UNIVERSITAT AUTONOMA DE BARCELONA
DEPATAMENT DE DIDACTICA DE LAS MATEMATIQUES I DE LAS CIENCIES EXPERIMENTALES

TRABAJO DE INVESTIGACION
(TESINA)

“Descripción y caracterización de los esquemas conceptuales del concepto de solución de una ecuación diferencial de primen orden en estudiantes que han concluido una asignatura bajo el enfoque tradicional. Un estudio de casos”

Presentado por
Martín Enrique Guerra Cáceres

Director
Dr. Lluís Bibiloni

Bellaterra, Barcelona, enero de 2002

INDICE

Página

Presentación

La investigación didáctica reporta que limitar el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo al registro algebraico/algorítmico genera en los estudiantes esquemas conceptuales y habilidades demasiado rígidas, así como capacidades muy pobres para transferir los conocimientos más allá de las asignaturas en que estos se estudian. Evidentemente, todo ello, contrasta con las exigencias de orden científico, tecnológico y educativo que se demandan hoy en día de los diferentes currículos, de cara a las necesidades académicas y profesionales de los estudiantes. Por ejemplo, las habilidades para leer e interpretar información gráfica, así como convertir información cuantitativa en un formato cualitativo, y viceversa, tienen un valor práctico y educativo incuestionable. Asimismo, la habilidad de enfrentarse y resolver con eficacia tareas en su campo de estudio o trabajo, son sumamente importantes.

En consecuencia, se cuenta con una variedad rica de propuestas curriculares y materiales que se fundamentan en la articulación de los diferentes sistemas de representación semiótica, los aspectos fenomenológicos relacionados con los conceptos matemáticos, así como en el desarrollo de las habilidades cognitivolingüísticas de los estudiantes.

Sin embargo, en el sistema educativo universitario salvadoreño se nota muy poco la influencia de esos movimientos de cambio. En particular, en la enseñanza y el aprendizaje del primer curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (en todas las carreras en que éstas se estudian), los sistemas didácticos perviven como la continuación algebraica y algorítmica de las asignaturas de cálculo diferencial e integral, marginando los aspectos fenomenológicos, gráficos y numéricos. Así pues, se plantea la necesidad urgente de promover acercamientos innovadores que integran los aspectos que se han señalado antes y que utilizan de manera adecuada los recursos tecnológicos disponibles para facilitar la comprensión de los conceptos matemáticos implicados.

En este sentido, el presente trabajo, pretende ser el punto de inicio para plantear un cambio curricular de las ecuaciones diferenciales (en general, del cálculo) en el sistema universitario salvadoreño que se fundamenta en la investigación del pensamiento de los estudiantes, así como en las ventajas que ofrecen los diferentes currículos existentes en otras realidades. Para ello, se realiza un estudio de casos para describir y caracterizar los esquemas conceptuales del concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en un grupo de estudiantes de matemática que cursaron la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias siguiendo un enfoque tradicional. Estos esquemas conceptuales se caracterizan por el predominio del modo de pensamiento algebraico/algorítmico y por una presencia muy débil de conexiones cognitivas para realizar tareas de conversión entre los registros gráficos y algebraicos.

La importancia de este estudio radica en que, por una parte, responde al interés de introducirnos en la comprensión de los fenómenos y mecanismos del pensamiento matemático avanzado, así como en la metodología de su investigación, y por otra, sienta las bases para continuar con el diseño, experimentación y evaluación de situaciones de enseñanza alternativas para el primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. En particular, se aportan evidencias experimentales que confirman otras tesis, ya mencionadas en otros trabajos del área de didáctica del cálculo, a saber: 1) el desarrollo de habilidades algebraicas y algorítmicas por sí solas no garantizan la comprensión de los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias, 2) los conocimientos y/o habilidades adquiridas en el registro algebraico no se transfieren de manera automática al registro gráfico, y 3) la actividad de conversión entre representaciones no resulta por sí misma en forma automática, rápida y espontánea por el solo hecho de haber sido capaz de formar esas representaciones y efectuar tratamientos sobre ellas (ver sección 1.7.1, p. 65).

Este trabajo consta de cuatro capítulos, una sección de conclusiones y trabajos futuros, y tres anexos. El capítulo 0 se dedica al planteamiento del problema y de los objetivos del estudio. Aunque no se plantea de manera explícita alguna hipótesis de estudio, implícitamente sostenemos, contrario a la creencia generalizada entre el profesorado, que el enfoque algebraico y algorítmico no es superior al enfoque gráfico y geométrico; que un estudiante que tenga un buen desempeño en el primer enfoque no necesariamente lo tendrá en el segundo. El capítulo 1 se dedica a la elaboración del marco teórico de referencia. Para ello se han revisado, por una parte, los principales constructos teóricos existentes en el PMA: las nociones de "Concept image" y "Concept definition" (Tall y Vinner, 1981; Dreyfus y Vinner, 1989), la dualidad entre el pensamiento procedimental y conceptual (Sfard, 1992; Gray y Tall, 1993, 1994; Tall, 1991, 2000), la Teoría Apos (Dubinsky, 1991; Asiala et al., 1997). Y por otra, se han revisado los estudios más relevantes en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (Artigue, 1989; 1992; Blanchard, 1994; Ramanussen, 1998; Habre, 2000). En el capítulo 2 se hace una descripción de las herramientas metodológicas empleadas, propias de la investigación cualitativa: estudio de casos, redes sistémicas, entrevistas grabadas, cuestionarios, etc. Y también se revisan algunas investigaciones cognitivas del cálculo realizadas bajo el enfoque de los esquemas conceptuales (Tall y Vinner, 1981; Dreyfus y Vinner, 1989; Tall, 1991,; Vinner, 1991; Pinto y Tall 1999). En el capítulo 3 se aborda el análisis de los datos. Para este fin, se describen, interpretan y caracterizan las respuestas de los estudiantes usando tablas de respuestas, redes sistémicas y extractos de las transcripciones de las entrevistas. Finalmente, en los anexos se presentan el cuestionario, las transcripciones de las entrevistas y algunos programas de asignaturas de ecuaciones diferenciales consultados.

Capítulo 0: Planteamiento del Problema y Objetivos

0.1 Introducción

En los últimos años se ha escrito una variedad rica de trabajos de investigación, de innovación curricular y de reforma del proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo[1] y, en particular, de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en los que se promueven acercamientos simultáneos y coordinados de los aspectos numéricos, geométricos y analíticos (Artigue, 1989, 1992; Blanchard, 1994; Blanchard, Devaney y Hall, 1999; Farfán, 1997; Harel y Trgalová, 1996; Hernández, 1994; Hubbard y West, 1991). Un principio que guía estos esfuerzos es el llamado "The rule of Three", que dice que todo tópico debe ser presentado tanto geométrica, numérica y algebraicamente (Hughes, 1991). Si bien es cierto que, estas aproximaciones son favorecidas por las nuevas tecnologías no son un enfoque reciente. Ya en el año 1841, Cournot (citado en Cantoral, 1994) señala la conveniencia de tratar las funciones en sus representaciones múltiples, tabla de valores, gráficas, enunciados o fórmulas algebraicas.

Sin embargo, el énfasis en esas tareas de conversión entre representaciones no es sinónimo de una mayor comprensión por parte de los estudiantes como tampoco tiene que ser un contenido a ser aprendido *per se*. Es necesario, pues, articular esta triple representación con los aspectos fenomenológicos relacionados a los conceptos matemáticos, así como con las habilidades cognitivolingüísticas, que permiten comunicar las ideas, oralmente o por escrito, tanto a uno mismo como a los demás (Prat, 2000; Sfard, 1999).

[1]El cálculo ocupa un lugar neurálgico en la educación superior: sus vínculos tanto con el pensamiento matemático elemental como con el pensamiento matemático avanzado, así como su papel en las matemáticas, la tecnología y las ciencias, lo hacen un conjunto de conocimientos de valor teórico y práctico indispensable en la educación superior (Artigue, 1991; Farfán, 1991; Tall, 1996). Entendemos por cálculo: cálculo diferencial e integral, cálculo en varias variables, análisis real y complejo y ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales (Cantoral, 1991; Harel y Trgalová, 1996)

En general, el propósito de estas nuevas tendencias es enriquecer la enseñanza del cálculo con lecciones y tareas en donde los tres puntos de vista están equilibrados y los estudiantes puedan apreciar cada noción desde diferentes perspectivas. Esto es así, porque para muchos investigadores, el conocimiento matemático es como el invariante de múltiples representaciones y, en consecuencia, llegar a comprender un concepto matemático implica ser flexible en los procesos de conversión entre diferentes sistemas de representación y diferentes perspectivas del concepto (Artigue,1992; Dreyfus,1994; Duval, 1993; Janvier, 1978, 1987).

El origen de estas nuevas aproximaciones lo encontramos en el hecho reiteradamente constatado en numerosas investigaciones del campo de que el predominio en la enseñanza del enfoque algebraico-algorítmico genera en los estudiantes esquemas conceptuales y habilidades muy demasiado rígidas, así como una comprensión conceptual insuficiente para resolver situaciones que aparecen en la práctica profesional.

En efecto, investigaciones como las de (Artigue, 1994; Asiala et al., 1997b; Baker et al., 2000; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Tall, 1992, 1996; Vinner, 1991), señalan que a pesar que los estudiantes son capaces de resolver con cierto éxito problemas de cálculo rutinarios en el registro algebraico, existen muchas dificultades cuando se estudian las funciones y sus derivadas en el registro gráfico y se trata de coordinar éste con los registros algebraicos y analíticos.

Por otra parte, mi experiencia docente compartida con muchos profesores salvadoreños durante más de 10 años me permite dar cuenta de tales fenómenos (lo cual muy bien puede afirmarse que forma parte de mi problemática espontánea como profesor). Por ejemplo, cuando mis estudiantes consideran la solución del problema de valor inicial

$$y' - 2xy = 1,\ y(0) = -\tfrac{1}{2},$$

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{2}e^{x^2}\ ,$$

he observado que ellos: 1) no acceden fácilmente a las propiedades cualitativas de *y(x)*, 2) no poseen una imagen gráfica de *y(x),* 3) el significado que atribuyen a *y(x)* se reduce a una mera fórmula que para calcular $y(x_0)$ se requiere de algún método numérico, y 4) otros simplemente no creen que tales expresiones sea respuestas tan aceptables cómo aquellas en las que sólo aparecen funciones elementales. No obstante, mediante un estudio gráfico/geométrico elemental usando campos de pendientes, isoclínas, etc., las propiedades locales y globales de la función son inmediatas.

Asimismo, en Zill (1988, pp. 40-41), un libro de texto muy usado en los primeros cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias en muchas carreras en el sistema universitario salvadoreño, se resuelve el problema de valor inicial $y' = y^2 - 4,\ y(0) = -2$ con el objeto, como el mismo autor lo menciona, de mostrar las limitaciones de proceder sólo en el registro algebraico y de darse por satisfecho una vez encontrada una fórmula para la "solución general". Sin embargo, las explicaciones a las que recurren el autor y muchos de los profesores que siguen tal texto se quedan en el mismo registro algebraico mostrando solamente que existen soluciones que no pueden obtenerse de la "solución general". También, a pesar de que se muestra ahí un dibujo con algunas soluciones, no se explícitan las relaciones de este dibujo con la ecuación diferencial.

Por nuestra parte, creemos que esa situación muy bien puede aprovecharse para construir otras soluciones a partir de un análisis directo de la ecuación diferencial y relacionar éstos dibujos con la solución general obtenida. Además, el papel y significado de los teoremas de existencia y unicidad puede enriquecerse y convertirse en una herramienta que el estudiante utiliza no sólo para verificar que una ecuación diferencial cumple deteminadas hipótesis, sino que también la utiliza para construir las curvas solución de la ED.

Por otro lado, también existen evidencias empíricas de que aquellos estudiantes que son competentes en el registro gráfico/geométrico, sacan mejor provecho de ambientes de aprendizaje que usan las nuevas tecnologías. Por ejemplo, (Chau & Pluvinage, 1999), reportan que universitarios de primer año que tienen éxito en las tareas cualitativas de las ecuaciones diferenciales ordinarias sacan mejor provecho del trabajo gráfico utilizando Derive que los alumnos que trabajan bien la parte algebraica. Y agregan, que si bien es cierto que, los métodos cualitativos se adquieren más difícilmente, presentan, desde el punto de vista didáctico, el interés de favorecer la transferencia de conocimientos. Por transferencia se entiende a la habilidad de un sujeto de usar un conocimiento en condiciones diferentes a las cuales ese conocimiento fue desarrollado, y poder así resolver otras situaciones problemas que, en principio, no estarían a su alcance.

Ahora bien, en el contexto del sistema universitario salvadoreño en el cual se enmarca este trabajo, la situación actual de la enseñanza del cálculo (que muy bien puede caracterizarse como una enseñanza tradicional centrada en la representación algebraica y en una practica algorítmica, con muy pocos nexos entre matemáticas y ciencia), por diversas causas, se ha visto muy poco influenciada por los movimientos de cambio que se han mencionado antes. En particular, esa es la situación del primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en todas las carreras universitarias en que éstas se estudian (ver anexo 3).

La revisión de los diferentes programas de estudio y de los libros de textos utilizados permiten afirmar que el curso introductorio de las EDO se concibe como una continuación o complemento de los cursos de cálculo diferencial e integral (de una o varias variables) y consiste, básicamente, en una secuencia de trucos para encontrar fórmulas para las soluciones de ciertos tipos de EDO, en el que se da prioridad a los aspectos algebraicos-algorítmicos y se dejan por fuera cuestiones centrales acerca del comportamiento de las soluciones.

Por tanto, el proceso de enseñanza y aprendizaje se enmarca exclusivamente en el registro de representación algebraico/analítico. La solución de EDO por métodos gráficos/geométricos, así como la interacción de éstos con los métodos algebraicos/analíticos no son abordados o si se abordan se hace de una manera muy marginal.

Además, concebir el primer curso de las EDO como la continuación algebraica-algorítmica de los cursos de cálculo diferencial e integral debería no ignorar, por una parte, el hecho de que los estudiantes ya poseen unos conocimientos y/o habilidades para construir la gráfica de una función usando las técnicas de la primera y segunda derivadas y que, por lo tanto, poseen, bien o mal, algunos conocimientos y habilidades gráficas necesarias, aunque no suficientes, para resolver EDO por los métodos cualitativos elementales (campos de pendientes, isoclinas, determinación de zonas de monotonia y concavidad, identificación de puntos de equilibrio, plano o linea fase, series temporales, etc.). Y por otra, el hecho de que el desarrollo de habilidades algebraicas por sí solas no garantizan la comprensión de los conceptos matemáticos y que, por el contrario, tal énfasis provoca esquemas conceptuales que impiden el progreso a niveles superiores de pensamiento.

Por tanto, el primer curso de EDO reclama un enfoque que, contrario al acercamiento convencional que prioriza el tratamiento algebraico y algorítmico, integra los aspectos cualitativos, algebraicos y numéricos, así como los aspectos fenomenológicos de acuerdo a las prácticas científicas de referencia de los estudiantes. Ese enfoque es el enfoque cualitativo y tiene el interés añadido que permite retroalimentar la interpretación geométrica y física del concepto de derivada Evidentemente, para lograr esto, la creencia generalizada entre el profesorado y, en consecuencia, entre los alumnos de la superioridad del enfoque algebraico-algorítmico frente al enfoque gráfico/geométrico, así como, la creencia en la imposibilidad de implementar un curso siguiendo éste último enfoque sin prescindir de la tecnología, son creencias que deben ser cuestionadas. "*Las creencias y los hábitos acerca del* *estatus y el papel del cuadro gráfico actúan como obstáculos didácticos y tienen que ser explícitamente cuestionados con el objeto de obtener los cambios epistemológicos necesarios en los profesores como en los alumnos"* (Artigue, 1992, p. 132).

Así pues, una de las finalidades de este trabajo es reunir o encontrar evidencias epistemológicas, cognitivas y didácticas que sugieran determinados cambios para enriquecer la metodología de la enseñanza de las EDO, de manera que no dependan exclusivamente del uso intesivo de la tecnología, pero que sí la integra adecuadamente, para comprender los conceptos matemáticos implicados y, en definitiva, favorecer en los estudiantes una formación matemática global y práctica.

0.2 Planteamiento del Problema y Justificación

En este trabajo, modesto pero fecundo, además de iniciarnos en la investigación del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y reflexionar sobre los estudios más relevantes en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje del primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, se ha realizado una investigación de campo para describir y caracterizar los esquemas conceptuales de una muestra de estudiantes salvadoreños (de la carrera de matemáticas) que han concluido una asignatura de ecuaciones diferenciales ordinarias bajo el enfoque tradicional cuando se les plantean tareas que demandan relacionar los registros algebraico y gráfico. Estas tareas son básicas, y deberían formar parte del repertorio de los estudiantes independiente del enfoque que haya sido dado a la asignatura de EDO.

Creemos que el problema de investigación esta bien planteado y que no es incongruente, pues las principales causas que ha favorecido el predominio del enfoque algebraico/algorítmico en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales es la creencia generalizada entre el profesorado de la superioridad de éste frente a los métodos gráficos/geométricos, considerados como secundarios y subsidiarios. En consecuencia, se cree que un estudiante que tenga un buen desempeño en el primer enfoque automáticamente también lo tendrá en el segundo. Sin embargo, como puede verse en este trabajo, se aportan evidencias que demuestran que en nuestro caso eso no es cierto y que las capacidades para leer e interpretar información gráfica así como convertir información cuantitativa en un formato cualitativo y viceversa (que tiene un valor práctico y educativo incuestionable) no se desarollan siguiendo un enfoque tradicional (algebraico y algorítmico).

Las preguntas generales que se trata de responder son:

- *¿Con qué se quedan los estudiantes una vez finalizada la asignatura de ecuaciones diferenciales? ¿qué competencias han adquirido? ¿cuáles se supone que deberían haber adquirido?*
- *¿Qué papel juega el predominio del enfoque algebraico en la conceptualización de la noción de ecuación diferencial y solución de una ecuación diferencial de primer orden?*
- *¿Son los estudiantes capaces de construir la gráfica de una solución de una ecuación diferencial derivando las propiedades necesarias de esta gráfica directamente de la ecuación diferencial o primero sienten la necesidad de encontrar una fórmula para la solución utilizando algún método de integración?.*
- *¿Cuáles son las dificultades y obstáculos específicos que los estudiantes experimentan cuando coordinan las representaciones gráficas y algebraicas?.*

Las respuestas que se dan a estas cuestiones a través de la investigación bibliográfica y empírica, permiten hacer un diagnóstico de la enseñanza y del aprendizaje del primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. Asimismo, con perspectivas hacia la tesis, iluminan el camino para diseñar, experimentar y evaluar situaciones de enseñanza sobre el enfoque cualitativo en un primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta perspectiva, como ya se ha mencionado, nuestra filosofía de trabajo se fundamenta en la articulación de las diferentes representaciones semióticas, los aspectos fenomenológicos relacionados a los conceptos matemáticos y las habilidades cognitivolingüísticas.

Es muy cierto que, hoy en día, existen muchas propuestas curriculares, textos y materiales disponibles a través de internet para implementar un curso reformado de ecuaciones diferenciales pero, también es cierto, que contrario a lo que sucede con el cálculo diferencial e integral, son muy pocos los estudios didácticos que abordan el pensamiento del estudiante (ver Habre, 2000; Rasmussen, 1998). No obstante, las investigaciones cognitivas son indispensables para evaluar la viabilidad de esas nuevas propuestas curriculares e ilumimar la práctica docente. He aquí la importancia de este trabajo.

Así, siguiendo la linea de trabajo esbozada arriba, **los objetivos de este trabajo son**:

- Elaborar un marco teórico en torno a los constructos teóricos y metodológicos que se han elaborado para analizar el pensamiento matemático avanzado que nos permita precisar el significado de la terminología y nos oriente en la obtención de datos y el análisis de los mismos.
- Estudiar qué dificultades y obstáculos experimentan los estudiantes, así como qué técnicas y conceptos utilizan cuando se les plantean tareas que requieren de la interacción y la coordinación de aspectos gráficos y algebraicos para graficar la solución de un problema de valor inicial para una ecuación diferencial de primer orden.
- Obtener un diagnostico de las habilidades y/o conocimientos con que se quedan los estudiantes y comparar con los que deberían haber adquirido, después de terminar un curso tradicional de ecuaciones diferenciales, que nos sirva de referencia para diseñar, experimentar y evaluar situaciones de enseñanza sobre el enfoque cualitativo en un primer curso.

Evidentemente, centrar este trabajo dentro del programa de investigación cognitivo Pensamiento Matemático Avanzado (Dreyfus, 1990; Tall, 1991) y, específicamente, en el pensamiento del estudiante implica asumir como hipótesis básica que los fenómenos relativos al aprendizaje pueden ser explicados a partir de las características individuales de los estudiantes: cognitivas, lingüísticas, psicológicas, motivacionales, actitudinales, etc. Sin embargo, esto no significa que los otros elementos que conforman el sistema didáctico (*alumno-profesor-conocimiento*) sean menos importantes y, en definitiva, para adquirir una comprensión holística o global de los fenómenos de la enseñanza y el aprendizaje, ellos deben ser tomados en cuenta.

Durante las últimas dos décadas las iniciativas de reforma de las matemáticas escolares han puesto atención no sólo en las matemáticas a ser enseñadas, sino también en los procesos tanto individuales como sociales por los cuáles éstas son concebidas y aprehendidas. En este sentido, Tall (1991) dice que en tanto que las matemáticas son una cultura compartida, cualquier teoría psicológica del aprendizaje de las matemáticas debería tomar en cuenta, no sólo los aspectos cognitivos, sino también aquellos que son dependientes del contexto: "*Cualquier teoría psicológica del pensamiento matemático debería ser vista en el contexto amplio de la actividad cultural y humana. No hay una verdad, una forma absoluta de pensamiento acerca de las matemáticas, sino diversas formas de pensamiento desarrolladas culturalmente en las cuales muchos aspectos son relativos al contexto*"(p. 6).

En particular, los procesos cognitivolingüísticos implicados en la construcción de significado y apropiación del conocimiento matemático son muy importantes. En este sentido, Jorba (2000) dice que el desarrollo del pensamiento lógico del alumno, esto es, de su capacidad de conjeturar, describir, definir, explicar, analizar, sintetizar, argumentar, demostrar, etc., está íntimamente relacionado con el desarrollo de su capacidad para comunicar las ideas tanto para sí mismo como hacia los demás, es decir, de las habilidades cognitivolingüísticas: describir, definir, resumir, explicar, justificar, argumentar y demostrar. Recíprocamente, estas habilidades cognitivolingüísticas se potencian y desarrollan a partir de estas habilidades cognitivas que están en la base del aprendizaje. Además, estas habilidades cognitivilingüísticas, demandan del profesor de matemáticas una atención específica y un esfuerzo propio en la clase de matemáticas pues, ellas están implicadas en la elaboración de cualquier tipo de discurso y tienen un desarrollo especifico que difiere de una área a otra y, contrariamente a lo que se suele creer, difícilmente son transferibles (Prat, 2000, pp. 71-72). Así, el proceso de enseñanza-aprendizaje debería contribuir al desarrollo en los alumnos de habilidades básicas, ya sean generales, interdisciplinarias o específicamente disciplinarias que les permitan acceder a una forma de comunicación especial (ver Bandiera et al., 1995), es decir, que desarrollen su *competencia comunicativa:* entendida como el conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo que el alumno debe poner en juego para producir o comprender discursos adecuados a la situación y al contexto de comunicación y al grado de formalización requerido.

0.3 Antecedentes

El movimiento de reforma del curriculum de las EDO para romper con la exclusividad de los procesos de algebrización y algorítmización a que ha estado sometida la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina durante mucho tiempo, inició hace más o menos 20 años, en 1983, con la publicación de Artigue y Gautheron (1983) de su libro *Systemes Differentiels, Etude Graphique* y la propuesta en Inglaterra del *School Mathematics Project (SMP)* (1983*).* Sin embargo, ya en el año 1919, Brodetsky (citado en Hernández, 1994) planteó la necesidad de enseñar las EDO desde una perspectiva geométrica.

Recientemente han aparecido varias propuestas de innovación curricular: Hubbard y West (1991), Blanchard (1994), Hernández (1994), Devaney (1995), Arrowsmith (1991), Blanchard, Devaney y Hall (1997, 1999) en las cuales se promueven la integración y coordinación de los enfoques numéricos, algebraicos y gráficos; en particular, de los enfoques algebraico y gráfico, esto es, entre una ecuación y el conjunto de curvas solución. El impacto de estos esfuerzos se puede apreciar muy bien en la evolución de los libros de Boyce Di Prima.

Devaney (1995), sugiere que con la introducción de la tecnología y el estudio cualitativo de las funciones, se puede introducir material relevante y moderno y presentar tópicos tradicionales de ED desde un nuevo punto de vista, como por ejemplo la Teoría de Bifurcaciones[2], que rara vez se incluye en los cursos tradicionales de ED y que son de una importancia crucial en muchas aplicaciones de la ingeniería. Devaney dice:

> "*In our courses, the analytic solution of differential equations definitely takes a back seat to qualitative and numerical techniques. At the outset, when covering first order equations, we remind students how to solve separable equations. But that is essentially the only analytic technique we include until the end of the first order discussion when we finally solve first order linear equations and mention changes of variables.*
>
> *Most of our effort deals with autonomous equations of the form* $\frac{dy}{dt} = f(y)$.
>
> *Although this type of equation is separable, we rarely take the time to carry out the integrations explicitly (when we do it is most often to show students how ``ugly'' and uninformative the resulting formulas are). Rather, we emphasize the interrelationships between four different pictures associated with this equation. These pictures are fairly easy to draw using only the formula for f(y), and which they do not give a completely accurate portrayal of the behavior of solutions. They do provide a good picture of the qualitative or long term behavior of solutions.*"

[2] En términos generales, se dice que se tiene una bifurcación sí el comportamiento global de las soluciones de una ecuación diferencial, que depende de un parámeto, cambia cuando el parámetro varía. Considérese, por ejemplo, la ecuación y' = y(1-y) –a, con a>0. Si a<1/4, hay dos soluciones constantes; si a=1/4 sólo hay una solución constante; y si a>1/4 no hay soluciones constantes.

Por su parte, (Hernández, 1994) considera los obstáculos que aparecen en la articulación de los marcos numérico, algebraico y gráfico en el estudio de las EDO y, tomando como marco teórico la noción de ingeniería didáctica, elabora una propuesta para la enseñanza de las EDO en las escuelas de ingeniería del sistema universitario mexicano. Básicamente su propuesta consiste en implementar el marco geométrico desde el inicio y limitar el marco algebraico a los métodos para resolver ecuaciones de variables separables, las lineales de primer y segundo orden, y el método de la transformada de Laplace. Asimismo, promueve el uso del software computacional para el cálculo de integrales, la simplificación de expresiones algebraicas y para articular, cuando sea posible, la solución algebraica con su representación gráfica.

Finalmente, (Blanchard et al., 1997) plantea un enfoque desde la perspectiva de los sistemas dinámicos en el que se hace énfasis en la interacción entre las aproximaciones numéricas, analíticas y cualitativas para lograr la comprensión del concepto de solución de una ED. En la introducción del texto escribe:

> ”*This book is an outgrowth of our opinion that we are now able to effect a radical revision, and we approach our updated course with several goals in mind. First, the traditional emphasis on specialized tricks and techniques for solving differential equations is no longer appropriate given the technology that is readily available. Second, many of the most important differential equations are nonlinear, and numerical and qualitative techniques are more effective than analytic techniques in this setting. Finally, the differential equations course is one of the few undergraduate courses where it is possible to give students a glimpse of the nature of contemporary mathematical research*”
>
> *“This book is a radical departure from the typical "cookbook" differential equations text. We have eliminated most specialized techniques for deriving formulas for solutions, and we have replaced them with topics that focus on the formulation of differential equations and the interpretation of their*

solutions. To obtain an understanding of the solutions, we generally attack a given equation from three different points of view. One major approach we adopt is qualitative. We expect students to be able to visualize differential equations and their solutions in many geometric ways. For example, we readily use slope fields, graphs of solutions, vector fields, and solution curves in the phase plane as tools to gain a better understanding of solutions. We also ask students to become adept at moving among these geometric representations and more traditional analytic representations"

Por otro lado, se tienen las investigaciones de Artigue (1988, 1992), Ramanussen (1988) y Habre (2000) que se centran en el pensamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas o problemas que pueden resolverse usando métodos cualitativos. Los datos recogidos indican que la aproximación cualitativa es plausible y presentan muchas ventajas, pero que se tiene que hacer un gran esfuerzo para romper con la tendencia de los estudiantes hacia el modo de pensamiento algebraico/algoritmico y modificar sus concepciones acerca del estatus del registro gráfico.

Finalmente, consideramos los estudios de Moreno y Azcárate (1997) y Moreno (2000) en los que se estudian las concepciones de los profesores acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las EDO.

En las secciones 1.9 y 1.10 se revisan en detalle los aportes de estas investigaciones y ahí remitimos.

CAPITULO 1: Marco Teórico

1.1 Presentación

Las diferentes perspectivas teóricas que coexisten en el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA)[3] proporcionan un marco epistemológico específico que permite describir y explicar, por un lado, las dificultades, obstáculos, inconsistencias e incoherencias[4] que aparecen en las producciones de los estudiantes y, por otro, qué construcciones mentales son necesarias realizar (en el pensamiento de los estudiantes) para comprender y aplicar los conceptos matemáticos superiores. Asimismo, ellas facilitan un panorama del desarrollo cognitivo del estudiante, así como permiten sistematizar y explicar desde varios puntos de vista los datos obtenidos en las investigaciones didácticas.

El denominador común de varias de éstas teorías es la dialéctica proceso-objeto, en la que se postula que el desarrollo del conocimiento matemático en la estructura cognitiva del sujeto, se inicia con acciones (primero sobre el medio), luego algunas acciones se interiorizan en un proceso repetitivo (es decir, una representación cognitiva de un proceso matemático) que progresivamente se concibe como un objeto por derecho propio que puede ser manipulado en un nivel superior de pensamiento (Tall, 1996). En esta

---

[3] En general, el PMA puede caracterizarse en función o bien del nivel de las matemáticas o bien de las operaciones requeridas para hacer matemáticas (Heid y Ferrini-Mundy, 1999). Así, el PMA es un témino que se refiere a los modos de pensamiento que permiten a un sujeto aprender, producir, valorar y aplicar las matemáticas. Desde esta perspectiva, en el PMA no se supone que esas habilidades deberían ser adquiridas sólo después que el pensamiento matemático no-avanzado ha sido asimilado y dominado. Y por lo tanto, todos los niveles educativos, desde el elemental al univesitario, requieren del PMA. Ejemplos de pensamiento matemático avanzado son: reconocer un concepto en diferentes sistemas de repesentación, el razonamiento deductivo, conjeturar, el razonamiento algorítmico, la encapsulación, la conversión entre repesentaciones. Otra perspectiva, considera que el PMA debería ser definido en términos del nivel de los contenidos curriculares (Dreyfus, 1991). Así, se identifica el PMA con el pensamiento de las matemáticas avanzadas, es decir, con el cálculo y más allá. Tall (1991) dice que el paso del pensamiento matemático elemental al avanzado supone transiciones muy importantes: 1) pasar de describir a definir, y 2) de convencer a demostrar.

[4] Siguiendo a Garbin(2000), diremos que una idea o un pensamiento es *inconsistente* para un sujeto cuando éste considera compatible una proposición y su negación. Así las inconsistencias se refieren a contradicciones dentro de una teoría matemática. Ahora bien, cuando se resuelve un mismo problema en diferentes sistemas de representación puede suceder que se generen respuestas contradictorias entre sí. Llamamos a estas ideas o pensamientos contradictorios *incoherencias*. Por lo tanto, se puede tener un alumno cuyo pensamiento o ideas sean inconsistentes (que contradicen la teoría) pero coherentes (que las ideas son equivalentes al cambiar de sistemas de representación).

dinámica proceso-objeto juegan un papel relevante las representaciones semióticas de los objetos o conceptos matemáticos; y en particular, el desarrollo pensamiento visual. Asimismo, la noción de esquema conceptual (concept image) ha mostrado ser una herramienta útil en las investigaciones del campo.

Por lo tanto, para tener un marco de referencia general acerca del PMA, en las secciones siguientes se revisan los principales constructos teóricos que sirven de soporte para muchas investigaciones que se realizan bajo el PMA, a saber: las perspectivas teóricas de Tall y Vinner, Dubinsky, y Sfard. También, se consideran sumamente importantes tanto desde el punto de vista teórico como metodológico, el papel de los obstáculos y de las representaciones semióticas.

1.2 Definición del Concepto y Esquema Conceptual

En este trabajo la noción de esquema conceptual juega un papel central, pues lo que se pretende es describir y caracterizar los esquemas conceptuales de los estudiantes en torno a los conceptos de ecuacion diferencial y sus soluciones.

Autores como (Azcárate, 1990; Dreyfus y Vinner, 1989; Tall,1991; Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1991) hablan de los términos *definición del concepto (concept definition) y esquema conceptual*[5] *o imagen del concepto (concept image)* para destacar la diferencia que existe entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos utilizados para concebirlos[6], y poder así describir o explicar por qué unos estudiantes tienen éxito y, por el contrario,

---

[5]*Esquema conceptual* es la traducción que adopta Azcárate (1990) para el término ingles *concept image*.

[6] Artigue (1990), utilizan los términos *concepto matemático* y *concepciones de los alumnos* estableciendo un paralelismo entre concepto matemático y concepción: "De la misma manera que en un *concepto matemático* se distingue:la noción matemática tal como se define en el contexto del saber sabio en una época dada, el conjunto de los significantes asociados al concepto, la clase de los problemas en cuya resolución adquiere su sentido, los instrumentos: teoremas, técnicas algorítmicas, específicas del tratamiento del concepto; en *las concepciones de los sujetos* se distinguirán diversas componentes, y en particular:
la clase de situaciones–problemas que le dan sentido al concepto para el alumno, el conjunto de los significantes que es capaz de asociarle, en particular las imágenes mentales, las expresiones simbólicas,
los instrumentos, teoremas, algoritmos de los que dispone para manipular el concepto." Artigue señala que existe una proximidad entre *concepción y esquema conceptual*.(Azcárate,1995).

otros fracasan en la comprensión de los conceptos y métodos matemáticos. La noción de esquema conceptual (concept image) fue introducida en el PMA por Tall y Vinner (1981) para referirse a todas las representaciones mentales que son evocadas por el nombre de un concepto. En Tall y Vinner (1981), se encuentra lo que debe entenderse por esquema conceptual: "*El termino esquema conceptual describe la estructura cognitiva total*[7] *asociada con un concepto y que incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y los procesos asociados con él. Se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo que van cambiando según el individuo encuentra nuevos estímulos y madura.*"(p. 2) (ver también Azcárate,1995, 1998).

Vinner (1991) añade: "E*l esquema conceptual es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en caso de que este la tenga; también puede ser una colección de impresiones o experiencias*" (p. 68).

Y dado que diferentes estímulos pueden activar diferentes partes del esquema conceptual, se llama *esquema conceptual evocado* a esa parte que se activa en un momento dado. Así, en momentos distintos, pueden ser evocadas imágenes aparentemente conflictivas. Sin embargo, sólo cuando esos aspectos sean evocados simultáneamente existirá un sentido real de conflicto o confusión.

Igualmente, para precisar lo que se entiende por el término definición del concepto, Tall y Vinner (1981) escriben: "*consideramos la definición del concepto como una secuencia de palabras usada para referirse al concepto. Esta puede ser aprendida mecánica o significativamente y estar relacionada, en menor o mayor grado, al concepto como un todo. Puede ser una reconstrucción personal de una definición, es decir, una secuencia de palabras que el individuo usa para explicar su esquema conceptual evocado.*"(p. 2)

[7]Por estructura cognitiva se entiende al contenido total y la organización de las ideas en una área particular de conocimientos, almacenados en nuestras mentes que crece y se desarrolla desde la más temprana infancia También, la estructura cognitiva total se refiere al significado del concepto y es mucho más que la evocación de un sólo símbolo, y también, es más que cualquier imagen mental, ya sea esta pictórica, simbólica o cualquier otra. Durante el proceso de recordar y manipular un concepto, muchos procesos son traídos a escena que consciente o inconscientemente afectan el significado y el uso.(Tall, 1981, p.1-2)

En el mismo sentido, Azcárate (1995) escribe: "*La definición de un concepto matemático como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Se podrá distinguir entre las definiciones formales, convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado, y las definiciones personales que utilizan las personas (estudiantes, profesores, matemáticos) como construcción o reconstrucción de una definición formal.*"(p. 12).

Así*, la definición del concepto,* atendiendo a cómo se usa la secuencia de palabras puede dividirse en: *personal*, la reconstrucción que la persona hace de una definición formal dada, y *formal,* aquélla convenida y aceptada por la comunidad de matemáticos en un momento dado (que muy bien, puede no significar nada para un estudiante).

En cada individuo, una definición del concepto genera su propio esquema conceptual, llamado *esquema conceptual formal* y que consiste sólo de aquellos conceptos y propiedades que han sido construidos formalmente a partir de las definiciones, el cual puede ser vacío o puede no estar relacionada coherentemente a las otras partes de*l esquema conceptual total o esquema conceptual informal,* que por supuesto es más amplio y contiene al primero (Tall y Vinner, 1981, p. 2).

Es más, Dreyfus y Vinner (1989) señalan: "*El esquema conceptual del estudiante es el resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto. Por tanto, el conjunto de objetos matemáticos que el estudiante considera ejemplos del concepto no es necesariamente el mismo que el conjunto de objetos matemáticos determinados por la definición formal. Si estos dos conjuntos no son el mismo, el comportamiento del estudiante puede ser diferente del que espera el profesor. Para mejorar la comunicación necesitamos comprender por qué se da esta diferencia; por tanto es importante explorar los esquemas que tienen los estudiantes de muchos de los conceptos matemáticos.*"(p. 356).

Por ejemplo, la definición del concepto formal de una función enseñada a los estudiantes podría ser la definición de Dirichlet-Bourbaki: una correspondencia entre dos conjuntos no vacíos tal que se asigna a cada elemento del primer conjunto (dominio) exactamente un elemento del segundo conjunto (codomio). Pero el esquema conceptual de un estudiante puede muy bien incluir o no muchos otros aspectos; a saber: que una función está dada por una regla, una formula, una gráfica, una tabla de valores, una acción, que formulas diferentes puedan ser usadas en diferentes partes del dominio, una función tiene que es siempre continua, una función debe estar dada por una sola fórmula, etc. Y cuando este estudiante se enfrenta a tareas de construcción o identificación de funciones su comportamiento está determinado básicamente por su esquema conceptual, mientras que la definición del concepto formal dada permanece inactiva en la estructura cognitiva (ver Tall y Vinner, 1981; Vinner y Dreyfus, 1989).

Asimismo, la definición verbal de limite de una sucesión "$s_n \to s$" que dice: "podemos hacer que s_n esté tan cerca de s con tal que tomemos n suficientemente grande", induce en muchos estudiantes la noción de que s_n no puede ser igual a s. En estos estudiantes esta noción es parte de su esquema conceptual pero no es parte de la teoría formal (ver Schwarzenberger y Tall, 1978). Así, ante problemas que desde el punto de vista matemático serian lo mismo, resulta que para los estudiantes no lo son. Por ejemplo, Tall (1981) reporta que 14 de 36 estudiantes de primer año de universidad responde que:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{9}{10}+\ldots+\tfrac{9}{10^n}) = 2 \ \text{ y } \ 0.\dot{9}<1.$$

Algunos afirman: "$0.\dot{9}$ *es menor que 1 porque el proceso de acercarse cada vez más a 1 continua para siempre sin ser completado jamás*."

Las imágenes o las concepciones de los estudiantes son tan estables que éstas no se modifican aun después de secuencias de aprendizaje concebidas expresamente para ello. Por ejemplo, en un curso universitario diseñado por

Tall (ver Tall, 2000a) para introducir intuitivamente la definición formal de límite $\varepsilon - N$ a través de experiencias de programación con ordenadores, se pidió a los estudiantes que respondieran:

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ tiende a _______

- El limite de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ es______

Las respuestas obtenidas se resumen en la tabla 1. Ellas muestran que las ideas de los estudiantes señaladas antes se conservan.

Test	Respuestas: **"tiende a"/"el limite es"**						
	0/0	$0/\frac{1}{\infty}$	$\frac{1}{\infty}/\frac{1}{\infty}$	0/?	2/2	0/2	0/1
Pretest (N=25)	0	11	1	5	0	2	2
Postest (N=23)	8	3	3	0	4	0	2

Tabla 1. (Tomada de Tall, 2000a, p. 220).

Estas respuestas tienen explicaciones naturales: 2 es la suma de la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$, 1 es el término más grande (igual que la velocidad limite es la máxima velocidad permitida), y $\frac{1}{\infty}$ es el límite genérico ($\frac{1}{n}$ con n infinito). La respuesta que más se repite en el pretest $0/\frac{1}{\infty}$ sugiere una conceptualización en la que la sucesión tiende a 0 (el valor limite), pero el limite tiene un valor arbitrariamente pequeño $\frac{1}{\infty}$. Esto lo que refleja es un esquema conceptual de la recta numérica conteniendo cantidades infinitesimales que esta en desacuerdo con la definición formal de los números reales y que, por ejemplo los conduciría a rechazar el axioma de completitud.

También se observo que el significado de $0.\dot{9}$ (periódico) permaneció esencialmente sin cambio pese a haber discutido en detalle las razones por qué $0.\dot{9}$ es el limite de la sucesión $\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ y, que por lo tanto, es igual a 1.

También, se pregunto: ¿es $0.\dot{9}$ igual a 1? Las respuestas obtenidas se resumen en la tabla 2.

Test	Si	NO	¿	No responde
Pretest (N=25)	2	21	1	1
Postest (N=23)	2	21	0	0

Tabla 2. (Tomada de Tall, 2000a, p. 221).

Así, los estudiantes continúan concibiendo $0.\dot{9}$ como una secuencia de números que se acerca más y más a 1 y no como un valor fijo.

Otras preguntas que se propusieron a los estudiantes fueron:

- ¿ Podrías sumar 0.1+0.01+0.001+... para conseguir una respuesta exacta?.

- Ya sabes que $\frac{1}{9} = 0.\dot{1}$. ¿será $\frac{1}{9}$ igual a 0.1+0.01+0.001+... ?

Las respuestas obtenidas se muestran en la tabla 3.

Test	Respuestas: “podrías…”/”será..”.						
	Si/No	Si/No	Si/No	Si/No	Si/No	Si/No	Si/No
Pretest (N=25)	4	0	1	18	0	1	1
Postest (N=23)	2	2	2	14	1	0	0

Tabla 3. (Tomada de Tall, 2000a, p.221).

Estos datos indican que la mayoría consideraban $0.1+0.01+0.001+\ldots=\frac{1}{9}$ falso, pero $\frac{1}{9}=0.1+0.01+0.001+\ldots$ verdadero. Así, la lectura de izquierda a derecha en la primera cuestión parece que representa un proceso infinito potencial que nunca puede ser completado, mientras que la segunda indica que $\frac{1}{9}$ puede ser dividido hasta alcanzar todos los términos deseados. También podría decirse que los estudiantes consideran la expresión $0.1+0.01+0.001+\ldots$ como un proceso y no como un valor.

También, para la noción de continuidad, Tall (1981), reporta que en los esquemas conceptuales de estudiantes sobresalientes, subsisten ideas que están en conflicto con la definición formal: "*Es continua porque la función esta dada por una sola formula", "Es continua porque es de una sola pieza", "Es continua porque no tiene saltos ni agujeros", "Es continua porque el gradiente cambia suavemente*".

Esto, lo que dice es que los estudiantes evocan partes diferentes de su esquema conceptual del proceso del limite y de la noción de continuidad. Y que, además, la construcción de esquemas conceptuales para estas nociones - limite y continuidad- a partir de enfoques intuitivos e informales y con ejemplos específicos en los que predomina una idea de proceso, es insuficiente o limitada.

Respecto al concepto de derivada, Vinner (1991) reporta que muchos estudiantes de cálculo, aún después de haber estudiado este concepto, afirmaban que era posible dibujar una tangente a la curva $y = x^3$ en $x = 0$, pero sólo el 18% fueron capaces de dibujar la tangente correctamente. Por nuestra parte, hemos observado que muchos estudiantes tienen una gran dificultad para dibujar la gráfica de una función continua alrededor de 0 cuando se cumple la condición $\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$ (ver Vinner, 1991; Dubinsky, 2000). Esto sugiere que los esquemas conceptuales de esos estudiantes no contienen tangentes horizontales en puntos que no sean máximos o mínimos, así como tampoco la imagen de una tangente vertical.

Otros estudios reportan que son varios los significados que los estudiantes atribuyen a las diferentes partes $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (ver Artigue, 1991; Orton, 1980; Tall, 1980). Por ejemplo, algunos afirman que dx y dy no tienen significado en sí mismos, sino que forman una unidad indivisible $\frac{dy}{dx}$; para otros, dx es un número real, $dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$ o dx indica la variable de integración. De la misma manera, por ejemplo: dy es un incremento infinitesimal, $dy = \lim_{\Delta y \to 0} \Delta y$ o en cambio que $dy = f'(x)dx$.

En este sentido, siguiendo a Tall (1981), se llama *factor conflictivo potencial* a aquella parte de la definición del concepto o del esquema conceptual que puede chocar o entrar en conflicto con alguna otra parte de estos. Y cuando estos factores sean evocados en circunstancias que producen un conflicto cognitivo real se llamaran *factores conflictivos cognitivos.* Un factor conflictivo potencial digno de atención es aquel que está en desacuerdo no con una parte del esquema conceptual sino que con la definición del concepto formal. Tales factores pueden impedir seriamente el aprendizaje de la teoría formal, pues ellos pueden no convertirse en factores conflictivos cognitivos a menos que la definición del concepto formal desarrolle un esquema conceptual que conduzca a un conflicto cognitivo. Los estudiantes que tienen tales factores conflictivos potenciales en su esquema conceptual pueden estar muy seguros de sus propias interpretaciones de las nociones implicadas y considerar simplemente que la teoría formal es inoperativa y superflua.

Por lo tanto, es muy posible que en el esquema conceptual de una persona coexistan, inconsciente o conscientemente, ideas contradictorias y conflictivas; y tal conflicto será patente cuando y sólo cuando esas ideas sean evocadas simultáneamente. De aquí la importancia de que el profesor sea consciente de los posibles esquemas conceptuales de sus estudiantes para sacar a la luz aquellos esquemas conceptuales incorrectos y poder superarlos a través de la discusión racional.
Los estudios de Vinner (1991), Azcarate (1993, 1998), Dreyfus y Vinner (1989), por ejemplo, muestran que existe una variedad de relaciones entre la definición del concepto formal y el esquema conceptual. Y como ya se ha puntualizado, el estudiante ante una situación-problema toma decisiones sobre la base de su esquema conceptual y no necesariamente utiliza la definición del concepto.

La idea de Vinner (1991, pp.60-73) acerca de la existencia de dos células en la estructura cognitiva, para explicar la variedad de relaciones entre la definición del concepto y el esquema conceptual, nos parece adecuada si se reemplaza el contenido de la célula de la definición del concepto por el esquema conceptual formal (que contiene a la definición del concepto personal y los conceptos y propiedades que han sido construidos formalmente de la definición formal. A la vez, ella está contenida, frecuentemente con grandes conflictos, en el esquema conceptual total o informal). Y así un objetivo de los procesos de enseñanza y aprendizaje sería activar y fortalecer ésa célula en el pensamiento de los estudiantes, para que ellos sean capaces de enfrentase con las mejores herramientas a una situación problema. Creemos que esto debería ser así porque obviamente en todo sistema didáctico existen unos saberes ya previamente dados y que el objeto de los procesos de enseñanza y aprendizaje es la apropiación y construcción de significados para esos saberes por parte de un sujeto. El significado de un concepto puede entenderse por lo qué podemos hacer, decir, pensar o producir con él.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que en el proceso enseñanza-aprendizaje, introducir primero la definición formal del concepto comunica un esquema conceptual muy pobre o débil y, a la vez, esquemas conceptuales pobres o débiles provocan definiciones personales incorrectas o limitadas que entran en conflicto tanto con la estructura cognitiva del estudiante como con la definición formal del concepto.

Por lo tanto, creemos que esta perspectiva implica que el punto de partida y el énfasis de la enseñanza debe ser la construcción por parte del alumno de esquemas conceptuales ricos y flexibles a partir del enfrentamiento con una situación-problema. Y dado que evidentemente las definiciones y la teoría formal desempeñan un papel muy importante en la realización de tareas cognitivas, es necesario educar progresivamente los hábitos de los alumnos de forma que las definiciones y teoremas formen parte de su experiencia, y en consecuencia, de sus esquemas conceptuales. Azcárate (1995) dice: "...*no sirve* *de nada introducir un concepto matemático nuevo mediante una definición si el alumno o alumna no ha construido, previamente y mediante su experiencia, algunos elementos, más o menos conexos, de un esquema conceptual*". En efecto, este es considerado uno de los problemas fundamentales dentro del pensamiento matemático avanzado: la transición del pensamiento matemático elemental al avanzado.

En este sentido, Tall (2000a) explica el desarrollo cognitivo del sujeto por medio de un modelo que distingue entre matemáticas técnicas (o informales) y formales:

- *Las matemáticas técnicas* son aquellas en las que los nuevos objetos o conceptos matemáticos se construyen básicamente a partir de la experiencia del sujeto con las diferentes representaciones semióticas del objeto y el desarrollo de las habilidades proceptuales implicadas (ver sección 1.3). Siguiendo a Tall, lo que caracteriza este tipo de matemáticas es el *proceso de expansión de la estructura cognitiva* del sujeto cuando incorpora y asimila nuevos objetos.
- *Las matemáticas formales* son aquellas en la que los objetos o conceptos, nuevos o ya conocidos, se construyen por vía deductiva a partir de definiciones, axiomas y demostraciones. Lo que caracteriza este tipo de matemáticas es el proceso de reconstrucción de la estructura cognitiva del sujeto para concebir las ideas o los objetos desde una perspectiva totalmente nueva (la axiomático-deductiva) que puede chocar con la experiencia previa del sujeto.

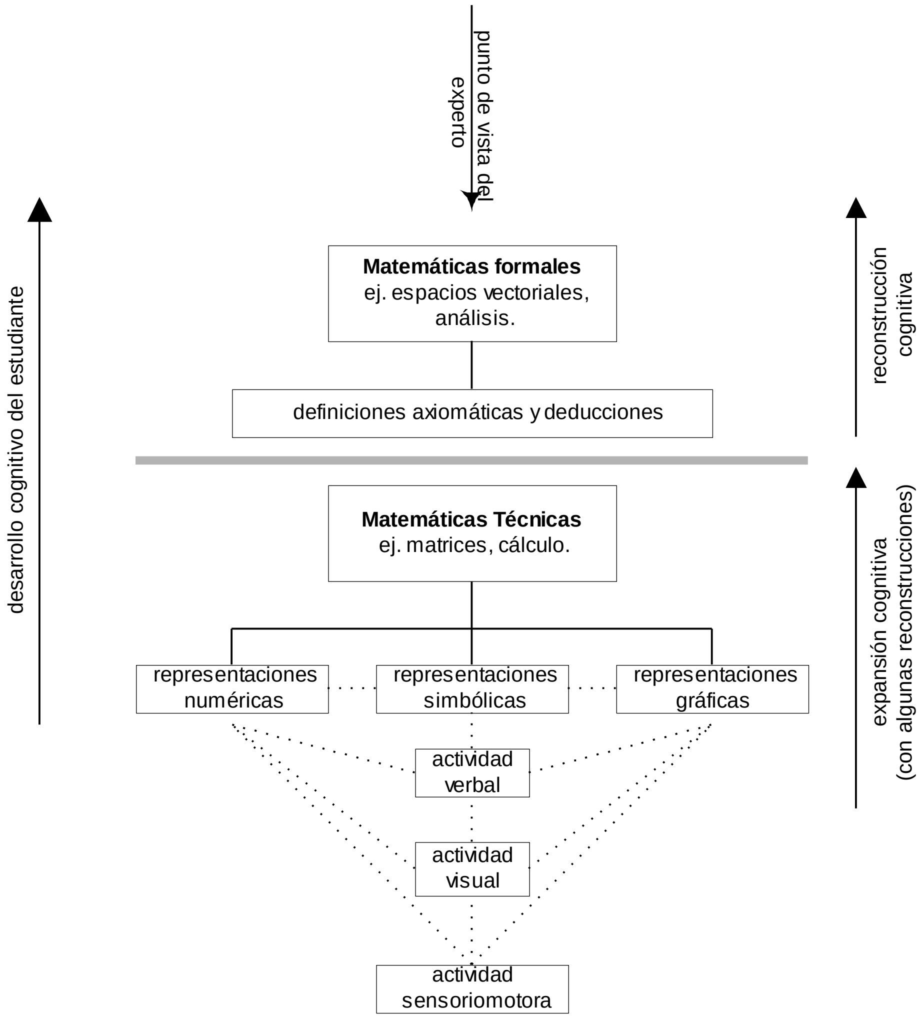


Fig. 1. Un modelo del desarrollo cognitivo del estudiante (tomado de Tall, 2000, p.224)

La evidencia empírica indica que existe una separación muy grande entre estos dos tipos de actividad matemática y que son muy pocos los estudiantes los que logran realizar, no sin dificultad, la transición de las matemáticas técnicas a las formales (ver fig. 1). Una de las dificultades que suele señalarse es la renuencia de los estudiantes a aceptar definiciones (axiomáticas) que no se corresponden con su experiencia, pues para ellos una definición tiene sólo un papel descriptivo, para describir las propiedades observadas (ver, por ejemplo, el caso de los estudiantes que no aceptaban el axioma de completitud para los números reales en Tall, 2000a, p.220).

Para Lakatos (1981), por ejemplo, el divorcio que existe entre las matemáticas formales e informales, lo resuelve la Heurística Matemática, que según él, es la metodología que tiende los puentes adecuados para hacer plausible la unidad intrínseca entre los contextos de génesis y de justificación del conocimiento matemático: los conceptos matemáticos crecen y las pruebas se mejoran en una dialéctica de pruebas y refutaciones, argumentos y contraargumentos, ejemplos, no ejemplos y contraejemplos; las matemáticas son el resultado de procesos de experimentación, observación y negociación. Y en cierto sentido, esto es lo que se pretende cuando se habla de enriquecer y hacer evolucionar los esquemas conceptuales de los estudiantes.

Ahora bien, muchos estudiantes de carreras no matemáticas no requieren (o no debería exigírseles) alcanzar el nivel de las matemáticas formales. De cara a las aplicaciones y a sus necesidades académicas y profesionales las matemáticas técnicas son suficientes. Así, para estos estudiantes es más significativo poseer esquemas conceptuales flexibles y robustos, construidos a partir de su actividad sensorial, motora, visual y verbal, pasando por las actividades semióticas de representación y las proceptuales (ver secciones 1.3 y 1.7), que los capacitan para enfrentarse y resolver con eficacia muchas tareas en su campo de estudio.

Por otro lado, Pinto (1998) reporta que en el proceso de construcción de la teoría formal, los estudiantes de matemáticas pueden dividirse en dos grupos: 1) los que siguen una vía axiomática-deductiva, y 2) los que reconstruyen sus esquemas conceptuales para producir imágenes que sirvan de soporte para las definiciones y deducciones.

Así, un modelo más apropiado que toma en cuenta la necesidad de atender el desarrollo cognitivo de esa diversidad de estudiantes se ilustra en la figura 2. En particular, se deduce que es necesario ser consciente de que no existe una metodología de enseñanza única. Pues, algunos estudiantes podrían bloquearse con una instrucción formal y otros, tal vez, lo harían al hacer referencias a imágenes y argumentos informales.

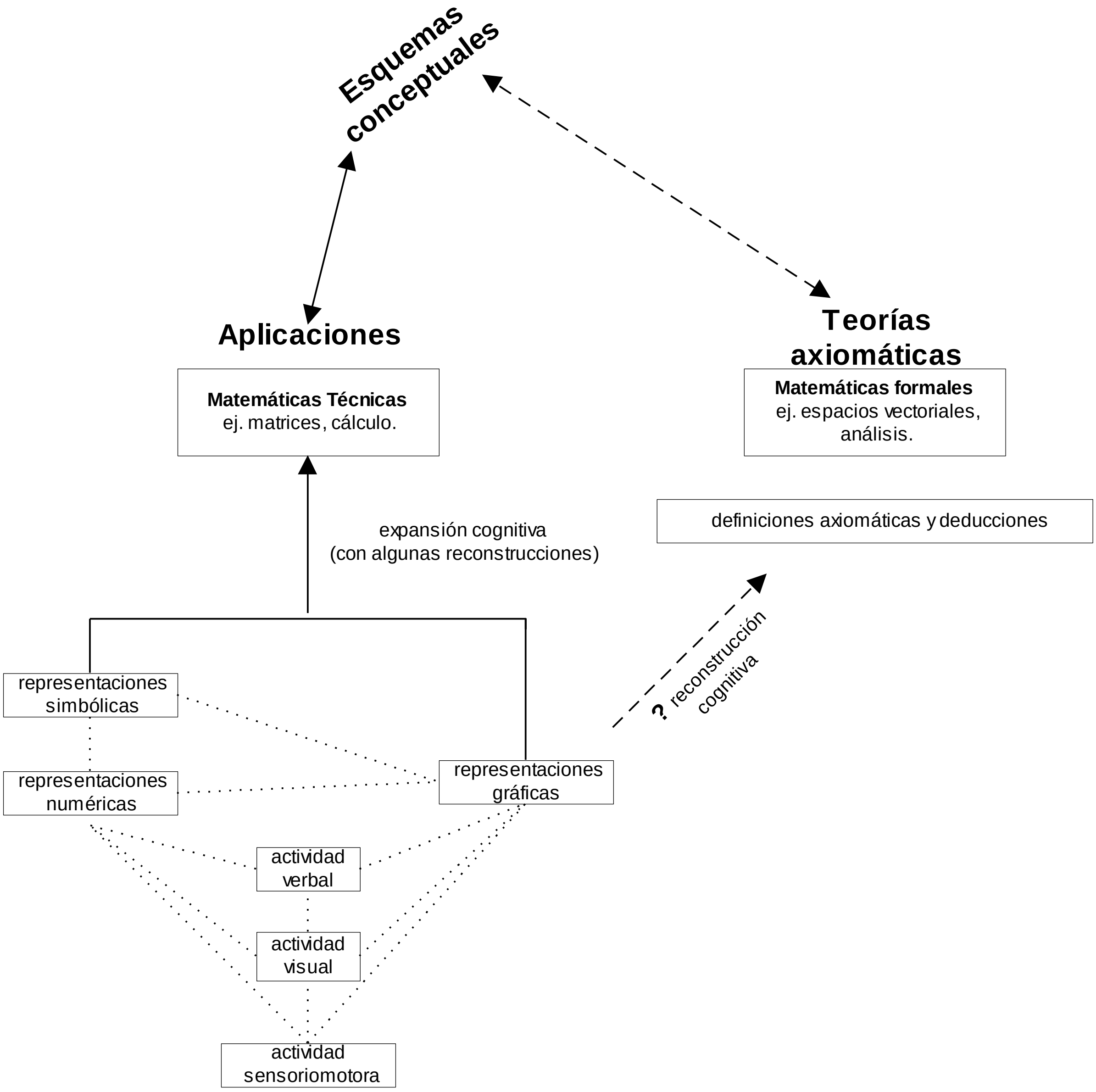


Fig. 2. Un modelo del desarrollo cognitivo del estudiante que plantea la posibilidad de desarrollar esquemas conceptuales consistententes, flexibles y robustos a partir de la interacción de la expansión y la reconstrucción cognitiva (tomado de Tall, 2000a, p.225).

De este modelo, también se desprende que para atender la diversidad de estudiantes y las características diferentes de su desarrollo cognitivo es necesario promover la interacción entre la expansión y reestructuración cognitiva; en particular, la interacción entre las diferentes representaciones de los objetos y las tareas de justificación y argumentación.

A manera de síntesis, a continuación se señalan las características principales de un esquema conceptual que se encuentran en la literatura:

- Incluye todos los atributos mentales asociados con el concepto, sean estos conscientes o no.
- Incluye todas las imágenes mentales asociadas con el concepto: simbólica, icónica, numérica, verbal, gráfica, etc.
- Puede contener las semillas de un futuro conflicto.
- En su desarrollo, no tiene que ser necesariamente un todo coherente en cada momento.
- Incluye las propiedades que caracterizan al concepto y los procedimientos asociados, sean estos correctos o no.
- Incluye las experiencias asociadas al concepto:
    - ejemplos y contra-ejemplos del concepto.
    - situaciones matemáticas previas en las que se ha estudiado o aplicado el concepto.
    - situaciones extra-matemáticas

- Incluye las impresiones y los sentimientos que evoca el nombre del concepto.
- Creencias arraigadas en la estructura cognitiva.
- Incluye los ejemplos prototípicos o prototipos o genéricos asociados al concepto, es decir, ciertas regularidades comunes a la mayoría de los esquemas conceptuales de los sujetos.
- El esquema conceptual no se construye necesariamente a partir de las definiciones, sino que a partir de la experiencia de la persona.

En este trabajo el modelo de la figura anterior será uno de los referentes cognitivos centrales, junto con los modelos basados en la dualidad proceso-objeto.

Es la observación de que en la actividad matemática hay ciclos recurrentes en los cuales un *proceso,* tal como contar, se vuelve un *concepto*, tal como número, la que nos conduce a considerar los modelos cognitivos basados en la dualidad proceso-objeto. Creemos que estos otros modelos ayudan a describir y caracterizar los esquemas conceptuales.

1.3 Dualidad proceso-concepto. Noción de procepto

La noción de **procepto**[8] fue introducida por Gray y Tall (1991, 1994), en el contexto de la aritmética elemental, para denotar el uso dual del símbolo como **pro**ceso (la adición) y con**cepto** (la suma). Posteriormente, este constructo cognitivo también ha sido utilizado sistemáticamente por Tall y sus colaboradores en sus investigaciones didácticas en álgebra y calculo, y ha mostrado ser particularmente útil. Nociones como la de expresión algebraica, función, derivada, integral, límite son todos ejemplos de proceptos. La habilidad para utilizar los símbolos para intercambiar entre los procesos y conceptos contenidos en ellos, afirma Tall, es una de las construcciones más poderosas y naturales de la mente humana de la cual se sirve el pensamiento matemático (Tall, 2000).

Así, pues, se llama *procepto*[9] al constructo cognitivo que resulta de la combinación de un *proceso* y un *concepto* (producto de ese proceso) que pueden ser evocados por un mismo símbolo (Gray y Tall, 1993, 1994, Tall, 2000). El termino proceso se refiere a la representación cognitiva de una operación matemática (fig. 3).

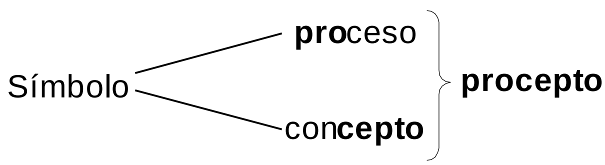


Fig. 3. En un procepto el símbolo actúa como pivote entre proceso y concepto (tomado de Tall, 2000, p. 5)

De acuerdo con Tall (2000) la noción de procepto está en la raíz del pensamiento matemático exitoso y su poder radica en tres características que aparecen cuando se hace uso de los símbolos: la dualidad (como proceso y

8 Gray y Tall observaron que 3+2 podía ser visto como adición o suma, y que no existía en las diferentes teorías de la encapsulación proceso-objeto (por ej. Dubinsky o Sfard) un término para describir esta dualidad en el uso del símbolo (Tall, 2000).

9 De acuerdo con Tall la noción de procepto es tan fundamental para la psicología cognitiva como las nociones de conjunto y función lo son para las matemáticas.

objeto), la ambigüedad (como proceso u objeto) y la flexibilidad (para moverse fácilmente de uno al otro).

También la noción de procepto es un ejemplo de lo que Tall de manera más general llama Unidad Cognitiva: una parte de la estructura cognitiva en la que puede mantenerse todo el centro de atención en un momento dado. Ésta puede ser un símbolo, un hecho especifico como "3+4 es 7", un hecho general tal como "la suma de dos números pares es par", una relación, un paso en un argumento, un teorema tal como " una función continua en un intervalo cerrado toma su máximo y su mínimo en ese intervalo", etc. Lo que para una persona es una unidad cognitiva puede no serlo para otra.

Algunos ejemplos de cómo la misma notación se emplea, de manera ambigua y flexible, para denotar tanto un proceso como el producto de ese proceso son los siguientes:

Símbolo	Proceso	Concepto
4	Contar	Numero
3+2	Adición	Suma
-3	Restar 3 o avanzar 3 pasos a la izquierda.	El numero negativo 3
3/4	Reparto/división	Fracción
$3+2x$	Evaluación	Expresión algebraica
$v=\frac{s}{t}$	Razón	Velocidad
$y=f(x)$	Asignación	Función
$\frac{dy}{dx}$	Diferenciación	Derivada
$\int f(x)dx$	Integración	Integral
$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$	Tender al limite o convergencia	Limite
$\sigma\in S_n$	Permutar $\{1,2,...,n\}$	Elemento de S_n

Algunos Símbolos como proceso y concepto, tomado de (Tall, 2000, p. 4)

Evidentemente, la noción matemática de interés en este trabajo, la noción de ecuacion diferencial de primer orden es un ejemplo de procepto. Pues, el símbolo $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ podría hacer referencia a ciertos conceptos (una expresión algebraica, a la pendiente de la curva solución o a una razón de cambio de y respecto a x) y a determinados procesos (busqueda de la solución y por métodos algebraicos, gráficos o numéricos) en la estructura cognitiva de un sujeto.

Para que el concepto de procepto, refleje la realidad cognitiva del sujeto se define:

- *Procepto elemental* como la amalgama de tres componentes: un proceso que produce un objeto matemático y un símbolo que representa ya sea el proceso o el objeto.

Ahora bien, además de ver un símbolo en una forma flexible, un mismo objeto puede ser representado simbólicamente en diferentes formas que se corresponde no solo a diferentes procesos sino también a nombres diferentes del mismo objeto. Y por tanto,

- *Procepto* como una colección de proceptos elementales que tienen el mismo objeto.

Por ejemplo, el procepto 6 incluye el proceso de contar 6 y una colección de representaciones tales como 3+3, 4+2, 2+4, 2*3, 8-2, etc. Todos estos símbolos representan el mismo objeto e indican la forma flexible en la cual el concepto de numero 6 puede ser descompuesto usando diferentes procesos.

Un procepto elemental es el primer estado en la dinámica del crecimiento de un procepto y depende del crecimiento cognitivo de la persona.

A partir de la observación del comportamiento de los estudiantes cuando resuelven una tarea matemática, Tall sugiere que el desarrollo cognitivo pasa por tres niveles de interpretación, crecientes en complejidad: 1) el nivel de procedimiento que supone el dominio de un procedimiento especifico que permite hacer un calculo o una manipulación especifica, 2) el nivel de proceso[10]que supone tener dos o más alternativas que permite una mayor flexibilidad y eficiencia para escoger la ruta más adecuada, y 3) el nivel de procepto que supone concebir los símbolos como entidades por derecho propio que pueden ser manipuladas y servir de pivotes entre procesos y conceptos.

También, Hiebert y Lefevre (1986) se refieren al conocimiento conceptual y procedimental y a las relaciones potenciales entre ambas, que podrían servir para interpretar el proceso de aprendizaje y comprender las producciones de los estudiantes. Y agregan que no todo conocimiento puede describirse ya sea

[10] El término procedimiento se refiere a una sucesión finita de acciones y decisionoes realizados uno a uno, donde cada paso depende del anterior. El termino proceso es usado cuando el procedimiento se concibe como un todo y el centro de atención se pone en los inputs y outputs más que en el procedimiento particular usado para realizar el proceso. Este puede incluir varios procedimientos y proporciona la posibilidad de elegir el camino más eficiente (Tall, 2000, p. 214).

como conceptual o procedimental. Existen conocimientos que pueden concebirse como una combinación de ambos o no estar relacionados en lo absoluto a ellos. (Hiebert y Lefevre, 1986) dicen: "*El conocimiento conceptual está caracterizado como un conocimiento que es rico en relaciones, y puede ser concebido como una red de conexiones entre conocimientos…Una unidad de conocimiento conceptual no puede ser una pieza aislada de información; por definición, ella es parte un conocimiento conceptual sólo si el sujeto reconoce sus relaciones con otras piezas de infomación"* (pp. 3-4). Asimismo, "*El conocimiento procedimental esta formado por dos partes distintas. Una parte contiene el lenguaje formal o el sistema de representación simbólico de las matemáticas. La otra contiene algoritmos, reglas o procedimientos usados para resolver una tarea matemática, que son instrucciones paso a paso que prescriben como realizar una tarea"* (p. 6).

Ahora bien, puede afirmarse que el pensamiento proceptual en tanto combinación del pensamiento conceptual y procedimental está en un nivel superior del pensamiento que se caracteriza por la habilidad de encapsular información en forma simbólica y, a la vez, usar estos símbolos como objetos que pueden ser descompuestos en formas flexibles que permiten tanto manipulaciones mentales como reflexiones poderosas que conllevan a construir nuevas teorías.

Así, el desarrollo cognitivo consiste en el uso de los símbolos cada vez más sofisticado con diferentes grados de flexibilidad y habilidad para pensar matemáticamente (ver fig. 4).

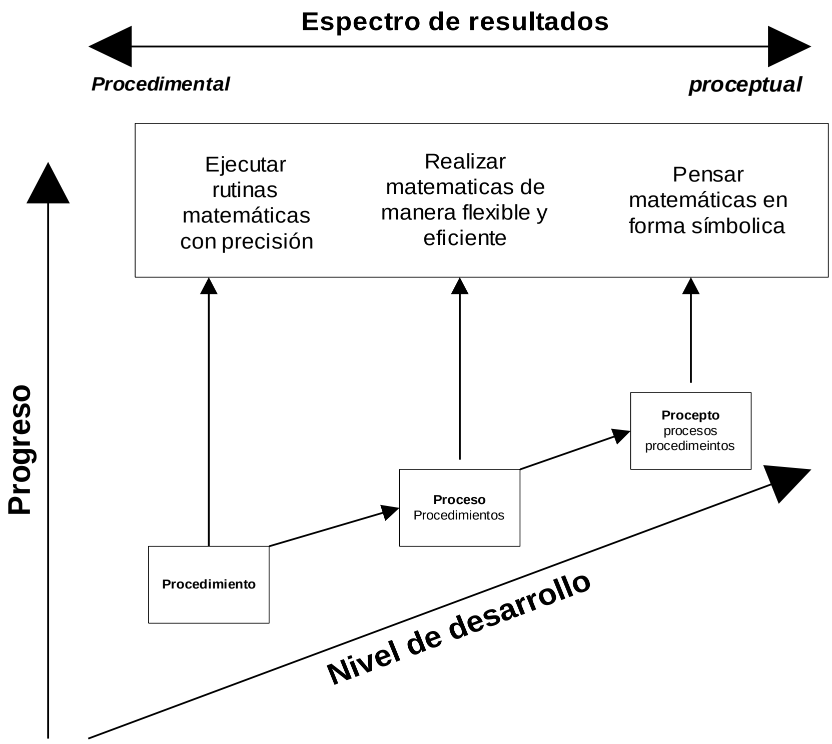


Fig. 4. Espectro de resultados al llevar a cabo los procesos matemáticos, (tomada de Tall, 2000, p. 8)

Otro aspecto que Tall considera, son ciertas discontinuidades[11] que aparecen en el desarrollo cognitivo del sujeto, que muy bien pueden ser la causa de las muchas dificultades que se observan en los estudiantes. Estas discontinuidades pueden explicarse por la forma en que los diferentes proceptos funcionan, así como por las habilidades cognitivas que demandan (ver fig. 5).

Así, atendiendo las diferentes formas de funcionamiento de los proceptos en la aritmética, el álgebra y el cálculo, los proceptos se pueden clasificar en (Tall,2000):

- Proceptos aritméticos, como $5+4$, 3×4, $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$, $1.54\div 2.3$, que contienen un algoritmo para obtener un resultado (el objeto producto). Este objeto producto puede o no ser considerado como un objeto de la misma clase de

[11] Ejemplos de estas discontinuidades son: la transición de la aritmética al álgebra, la transición del álgebra al cálculo, la transición del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado (ver Tall, 2000).

los objetos operados. Tanto los procesos como los conceptos son computacionales y manipulativos.

- Proceptos algebraicos, tales como $2+3x$ y ax^2+bx+c , incluyen un proceso de evaluación potencial y pueden ser concebidos como conceptos manipulables o objetos por derecho propio (como respuestas a ciertos problemas). Por ejemplo, $a(b+3)$ puede ser desarrollado para obtener $ab+3b$, y a la vez, éste ultimo puede ser factorizado.
- Proceptos limite, tales como $\lim_{x\to a} f(x)\ y \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, que tienen un proceso potencialmente infinito de acercarse al limite, es decir, no puede ser calculado en un numero finito de pasos. Algunos conceptos pueden manipularse (usando reglas o teoremas de limites). Por ejemplo, $\sum a_n+\sum b_n=\sum(a_n+b_n)$. Excepto en casos especiales (como la serie geométrica), usualmente los proceptos limite no tienen procedimientos finitos de cálculo, aunque pueden tener algoritmos que dan aproximaciones al limite.
- Proceptos cálculo, como $\frac{d}{dx}(\cos x sen x)$ o $\int_0^{\pi} sen mx \cos nx\, dx$, que pueden contener algoritmos de cálculo finito (reglas de derivación o integración).
- Proceptos formales son aquellos que incluyen procesos lógicos, y los objetos o conceptos se construyen por vía deductiva.

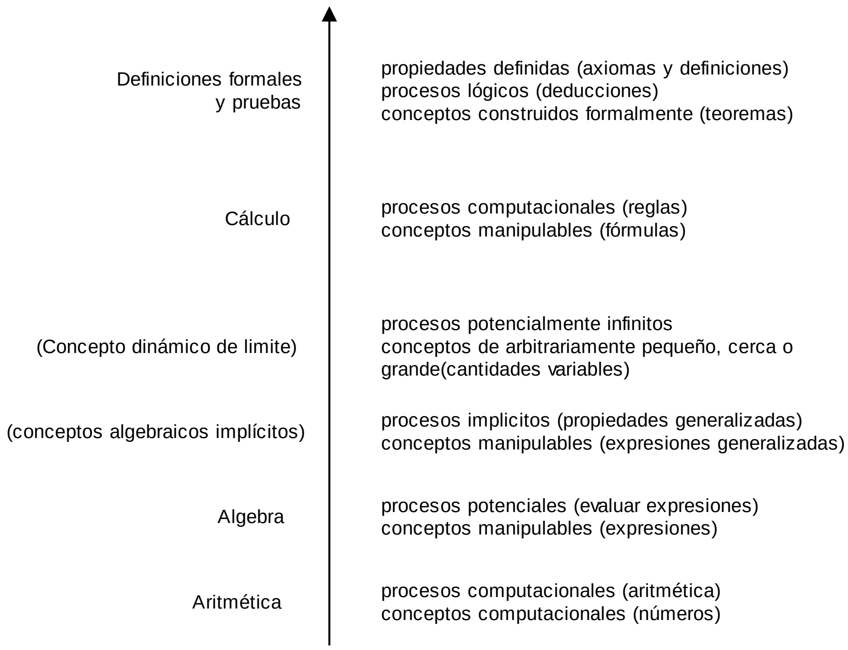


Fig. 5. Cambio en el significado de los simbólos en aritmética, algebra, cálculo y prueba formal (tomado de Talll, 200, p.9)

Otras nociones, que según nuestro juicio, están muy relacionadas a la noción de Procepto formulada por Tall y que además nos ayudan a comprender las posibles relaciones entre el conocimiento procedimental y conceptual, son las nociones de Sfard y Dubinsky que esbozamos a continuación. En particular, la perspectiva teórica y metodológica que se propone en la Teoría APOS nos arroja alguna luz sobre otros posibles escenarios para continuar con esta investigación: por ejemplo, elaborar una descomposición genética para la noción de solución de una ED de primer orden (ver sección 1.5).

1.4 Dualidad Proceso-Objeto. Concepción Operacional y Concepción Estructural

Anna Sfard (1991, 1994), a partir del análisis de datos históricos y psicológicos de la formación de los conceptos matemáticos, elabora un modelo del aprendizaje que toma en cuenta ese carácter dual proceso-objeto inherente a muchas nociones matemáticas. Esa dualidad es lo mismo que Tall ha denominado con el término procepto.

En primer lugar establece una distinción entre *concepto matemático*, que designa las ideas matemáticas en su forma oficial como constructos teóricos que forman parte de lo que llama "universo formal del conocimiento ideal", y *concepción matemática,* que designa todo el conjunto de representaciones y asociaciones internas del individuo y que son evocados por el concepto; se puede decir que una concepción es el correspondiente del concepto en el "universo interno y subjetivo del conocimiento humano".

Luego observa que muchas nociones o conceptos matemáticos no sólo hacen referencia a objetos abstractos, sino que también a procesos, algoritmos y acciones. Considerar una entidad como un objeto implica que podemos referirnos a él como una cosa real, única y estática, capaz de ser vista y manipulada como un todo. Por el contrario, interpretar una noción como proceso implica considerarla como una entidad potencial que sólo puede llegar a existir después de realizar una secuencia de acciones. Así, pues, para describir el proceso de aprendizaje y formación de los conceptos o nociones matemáticas establece dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático: *las concepciones operacionales* (operational conception) y *las concepciones estructurales* (structural conception).

Las concepciones operacionales tratan las nociones matemáticas como procesos, algoritmos y acciones, es decir, son dinámicas, secuenciales y detalladas.

Las concepciones estructurales consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos, es decir, son estáticas, instantáneas y globales (Sfard, 1991, p. 4).

Por ejemplo, una función puede ser definida como un conjunto de parejas ordenadas (concepción estructural) y también como un proceso de computo o como un método de ir de un sistema a otro (concepción operacional). Una simetría puede concebirse tanto como una como propiedad estática o como una clase de transformación de una figura. Un círculo puede verse como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo o como la curva obtenida al girar un compás alrededor de un punto fijo (idem, p.5).

Sfard considera que estos dos tipos de concepciones aunque parezcan incompatibles no son excluyentes (¿cómo puede una cosa ser un proceso y un objeto al mismo tiempo?), sino que son en realidad complementarias; ellas forman una unidad, es decir, son factores inseparables de una misma cosa, ambas necesarias para describir y comprender los conceptos matemáticos. Además considera que existen suficientes razones de tipo histórico y psicológico para sugerir que en el proceso de formación de conceptos las concepciones operacionales preceden a las estructurales (ver Sfard, 1991, pp. 10-21; 1994, pp.53-54). Por ejemplo, en el plano cognitivo las concepciones operacionales, son para muchos sujetos, el primer paso en la adquisición de nuevas nociones y, por lo tanto, éstas preceden a las estructurales en oposición a la práctica común de la enseñanza de introducir conceptos nuevos a través definiciones estructurales, sin hacer referencia explícita a los procesos subyacentes. En el plano histórico, se observa que durante mucho tiempo el concepto de función y el concepto de número fueron concebidos operacionalmente antes de que se formularán sus definiciones y sus representaciones estructurales.

Sin embargo, ella misma hace notar que esa jerarquía podría resultar inadecuada, por ejemplo, para la geometría, donde las representaciones gráficas, estáticas y globales preceden las descripciones procedimentales y verbales. También las nuevas tecnologías permiten estudiar los objetos o conceptos matemáticos antes o al mismo tiempo, que los procesos matemáticos correspondientes.

Respecto a las posibles relaciones entre estas concepciones y las distintas representaciones externas, Sfard dice que algunas representaciones parecen ser más susceptibles de ser interpretadas estructuralmente que otras. Por ejemplo, si consideramos las tres formas de representar la función $y = 3x^4$: gráfica, algebraica y como programa (codificada en un lenguaje de programación), entonces parece ser que el programa se corresponde con una concepción estructural, la gráfica motiva una aproximación estructural y la representación algebraica puede ser interpretada en las dos formas. También observa que las representaciones internas verbales están más próximas a una concepción operacional y que las visuales lo están a la estructural (Sfard, 1991, p.6-7).

El desarrollo del conocimiento puede así ser visto como una cadena compleja compuesta de transiciones cada vez más abstractas entre las concepciones estructurales y las operacionales, donde cada vez que nuevos objetos emergen nuevas operaciones son realizadas sobre ellos, y así sucesivamente.

Finalmente, debido a que la transición de las concepciones operacionales a las estructurales es un proceso largo e intrínsecamente difícil, se distingue en el proceso de formación de conceptos o de su aprendizaje tres etapas, organizadas jerárquicamente, que corresponden a tres grados de estructuralización: interiorización, condensación y cosificación[12].

Interiorización: el estudiante entra en contacto con los procesos que eventualmente darán lugar a un nuevo concepto. Dichos procesos son operaciones que se realizan sobre objetos matemáticos de nivel inferior. Gradualmente, el estudiante se familiariza y adquiere las habilidades propias de dichos procesos.

Condensación: es un período en el cuál se concentran las largas secuencias de operaciones en unas unidades más manejables. La persona se siente cada vez más capaz de pensar en un proceso dado como un todo sin necesidad de entrar en los detalles. En este momento se puede dar un nombre al concepto que nace, se hace cada vez más factible la combinación de procesos, hacer

[12] Esta es la traduccion que hace Azcarate (1995) del término ingles *reification.*

comparaciones y generalizaciones, y aumenta la facilidad para alternar diversas representaciones del concepto. Este período de condensación dura mientras la nueva entidad permanece estrechamente unida a un cierto proceso.

Cosificación: cuando la persona es capaz de concebir la nueva noción como un objeto matemático en sí mismo decimos que el concepto ha sido cosificado. La cosificación se define como un cambio ontológico, una habilidad repentina para ver algo desde una nueva perspectiva.

Las etapas de interiorización y de condensación son graduales y cuantitativas, mientras la cosificación es un salto instantáneo: un proceso que se solidifica en un objeto, en una estructura estática. El estadio de cosificación ocurre simultáneamente con la interiorización de unos procesos de un nivel superior, generándose así un modelo recursivo para la formación de conceptos. Este modelo plantea un circulo virtuoso: por un lado para que ocurra la cosificación de un proceso se requiere que exista una interiorización en el nivel superior, y recíprocamente, la existencia de un objeto sobre el cual operan procesos de nivel superior parece indispensable para la interiorización; es decir, la cosificación de un nivel inferior y la interiorización en un nivel superior se requieren entre sí. Esto dicho de otra manera significa que en el transcurso del desarrollo cognitivo del sujeto el pensamiento operacional (o procedimental) y el estructural (o conceptual) se requieren mutuamente. El fenómeno de la cosificación requiere una especial atención, pues parece ser el más difícil y en ciertos niveles puede que esté prácticamente fuera del alcance de algunos estudiantes.

Este modelo implica que algunas nociones matemáticas, como el concepto de función, se consideran completamente desarrolladas sólo si ellas pueden ser concebidas tanto operacional como estructuralmente.

Sfard señala que en el proceso de aprendizaje y de resolución de problemas las concepciones operacionales son necesarias, pero pueden no ser suficientes. Esquemas cognitivos conteniendo solo concepciones operacionales puede provocar algún estrés cognitivo y entorpecer la comprensión y el desarrollo del conocimiento matemático. Por lo tanto, con el objeto de reorganizar, guiar la actividad mental y permitir la asimilación de nuevos conocimientos, las concepciones estructurales se vuelven imprescindibles (idem, p. 26-29). Henrici (citado en Sfard, 1991, p.28) dice: "*la aproximación estructural invita a la contemplación y la operacional a la acción; la aproximación estructural genera comprensión y la operacional genera resultados*". Sfard escribe: "*It seems that without the abstract objects all our mental activity would be more difficult. Since we are not super-computers, we just could no get along with very complex process without breaking them into small pieces and without squeezing each part into a more manageable whole. In other words, the distance between advanced computational processes and the concrete material entities wich are the objects of the most elementary processes (such as counting) is much too large to be grasped by us in its totality. We overcome this difficulty by creating intervening abstract objects wich serve us as a kind of way-stations in our intellectual journeys (p.28-29*)".

Desde esta perspectiva, la actividad matemática puede ser vista como una interacción intrincada entre el modo de pensamiento operacional y estructural: cuando se ataca un problema se vuelve necesario cambiar repetidas veces entre un modo y el otro para usar el conocimiento de la manera más eficaz posible.

1.5 La Teoría APOS

La perspectiva de la teoría APOS surge de la interpretación del constructivismo piagetiano con el objeto de describir y explicar el desarrollo de pensamiento matemático avanzado en el nivel universitario (Dubinsky, 1991). Y ella como metodología de investigación en el campo de la didáctica se basa en un ciclo recursivo de tres componentes dinámicas: 1) un análisis teórico que proporciona un modelo epistemológico del concepto en cuestión, es decir, qué significa entender ese concepto y qué constructos mentales deberían construirse en la mente del sujeto para comprender un concepto matemático, 2) diseño e implementación de una secuencia instruccional que permite recopilar datos, y 3) la observación, evaluación y revisión del análisis teórico inicial y de la secuencia instruccional para realizar otra iteración del ciclo (ver Asiala et al., 1997, p. 4).

En este sentido, siguiendo a Dubisnky (1991) y Asiala et al. (1997), se revisan las principales ideas piagetianas que pueden ser aplicadas para concebir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario.

En primer lugar, Dubinsky dice que el concepto de abstracción reflexiva -proceso cognitivo por medio del cual una acción o un objeto, físico o mental, se reconstruye y organiza en un plano superior del pensamiento- puede ser una herramienta potente en el estudio del pensamiento matemático avanzado (PMA). Y agrega que el estudio de la abstracción reflexiva, en tanto que intenta explicar qué se necesita qué suceda en la estructura cognitiva, es complementario a la investigación de nociones tales como los obstáculos epistemológicos o la del conflicto entre esquema conceptual y definición del concepto, que explican por qué las cosas no suceden (Dubinsky, 1991, p.103).

En Dubinsky (1991, p. 97), encontramos las tres grandes clases de abstracción definidas por Piaget: la empírica, la pseudo-empírica y la reflexiva.

La abstracción empírica deriva conocimiento de las propiedades de los objetos. El sujeto, a través de su acción sobre los objetos del mundo, extrae propiedades comunes a los objetos y hace generalizaciones extensionales, esto es, el tránsito de lo específico a lo general. Pero, el conocimiento de estas propiedades por parte del sujeto es el resultado de construcciones internas.

La abstracción pseudo-empírica deriva propiedades de las acciones que el sujeto introduce en los objetos.

La abstracción reflexiva se refiere al proceso cognitivo, completamente interno, de construcción de nuevas estructuras a partir de las ya existentes por medio de la observación y la abstracción.

Estas tres clases de abstracción no son independientes entre sí. Las acciones que conllevan a la abstracción pseudo-empírica o a la reflexiva son realizadas sobre objetos cuyas propiedades, el sujeto sólo llega a conocer a través de la abstracción empírica. Por otro lado, la abstracción empírica se posibilita gracias a esquemas de asimilación[13] que fueron construidos por la abstracción reflexiva. Esta interdependencia puede resumirse de la siguiente manera: la abstracción empírica y pseudo-empírica deriva conocimiento de los objetos realizando (o imaginando) acciones sobre estos. La abstracción reflexiva interioriza y coordina estas acciones para formar nuevas acciones, y por último nuevos objetos (que pueden no ser físicos, sino matemáticos como una función o un grupo). La abstracción empírica extrae datos de estos nuevos objetos a través de operaciones mentales sobre estos objetos y, así progresivamente, se

[13] Para Piaget el proceso de desarrollo cognitivo se basa en dos mecanismos o procesos: la organización y la adaptación. El proceso de adaptación es considerado como el equilibrio entre los procesos de asimilación y de acomodación. La asimilación permite al sujeto incorporar los objetos a su estructura cognoscitiva, a sus esquemas previos en un proceso activo mediante el cual el sujeto transforma la realidad a la cual se adapta. La acomodación es el proceso inverso por el cual el sujeto transforma su estructura cognoscitiva, sus esquemas, para poder incorporar los objetos de la realidad.(Tall,1991, p.9)

van construyendo las entidades matemáticas en la mente del sujeto, hasta llegar a ser plasmadas en teorías axiomáticas.
Para Dubinsky, en este proceso de tematización reflexiva, el ordenador se muestra como un sustituto ideal para la manipulación de los objetos físicos o mentales, pues éste es una herramienta poderosa y útil para presentar y manipular sus representaciones semióticas.

El concepto de abstracción reflexiva lo introdujo Piaget como la pieza clave para describir la construcción cognitiva de conceptos lógico-matemáticos. También, considero que la abstracción reflexiva en su forma más avanzada es la que conlleva a la clase de pensamiento matemático por medio del cual los procesos son separados de su contenido y los procesos mismos son convertidos, en la mente del matemático/a, en objetos de contenido. Así la abstracción reflexiva se muestra como una descripción del mecanismo del desarrollo intelectual. Es más, en esta dinámica se puede apreciar un mecanismo más general que se encuentra tanto en la psicogénesis como en la historia del pensamiento matemático. La triada dialéctica que conduce de lo intra-objetal o análisis de los objetos, a lo inter-objetal, es decir, al estudio de las relaciones y transformaciones entre dichos objetos y, de allí, a lo trans-objetal o estudio de las estructuras construidas tomando como soporte dichas tranformaciones (Piaget y Garcia, 1982).

Así, Dubinsky (1991, p. 101-102), retoma los hallazgos de Piaget, y propone cinco tipos de abstracción reflexiva que considera son sumamente importantes para el PMA.: a) *la interiorización*, que consiste en trasladar una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizadas, b) *la coordinación* de dos o más procesos para construir otro nuevo, c) *la encapsulación*, esto es conversión de un proceso (dinámico) en un objeto (estático), d) *la generalización* y e) *la reversión*, cuando un proceso que existe internamente permite construir un nuevo proceso que consiste en revertir el proceso original.

De acuerdo a Dubinsky y sus colaboradores, el siguiente párrafo contiene las ideas esenciales de la teoría APOS acerca de lo que significa aprender y comprender algo en matemáticas y de cómo acceder a un conocimiento cuando se lo necesita: *"El conocimiento matemático de una persona es su tendencia*[14] *a responder ante una situación-problema*[15] *matemática por medio de: la reflexión sobre los problemas y sus soluciones en un contexto social*[16]*, la construcción o reconstrucción de las acciones, los procesos y los objetos matemáticos y la organización de estos en esquemas para usarlos al enfrentarse con las situaciones*"(Asiala y col, 1997, p. 5)

Reflexionar, dice Dubinsky, en el sentido de poner atención consciente a las operaciones que son realizadas, es una parte importante tanto del aprendizaje como de la comprensión. La comprensión en matemáticas va mucho más allá de la habilidad para realizar cálculos sofisticados: es necesario ser consciente de cómo los procedimientos funcionan, de mirar el resultado sin llegar a realizar todos los cálculos, de ser capaz de trabajar con variaciones de un algoritmo, de ver relaciones y de organizar las experiencias –tanto matemáticas como no-matemáticas.

Poseer un conocimiento consiste en una tendencia a hacer construcciones mentales que son usadas para tratar con una situación-problema. Las construcciones más frecuentes son recordar algo previamente establecido o repetir un método conocido. Pero el desarrollo del conocimiento matemático se da cuando se hacen una reconstrucción, bastante diferente, de un problema previamente tratado. Entonces la reconstrucción no es exactamente lo que ya existía, y puede contener algunos logros de un nivel más sofisticado. Así, la pregunta que surge es: ¿Cuál es la naturaleza de estas reconstrucciones? ¿De qué manera se construyen?.

[14] La tendencia de una persona tiene que ver con las relaciones que establece entre sus constructos mentales y con las interconexiones que usa para comprender un concepto, y la forma en que los usa (o fracasa al usarlos) en una situacion-problema.
[15] El término situación-problema hace referencia a la dicotomía desequilibración/reequilibración, es decir,
[16] El contexto social se refiere, al menos, al papel del aprendizaje cooperativo.

En la teoría APOS la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales ya construidos para formar *acciones*; las acciones son entonces interiorizadas para formar *procesos* los cuales, a su vez, son encapsulados para formar *objetos*. Los objetos pueden ser desencapsulados para volver a los procesos de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, los procesos y los objetos pueden ser organizados en *esquemas*.

Es importante observar que las construcciones mentales - de procesos y objetos y de sus interrelaciones - no ocurren necesariamente en una secuencia lógica simple, y por el contrario, ellas pueden aparecer simultáneamente y requerirse la una a la otra.

En Asiala y col. (1997) encontramos las siguientes definiciones de los términos acción, proceso, objeto y esquema:

Acción. Una acción es una transformación mental o física de objetos que la persona percibe como algo externo. Esto es, una persona cuya comprensión de una transformación se limita a una concepción de acción puede realizar la transformación sólo reaccionando a indicaciones externas precisas de los pasos a seguir. Aquí la acción tiende a controlar a la persona.

Por ejemplo, un estudiante que sea incapaz de interpretar una situación como una función, al menos que tenga una fórmula para calcular valores, está restringido a una concepción de acción de función. En tal caso, este estudiante es incapaz de hacer mucho con esta función salvo evaluarla en un punto especifico y manipular la formula. Las funciones definidas por tramos, la inversa de función, la composición de funciones, conjuntos de funciones, el hecho que la derivada de una función y las soluciones de una ecuación diferencial son funciones son fuente de grandes dificultades para estos estudiantes.

De acuerdo a la teoría APOS, la dificultad radica en que el estudiante no es capaz de ir más allá de una concepción de acción y que, por el contrario, todas estas nociones requieren las concepciones de proceso y/o objeto. Por tanto, es necesario que el estudiante desarrolle habilidades para interiorizar estas acciones en procesos, o encapsular procesos en objetos.

Proceso. Cuando una acción se repite, y la persona reflexiona sobre ella, entonces puede ser interiorizada en un proceso. Esto es, se hace una construcción interna que realiza la misma acción, pero ahora, no necesariamente responde a un estimulo externo. Una persona que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar, describir o revertir todos los pasos de la transformación sin realizarlos en realidad. En contraste a una acción, un proceso es percibido como algo interno, y bajo el control consciente de la persona.

En el caso de las funciones, una concepción de proceso le permite al sujeto pensar que una función puede recibir uno o más inputs, o valores de la variable independiente, realizar una o más operaciones sobre los inputs y devolver los resultados como outputs, o valores de la variable dependiente. Por ejemplo, para entender una función tal como sen(x), se necesita una concepción de proceso de función ya que no hay instrucciones explícitas para obtener un output para un input dado; con el objeto de implementar la función, se debe imaginar el proceso de asociar un número real con su seno.

Una vez que la persona ha construido un proceso, éste puede ser transformado en varias formas. Un proceso puede ser revertido o puede ser coordinado con otros procesos.

Con una concepción de proceso de función, se pueden relacionar dos o más funciones para construir una composición, o revertir el proceso para obtener funciones inversas.

Objeto. Cuando una persona reflexiona sobre las operaciones aplicadas a procesos particulares, se vuelve consciente del proceso como una totalidad, se da cuenta que transformaciones pueden actuar sobre él, y es capaz de construir realmente tales transformaciones, entonces tiene un concepto de este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto.

En el curso de convertir una acción o un proceso en un objeto, frecuentemente es necesario desencapsular el objeto para volver al proceso del cual viene con el objeto de usar sus propiedades y manipularlo.

En matemáticas es muy importante que una persona sea capaz de moverse entre una concepción de proceso y una concepción de objeto de una idea matemática.

Encapsulación de procesos en objetos y desencapsulación de los objetos para regresar al proceso se dan cuando se piensan, por ejemplo, en las operaciones con funciones o en conjuntos de funciones.

En general, la operación de encapsular procesos en objetos se considera que es sumamente difícil.

Esquema. Una vez construidos los objetos y los procesos, estos pueden ser interconectados de varias formas: por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados; procesos y objetos se pueden relacionar por el hecho de que el primero actúa sobre el segundo. Una colección de procesos y objetos puede ser organizados en una estructura para formar un esquema. Los mismos esquemas pueden ser tratados como objetos y formar un esquema de nivel superior. Cuando sucede eso, decimos que el esquema ha sido tematizado en un objeto. El esquema puede entonces ser incluido en esquemas de nivel superior de estructuras matemáticas. Por ejemplo, el esquema de espacio de funciones puede ser aplicado a conceptos como espacio dual, espacio de transformaciones lineales y álgebra de funciones.

Vemos entonces que hay al menos dos formas de construir objetos: a partir de procesos y de esquemas. Los objetos pueden ser transformados por acciones de nivel superior que conllevan a otros procesos, objetos y esquemas nuevos. Por tanto, tenemos un mecanismo que puede ser visto como una espiral ascendente de acciones, procesos y objetos dentro de esquemas que se amplían.

Los investigadores bajo la perspectiva de la teoría APOS utilizan un modelo, que describe las construcciones mentales que un estudiante debe realizar para comprender un concepto matemático, llamado descomposición genética.

Una descomposición genética de un concepto matemático es un conjunto estructurado de constructos mentales que posiblemente describan cómo el concepto puede desarrollarse o construirse en la mente de la persona. Por ejemplo en Asiala (1997b), encontramos dos descomposiciones genéticas para adquirir una comprensión gráfica de una función y su derivada; en Dubinsky (2000b, p. 233-235) encontramos otras para los conceptos de convergencia puntual y convergencia uniforme de funciones.

En principio, Dubinsky y col., sugieren que el esquema de una persona para un concepto incluye su versión del concepto que está descrito por la descomposición genética, como también otros conceptos que la persona percibe que tienen que estar conectados al concepto en el contexto de una situación-problema En otras palabras, la distinción entre esquema y otras construcciones mentales es como la distinción entre órgano y célula en biología. Ambos son objetos, pero el órgano (esquema) proporciona la organización necesaria para el funcionamiento de las células en beneficio del organismo. El esquema de una persona es la totalidad de conocimiento que para él o ella está conectado (consciente o inconscientemente) a un tema matemático particular. Una persona tendrá un esquema de función, un esquema de derivada, un esquema de grupo, etc. El esquema de una persona puede incluir acciones o respuestas tales como. "*Cada vez que veo este símbolo yo hago eso*". Evidentemente, esta noción de esquema coincide con la noción ya mencionada de esquema conceptual.

A pesar de que los esquemas son muy importantes para el fortalecimiento matemático de la persona, Dubinsky dice, que la investigación en este campo está lejos de conocer toda su especificidad y cómo éstos se relacionan o condicionan el rendimiento matemático. Todo lo que se puede hacer, por el momento, es conectar conjuntamente las construcciones mentales para un concepto en una guía genérica de desarrollo y comprensión (descomposición genética) y estudiar como esto es convertido y asimilado por una persona dada (esquema).

1.6 La noción de Obstáculo

Se ha visto en la sección 1.2 que es muy posible que en el esquema conceptual de una persona de un concepto matemático coexistan, inconsciente o conscientemente, ideas contradictorias y conflictivas, entre sí o con la definición del concepto. En la sección 1.3, también se ha señalado que al considerar el desarrollo del pensamiento proceptual aparecen ciertas discontinuidades que pueden ser la causa de las dificultades observadas en las producciones de los estudiantes. Asimismo, las nociones de cosificación y encapsulación de Sfard y Dubinsky respectivamente, transcurren no sin dificultad y algunas veces pueden resultar muy difíciles de construir por parte de los estudiantes.

En general, la idea de construir aprendizajes significativos supone que el sujeto cuando aprende no sólo almacena conocimiento sino que, al mismo tiempo, construye, progresivamente, una estructura cognoscitiva estableciendo una red de interconexiones entre los distintos conocimientos que posee. La adquisición de un concepto nuevo por parte del sujeto supone una modificación en su estructura cognoscitiva, bien porque tiene que ampliar su red de interconexiones para relacionar el nuevo conocimiento con los que ya poseía, bien porque el nuevo conocimiento obliga a modificar la red de interconexiones ya existentes. Esto es, el aprendizaje aparece como un proceso no lineal, no siempre acumulativo, con retrocesos, rupturas y reelaboraciones.

Un nuevo aprendizaje puede ser obstaculizado no sólo por una falta de conocimientos previos, o por la existencia de un conocimiento erróneo, o por la existencia de esquemas conceptuales pobres o incoherentes, sino, también, por la existencia de un saber anterior considerado válido hasta ese momento. Por lo tanto, consideramos, pues, que existen conocimientos, formas de pensar, de actuar que han permitido al sujeto resolver con éxito unos determinados problemas, es decir, que tienen un campo de validez, pero que deben ser rechazados o reestructurados para poder realizar el nuevo aprendizaje. Estos conocimientos, formas de pensar y de actuar nos conducen necesariamente a la *idea o noción de obstáculo*.

La noción de obstáculo fue introducida por primera vez por el filósofo francés Gaston Bachelard en 1938 en el contexto de la epistemología de las ciencias e importada al campo de la didáctica por G.Brousseau en 1976.

En (Artigue, 1992, p. 110; Cornu, 1994, pp. 158-159), se encuentran las siguientes características de un obstáculo:

- Se trata de un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento; es algo que se conoce positivamente, o sea, está constituyendo conocimiento.
- Tiene un dominio de eficacia. El alumno lo utiliza para resolver determinadas situaciones-problemas en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado, pero cuando intenta adecuarse a nuevas situaciones genera errores o respuestas inadecuadas; el dominio resulta falso.

- Es resistente a las modificaciones a pesar de la constatación, por parte del sujeto, de los errores que produce; y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté o cuando más haya demostrado su eficacia y potencia en el anterior dominio de validez.
- No puede ser franqueado más que en situaciones específicas de rechazo y éste formara parte del nuevo conocimiento.
- Continúa manifestándose esporádicamente, esto a pesar de haber sido identificado.

Brousseau (1997), atendiendo a que su origen se situé en una u otra componente del sistema didáctico (alumno-profesor-conocimiento) o en la sociedad en general, dice que los obstáculos pueden clasificarse en:

- De origen ontogenético o psicogenético, debidos a las capacidades cognitivas de los alumnos y a las características de su desarrollo.
- De origen didáctico, resultado de las elecciones didácticas y características del sistema educativo.
- De origen epistemológico, relacionados con el conocimiento. Se les puede encontrar en la historia de los mismos conceptos en aquellos momentos en que la comunidad matemática se ha visto en la necesidad de superarlos o vencerlos. Esto no quiere decir que se deban reproducir en el medio escolar las condiciones socio-históricas donde se les ha vencido. Artigue (1995, p.16) dice: "*los obstáculos espitemológicos identificados en la historia son solamente candidatos a obstáculos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de hoy en día*".
- De origen cultural, resultado del sistema de creencias y prácticas culturales y sociales.

La noción de obstáculo permite interpretar, analizar y categorizar los errores recurrentes y no aleatorios que cometen los estudiantes en el transcurso de su desarrollo cognitivo y matemático. En este sentido, las investigaciones de Sierpinska (1985) y Cornu (1991) en torno al concepto de límite, ilustran muy bien los obstáculos epistemológicos más importantes que han surgido en su desarrollo histórico y que están presentes todavía en los esquemas conceptuales de muchos estudiantes. Por lo tanto, se plantea la necesidad de identificar e investigar en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas qué obstáculos son epistemológicos, cuáles son cognitivos y cuáles son didácticos, sus causas y proponer estrategias de solución (ver Socas, 1997; Norman y Prichard, 1994).

1.7 La representación y la visualización

Los planteamientos Vygotskianos sostienen los orígenes sociales de las funciones psicológicas superiores y conciben la actividad externa o el proceso de apropiación cultural en términos de procesos sociales mediatizados semióticamente. Los signos son producto de la función de representación y a la vez la posibilitan; son producto de una construcción social y a la vez son objeto de apropiación personal; primero tienen una forma material externa y se pueden interpretar como instrumentos para la comunicación que progresivamente se convierten en internos y se usan de manera individual. El uso y el dominio progresivo de los signos permiten la transformación del mundo interno, es decir, la formación y el desarrollo de los procesos psicológicos superiores, a la vez que permiten operar mentalmente con los datos de la realidad y sus representaciones para obtener construcciones nuevas de pensamiento (Gómez, 2000; Wertsch, 1988).

Así, las tareas de representación y, en particular, de visualización ocupan un lugar central en la construcción y comprensión de las matemáticas. En general, la representación se refiere a diferentes actividades de significación: a las creencias acerca de algo, a las diversas formas de evocar y denotar los objetos, cómo la información es codificada. Y la visualización parece enfatizar las imágenes y la intuición empírica de los objetos y las acciones físicas.

1.7.1 La representación

El concepto de representación es uno de los conceptos cognitivos más poderosos usados en el campo de la didáctica para explicar los procesos de construcción y adquisición de conceptos de acuerdo a lo que se refleja en la agenda de trabajo del grupo sobre las representaciones y la visualización en el PME-NA XXI.

La noción de representación mental también aparece como una componente importante de la noción de esquema conceptual (ver sección 1.2). Y como puede inferirse de las ideas de Tall (1986, 1996), éstas se construyen y evolucionan en íntima relación con las representaciones externas disponibles en la enseñanza y aprendizaje del cálculo:

- *representaciones enactivas* que a través de las acciones del sujeto dan un sentido de cambio, velocidad y aceleración,
- *representaciones simbólicas y numéricas* que pueden ser manipuladas manualmente o por ordenador y que incluyen la posibilidad de programar por parte del estudiante,
- *representaciones visuales* que pueden ser producidas aproximadamente con lápiz y papel o, más dinámicas y precisas, con ordenadores, y
- *representaciones formales* en análisis que dependen de las definiciones y las demostraciones.

En la figura 6, se muestra cómo se relacionan estas representaciones en el proceso de construcción de los conceptos del cálculo. Se supone que la experiencia enactiva proporciona una base intuitiva para construir el cálculo elemental a partir de representaciones numéricas, simbólicas y visuales, pero que el análisis matemático requiere un nivel superior de representación formal.

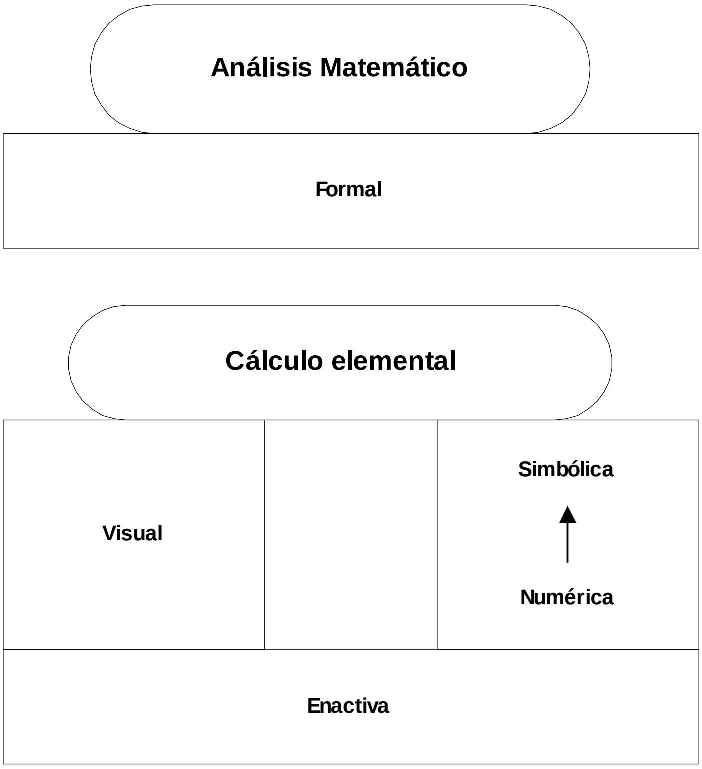


Fig. 6. Representaciones en cálculo y análisis (tomado de Tall, 1996, p.)

En la figura 7, se muestra un espectro de las posibles aproximaciones al cálculo, desde el cálculo en el mundo real hasta un cálculo formal (análisis matemático), con las diversas representaciones externas disponibles.

Estas representaciones tienen cada una sus propias características que ofrecen ventajas y desventajas cognitivas potenciales para el tratamiento de los conceptos básicos del cálculo. Por ejemplo, se pueden usar ideas visuales para comprender conceptos; cálculos numéricos para ejercicios prácticos; manipulaciones simbólicas realizadas con el ordenador para apoyar a aquellos con limitaciones en la manipulación algebraica; escribir programas informáticos para motivar y provocar en el estudiante las ideas de procedimientos y conceptos, procesos y objetos propios del cálculo.

		Representaciones				
Proceptos		**Visual y espacial**	**numérica**	**simbólica**	**Gráfica**	**formal**
		Enactivo Observar Experimentar	Cuantitativo Estimar Aproximar	Manipulativo Manipular	Cualitativo Visualizar Conceptualizar	Deductivo Definir deducir
Cambio: Función	Hacer	Distancia, velocidad, etc. Cambio con el tiempo	Valores numéricos	Símbolos algebraicos	Gráficos	Definición conjuntista
	Deshacer	Resolver problemas	Solución numérica de ecuaciones	Solución de ecuaciones simbólicamente	Soluciones visuales	TVI y el teorema de la función inversa
Razón de cambio: Derivada	Hacer	Velocidad del gráfico dxt	Gradiente numérico	Derivada simbolica	Suavidad	Derivada formal
	Deshacer	Resolver problemas: encontrar distancia de velocidad	Solución numerica de ecuaciones diferenciales	Antiderivada-solución simbólica de ecuaciones diferenciales	Imaginar el gráfico de un gradiente dado	Antiderivada -existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales
Crecimiento acumulativo: Integral	Hacer	Distancia del gráfico vxt	Area numerica	Integral simbólica como limite de una suma	Area bajo un grafico	Integral de Riemann-formal
	Deshacer	Calcular velocidad de distancia	Area conocida-encontrar numéricamente una función	Teorema fundamental-simbólico	Area conocida-encontrar un gráfico	Teorema fundamental -formal
		Cálculo en el mundo real	**Cálculo**			**análisis**

Fig.7 (tomada de Tall, 1996)

Se puede afirmar que muchas de las reformas y proyectos de innovación del cálculo buscan usar las representaciones para hacer la materia más practica y significativa.

Por su parte, Hiebert y Carpenter (1992) al definir la comprensión escriben:"…*una idea matemática, procedimiento o hecho está comprendido si* *éste es parte de una red interna. Más específicamente las matemáticas se dicen que son comprendidas si sus representaciones mentales son parte de una red de representaciones*."

Varios investigadores (Artigue, 1992; Duval, 1993, 1999; Dreyfus, 1991; Janvier, 1978, 1987), entre otros, afirman que las representaciones semióticas de los objetos y los procesos matemáticos juegan un papel fundamental tanto en la actividad matemática como en su proceso de enseñanza y aprendizaje. Y dado que el conocimiento matemático es como el invariante de múltiples representaciones, la coordinación de estas representaciones y el desarrollo de las habilidades cognitivas para convertir una representación en otra se vuelven actividades sumamente importantes pues, por un lado, favorecen no llegar a confundir los objetos con sus representaciones y, por otro, permiten que se les pueda reconocer en cada una de ellas.

Artigue (1992) dice: "*las nociones matemáticas funcionan por lo general en varios cuadros y una de las características de la actividad de los matemáticos es la interacción que ellos realizan entre estos cuadros cuando resuelven problemas matemáticos*" (p. 109). En este sentido, se pregunta:

1. ¿Qué papel puede jugar el establecimiento de relaciones entre diferentes cuadros en la conceptualización de una noción matemática?

2. ¿Cuál es la naturaleza de las dificultades encontradas en el establecimiento de estas relaciones? En particular, ¿Cuál es el peso en estas dificultades de la componente cognitiva y de la componente didáctica? ¿Cómo están estas componentes relacionadas?

Dreyfus señala que cuando se habla o se piensa sobre un concepto o un proceso matemático determinado, no se hace directamente sobre ellos, sino que el sujeto se sirve de signos o imágenes mentales que se refieren a ellos y los representan. Por ejemplo, S_n es un signo que se refiere y representa, o simboliza, el grupo simétrico de grado n. Y también S_n puede evocar, en la mente, algunas imágenes –como los movimientos en el plano que dejan invariante un cuadrado-(ver Dreyfus, 1991, p.30-31).

En este mismo sentido, Duval (1993) dice: *"…las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias. En efecto, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o a una experiencia intuitiva inmediata, como lo son los objetos comúnmente llamados reales o fisicos. Es necesario, entonces, poder proporcionar representantes*"(p.1).

Dreyfus (1991, p.31), divide las representaciones en: a) *representaciones simbólica*s - expresiones externas, escritas o habladas, creadas con el objeto de facilitar la comunicación de los conceptos y objetos matemáticos- y b) *representaciones mentales* - esquemas internos o marcos de referencia que una persona usa para interactuar con el mundo externo- Y agrega: "*Para tener éxito en matemáticas, es deseable tener representaciones mentales de los conceptos que sean ricas. Una representación es rica si contiene y relaciona muchos aspectos del concepto. Y una representación es pobre si contiene tan pocos elementos del concepto que no permite hacer un uso flexible en la resolución de problemas. (...) En la mente de una persona pueden coexistir varias representaciones de un concepto. En algunos casos éstas pueden ser utilizadas con ventaja para considerar diferentes situaciones matemáticas. Sin embargo, en otros casos, pueden ser conflictivas (...) En casos más favorables, las distintas representaciones mentales de un concepto pueden complementarse entre sí y eventualmente pueden ser integradas en una sola representación del concepto*" (p.32)

Luego, Dreyfus, señala que aunque es importante que una persona tenga varias representaciones de un concepto, su existencia misma, no es suficiente para permitir un uso flexible del concepto en la resolución de situaciones-problemas. Es necesario que, además, posea o domine aquéllas habilidades para realizar los dos procesos siguientes: 1) *cambiar de una representación a* *otra* cuando esto sea conveniente, y 2*) traducir una representación en otra*, esto es, pasar de la formulación de un problema o una proposición matemática en una representación a otra.

La representación y la abstracción, dice Dreyfus, son procesos complementarios: "*por un lado, un concepto se abstrae a partir de varias de su representaciones; y por otro, las representaciones son siempre representaciones de algún concepto más abstracto*" (p. 38) En consecuencia, si se utiliza una sola representación del concepto, puede suceder que la atención se centre en la representación en lugar del objeto abstracto representado. Sin embargo, cuando se consideran simultáneamente varias representaciones, la relación al concepto abstracto subyacente se vuelve importante.

Por su parte Janvier (1978, p. 3.2-3.5), considera que, para describir las distintas relaciones entre las diversas variables en una situación-problema, contamos, con al menos cuatro representaciones (externas o semióticas) posibles*: 1) la descripción verbal, 2) la tabla de valores, 3) las gráficas, y 4) las fórmulas*. Hay que agregar a éstas, las posibilidades que nos generan las habilidades de traducción de un modo de representación a otro. Estas habilidades se muestran en la tabla siguiente.

Hacia **Desde**	**Descripción verbal**	**Tablas**	**Gráficos**	**Fórmulas**
Descripción verbal	Transposición	Estimación	Bosquejo Modelación	Modelo
Tablas	Lectura	Transposición	Trazado de la gráfica	Ajustar o interpolar
Gráficos	Interpretación	Lectura puntual	Transposición	Ajustar una curva
Fórmulas	Lectura e interpretación	Calcular	Bosquejo	Transposición

Así, la representación gráfica conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La expresión analítica conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres (Font, 2000). De hecho, la conversión o traducción de un enunciado en lengua natural o un texto a una representación simbólica o gráfica, y viceversa, son tareas complejas y difíciles que no dependen sólo del conocimiento de las reglas de funcionamiento de la representación de partida y de llegada. Este es el caso, por ejemplo, para las tareas de matematización o modelación. También, las representaciones en lengua natural son sumamente importantes en las tareas de argumentación y deducción. Duval (1993) escribe: "*La lengua natural debe ser considerada a la vez como un registro de partida y como uno de llegada. Pero, y ése es el punto importante, esta conversión interna no se hace directamente sino que pasa por representaciones intermediarias no discursivas. La explicitación de representaciones intermediarias no discursivas resulta ser una condición necesaria en el aprendizaje del razonamiento deductivo como en el control de la argumentación. …Asimismo, la conversión de un enunciado del registro de la lengua natural al de una escritura simbólica requiere el desvío por representaciones intermediarias*" (p. 18).

Así, pues, en general, muchas traducciones no siempre son directas. Existen, otras representaciones, ya sean mentales o externas, que actúan como intermediarias. Por ejemplo, la traducción "tabla → fórmula" puede ser realizada como "tabla → gráfica → fórmula". Y la traducción "fórmula → gráfica" como "fórmula → tabla → gráfica".

Hay traducciones tales como "gráfica→gráfica" o "tabla→tabla", denominadas transposiciones, que son reformulaciones dentro de la misma representación. Esta reorganización de los mensajes en muchos casos facilita otros procesos de traducción más complejos. La traducción "fórmula→gráfica" puede descomponerse como "fórmula1→fórmula2→gráfica". O bien, de una tabla de

datos se puede construir una tabla de diferencias para encontrar de manera más fácil una fórmula o una interpretación (Janvier, 1978, p. 3.5, 1987, p.29)
Por su parte Duval (1993, 1999) distingue entre: a) *representaciones mentales* que cubren al conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado, y b) *representaciones semióticas* son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y funcionamiento. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una formula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. Y enfatiza que las representaciones semióticas no solamente son necesarias para fines comunicativos, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del sujeto: objetivación, tratamiento y producción de conocimientos.

La distinción entre representación *mental y externa* se refiere solo al modo de producción y no a su naturaleza (ver Duval, 1999, p. 5). En realidad para Duval la división básica no es esa, sino que para él hay dos clases de representación cognitiva: 1) las representaciones semióticas que son producidas intencionalmente usando un sistema semiótico: oraciones, gráficos, diagramas, dibujos, etc., y 2) las representaciones físicas/orgánicas que son producidas casual y automáticamente por un sistema orgánico o un sistema físico.

La producción o el uso de una representación semiótica puede ser ya sea mental o externa. Por ejemplo, tanto el cálculo aritmético mental como el cálculo escrito utilizan el sistema decimal, pero no así las mismas estrategias debido al costo cognitivo.

Por tanto, las representaciones se pueden dividir en:

- *Representaciones externas o semióticas* que tienen una traza o soporte físico tangible – por ejemplo un signo- sujeta a determinadas reglas sintácticas y de procedimiento, es decir, que pertenecen a un sistema de representación. Sus funciones básicas son cognitivas y comunicativas.(ver Duval , 1993, p. 2). Las representaciones externas pueden dividirse en representaciones simbólicas (o linguísticas) y representaciones analógicas (o no-linguisticas)
- *Representaciones internas o mentales* que son imágenes asociadas al concepto que nos sirven para pensar sobre los conceptos y los procesos matemáticos.

Las representaciones externas e internas no son dos dominios diferentes e independientes, ni las primeras están subordinadas a las segundas, sino que ellas, en el transcurso de su desarrollo, interactúan y se condicionan entre sí. Ellas son signos que funcionan en la interface entre la realidad exterior e interior del sujeto.

El desarrollo de las representaciones mentales se afectua como una interiorización de las representaciones externas; la diversificación de representaciones externas de un mismo concepto u objeto aumenta la capacidad cognitiva del sujeto, y por consiguiente, su capacidad de pensamiento sobre él. De manera recíproca, las representaciones externas, como son los enunciados en lenguaje natural, las tablas, las gráficas, las fórmulas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el cual los sujetos exteriorizan sus imágenes o representaciones internas haciéndolas accesibles a los demás (Duval, 1993).

Así las representaciones semióticas tienen una doble función, muy interrelacionadas entre si:

- Actúan como estímulos para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales y aprehensión de conceptos.

- Permiten la expresión o producción de conceptos e ideas a los sujetos para que las utilicen en sus actividades cognitivas.

Ahora bien, la evidencia experimental le sugiere a Duval generar una noción totalmente relacionada a las funciones esenciales de cualquier actividad cognitiva. Así, Duval (1993) habla de *registro de representación* como un sistema semiótico que permite las tres actividades cognitivas asociadas a la semiótica: 1) *formación de una representación identificable* como una representación de un registro dado: enunciación de una frase (comprensible en una lengua natural dada), composición de un texto, dibujo de una figura geométrica, elaboración de un esquema, dibujo de una gráfica, escritura de una formula, etc., 2) *el tratamiento* de una representación, es decir, su transformación en el registro donde ha sido formada. Por ejemplo, el cálculo y la reconfiguración son formas de tratamiento propios de las escrituras simbólicas y las figuras geométricas respectivamente, y 3) *la conversión* de una transformación, esto es, su transformación a otra representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Por ejemplo, la ilustración es la conversión de una representación lingüística en una representación figural y la descripción es la conversión de una representación no verbal (esquema, figura, gráfica) en una representación lingüística. La transformación de ecuaciones en gráficos cartesianos y viceversa, son ejemplos de conversión.

Como ejemplo de tres registros de representación diferentes para los números se tienen: la escritura decimal, la escritura fraccionaria y la escritura con exponentes.

Duval señala que de las tres actividades ligadas a la semiosis, sólo las dos primeras, la formación y el tratamiento, son tomadas en cuenta en la enseñanza. Pues se considera generalmente que, por una parte, la conversión de las representaciones resultaría por sí misma, en forma rápida y espontánea, desde el momento en que se ha sido capaz de formar representaciones en registros diferentes y de efectuar tratamientos sobre las representaciones y, por otra, la conversión no tiene importancia real para la comprensión de los objetos o los contenidos conceptuales representados, puesto que su resultado se limita a un cambio de registro. Descuidándose así, el hecho de que en una fase del aprendizaje la conversión juega un papel esencial en la conceptualización.

Generalmente, los contenidos matemáticos (objetos, conceptos o situaciones) vienen expresados mediante sistemas de representación específicos que proporcionan una caracterización diferente y cognitivamente parcial - en tanto hay una selección de los elementos significativos o informativos del contenido al que representan – y que no agotan en su totalidad la complejidad de relaciones que cada contenido encierra. Por lo tanto, formar y dominar un concepto matemático implica o supone conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, operar con las reglas de cada sistema y traducir o convertir unas representaciones en otras, detectando que sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades (ver Duval, 1993).

1.7.2 LA VISUALIZACIÓN

Sin duda alguna existe, hoy en día, un alto consenso entre los matemáticos, los didáctas de las matemáticas y los profesores de matemáticas del papel fundamental que juega en la actividad matemática y su aprendizaje el desarrollo del pensamiento visual o visualización (Tall, 1991; Cunninghan, 1991; Guzmán, 1996).

Por una parte, esto es debido a las facilidades ofrecidas para la visualización por las nuevas tecnologías, aunque ésta puede muy bien ser realizada con o sin ordenador. Por otra, se tiene la necesidad cada vez más patente de romper con las tendencias formalistas dominantes en la enseñanza universitaria que han relegado la visualización a un segundo término, tratándola con desconfianza y con sospecha, y que han generado en los estudiantes concepciones poco adecuadas. Por ejemplo, se enseña a mirar con recelo una prueba que hace uso crucial de diagramas, gráficos, u otras formas no-lingüísticas de representación; los estudiantes se muestran reacios a aceptar los conceptos matemáticos visualmente; y prefieren los algoritmos al pensamiento visual (Artigue, 1992). Algunas posibles razones que explican estos comportamientos son: a) el pensamiento visual demanda un nivel superior de habilidades cognitivas que el pensamiento algorítmico, b) la visualización es difícil de enseñar, y c) una relacionada a las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas: lo visual no es matemático. Estas creencias están profundamente enraizadas, aún entre quienes abogan por la visualización. Se demanda así avanzar desde una consideración de lo visual como argumento heurístico, ayuda en el trabajo informal, guía de inspiración; hacia una concepción más seria de los valores probativos y demostrativos de los procesos de la visualización.

Ahora bien, en el contexto de la didáctica de las matemáticas el término visualización tiene una connotación específica y difiere de su uso común en el lenguaje diario y en la psicología, en donde su significado esta muy cerca de la percepción visual y de su extensión a la formación de imágenes mentales y a la manipulación mental de las mismas. Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa: transformar lo formal, lo simbólico, lo verbal, lo analítico en un formato geométrico o gráfico para mostrar, observar, comunicar, comprender y descubrir las relaciones y propiedades entre los objetos del universo matemático. Las ideas, los conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo.

Duval (1999) dice: "*...A diferencia de la visión o la percepción visual, la cual proporciona una acceso directo al objeto, la visualización esta basada en la producción de representaciones semióticas. Específicamente en repesentaciones analógicas(...). Una representación semiótica no nos muestra las cosas como aparecen en el espacio 3D o como se proyectan sobre un soporte material en el espacio 2D. Eso es asunto de la percepción visual. Una representación semiótica muestra relaciones, o mejor, una organización de relaciones entre unidades representacionales. Estas unidades representacionales pueden ser formas unidimensionales o bidimensionales (figuras geométricas), coordenadas (gráficos cartesianos), proposiciones o palabras (redes semánticas)(...) La visualización hace visible todo lo que no es accesible a la visión(...)La visualización se refiere a una actividad que es intrínsecamente semiótica, estos es, ni mental ni física*"(p. 13).

Así, la visualización no es un fin en si misma, sino que es un medio para la comprensión de un concepto o resolución de un problema. Además es condición necesaria para la comprensión. Y para conseguir esta clase de comprensión, la visualización no debe ser aislada del resto de las matemáticas: "*El pensamiento visual y las representaciones gráficas deben ser ligadas ligados a los otros modos de pensamiento matemático y formas de representación. Se debe aprender cómo las ideas pueden ser representadas simbólicamente, numéricamente y gráficamente, así como a moverse entre ellas. Se debe desarrollar la habilidad de escoger la aproximación más apropiada para un problema particular y entender las limitaciones de estos tres dialectos del lenguaje de las matemáticas" (Zimmermann y Cunningham, 1991, p. 4).*

Los expertos poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en que se mueven. Mediante ellos son capaces de relacionar, de modo muy versátil y variado, constelaciones frecuentemente muy complejas de hechos y resultados de su teoría y a través de tales redes significativas son capaces de escoger, de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver los problemas con que se enfrentan (ver Guzmán, 1996). Estas imágenes visuales o imágenes mentales pueden ser producto de una mera visualización, esto es, la producción mental de una representación semiótica como el cálculo mental.

"*La visualización matemática es el proceso de formar imágenes - mentalmente o con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología- y usar tales imágenes efectivamente en la comprensión y descubrimiento matemático*" (Zimmermann y Cunningham, 1991, p. 3). La visualización no es simplemente apreciar o contemplar las matemáticas a través de dibujos.

Más generalmente, Guzmán (1996) dice: "*Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas*"(p. 16). Además, si se toma en cuenta la naturaleza misma de la matemática, la visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.

Dreyfus (1993) dice: "*La visualización, desde el punto de vista de la educación matemática, incluye dos direcciones: 1) la interpretación y comprensión de modelos visuales y 2) la habilidad de traducir en imágenes visuales información dada en forma simbólica. Además, de estos aspectos de codificar y descodificar, el tratamiento directo de información en forma visual puede ocupar una importancia central en el aprendizaje de las matemáticas*"(p.119).

También, la visualización en tanto que está inmersa en todo un cumulo de intercambios personales y sociales, buena parte de ellos arraigados profundamente en la misma historia de la actividad matemática, se vuelve un proceso que hay que aprender en la interacción con las personas a nuestro

alrededor y en la inmersión e inculturación en el tejido histórico y social de la matemática.
En consecuencia, la visualización no es una visión inmediata de las relaciones sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta (Guzmán, 1996, p. 18). Esto implica, admitir que en la enseñanza, tal vez, la visualización no sea un proceso transparente e inmediato y, en consecuencia, requiere una labor de descodificación y codificación en la que es necesario introducir al alumno. En este sentido, según el grado de correspondencia entre la situación matemática que tratamos de visualizar y la forma concreta que empleamos para hacerlo van a existir muy distintas formas de visualización, por ejemplo: isomórfica, homeomórfica, analógica, diagramática (ver Guzmán, 1996, pp. 18-26).

Así, se ha de ser consciente de la naturaleza de nuestras visualizaciones y de los aspectos de convenio, consenso, tradición, que contienen, lo que las hace dependientes, para su utilización, de todo un código de comprensión que ha de ser transmitido y ensayado suficientemente hasta adquirir una cierta familiaridad con él.

En consecuencia, para nosotros, la visualización matemática se refiere a aquéllas habilidades cognitivas especificas que nos permiten producir una representación semiótica apropiada – ya sea mental, con lápiz y papel o con un ordenador- para comprender un concepto o resolver problema matemático, en diversos registros geométricos, gráficos o proposicional. Y por tanto, se requiere de un entrenamiento especifico para visualizar cada registro, pues es muy buen sabido que la figuras geométricas o los gráficos cartesianos no son directamente accesibles como lo pueden ser las representaciones icónicas, en las que existe una relación de semejanza entre el contenido de la representación y el objeto representado. Así, desde la perspectiva del aprendizaje, es necesario considerar tres problemas relacionados a la visualización: la discriminación, el tratamiento y la coordinación con un registro discursivo (ver Duval, 1999, pp. 16-23).

Todo ello deja bien patente la conveniencia de ejercitar nuestra capacidad de visualización y de entrenar a quienes queremos introducir en la actividad matemática en el ejercicio de la visualización.

1.7.3 El papel de la Tecnología

Otro factor muy importante, pero también muy controvertido, en los movimientos actuales de renovación curricular es la presencia de la tecnología[17] en la clase de matemáticas con todas las facilidades que se supone para representar y transformar el contenido matemático y promover ambientes de aprendizaje interactivos.

Esa presencia, en muchos contextos educativos, es sólo potencial. No obstante, ella ejerce una tremenda influencia en las relaciones que se establecen en los sistemas didácticos (*conocimiento-profesor-alumno*) y su entorno.

Por ello, ante las posibilidades y retos que plantea la tecnología, creemos que lo conveniente es adoptar una posición critica y planificar adecuada y racionalmente su introducción en el curriculo. Por ejemplo, Koblitz (1996) dice: *"At the university of Washington, we also have resource limitations. After considering various ways to reform the calculus course, we selected a low-tech approach using some applications-oriented lecture note that I had written. Our calculus reform was implemented relatively, quickly, painlessly, and inexpensively, largely because it was not based on computers or graphics calculators"*(p. 3).

[17] El término tecnología se refiere a los ordenadores, los programas de cálculo simbólico y gráfico, los recursos de internet, los lenguajes de programación, las calculadoras, las hojas de cálculo, etc. Los posibles escenarios educativos que se vislumbran de acuerdo al papel que juegue la tecnología son: como recurso didáctico, entorno de aprendizaje o sistema educativo.

La aproximación tecnológica en tanto que sugiere cambiar los énfasis de la enseñanza ha resultado ser muy saludable para aquellos contextos educativos que tienen pocas posibilidades de hacer de la tecnología un recurso intensivo y masivo. Así, la practica y el significado de la enseñanza-aprendizaje del cálculo se ha enriquecido con diversas perspectivas que ponen énfasis más en los aspectos fenomenológicos, intuitivos, visuales, representacionales que están en la génesis de los conceptos, que en la lógica interna de la disciplina y el dominio algoritmico-simbólico (degradado en la practica educativa, a la mera manipulación de recetas de cocina). Asimismo, se plantea la necesidad de promover una interacción fuerte entre el conocimiento procedimental y conceptual o, en los términos de Tall, desarrollar el pensamiento proceptual y versátil.

En general, desde nuestra perspectiva, la tecnología se concibe básicamente no como la panacea didáctica, sino como una herramienta más, que coadyuva a promover ambientes de aprendizaje ricos y comunicativos que hacen evolucionar los esquemas conceptuales y los conocimientos y habilidades de los estudiantes. Es decir, ambientes que, por una parte, favorecen las dimensiones intuitivas y visuales, la experimentación, el plantear y probar conjeturas, las tareas de tratamiento y conversión entre los diferentes sistemas semióticos y crear situaciones comunicativas relevantes y, por otra, permiten considerar secundarias, según que objetivos se persigan, ciertas tareas rutinarias que en un ordenador se pueden realizar de manera más rápida y exacta[18] - y además, presentar los resultados en varios sistemas de representación- proporcionando así más tiempo para centrar la atención del estudiante en los procesos cognitivos y matemáticos subyacentes. En particular, en un ambiente rico y comunicativo, la interacción entre los modos algebraicos/analíticos/simbólicos y los gráficos/geométricos/visuales, ya sea con o sin tecnología, juega un papel sumamente importante en el pensar y hacer matemáticas.

[18] Los sistemas de cálculo simbólico (Derive, Mapple, Mathematica, etc.) permiten efectuar casi todos los cálculos matemáticos usuales: cálculos aritméticos, cálculos algebraicos, cálculos funcionales (incluye gráficas), cálculos combinatorios-lógicos–estadísticos y cálculos geométricos.

Varias experiencias de investigación e innovación se han realizado sobre el papel de la tecnología en el proceso de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Investigadores como (Tall, 1985, 1986; Artigue, 1992; Demana & Waits, 2000; Dubinsky, 1992) reportan éxitos importantes en el aprendizaje de conceptos del cálculo en ambientes tecnológicos que potencian la visualización o la programación de los objetos o conceptos matemáticos. Sin embargo, Sierpinska (1999) dice: *"It is no clear, however, if technology can be classified as a "teaching aid", aimed at overcoming the difficulties in the weak student and enhance understanding in the stronger student (week 5, p, 5)".*

Ahora bien, considerando nuestra poca experiencia en este campo y con el objeto de ser conscientes de los impactos positivos y negativos de la tecnología sobre la enseñanza y el aprendizaje, nos limitaremos a revisar cómo ésta se ha concebido y algunas de las inquietudes qué se plantean.

En general, se identifican dos áreas de trabajo no excluyentes:

1. Integrar de las potencialidades de los Sistemas de Cálculo Simbólico (SCS) en el proceso de aprendizaje para fomentar la reflexión y la comprensión de los estudiantes. Esto no es inmediato y requiere una aproximación didáctica teórica que ayude a conceptualizar los nexos y el papel de las técnicas con SCS y las técnicas sin SCS. En particular, se requiere imaginar técnicas específicas para resolver problemas o tareas usando SCS, pues muchos estudiantes consideran que la resolución de problemas con SCS no les ayuda en la elaboración del conocimiento conceptual. Y por el contrario, sienten que éste se desarrolla a partir de las técnicas que construyen en un contexto ordinario.
2. Diseñar y elaborar recursos tecnológicos expresamente para fines instruccionales que tomen en cuentan los resultados de las investigaciones didácticas. Este es el caso de investigadores como Tall y Dubinsky. Tall aboga, en un primer momento, por una introducción global y cualitativa de

los conceptos que se apoye fuertemente en la visualización de los conceptos y en las experiencias enactivas a través de ordenadores. Por su parte, Dubinsky promueve la programación en el lenguaje ISETL de los conceptos matemáticos para que los estudiantes puedan realizar una construcción mental de ese objeto y puedan llegar a comprenderlo. Por ejemplo, escribir un programa para representar una función $f(x)$ dada y pensar en lo que el ordenador hace cuando se le pide evaluar $f(3.7)$ puede ayudar a la comprensión y a potenciar la conexión entre la expresión formal y los procesos (cognitivos y matemáticos) subyacentes. Algunas evidencias empíricas al respecto pueden encontrarse en el sitio http://www.cs.gsu.edu/~rumec/.

Sierpinska (1999*)* dice*:"In my own practice of teaching linear algebra with Maple, I remember that, at the begining, I used to spend a lot of time teaching my students the commands of Maple and the quite awkard syntax of the software. Students were spending a lot of time to figure out why a command didn't work they way they expected (just to find out, for example, that they had forgotten to put the semi-colon at the end of the command line). At the end, they were not sure what they are learning in the course: linear algebra o the Maple languaje. Today, I no longer demand that the students do their homework assignments using Maple; I allow them todo so, if they want (week 5, p.4-5)".* Aquí lo que se plantea es el riesgo que se corre de invertir demasiado tiempo en el medio de enseñanza y muy poco en los procesos y conceptos matemáticos subyacentes.

Otra cuestión muy concreta que se plantea como reto para la didáctica es la de decidir qué método o procedimiento es el más adecuado y por qué. Por ejemplo, cada algoritmo con lápiz y papel debe ser analizado para ver si el procedimiento contribuye a la comprensión del proceso o concepto. En caso negativo, éste debe ser suprimido[19] o relajado y realizado con la tecnología, la

[19] Esto es parte de la evolución del conocimiento y de la técnica. Por ejemplo, procedimientos de cálculo como el de la raíz cuadrada o el de interpolación usando tablas son hoy en día obsoletos, no así los conceptos

cual, a su vez, debe ser examinada para ver en que medida ésta contribuye a la comprensión del concepto y al desarrollo las habilidades de los estudiantes. O mejor aun, se podrían imaginar nuevos tipos de problemas o tareas en las que estos algoritmos sean indispensables En Demana & Waits (2000), encontramos un principio didáctico llamado *procedimiento caja blanca/caja negra* que dice que en determinados momentos, dependiendo de los objetivos de aprendizaje, puede que sea muy formativo realizar ciertos cálculos o procedimientos con lápiz y papel, pero posteriormente puede ser conveniente realizarlos con la tecnología o mentalmente. Por ejemplo, la técnica de descomposición en fracciones parciales es un *procedimiento caja negra* en cálculo que es mejor realizarlo con la tecnología. Pero el procedimiento de integración es un *procedimiento caja blanca* que es mejor realizarlo con lápiz y papel. Asimismo, la técnica de integración por fracciones parciales es un procedimiento caja negra cuando se resuelven ecuaciones diferenciales, pero la técnica de solución de la ecuación diferencial es un *procedimiento caja blanca*.

De manera más general, Tall (2000b) reflexiona acerca de las características del funcionamiento del cerebro humano y el ordenador, y proporciona evidencia empírica de cómo esa interacción puede contribuir al desarrollo del pensamiento versátil: combinación del pensamiento proceptual y el pensamiento visual. Y observa que mientras el ordenador se limita a realizar algoritmos para hacer cálculos y representar la soluciones mediante números o figuras, la mente matemática[20] realiza muchos tipos de asociaciones y posee la riqueza cognitiva de los esquemas conceptuales y los proceptos que le sirven o bien como guía o como obstáculos para manejar los conceptos matemáticos (Tall, 2000c).

Así, un estudiante que se limita a usar un manipulador simbólico sin tener una idea más o menos clara de los mecanismos internos que éste realiza para resolver una tarea especifica y no halla reflexionado sobre los conceptos

---

subyacentes. Lo mismo puede afirmarse de muchos procedimientos simbólicos en álgebra y cálculo que se realizan con lápiz y papel y que todavía se estudian.

[20] El termino *mente matemática* se usa para referirse cómo los procesos y conceptos matemáticos son concebidos y compartidos entre las personas (Tall, 2000, p.3).

matemáticos, es poco probable que desarrolle un pensamiento proceptual consistente o que sus esquemas conceptuales evolucionen. Por ejemplo, Tall (2000a) reporta que estudiantes que siguieron un curso de cálculo usando Derive, miraban la diferenciación como una secuencia de apretar teclas más que la idea conceptual de razón de cambio. Otro ejemplo interesante es el de Hunter, Monaghan y Roper (citados en Tall, 2000b) donde reportan que una tercera parte de los estudiantes que usaban un manipulador simbólico podían responder antes del curso, pero no después, a la cuestión siguiente: ¿qué puedes decir de u si $u = v + 3$ y $v = 1$?.

Por lo tanto, para no reemplazar un algoritmo mecánico con lápiz y papel por otro, tal vez menos adecuado, en el que solo se aprietan teclas, son necesarias otras experiencias que complementen el trabajo con los métodos simbólicos.

Una aproximación que conjugue los conocimientos de las matemáticas y del desarrollo cognitivo con la tecnología para enriquecer los esquemas conceptuales y desarrollar un pensamiento versátil en los estudiantes es requerida.

En este sentido, Tall formula el *principio de construcción selectiva,* que consiste en el diseño de software que representa ciertos aspectos teóricos escogidos para que el estudiante pueda explorarlos, mientras el ordenador realiza internamente los procesos subyacentes. Se supone que la actividad sensorial, motora y visual puede ayudar a construir los conceptos teóricos superiores. Tall propone una aproximación llamada *aproximación cognitiva al cálculo* basada en el diseño de software conteniendo *organizadores genéricos* que permitan manipular ejemplos y no ejemplos de un concepto o sistema relacionado de conceptos. Cada organizador genérico requiere escoger una idea fundamental en la mente matemática, llamada *raíz cognitiva*, que no tiene necesariamente que ser una idea matemática. Por ejemplo, la noción de rectitud local es una raíz cognitiva para el organizador genérico Magnify.

Sin embargo, Tall (2000b) escribe: "*I do not see the computer microworld as the sole agent in facilitating student exploration and peer discussion. The role of the teacher as mentor is vital –to draw out ideas from students and to encourage them to express verbally what they see occurring visually (p. 229)*". Más adelante continua: "*We can use new technologies in imaginative ways that were previously impossible to contemplate. However, if we are to use technology in teaching mathematical concepts, we need to observe carefully what it is that students actually learn during the process. The evidence is that they learn by building up mental images in ways that are consistent with what they do and what they observe whilst using technology. The experience can have insight aspects that support the theory, but it can also lead to a variety of other mental imagery that may differ from the mathematical ideals currently held by experts (p. 230)".*

1.8 Algunas notas histórico-epistemológicas

En esta sección apelamos a la historia de las matemáticas para conjeturar algunas posibles razones que pemiten explicar la persistencia del modo de pensamiento algebraico/algorítmico frente al modo gráfico/visual en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las EDO.

En primer lugar, creemos que tal situación es consecuencia del predominio de una concepción epistemológica de las matemáticas, muchas veces implícita, en la práctica docente y su entorno muy próxima al funcionalismo formal de Mac Lane que sobrevalora la manipulación lógica y simbólica frente al tratamiento gráfico/visual. Bajo esta concepción, los aspectos gráficos y visuales son considerados como un cierto soporte heurístico, un mero auxiliar didáctico para presentar algunos conceptos matemáticos y sus interrelaciones. Pero una vez que han sido usados ellos deben ser retirados de la urdimbre conceptual.

Históricamente, y de una manera general, podríamos decir que esa concepción se origina y consolida a través de tres grandes proyectos de las matemáticas: 1) el proyecto de algebrización del cálculo (1600-1800), 2) el proyecto de aritmetización del análisis (1800-1900), y 3) el proyecto fundacionista. La tremenda influencia que tales proyectos han ejercido sobre el currículo han sido ampliamente documentados (Arrieta, 1993). En ellos se refuerza una creencia absoluta en el poder de los métodos algebraicos/algorítmicos/analiticos y se desprecian los aspectos gráficos/visuales, considerándolos como no matemáticos.

En segundo lugar, la revisión de la historia de las EDO de primer orden nos permite para dar cuenta de algunos hechos epistemológicos específicos, como esos ya señalados en Artigue(1992), que han contribuido a que todavía prevalezca en muchos currículos de las EDO la concepción antes aludida, a saber: a) el largo predominio histórico del cuadro algebraico, b) el estatuto del marco numérico, c) el desarrollo tardío de la aproximación geométrica, d) la independencia relativa de las distintas aproximaciones, y e) la dificultad de los problemas que motivaron el nacimiento y subsiguiente desarrollo de la aproximación cualitativa.

Realicemos, pues, un breve viaje por la historia dejando para un trabajo posterior la busqueda de hechos históricos particulares que permitan enriquecer las propuestas didácticas actuales.

La teoría de las Ecuaciones Diferenciales[21] Ordinarias (EDO) comenzó a desarrollarse a finales del siglo XVII, casi simultáneamente con la aparición del cálculo diferencial e integral y prácticamente todos los métodos de integración de ecuaciones de primer orden de los que hoy disponemos eran ya bien conocidos hacia 1740. Es más, a partir de Euler, la notación y el lenguaje usados son ya muy próximos a los que usan actualmente. Por ejemplo, Newton diseño algoritmos adecuados para tratar con los tipos relaciones siguientes: i) $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x)$ o $\frac{dy}{dx} = f(x)$, ii) $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x)$ o $\frac{dy}{dx} = f(y)$, iii) $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x)$ o $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Por su parte, Leibniz descubrió la técnica de separación de variables en 1691, y la uso el mismo año para resolver ecuaciones homogéneas de primer orden; en 1694 encontró además la solución de la ecuación lineal de primer orden. En 1695 Jacques Bernoulli propuso resolver la que hoy se conoce como ecuación de Bernoulli, y Leibniz mostró al año siguiente que se podía reducir a una ecuación lineal a través de un cambio de variable. Las ecuaciones exactas fueron identificadas algún tiempo después, independientemente por Euler (1734-35) y Clairaut (1739-40). En estos trabajos se introdujo la idea del factor integrante, aunque ella ya había sido usada por Jean Bernoulli en 1691.

El interés por las EDO de primer orden surgió y se desarrollo básicamente de la necesidad de encontrar nuevos métodos de atacar diversos problemas físicos y geométricos (ver Kline, 1992, pp.622-664).

El problema básico de la teoría consiste en estudiar las funciones que satisfacen una EDO, proporcionando ideas lo suficientemente amplias acerca de sus propiedades.

En este sentido, uno de los primeros problemas de la teoría, tal como puede apreciase en el parrafo de arriba, fue la obtención de métodos que permitieran calcular fórmulas explicitas para las soluciones. Sin embargo, el hecho de que tales fórmulas sólo puedieran obtenerse en casos muy sencillos provocó que la atención se desplazará a las cuestiones de existencia, unicidad, aproximación y descubrimiento de nuevos métodos de estudio de las soluciones.

El ambiente intelectual en que se desarrollaron los conceptos y algoritmos de las EDO está inmerso en el proceso de algebrización de la geometría y del cálculo, en los que se pone el acento en las fórmulas y los desarrollos cuantitativos. De hecho, una de las características de las matemáticas del siglo XVII fue romper con el paradigma de la geometría euclídea como sinónimo del

[21] El término ecuación diferencial fue usado por primera vez por Leibniz en 1676 para denotar una relación entre las diferenciales dx, dy y las variables x, y. Sin embargo, las diferenciales leibnizianas no tenían un significado preciso.

rigor y establecer la superioridad del álgebra sobre ésta. Pues, como lo señala Klein (1992), hasta el año 1600 el cuerpo de las matemáticas era geométrico con algunos apéndices algebraicos y trigonométricos y, en lo metodológico, la tradición griega se dejaba sentir entre los matemáticos del siglo XVII, por la obligación a justificar los métodos algebraicos con demostraciones geométricas.

Ahora bien, la confianza de los matemáticos en las intuiciones y consideraciones físicas y los éxitos de los resultados obtenidos y la creencia en el diseño matemático del universo más que en el rigor lógico fueron los factores que contribuyeron a un tremendo desarrollo de las matemáticas durante los siglos XVII y XVIII.

En efecto, como consecuencia de la mayor efectividad de los métodos analíticos, el álgebra se convirtió en la sustancia dominante de las matemáticas; desplazando a los métodos geométricos y convirtiéndolos, como mucho, en una interpretación del álgebra y en una guía del pensamiento algebraico mediante la geometría de coordenadas de Fermat y Descartes. Es más, tras las aportaciones de Leibniz en el aspecto notacional, el cálculo infinitesimal se convirtió en puro mecanismo operatorio formal (una extensión del álgebra en la que no se necesita del concepto de limite y, en particular, de la noción de convegencia de una serie) validado por la seguridad, claridad y fecundidad de los cálculos y no por la solidez de sus fundamentos. El concepto predominante de función durante el siglo XVIII fue el de una única expresión analítica (una fómula) finita o infinita, es decir, una combinación de operaciones realizadas sobre cantidades conocidas para obtener valores de cantidades desconocidas. De hecho esta convicción de que las funciones debían ser expresables por medio de fómulas se convirtió en un obstáculo para el desarrollo de este concepto.

Los matemáticos del siglo XVIII continuaron con la tradición leibniziana de la manipulación formal de las expresiones analíticas o algebraicas. Así Euler, Lagrange, Legendre, Laplace haciendo un uso virtuoso de la técnica se centraron en la búsqueda de procedimientos algorítmicos o analíticos y pretrendieron liberar al cálculo infinitesimal de la geometría y basarlo en la aritmética y el álgebra.

En Klein (1992), encontramos las citas siguientes que ilustran muy bien estas pretensiones. Lagrange en su *Mecánique analytique* escribe: "*Nosotros ya tenemos varios tratados sobre mecánica, pero el plan de éste es enteramente nuevo. Me he propuesto el problema de reducir esta ciencia (mecánica), y el arte de resolver problemas pertenecientes a ella, a fómulas generales cuyo simple desarrollo proporciona todas las ecuaciones necesarias para la solución de cada problema (…). No se encontrarán diagramas en este trabajo. Los métodos que expongo en él no demandan ni construcciones ni razonamientos geométricos o mecánicos, sino únicamente operaciones algebraicas analíticas sujetas a un procedimiento uniforme y regular*."(p. 813). En este mismo sentido, Laplace en su *Exposition du systeme du monde* dice: "*El análisis algebraico nos hace olvidar rápidamente el objetivo principal (de nuestras investigaciones) al enfocar nuestra atención en combinaciones abstractas y es únicamente al final cuando regresamos a nuestro objetivo original. Pero al abandonarse a las operaciones del análisis, se es llevado por la generalidad de su método y a las ventajas inestimables de tranformar el razonamiento por procedimientos mecánicos a resultados frecuentemente innacesibles a la geometría. Tal es la fecundidad del análisis, que es suficiente con traducir dentro de este lenguaje universal verdades particulares para ver surgir de su propia expresión multitud de nuevas e inesperadas verdades. Ningún otro lenguaje tiene la capacidad para la elegancia que surge de una larga sucesión de expresiones ligadas una a otra viniendo todas de una idea fundamental*." (p. 814).

Asimismo, Euler y Lagrange intentaron explicar los conceptos del cálculo y justificar los procedimientos utilizados reduciendo el análisis a un trabajo puramente formal sobre las representaciones algebraicas o analíticas (a través del uso sistemático de la serie de Taylor), separando su fundamentación de la geometría y la mecánica y evitando hacer uso de los infinitesimales, los diferenciales, las fluxiones y la noción de límite.

Leibniz notó la dominación creciente del álgebra y se sintió obligado a decir: "*a menudo, los geómetras pueden demostrar en pocas palabras lo que es muy largo para el cálculo…el enfoque del álgebra está garantizado, pero no es mejor*".

Así, pues, en su origen en los conceptos y métodos del cálculo aparecen interrelacionados los aspectos geométricos y algebraicos, es decir, los aspectos figurales y operacionales. Pero la concepción epistemológica dominante ya señalada, así como la fecundidad de los métodos algebraicos privilegió a estos últimos.

Ahora bien, Liouville demostro en 1841 que la solución de la ecuación de Riccati de la forma $\frac{dy}{dx} + ay^2 = x^2$, $a > 0$, no puede expresarse como combinación finita de integrales de las funciones elementales. Así, la existencia de estas ecuaciones (cuyas soluciones no pueden expresarse todas ellas explicitamente en terminos de funciones elementales) conlleva a desarrollar métodos de aproximación para las soluciones de las ecuaciones que puedan aplicarse a una amplia gama de ecuaciones.

Por otro lado, cuando los matemáticos encontraron más y más difícil el problema de obtener soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias específicas se preguntaron bajo que condiciones un problema de valor inicial o de contorno admite una solución. Fue Cauchy, entre 1820 y 1830, el primero que demostró el problema de valor incial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ tiene solución única siempre que $f(x, y)$ y f_y sean continuas para todos los valores de *x e y* en un rectángulo adecuado y proporcionó, además, un método para aproximar la solución. También, entre los años 1839 y 1842, Cauchy presento el método más general de las funciones mayorantes. Y en 1890, Emile Picard proporcionó el método general de aproximaciones sucesivas, ya adelantado por Liouville.

También el problema de encontrar soluciones periódicas fue abordado. En 1883, G. Floquet publico una dicusión completa de la existencia y propiedades de las soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes periódicos con el mismo período w. Posteriormente, otros autores se dedicaron al problema de descubrir métodos prácticos para hallarlas, pero no se encontraron métodos generales.

En 1877, Hill demostró que la ecuación diferencial lineal de segundo orden $\frac{d^2x}{dt^2}+\theta(t)x=0$, con $\theta(t)$ periódica de período π y par, tiene una solución periódica.

Entre 1881 y 1886, Poincaré, motivado por el trabajo de Hill, los problemas de la mécanica celeste, y la existencia desde hace ya buen tiempo de una clase ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que no pueden ser resueltas explicitamente, tales como la ecuación de Riccati y la ecuación del péndulo, que no se contaban con métodos generales para su solución, buscó métodos mediante los cuales el problema sería resuelto examinando las propias ecuaciones diferenciales, iniciando así lo que se denomina teoría cualitativa.

Poincaré empezó con ecuaciones no lineales autónomas de la foma $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, donde P y Q son analíticas en *x e y*. Esta foma fue escogida en parte porque algunos problemas del movimiento planetario lo condujeron hasta ahí, y porque era el sistema matemático más sencillo con el cual comenzar el tipo de investigacion que Poincaré tenia a la vista (Klein, 1992, p. 966). Poincaré encontró que los puntos singulares de la ED, es decir los puntos donde ambos P y Q se anulan, juegan un papel importante en el comportamiento de las soluciones. Distinguió cuatro tipos de puntos singulares (foco, punto silla, nodo y centro) y describió el comportamiento de las soluciones alrededo de tales puntos.

También, estudió los ciclos límite, las soluciones periódicas y la noción de estabilidad e introdujó la noción de índice (un argumento topológico) para describir la naturaleza de un punto singular.

Por lo tanto, desde el siglo XVII, la teoría de las ecuaciones diferenciales se ha desarrollado matemáticamente en tres cuadros[22]:

1. El cuadro algebraico donde las soluciones son expresadas por medio de formulas algebraicas, explícitas o implícitas, desarrollos en serie o expresiones integrales; cuadro que ha sido el predominante durante la mayor parte del desarrollo de la teoría.
2. El cuadro numérico donde las soluciones son expresadas por medio de valores aproximados numéricamente.
3. El cuadro geométrico donde se pretende caracterizar, desde un punto de vista topológico, el conjunto de las curvas solución, es decir, el plano fase de la ecuación. Este cuadro frecuentemente es llamado solución cualitativa.

1.9 Principales Investigaciones acerca del aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

El interés creciente por los sistemas dinámicos y el poder de las herramientas gráficas y computacionales ha cambiado profundamente la naturaleza de las EDO durante los últimos 20 años. Sin embargo, su enseñanza en los primeros cursos universitarios sigue centrada en el cuadro algebraico, generando en el estudiante ideas muy limitadas y poco satisfactorias con la epistemología especifica del campo de las EDO: por ejemplo, muchos estudiantes llegan a creer de que siempre existe una receta que permite la integración algebraica exacta de cada ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$, es decir, fórmulas

[22] De acuerdo a R.Douady un cuadro contiene: objetos matemáticos y sus relaciones, así como las expresiones e imágenes mentales asociadas con estos objetos y sus relaciones. Dos cuadros pueden contener los mismos objetos, pero diferir en las imágenes mentales y la problemática desarrollada en torno a ellos, esto es por la clase de problemas y métodos (Artigue, 1992, p.1)

explícitas en términos de funciones algebraicas, exponenciales, trigonométricas, etc. Cuando los estudiantes afirman: "*esta ecuación no tiene solución"* (cuando en realidad la hay), lo que quieren decir es que no hay soluciones que puedan expresarse en términos de funciones elementales (Hubbard y West, 1991). También, ecuaciones, como $y' = y^2 - x,\ y' = sen(xy),\ y' = \exp(xy)$, que no pueden ser resueltas por métodos estándar no son consideradas en el curso tradicional.

En este sentido, Artigue (1989b) con el objeto de investigar las habilidades y dificultades cognitivas de los estudiantes de primer año de universidad cuando se enfrentan a los métodos cualitativos, diseña y experimenta un enfoque para la enseñanza de las EDO que toma en cuenta: 1) la epistemología especifíca de las EDO, 2) las capacidades cognitivas de los alumnos, y 3) el desarrollo de las herramientas informáticas

Concretamente, Artigue elabora una ingeniería didáctica[23] que promueve la integración de los enfoques numéricos y cualitativos haciendo énfasis en la interacción y coordinación de los cuadros algebraico y gráfico, esto es, entre una ecuación y el conjunto de curvas solución. Por lo tanto, examinemos, pues, con algún detalle su trabajo.

En primer lugar, mediante un análisis a-priori, identifica las principales restricciones que aparecen en la enseñanza, a saber: epistemológicas, cognitivas y didácticas.

En el nivel epistemológico se encuentran: a) el largo predominio histórico del cuadro algebraico, b) el estatuto del marco numérico, c) el desarrollo tardío de

[23] El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para un población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la ingeniería didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase. También, la ingeniería didáctica designa una metodología de investigación particularmente interesante por tener en cuenta la complejidad de la clase (Artigue, 1992, 1994)

la aproximación geométrica, d) la independencia relativa de las distintas aproximaciones, y e) la dificultad de los problemas que motivaron el nacimiento y subsiguiente desarrollo de la aproximación cualitativa.

En el nivel cognitivo: a) las dificultades relacionadas al hecho de que la resolución cualitativa requiere el uso y razonamiento con funciones que no se expresan explícitamente, b) el uso coordinado y simultaneo de los registros algebraicos y gráficos, de una función y sus derivadas c) las pruebas en la aproximación numérica y cualitativa requieren un manejo sofisticado y apropiado del cálculo elemental.

En el nivel didáctico: a) lo atractivo de los algoritmos y la imposibilidad de crear algoritmos en la aproximación cualitativa, b) el estatus del marco gráfico, y c) el rechazo de los problemas que no pueden ser resueltos completamente.

La enseñanza tradicional, algebraica y muy algoritmizada, es una enseñanza que no plantea problemas y que corresponde a un nivel de exigencia mínima tanto para los profesores como para los alumnos. El enfoque cualitativo si bien es susceptible de métodos, no es algoritmizable y, además, no siempre el profesor tiene el control de la situación (Artigue, 1994, p. 38)

En segundo lugar, con base en estas restricciones, Artigue hace las siguientes elecciones globales que guían todo el proceso de la ingeniería didáctica:

- Hacer explícito el cambio en el estatus del cuadro gráfico
- Apoyarse en las herramientas informáticas para manejar las dificultades cognitivas del enfoque cualitativo
- Enseñar de una manera explícita métodos para la resolución cualitativa
- Limitar la complejidad del cuadro algebraico y transferir la esencia del trabajo algorítmico aun trabajo autónomo.

A continuación procede con el proceso de enseñanza en 7 fases, organizadas cada una en torno a situaciones claves:

- Las necesidades internas y externas a las matemáticas a las cuales responde la herramienta de la ecuación diferencial (taller de modelaje).
- La introducción de la resolución cualitativa.
- La resolución algebraica.
- La complementariedad de los enfoques algebraicos y cualitativos.
- La introducción de la resolución numérica.
- Los métodos de resolución cualitativa.
- La integración de las diferentes herramientas en la resolución de problemas más complejos.

En orden para analizar las dificultades encontradas y su verdadera naturaleza, Artigue (1992), distingue tres tipos de tareas en la resolución cualitativa y tres registros de interacción entre los cuadros gráficos y algebraicos:

- El registro de la interpretación: una tarea se dice que pertenece a este registro si tiene las características siguientes:
    - la información es dada simultáneamente en los dos cuadros. Por ejemplo, una ecuación diferencial, en el cuadro algebraico, y un dibujo del campo de direcciones, en el cuadro gráfico.
    - el problema a resolver requiere la interacción entre las dos formas de información.

  Tareas típicas en este registro son:
    - asociar dibujos de campos de direcciones y portarretratos fases con ecuaciones diferenciales.
    - dibujar usando algún software matemático el portarretrato fase de algunas ecuaciones diferenciales y describir sus principales características

    - dada una ecuación dependiente de un parámetro, determinar y analizar los diferentes portarretratos fases
- El registro de la predicción: una tarea se dice que pertenece a este registro si tiene las características siguientes:
    - la información esta dada sólo en un marco, por ejemplo una ecuación diferencial o un portarretrato fase.
    - el problema a resolver requiere una solución en el otro marco, por ejemplo si se da una ecuación diferencial, se precisa dibujar su portarretrato fase, y si se da un portarretrato fase se debe crear una ecuación diferencial compatible cualitativamente con el portarretrato fase dado.

  Tareas típicas en este registro para una ecuación de la forma y´= f(x,y) son:
    - identificar, a partir de la ecuación diferencial, los invariantes geométricos del portarretrato fase.
    - dividir el plano de acuerdo al signo de f(x,y).
    - determinar algebraicamente los conjuntos abiertos del plano donde las condiciones de Cauchy-Lipschitz se cumplen e interpretar las propiedades correspondientes de existencia, unicidad y maximalidad de las soluciones en términos gráficos.
    - ligar las características de la ecuación diferencial y las asíntotas de las soluciones.

- El registro de la justificación (ver Hubbard y West, 1991, cap. 1)

  Tareas características en este registro son:
    - probar que una solución intersecta una curva dada
    - probar que una solución no puede intersectar una curva
    - probar que una solución tiene una asíntota.

Finalmente, Artigue (1992) reporta que las tareas de interpretación no presentaron problemas particulares de accesibilidad y que la actuación de los estudiantes a nivel de la predicción fue satisfactoria. Por el contrario, en el nivel de la justificación el porcentaje de éxito bajó sensiblemente debido, en gran parte, al hecho de que el marco gráfico es usado sólo como un sub-registro para la representación y nunca para la justificación.

Otro estudio, muy ilustrativo tanto en lo metodológico como por los resultados a que se llegan, es el de Rasmussen (1996). En este estudio, exploratorio e interpretativo, se investiga el pensamiento de una estudiante de Ciencias del Mar (Amy, con muy buenos antecedentes de cálculo y algún conocimiento de dinámica de poblaciones) en torno a los métodos de análisis cualitativos de EDO de primer orden, durante un curso introductorio siguiendo un enfoque cualitativo.

Las cuestiones por las que se interesa el autor son las siguientes: 1) ¿qué significa para esta estudiante analizar cualitativamente una ED de primer orden?, 2) ¿qué estrategias usa para relacionar un campo de pendientes y una ecuacion diferencial?, y 3)¿qué es lo que caracteriza su comprensión de la noción de estabilidad de una EDO de primer orden?.

La evidencia recogida señala: 1) que se ha desarrollado un conocimiento proceptual de las EDO adecuado, y 2) que una comprensión conceptual y gráfica profunda del concepto de la derivada, por una parte, y algún conocimiento de los procesos que modela una EDO, por otra, son factores que coadyuvan en la adquisición de los conocimientos y/o habilidades específicas para analizar e intepretar una EDO de primer orden usando los métodos cualitativos.

En efecto, este es el caso de Amy, quien posee un pensamiento flexible para usar las representaciones gráficas y simbólicas y usa su conocimiento de dinámica de poblaciones para dar sentido a las distintas representaciones graficas de las EDO.

Por lo tanto, es natural preguntarse, por ejemplo: ¿qué caracteriza el pensamiento y las dificultades de los estudiantes que no poseen una comprensión conceptual y gráfica adecuada de la derivada y que no tienen conciencia del poder de las ED para modelar fenómenos del mundo real?.

También, a pesar del éxito de Amy cuando analiza una EDO usando técnicas cualitativas, durante su trabajo surgen algunos conflictos potenciales nada desdeñables. Por ejemplo, extender la estrategia para encontrar soluciones constantes de ecuaciones autónomas a ecuaciones no autónomas, la conduce a considerar funciones que tienen pendiente cero cuando se aproximan a una asíntota vertical. Así, cuando considera las ecuaciones $\frac{dy}{dt} = t + 1$ y $\frac{dy}{dt} = y^2 + y$, afirma que la primera tiene una asíntota vertical en t=-1 y la segunda tiene una asíntota horizontal en y=0.

Otro estudio que contrasta con los de Artigue y Rasmussen es el realizado por Habre (2000) para evaluar el impacto sobre el pensamiento y conocimientos y/o habilidades de los estudiantes del curriculum reformado de las EDO. Aquí, la evidencia experimental señala que los efectos esperados en el pensamiento del estudiante son mínimos y, por el contrario, el conocimiento conceptual permanece fuertemente ligado a esquemas algebraicos.

Este estudio se llevó a cabo con estudiantes de tercer semestre (en su mayoría de Biología, Estadística, Química) al final de un curso de cálculo en el que se enfatizarón los aspectos geométricos y visuales de los contenidos de las EDO, haciendo muy poco análisis cuantitativo. Por ejemplo, la primera lección se dedicó al estudio cualitativo de la ecuación $y' = y^2 - t$, mostrando que ella no puede ser resuelta en términos de funciones de funciones elementales.

Un estudio previo sobre las habilidades para la visualización durante un curso de cálculo de varias variables, permitió seleccionar una muestra de 9 estudiantes con las características siguientes:

- Jim y Paul, prefieren la aproximación visual a la analítica porque ésta pemite obtener una idea general del problema.
- John, Grace, Justin, Bob y Jill, prefieren la aproximación analítica sobre la visual porque ella da respuestas exactas.
- Doug y Jack, dependiendo del problema, utilizarían una u otra aproximación.
- Además, un diagnóstico al inicio del curso permitio establecer que todos los sujetos, salvo Jim, tenían algún conocimiento de los métodos cuantitativos para resolver EDO sencillas, pero sólo Doug, Jack, Bob y Jill tenían algún conocimiento de los aspectos cualitativos elementales.

Durante la última semana del curso se realizo una entrevista a cada uno que incluia las cuestiones siguientes:

1. ¿En qué piensas primero cuando se te pide resolver una EDO?
2. Resuelve $y' = 2y - y^2$.
3. Resuelve $y' + ky = -t$, t un parámetro.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

- En la cuestión 1), todos los entrevistados (9/9) pensaron primero en buscar una solución analítica. Y sólo cuando se les pidio pensar otras altenativas, 6/9 considerarón el enfoque cualitativo. Pero de éstos últimos sólo 2/6 expresaron su beneplácito y satisfacción con él. Veamos:
  - Paul: "*También podríamos resolverla graficamente y no tendrías que encontrar una expresión*".
  - Doug: "*Seguro que hay otras fomas de resolve una EDO: graficando el campo de pendientes. Yo supongo que me siento cómodo, si, resolviéndola de esta manera*".

  Los otros 4/6, por diversas razones, expresaron ciertas reservas paa usar la aproximación geométrica. Veamos:

- Bob: "*Bien, no es usualmente en la foma que yo mismo pienso…cuando veo un problema por primera vez, no lo pienso geométicamente porque no es la foma en que mi mente trabaja*".
- Grace: "*Yo me siento mejor haciendo matemáticas que visualizandolas. Yo trabajo mejor de esa forma".*
- Jack: "*Yo creo que podría mira esa opción después de no ser capaz de encontrar una forma de resolverla*".
- Jill: "*Si puedo hacerlo de esta manera (analíticamente), yo lo haría de esta foma. No quisiera hacerlo (geométricamente) usando el ordenador*".

Evidentemente, estas respuestas muestran una renuencia de los estudiantes a aceptar el pensamiento visual.

- 3/9 rechazaron la aproximación geométrica debido a la creencia en el poder y superioridad de la respuesta simbólica frente a la gráfica:
    - Jim: "*Bien…yo podría hacer el gráfico, pero así no podría conocer la ecuación. Yo podría ser capaz de bosquejar la gráfica, pero eso sólo seía una conjetura*".
    - Justin: "*Una solución geométrica es algunas veces satisfactoria, pero no si puedo encontrar una solución analítica a partir de la cual tu puedes conocer todo*".
    - John: "*Los gráficos no te dan una solución, sólo te dan un dibujo. Si tienes una fórmula, ella te va a decir todo…un dibujo te da una idea general…Si tienes una fórmula, yo creo que tiende a ser mejor*".

- En la cuestión 2), otra vez todos (9/9) escogieron en primer lugar una aproximación analítica. Sólo después de fracasar en el intento de integrar $\int \frac{dy}{2y-y^2}$, 7/9 optaron por resolver el problema geométricamente; mientras los otros 2/9 insistieron en integrar para encontrar una fómula analítica para la solución de la EDO.

- En la cuestion 3), a pesar de haber fracasado con la ecuación de variables separables, todos los entrevistados escogieron la aproximación analítica. Y con alguna guía todos obtienen la respuesta simbólica $y = \frac{C}{e^{kt}} - \frac{t}{k} + \frac{1}{k^2}$. Sin embargo, debido a la presencia en la fórmula de y de la constante C y el parámetro k, ninguno fue capaz de intepretar la fórmula obtenida. Veamos:

  Jim: *Nada! (la solución no dice nada)*

  I: *¿Por qué nada?*

  Jim:*Porque tu no sabes quien es k*

  I:*Supongamos que sabemos que k es, digamos k=1*

  Jim: *Ok, así la fórmula va a ser* $-t+1+\frac{C}{e^t}$

  I:*Ahora, sabrías decir cómo es la solución?*

  Jim: *Ummm…bien…como…No!*

Por lo tanto, ante la tarea de resolver una EDO, todos los entrevistados en primer lugar intentan una aproximación cuantitativa. Así, a pesar de que el curso tuvo una orientación cualitativa, en la mente de los estudiantes la idea de resolver una EDO pemanece anclada en los aspectos algebraicos. Para todos los entrevistados, una solución necesita tener una fórmula algebraíca explicíta; 7/9 mostraron algunas reservas con la aproximación geométrica y,sorprendentemente, ninguno tuvo éxito en relacionar los aspectos algebraicos y geométricos de la ecuación $y' = 2y - y^2$.

1.9 Las Concepciones del Profesor

Sin duda los estudios anteriores nos presentan un panorama atractivo que está cambiando la enseñanza del primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias tanto en carreras de matemáticas como no matemáticas. Sin embargo, en muchas realidades educativas (como aquella en la que se enmarca este trabajo) esos argumentos y experiencias no son muy convincentes como consecuencia de las restricciones institucionales obvias y, esencialmente, del pensamiento dominante del profesor universitario.

Evidentemente, el estudio del funcionamiento de los sistemas didácticos presupone, ya sea explícita o implícitamente, ciertas concepciones ontológicas y epistemológicas de las propias matemáticas y de los procesos psicosociales que tienen lugar en la formación de los conocimientos matemáticos. Estas concepciones influencian y actúan como filtros en la investigación didáctica y en el diseño y desarrollo del currículo de matemática, hasta el grado de convertirse o bien, en obstáculos o, por el contrario, en puntos fundamentales de cualquier proceso de cambio curricular que pretenda una nueva manera de pensar sobre el conocimiento matemático y una nueva práctica sobre qué y cómo se enseña (Arrieta, 1997; Gascón, 1999; Lladó y Jorba, 2000). "*Las ideas que los alumnos se forman de la naturaleza de las matemáticas y las que tienen los profesores influyen de forma extremadamente importante en cómo unos y otros conciben la actividad matemática que hay que realizar en las clases y los conocimientos que unos elaboran y los otros pretenden enseñar*"(Puig, 1997, p. 65).

Por ejemplo, Dreyfus y Eisenberg (1986) en un estudio con profesores de matemáticas solicitaron a éstos resolver ciertos problemas en los que tanto los métodos analíticos como los gráficos eran igualmente probables. La tendencia general fue abordar los problemas y procesar la información en términos analíticos, mostrando que carecían de un pensamiento visual/gráfico. En particular, se les pregunto cómo resolverían $\int_{-3}^{3} sen(x)\left[cox(x)+3x^2-xsen(x)\right]dx$.

Todos afirmaron que primero intentarían el método de integración por partes o de sustitución, pero ninguno se dio cuenta, en principio, que la integral es cero debido a la imparidad de la función y la simetría del intervalo de integración. Así, los autores preguntan: ¿cómo puede esperarse que los estudiantes desarrollen sus habilidades para la visualización si en el pensamiento de sus profesores ésta no juega un papel relevante? (ver Eisenberg, 1991).

En este mismo sentido, en el estudio de Moreno y Azcárate (1997) acerca de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias a estudiantes de química y biología, encontramos algunas expresiones de los profesores que nos parecen representativas del pensamiento dominante entre los profesores universitarios y señalan las restricciones institucionales:

"(...)aunque tiramos un poquito del modelo, nosotros no podemos tirar mucho; más que nada por el objetivo en el que se enmarca una asignatura como ésta. A este nivel, las matemáticas se toman de forma subsidiaria; los estudiantes hacen acopio de herramientas técnicas y se refuerza el aprendizaje de estas técnicas"(p.26)

"Los estudiantes están de aprendices y en este "taller" se les dice cómo se maneja el serrucho. Luego, más adelante ya se les dirán por qué se maneja de esa forma y no de otra, cuál es la utilidad y sus aplicaciones; aquí la motivación se queda en el modelo, y no podemos tirar mucho de él.(...) a ti te dicen que tienes que dar un sumario de técnicas y de herramientas sin motivarla y sin encontrar la gracia que tiene todo eso"(p.28)

"(...)EDO de primer orden: son de este tipo...se resuelven de esta forma...!pero se resuelven!, no se "prueba que se resuelven". A continuación tienen una lista de problemas muy extensa, no sé cuantos, pero, desde luego, 500 seguro"(p.28)

"En general el método gráfico es una tontería, pero trae mucha información...Sobre todo tiene interés para los problemas no lineales.

Dependiendo del problema, trataría de usar uno u otro método. Veo todos los métodos sencillos"(p. 28).
"(...)Considero que los automatismos y la rutina es importantísima. Parece ser que la rutina es un término peyorativo pero, para mí, en esta asignatura es fundamental, porque precisamente e slo que estamos inculcando; equivocado o no, pero es así"(p. 30).
"Sólo vemos los métodos de resolución algebraica, los numéricos no se ven en esta asignatura y los gráficos ni siquiera decimos que existen"(29).
"Conceptualmente creo que el método bueno es el algebraico. El método numérico, si no tienes bien trillado el planteamiento algebraico, creo que sería complicado. Desde el punto de vista metodológico y conceptual, el método numérico debe recurrirse como tal recurso, no como planteamiento previo. El método gráfico se usa poco, parece que es un complemento para ver las cosas, pero no algo en sí mismo bueno"(p.29).

Obviamente, estas concepciones sustentan las decisiones últimas respecto a todo lo que supone la práctica docente: planificación, metodología, diseño y gestión de situaciones de aprendizaje, evaluación, etc. Y como lo reporta Moreno (2000, p.380), la persistencia de los métodos de enseñanza tradicional frente a alternativas más novedosas de enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias puede explicarse por: a) una fuerte creencia - entre los profesores- sobre el pobre nivel de competencia matemática de los estudiantes que les hace considerar como impensable cualquier otro enfoque que ponga al estudiante en situación de pensar y razonar más allá de los aspectos básicos que acaba memorizando y mecanizando, b) una concepción de las matemáticas, y en particular de las ecuaciones diferenciales, muy formalista que sobrevalora la manipulación simbólica frente al tratamiento numérico y gráfico de las ecuaciones diferenciales, como principio incuestionable del aprendizaje significativo, y c) miedo a la perdida de los contenidos específicos de lo que algunos profesores consideran las "matemáticas de verdad" a favor de contenidos y técnicas propias de las matemáticas aplicadas, que no tienen la misma consideración que las matemáticas puras, tradicionales y "de toda la vida".

Por su parte, Gascón (1999) teoriza sobre la incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas, implícito pero dominante en una institución escolar, sobre los estilos docentes imperantes en esa institución (formas sistemáticas y compartidas de gestionar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas). Agrega que estos estilos docentes no son estilos docentes puros y que perviven entremezclados en las actuales instituciones didácticas. Y que en la medida que cada uno de ellos se muestra reduccionista en tanto que privilegian sólo algunas dimensiones de la actividad matemática, consecuencia del modelo epistemológico general de las matemáticas subyacente, se hacen necesarios nuevos modelos epistemológicos capaces de servir de referencia a estilos docentes menos reduccionistas. Para Gascón, este nuevo modelo epistemológico es el modelo antropológico, en el que confluyen la problemática epistemologica y la didáctica: "*Ya no puede hablarse de estilos docentes independientes de la naturaleza de la disciplina objeto de estudio (puesto que la dimensión epistemológica ya no puede ser ignorada en el problema didáctico) ni de modelos epistemológicos que pretendan dar cuenta únicamente de la estructura, la génesis y el desarrollo del conocimiento matemático a un nivel lógico, histórico y psicogenetico; es imprescindible incluir la dimensión didáctica dentro del problema epistemológico."*(Gascón, 1999, p.25).

Con el modelo epistemológico euclidiano[24], Gascón (1999), asocia los estilos docentes *teoricista (o teoricismo) y tecnicista (o tecnicismo)*; con el modelo epistemológicos cuasi-empírico[25] los estilos docentes *modernistas (modernismo)*

[24]El Programa Euclídeo propone que todo conocimiento matemático puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (axiomas) que constan de términos perfectamente conocidos (términos primitivos). La verdad de los axiomas fluye entonces desde los axiomas hasta los teoremas por los canales deductivos de transmisión de la verdad (pruebas). Se pretende así proporcionar una roca firme al conocimiento matemático que detenga cualquier suposición de regreso al infinito (Lakatos, 1981).

[25]Lakatos (1981) caracteriza las teorías cuasi-empíricas, en contraposición a las teorías euclídeas, como sigue: si llamamos enunciados básicos a los enunciados de un sistema deductivo a los que se inyecta valores de verdad, entonces un sistema es euclídeo si es la clausura deductiva de los enunciados básicos que se asumen verdaderos. En caso contrario, es un sistema cuasi-empírico, es decir, existen enunciados (verdaderos o falsos) que no se deducen de los enunciados básicos verdaderos. De una teoría euclídea puede afirmarse que

y procedimentalistas (procedimentalismo); y con la epistemología constructivista[26] asocia muchos estilos docentes constructivistas y, dos variantes ideales extremas, son el *constructivismo psicológico* y e*l constructivismo matemático.* En la tabla siguiente se resumen las principales características de cada estilo.

Modelo epistemológico	**Estilos Docentes asociados (extremos)**	**Características**
Euclidiano	Teoricismo	• identifica enseñar y aprender matemáticas con enseñar y aprender teorías acabadas menospreciando el dominio que pueda tener el estudiante de las técnicas matemáticas, que se suponen están determinadas por la teoría. • el proceso didáctico empieza y acaba en el momento que el profesor muestra esas teorías. • su referente psicológico es el conductismo y considera al alumno como una caja vacía que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual que parte de los conceptos lógicamente más simple hasta llegar, paso a paso, a los más complejos. • Los problemas matemáticos se tratan aislados y descontextualizados
	Tecnicismo	• Identifica enseñar y aprender matemáticas con enseñar y aprender técnicas algorítmicas, con énfasis en técnicas simples • Su referente psicológico es el conductismo y considera al alumno un autómata que mejora el dominio de las técnicas mediante una simple repetición que proporciona un entrenamiento concienzudo. • Los problemas matemáticos se tratan aislados y descontextualizados

es verdadera; de una teorí cuasi-empírica, a lo sumo, que está bien corroborada pero sin dejar de ser conjetural.

[26]La epistemología constructivista explica el desarrollo del conocimiento matemático mediante nociones análogas a las utilizadas para describir el desarrollo psicogenético. En particular tiende a identificar el saber matemático con la actividad histórica-psicogenética de construcción de estructuras matemáticas cada vez más complejas mediante un proceso que usa como instrumento la tematización reflexiva o abstracción reflexiva que desemboca en la generalización completiva, y cuyo mecanismo principal de desarrollo viene marcado por las sucesión de etapas intra-, inter-, y trans-, presentes en todos los dominios y en todos los niveles (ver sección 1.5).

Modelo epistemológico	Estilos Docentes asociados (extremos)	Características
Cuasi-empírico	Modernismo	• Identifica la actividad matemática con la exploración de problemas no triviales, tipo olimpiadas. • Considera que el proceso de aprendizaje es un proceso no trivial, de descubrimiento inductivo y autónomo. • Los problemas matemáticos se tratan aislados y descontextualizados, ocultándose el entorno matemático en el que viven los problemas.
	Procedimentalismo	• se centra en el problema didáctico de posibilitar el diseño, la utilización y el dominio de estrategias complejas de resolución de problemas, tratando únicamente clases prefijadas de problemas
Constructivista	Constructivismo psicológico	• postula implícitamente que la construcción de los conocimientos se lleva a cabo mediante un proceso puramente psicológico y no de una actividad con relevancia matemática en sí misma. • la resolución de problemas sirve sólo como un medio para construir nuevos conocimientos
	Constructivismo matemático	• interpreta aprender matemáticas como un proceso de construcción de conocimientos matemáticos (relativos a un sistema matemático o extramatemático) que se lleva acabo mediante la utilización de un modelo matemático de dicho sistema. • la descontextualización de los problemas desaparece hasta el punto de llegar a identificarse el objetivo de resolución de problemas, con la obtención de conocimientos sobre el sistema modelizado

CAPITULO 2: Metodología de la Investigación

2.1 Presentación

En esta sección se describe la metodología de investigación que se ha empleado, los instrumentos y las herramientas de análisis de los datos.

Desde la perspectiva de quien pretende iniciarse en la investigación didáctica, creemos que es sumamente formativo tratar de explícitar aquellos supuestos básicos subyacentes a toda investigación en el área del pensamiento matemático avanzado, supuestos que tienen sus orígenes en la psicología cognitiva.

Insistimos que nuestra intención es encontrar evidencias que nos sugieran propuestas didácticas alternativas al estado actual de la enseñanza del primer curso de las EDO en la cual predominan las técnicas algebraicas-algorítmicas.

2.2 Descripción de la Metodología

Las dificultades de los estudiantes nos llevan a preguntarnos qué es lo que esos alumnos tienen en sus cabezas y por qué piensan de esa manera. Hoy se sabe que las cabezas de los alumnos no son una tabla rasa en donde pueden ser "colocadas" informaciones, de forma arbitraria. De una manera o de otra cualquier información nueva que una persona recibe interactúa con aquello que ya sabe y el producto de esa interacción, resultante en nuevos significados, podría ser definido como aprendizaje. Es por esta razón que conocer cómo las personas representan internamente el mundo y cómo re-presentan internamente las informaciones que reciben resulta esencial tanto para saber lo que es la cognición cómo para elaborar nuevas propuestas didácticas. En este sentido, la Psicología cognitiva, en oposición al conductismo, remite la explicación de la conducta a entidades mentales, procesos y disposiciones de naturaleza mental - que conforman una estructura cognitiva mediadora entre los antiguos estímulos y respuestas conductistas.

El hecho de plantear la existencia de una estructura de representación determina un presupuesto básico de la Psicología cognitiva: las funciones mentales, las funciones del conocimiento, no están determinadas solamente de "abajo hacia arriba" (procesos denominados "bottom up") sino que, en mayor o menor grado, están determinadas por procesos de arriba hacia abajo (procesos llamados "top down").

También en la investigación bajo el PMA, la existencia de esta estructura mediadora es una idea fundamental: los estudiantes perciben, piensan y actúan sobre una situación problema o un concepto matemático en base a los esquemas conceptuales que tienen sobre él (Vinner y Tall, 1981; Tall, 1991).

Así, siguiendo estas directrices, nos surgen de manera natural las preguntas siguientes:

- ¿Cómo investigar los esquemas conceptuales que poseen unos determinados individuos acerca de un concepto matemático? o, más específicamente, ¿Cómo estudiar la interacción entre las nociones de esquema conceptual y definición del concepto en el proceso de construcción de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes?.

- ¿Cómo construir modelos teóricos que describan o expliquen los esquemas conceptuales compartidos por varias personas?

En este sentido, Vinner (1991) escribe: " *A natural method to learn about somebody's concept definition is by a direct question (what is a function? What is tangent? And so on). This is because definitions are verbal and explicit. On the other hand, in order to learn about somebody's concept image usually indirect questions should be posed, as the concept image might be non-verbal and implicit"* (p. 74).

En Azcárate (1998) encontramos dos premisas básicas:

- Los esquemas conceptuales de las personas pueden inferirse a partir de sus comportamientos y verbalizaciones.

- El análisis de las respuestas de los estudiantes permite establecer *perfiles,* esto es, una caracterización de los esquemas conceptuales.

En consecuencia, se sigue que hay que dedicar mucho tiempo a observar y comprender las ideas, verbalizaciones y comportamientos espontáneos de los estudiantes cuando se enfrentan con situaciones-problemas: ¿Qué dicen? ¿Cómo se expresan? ¿Qué hacen? ¿Cómo lo hacen? ¿Qué entienden? ¿Cómo lo entienden?, etc.

En (Azcárate, 1998; Dreyfus y Vinner, 1989; Pinto y Tall, 1999, 2001; Tall, 1981; Vinner, 1991;) encontramos algunas experiencias de investigación que ilustran muy bien la metodología de los esquemas conceptuales.

Por ejemplo, en Dreyfus y Vinner (1989) se estudia la definición y los esquemas conceptuales del concepto de función en 307 sujetos (307 = 271 universitarios de primer año + 36 profesores de secundaria). Después de un análisis exploratorio de las respuestas obtenidas en 50 cuestionarios, escogidos al azar, establecen algunas categorías para cada noción. Las categorías para los esquemas conceptuales que se obtuvieron de los aspectos del concepto de función que los sujetos usan en sus explicaciones para decidir si una correspondencia es o no una función, se muestran en la figura siguiente.

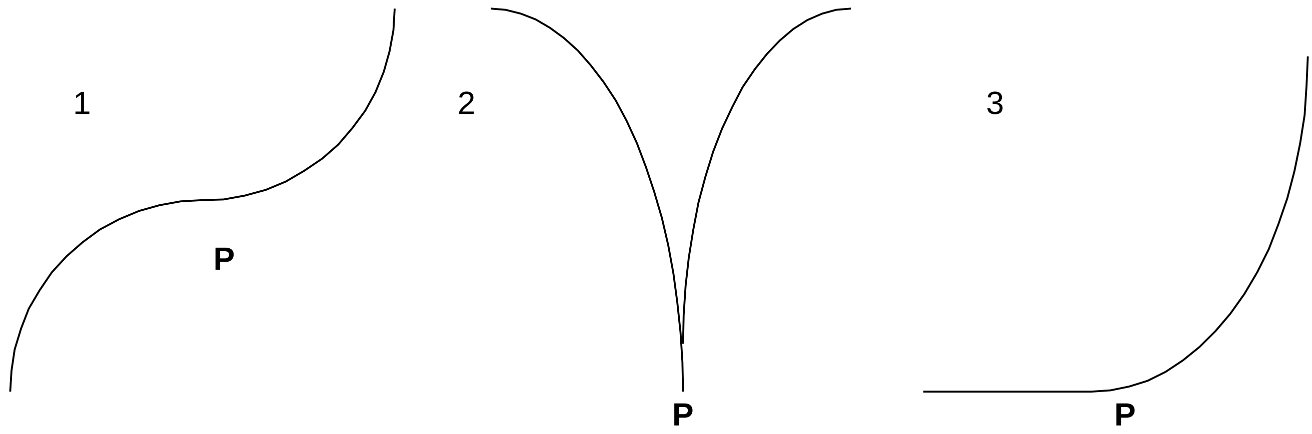
Una función es una...

- correspondencia (en el sentido de la definición de Dirichlet-Bourbaki) (27%)
- relación de dependencia entre dos variables (26%)
- regla con alguna regularidad, diferente de una correspondencia que es arbitraria; no se mencionan los terminos dominio y codominio. (10%)
- operación o una manipulación que actúa sobre un número para obtener su imagen (5%)
- fórmula, expresión algebraica o ecuación (10%)
- representación, gráfica o simbólica (8%)
- otras respuestas (14%)

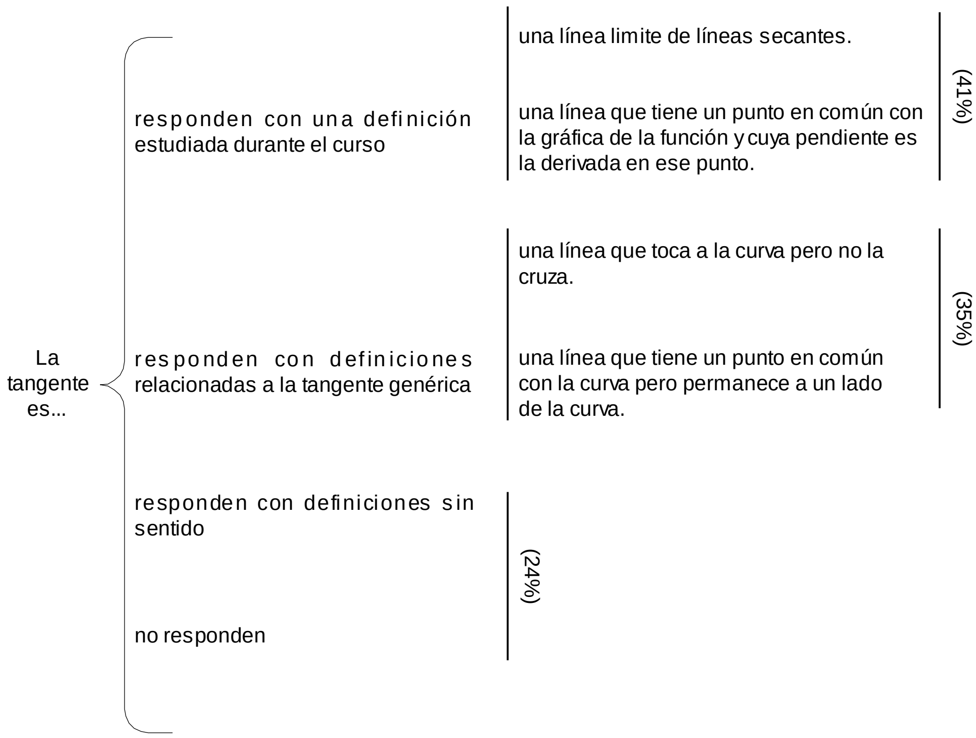
Es o no función porque es (o tiene)...

- correspondencia univaluada: si asigna un valor a cada elemento de su dominio es función y, de otra manera, no lo es.
- discontinuidad: la gráfica tiene un hueco o la correspondencia es discontinua en un punto de su dominio.
- dominio partido: si el dominio se se subdivide, se puede definir una regla en cada parte y, en concsecuencia, la gráfica puede cambiar su carácter o comportamiento.
- punto excepcional: hay un punto para el cual la regla general de correspondencia no se cumple.
- otras
- no da explicaciones

En este mismo sentido, en Vinner (1991) se reporta un estudio del concepto de tangente en 278 universitarios de ciencias de primer año que cursaron la asignatura de cálculo. Para realizar una aproximación a los esquemas se solicito a los estudiantes dibujar las tangentes en el punto P en cada una de las curvas que se muestra en la figura siguiente:



También se pidió que escribieran la definición del concepto de tangente personal. Las respuestas obtenidas se muestran en la red siguiente.



Las respuestas obtenidas sugieren las categorías siguientes, que desvelan los esquemas conceptuales subyacentes.

Esquemas conceptuales	Problema/ N= 278		
Categorías	1	2	3
Dibuja la tangente correcta	18 %	8 %	12 %
Dibuja la tangente genérica	38	0	33
Dibuja dos tangentes	6	18	16
Dibuja más de dos tangentes	0	18	7
Otras	10	14	4
No responde	28	42	27

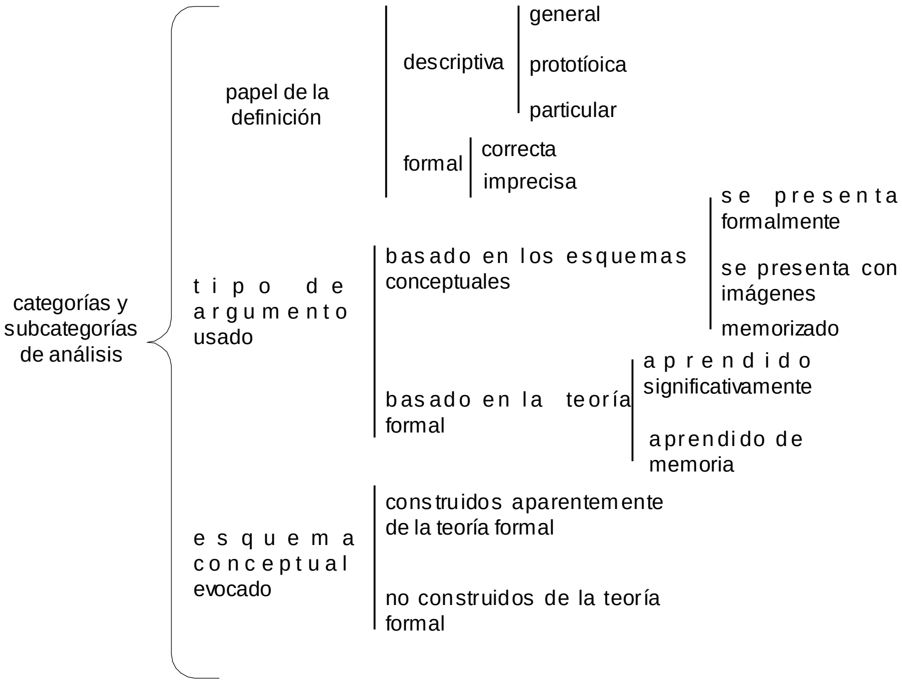
Por su parte, Azcárate (1990, 1998) establece ciertos perfiles que caracterizan los esquemas conceptuales para el concepto de pendiente de una recta y los conceptos de velocidad instantánea y tasa instantánea de variación de una función.

Perfiles de los esquemas conceptules del concepto de pendiente d e una recta

- 1 geométrico
  - sinónimo de inclinación sin añadir ninguna explicación más, significado muy próximo al lenguaje común.
  - inclinación respecto a.
  - tangente trigonométrica.
  - otros aspectos (puntos de intersección con los ejes, ordenada en el origen, etc.).
- 2 operativo
  - un algoritmo operativo para calcular.
  - el coeficiente "***a***" en la fórmula ***y=ax+b*** o la propia fórmula.
- 3 funcional
  - una correspondencia entre los incrementos de las variables; hay una idea cinética y una relación de causa-efecto.
- 4 mixto (que combinan algunos de los tres perfiles anteriores).
  - 1+2+3
  - 1+2
  - 1+3
  - 2+3

- Perfiles de los esquemas conceptuales de los conceptos de velocidad instantánea y variación instantánea de una frunción en un punto P
  - primitivo
    - expresión verbal
      - velocidad es igual al espacio dividido por el tiempo, sin precisar el significado de los términos.
      - no hacen referencia a la variación instantánea.
    - expresión simbólica
      - utilizan la fórmula **v=e/t,** sin precisar el significado d elos símbolos.
      - no utilizan ninguna fórmula
    - representación gráfica
      - velocidad en un punto P
        - es un segmento OPque une el origen yP.
        - ninguna representación.
      - ninguna representación para la tasa instantánea de variación.
    - determinación de puntos de máxima variación
      - gráficas de movimiento
        - mencionan la relación entre espacio ytiempo.
        - aluden a la forma o inclinación de la gráfica.
      - gráfica de una función
        - se refieren a la forma, inclinación o pendiente de la curva.
    - criterio de comparación
      - velocidades: si recorre igual (mayor/menor) espacio, tiene la misma (mayor/menor) velocidad.
      - para t.i.v: por la forma, la inclinación o la pendiente de la curva.
  - aproximación
    - expresión verbal
      - la v.i en P se obtiene por aproximación de la v.m entre P yotro punto próximo P'.
      - la t.i.v de una función en P se obtiene por aproximación de la pendiente de la secante PP'
    - expresión simbólica
      - utilizan v(P) para la v.i en P y v(PP') para v.m entre P y P'
      - utilizan t.i.v(x1) y t.v.m(x1,x2) para la variación media e instantánea en P(x1,y1) y P(x2,y2).
    - representación gráfica
      - una recta secante que pasa por P y un punto próximo P' junto con los incrementos correspondientes.
    - recursos y procedimientos de comparación
      - criterio para velocidades: para tiempos iguales, a mayor espacio, mayor velocidad.
      - citerios para la t.i.v
        - para incrementos iguales de la variable independiente, a mayor incremento de la variable dependiente, mayor t.m.v
        - para incrementos iguales de la variable dependiente, a mayor incremento de la variable independiente, menor t.m.v
    - determinación de puntos de máxima variación
      - gráficas de movimiento
        - utilizan los mismos criterios que para la comparación.
        - aluden a la forma o inclinación de la gráfica.
      - gráfica de una función
        - se refieren a la forma, inclinación o pendiente de la curva.
  - límite
    - expresión verbal
      - la v.i en un punto de la gráfica es la pendiente de la recta tangente en dicho punto.
      - la t.i.v de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en dicho puntro.
    - expresión simbólica
      - utilizan
        - v(P)=m/n
        - t.i.v(P)=m/n, m y n son los incrementos en y , x tomados sobre la tangente.
      - no utilizan ninguna cuando razonan directamente sobre la gráfica.
    - representación gráfica
      - la tangente a la gráfica en el punto P y un triángulo rectángulo de catetos m y n.
    - determinación de máxima variación y criterios de compración
      - gráficas de movimiento
        - la v.i es mayor(menor/igual) si la pendiente de la tangente es mayor (menor/igual).
      - gráfica de una función
        - la t.i.v de una función es mayor (menor/ igual) si la pendiente de la tangente es mayor (menor/igual).

Finalmente, Pinto y Tall (1999, 2001) consideran la interacción entre las nociones de esquema conceptual y definición del concepto para estudiar cómo los estudiantes reconstruyen los contenidos impartidos durante un curso tradicional de análisis real de 20 semanas. En un primer momento, los datos sugieren las categorías y subcategorías siguientes:



A partir de esto se observa que existen básicamente dos aproximaciones para construir los conceptos formales:

- Una que consiste en *dar significado* a las definiciones formales a partir de los esquemas conceptuales ya existentes, y
- Otra que consiste en *derivar significado* de las definiciones formales a través del método axiomático-deductivo.

Dar significado tiene que ver con usar ideas claves personales para interpretar e enriquecer la definición con ejemplos e imágenes visuales. Y derivar significado implica rutinizar la definición, tal vez por simple memorización, antes de usarla en las argumentaciones y deducciones. En ambas aproximaciones los estudiantes construyen sus propias definiciones e intentan crear o reproducir de manera significativa los argumentos formales. Esto conduce a una variedad de matices y a un espectro de éxitos y fracasos en las producciones de los estudiantes, cuyos extremos son estas dos aproximaciones. Las características principales de cada modo o aproximación se muestran en la tabla.

Aproximación	Construcción del concepto			
Estrategias	Características	Definiciones	Argumentos	Imágenes
Dar significado (a partir de ideas informales)	1. Obtener el nuevo conocimiento por reconstrucción del viejo. 2. Interpretar el nuevo conocimiento en términos del viejo.	1. Formal: • Correcta • Imprecisa 2. Descriptiva: • General • Prototípica • particular	1. basado en experimentos mentales: • presentados formalmente • bssados en imágenes 2. aprendidos de memoria	1. reconstruidas con la teoría formal 2. las imágenes viejas son retenidas 3. las nuevas ideas se agregan como información extra 4. conflicto ntre viejas y nuevas ideas
Derivar Significado (a partir de la teoría formal)	Rutinizar: • De manera reflexiva • De manera mecánica Puede permanecer compartimentalizado o ser relacionado después al conocimiento viejo	Formal: • Correcta • imprecisa	Basados en la teoria formal: • de manera significativa • aprendidos de memoria	Basadas en la teoría formal: • compartimentalizadas • relacionadas

Algunos estudiantes trabajan con las dos aproximaciones, pero existe una que es la dominante y en la que ellos se muestran más seguros. Posteriormente, con el objeto de profundizar en el análisis de los datos, Pinto y Tall (2001) utilizan dos rutas de aprendizaje denominadas formal y natural.

- En la ruta de aprendizaje formal los conceptos se construyen básicamente de las definiciones y la aplicación del método deductivo. Los estudiantes apoyan sus construcciones con representaciones proposicionales. Sin embargo, los estudiantes que tienen poco o ningún éxito suelen centrarse más en la manipulación simbólica que en la lógica.
- En la ruta de aprendizaje natural los conceptos formales se construyen a partir de reconstrucciones de los esquemas conceptuales para interpretar y asimilar, de una manera idiosincrática, las definiciones y las deducciones. Cuando los esquemas conceptuales no son flexibles se genera un rechazo o un conflicto con la teoría formal.

En cada ruta se hace uso tanto de las definiciones como de los esquemas conceptuales, pero existe una tendencia muy fuerte a privilegiar uno de estos modos, que es lo que caracteriza a esa ruta.

En cada ruta se establecen tres niveles de desarrollo: 1) los obstáculos iniciales, 2) el modo de construcción de la teoría y 3) la teoría construida (ver tabla).

	Rutas de aprendizaje	
	Formal	Natural
1 Obstáculos iniciales	La aproximación rutinaria (basada en las definiciones): (a) divorciada de las imágenes y centrada en reglas y procedimientos parciales y definiciones memorizadas.	La aproximación informal (basada en los esquemas conceptuales): (a) rechazo de la teoría formal y se mantienen los esquemas (b) se incorpora la teoría formal con algún conflicto

	Rutas de aprendizaje	
	Formal	Natural
2 Modo de construcción de la teoría	Construcción formal con alguna evidencia de mecanización reflexiva	Reconstrucción formal (con algún conflicto) (a) experimentos mentales, recontrucción de esquemas (b) se hacen deducciones para reconstruir la teoría formal
3 Teoría construida	Conocimiento deductivo formal	Conocimiento formal integrado con los esquemas conceptuales personales

2.3 Participantes de la investigación

Así, siguiendo las pautas metodológicas delineadas en la sección anterior, se pretende en este trabajo describir y aproximar los esquemas conceptuales en torno a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de un grupo muy concreto y especifico de estudiantes. Y para este fín, se adopta una metodología de orientación cualitativa, a saber: El estudio de casos.

El caso de estudio lo constituyen 4 estudiantes[27] (Iris, Maribel, Alex y Mario) de la Licenciatura en Matemática de la Escuela de Matemática de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador que cursaron la asignatura Ecuaciones Diferenciales I (EDI) en el ciclo I, durante los meses de febrero y junio del año 2000. La duración de la asignatura fue de 18 semanas.

Además, para efectos de contrastación, nos pareció interesante tomar en cuenta algunas ideas alrededor del tema de investigación de un estudiante que no hubiera cursado todavía la asignatura de ecuaciones diferenciales (pero que si hubiera cursado asignaturas de calculo diferencial e integral) y de otro que,

[27] Es importante decir que la mayoria de estudiantes salvadoreños que ingresan a la Universidad, no han tenido antes ningún contacto con los métodos y conceptos del cálculo diferencial e integral.

habiendo cursado la asignatura, ya hubiera egresado de la carrera. Así, contactamos con 2 sujetos más (Rigo y Luis) que accedieron a colaborar con nuestra investigación (en realidad, solo en parte: Rigo respondió los dos pimeros problemas del cuestionario ligeramente modificados, y Luis accedió a una entrevista alrededor de los otros dos problemas). En total, nuestra muestra de estudio se compone de 6 sujetos.

En definitiva, creemos que este estudio satisface las cuatro propiedades esenciales del estudio de casos que señala Merrian (citado en Latorre y col., 1996): particular, descriptivo, heurístico e inductivo. Es particular en cuanto se centra en un grupo especifico de estudiantes; es descriptivo porque pretende realizar una rica y densa descripción del fenómeno objeto de estudio; es heurístico en tanto que el estudio nos iluminará en la comprensión del caso, nos ayudara a descubrir nuevos significados, a ampliar nuestra experiencia o a confirmar lo que ya sabemos; y es inductivo, puesto que llegaremos a generalizaciones, conceptos o hipótesis a través de procedimientos inductivos.

La tabla siguiente nos muestra las características de los sujetos:

Características de los sujetos de investigación (Estudiantes de Licenciatura en Matemática)			
Sujeto	**Edad**	**Nivel de estudios**	**Observaciones**
Iris	21	V ciclo	Réprobo la asignatura de ED.
Maribel	19	V ciclo	Réprobo la asignatura de ED.
Alex	20	V ciclo	Aprobó la asignatura de ED.
Mario	21	V ciclo	Aprobó la asignatura de ED.
Rigo	18	III ciclo	Fue estudiante sobresaliente en cálculo.
Luis	28	Egresado	Ha enseñado cálculo y ED en la universidad. Curso sólo una asignatura de ED durante la carrera.

También el programa de la asignatura permite delimitar el contexto académico en el que se realiza este trabajo. Este lo confoman los primeros 6 capítulos del libro “*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*” de Dennis Zill (ver anexos 2 y 3). El planteamiento metodológico es esencialmente algebraico/algorítmico, con algunas dosis muy típicas de aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, pero con muy pocas articulaciones entre las representaciones algebraicas y gráficas. De hecho, la idea dominante entre el profesorado es que un primer curso de EDO tiene que ser la continuación algebraica de los cursos de cálculo diferencial e integral que, por un lado, desarrolla nuevos procedimientos algebraicos para encontrar primitivas y, por otro, permite consolidar los conocimientos y/o habilidades algorítmicas ya adquiridos relativos a la diferenciación y la integación.

Básicamente se estudian: 1) métodos de resolución y aplicaciones de EDO de primer orden, 2) métodos de resolución de ecuaciones de orden supeior, 3) aplicaciones de ecuaciones de segundo orden y 4) soluciones en serie. Por otra parte, es de destacar que no se incluyen temas como la Transformada de Laplace, los sistemas de ecuaciones diferenciales ni los métodos geométricos elementales para resolver EDO.

2.4 Instrumentos de recogida de información

Para la recogida de información se utilizan básicamente dos instrumentos: 1) El cuestionario, y 2) La entrevista grabada. También, en alguna medida, se revisan el programa de la asignatura y el libro de texto.

2.4.1 El cuestionario

El objetivo general del cuestionario es recoger información sobre cómo los estudiantes utilizan sus conocimientos de calculo, los resultados teóricos y los métodos geométricos elementales[28] de las ecuaciones diferenciales ordinarias para examinar y visualizar gráficamente el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial, sin necesidad de encontrar una formula para dichas soluciones. Para esto, se han escogido cuatro problemas que pueden

[28] Por métodos geométricos elementales entendemos aquellos que combinan: 1) campos de pendientes o de direcciones, 2) isoclinas, 3) determinación de zonas de crecimiento y decrecimiento, 4)determinación de

resolverse usando sólo lápiz y papel y que demandan de los estudiantes relacionar los cuadros algebraico y gráfico. El tiempo estimado para responder el cuestionario es de 2 horas.

Los objetivos específicos de investigación del cuestionario son:

- Observar el comportamiento del estudiante ante la demanda de graficar la solución de una ecuación diferencial: ¿qué hace? ¿cómo lo hace? ¿qué entiende por solución? ¿cuáles son las dificultades encontradas?.
- Observar cuáles son las relaciones que se establecen entre una ED dada en el registro algebraico/analítico y una solución en el registro gráfico/geométrico.
- Observar cuáles son las relaciones que se establecen entre una ED dada en el registro gráfico/geométrico y una solución en el registro gráfico/geométrico.
- Examinar las ideas gráficas/geométricas en torno al concepto de la derivada.
- Observar la información relevante que se lee o extrae de una gráfica.
- Observar cómo el cambio de registro en el planteamiento del problema influye en el comportamiento del estudiante.

La validación de los poblemas del cuestionario se obtuvo a través de consultas con expertos en el área (profesores de matemática que han enseñado EDO).

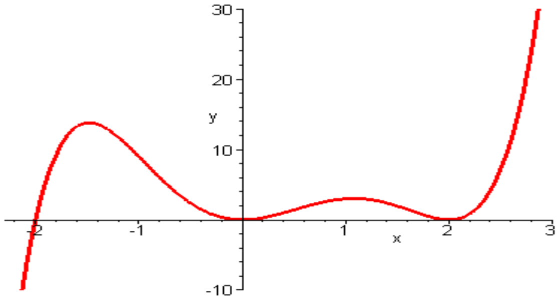
---

zonas de convexidad y concavidad, 5) identificación de puntos máximos y mínimos y puntos de inflexión, 6) identificación de soluciones de equilibrio, y 7) líneas de fase.

1. Considera la ecuación diferencial dada por $\frac{dy}{dx} = x^2(x-2)^2(x+2)$.

   Bosqueja la gráfica de la curva solución que pasa por el punto (0, 1) y explica tu construcción.

2. Considera la ecuación diferencial dada por $\frac{dy}{dx} = g(x)$, donde g(x) es el gráfico de la función polinomial de la figura de abajo.



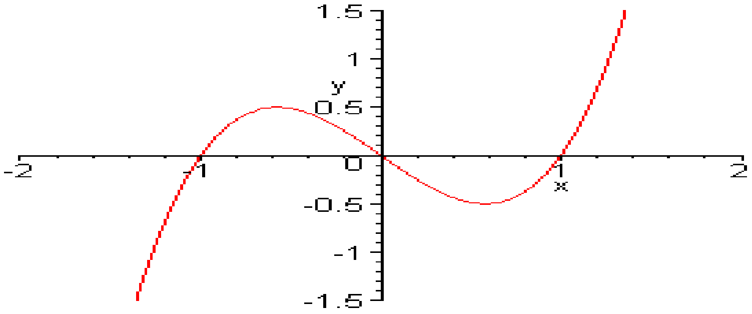
Bosqueja la grafica de la solución que pasa por el punto (0, -1)

3. Considera la siguiente ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = sen(y(t))$.

3.1. Bosqueja la grafica de la curva solución que pasa por el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y escribe todas las suposiciones que hagas y hechos que utilices.

3.2 Encuentra $\lim_{t \to \infty} y(t)$.

4. Considera la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = f(y)$, donde el gráfico de f(y) esta dado en la figura abajo.



4.1 Bosqueja la grafica de la solución que pasa por el punto (0, ½).

4.2 Encuentra $\lim_{t \to \infty} y(t)$.

Descripción del Cuestionario

Problema	Fuente	Descripción del problema	Conocimientos y/o habilidades	Objetivo de investigación
1	original	Graficar una solución de una E.D a partir de las propiedades de la primera derivada en el registro algebraico/analítico.	• Saber el significado geométrico de la primera y segunda derivada. • Determinar los intervalos donde la solución es creciente y decreciente. • Determinar los intervalos donde la solución es cóncava y convexa. • Identificar los puntos máximos, mínimos y puntos de inflexión.	• Observar que relaciones se establece entre una ecuación en el registro algebraico/analítico y una solución en el registro gráfico/geométrico: ¿cuál es el camino que se sigue para relacionar la ecuación y la solución?. • Examinar las ideas geométricas acerca de la primera y segunda derivadas.
2	original	Graficar la solución de una E.D a partir de las propiedades de la primera derivada en el registro gráfico/geométrico	• Los puntos de P1. • Leer e interpretar el gráfico de la derivada. • Visualizar los intervalos donde la solución es creciente, decreciente, cóncava y convexa.	• Estudiar cómo el cambio de registro influye en el comportamiento del estudiante. • Determinar que habilidades se poseen para reacionar una función y su derivada.
3	Adaptado de (Blanchard, 1999)	Graficar una solución de una E.D autónoma a partir de las propiedades de la primera derivada en el registro algebraico/analítico	• Saber un teorema de existencia y unicidad y sus consecuencias. • Determinar zonas donde la solución es creciente , decreciente, cóncava y convexa. • Determinar soluciones de equilibrio.	• Observar cuales son las representaciones intermediarias que se utilizan cuando la tarea requiere interaccionar los registros gráfico y algebraico.
4	Adaptado de (Blanchard, 1999)	Graficar la solución de E.D autónoma a partir de las propiedades de la primera derivada en el registro gráfico/geométrico.	• Las mismas de P3. • Leer e interpretar el grafico de f(y).	• Observar que información se es capaz de leer e interpretar de una gráfica.

2.4.2 La entrevista

El papel de la entrevista es profundizar en las respuestas dadas por los estudiantes y explorar su pensamiento alrededor de los problemas no resueltos. Se opta por una entrevista semiestructurada cuyo guión se diseña a partir de las repuestas obtenidas en el cuestionario. Básicamente, la entrevista consta de tres momentos: 1) pedir explicaciones de las repuestas dadas, 2) promover el dialogo para resolver aquellos problemas que no fueron resueltos o que presentan alguno tipo de errores, y 3) reflexionar acerca de la tarea. El tiempo estimado para la entrevista es de 1 hora.

2.5 Metodología de Análisis

Para el análisis de los datos construiremos categorías de análisis utilizando: los constructos metodológicos explicitados en el marco teórico, las redes sistémicas, las recomendaciones y conclusiones de otros trabajos relacionados y nuestro conocimiento y experiencia particular en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Para cada problema, se construye una tabla de respuestas, dos redes sistémicas, una para el cuestionario y otra para la entrevista, y se presentan extractos de las transcripciones de las entrevistas que se consideran más significativas. El objeto de esto es describir, interpretar y analizar detalladamente las respuestas y aproximarnos a los esquemas conceptuales de los sujetos investigados.

2.5.1 Las Redes Sistémicas

Las redes sistémicas, propuestas por Bliss y Ogborn (1979), son un instrumento metodológico que nos sirve para organizar, analizar e interpretar datos cualitativos obtenidos de los cuestionarios y de las entrevistas. El interés de éstas se deriva su potencial para describir y representar el significado implícito en las producciones orales o escritas de los sujetos investigados.

Las redes sistémicas, como resultado del análisis del análisis de los datos, son estructuras de árbol que muestran la dependencia e independencia entre las ideas, sentimientos, valores, etc. que se expresan. Cada estructura posible es una interpretación de los datos por parte del investigador. Para construir una red sistémica es necesario deducir aspectos P_i (i=1...n) que representen dimensiones independientes y que se muestren significativos para organizar los datos. Estos aspectos pueden deducirse de la lectura de las respuestas de los sujetos o bien de estudios previos, de las características de los conceptos y procedimientos bajo estudio, la historia de la ciencia, etc. Para cada aspecto P_i, se organizan diferentes categorías o clases P_{ij} (j=1...n_i), excluyentes entre sí, que a su vez se pueden organizar en subcategorías. Los aspectos se agrupan con una llave " { " y las categorías o clases con una barra " | ". El resultado es una estructura en forma de árbol como las que se muestran en la sección sobre la metodología de los esquemas conceptuales. Otros convenios de notación que utilizaremos son el simbólo de recursion, para indicar que los aspectos o categorías que se ubican a la derecha del símbolo se relacionan entre sí, y una linea discontinua, para indicar la existencia de una secuencia de aspectos o categorías (ver Bliss y Ogborn, 1979; Sanmartí, 1993).

CAPITULO 3: ANALISIS DE LOS DATOS

3.1 Presentación

En este capítulo, se construyen unas categorías de análisis que permitan describir, interpretar y caracterizar los esquemas conceptuales de los sujetos estudiados.

Para cada problema, se construye una tabla de repuestas, dos redes sistémicas, una para el cuestionario y otra para la entrevista, y se presentan extractos de las transcripciones de las entrevistas que se consideran más significativas.

En el análisis de los cuestionarios se consideran las respuestas dadas por los cuatro estudiantes de V ciclo que cursaron la asignatura de ED I (Alex, Maribel, Iris y Mario) y las del estudiante de III ciclo (Rigo). Y en el análisis de las entrevistas consideramos las transcripciones de 3 estudiantes del primer grupo (Alex, Maribel, Iris) y la del estudiante egresado (Luis).

3.2 Tablas de Respuestas al cuestionario

Problema 1				
Estudiante	**Respuesta**		**Procedimiento**	**Observaciones**
	Si/No	**C/I**		
Iris	Si, incorrecta		• Usa separación de variables para encontrar una formula para las soluciones. • Usa la condición inicial para hallar una solución particular. Para graficar: ▪ deriva la solución particular. ▪ Intente analizar del signo de la primera y la segunda derivada.	• Hay errores algebraicos que le conducen a soluciones incorrectas. • Hace un análisis arbitrario e inconsistente del signo de la primera y segunda derivada. • Muestra un nivel muy pobre en el análisis.
Maribel	No		• Usa separación de variables para encontrar la solución general. • Usa la condición inicial para hallar una solución particular. • Encuentra la primera y segunda derivada.	• Encuentra una formula correcta. • Parece que va a utilizar las técnicas de cálculo, pero no hace ningún análisis con las derivadas. • No se da cuenta que la primera derivada calculada es la función dada en la ecuación. • No hace ningún intento por graficar.
Alex	No		• Usa separación de variables para encontrar la solución general. • Usa la condición inicial para hallar una solución particular.	• Se queda con la solución particular correcta. • No hace ningún intento por graficar.

<table>
<tr><th colspan="5">Problema 1</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Estudiante</th><th colspan="2">Respuesta</th><th rowspan="2">Procedimiento</th><th rowspan="2">Observaciones</th></tr>
<tr><th>Si/No</th><th>C/I</th></tr>
<tr><td>Mario</td><td colspan="2">Si, más o menos correcta.</td><td>• Usa separación de variables para encontrar la solución general.
• Usa la condición inicial para hallar una solución particular.

Para graficar:

▪ encuentra los puntos criticos 0. 2. –2 y los evalua en la solución particular.
• Se da cuenta que $y' = x^2(x-2)^2(x+2)$.
• Hace un análisis del signo de y’.
• Encuentra los puntos donde y=0.
• Grafica.</td><td>• Hay errores algebraicos lo que le conduce a una solución incorrecta.
• El análisis del signo de la primera derivada es correcto.
• No determina puntos mínimos ni puntos de inflexión.
• Utiliza tanto la solución particular obtenida como la derivada dada por la E.D, sin mostrar ningún conflicto.</td></tr>
<tr><td>Rigo</td><td colspan="2">Si, correcto</td><td>• Integra para hallar la solución general.
• Usa la condición inicial para hallar la solución pedida.
Para graficar:
• Deriva dos veces la solución particular.
• Analiza el signo de la primera derivada.
• Observa que en x=-2 hay un mínimo.
• Analiza el signo de la segunda derivada.
• Se da cuenta que hay 4 puntos de inflexión.
• Afirma que no hay asíntotas horizontales.</td><td>• Muestra un excelente dominio de las técnicas y procedimientos estudiados en el curso de calculo.</td></tr>
</table>

Problema 2

Estudiante	Respuestas		Procedimiento	Observaciones
	Si/No	C/I		
Iris	Si, incorrecto		• Usa separación de variables para hallar la familia de soluciones $y = f(x) + c$, donde $f(x) = \int g(x)$. • Usa la condición inicial (0, -1) para obtener c=-1.	• Obtiene la gráfica trasladando la gráfica de g(x) 1 unidad hacia abajo. • Confunde los gráficos de f(x) y g(x).
Maribel	No			• Hace nada
Alex	No		• Usa separación de variables para obtener la solución $y = G(x)$, donde $G(x) = \int g(x)dx$	• El gráfico significa nada.
Mario	No			• Hace nada
Rigo	Si, correcto		• Observa que g(x) da la monotonía de y(x). • Observa que $y'' = g'(x)$ da la concavidad de y(x). • A partir del signo de g(x) determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento. • A partir del signo de $g'(x)$ determina los intervalos de concavidad y convexidad. • Determina que en x=-2 hay un mínimo y que x=0, 2 son puntos de inflexión en los que las tangentes son horizontales. • Determina que x=-1.75, 1 son también puntos de inflexión.	• Muestra habilidad para leer e interpretar el gráfico de g(x). • Muestra dominio de las técnicas y conceptos básicos del calculo, pues el cambio de registro no le representa ninguna dificultad.

Problema 3				
Estudiantes	**Respuestas**		**Procedimiento**	**Observaciones**
	Si/No	**C/I**		
Iris	Si, incorrecta		• Integra $\frac{dy}{dt} = sen(y(t))$ para obtener $y = \frac{-\cos(y(t))}{y'(t)} + c$.	• utiliza separación de variables, pero incurre en el error al aparecer la variable t en el lado derecho de la ecuación. • Cuando integra, utiliza mal el cambio de variable. • Considera a $y'(t)$ constante.
Maribel	Si, incorrecta		• Integra $dy = sen(y(t))dt$ para obtener $y = \cos(y(t)) + c$	• Utiliza mal separación de variables. • Hay problema con la regla de la cadena.
Alex	Si, incorrecta		• Integra $dy = sen(y(t))dt$ para obtener $y = -\frac{\cos(y(t))}{y'(t)} + c$ $y = -\cot(y(t)) + c$	• Utiliza mal separación de variables • Cuando integra, utiliza mal el cambio de variable.
Mario	Si, incorrecto		• Integra $dy = sen(y(t))dt$ para obtener $y = -\frac{\cos(y(t))}{y'(t)} + c$ $y = -\cot(y(t)) + c$	• Las mismas que antes

<table>
<tr><th colspan="5">Problema 4</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Estudiante</th><th colspan="2">Respuesta</th><th rowspan="2">Procedimiento</th><th rowspan="2">Observaciones</th></tr>
<tr><th>Si/No</th><th>C/I</th></tr>
<tr><td>Iris</td><td colspan="2">No</td><td></td><td>• Hace nada</td></tr>
<tr><td>Maribel</td><td colspan="2">No</td><td>• Integra $\int dy = \int f(y)dt$ para obtener $y = F(y)t + c$ donde $F(y) = \int f(y)$</td><td>• Ignora el gráfico de f(y).</td></tr>
<tr><td>Alex</td><td colspan="2">No</td><td>• Usa separación de variables.</td><td>• $\int \frac{dy}{f(y)} = \ln\left|f(y)\right|$
• Ignora el gráfico de f(y)</td></tr>
<tr><td>Mario</td><td colspan="2">No</td><td></td><td>• Hace nada</td></tr>
</table>

3.3 Resultados Preliminares del Cuestionario

Las respuestas obtenidas en los cuestionarios nos permiten obtener los resultados preliminares siguientes.

1. En el problema 1,

   En los 4 estudiantes de V ciclo (Iris, Maribel, Alex y Mario) observamos que:

   - Los 4 estudiantes evidencian la necesidad de encontrar una fórmula para poder graficar solución pedida.
   - Los 4 utilizan el método de separación de variables para encontrar la solución general y luego a partir de la condición inicial determinan la solución particular: Iris y Mario cometen un error algebraico que les

conduce a soluciones incorrectas, y Maribel y Alex aplican el método con éxito.

- Maribel y Alex que han resuelto con éxito la ecuación se quedan con esa solución particular y no llegan a graficarla.
- Iris quien ha resuelto sin éxito la ecuación, intenta movilizar sus conocimientos previos de calculo para hacer un análisis de la primera y la segunda derivada. Sin embargo, este análisis es arbitrario e inconsistente. Tampoco se da cuenta que la derivada de la fórmula de la solución obtenida no coincide con la derivada dada por la ecuación diferencial.
- Po su parte Mario, que también ha resuelto sin éxito la ecuación, utiliza simultáneamente la ecuación diferencial y la fórmula de la solución obtenida, sin mostrar ningún conflicto, para construir una gráfica aproximada. No se da cuenta que la derivada de la solución particular no coincide con la derivada dada en la ecuación diferencial. La gráfica resulta bastante aproximada porque hace el análisis de la primera derivada a partir de la ecuación diferencial y no de la fórmula obtenida. Esta solución particular la utiliza sólo para hallar algunos puntos de la gráfica, por ejemplo, cuando y=0 o para evaluar los puntos críticos. No dice nada de la concavidad ni de los puntos de inflexión.

En el estudiante de III (Rigo) ciclo se observa que:

- Realiza impecablemente la tarea. Integra la ecuación diferencial, halla la solución particular y después para graficar hace el análisis del signo de la primera y la segunda derivada para determinar la monotonía, concavidad, mínimos, puntos de inflexión. Afirma, además, que debido a que la solución es un polinomio no tiene asíntotas verticales. Sin embargo, no se da cuenta que la primera derivada de la fórmula de la solución obtenida ya está dada por la ecuación diferencial.

2. En el problema 2,

   En los 4 estudiantes de V ciclo se observa:

   - Una tendencia a ignorar el gráfico, quizá porque un gráfico sin una formula explícita carece de significado o porque el problema así planteado también carece de significado.
   - Maribel y Mario no hacen nada. Mientras que, Iris y Alex utilizan el método de separación de variables llamando $\int g(x)dx$ por otra función. Alex no gráfica y Maribel confunde los gráficos de $\int g(x)dx$ y $g(x)$. Por lo tanto, ninguno de los 4 es capaz de relacionar la derivada y el grafico de g(x) para derivar las propiedades necesarias para construir la gráfica de la solución pedida.
   - Ninguno de los 4 se da cuenta que los problemas 1 y 2 son equivalentes.

   En el estudiante de III ciclo (Rigo) se observa que:

   - Resuelve con mucho éxito el problema. Lee e interpreta correctamente el gráfico de la derivada para determinar la monotonía, concavidad, mínimos, puntos de inflexión, etc. de la solución buscada. No obstante, tampoco se da cuenta de que los poblemas 1 y 2 son equivalentes.

   Por lo tanto, relacionando el problema 1 y el problema 2, podemos inferir que Rigo a pesar de que resuelve impecablemente cada problema, es incapaz en un primer momento de interaccionar los registros algebraicos y gráficos. Evidentemente, la estategia de trabajo elegida depende de en que registro este planteado el problema, sin dar signos de una habilidad para interaccionar o cambiar de registo.

3. En el problema 3,

- Ninguno de los 4 estudiantes de V ciclo resuelve con éxito el problema.
- Todos utilizan mal el método de separación de variables, probablemente debido a la presencia de la variable t en el lado derecho de la ecuación.
- Todos tienen problemas con la técnica de integración de cambio de variables y quizá con la regla de la cadena.

4. En el problema 4,

- Ninguno de los 4 estudiantes de V ciclo resuelve con éxito el problema.
- Iris y Mario no hacen nada y Maribel y Alex utilizan mal el método de separación de variables e integran incorrectamente de manera simbólica, ignorando por completo la gráfica dada. De nuevo parece ser que este tipo de problema carece de sentido.

Estos datos empíricos (obtenidos a partir de los cuestionarios) pueden ser categorizados para aproximarnos a los esquemas conceptuales de los estudiantes del concepto de solución de una ecuación diferencial.

Para este fin, preguntamos: ¿qué estrategias se utilizan para gráficar una solución de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) ? ¿se deriva directamente de la EDO las propiedades necesarias para construir la gráfica de la solución sin sentir la necesidad de conocer una fórmula para la solución ó, por el contrario, primero se encuentra una fórmula para la solución utilizando algún método de integración algebraico y sólo después se procede a graficarla?.

Las categorías y subcategorías que proponemos para cada problema son las siguientes:

Problema 1

Categoría I: Deriva directamente de la ED las propiedades necesarias para construir la gráfica de la curva solución, sin sentir la necesidad de encontrar una fórmula (0).

Categoría II: Obtiene una fórmula correcta para la curva solución usando el método de separación de variables (Maribel, Alex y Rigo).

Subcategoría II.1: no construye la gráfica de la curva solución porque no encuentra cómo gráficar la fórmula obtenida debido a que es un polinomio de grado 6 o porque no recuerda las técnicas del cálculo diferencial (Maribel y Alex).

Subcategoría II.2: Construye la gráfica de la curva solución analizando la primera y la segunda derivada de la fórmula obtenida, sin darse cuenta que la derivada coincide con la ED (Rigo).

Categoría III: Obtiene una fórmula incorrecta para la curva solución como consecuencia de haber cometido algún error algebraico en la utilización del método de separación de variables (Iris y Mario).

Subcategoría III.1: Hace un análisis inconsistente de la primera y la segunda derivada de la fórmula obtenida y luego construye una gráfica incorrecta e incoherente con las propiedades obtenidas antes (Iris).

Subcategoría III.2: Observa que la derivada de la solución está dada por la ED y entonces analiza su signo para construir una gráfica aproximada. La fórmula de la solución sólo la utiliza para obtener algunos puntos de la gráfica (Mario).

Problema 2.

Categoría 1: Deriva directamente de la ED las propiedades necesarias para construir la gráfica de la curva solución, sin sentir la necesidad de contar con una fórmula (Rigo).

Categoría II: Intenta encontrar una fórmula simbólica para la solución usando el método de separación de variables, ignorando la gráfica de *g(x)* (Iris y Alex).

Subcategoría II.1: Construye una gráfica incorrecta (Iris).

Subcategoría II.2: No construye ninguna gráfica (Alex).

Categoría III: No responde (Maribel y Mario).

Problema 3.

Categoría I: Deriva directamente de la ED las propiedades necesarias para construir la gráfica de la curva solución, sin sentir la necesidad de contar con una fórmula (0).

Categoría II: Siente la necesidad de contar con una fórmula para construir la gráfica de la curva solución (Iris, Maribel, Alex y Mario).

Subcategoría II.1: Hace uso correcto del método de separación de variables (0).

Subcategoría II.2: Hace uso incorrecto del método de separación de variables y de las técnicas de integración (Iris, Maribel, Alex y Mario).

Problema 4.

Categoría I: Deriva directamente de la ED las propiedades necesarias para construir la gráfica de la curva solución, sin sentir la necesidad de contar con una fórmula (0).

Categoría II: Siente la necesidad de contar con una fórmula para construir la gráfica de la curva solución (Iris, Maribel, Alex y Mario).

Subcategoría II.1: Hace uso correcto del método de separación de variables, pero integra incorrectamente (Alex).

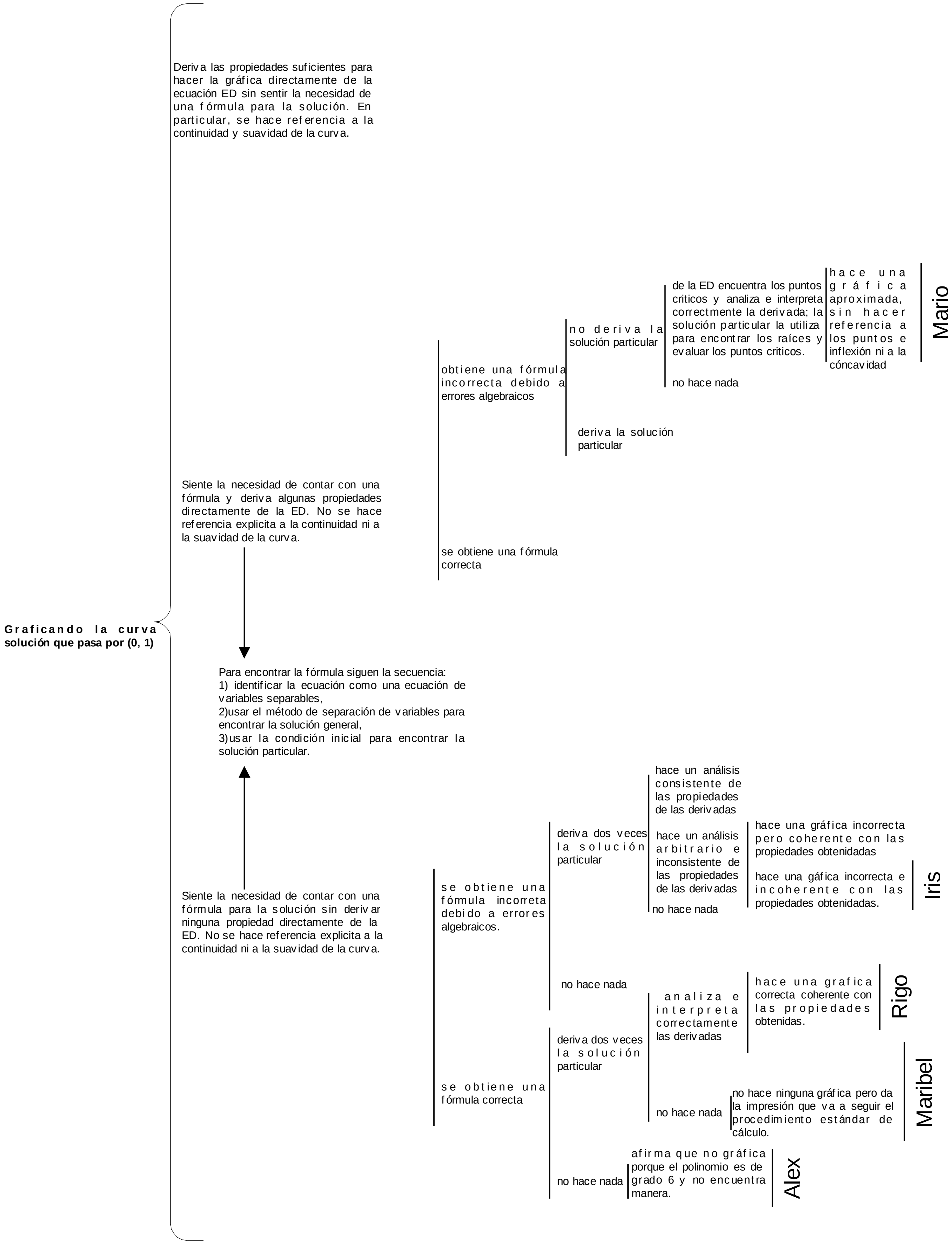
Subcategoría II.2: Hace uso incorrecto del método de separación de variables y también integra incorrectamente(Maribel).

Subcategoría II.3: No hace nada (Iris y Mario).

La tendencia de las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios puede observarse claramente en las redes sistémicas siguientes. En ellas se observan dos rutas que se relacionan de manera muy débil y, como resulta evidente, la ruta dominante es la pimera.

- Sentir la necesidad de encontrar primero una fórmula para la solución utilizando algun método de integración algebraico y sólo después proceder a graficarla.
- Derivar directamente de la EDO las propiedades necesarias para construir la gráfica de la solución, sin sentir la necesidad de conocer una fórmula para la solución.

Red sistémica para el problema 1



Red sistémica para el problema 2

graf icando la crv a solución que pasa por (0,-1).

Deriv a las propiedades necesarias para hacer la gráf ica directamente de la ED y de la lectura de la gráf ica de g(x).

Analiza e interpreta la primera deriv ada para determina la monotonia y los extremos de y (x)

Analiza e interpreta la segunda deriv ada para deteminar la concav idad y todos los puntos de inf lexión de y (x)

g r a f i c a correcatmentehace haciendo ref erencia a la continuidad y a la suav idad

Rigo

Siente la necesidad de contar con una f órmula para la solución.

i n t e n t a encontrar una f órmula

obtiene
$y = f(x) + c$
donde
$f(x) = \int g(x)$

usa la condición inicial para obtener c=-1 y y= f (x)-1

ignora el signo de la integral y dibuja la grafica trasladando la graf ica de g(x) una unidad hacia abajo.

Iris

no hace nada

no hace nada

obtiene
$y = G(x)$
donde
$G(x) = \int g(x)$

i n t e n t a graficar

no intenta graficar

Alex

Para encontrar la fórmula sigue la secuencia:
1) identif ica la ecuación como una ecuació de v ariables separables.
2) usa el método de separación de v ariables para hallar una f orma general en la que aparece una f unción cuy a f órmula no es conocida.

no hace nada

Maribel

Red sistémica para el problema 3

Dada LA ED, se pide graficar la curva solución que pasa por el punto (0, pi/2).

- Deriva las propiedades necesarias para hacer la gráfica directamente de la ED, sin necesidad de contar con una fórmula para la solución.
- Siente la necesidad de contar con una fórmula para la solución
  - intenta encontrar una fórmula usando el método de separación de variables
    - separa bien las variables
    - separa mal las variables
      - integra mal porque ignora la composición y/o utilizan mal el cambio de variables.
        - **Alex**
        - **Iris**
        - **Maribel**
        - **Mario**
  - no hace nada

Red sistémica para el problema 4

Dada la ED y la gráfica de f(y), se pide graficar la curva solución que pasa por (0, 1/2).

- Deriva las propiedades necesarias para graficar la curva directamente de la ED y de la lectura de la gráfica de f(y)
- Siente la necesidad de contar con una fórmula para la solución.
  - intenta encontrar una fórmula usando el método de separación de variables
    - separa bien las variables
      - integra incorrectamente ignorando la gráfica de f(y)
        - **Alex**
      - no hace nada
    - separa mal las variables
      - integra incorrectamente ignorando la composicion
        - **Maribel**
      - no hace nada
  - no hace nada
    - **Iris**
    - **Mario**

A manera de conclusión podemos decir que:

- Ante una tarea que demanda resolver una ecuación diferencial, se evidencia una preferencia muy fuerte a trabajar en el registro algebraico-algorítmico (es decir, encontrar una fórmula para la solución por el método de separación de variables) frente a otra muy débil hacia el trabajo en el registro gráfico/geométrico.
- Además, es evidente que la competencia de estos estudiantes en la utilización del método de separación de variables se reduce a la mera manipulación simbólica del método pues, se detectan dificultades con el significado de los símbolos que aparecen en el método: ¿qué significa separar las variables? ¿cuándo es pertinente usarlo? ¿cómo?. Esto se puede corroborar por medio de las respuestas dadas a los problemas 2 y 4 (que demandan leer e interpretar una gráfica), donde los estudiantes han respondido con este método obteniendo expresiones simbólicas sin sentido (ignorando la gráfica de la derivada). Y otros, simplemente, no responden.
- Por lo tanto, dado de que no se resuelven los poblemas 2 y 4 y no se menciona la idea de pendiente de una curva o alguna otra interpretacion geométrica de la derivada en las respuestas de los estudiantes, podemos inferir que el esquema conceptual formal del concepto de EDO de cada estudiante se limita a una mera expresión algebraica en le que se relaciona una función, la variable independiente y algunas derivadas. Asimismo, para todos los estudiantes resolver una ecuación diferencial significa encontrar una fórmula que satisface la EDO, es decir, una fórmula que al ser sustituida en la EDO la reduce a una identidad. Además, para encontrar esta solución es necesario utiliza algun método algebraico.
- De otra manera, se puede afirmar que para estos estudiantes el procepto $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ sólo hace referencia, por una parte, al concepto de expresión

algebraica que relaciona una función, la variable independiente y su derivada y al concepto de solución de la ED y, por otro, al proceso de obtener una fórmula para la solución utilizando algún método de integración.

Ahora bien, dado que la ruta cualitativa no surge de manera natural y espontánea, así como las muchas dificultades tanto algebraicas como conceptuales que muestran los estudiantes cuando intentan encontrar una fórmula para la solución pedida, nos conducen a realizar una entrevista semiestructurada. El objetivo de esta entrevista es explorar el pensamiento de los estudiantes cuando se les sugiere que resuelvan una ED por métodos cualitativos. Para esto, llegamos al acuerdo de: 1) que para gráficar la curva solución pedida pueden utilizar sus conocimientos y técnicas del cálculo diferencial para derivar las propiedades indispensables para construir la gráficar de la solución pedida y 2) que dado que la primera derivada ya está dada por la ED, no es necesario calcular explícitamente la fórmula de y(x).

Guión de la entrevista

1. Pedir a cada entrevistado, explicaciones de las respuestas dadas en el cuestionario: ¿Podría explicarme que ha hecho en este punto?

2. En las respuestas al cuestionario se observa una tendencia muy fuerte a responder algebraicamente, entonces promoveremos la reflexión del entrevistado para que resuelva los problemas en forma cualitativa , es decir, extraiga la información relevante para realizar la tarea a partir de la ecuación diferencial sin intentar resolverla.

   En los problemas 1 y 2, preguntamos:

   - ¿cómo se relaciona una función y su derivada?
   - ¿cuál es el significado geométrico de la primera derivada?
   - ¿qué puede decirme de este gráfico o de esta ecuación? ¿qué información se puede extraer?
   - ¿qué información sobre la derivada nos da?
   - ¿qué se puede decir de la continuidad y la derivabilidad de la solución?
   - ¿hay algunos puntos notables? ¿cómo los determina?

   En los problemas 3 y 4, preguntamos:

   - ¿recuerda algún teorema que hable de la existencia y unicidad de las soluciones?
   - ¿podría enunciarlo?
   - ¿cuáles son sus consecuencias?
   - ¿observa algunas soluciones inmediatas?
   - ¿dónde la solución es creciente, decreciente, cóncava, convexa, etc?
   - Se pedirá graficar otras soluciones que pasen por otros puntos.

3. Se pedirá la opinión del entrevistado acerca del tipo de problemas en el cuestionario y la forma de abordarlo durante la entrevista.

Sin embargo, la renuencia de los estudiantes para utilizar los métodos cualitativos y los bloqueos continuos que experimentan a lo largo de las entrevistas (debido a que sus conocimientos y habilidades previos del cálculo diferencial están restringidas al modo de pensamiento procedimental), nos obligan a asumir el papel de profesor para orientar o inducir su trabajo. Esa influencia no ha sido estudiada y aparece, por lo tanto, como una debilidad metodológica de esta investigación.

Como antes la tendencia de las respuestas de los estudiantes en las entrevistas puede observarse claramente en las redes sistémicas siguientes.

Red sistémica para el problema 1 obtenida de la entrevista

- ¿cómo construiría la gráfica?
  - usando los métodos del cálculo para determinar las propiedades cualitativas de la gráfica de y(x): monotonía, extremos, cóncavidad, etc.
    - deriva propiedades cualitativas del gráfico de y(x) a partir de la ED
      - afirma que y(x) es continua en todo porque es un polinomio y porque derivabilidad implica continuidad
      - obtiene los puntos critícos -2, 0, y 2
        - ¿qué puede decir del signo de y(x)?
          - se bloquea
          - construye un cuadro de variación para $\frac{dy}{dx} = x^2(x-2)^2(x+2)$
            - analiza el signo de la derivada
            - afirma que (-2, y(-2)) es mínimo
              - dice: un máximo es así $\cap$ y la derivada pasa de positiva a negativa; un mínimo es así $\cup$ y la derivad pasa de negativa a positiva
                - construye una gráfica incorrecta, pero coherente
                  - dibuja el mínimo (-2, y(-2)) sobre el eje x, es decir, supone y(-2)=0. extrapola el comportamiento alrededor del mínimo.
                    - **Iris**
            - no afirma nada de (0, y(0)) y (2, y(2))
      - ¿qué puede decir de la concavidad y los puntos de inflexión?
        - afirma que necesita la fórmula de y''(x)
          - no utiliza argumentos intuitivos, como la suavidad de la curva, para derivar algunas propiedades.
    - considera la fórmula de *y(x)*
      - considera y'(x) para encontrar la monotonía, extremos, etc.
        - calcula y'(x) y no la relaciona con la ED
        - calcula y'(x) y la relaciona con la ED
          - obtiene los puntos críticos -2, 0, 2
          - construye un cuadro de variación para $\frac{dy}{dx} = x^2(x-2)^2(x+2)$
            - analiza e interpreta el signo de y'(x)
              - determina la monotonía
            - afirma que (-2, y(-2)) es mínimo
            - afirma que (0, y(0)) y (2, y(2)) no son extremos, pero las tangentes son horizontales
              - construye una gráfica incorrecta, pero coherente
                - no refleja la cóncavidad, y ha extrapolado el comportamiento alrededor del mínimo
                  - **Maribel**
      - considera y''(x) para encontrar cóncavidad, puntos de inflexión, etc.
        - necesita un fórmula para y''(x)
          - calcula y''(x) a partir de y(x)
            - se bloquea
          - calcula y''(x) a partir de la ED
            - factoriza y''(x)=
              - se bloquea
              - afirma que (0, y(0)) y (2, y(2))son puntos de inflexión
              - no dice nada del signo de y''(x)
                - no grafica
                  - **Alex**
  - usando el Derive para gráficar la fórmula de y(x)
  - mediante una tabla de valores para la fórmula de y(x)
    - **Maribel**

Observaciones al problema 1

Puede apreciarse que en los esquemas conceptuales de Maribel y Alex las relaciones entre las propiedades cualitativas del gráfico de una función y sus derivadas aparecen en un segundo plano, pues ellas sólo se movilizan después que han sido sugeridas por el entrevistador. La idea de función que sobresale es la de operación o manipulación (ya sea aritmética o con ordenador). Veamos:

I:…¿cómo graficaría esta función? o ¿cómo haría la gráfica?.

Mar: Se mete esto en el Derive y…(risas).

I: Exactamente, pero si no existiera el Derive, ¿cómo lo haría?

Mar: Si no existiera el Derive, le damos valores…pero no sé…

I: Bueno, bueno…. ¿De qué otra manera podría graficar la función?

Mar: Ummm…ummm...

Alex: Entonces llego a esa solución ($y=\frac{x^6}{6}-\frac{2}{5}x^5-x^4+\frac{8}{3}x^3+1$). Y ahí no la grafique pues…, intente pero,… o sea como es un polinomio sexto, y así no halle como dibujarla.

I: Sí, sí!. El procedimiento, esto, está bien, usando separación de variables está bien. Pero lo que pedimos es el gráfico de la curva solución.

Alex: Si, el gráfico, pero no lo hice. Y no lo hice por eso, porque tengo un polinomio de grado sexto y así a mano…

I: ¿Cómo graficaría un polinomio de grado 3 o más?

Alex: Ummm… (silencio)

I: Suponga que le digo, grafique $y=x^4-x^2$, ¿cómo lo haría?

Alex: Ummm…ummm…

Ahora bien, una vez movilizadas las herramientas del cálculo, la evidencia experimental sugiere que esos conocimientos y habilidades previos están restringidas al modo de pensamiento procedimental, con algunas interpretaciones geométricas muy rutinarias, mostrando muchas dificultades *para articular la información obtenida para construir la gráfica pedida; volviéndose necesaria la guía del entrevistador para obtener alguna gráfica.*

Por ejemplo, para determinar el signo de la derivada todos construyen un cuadro de variación, sin fijarse que eso es inmediato de la expresión algebraica de $\frac{dy}{dx} = x^2(x-2)^2(x+2)$.

I: ¿Que puede decir del signo de $y'(x)$?

Iris: ummm…ummm …tendría los puntos críticos en –2, en 0 y en 2 .Entonces tendría que ver la primera derivada, y en –2…un numero que este entre, el –1 digamos, seria positiva…y acá también seria positivo. Y…

		-2		0		2	
f'	-		+		+		+

I: O sea que la ecuación diferencial ya nos da la derivada. Entonces, ¿qué información puede sacar de allí?

Alex: Dónde se hace cero, …donde es positiva y negativa…

I: Determine todo eso.

Alex: Los puntos críticos son 0, 2 y –2, …y ahora…

I: Que está haciendo

Alex: Un cuadro de variación.

Mar: Sí, verdad!, la derivada ya la da la ecuación.

I: O sea que para graficar la solución pedida podemos, evitar la separación de variables y, partir de la primera derivada dada en la ecuación para analizar el comportamiento cualitativo de la función.
Haga ese análisis.

Mar: Ummm… aquí los puntos críticos serían 0, 2, y -2.

I: ¿Cómo se interpreta eso geométricamente?

Mar: Que las pendientes son cero, o sea que…las tangentes son horizontales.

I: ¿Qué tipo de punto hay en (0, y(0))? ¿máximo o mínimo?

Mar: …ummm…

I: ¿Cómo sabe si tiene un punto máximo o un mínimo?

Mar: Con el criterio de la primera derivada que dice que la primera derivada debe de cambiar de signo alrededor de ese punto. Si pasa de más a menos hay máximo, y si pasa de menos a más hay mínimo.

I: A ver…

Mar: Haciendo un cuadro de variación…

La idea de extremo local que tienen en sus cabezas se limita a un extremo en un punto diferenciable.

I: ¿Que tipo de punto hay en (-2, y(-2))?

Iris: Un máximo.

I: ¿Por qué?

Iris: …bueno un máximo seria así $\cap$. Y alrededor de él la derivada pasa de positiva a negativa…pero aquí va al revés, de negativa a positiva, entonces lo que tenemos es un mínimo.

I: ¿Qué tipo de punto es (-2, y(-2))?

Alex: Un máximo…pero, no estoy seguro de eso.

I: ¿Cómo es un máximo?

Alex: Es así $\cap$…ah! …entonces hay un mínimo.

I: Ujum!.

I: En el mismo sentido, ¿qué se puede decir de los puntos (2, y(2)) y (-2, y(-2))?

Mar: Tampoco en (2, y(2)) hay cambio de signo. Y en (-2, y(-2)) hay un mínimo porque va de menos a más. Un mínimo es así $\cup$.

Una vez que han determinado la monotonía, los puntos críticos y los extremos (y los han interpretado geométricamente), les pedimos que construyan el gráfico de la solución buscada. Sin embargo, Alex afirma que necesita conocer la concavidad y que para ello es necesario hallar la fórmula de y"(x); Alex calcula y", pero no logra factorizarla, y por tanto, no logra determinar el signo de y" ni todos los puntos de inflexión.

I: ¿Cómo seria el gráfico? Haga una propuesta de gráfico.

Alex: Ummm…habría que analizar la concavidad antes, no?

I: Bueno, se podría analizar también. ¿Cómo lo analizarías?

Alex: Hay que derivar otra vez.

I: Ujum, a ver derive.

Alex: Sería.… (después de 2 minutos):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[x^2(x-2)^2(x+2)\right]$$
$$=2x(x\text{-}2)^2(x+2)+2x^2(x-2)(x+2)+x^2(x-2)^2$$

Así verdad?, usando la regla de la cadena y la derivada de un producto

I: Ujum!, factorice.

Alex:…(después de 7 minutos)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x(x-2)\left[2(x-2)(x+2)+2x(x+2)+x(x+2)\right]$$
$$=x(x-2)\left[2(x^2-4)+2x^2+4x+x^2-2x\right]$$
$$=x(x\text{-}2)\left[5x^2+2x-8\right]$$

… cómo que son irracionales las raíces, no?

I: Eso parece. ¿Qué hay en los puntos (0, y(0)) y (2, y(2))?

Alex:…ummm…son puntos de inflexión.

I: Haga una propuesta de gráfico.

Alex:…ummm…(parece que no encuentra por donde empezar a dibujar la gráfica).

I: ¿Dónde hay cambios de concavidad?

Alex:…ummm…

I: ¿Dónde dibujaría el mínimo (-2, y(-2))? ¿arriba o debajo de la recta y=1?

Alex:…ummm…

I: ¿Podría haber cambio de concavidad en (-2, y(-2))?

Alex:…ummm…(hay un silencio largo y para no inducir su trabajo decidimos continuar al siguiente problema).

Por otra parte, Iris no aceptan argumentos gráficos/intuitivos para determinar la concavidad de la curva solución debido a que en su esquema conceptual la noción de extremo local aparece sólo en puntos donde la función es derivable y no existe una imagen geométrica del comportamiento de una función en torno a punto donde la función no sea diferenciable.

I: Sí, sí?. ¿Que puede decir de la concavidad?

Iris: Bueno…eee…seria necesario hallar la segunda derivada.

I: Claro! o podríamos buscar algún otro tipo de argumento. Por ejemplo, sabiendo que la función es derivable, aquí en el mínimo no puede haber cambio de concavidad, porque de otra manera se formaría un pico.

Iris: Ummm…si, y no puede venir hacia abajo tampoco porque … es positiva siempre….

I: Igual aquí en el mínimo no puede ser cóncava hacia abajo a los dos lados porque se formaría un pico.

Iris: Ujum?

I: Observe que los puntos $(0, y(0)), (2, y(2))$ son puntos de inflexión en los cuales las tangentes son horizontales! ¿Existirán otros puntos donde haya cambio de concavidad?.

Iris: …ummm…

I: Por ejemplo, entre 0 y 2.

Iris: Ahí si seria necesario encontrar la segunda derivada.

I: O bien usar algún argumento geométrico que nos evite los cálculos y nos diga como es la gráfica.

Iris: …ummm…no se me ocurre como…

I: Por ejemplo, el hecho de que en $\left(-2, y(-2)\right)$ hay un mínimo y que en $\left(0, y(0)\right)$la recta tangente es horizontal, obliga a que exista otro punto de inflexión en el intervalo $\left]-2, 0\right[$. Pues si no fuera así, la gráfica de la función podría tener un pico en (-2, y(-2)) y eso nos diría que la función no tiene derivada en -2. Y, además, el hecho de que $y'(x)$ exista en todo $\mathbb{R}$ nos dice que en el gráfico de y(x) no aparecerán picos. Lo mismo ocurre entre $\left]0, 2\right[$.

Iris: …ummm…

Iris interpreta un mínimo como un punto de contacto con el eje x; y cuando intentan gráficar, todos muestran dificultades para ubicar la posición relativa de los puntos (-2, y(-2)), (0,1) y (2, y(2)).

I: ¿Será la gráfica continua?

Mar: ummm…es continua porque…ummm…

I: ¿Dónde coloca el punto (-2, y(-2))? ¿Abajo o arriba de la recta y = 1?.

Mar:...

Red sistémica de la entrevista para el problema 2

- ¿cómo construiría la gráfica?
  - deriva propiedades cualitativas de la gráfica de y(x) a partir de la ED, usando los métodos del cálculo
    - observa que y(x) es un polinomio porque al integrar o derivar un polinomio el resultado es otro polinomio
    - considera la primera derivada para encontrar la monotonía y los extremos de y(x)
      - se bloquea porque no tiene una fórmula
      - se fija en $\frac{dy}{dx} = g(x)$ y la gráfica de g(x)
        - obtiene los tres puntos críticos -2, 0, 2
          - los interpreta geométricamente como puntos donde las tangentes son horizontales
            - confunde el punto (-2,y(-2)) y(-2, g(-2) y afirma que en -2 hay una tangente vertical
            - afirma que (-2, y(-2)) es un mínimo
            - afirma que en (0, y(0)) y (2, y(2)) no hay extremos
        - relaciona el signo de dy/dx con el signo de la gráfica de g(x)
          - determina la monotonía
    - considera la segunda derivada para encontrar la concavidad y puntos de inflexión de y(x)
      - se bloquea por no contar con una fórmula
      - observa que $\frac{d^2y}{dx^2} = g'(x)$
        - se bloquea
        - relaciona el signo dey'' con el signo de g'(x)
          - se bloquea
          - utiliza el criterio $g'(x) > 0 \leftrightarrow g(x)$ es creciente, $g'(x) < 0 \leftrightarrow g(x)$ es decreciente
            - determina los cuatro puntos de inflexión
            - determina la cóncavidad
              - construye una gráfica coherente, mostrando dificultades para ubicar el punto (-2, y(-2)) — **Iris**
          - interpreta g'(x) >0 como las pendientes de las rectas tangentes y recorre la gráfica de g(x) de izquierda a derecha observando el signo de éstas
            - determina sólo dos puntos de inflexión
            - determina la cóncavidad
              - construye una gráfica incoherente, mostrando dificultades para ubicar el punto (-2, y(-2))
                - No se refleja que (0,-1) es punto de inflexión. En (0, -1) y (2, y(2)) las tangentes no son horizontales. En (m, y(m)) la derivada no existe. Refleja que hay otro punto de inflexión entre m y 2. — **Maribel**
    - se bloquea
      - lee el gráfico de g(x) para derivar
        - el signo las raíces
          - utiliza la igualdad $\frac{dy}{dx} = g(x)$
            - determina la monotonía de y(x)
            - afirma que (-2,y(-2)) es un mínimo
              - el criterio es que la derivada se anula allí y cambia de menos a más.
        - los extremos la concavidad
          - utiliza la igualdad $\frac{d^2y}{d^2x} = g(x)$
            - determina la concavidad d e y(x)
            - afirma que (0, y(0)) y (2, y(2)) son puntos de inflexión
        - la concavidad de g(x) la pendiente en -2 tiende a infinito
      - construye una gráfica aproximada, pero coherente; utiliza implícitamente la suavidad de la curva; se muestran dos puntos de inflexión no señalados; muestra dificultades para ubicar el punto (-2, y(-2)) — **Alex**

Observaciones al problema 2:

Una vez que se ha llegado al acuerdo de que las propiedades cualitativas de la solución buscada pueden obtenerse de la gráfica de $\frac{dy}{dx} = g(x)$, *todos derivan los intervalos de monotonía, de concavidad, los puntos críticos, los extremos, los puntos de inflexión, etc., pero muestran algunas dificultades para articular esa información y poder construir la gráfica pedida. Veamos:*

I: Ujum! Entonces traza la gráfica de y(x).

Iris: Sería, en $]-2, M[$ es creciente y cóncava hacia arriba. Pero en este punto M tengo el cambio de signo. Pero no sé si va.....De $]M, 0[$ sería cóncava hacia abajo. Pero como va pasar por el punto (0, -1) y siempre es creciente a la derecha de -2…Cuando es menor que –2 es decreciente…(después de un par de minutos observamos que no encuentra manera de empezar al gráfica).

I: Qué sucede si dibujamos el punto (M, y(M)) por aquí - debajo de la recta y = -1-?

Iris: Si lo dibujamos allí arriba…como que no va porque tendría que unir este punto - (M, y(M)) - con él (0, -1), y entonces la función bajaría, y ya sabemos que es creciente.

I: Bueno, entonces dibuja la gráfica. Sería bueno que primero dibujara algunos puntos conocidos.

Iris: Si…ummm…y en el punto eee el punto de inflexión donde hay cambio de signo seria aca, (M, M'), y…

I: Bueno, ahora haga la gráfica.

Mar: (risas)…ummm…no se. Considerando todo lo que estaba diciendo anteriormente acerca de esto….es decreciente en $]-\infty, -2[$ y …pero en -2 qué hay?…aquí tiene que pasar por este punto, (-2, y(-2)), verdad!

I: Sí, sí!. Dibuje ese punto (-2, y(-2)).

Mar: …ummm…

I: ¿Dónde dibujaría el punto (-2, y(-2))? ¿arriba o debajo de la recta y = -1?

Mar: Ummm…aquí, abajo…entonces…

I: Haga una propuesta del gráfico pedido.

Alex: Está pasando por el punto (0, -1),…ummm…(parece que hace un resumen mental de las propiedades obtenidas, pero no logra articularlas para construir la gráfica).

I: ¿Dónde dibujaría el punto (-2, y(-2)), arriba o debajo de y = -1?

Alex: Arriba…

También observamos que pueden interferir las gráficas de y(x) y g(x).

I: ¿Y en -2 que hay?

Iris: Hay una tangente vertical, casi.

I: Bueno, me refiero a que hay en el punto (-2, y(-2)), no el punto (-2, g(-2)).

Iris: Ah!… Aquí la derivada si cambia, va de menos a más. O sea que hay un máximo.

Red sistémica de la entrevista para el problema 3

¿Qué información se puede derivar de la ED para graficar la curva y=y(t) pedida?

- se bloquea
- como antes, las propiedades cualitativas de la gráfica de y = y (t) : monotonía, extremos, concavidad, etc.
  - se bloquea debido a la presencia de la composición de funciones
  - ¿recuerda algún teorema de existencia y unicidad?
    - si
      - menciona el nombre de Picard
      - lo relaciona con otros temas
        - pero no es capaz de enunciarlo — **Maribel Iris Luis**
    - no, pero si lo estudiamos — **Alex**
  - El I enuncia e interpreta el teorma de Cauchy y pregunta si la ED cumple las condiciones
    - se bloquea
    - verifica que $f(t,y)=sen(y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos(y)$ y afirman que son siempre continuas
      - ¿ve algunas soluciones inmediatas de la ED?
        - se bloquea
        - si
          - $y(t)=0$ y y(t)=π
          - todos los multiplos de π donde se anula el seno
            - ¿qué relación tienen estas soluciones con la solución buscada?
              - se bloquea — **Maribel Iris Alex Luis**
              - El I afirma que la solución buscada está encerrada entre $y(t)=0$ y y(t)=π
                - afirma que y(t) no corta 0 ni π — **Luis**
                - asienten sin afirmar nada — **Maribe Iris Alex**
  - la monotonía, los extremos, la concavidad, etc.
    - escribe $\frac{dt}{dy}=\csc(y)$ y afirma que la gráfica de la cosecante dictará el comportamineto de la solución
      - analiza la gráfica de la cosecante
        - afirma que en 0 y π hay puntos de inflexión porque la deriva tiende a infinito
          - luego dice que son asíntotas verticales para t=t(y)
        - observa que la solución t=t(y) es creciente y que cruza $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ con pendiente 1
          - construye una gráfica coherente — **Luis**
            - ¿por qué no hay otros puntos de inflexión?
              - los puntos de inflexión surgen donde no esta definida la derivada y en el gráfico de la cosecante no se reflejan
              - porque, leyendo la gráfica de la derivada, el signo de $\frac{d^2t}{dy^2}$ es positivo en $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ negativo en $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ y sólo se hace cero en $y=\frac{\pi}{2}$
      - observa que el seno(y) es positivo en $]0,\pi[$
    - analiza el signo de $\frac{dy}{dt}=sen(y)$ en $]0,\pi[$ y obtiene que la curva buscada es creciente para $y\in]0,\pi[$
      - obtiene $\frac{d^2y}{dt^2}=\cos(y(t))sen(y(t))$ y analiza su signo para $y\in]0,\pi[$
        - determina la concavidad
        - afirma que $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ es punto de inflexión
          - construye una gráfica coherente, reflejando que la curva está encerrada entre 0 y π — **Maribel Iris Alex**
            - ¿por qué no hay otros puntos de inflexión?
              - no responden

Observaciones al problema 3:

Todos los entrevistados retoman la experiencia de los problemas 1 y 2 y logran determinar (con alguna ayuda) algunas propiedades cualitativas de la solución y(t), pero ninguno es capaz de enunciar e interpretar un teorema de existencia y unicidad. Por lo tanto, el entrevistador tiene que enunciarlo y señalar sus consecuencias.

I:… ¿Qué información podemos obtener de la ecuación diferencial? ¿cómo graficaría la curva solución pedida?

Mar: Bueno, como anteriormente, sabiendo donde es creciente ,decreciente, cóncava, etc.

I: Encuentre todo eso!

Mar: Ummm…pues tengo $\frac{dy}{dt} = sen(y(t))$…el seno de y(t) es una función allí….(se bloquea)

I:A ver, antes…¿recuerda algún teorema de existencia y unicidad de las soluciones ?

Mar:…ummm…no!.

I: A ver, entonces… recordemos un teorema básico de existencia y unicidad de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias que dice

Mar: Ummm…aquí f(t,y) = sen(y) y es continua siempre. Y $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(y)$ también es continua siempre.

I: ¿Qué quiere decir con siempre?

Mar: Que vale en todo el plano *ty*.

I: Bueno, por lo tanto podemos asumir que por cada punto del plano *ty* pasa una solución y que dos soluciones distintas no se cortan…¿Ve algunas soluciones inmediatas de la ecuación diferencial?

Mar: Ummm…

I: ¿Qué pasa con y(t) = 0?

Mar: Que vea si es solución, no?… si sustituyo en la ecuación obtengo 0 = 0 y esto me dice que si es solución.

I: ¿Ve otras soluciones?

Mar: …creo que $\pi, 2\pi, 3\pi, ...$ y todos los múltiplos de π, donde se anula el seno son soluciones.

I: ¿Qué puede decir de la solución y(t) que buscamos?

Mar: De la solución que pasa por $(0,\frac{\pi}{2})$, no!…ummm…ummm…

I: ¿Podría enunciar algún teorema acerca de la existencia y la unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial?

Alex:….ummm…no, creo que no recuerdo ninguno!

I: Pero eso sí que lo estudiaron en el curso, verdad?

Alex: Sí, creo que sí, pero…ya no me acuerdo!

I:¿recuerda Ud. algún teorema de existencia y unicidad para las soluciones de una ecuación diferencial?.

Iris: Si, creo que se llamaba teorema de Picard.

I: ¿Qué dice ese teorema?

Iris: Ummm…no, no lo recuerdo, pero creo que también en análisis vectorial vimos algo parecido.

I: Bueno, entonces recordemos un teorema básico de existencia y unicidad de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias…

Iris: Ummm…aquí f(t,y) = sen(y) es continua siempre y $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(y)$ también.

I: Por lo tanto podemos asumir que por cada punto del plano *ty* pasa una solución y que dos soluciones distintas no se cortan…¿Ve algunas soluciones inmediatas que satisfagan a la ecuación diferncial?.

Iris: Ummm…

I: ¿Qué sucede con y(t) = 0?

Iris: Sustituyendo…ummm…si es solución!

I: ¿Puede ver otras soluciones?

Iris: Si, todos los múltiplos de π, que son los ceros del seno.

Para determinar las regiones de monotonía y de concavidad, en un primer momento algunos intenta determinar intervalos en función de la variable independiente t. Esto puede interpretarse como una interferencia de las estrategias usadas en los problemas 1 y 2; es decir, la presencia de las gráficas de $\frac{dy}{dt} = f(y)$ *y de la solución buscada pueden provocar algún conflicto.*

I: ¿Qué necesita saber de y(t)?

Iris: Necesitaría los intervalos donde es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, etc…Hay que ver como es a la izquierda y a la derecha de cero

I: Bueno, hay que determinar cómo se comporta y(t) en la franja del eje y de $]0,\pi[$. Por ejemplo, mirando la ecuación, ¿Qué podemos decir del signo de $\dfrac{dy}{dt}$ en esa franja?

Iris: Seria de ver como es a la izquierda y a la derecha de cero.

I: A ver, ¿cómo lo veria?.

Iris:…ummm…(la entrevistada se bloquea).

I: Observe que $\frac{dy}{dt}$ depende, de sen(y), del eje vertical, no del eje t.

Todos consiguen construir la gráfica de la solución y(t) y llegan a dar la impresión de que han asimilado reflexivamente el método. Sin embargo, la evidencia recogida cuando se les pide que construyan las gráficas que pasan por los puntos $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ y $\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ *parece decir lo contrario. También podríamos decir que el pensamiento de los estudiantes se muestra incoherente pues reconocen que todo el análisis que han hecho antes para graficar la curva solución que pasa por* $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ *es válido, pero ello no se refleja en el dibujo realizado.*

I: ¿Qué sucede si esa curva que ha dibujado corta las rectas $y=0$ y $y=\pi$?.

Iris: Entonces eee habría un punto de intersección y… por él pasarían dos soluciones, y ya vimos que por cada punto del plano pasa una sola solución.

I: Bien, ahora dibuje la solución que pasa por el punto $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$.

Iris: Seria lo mismo siempre. Sólo tendría que analizar los signos acá nuevamente de la primera y la segunda derivada…ummm…siempre tengo que es creciente. También tengo que la segunda derivada es positiva en $]0,\frac{\pi}{2}[$ y negativa en $]\frac{\pi}{2},\pi[$. Entonces la gráfica sería …

I: Dibújela!

Iris: Tenia que era creciente, cóncava hacia arriba en $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ y cóncava hacia abajo en $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Entonces en este punto $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ siempre voy a tener un punto de inflexión.

I: Haga una gráfica que Ud. crea que se aproxima.

Iris: Sería así…

I: Ujum! …entonces el punto $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ es un punto de inflexión.

Iris: Sí!

I: ¿Se cumplirán las condiciones anteriores?

Iris: Es creciente siempre. En la franja $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ es cóncava hacia arriba y en $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ es cóncava hacia abajo.

I: ¿Qué sucede en la franja de $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right[$?

Iris: Ummm…ah! la concavidad esta hacia arriba, y debe ser hacia abajo.

I: Grafique ahora la solución que pasa por $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Iris: Seria lo mismo, siempre (dibujando el punto de inflexión en $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$).

I:¿Cómo sabemos que en las bandas de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ y de $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ no hay onditas?(como se muestra con las curvas punteadas en la gráfica anterior)

Alex:…ummm…

I: Ahora grafique la curva solución que pasa por $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$.

Mar: ¿Considerando todo lo anterior?

I: Si, solo ha cambiado el punto por donde pasa la solución.

Mar: Tendría que analizar aquí como es la función de 0 a ese punto $(0,\frac{3\pi}{4})$, como se comportan esos puntitos, y…

I: Véalo. Haga una propuesta de gráfica.

Mar: (risas)…un puntito cualquiera….se cumplen las mismas condiciones…

I: ¿Cuál es la gráfica?

Mar:….(dibuja, colocando el punto de inflexión en $(0,\frac{3\pi}{4})$).

I: Ahora dibuja la solución que pasa por $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Mar:…seria lo mismo solo que pasando por este punto …(dibujando la gráfica que aparece en la figura de arriba y colocando el punto de inflexión en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$).

I: Ujum!, ¿Qué pasa con la concavidad en la banda de $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$?

Mar: …ummm…ah!, es hacia abajo y está hacia arriba…entonces… $(0, \frac{3\pi}{4})$ no puede ser el punto de inflexión.

I: ¿Qué sucede con la concavidad de la otra gráfica en la franja $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$?

Mar: aquí está al revés, está hacia abajo y debe ser hacia arriba…

Por su parte Luis, a pesar de demostrar una gran habilidad algebraica y algorítmica y ser capaz de cambiar al registro gráfico al darse cuenta de que la expresión algebraica para la solución podría no tener una gráfica inmediata, demuestra poseer algunas imágenes limitadas y conflictivas en torno a las nociones fundamentales del cálculo.

I: Veamos el 3. Tenes la ecuación diferencial, $\dfrac{dy}{dt} = sen(y(t))$, y lo que quiero es que grafiques la curva solución que pasa por el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, y finalmente que determines $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$.

¿Cómo lo harías? Aquí tenes lápiz y papel.

Luis: Primero hay que sacar la solución, no?

I: Bueno, veamos cuál es la solución.

Luis: Aquí por los métodos que conocemos…, usando el método de separación de variables e integrando ambos lados,…

I: Hazlo

Luis:

$$dy = sen(y(t))$$

$$\frac{dy}{sen(y(t))} = dt$$

$$\int \frac{dy}{sen(y(t))} = \int dt + C$$

Y aquí muy bien podría usar una tabla de integrales o el Derive, pero como no los tengo…

I: ¿Qué harías?

descomponiéndola por fracciones parciales, no?:

$$-\int \frac{du}{1-u^2} = -\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u}\right)du$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left[-\ln|1-u| + \ln|1+u|\right]$$

$$=-\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos y}{1-\cos y}\right|$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos y}{1+\cos y}\right|$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{1+\cos y} - 1\right|$$

…muy complicado me salió!...no me convence todavía. .espérate…

I: A ver, no olvides que lo que pedimos es la gráfica.

Luis: Pues sí.

Luis: Vamos a ver…puedo hacer todo lo que yo quiera aquí, verdad?

I: Sí claro!, todo lo que quieras.

Luis: …creo que es $\csc(y) = \dfrac{dt}{dy}$, sí verdad?

I: Sí, sí, siempre que $sen(y(t)) \neq 0$.

Luis: Entonces en este plano *yt* lo que estoy formando es una cosecante, no?, entre 0 y π. Ahora recordemos como se comporta la cosecante, y el comportamiento de la cosecante es el comportamiento que va haber allí.

I: Si claro, está relacionada al comportamiento de la cosecante.

Luis: Por eso, como sabemos que $\dfrac{dt}{dy} = \csc(y)$, la cosecante va ir dictando cómo se comporta la solución.

I: Sí, la solución t = t(y)

Luis: Ah, ja! Ahora recordemos el gráfico de la cosecante, 1 sobre el seno, verdad! El seno en 0 se va a infinito, en $\dfrac{\pi}{2}$ se hace uno, y en π se va a infinito, así…

Luis: En π y en 0 tiene dos puntos de inflexión…y en $\dfrac{\pi}{2}$ es cero, no?

I: ¿Por qué decís que son puntos de inflexión?

Luis: La derivada tiende a infinito, no!

I: Pero… no necesariamente tienen que ser puntos de inflexión, no!!

Luis: Bueno, no necesariamente, tendría que analizarlo un poquito más...Ah!, ja, no necesariamente porque simplemente puede tender, nada más.

I: Si, sí

Luis: Y no continuar o…, pero con estos datos necesito graficarlo, lo que pasa aquí que la tengo medio rara.

Después de reflexionar sobre estas dificultades y enunciar un teorema de existencia y unicidad y ver sus consecuencias, Luis logra construir la gráfica pedida.

Luis:…algo así. A menos que aparecieran otros puntos de inflexión, va!, que cambiara de curvatura en alguna otra parte de aquí.

I: Pero, crees que hayan otros puntos de inflexión. ¿Cómo te aseguras de eso?

Luis: Creo que no, pues aquí – en el gráfico – no se refleja ningún otro.

I: ¿Cómo lo ves?

Luis: Por la suavidad de la curva, no?

I: Ujum!

Luis: No tiene ningún punto en la cual este indefinido.

I: Será por la suavidad u otra propiedad.

Luis: La continuidad, no!

I: Ummm…¿Cómo se garantiza que no haya puntos de inflexión?

Luis: Estas hablándome de la solución, no de la derivada.

I: Sí, del gráfico de la solución. Y lo que quiero que veas es que cuando crece no hace onditas.

Luis: Es que creía que me decías que como podía asegurarlo, pero yo lo miraba en la derivada, vaya!. Que la derivada era….- señalando el gráfico de la cosecante.

I: Exactamente. Viendo esto – el gráfico de la cosecante- como aseguras que la solución no hace ondas. Crece pero no hace ondas.

Luis: ¿Cómo garantizo que aquí no hay puntos de inflexión?…no es que si habrían puntos de inflexión aquí – señalando la gráfica de la cosecante- aparecerían puntos en los que no estaría definida, no?

I: Ummm…

Luis: Yo así lo creo. Los puntos de inflexión, forzosamente, se reflejarían en que no estaría definida la derivada, no?. Entonces habrían puntos en que la derivada no es continua, tendría pequeños saltitos.

I: ¿De qué otra manera surgen los puntos de inflexión?

Luis: Bueno, básicamente un punto de inflexión surge donde no este definida la derivada…

I: Ahora gráfica la curva solución que pasa por el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Luis: Yo la graficaría así….(ver gráfica de rojo en la figura anterior).

I: Estas poniendo el punto de inflexión en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Red sistémica de la entrevista para el problema 4

¿Qué propiedades de la gráfica de y(t) se pueden derivar de la ED?

- la monotonía los extremos, cóncavidad a través del estudio del signo de las primera y segunda derivadas
  - considera que $\frac{dy}{dt} = f(y)$ y leyendo la gráfica de f(y) determina el signo de la derivada en función de y; deriva la monotonía de la curva y=y(t)
    - obtiene que $\frac{dy}{dt} = 0$ en -1, 0, 1
      - afirma que y(t)= -1, y(t)=0, y(t)=1son soluciones de la ED
        - dibuja las soluciones de equilibrio
          - relaciona el signo de $\frac{d^2y}{dt^2}$ con la concavidad de f(y)
          - encuentra $\frac{d^2y}{dt^2} = f(y)f'(y)$ y analiza su signo en $]0,1[$ interpretando f'(y) geométricamente
            - determina la concavidad
            - afirma que (0,1/2) es punto de inflexión
            - no afirma que (0,1/2) es punto de inflexión
              - construye una grafica coherente
      - afima que la curva que se busca está contenida entre y(t)=0 y y(t)=1 por el teorema anterior
      - afirma que -1, 0, 1 son puntos critícos
        - observa que y(t)=-1, y(t)=0, y(t)=1 son soluciones
          - afirma que en y=0 hay un máximo; confunde (t, y(t)) y (y, f(y))
      - afirma que en (0,0) hay un máximo
        - relaciona $\frac{d^2y}{dt^2}$ con f'(y) e interpreta f'(y) geométricamente en la grafica de f(y)
          - determina la concavidad en $]0,1[$
            - es cóncava hacia abajo en $]0,\frac{1}{2}[$
            - es cóncava hacia arriba en $]\frac{1}{2},1[$
              - construye una gráfica incoherente

Luis

    - encuentra $\frac{d^2y}{dt^2} = f(y)f'(y)$ y analiza su signo en interpretándo f'(y) geométricamente
      - determina la concavidad
        - afima que la curva que se busca pasa por (0,1/2) y no va a cruzar las rectas y(t)=0 y y(t)=1, por el teorema de existencia y unicidad
          - primero hace una grafica incoherente
          - luego hace una grafica coherente

Alex

Observaciones al problema 4

Como en el problema 3, todos consiguen construir la gráfica de la solución y(t) y llegan a dar la impresión de que han asimilado reflexivamente el método. Pero, otra vez, la evidencia recogida cuando se les pide que construyan las gráficas que pasan por los puntos $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ o $\left(0,\frac{3}{4}\right)$*parece decir lo contrario e indican que su pensamiento es incoherente.*

Alex: ésta tendría la misma forma que ésta (refiriéndose a la curva que pasa por $\left(0,\frac{1}{2}\right)$) sin cortarla, y siempre seria asíntotica a las rectas $y=0$ y $y=1$(ver figura anterior).

I: Será cierto que el punto de inflexión ocurre en el punto $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

Alex: No porque …ummm…

I: ¿Qué está pasando con la concavidad en la franja $\left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$?

Alex: La concavidad es hacia arriba porque estoy en la franja $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ …entonces tendría que seguir siempre así, subiendo, pero no siempre por que cortaría a *y=1*…entonces tiene que cambiar en algún punto.

I: ¿En qué punto se da ese cambio?

Alex:…ummm…parece que en *y=1/2* .

I: ¿Cómo podría asegura eso?

Alex:…ummm…

I: Bueno, paremos aquí.

I: ¿Por qué aquí en las franjas $\left]\frac{1}{2},1\right[$ o $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ la función no hace onditas?

Mar:…ummm…

I: o ¿por qué no hay otros puntos de inflexión?.

Mar: …ummm…

Por su parte, Luis tiene algunos conflictos y confusiones con la presencia de las gráficas de $\frac{dy}{dt} = f(y)$ *y la de la solución buscada.*

Luis: Vamos a ver si me funciona normal- $\frac{dy}{dt} = f(y)$-. …esperate, vamos a ver… esta corta en 1,0, y en –1, va!

I: ¿Qué esta sucediendo en esos puntos?

Luis:…ummm…

I: ¿En –1, 0, y 1 que sucede?

Luis: Son puntos de , máximos o mínimos. Son puntos críticos .

I: ¿Puntos críticos?

Luis: Este vale 0 y este vale ½…ah! es que lo pedís en (0, ½), yo lo estaba asociando con ésta. Pero sale que el (0, ½)….este es ½, no!, Si no me equivoco (señalando el mínimo local del gráfico de f(y)).

I: Bueno, podríamos suponer que es ½.

Luis: El problema es que ese punto esta aquí.

I: Sí, ujum…

Luis: Es y = ½…vamos a ver como le hacemos a este…en y = 0 hay un punto…ummm…Esperate vamos a ver, corta aquí, es decreciente, no!

I: ¿Quién es decreciente?

Luis: Aquí es más, menos, más, menos. Es máximo, no?

I: Máximo?…dibújalo!

Luis: Este ½ no hallo como meterlo. Es que en y = 0 me sale un máximo, en y = 0. En y = 1 y y = -1…vaya entonces en y = -1 me sale…

I:A ver, no entiendo por que decís que en y = 0 te aparece un máximo.

Luis: No, porque aquí la primera derivada, esto me esta dando la primera derivada, esto da el comportamiento de la derivada, no?. Entonces, me esta diciendo que aquí es más y aquí es menos; esto significa que esta derivada aquí es más y aquí es menos.

I: Sí, sí.

Luis: Vaya, entonces la función tiene que ser creciente, decreciente; creciente, decreciente, tengo un máximo, no!

Luis: Pero a mí lo raro que me pasa aquí es de que aquí me parece que en y= 0 me aparece un máximo.

I: ¿Por qué insistís en que en y = 0 aparece un máximo?

Luis: Porque miro que si esta es la derivada, esta aparece positiva aquí y negativa aquí. Más, menos me aparece…

Luis: Bueno, agarro este pedazo, $]0,1[$, y en ese… tendría que…Bueno llegaríamos a la misma situación que antes, en $\frac{\pi}{2}$,…

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \begin{cases} < 0, en \left]0,\frac{1}{2}\right[\\ = 0, \text{ en } y = 1/2 \\ > 0, en \left]\frac{1}{2},1\right[\end{cases}$$

Bueno, va! Entonces, como hemos dicho que en ½ corta a *y,* y $\frac{d^2y}{dt^2}$ es cero en ½…

I: Sí, sí

Luis: tendríamos el mismo comportamiento anterior, la función seria cóncava hacia arriba en $\left]\frac{1}{2},1\right[$ y cóncava hacia abajo en $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ …entonces obtendríamos la misma solución de antes, no?

I: Bueno, parecida.

Luis: Parecida me sale…Ah ja! f siempre es negativa…entonces tengo una función decreciente, no!

I: Sí.

Luis: El punto de inflexión lo tengo aquí en (0, 1/2), va!

I: Ahora, hace la gráfica.

Luis:...ummm…sólo me aparece un punto de inflexión porque la segunda derivada solo se anula en ½, porque en ese pedazo f solo tiene una tangente horizontal. Pero…no pega!…¿qué está mal?

Conclusiones y trabajos futuros

Las conclusiones las redactamos en cuatro apartados, siguiendo las preguntas generales y los objetivos planteados en la sección 0.2 y los objetivos específicos de la sección 2.4.1: conclusiones generales, metodológicas, experimentales y una sección de trabajos futuros.

Conclusiones generales

En primer lugar, a pesar de lo incompleto de la investigación y las dificultades teóricas y metodológicas encontradas en la práctica, podemos decir que la experiencia ha resultado sumamente rica y formativa y ,en general, nos ha permitido informarnos del estado actual de la investigación didáctica en el área del Cálculo, así como apropiarnos de las principales herramientas metodológicas para realizar investigaciones didácticas.

En segundo lugar, hemos revisado y valorado los principales constructos teóricos y metodológicos que se han elaborado en las investigaciones del Pensamiento Matemático Avanzado en el nivel universitario. Así, por ejemplo, aunque en este trabajo hemos privilegiado la teoría de los Esquemas Conceptuales para describir y analizar las respuestas de los estudiantes, el sólo hecho de habernos informado de la teoría APOS, nos abre la posibilidad de contar con un marco teórico concreto y adecuado para continuar con la experimentación de las ideas que aquí han surgido. Pues, una vez que hemos detectado que los estudiantes poseen esquemas conceptuales pobres, débiles e incoherentes (lo cual es nuestro caso), las preguntas naturales que surgen son qué y cómo podemos hacer para enriquecer y evolucionar esos esquemas conceptuales de tal manera que sean ricos, flexibles y robustos. En este sentido, creemos que la teoría APOS, en tanto que exige elaborar un modelo epistemológico que describa qué conceptos y qué constructos mentales deben construirse en la mente del sujeto para comprender un concepto matemático dado, está en continuidad con el tema y objetivos de este trabajo.

En general, tenemos la convicción de que el camino recorrido nos ha preparado para diseñar, experimentar y evaluar situaciones de enseñanza y aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales ordinarias (EDO) bajo el enfoque cualitativo, así como para estudiar en profundidad el pensamiento de los estudiantes sometidos a esas situaciones alternativas, con el objetivo es hacer evolucionar los sistemas didácticos y romper con el largo predominio o exclusividad del registro de representación y modo de pensamiento algebraico y algorítmico.

También, la revisión bibliográfica que hemos realizado en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, nos ha pemitido constatar que si bien es cierto que existen varias propuestas curricurales de reforma del pimer curso de EDO, que se basan fuertemente en el uso de la tecnología, son muy pocos los estudios cognitivos que se han realizado para abordar el efecto de tales cambios y las dificultades específicas que aparecen en el pensamiento de los estudiantes sometidos a tales currículos. Asimismo, no hemos encontrado propuestas curriculares dirigidas y pensadas para aquellos sistemas educativos que no están en la posiblidad de hacer un uso intesivo y masivo de la tecnología, pero que demandan de manera urgente romper con la exclusividad de los procesos de algebrización y algorítmización dominantes todavia en la enseñanza y aprendizaje de las EDO, y de manera más general del cálculo.

Entre las limitaciones y dificultades de este trabajo se tienen la compartimentalización y rigidez de los esquemas conceptuales de los sujetos investigados en torno al concepto de la derivada. La compartimentalización se refiere a la existencia de conocimientos y/o habilidades en los registros de representación algebraico y gráfico, pero con muy poca o ninguna interacción entre si. La rigidez se refiere a que independiente del registro en el que se plantea el problema, los estudiantes utilizan siempre la misma estrategia algebraica y muestran poca aceptación por los métodos cualitativos. Por lo tanto, como es evidente, un dominio de las relaciones entre una función y sus derivadas en los registros algebraico y gráfico es una condición necesaria para emprender un enfoque cualitativo de las EDO.

Conclusiones metodológicas

En el aspecto metodológico, podemos afirmar que el uso de las redes sistémicas han resultado ser herramientas muy útiles para interpretar, organizar y presentar las rutas o tendencias espontáneas en las producciones de los estudiantes y poder así caracterizar sus esquemas conceptuales.

Asimismo, sentimos la necesidad de afinar y profundizar en el uso de las entrevistas grabadas, pues ante la poca colaboración y bloqueos de los sujetos investigados, hemos reaccionado de la manera más fácil posible: brindando explicaciones para encauzar su pensamiento. Evidentemente, esto es una debilidad metodológica de este estudio, y el efecto o sesgo que ello puede provocar en las respuestas de los estudiantes no ha sido tomado en cuenta. Sin embargo, creemos que se deben buscar estrategias y técnicas específicas para minimizar tales influencias y procurar que las respuestas de los sujetos investigados sean lo más naturales y espontáneas como sea posible. Tal vez, emprendiendo un estudio longitudinal para estudiar la evolución de los conocimientos y/o habilidades de los estudiantes y realizando entrevistas en profundidad en sujetos estratégicos, se podrían minimizar los sesgos que impone un estudio muy puntual como el presente.

Respecto al cuestionario, podemos decir que las tareas o los poblemas planteados pemiten romper con la exclusividad del modo de pensamiento algebraico/algorítmico, y pueden provocar la reflexión del estudiante para enriquecer y hacer evolucionar sus esquemas conceptuales del concepto de derivada y ecuación diferencial. Además, éste ha permitido evidenciar que las habilidades algebraicas y algorítmicas por sí solas no garantizan la comprensión de los conceptos básicos, asi como su aplicación para resolver tareas plantaeadas en el registro gráfico. También, se ha detectado la presencia de aprendizajes mecánicos del método de separación de variables. En fín, creemos que estas características, complementan la validación del cuestionario hecha por los expertos.

Conclusiones experimentales

La evidencia experimental sugiere que existe una tendencia muy fuerte hacia el modo de pensamiento o conocimiento procedimental, así como una presencia muy fuerte de aprendizajes mecánicos. Esto es así porque:

- independientemente del registro en el que se plantea el problema (algebraico o gráfico), todos los estudiantes investigados movilizan en un primer momento su esquema algebraico/algorítmico del método de separación de variables, aunque éste carezca de sentido (ver problemas 2 y 4), y lo aplican mecanicamente sin utilizar ningún control conceptual tanto a los procedimientos ejecutados como a los resultados obtenidos. Por ejemplo, separan mal las variables en la ecuación $\frac{dy}{dt} = sen(y(t))$, debido a la presencia de la variable t. También, se ha aplicado mecanicamente en los problemas 2 y 4, ignorando por completo la grafica de la función del lado deecho de la EDO dada.

- en las producciones de los estudiantes, las relaciones entre las propiedades cualitativas (locales y globales) de una función y sus derivadas, se observan sólo en el registro algebraico.Y las relaciones en el registro gráfico, aparecen en un segundo plano. En efecto, éstas últimas fueron movilizadas sólo después de haber sido sugeridas por el investigador.

- en el momento de construir las graficas pedidas, se observan serias dificultades para articular la información cualitativa y verbal de una función (intervalos de monotonía, concavidad, etc), que ha sido obtenida del análisis de su primera y segunda derivadas. Esto se traduce en la construcción de gráficas incoherentes. Estas incoherencias persisten, aún después de haber logrado resolver con éxito los problemas 3 y 4, previa discusión y negociación de significados con el investigador. En efecto, al cambiar la condición inicial en esos problemas, todos afirman que el análisis y las conclusiones que han obtenido antes se conservan, pero a la hora de graficar producen gráficas incoherentes. Vale decir que esto permitió rechazar la ilusión de que los estudiantes habían asimilado significativamente el método cualitativo.

- para derivar la información cualitativa de una función (intervalos de monotonía, concavidad, etc), haciendo el análisis de su primera y segunda derivadas, todos muestran la necesidad de contar con una fórmula para la función, para poder así reproducir su esquema del cálculo. Esto mismo se observa en la estrategia que utilizan todos para resolver los problemas del cuestionario (gráficar una solución de una EDO): 1) encontrar una fórmula para la solución y, 2) graficar la fórmula obtenida haciendo análisis de la pimera y segunda derivadas. Ninguno se dió cuenta que esta estrategia es circular, pues la primera derivada está en la ecuación diferencial.

- Los items 3.2 y 4.2 del cuestionario que demandan encontrar un limite, han dejado estupefactos a todos los estudiantes por no contar con una fórmula.

De otra manera, se puede afirmar que la ruta natural (evidentemente condicionada por las experiencias previas) y espontánea que aparece en el pensamiento de los sujetos investigados es la algebraica/algorítmica ; y que la ruta cualitativa emerge con muchas limitaciones y dificultades conceptuales sólo depués de haber sido sugerida por el investigador. También, se ha observado que algunos estudiantes son capaces de realizar con éxito tareas en los registos algebraico y gráfico de manera independiente, pero no son capaces de establecer conexiones entre los dos registros. Por ejemplo, nínguno ha sido capaz de darse cuenta de la equivalencia de los problemas 1 y 2. Esto permite: 1) confirmar la tesis, ya mencionada en otros estudios de área didáctica del cálculo, que el desarrollo de habilidades algebraicas por si sólas no garantizan una comprensión conceptual, y 2) rechazar la tesis de que la actividad de conversión entre representaciones resultaría por si misma, en una forma rápida y espontánea, desde el momento en que el estudiante ha sido capaz de formar esas representaciones y de efectuar tratamientos sobre ellas (ver sección 1.7.1, p. 65).

A pesar de haber negociado que para resolver los problemas del cuestionario no es necesario conocer explícitamente la solución y que, por el contrario, es posible derivar las propiedades cualitativas de la curva solución directamente de la ED, el predominio del pensamiento procedimental y el modo algebraico/algorítmico, persiste, con muchas incoherencias y limitaciones:

- para deteminar el signo de la derivada se construye un cuadro de variación, aun cuando esto no es necesario.
- para determinar la concavidad, todos sienten la necesidad de hallar una fórmula para la segunda derivada y, además, no aceptan argumentos gráficos/intuitivos basados en la suavidad para deteminarla. En particular, se observa que en todos los sujetos la idea de extremo aparece limitada a puntos diferenciables.
- todos aplican su esquema de las técnicas del cálculo diferencial, independientemente de que la ecuación sea no autónoma ($\frac{dy}{dt} = f(t)$) o autónoma ($\frac{dy}{dt} = f(y)$).
- ninguno fue capaz de enunciar e interpretar un teorema de existencia y unicidad para las EDO.
- a pesar de haber resuelto con éxito los problemas 3 y 4, al cambiar la condición inicial, todos afirman que los análisis y las conclusiones que han obtenido antes se conservan, pero a la hora de graficar producen gráficas incoherentes.

Finalmente, los datos empíricos recogidos en los cuestionarios y las entrevistas pueden ser organizados en las siguientes categorías, que caracterizan los esquemas conceptuales de los estudiantes.

Categoría I: Deriva directamente de la ED las propiedades necesarias para construir la gráfica de la curva solución, sin sentir la necesidad de encontrar una fórmula.

Subcategoría I.1: construye una gráfica coherente con las propiedades derivadas.

Subcategoría I.2: construye una grafica incoherente con las propiedades derivadas.

Subcategoría I.3: no construye la gráfica pedida.

Categoría II: Siente la necesidad de encontrar una fórmula para poder graficar curva la solución.

Subcategoría II.1: Obtiene una fórmula correcta para la curva solución usando algún método de integación.

II.1.1: Intenta construir la gráfica por medio de una tabla de valores o usando la tecnología.

II.1.2: Utiliza las técnicas del cálculo diferencial para deducir las propiedades de la curva y construye una gráfica coherente con esas propiedades.

II.1.3: Utiliza las técnicas del cálculo diferencial para deducir las propiedades de la curva, pero no construye una gráfica coherente con esas propiedades.

II.1.4: No intenta construir la grafica de la curva solución.

Subcategoría II.2: Obtiene una fórmula incorrecta para la curva solución como consecuencia de haber cometido algún error algebraico o haber utilizado mal el método de separación de variables.

II.2.1: Intenta construir la gráfica por medio de una tabla de valores o usando la tecnología.

II.2.2: Utiliza las técnicas del cálculo diferencial para deducir las propiedades de la curva y construye una gráfica coherente con esas propiedades.

II.2.3: Utiliza las técnicas del cálculo diferencial para deducir las propiedades de la curva, pero no construye una gráfica coherente con esas propiedades.

II.2.4: No intenta construir la grafica de la curva solución.

Categoría III: Mixta, que combinan algunos aspectos de las categorías I y II, es decir, obtiene propiedades de la solucion de la fórmula de la solución y de la ecuación diferencial.

Como se esperaba, los estudiantes investigados no movilizaron de manera espontánea la categoría I. Y por el contrario, todos han seguido alguna de las trayectorias planteadas por la categoría 2. La categoría III se observa de manera muy débil, después de la intervención del entrevistador. Además, las dificultades encontradas por los estudiantes para asimilar la ruta cualitativa, los conducen a rutinizar las estrategias de solución presentadas.

Aunque no se estudia directamente la definición de EDO, puede decirse que la concepción implícita, pero dominante, de este concepto es el de una relación algebraica/simbólica.

Por lo tanto, se puede concluir que los esquemas conceptuales de estos estudiantes se caracterizan por: 1) el predominio exclusivo del modo de pensamiento algebraico/algorítmico y 2) la presencia de conexiones cognitivas muy débiles para realizar tareas de conversión entre los registros gráficos y algebraicos.

Por otra parte, el modo de pensamiento algebraico y algorítmico puede considerarse como un obstáculo didáctico y cultural, ya que cumple con todas las características de un obstáculo señaladas en la sección 1.6.

Trabajos futuros

Una vez que se ha detectado que los esquemas conceptuales de un concepto matemático son pobres, débiles e incoherentes (lo cual es nuestro caso), las preguntas naturales que surgen son qué y cómo podemos hacer para enriquecer y evolucionar esos esquemas conceptuales de tal manera que sean ricos, flexibles y robustos. En este sentido, creemos que la teoría APOS, en tanto que exige elaborar un modelo epistemológico que describa qué conceptos y qué constructos mentales deben construirse en la mente del sujeto para comprender un concepto matemático dado, está en continuidad con el tema y objetivos de este trabajo. Y por lo tanto, un trabajo futuro podría ser el diseño de una descomposición genética del concepto de solución de una ecuación diferencial de primer orden que integra los aspectos fenomenológicos, las diferentes representaciones semióticas y hace un uso adecuado de los recursos tecnológicos disponibles en Internet. El objetivo sería promover una comprensión más acorde con la epistemología específica del campo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Evidentemente, con esto delimitamos y concretamos el marco teórico, y asimismo afinamos la metodología de investigación. Posteriormente, deberemos abodar el diseño, experimentación y evaluación de una propuesta didáctica para las EDO acorde con la descomposición genética elaborada.

Otro trabajo, que aquí queda pendiente, es profundizar en el estudio histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para buscar hechos históricos particulares que permitan enriquecer las propuestas didácticas.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (1993). Las matemáticas en la educación secundaria, *en Signos*, 13, 70-81.

Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingenierie didactique sur l' enseignement des equations differentielles en premier cycle universitarie, IREM, Université Paris 7, Cahiers du Séminarie de Didactique des mathématiques et de l'informatique No 107, 284-209.

Artigue, M. (1991). Analysis, en Tall, D. (ed*): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press.*

Artigue, M. (1992). Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices, *en Dubinsky, E. & Harel, G (eds),The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25. Washington, DC: MAA.*

Artigue, M. (1994).Didactical Engineeering as a Framework for the Conception of Teaching Products, *en Bielher & col. (eds), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Kluwer Academic Press, 27-29.*

Artigue, M.(1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, *en Gómez, P.(ed), Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamerica.*

Artigue, M.(1998). L' evolution des problematiques en didactique de l'analyse*, en Recherches en Didactique des Mathématiques, 18(2), 231-262.*

Artigue, M.(2000). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñanlas investigaciones didácticas y los cambios curiculares?, *en El futuro del Calculo Infinitesimal, ICME-8, Sevilla, España.*

Asiala, M, Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, *en Research in Collegiate Mathematics Education 2, 1-32.*

Azcárate, C. (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona.

Azcárate, C. (1995) Acerca del Pensamiento Matemático Avanzado, memoria de oposición.

Azcárate, C., Moreno, M. & Romero, C. (1998) Acerca del Modelo de los Esquemas Conceptuales.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación, *en UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, No 4, 53-61.

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000) A Calculus Graphing Scheman, *en Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 31

Blanchard, P. (1994) Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint, *en The College Mathematics Journal*, 25, 385-393.

Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G. (1999) *Ecuaciones Diferenciales*, International Thomson.

Bliss, J. & Ogborn, J. (1979). L'anàlisi de dades qualitatives, *en European Journal of Science Education*, 1(4), 427-440.

Brousseau, Guy (1997) *Theory of Didactical Situations in mathematics*, Kluwer Academic Publishers.

Cantoral, R. (1994) Los Textos de Cálculo: una visión de las reformas y contrareformas, *en Mem Centroam. y Caribe Form. Prof. e Inv. en Mat. Educ. 8(1).*

Cantoral, R.(1995). Acerca de las contribuciones de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor, *en Mathesis* 11(1), 55-101.

Chau,O. & Pluvinage, F. (1999) Comparaison de compétences dans les approches algébrique, qualitative et informatique des équations différentielles ordinaires en premiére année universitaire, en Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 195-220.

Cornu, B. (1991). Limits, *en Tall, D. (ed): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press.*

Demana, F. & Waits, B. (2000). The teaching and learning of calculus with technology, *en El futuro del Calculo Infinitesimal, ICME-8, Sevilla, España.*

Devaney, R. (1995) Introduction to differential equations, en http://math.bu.edu/odes.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes, *en Tall, D. (ed): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press*

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992).The nature of the process of function, *en Dubinsky, E. & Harel, G (eds),The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25, p. 85-126. Washington, DC: MAA*.

Dubinsky, E. (1991) Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, *en Tall, D. (ed): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press.*

Eisenberg, T. (1991). Functions and Associated Learning Difficulties, *en Tall, D. (ed): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press*

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994) Research in calculus learning: understanding of limits, derivates, and integrals, en Dubinsky, E. & Kaput, J.,(eds),Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning, MAA notes 33, p. 31-45. Washington, DC: MAA.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años*, Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona.

Gray, E. & Tall, D. (1993).Success and Failure in Mathematics:The flexible meaning of symbols as process and concept, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic*, en Journal for Research in Mathematics Education 25(2), 115-141.*

Habre, S. (2000) Exploring students'strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting*, en Journal of Mathematical Behaivor, 18(4), 455-472.*

Harel, G. & Trgalová, J.(1996). Higher Mathematics Education, en A.J Bishop et al. (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, 675-700.

Hernández, A. (1994). *Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, algebraico y gráfico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias*, Cuadernos de Investigación No 30, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.

Heid, K. & Ferrini-Mundy, J. (1999). The role of advanced mathematical thinking in mathematics education reform, PME-NA XXI, en http://www.cinvestav.mx/mat_edu/heid.html.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: An introductory analysis*, en J. Hiebert (ed). Hillsdale, NJ: Elbaum.

Hubbard, J.H. & West, B.H. (1991) Differential Equations, a Dynamical Systems Approach part I. Editorial Springer-Verlag.

Jorba, J., Gómez, I.& Prat, A. (2000) Hablar y escribir para aprender, Instituto de Ciencias de la Educación, Editorial Síntesis.

Kaput, J.(1992). Technology and mathematics education, *en Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Douglas A. Grows (editor). NCTM.

Koblitz, N.(1996). The Case Against Computers in K-13 Math Education (Kindergarten through Calculus), en http://www.math.washington.edu/koblitz/mi.html.

Lakatos, I. (1981) Matemáticas, ciencia y epistemológia, Alianza, Madrid.

Latorre, A., Del Rincón, D. & Arnal, J. (1996) *Bases Metodológicas de la Investigación Educativa*. Barcelona: Gr 92.

Moreno,M. & Azcárate,C.(1997) Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología. Estudio de casos*, en Enseñanza de las Ciencias,* 15(1), 21-24.

Moreno, M. & Azcárate,C.(2000). Enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología. Estudio de casos*, en en El futuro del Calculo Infinitesimal, ICME-8, Sevilla, España.*

Moreno, M. (2000). *El profesor universitario de matemáticas: Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos*. Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona.

Pinto, M. & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning, *en Proceedings of the* 23rd *Conference of PME, Haifa, Israel*, 3, 281-288.

Pinto, M. & Tall, D. (2001). Following students' develoment in a traditional university analysis course, *en* http://www,warwick.ac.uk/staff/David.Tall

Sanmartí, N. (1993). *L'ús de les xarxes sistèmiques en la recerca en Didàctica de les Ciències*, documento interno Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, Universidad Autónoma de Barcelona.

Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as differents sides of the same coin, *en educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor, *en For the Learning of Mathematics*, 14, p.44-55.

Sfard, A. (1998). How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other, *en P. Cobb, K.E Yackel &K. McClain (Eds), Simbolizing and Communicating: perspective on Mathematical Discourse and Instruccional Desig*, p. 37-98, Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sfard, A. (1999). Steering (dis)course between mathaphors and rigor: using focal analisys to investigate an emergence of mathematical objects, *en* http://construct.haifa.ac.il/~annasd/sfard_Wd8_2.htm

Sierpinska, A. (1985). Obstacles Épistémologiques Relatifs à la notion de Limite, *Recherches en Didactique des mathématiques* 6(1), 5-67.

Tall, D. & Dreyfus, T. (1989) Images and definitions for the concept of function, *en Journal for research in Mathematics Education*, 20, 356-366.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity, *en Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press.

Tall, D.(1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof, *en Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Douglas A. Grows (editor). NCTM

Tall, D. (1996). Functions and Calculus, en A.J Bishop et al. (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325.

Tall, D. (2000a). Cognitive Development In Advanced Mathematics Using Technology, en Mathematics Education Research Journal, Vol. 12, No. 3, p. 210-230.

Tall, D. (2000b). Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking end learning*), en* http://www,warwick.ac.uk/staff/David.Tall .

Tall, D. (2000c). Technology and versatile thinking en mathematics, en *en* http://www,warwick.ac.uk/staff/David.Tall .

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. & Yusof, Y. (2000). Simbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking, en Canadian Journal of Science, Mathematics and Tchnology Education, Vol. , http://www,warwick.ac.uk/staff/David.Tall

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitios for the concept of function, *en Journal for research in Mathematics Education 20, 356-366.*

Vinner, S. (1994) The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, *en Tall, D. (ed): Advanced mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Press*

Wertsch, J. (1988) Vygotsky y la formación social de la mente. *Editorial Paidos.*

Zill, D. (1988). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones, Ed. Ibeoamérica.