descartados por ser relativistas y tener una masa muy pequeña. La única evidencia favorable viene de la dinámica de galaxias y cúmulos galácticos.	40
18. Debe existir un fondo cosmológico de neutrinos	Aún no detectado debido a la insuficiente sensibilidad de los detectores disponibles y a los altos niveles de ruido producido por rayos cósmicos y radioactividad natural en el ambiente.	0

Predicción	Confirmación	Prob
19. Debe existir un fondo cosmológico de ondas gravitacionales	Aún no detectado, y posiblemente no se podrá detectar directamente debido a su baja intensidad. Esta predicción es específica del modelo inflacionario.	0

### III.9.6. Debilidades del Big Bang

a) El problema del horizonte.

El problema del Horizonte o causalidad  $d = cT$ : Porque dos regiones en el espacio separadas por una distancia mayor que  $cT$ , no pueden estar causalmente conectadas y ser Isótropas en la Radiación Cósmica de Fondo .

b) El problema de la geometría o planitud del universo.

¿Cómo es posible que el parámetro de densidad  $\Omega$  y que es igual a:  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$  sea tan

cercano a 1(uno)? La geometría del Universo tiende a (1) o sea ser plana o Euclidiana, de allí el nombre de “Planitud”.

c) El problema de la materia oscura del universo.

En Cosmología se denomina Materia Oscura a partículas hipotéticas de un tipo de materia, de composición desconocida, que no interactúa con la materia normal y que no emite radiación detectable. La materia oscura no es visible en ninguna parte del espectro electromagnético con los medios técnicos actuales pero su existencia puede inferirse a partir de los efectos gravitacionales que en la materia visible tales como las estrellas o las galaxias, así como en las Anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas.

No se debe confundir la Materia Oscura con la Energía Oscura.



La Energía Oscura es una forma hipotética de Energía que llena todo el espacio y que produce una presión negativa, resultando en una fuerza gravitacional repulsiva. La Energía Oscura está asociada con la expansión acelerada del Universo actualmente, así como la mayor parte de su masa.

Actualmente la composición de la materia-energía del Universo es:

- 23% Materia Oscura
- 73% Energía Oscura
- 4% Materia Bariónica conocida.

### III.10. Problemas resueltos y Propuestos.

#### III.10.1. Resueltos

1) A partir de la conservación de la Energía.

Energía Cinética + Energía Potencial = U (energía total)

$$T+P=U$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = U$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

En el punto crítico U=0

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{GM}{R} = 0(1)$$

$$V^2 - \frac{2GM}{R} = 0(2)$$

V= H R, donde H= es la Constante de Hubble, V= es la velocidad de recesión de la galaxia, R= es el factor de escala.

Sustituyendo V= H R en la ecuación (2) tenemos:

$$(H^2R^2) - \frac{2GM}{R} = 0$$

Sustituyendo la masa:  $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$$H^2 R^2 - \frac{8\pi G R^3 \rho_c}{3R} = 0$$

Despejando:  $\rho_c$

$$\frac{3H^2 R^2 - 8\pi G R^2 \rho_c}{3} = 0$$

$$3H^2 R^2 = 8\pi G R^2 \rho_c$$

$$\frac{3H^2 R^2}{8\pi G R^2} = \rho_c$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

2. Demostrar que:

$$1 - \Omega = -\frac{Kc^2}{R^2}$$

Donde:  $\Omega$  es el parámetro de densidad y es igual a:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad \rho \text{ es la densidad y } \rho_c \text{ es la densidad crítica.}$$

De las ecuaciones de Friedmann:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{8\pi G \rho}{3} = -\frac{Kc^2}{R^2}$$

$$\text{De: } \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2}{8\pi G}$$

Y del parámetro de densidad  $\Omega$

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\rho}{\frac{3 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2}{8\pi G}}$$

$$\Omega = \frac{8\pi G \rho}{3 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2}$$

$$\Omega = \frac{8\pi G \rho R^2}{3 \dot{R}^2}$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{8\pi G \rho R^2}{3 R^2} = -\frac{Kc^2}{R^2}$$

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi G \rho R^2}{3} = -Kc^2$$

$$\dot{R}^2 \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right) = -Kc^2$$

$$1 - \Omega = -\frac{Kc^2}{R^2}$$

Si:  $\rho = \rho_c \rightarrow \Omega = 1 \rightarrow K = 0 \rightarrow$  Universo Plano o Euclidiano.

3. Suponga que la Constante de Hubble es:  $70 \frac{Km}{Mpc}$ . Estime la edad del Universo.

Recordando que:  $1 pc = 3.09 \times 10^{13} Km$

$$H = 70 \frac{\frac{Km}{s}}{Mpc}$$

$$H = 70 \frac{\frac{Km}{s}}{Mpc} \cdot \left( 1 \frac{Mpc}{10^6 pc} \right) = 70 \times 10^{-6} \frac{\frac{Km}{s}}{pc}$$

$$H = 70 \times 10^{-6} \frac{\frac{Km}{s}}{pc} \cdot \left( 1 \frac{pc}{3.09 \times 10^{13} Km} \right)$$

$$H = 22.65 \times 10^{-19} s^{-1}$$

Invirtiendo la Constante de Hubble.

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{\frac{70 Km}{\frac{s}{Mpc}}}$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{22.65 \times 10^{-19} s^{-1}}$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{22.65} \times 10^{19} s$$

$$\frac{1}{H} = 0.04414 \times 10^{19} s$$

$$\frac{1}{H} = 4.414 \times 10^{17} s$$

Convirtiendo los segundos en años= 1 yr =  $3.16 \times 10^7 s$

$$\frac{1}{H} = 4.414 \times 10^{17} s \cdot \left( \frac{1 yr}{3.16 \times 10^7 s} \right)$$

$$\frac{1}{H} = 1.397 \times 10^{10} yr$$

$$\frac{1}{H} = 13.97 \times 10^9 yr = 13.97$$

Edad estimada del Universo es:

$$t = \frac{1}{H} = 14 \quad 14 \text{ mil millones de años aproximadamente.}$$

4. Demostrar que el parámetro de desaceleración  $q$  puede ser expresado en función de  $H(t)$  por la ecuación:

$$q = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1$$

*solución*

$$q = \frac{d}{dt} \frac{1}{\frac{\dot{R}}{R}} - 1 = \frac{d}{dt} \frac{R}{\dot{R}} - 1 = 1 - \frac{R \left( \frac{\ddot{R}}{R} \right)}{\dot{R}^2} - 1 = - \frac{R \left( \frac{\ddot{R}}{R} \right)}{\dot{R}^2}$$

5. Si  $H = 65 \frac{km}{s/Mpc}$ , la densidad crítica es  $8 \times 10^{-27} \frac{kg}{m^3}$ , ¿Cuánta masa puede ser

encerrada en una esfera con radio de la órbita de la Tierra ( $R = 1AU$ )?

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi (1.5 \times 10^{11} m)^3$$

$$V = 14.137 \times 10^{33} m^3$$

$$m = \rho \cdot V$$

$$m = \left( 8 \times 10^{-27} \frac{kg}{m^3} \right) \times (14.137 \times 10^{33} m^3)$$

$$m = 113 \times 10^6 kg$$

### III.10.2. Propuestos

1. Supóngase que se observa una galaxia a 500 Mpc de distancia, la cual se está moviendo a una velocidad de  $30,000 \frac{km}{s}$ . Si la velocidad ha sido constante a través del tiempo, cuándo comenzó el Universo.

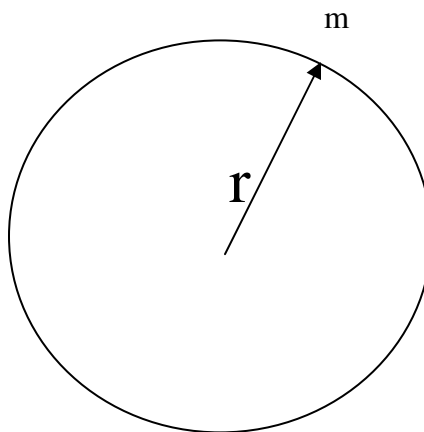
2. Demostrar que el parámetro de densidad  $\Omega$  puede ser representado por:

$$\Omega(t) = 1 + Kc^2 / \left( \frac{dR}{dt} \right)^2$$

3. Derivar las ecuaciones de Friedmann, en forma Newtoniana, sin hacer uso del complicado cálculo tensorial a partir del gráfico de la esfera.

- i) La densidad de la materia newtoniana.
- ii) El factor de escala.
- iii) La conservación de la materia-energía.

**Gráfico 15. Esfera newtoniana**



4. Derivar las ecuaciones cosmológicas del fluido: Usando la primera ley de la Termodinámica y usando el factor de escala (a).

$$dE + pdV = Tds(1)$$

5.a) Demostrar que el factor de escala se puede generalizar para obtener:

a)  $R(t) = 1 - H_0(t_0 - t) - \frac{1}{2} H_0^2 q_0 (t_0 - t)^2 + \dots$

b) Encontrar una aproximación para la expresión:  $1/R(t)$

Usando la expresión:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

### III.11. Modelo Inflacionario

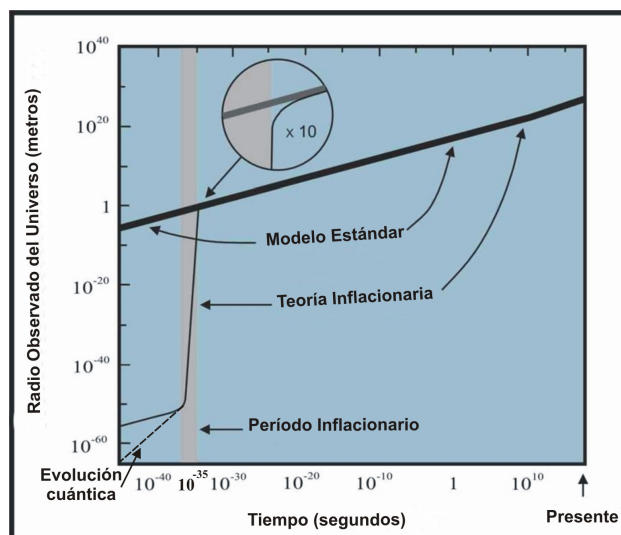
#### III.11.1. En que consiste brevemente el Modelo Inflacionario

Este modelo introduce la idea de un Universo Inflacionario con un crecimiento exponencial en sus primeras fases más o menos entre  $10^{-36}$  y  $10^{-32}$  segundos el factor de escala del Universo crecería al menos en un factor de  $10^{30}$  veces. En este proceso inflacionario, toda la materia y energía podría ser creada.

Este modelo complementa al Big Bang, porque lo apoya en dos aspectos bien importantes.

- Explica, porque el Universo es homogéneo en todas direcciones, aún en regiones que nunca tuvieron tiempo de influirse entre sí.
- La densidad del Universo; ésta podría tener cualquier valor, pero curiosamente, la densidad observada no difiere lo suficiente de la densidad crítica para poder decidir por ahora si el Universo es abierto o cerrado.

**Gráfico 16. Modelo Inflacionario.**



### III.12. Últimas Investigaciones

#### III.12.1. Teoría de Cuerdas.

Consiste en reemplazar las partículas puntuales por “cuerdas” que tienen longitud y forma, éstas pueden ser abiertas o cerradas (circulitos), la cuerda puede vibrar y hacerlo muchas maneras, cada modo de vibración representando una partícula diferente, así una misma cuerda puede dar origen al electrón, al fotón, gravitón, neutrino, etc. La cuerda se puede comparar con la cuerda de un violín, guitarra, etc.

“Modelo Estándar”

$\nu, e^-, quark, W, Z,$   
*gluón, fotón, gravitón*

Distancias largas  $\rightarrow$  bajas energías

La Teoría de Cuerdas (bosónicas) se refiere a 26 dimensiones.

#### III.12.2. Teoría M

Teoría de Supercuerdas=Teoría M= Teoría del Todo= Supergravedad= Es supersimétrica.

No contiene 26 dimensiones, tampoco los Taquiones( masa imaginaria con velocidades mayores que la luz), pero si mantiene la partícula sin masa parecida al Gravitón con spin 2.

“La Teoría de Supercuerdas requiere solo 11 dimensiones espacio-temporales: 1 temporal- 3 espaciales, 6 enrolladas y una que las va enrollando”.

Fue propuesta por el Dr. Edgard Witten, plantea que todas las partículas son en realidad diminutas cuerdas que vibran a cierta frecuencia y que nosotros vivimos en un mundo vibrando a cierta frecuencia.



Distancias cortas  $\rightarrow$  Altas Energías  $\rightarrow 10^{-33} \text{ cm}$

$$m_p = \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 2.2 \times 10^{-8} \text{ kg}, \quad L_p = \left( \frac{G \hbar}{c^3} \right)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-35} \text{ m},$$

$$t_p = \left( \frac{G \hbar}{c^5} \right)^{1/2} = 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}, \quad T_p = \frac{m_p c^2}{k} = 1.4 \times 10^{32} \text{ K}$$

$$\rho = 10^{94} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$$

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Teoría Clásica de los Campos. Volumen 2 del Curso de Física Teórica. Segunda Edición.  
L.D.Landau E.M. Lifshitz Académica de Ciencias.  
Editorial Reverté Barcelona.
- 2) An Introduction to Mathematical Cosmology. 2ed.  
J.N.Islam.  
Cambridge University Press
- 3) General Relativity: A Geometric Approach  
Malcolm Ludvigsen.  
Cambridge University Press.
- 4) Schaum's Outlines of Theory and Problems of Tensor Calculus.  
David C. Kay, Ph. D  
McGraw-Hill.
- 5) Teoría y Problemas de Análisis Vectorial y una introducción al Análisis Tensorial.  
Murray R. Spiegel, Ph. D.  
McGraw-Hill.
- 6) Lectures, notes, apuntes, tutoriales, cursos y otros en Internet.
- 7) Problem Book in Relativity and Gravitation.  
Alan P. Lightman, Willian H. Press, Richard H. Price,Saul A. Teukolsky. Princeton University Press.

- 8) Relativity, Gravitation and Cosmology  
Ta- Pei Cheng  
Oxford University Press 1ed.
- 9) Espacio, Tiempo y Universo  
Hernán Quintana G.  
Ediciones U. Católica de Chile 2ed.
- 10) A First course in General Relativity  
Bernard F. Schutz  
Cambridge University Press 8 ed.
- 11) Gravitación  
D. D. Ivanenko, G. A. Sardanashvili  
Editorial URRS 2ed.
- 12) Curso de Teoría de la Relatividad y de la Gravitación  
A. A. Logunov  
Editorial URRS
- 13) Gravitation and Cosmology  
Steven Weinberg  
Editorial Wiley
- 14) Gravitation  
Misner-Thorne-Wheeler  
W.H. Freeman
- 15) Astronomy  
Schaum's

McGraw-Hill

16) Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology.

D.T. Lawden

Dover Publications

17) General Relativity An Introduction for Physicists

M.P. Hobson, G. Efstathiou and A.N. Lasen

Cambridge University Press

18) Relativity: An Introduction to Special and General Relativity.

Hans Stephani

Cambridge University Press

19) A Short Course in General relativity

J. Foster and J.D. Nightingale

Springer

20) Teoría de la Relatividad General

Bert Janssen

Universidad de Granada

21) Albert Einstein: Sobre la teoría de la Relatividad Especial y General.

22) Relativity

Demystified

McGraw-Hill

23) Physical Foundations of Cosmology

V. Mukhanov  
Cambridge University Press

24) Principles and Applications of Tensor Analysis

Matthwes S. Smith  
Howard W. Sams & CO.

25) Cálculo Tensorial

Lichnerowicz

26) The Origin and Evolution of Cosmic Structure

Peter Coles/ Francesco Lucchin  
Wiley

27) An Introduction To Modern Cosmology

Andrew Liddle 2th  
Wiley

28) The Physics of the Early Universe

E. Papantonopoulos  
Ed. Springer

29) A First Course in String Theory

Barton Zwiebach  
Cambridge University Press.

30) Cosmología Moderna

M.V. Sazhin  
Editorial URSS

- 31) Geometría Moderna Métodos y Aplicaciones  
Dubrovin, Fomenko, Nóvikov  
Editorial URSS.
- 32) Tensores y Aplicaciones  
Luis Santaló  
Editorial EUBA
- 33) Relativity- Special, General and Cosmological  
2Ed. W. Rindler, Oxford, 2006
- 34) Introducción a la teoría de la relatividad especial  
Robert Resnick  
Limusa 1981
- 35) Einstein's general Theory of relativity  
Oyvind Gron and Sigbjorn, 2004  
Hervik
- 36) Introducing Einstein's Relativity  
Ray D'Inverno  
Oxford University Press, 1998
- 37) The large scale structure of space-time  
Hawking S.W. & Ellis G.F.R.  
Cambridge U.P., 1973.
- 38) Vector and Tensor Analysis with Applications  
A.I.Borisenko I.E.Taparov  
Dover Publications, Incew York