UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

CONSTRUCCÍON Y VALIDACIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

Trabajo de Investigación Tutelada

MARTÍN ENRIQUE GUERRA CÁCERES

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, 2013

UNIVERSIDAD DE GRANADA

CONSTRUCCÍON Y VALIDACIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

Investigación presentada por D. Martín Enrique Guerra Cáceres y realizada como Trabajo de Investigación Tutelada dentro del Programa de Doctorado Cooperativo Investigación e Innovación Educativa de la Educación Superior, que se imparte en la Facultad de Ciencias y Humanidades de la Universidad de El Salvador, para optar al Diploma de Estudios Avanzados otorgado por la Universidad de Granada.

Fdo. Martín Enrique Guerra Cáceres

Vo.Bo La Directora

Fdo. Dra. Carmen Enrique Mirón

El Salvador, 2013

Reconocimientos

Quiero expresar mis agradecimientos a todas y todos los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales que han colaborado y contribuido en el desarrollo de este trabajo.

Resumen

Desde la perspectiva de la Teoría APOS (Actions, Process, Objects, Schemas) y la metodología RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), en este trabajo se construye y valida una *Descomposición Genética* del concepto de solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de primer orden, que pretende favorecer la coordinación flexible de los métodos cuantitativos y cualitativos comunmente usados en el estudio de las soluciones de una ecuación diferencial. Los métodos cuantitativos, privilegian los modos de trabajo algebraico, simbólico y algorítmico y se enfocan a la resolución explícita o numérica de las ecuaciones. Los métodos cualitativos, combinan técnicas analíticas, geométricas y visuales para obtener información sobre el comportamiento de las soluciones, sin llegar a resolver explícitamente la ecuación. Ambos métodos se complementan entre sí, fortalecen la comprensión matemática y ayudan a tratar las restricciones y las consecuentes limitaciones que aparecen cuando se usa la tecnología para estudiar las soluciones de una ecuación diferencial. A partir de esta descomposición genética se han elaborado y experimentado secuencias de aprendizaje, la cuales permiten recoger una variedad de producciones orales y escritas (exámenes, tareas y entrevistas) de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que demandan describir el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden. Estas producciones se han analizado para determinar hasta qué punto y cómo los estudiantes utilizan y coordinan los aspectos gráficos y algebraicos relacionados al concepto de solución de una EDO, qué dificultades muestran y cómo intentan vencer dichas dificultades. Los resultados obtenidos permiten afirmar que la Descomposición Genética y las correspondientes secuencias de aprendizaje han permitido desequilibrar el modo de pensamiento procedimental, algebraico y algoritmico predominante en los estudiantes y, a la vez, han provocado la necesidad de reequilibrarlo con objetos, acciones y procesos de corte cualitativo, superando la exclusividad de los procesos de algebrización y algoritmización a que ha estado sometida la enseñanza y el aprendizaje de ésta disciplina durante mucho tiempo.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Con el propósito de superar el largo predominio y exclusividad de los procesos de algebrización y algoritmización en el currículum tradicional de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), en los últimos 35 años los sistemas didácticos se han venido enriqueciendo con resultados positivos de una variedad de investigaciones didácticas que indagan sobre el pensamiento de los estudiantes (Arslan, 2010a,b; Artigue, 1992; Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2009, 2012a,b; Dana-Picard y Kidron, 2008; Evangelista, 2011; de~Gyves, 2006; Guerra, 2002, 2003; Guerrero, Camacho y Mejía, 2010; Habre, 2000, 2002, 2003, 2012; Hubbard, Habre y West, 2001; Kwon, 2009; Rasmussen, 1996, 2001; Rasmussen y Whitehead, 2003; Raychaudhuri, 2007, 2008; Rowland y Jovanoski, 2004; Rowland, 2006) e innovaciones curriculares en las cuales se promueve la coordinación de los aspectos numéricos, algebraicos y gráficos (Blanchard, 1994; Blanchard, Devaney y Hall, 1997; Borrelli y Coleman, 2004; Boyce y DiPrima, 2001; Devaney, 1995; Hubbard y West, 1991, 1995, 1997; Kallaher, 1999; Lomen, 1999; Lomen y Lovelock, 2000; Pérez, Hernández y Montaner, 2003; Polking, Boggess y Arnold, 2001; Ricardo, 2003; Sánchez, 2002; Shannon, 1994). Estos trabajos, guiados por el principio llamado *regla de tres* (Hughes, 1991) y las posibilidades que ofrecen las Tecnologías de la Información y la Comunicación (Dana-Picard, Kidron y Street, 2006; Dana-Picard, 2007; Dana-Picard y Kidron, 2008), sugieren implementar desde la enseñanza un enfoque didáctico que esté acorde con la epistemología específica de las EDO y articule los distintos registros de representación y, a la vez, centre el proceso instructivo en el desarrollo de la estructura cognitiva del estudiante. El mismo Poincaré (citado en Sánchez y Valdés, 2004, p. 91) señaló:

> El estudio completo de una función comprende dos partes: 1) una parte cualitativa

> (por así decir) o estudio geométrico de la curva definida por la función, 2) una parte cuantitativa o cálculo numérico de los valores de la función. Así por ejemplo, para estudiar una ecuación algebraica se comienza por buscar, con ayuda del teorema de Sturm, cuál es el número de raíces reales : está es la parte cualitativa; después se calcula el valor numérico de las raíces, lo que constituye el estudio cuantitativo de la ecuación. Del mismo modo, para estudiar una curva algebraica, se comienza por "construir" una curva, como se dice en el curso de matemáticas especiales, esto es, se buscan las ramas cerradas, las ramas infinitas, etc. Después de este estudio cualitativo de la curva podremos determinar exactamente un cierto número de puntos. Y obviamente, es por la parte cualitativa por la que se debe comenzar la teoría de cada función y es por ello por lo que el problema que se presenta en primer lugar es el de construir las curvas definidas por las ecuaciones diferenciales ... Por otro lado ese estudio cualitativo tendrá por sí mismo un interés de primer orden.

Sin embargo, el currículo de las EDO en el sistema universitario salvadoreño aún permanece impermeable a estas orientaciones o se ve poco impactado por ellas. Ello posiblemente se explica por las creencias y concepciones dominantes en el profesorado en relación con el estatus epistemológico, cognitivo y didáctico de las EDO en el currículo (Moreno y Azcárate, 1997, 2003) y al planteamiento inadecuado del rol que juega la tecnología en el desarrollo del mismo (Campillo y Devesa, 2000). En efecto, en (Guerra, 2002, 2003) se reporta un estudio cualitativo en el que se evidencia la necesidad de adecuar los resultados de estas nuevas perspectivas a contextos educativos que, como en el caso de El Salvador, tienen restricciones de todo tipo y no disponen de las condiciones materiales para utilizar de manera intensiva y masiva la tecnología. En efecto, el proceso de enseñanza y aprendizaje del curso introductorio de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en el Sistema Educativo Universitario Salvadoreño, tanto en carreras matemáticas como no matemáticas, se caracteriza como un proceso tradicional centrado en el docente que pervive exclusivamente como la continuación algebraica y algorítmica de las asignaturas de cálculo diferencial e integral, bajo el cual subyace una brecha creciente entre entre lo qué se aprende y la epistemología específica de las EDO y la comprensión conceptual y procedimental (Guerra, 2002, 2003). Ello como consecuencia de un enfoque del currículo de las EDO en el que se privilegia el uso del registro de representación[1] algebraico y simbólico, constreñido al uso intensivo de reglas y procedimientos algebraicos. La solución de EDO por métodos geométricos y gráficos, en coordinación con los métodos algebraicos y simbólicos, tiene un tratamiento marginal o es inexistente. Así, las EDO se han estado enseñando y aprendiendo durante mucho tiempo en una forma muy mecánica, a saber: primero, se clasifican las ecuaciones y, luego, se presenta para cada clase una serie de métodos de solución estrictamente algebraicos. Como resultado de este enfoque, además de perderse entre los estudiantes la visión y los nexos entre las matemáticas y su valor práctico (Hoffman, Johnson y Logg, 2004), se está generando en el estudiante esquemas conceptuales pobres y habilidades rígidas que limitan su capacidad de poder transferir los conocimientos más allá del contexto en el cual éstos se adquirieron, impidiéndose por tanto su progreso hacia niveles superiores de pensamiento (Guerra, 2002, 2003). Vale señalar que los métodos de solución simbólicos que tradicionalmente se enseñan, eran ya bien conocidos hacia 1740. Y, desde los tiempos de Euler o Cauchy, son pocos los cambios que se han realizado en los contenidos, ejercicios y énfasis de la enseñanza (Kline, 1972; Sánchez y Valdés, 2004). No obstante, el desarrollo histórico de las EDO muestra que esta disciplina se ha desarrollado matemáticamente en tres registros de representación: algebraico, numérico y geométrico (Artigue, 1992; Kline, 1972; Sánchez y Valdés, 2004). De hecho (Brodetsky, 1919, 1920a,b,c) planteó la necesidad de enseñar las EDO desde una perspectiva algebraica y geométrica.

Por otra parte, los cambios científicos, tecnológicos y educativos que se están produciendo en la sociedad actual muestran que el énfasis tradicional sobre las técnicas simbólicas para resolver una EDO resulta hoy en día limitado y poco útil para tratar con fenómenos importantes asociados con ecuaciones no lineales. Las técnicas numéricas y cualitativas son más efectivas que las analíticas. Con el advenimiento de las TIC es posible enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de los métodos de resolución de una EDO, favoreciendo la visualización, la experimentación y coordinación de los registros de representación numérico, gráfico y algebraico (ver Kallaher, 1999). En efecto, existen evidencias empíricas que señalan que aquellos estudiantes que son competentes en el registro gráfico y geométrico, sacan mejor provecho de

[1] Un sistema de representación semiótica es un sistema semiótico que permite las tres actividades cognitivas siguientes: formación de una representación identificable en un registro dado, tratamiento de esta representación, es decir, transformarla en el registro donde ha sido formada y conversión de dicha representación en otra representación de otro registro (Duval, 2006).

ambientes de aprendizaje que usan las nuevas tecnologías. Por ejemplo, (Chau y Pluvinage, 1999) reportan que universitarios de primer año que tienen éxito en las tareas cualitativas de las ecuaciones diferenciales ordinarias sacan mejor provecho del trabajo gráfico utilizando Derive que los alumnos que trabajan bien la parte algebraica. Y agregan que si bien es cierto que los métodos cualitativos se adquieren más difícilmente presentan, desde el punto de vista didáctico, el interés de favorecer la transferencia de conocimientos.

El impacto de estos cambios, tanto en la concepción como en la concreción del currículo de las EDO, se manifiesta en una fuerte necesidad de romper con la exclusividad de los procesos de algebrización y algoritmización, estableciendo un balance entre la perspectiva tradicional y la perspectiva moderna de la enseñanza y aprendizaje de las EDO (Blanchard, Devaney y Hall, 1997; Borrelli y Coleman, 2004; Boyce y DiPrima, 2001; Ricardo, 2003; Lomen y Lovelock, 2000). El interés didáctico de estos nuevos esfuerzos ya no sólo son los métodos de cuadratura, sino también los métodos cualitativos, o sea, aquéllos que nos permiten describir la geometría de las soluciones de una EDO y analizar su comportamiento, sin tener necesariamente que contar con una fórmula o disponer de recursos tecnológicos potentes para tratar con las soluciones.

Recientemente, también se ha mostrado un especial interés educativo en desarrollar las competencias de los estudiantes para modelar, intepretar, explicar, justificar y argumentar los resultados qué ellos obtienen cuando hacen un bosquejo del diagrama de soluciones o línea fase, ya sea usando lapiz y papel, las TIC o ambas herramientas; pues, tal como la misma investigación didáctica reporta, el énfasis en las tareas de conversión entre representaciones no es sinónimo de una mayor comprensión por parte de los estudiantes como tampoco tiene que ser un contenido a ser aprendido *per se* (Rasmussen y Whitehead, 2003). Por lo tanto, con el objeto de favorecer el desarrollo de la comprensión matemática (Meel, 2003) sobre la mera memorización, enriquecer el significado de los conceptos y potenciar la memoria a largo plazo, *la regla de tres* ha sido reemplazada por *la regla de cuatro*. Bajo esta última regla, no sólo se trata de favorecer la coordinación de los aspectos algebraicos, visuales y numéricos, sino también de la producción por parte de los estudiantes de las distintas tipologías textuales en el discruso matemático, actividad que juega un papel central y opera como interface entre la comprensión y el razonamiento.

En definitiva, una nueva perspectiva para la enseñanza y aprendizaje de las EDO debe tener en cuenta los propósitos siguientes:

- Promover desde la enseñanza un enfoque acorde con la epistemología especifíca de las EDO, que permita romper con la tendencia dominante del currículo hacia el modo de trabajo algebraico y algorítmico.
- Presentar el conocimiento matemático como el invariante de múltiples representaciones y promover la flexibilidad cognitiva entre los procesos de conversión entre diferentes sistemas de representación para alcanzar un aprendizaje conceptual más rico y significativo.
- Introducir las TIC en la clase de matemáticas para representar y transformar el contenido matemático, usando todas las facilidades y el poder de las herramientas gráficas y computacionales.
- Desarrollar las habilidades de los estudiantes para tratar, leer, interpretar y convertir información cuantitativa en un formato cualitativo, y viceversa.
- Facilitar a los estudiantes los medios cognitivos y culturales para el desarrollo de sus capacidades intelectuales, competencia comunicativa y habilidades para reflexionar y controlar sus producciones a fin resolver con éxito una situación-problema.

Ahora bien, hay estudios (Arslan, 2010a,b; Artigue, 1992; Evangelista, 2011; Habre, 2000, 2002, 2003, 2012; Hubbard, Habre y West, 2001; Kwon, 2009; Rasmussen, 1996, 2001; Rasmussen y Whitehead, 2003; Raychaudhuri, 2007, 2008; Rowland y Jovanoski, 2004; Rowland, 2006) que indican que los efectos esperados de estas nuevas propuesta didácticas en el pensamiento y las competencias de los estudiantes pueden ser mínimos y, a la vez, surgen nuevos problemas y desafíos didácticos. Por tanto, se hace necesario investigar las condiciones y caracteristicas de la enseñanza y el aprendizaje que permiten asegurar la viabilidad de una perspectiva metodológica (para la enseñanza y el aprendizaje del primer curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en el sistema educativo universitario salvadoreño) que equilibra los registros de representación gráfico y algebraico de las soluciones de una EDO.

Capítulo 2

Planteamieno del problema

2.1. Consideraciones iniciales

La observación espontánea como profesor durante la enseñanza de los tópicos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden bajo un enfoque tradicional, me ha permitido constatar la presencia en los estudiantes de esquemas pobres y rígidos del concepto de solución de una EDO. Por ejemplo, cuando a los estudiantes, después de haber aprendido a resolver ecuaciones lineales, se les pide resolver el problema de valor inicial

$$y' - 2xy = 1, y(0) = -\frac{1}{2}$$

se observa que, sin grandes dificultades, todos son capaces de obtener la solución

$$y(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt - \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

Demostrando con ello que tienen un dominio aceptable de la técnica algebraica-simbólica correspondiente. Sin embargo, unos tienen serias dificultades para identificar el dominio de la solución y acceder a las propiedades cualitativas de $y(x)$, careciendo de una imagen gráfica para ella. Otros el único significado que atribuyen a la expresión de $y(x)$ se reduce a una mera fórmula y, en el mejor de los casos, algunos llegan a afirmar que para calcular $y(a)$ es necesario utilizar algún método de integración numérica. Y están aquéllos que no creen que tales expresiones sean respuestas tan aceptables como aquéllas en las que sólo aparecen funciones elementales. No obstante, haciendo uso de los teoremas de existencia y unicidad y del cálculo elemental, las propiedades locales y globales de la solución se obtienen inmediatamente.

Un fenómeno semejante reporta Shannon (1994) para la solución

$$y(x) = e^{1-x} - e^{x-1} + \frac{e^x}{2}\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \frac{e^{-x}}{2}\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

del problema de valor inicial

$$y'' - y = \frac{1}{x},\ y(1) = 0,\ y'(1) = -2:$$

Los estudiantes no creen que la fórmula encontrada sea una respuesta aceptable.

Por otra parte, al resolver el problema de valor inicial

$$y' + \mu y = x, y(0) = y_0$$

se observa que el trabajo se limita a obtener la fórmula

$$y(x) = (y_0 + \frac{1}{\mu^2})e^{-\mu x} + \frac{1}{\mu^2}(\mu x - 1).$$

Dejándose de lado el estudio de cómo afecta la variación del parámetro μ el comportamiento de las soluciones (ver Gollwitzer, 1991, p. 150).

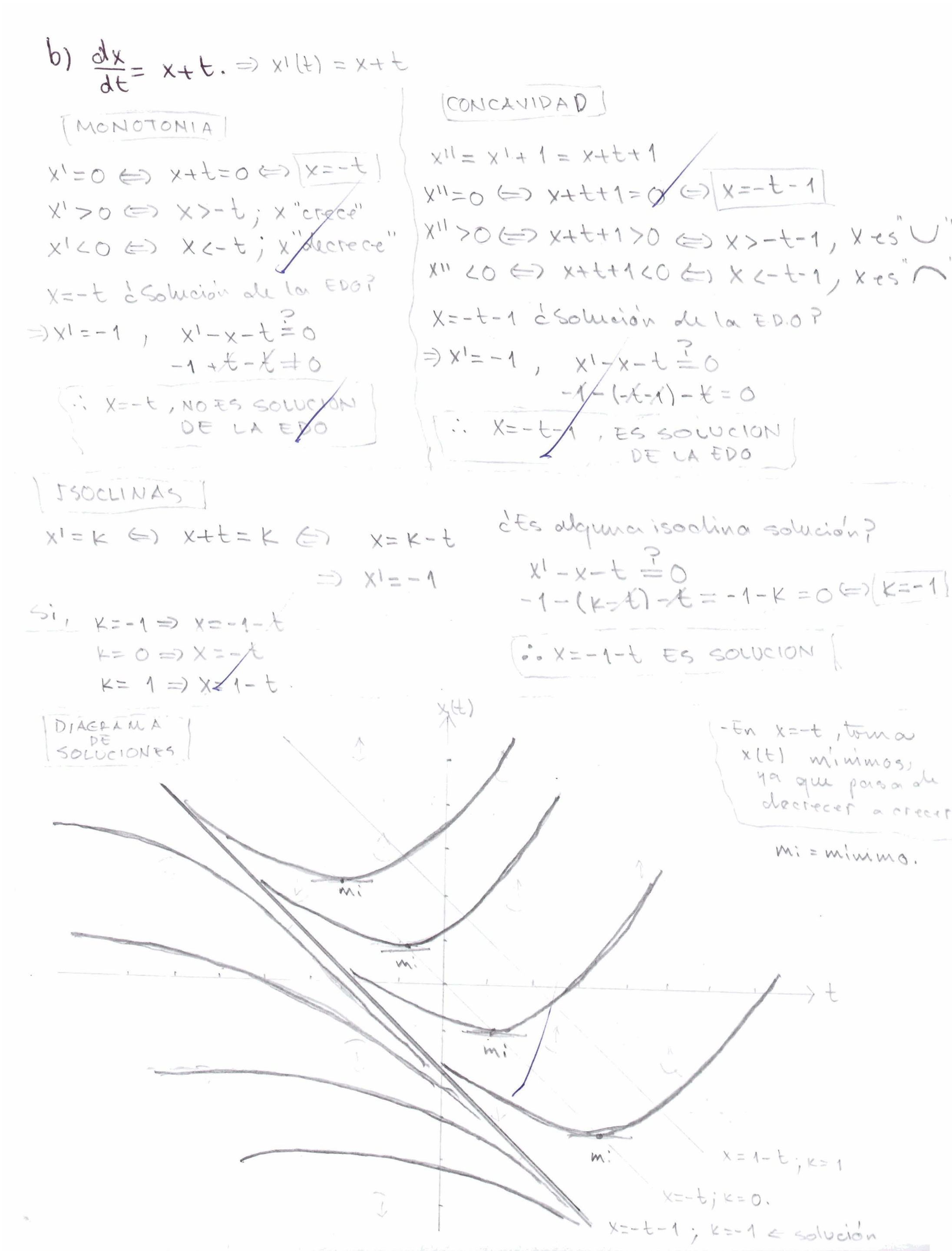
Bajo esta perspectiva, muchos estudiantes llegan a creer de que siempre existe una receta para integrar la ecuación y que la respectiva solución se representa mediante una fórmula en términos de funciones algebraicas, exponenciales, trigonométricas, etc. (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2009, 2012a,b) señalan que los estudiantes tienen la idea de que el proceso de resolver una ecuación diferencial se reduce a la aplicación de una serie de métodos. Cuando los estudiantes afirman: *esta ecuación no tiene solución* (cuando en realidad la hay), lo que quieren decir es que no hay soluciones que puedan expresarse en términos de funciones elementales (Hubbard y West, 1997).

Por otra parte, ecuaciones no lineales como

$$y' = y^2 - x \qquad\qquad y' = \sin(xy) \qquad\qquad y' = e^{xy}$$

que no pueden ser resueltas por métodos simbólicos estándar no son estudiadas.

Esta problemática, y la evidencia empírica que señala que aquellos estudiantes que son competentes en el registro gráfico y geométrico sacan mejor provecho de ambientes de aprendizaje que usan las nuevas tecnologías (Chau y Pluvinage, 1999), nos condujo a emprender durante los años 2000 y 2001 un estudio diagnóstico sobre las competencias que desarrollan los estudiantes despues de concluir un curso de EDO bajo el enfoque tradicional. A partir de ese diagnóstico, hemos estado haciendo un esfuerzo propio de innovación e investigación para explorar las maneras de cómo enriquecer la metodología de la enseñanza de las EDO. Concretamente, durante los años 2006, 2007, 2008 y 2009, hemos tratado de introducir una perspectiva que equilibra los aspectos algebraico y lo gráfico de las soluciones en el curso de Ecuaciones Diferenciales I que se imparte el ciclo I de cada año, en las carreras de Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Estadística de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador. Para ello, por ejemplo, previo al estudio de métodos algebraicos clásicos para resolver ecuaciones de primer orden, se han introducido técnicas gráficas. En las figuras 2.1-2.5 y 2.6-2.7 se muestran respectivamente algunas de las producciones de dos estudiantes (Estudiante A y Estudiante B) ante ejercicios típicos en los que se demanda dibujar el diagrama de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden. Evidentemente, esta trayectoria es más rica que la reducción del estudio de los métodos de solución de una EDO a los métodos simbólicos y algorítmicos. Vale la pena destacar que durante el itinerario didáctico propuesto se hace un uso marginal de los applets dfield y pplane de John Polking (http://www.math.rice.edu/polking), observándose que la coordinación de los aspectos gráficos y algebraicos favorece el uso y la interpretación de las salidas gráficas de dichos applets.



b) $\frac{dx}{dt} = x + t. \Rightarrow x'(t) = x + t$

MONOTONIA

$x' = 0 \Leftrightarrow x + t = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -t}$

$x' > 0 \Leftrightarrow x > -t$; x "crece"

$x' < 0 \Leftrightarrow x < -t$; x "decrece"

$x = -t$ ¿solución de la EDO?

$\Rightarrow x' = -1$, $\quad x' - x - t \stackrel{?}{=} 0$

$-1 + t - t \neq 0$

∴ $x = -t$, NO ES SOLUCION DE LA EDO

CONCAVIDAD

$x'' = x' + 1 = x + t + 1$

$x'' = 0 \Leftrightarrow x + t + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -t - 1}$

$x'' > 0 \Leftrightarrow x + t + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -t - 1$, x es "∪"

$x'' < 0 \Leftrightarrow x + t + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -t - 1$, x es "∩"

$x = -t - 1$ ¿solución de la EDO?

$\Rightarrow x' = -1$, $\quad x' - x - t \stackrel{?}{=} 0$

$-1 - (-t - 1) - t = 0$

∴ $x = -t - 1$, ES SOLUCION DE LA EDO

ISOCLINAS

$x' = k \Leftrightarrow x + t = k \Leftrightarrow x = k - t$

$\Rightarrow x' = -1$

Si, $k = -1 \Rightarrow x = -1 - t$

$k = 0 \Rightarrow x = -t$

$k = 1 \Rightarrow x = 1 - t$.

¿Es alguna isoclina solución?

$x' - x - t \stackrel{?}{=} 0$

$-1 - (k - t) - t = -1 - k = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = -1}$

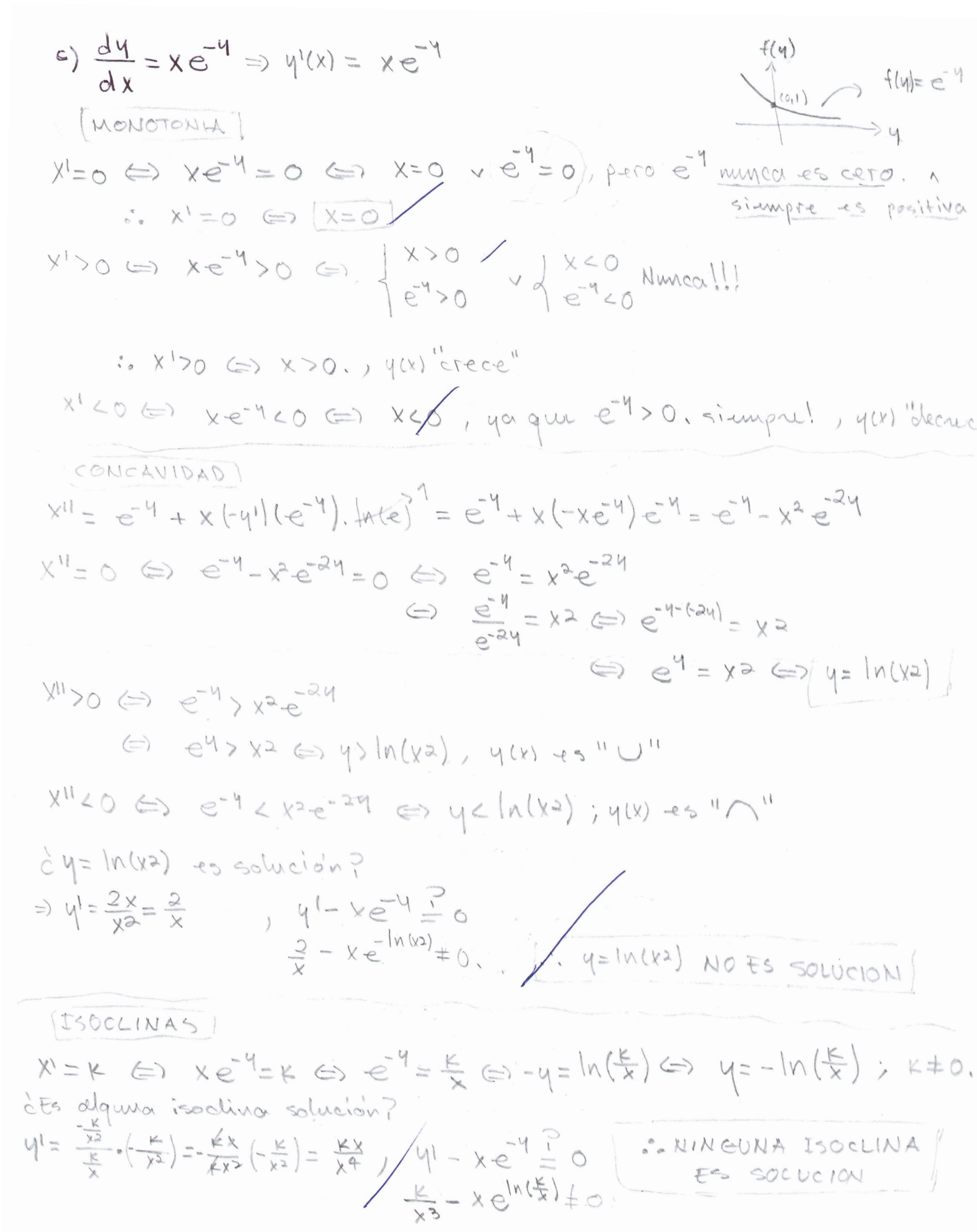
∴ $x = -1 - t$ ES SOLUCION

DIAGRAMA DE SOLUCIONES

- En $x = -t$, toma $x(t)$ mínimos, ya que pasa de decrecer a crecer

mi = mínimo.

Figura 2.1: Estudiante A.



c) $\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \Rightarrow y'(x) = xe^{-y}$

[MONOTONIA]

$x'=0 \iff xe^{-y}=0 \iff x=0 \lor e^{-y}=0$, pero e^{-y} nunca es cero. ∧ siempre es positiva

$\therefore x'=0 \iff \boxed{x=0}$

$x'>0 \iff x e^{-y}>0 \iff \begin{cases} x>0 \\ e^{-y}>0 \end{cases} \lor \begin{cases} x<0 \\ e^{-y}<0 \end{cases}$ Nunca!!!

$\therefore x'>0 \iff x>0$. , y(x) "crece"

$x'<0 \iff x e^{-y}<0 \iff x<0$, ya que $e^{-y}>0$. siempre! , y(x) "decrece"

[CONCAVIDAD]

$x'' = e^{-y} + x(-y')(e^{-y}).\ln(e)^{1} = e^{-y} + x(-xe^{-y})e^{-y} = e^{-y} - x^2e^{-2y}$

$x''=0 \iff e^{-y} - x^2e^{-2y} = 0 \iff e^{-y} = x^2e^{-2y}$

$\iff \frac{e^{-y}}{e^{-2y}} = x^2 \iff e^{-y-(-2y)} = x^2$

$\iff e^{y} = x^2 \iff \boxed{y=\ln(x^2)}$

$x''>0 \iff e^{-y} > x^2e^{-2y}$

$\iff e^{y} > x^2 \iff y > \ln(x^2)$, y(x) es "∪"

$x''<0 \iff e^{-y} < x^2e^{-2y} \iff y < \ln(x^2)$; y(x) es "∩"

¿ $y=\ln(x^2)$ es solución?

$\Rightarrow y' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$, $y' - xe^{-y} \overset{?}{=} 0$

$\frac{2}{x} - xe^{-\ln(x^2)} \neq 0$. . $\boxed{\therefore y=\ln(x^2) \text{ NO ES SOLUCION}}$

[ISOCLINAS]

$x'=k \iff xe^{-y}=k \iff e^{-y}=\frac{k}{x} \iff -y=\ln\left(\frac{k}{x}\right) \iff y=-\ln\left(\frac{k}{x}\right)$; $k\neq 0$.

¿Es alguna isoclina solución?

$y' = \frac{-\frac{k}{x^2}}{\frac{k}{x}} \cdot \left(-\frac{k}{x^2}\right) = -\frac{kx}{kx^2}\left(-\frac{k}{x^2}\right) = \frac{kx}{x^4}$, $y' - xe^{-y} \overset{?}{=} 0$

$\frac{k}{x^3} - xe^{\ln(\frac{k}{x})} \neq 0$ $\boxed{\therefore \text{NINGUNA ISOCLINA ES SOLUCION}}$

Figura 2.2: Estudiante A.

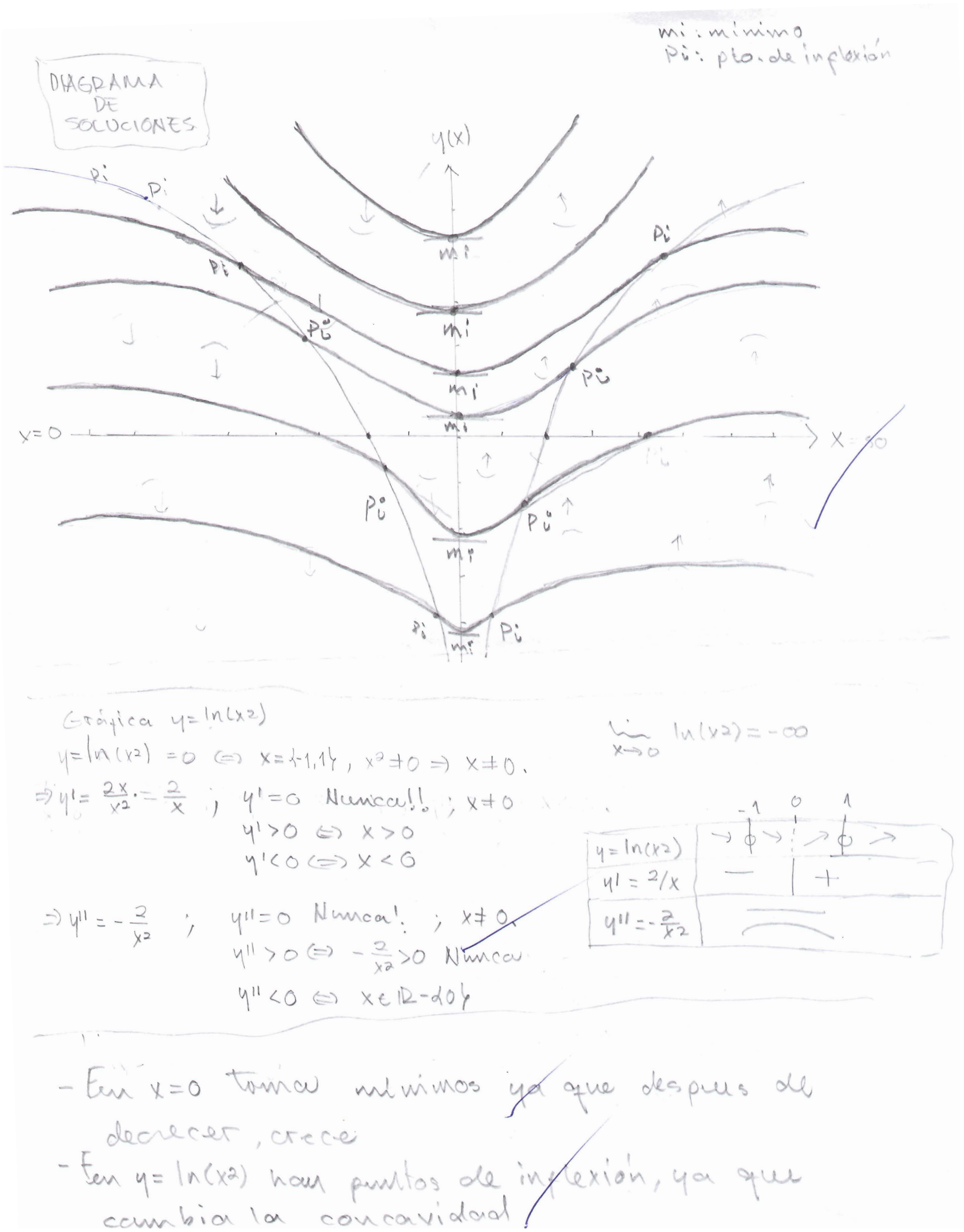


Figura 2.3: Estudiante A.

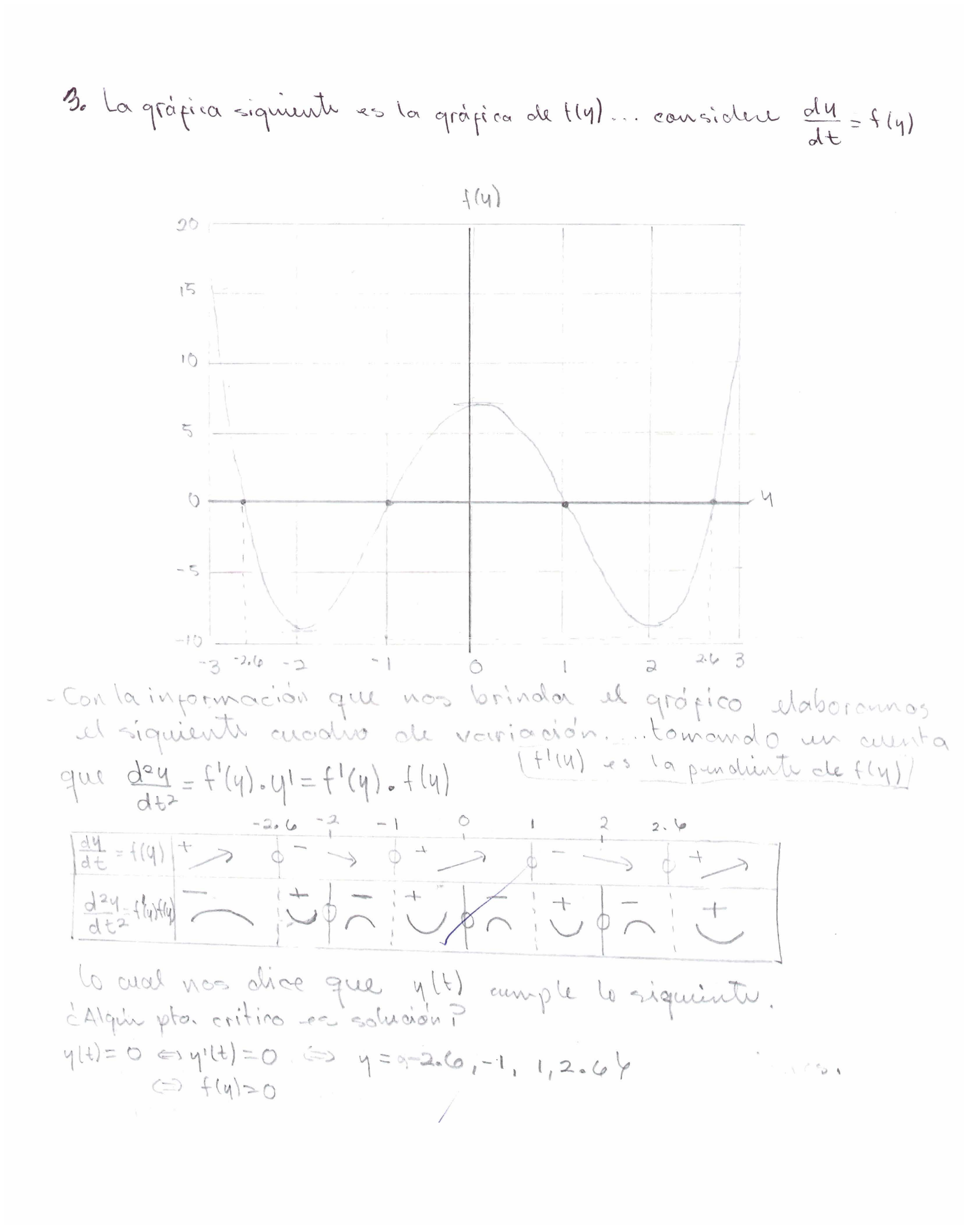


Figura 2.4: Estudiante A.

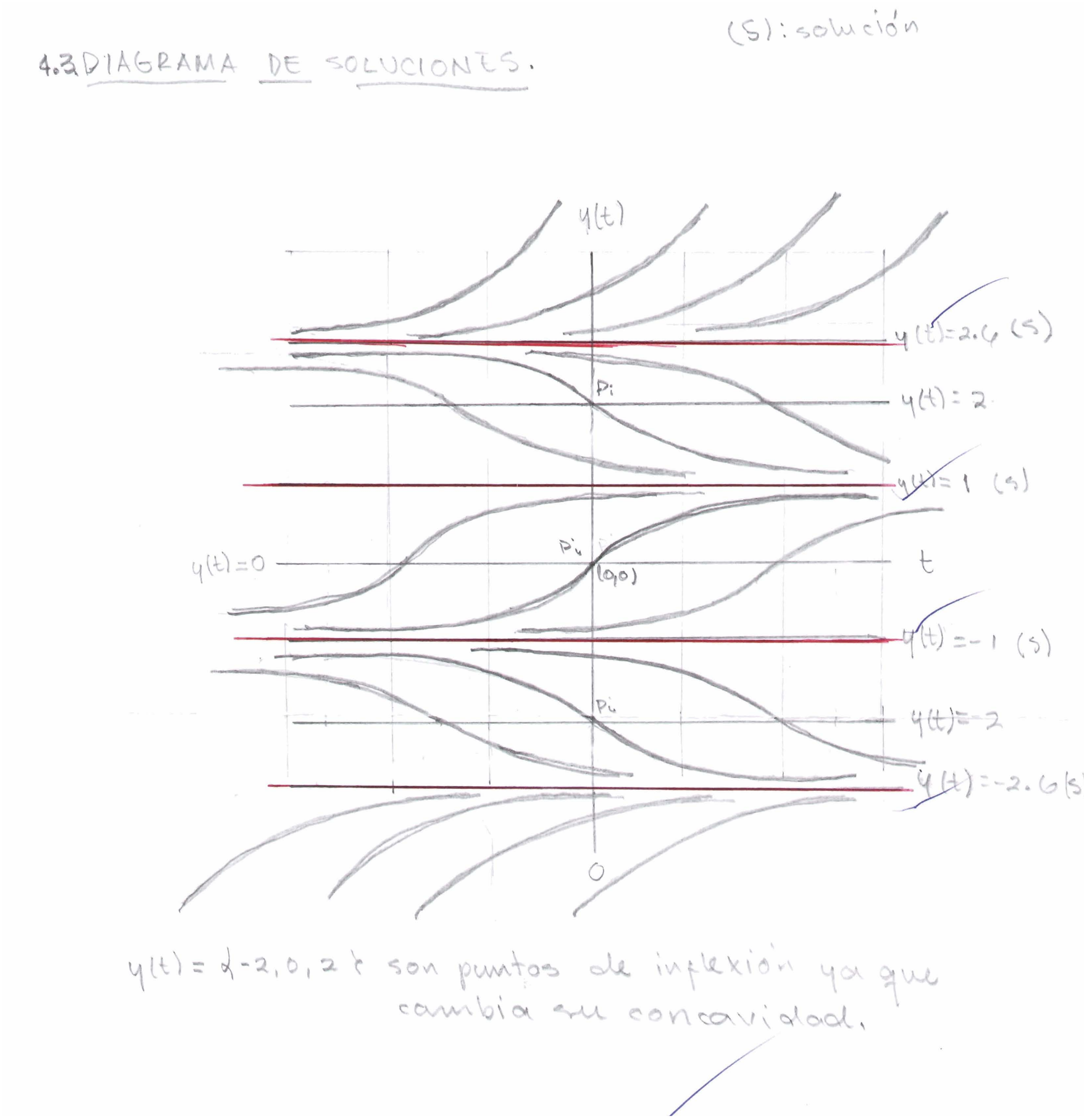
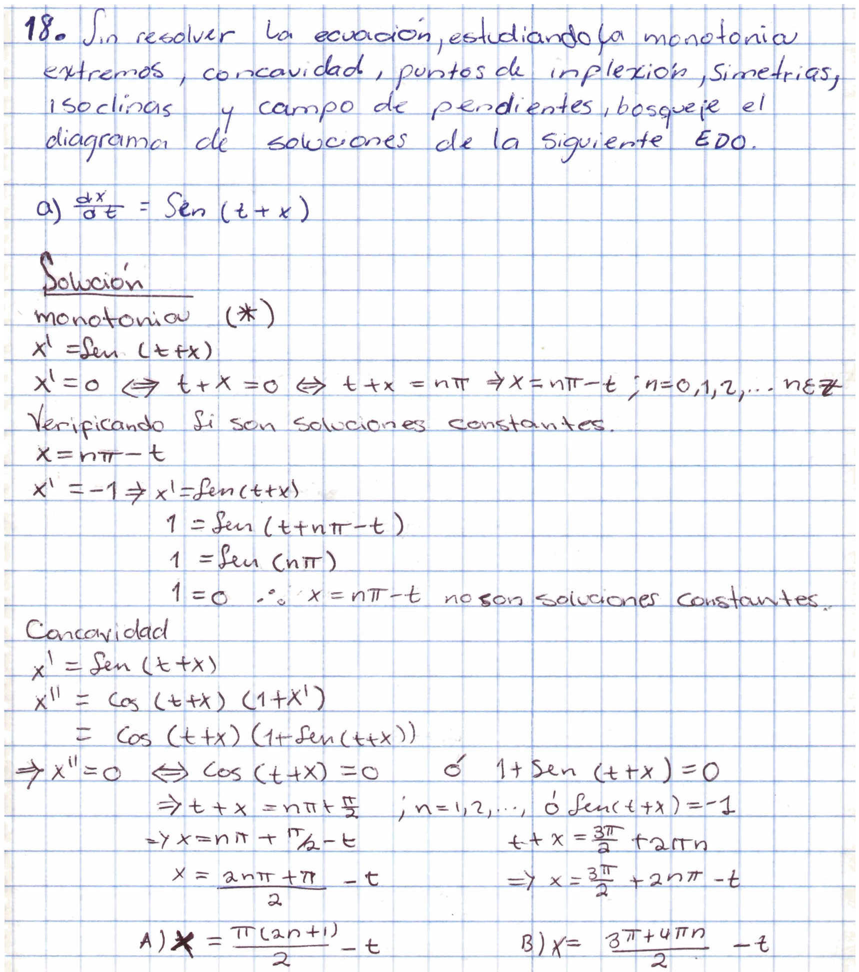


Figura 2.5: Estudiante A.



18. Sin resolver la ecuación, estudiando la monotonía extremos, concavidad, puntos de inflexión, simetrías, isoclinas y campo de pendientes, bosqueje el diagrama de soluciones de la siguiente EDO.

a) $\frac{dx}{dt} = \operatorname{Sen}(t+x)$

Solución

monotonía (*)

$x' = \operatorname{Sen}(t+x)$

$x' = 0 \Leftrightarrow t + x = 0 \Leftrightarrow t+x = n\pi \Rightarrow x = n\pi - t \; ; n = 0,1,2,\dots \; n \in \mathbb{Z}$

Verificando si son soluciones constantes.

$x = n\pi - t$

$x' = -1 \Rightarrow x' = \operatorname{Sen}(t+x)$

$1 = \operatorname{Sen}(t + n\pi - t)$

$1 = \operatorname{Sen}(n\pi)$

$1 = 0 \quad \therefore \; x = n\pi - t$ no son soluciones constantes.

Concavidad

$x' = \operatorname{Sen}(t+x)$

$x'' = \operatorname{Cos}(t+x)(1+x')$

$= \operatorname{Cos}(t+x)(1+\operatorname{Sen}(t+x))$

$\Rightarrow x'' = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Cos}(t+x) = 0$ ó $1 + \operatorname{Sen}(t+x) = 0$

$\Rightarrow t + x = n\pi + \frac{\pi}{2} \; ; n = 1,2,\dots,$ ó $\operatorname{Sen}(t+x) = -1$

$\Rightarrow x = n\pi + \pi/2 - t \qquad t + x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$

$x = \frac{2n\pi + \pi}{2} - t \qquad \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi - t$

A) $x = \frac{\pi(2n+1)}{2} - t \qquad$ B) $x = \frac{3\pi + 4\pi n}{2} - t$

Figura 2.6: Estudiante B.

Veamos si son soluciones.

A) $x' = -1 \Rightarrow -1 = \text{Sen}\left(t + \frac{2n+1}{2}\pi - t\right)$

$-1 = \text{Sen}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)$ es solucion pero con restricciones $\begin{cases} x = \pi/2 - t \\ x = \frac{5\pi}{2} - t \end{cases}$

B) $x' = -1 \Rightarrow -1 = \text{Sen}\left(t + \frac{3\pi}{2} + 2\pi n - t\right) = \text{Sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$

$-1 = \text{Sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$ es solución pero con restricciones $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} - t \\ x = \frac{4\pi}{2} - t \end{cases}$

Si $x = \left(\frac{4n+3}{2}\right)\pi - t$ son soluciones y $x = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi - t$ puntos de inflexion cuando n es par.

notemos que de $(*)$

$$\frac{dx}{dt} < 0 \iff \text{Sen}(t+x) < 0$$
$$\iff 2\pi \leq t + x \leq 3\pi$$
$$\vdots$$
$$(2k)\pi \leq t + x \leq (2k+1)\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{dx}{dt} > 0 \iff \text{Sen}(t+x) > 0$$
$$\iff (2k+1)\pi \leq t + x \leq (2k)\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$$

Isoclinas $\frac{dx}{dt} = K$

$\Rightarrow \text{Sen}(t+x) = K$

$\Rightarrow t + x(t) = \text{Sen}^{-1}(K)$

$\boxed{x(t) = \text{Sen}^{-1}(k) - t}$ Rectas de pendiente -1 y intersepto $\text{sen}^{-1}(k)$

Encontremos ó verifiquemos si alguna Isoclina es solución:

$x(t) = \text{Sen}^{-1}(k) - t \Rightarrow x'(t) = -1$

Figura 2.7: Estudiante B.

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}^{-1}(k) - t) \Rightarrow -1 = k$

$\therefore\ x(t) = \frac{3\pi}{2} - t$ es solución de la EDO

Notemos que se pueden encontrar las demas soluciones.

Si $\frac{dx}{dt} = -1$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(t+x) = -1$

$\Leftrightarrow t + x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x(t) = \left(\frac{3\pi + 4\pi k}{2}\right) - t$

$x(t) = \left(\frac{3+4k}{2}\right)\pi - t$ es solución $k \in \mathbb{Z}$.

en efecto $(0,-1)$

$x(t) = \left(\frac{3+4k}{2}\right)\pi - t \Rightarrow x'(t) = -1$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \operatorname{sen}(t+x)$

$-1 = \operatorname{sen}\left(\cancel{t} + \left(\frac{3+4k}{2}\right)\pi - \cancel{t}\right)$

$-1 = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right)$

$-1 = -1$ cierto! $\forall k \in \mathbb{Z}$

ahora Veamos las soluciones graficas y su campo de pendientes.

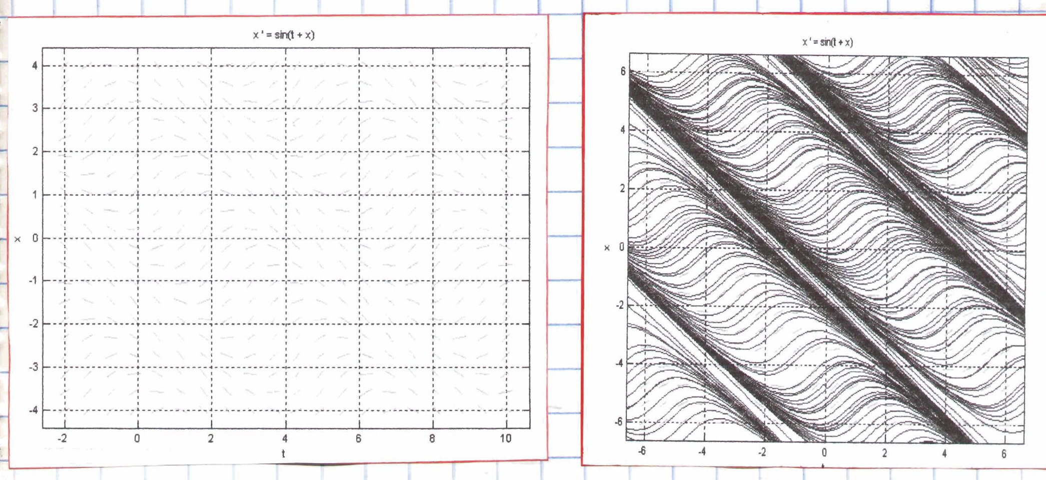
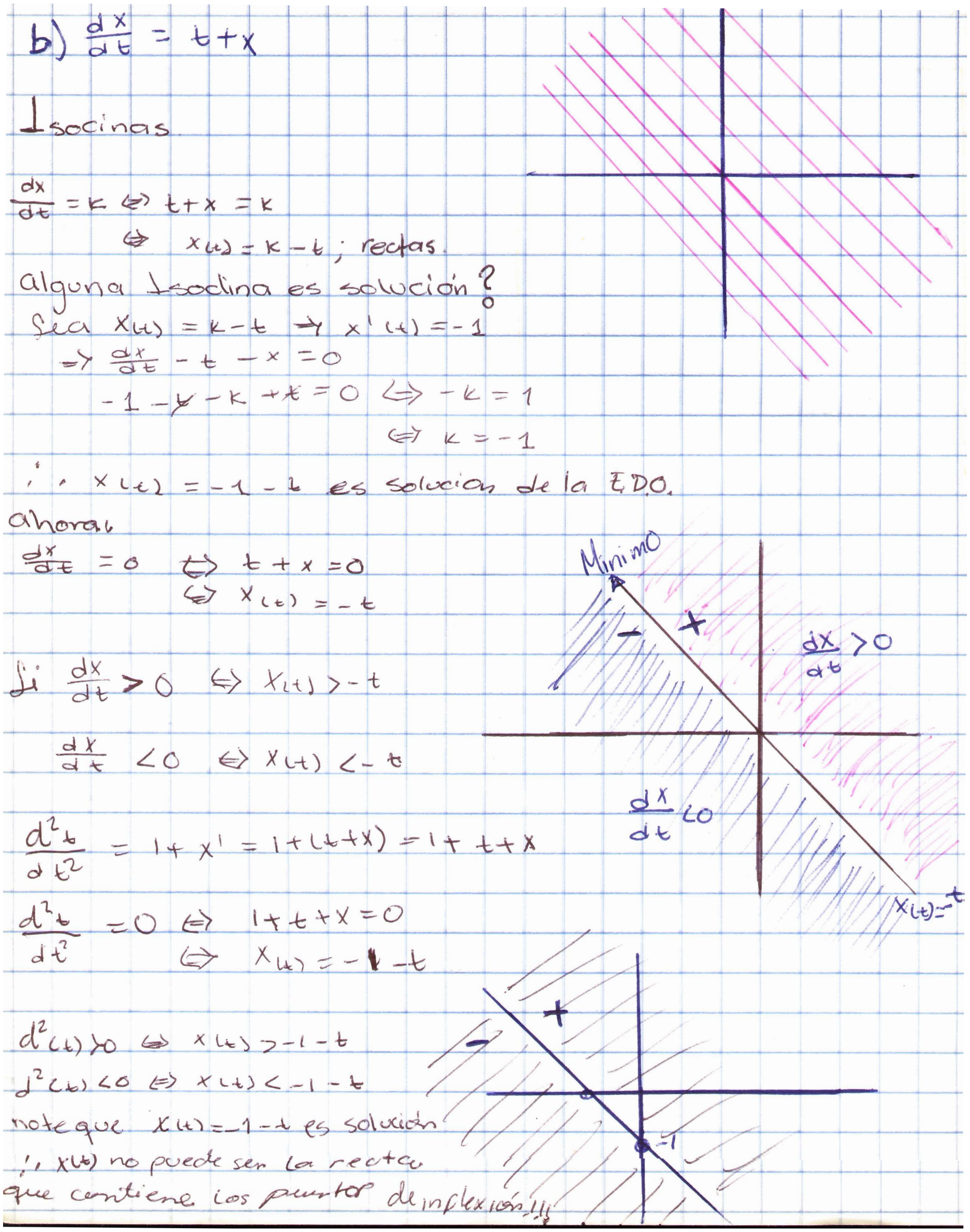


Figura 2.8: Estudiante B.



b) $\frac{dx}{dt} = t + x$

Isocinas

$\frac{dx}{dt} = k \Leftrightarrow t + x = k$

$\Leftrightarrow x(t) = k - t$; rectas.

alguna Isoclina es solución?

Sea $x(t) = k - t \Rightarrow x'(t) = -1$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} - t - x = 0$

$-1 - \cancel{t} - k + \cancel{t} = 0 \Leftrightarrow -k = 1$

$\Leftrightarrow k = -1$

$\therefore$ $x(t) = -1 - t$ es solucion de la EDO.

ahora

$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow t + x = 0$

$\Leftrightarrow x(t) = -t$

Si $\frac{dx}{dt} > 0 \Leftrightarrow x(t) > -t$

$\frac{dx}{dt} < 0 \Leftrightarrow x(t) < -t$

$\frac{d^2t}{dt^2} = 1 + x' = 1 + (t+x) = 1 + t + x$

$\frac{d^2t}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow 1 + t + x = 0$

$\Leftrightarrow x(t) = -1 - t$

$d^2(t) > 0 \Leftrightarrow x(t) > -1 - t$

$d^2(t) < 0 \Leftrightarrow x(t) < -1 - t$

note que $x(t) = -1 - t$ es solución

$\therefore$ x(t) no puede ser la recta que contiene los puntos de inflexión!!!

Figura 2.9: Estudiante B.

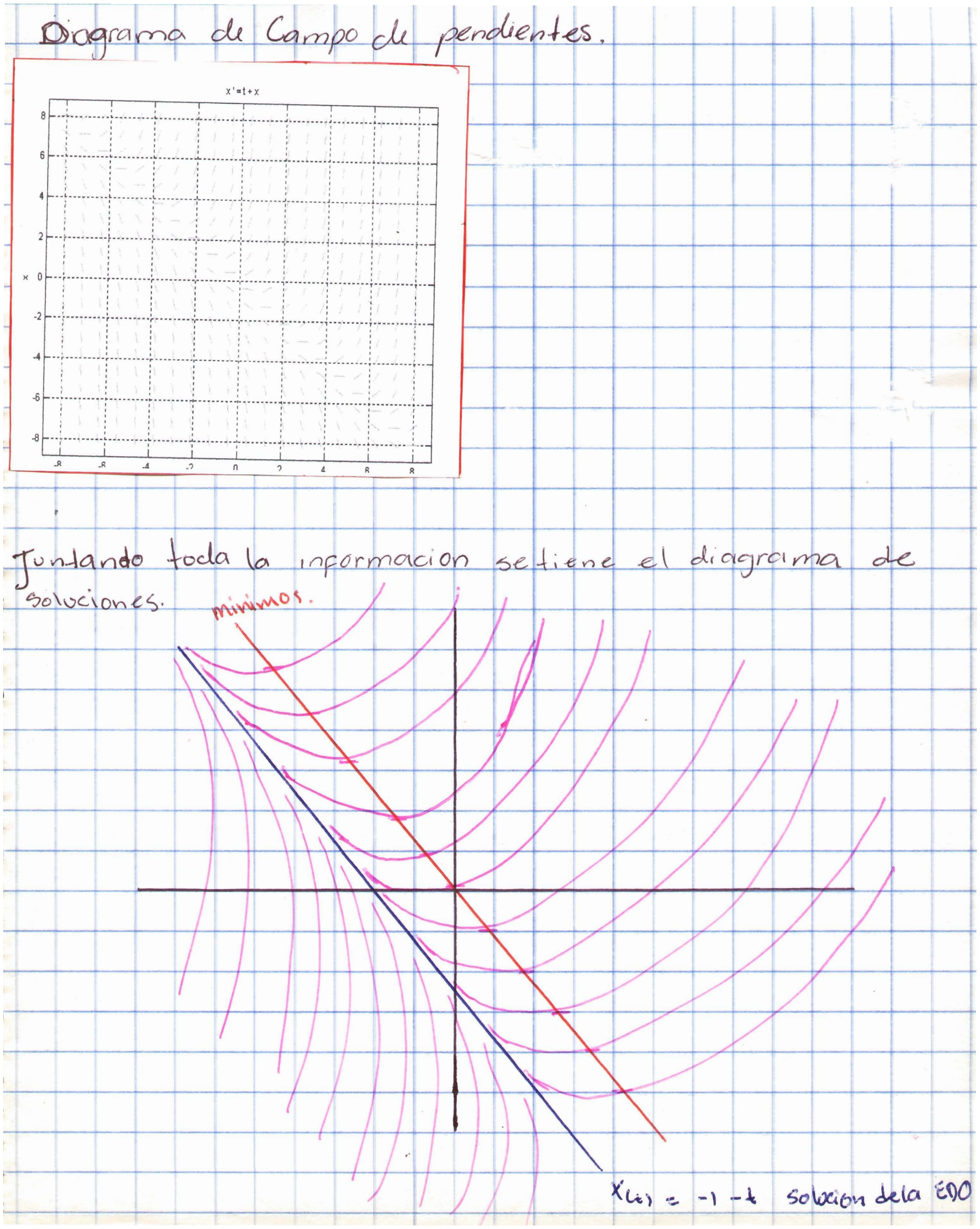
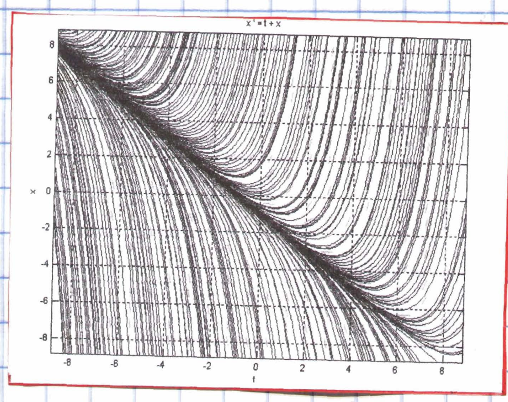


Figura 2.10: Estudiante B.

Nuestra descripcion cualitativa; nos proporciono con exactitud las soluciones graficas de la EDO $\frac{dx}{dt} = t + x$;
y aqui su diagrama de solución y su campo de pendientes trazadas en el Matlab.



el campo de pendientes esta antes

Figura 2.11: Estudiante B.

2.2. Diagnóstico

En (Guerra, 2002)[1] realizamos una aproximación a la problemática didáctica en torno al primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias bajo el currículo tradicional, caracterizando los elementos que conforman el sistema didáctico (*conocimiento-alumno-profesor*) y generando evidencias que vienen a minar la creencia generalizada entre el profesorado y los estudiantes en la superioridad del enfoque algebraico y algorítmico frente al enfoque gráfico y visual, considerado secundario y subsidiario. Esta creencia permite, por una parte, sostener que un estudiante que tenga un buen desempeño en el primer enfoque automáticamente también lo tendrá en el segundo y, por otra, que la actividad de conversión entre las representaciones algebraica y gráfica resulta por sí misma en forma automática y espontánea. Se evidenció también que las capacidades para tratar, leer, interpretar y convertir información cuantitativa en un formato cualitativo y viceversa, no logran desarrollarse siguiendo un enfoque tradicional, lo que desfavorece la formación científica de los estudiantes y el desarrollo de su competencia matemática. Los *esquemas conceptuales* de los estudiantes se caracterizaron por: el predominio de un modo de pensamiento algebraico y algorítmico, una concepción de acción y proceso de los conceptos implicados (función, ecuación diferencial, solución de un problema de valor inicial) y profusión de conocimientos procedimentales. También se observó ausencia de habilidades metacognitivas, es decir, conocimientos conceptuales y estrategias generales que les permitieran reflexionar y controlar sus cogniciones y producciones (como resultados de esos procesos) a fin resolver de manera eficiente las tareas propuestas. Dicho de otra manera, los esquemas conceptuales se caracterizaron como pobres, débiles, incoherentes y rígidos. En efecto, ante la demanda de dibujar la gráfica de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y),\ y(t_0) = y_0,$$

donde $f(t,y)$ es una función continua y diferenciable, dada a través de una expresión algebrai-

[1] Estudio de casos con cuatro estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de El Salvador que cursaron la asignatura Ecuaciones Diferenciales I durante 18 semanas entre los meses de febrero y junio del año 2000, que permitió hacer un diagnóstico de las habilidades con las que se quedan los estudiantes después de concluir un curso tradicional de ecuaciones diferenciales ordinarias, comparándose tales habilidades con aquéllas que se supone deberían haber adquirido.

ca o bien de una gráfica (ver Guerra, 2003, p. 3), las producciones de los estudiantes muestran claramente una tendencia dominante, a saber: primero, existencia de una fuerte necesidad de encontrar una fórmula para la solución de la EDO utilizando el método de separación de variables y, segundo, intentar dibujar la gráfica de la solución a partir de la fórmula encontrada, utilizando las técnicas del cálculo diferencial para deducir las propiedades necesarias y suficientes que permitan visualizar dicha gráfica. Todo ello sin importarles para nada que el lado derecho de la EDO esté dado o bien en el registro algebraico o bien en el gráfico, ni el hecho de que el comportamiento cualitativo (monotonía, extremos, concavidad, puntos de inflexión, etc.) de la solución pedida pueda ser deducido directamente de la EDO. Las competencias que se suponen que estos estudiantes deberían haber adquirido al finalizar la asignatura de ecuaciones diferenciales son cuestionables. De hecho, su dominio del método de separación de variables se limita a una mera manipulación simbólica, inconsistente y poco adecuado que se aplica sin sentido de pertinencia o se utiliza separando mal las variables. La estrategia de deducir directamente de la EDO las propiedades necesarias de la solución para poder dibujar su gráfica sin conocer explícitamente la fórmula (ruta cualitativa) no surge de manera natural y espontánea (lo cual evidentemente está condicionado por las experiencias previas) y, por tanto, esta estrategia debe ser sugerida por el investigador. No obstante, se observa que el modo de pensamiento algebraico y algorítmico o conocimiento procedimental persiste con muchas limitaciones, incoherencias e inconsistencias, con una profusión de aprendizajes mecánicos y una tendencia muy fuerte a rutinizar la estrategia de solución cualitativa. En efecto, después de negociar la plausibilidad de la ruta cualitativa y lograr construir buenas representaciones gráficas de la solución, se genera en el investigador la ilusión de que los estudiantes han asimilado significativamente el método gráfico.En efecto, al cambiar las condiciones iniciales, los estudiantes son capaces de notar que el análisis y las conclusiones previamente obtenidos se mantienen válidos y que lo único que ha cambiado son los puntos por donde pasa la gráfica, sin embargo, producen gráficas totalmente incoherentes. Por tanto, en los *esquemas conceptuales* de los sujetos investigados, el *procepto* de EDO de primer orden sólo evoca, por una parte, el concepto de expresión algebraica para referirse tanto al concepto de EDO como a sus soluciones y, por otra, a un proceso algebraico-algorítmico para obtener una fórmula para dichas soluciones. De otra manera, podemos decir que el *esquema conceptual evocado* del concepto de EDO contiene, por una parte, sólo una expresión algebraica en la que se relaciona una función, la variable independiente y su derivada y, por otra, una noción de resolver una EDO que supone usar algún método algebraico para encontrar una fórmula que satisfaga la ecuación diferencial. Estos *esquemas* contienen conexiones cognitivas muy débiles para: 1) leer, interpretar y tratar un problema de valor inicial planteado en el registro gráfico y 2) coordinar y usar simultáneamente los registros gráficos y algebraicos para tratar con una función implícita y sus derivadas a fin de poder construir su gráfica. Asimismo, no existe una red de relaciones gráficas e intuitivas sobre el comportamiento cualitativo de una función, que permita obtener ciertas propiedades cualitativas (concavidad, puntos de inflexión, etc.) o, de manera más general, dar argumentos y justificaciones en el registro gráfico a fin dibujar la gráfica en cuestión.

2.3. Preguntas de investigación

En el sistema educativo universitario salvadoreño, el impacto de los resultados de las investigaciones e innovaciones didácticas en la concepción y la concreción del currículo de las EDO se manifiesta en la fuerte necesidad de: i) romper con la exclusividad de los procesos de algebrización y algoritmización, ii) establecer un balance entre la perspectiva tradicional y la perspectiva moderna de la enseñanza de las EDO, iii) aprovechar las posibilidades que ofrecen las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) e iv) implementar desde la enseñanza un enfoque didáctico que centra el proceso instructivo en el desarrollo de la estructura cognitiva del estudiante. Ello implica necesariamente investigar maneras específicas de cómo enriquecer el contenido, la metodología de enseñanza y el aprendizaje del primer curso de EDO con el propósito de facilitar a los estudiantes los medios cognitivos y culturales para su desarrollo intelectual y emocional en el escenario de la actual sociedad del conocimiento.

En este sentido, en este trabajo se postula que el sistema didáctico puede ser innovado adoptando una perspectiva que equilibra los métodos cualitativo y cuantitativo de las ecuaciones diferenciales (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2009, 2012a,b; Guerra, 2003), bajo la cual se conjugan adecuadamente los recursos disponibles a través de internet, por ejemplo, los applets dfield y pplane. Recuérdese que los métodos cualitativos, combinan técnicas analíticas y geométricas para obtener información sobre el comportamiento de las soluciones, sin llegar necesariamente a resolver explícitamente la ecuación. Y los métodos cuantitativos se enfocan a la resolución explícita de las ecuaciones y al estudio de la naturaleza de las soluciones. Así, siguiendo lo que escribe Sánchez (2002)Sánchez (2002, p. v): *"Ahora la teoría cualitativa está ligada a la teoría cuantitativa, para hacer cursos muy atractivos que proporcionan valiosas herramientas y comprensiones"*, se parte de la hipótesis de que las representaciones gráfica y algebraica de las soluciones de una ecuación diferencial se complementan entre sí. La representación gráfica ayuda a comprender el comportamiento de la solución simbólica. Y junto con ella, la solución algebraica y su análisis son necesarias para comprender la representación gráfica y ayudar a tratar las restricciones y las consecuentes limitaciones que aparecen cuando se usa la tecnología para estudiar las soluciones de una EDO (Dana-Picard y Kidron, 2008; de~Gyves, 2006). En este primer nivel se pueden plantear las siguientes preguntas generales:

- ¿Qué papel juega la coordinación de las representaciones gráfica y algebraica en la conceptualización de la noción de EDO y la noción de solución? ¿Cómo las usan? ¿Qué cambios conceptuales se producen?
- ¿Con qué se quedan los estudiantes una vez finalizada una asignatura de ecuaciones diferenciales bajo un enfoque que integra lo cuantitativo y lo cualitativo (enfoque cuanti-cualitativo)? ¿qué competencias han adquirido? ¿cuáles se supone que deberían haber adquirido?
- ¿Qué habilidades cognitivas demanda el enfoque cuanti-cualitativo? ¿Qué conocimientos y habilidades metacognitivas se desarrollan o requieren?
- ¿Cuáles son los obstáculos y las dificultades específicos que los estudiantes experimentan cuando coordinan las representaciones gráficas y algebraicas?.
- ¿Qué papel juega la concepción algebraica en la conceptualización de las nociones de ecuación diferencial y solución?

Ahora bien, la puesta en escena de esta perspectiva requiere de un marco teórico y metodológico coherente que integre el diseño didáctico y la experimentación en el aula, por una parte, y permita indagar el pensamiento de los estudiantes a través de sus distintas producciones discursivas, por otra. En esta investigación, ese marco teórico-metodológico está fundamentado en la Teoría APOS y la metodología del grupo RUMEC. En consecuencia, lo que hay que diseñar en primer lugar es una Descomposición Genética Inicial (DGI) del concepto de solución de una EDO que favorezca la articulación de los registros de representación gráfica y algebraica en la estructura cognitiva de los estudiantes. En segundo lugar, hay que elaborar una secuencia didáctica coherente con esa DGI. En tercer lugar hay que implementar y observar en una clase concreta cómo funciona la secuencia didáctica. Y por último, hay que evaluar la DGI. Por lo tanto, teniendo en cuenta estos niveles específicos de la presente investigación, se pueden plantear las siguientes interrogantes:

1. Respecto al diseño de la descomposición genética:

    1.1 ¿Qué construcciones mentales (acciones, procesos, objetos, esquemas) se requieren para desarrollar una comprensión cuanti-cualitativa de las EDO?

    1.2 ¿Cómo se observan estas construcciones? ¿Con qué instrumentos?

    1.3 ¿Cómo la descomposición genética modela (describe y explica) esas construcciones mentales que se ponen en juego cuando se realizan tareas de tratamiento y conversión entre representaciones gráficas y algebraicas?

    1.4 ¿Cuáles son las características de los esquemas de los conceptos de las EDO que se construyen a partir del estudio cuanti-cualitativo?

    1.5 ¿Cómo podemos describir y caracterizar los niveles intra, inter y trans del desarrollo de los esquemas? ¿Cómo tratar la transición de un nivel a otro?

2. Respecto al diseño didáctico:

    2.1 ¿Cómo se transita de la descomposición genética a la propuesta didáctica y las secuencias de aprendizaje?

    2.2 ¿Qué características deben reunir los problemas y el sistema de ejercicios para que coadyuven a esas construcciones?

    2.3 ¿Cómo elaborar una propuesta didáctica con las características deseadas de manera que no dependan de un uso intensivo de la tecnología, pero si que la integra adecuadamente haciendo, por ejemplo, un uso efectivo de los Applets y otros recursos disponibles a través de Intenet?

3. Respecto a la incidencia del diseño didáctico en el pensamiento de los estudiantes:

   3.1 ¿Qué efectos tienen la propuesta didáctica y las secuencias de aprendizaje sobre la comprensión de los estudiantes del enfoque cuanti-cualitativo? ¿Sobre su habilidad para realizar los cálculos básicos? ¿Sobre sus actitudes y concepciones de las matemáticas?

   3.2 ¿Cómo evolucionan los esquemas conceptuales de los estudiantes? ¿las habilidades cognitivas que los estudiantes desarrollan?

   3.3 ¿Qué conocimientos y habilidades metacognitivas se adquieren?

   3.4 ¿Qué papel juega la tendencia hacia el modo de pensamiento algebraico y algorítmico cuando se implementa la ruta cuanti-cualitativa?

   3.5 ¿Qué papel juega la coordinación de las representaciones gráfica y algebraica en la conceptualización de la noción de EDO y la noción de solución? ¿Cómo las usan?

   3.6 ¿Cuáles son las dificultades y obstáculos específicos que los estudiantes enfrentan cuando coordinan estas representaciones? ¿Qué dificultades y obstáculos enfrentan los estudiantes? ¿Cómo se caracterizan? ¿Cuál es su naturaleza?

Capítulo 3

Estudios relevantes

El movimiento de reforma del curriculum de las EDO inicia con la publicación de Artigue y Gautheron en 1983 de su libro *Systemes Differentiels: Etude graphique*, aunque, muchos años antes Brodetsky (1919, 1920a,b,c) planteó la necesidad de enseñar las EDO desde una perspectiva geométrica. Posteriormente, se elaboran varias propuestas de innovación curricular en las cuales se promueve la coordinación de los aspectos numéricos, algebraicos y gráficos (Blanchard, 1994; Blanchard, Devaney y Hall, 1997; Borrelli y Coleman, 2004; Boyce y DiPrima, 2001; Devaney, 1995; Hubbard y West, 1991, 1995, 1997; Lomen y Lovelock, 2000; Ricardo, 2003; Sánchez, 2002). En el marco del Pensamiento Matemático Avanzado, se llevan a cabo investigaciones que indagan sobre el pensamiento de los estudiantes, los obstáculos, las dificultades y errores que experimentan cuando se enfrentan a tareas en las que se demanda coordinar dos o más registros de representación o se enfrentan a una ecuación diferencial que no puede ser resuelta por los métodos cuantitativos. (Artigue, 1989, 1992; Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2009, 2012a,b; Chau y Pluvinage, 1999; Dana-Picard y Kidron, 2008; de~Gyves, 2006; Habre, 2000, 2002, 2003, 2012; Hubbard, Habre y West, 2001; Kwon, 2009; Rasmussen, 1996, 2001; Rasmussen y Whitehead, 2003; Raychaudhuri, 2007, 2008). Y, desde la perspectiva del profesor, se realizan estudios en los cuales se abordan las concepciones y creencias de los profesores acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las EDO (Moreno y Azcárate, 1997; Moreno, 2001; Moreno y Azcárate, 2003). Los datos recogidos en estos estudios indican que la aproximación cualitativa es plausible y presenta muchas ventajas, pero se tiene que hacer un gran esfuerzo para romper con la tendencia de los profesores y estudiantes hacia el modo de pensamiento algebraico y algoritmico y modificar sus concepciones acerca del estatus del registro gráfico. De manera reiterada, en las conclusiones de estos trabajos, se insiste en que la instrucción debería promover el uso de diferentes sistemas de representación y la reflexión de los aspectos asociados al concepto, los métodos de solución, los procedimientos, los significados y conexiones entre las representaciones utilizadas.

A continuación se revisan en detalle las investigaciones que consideramos no sólo relevantes para los objetivos del presente estudio, sino que muy ilustrativos tanto en lo metodológico como por los resultados obtenidos.

En sus trabajos Artigue (1989, 1992) [1] señala la existencia de factores determinantes que hacen que todavía prevalezca en muchos currículos el enfoque tradicional, a saber:

1. En el nivel epistemológico se encuentran:

    a) La larga dominación del registro algebraico en el desarrollo histórico.

    b) El status del cuadro numérico.

    c) El desarrollo tardío de la aproximación geométrica.

    d) La independencia relativa de las distintas aproximaciones.

    e) La dificultad de los problemas que motivaron el nacimiento y subsiguiente desarrollo de la aproximación cualitativa.

    f) Predominio, por lo general implícito, de una concepción epistemológica de las matemáticas en la práctica docente y su entorno que, por una parte, sobrevalora la manipulación lógica, simbólica y analítica y, por otra, desprecia los aspectos gráficos y visuales, considerándolos como no matemáticos. Estos últimos son considerados sólo como cierto soporte heurístico, un mero auxiliar didáctico para presentar los conceptos matemáticos y sus interrelaciones, pero una vez que han sido usados estos deben ser retirados de la urdimbre conceptual.

2. En el nivel cognitivo:

[1] Estudio realizado durante 3 años con estudiantes de primer año en la Universidad de Lille I, Francia dirigido a explorar la enseñanza cualitativa de las EDO y a familiarizar al estudiante con los criterios del cálculo, a fin de que tales criterios sirvan de base para el estudio ulterior de las EDO. En promedio 100 estudiantes por año recibieron 35 horas de instrucción sobre las EDO de primer orden, entre clases magistrales y sesiones de resolución de ejercicios con computadoras.

   a) Las dificultades relacionadas al hecho de que la resolución cualitativa requiere el uso y razonamiento con funciones que no se expresan explícitamente.

   b) Las dificultades en la coordinación entre los registros algebraico y gráfico, tanto para una función como para sus derivadas.

   c) Las pruebas en la aproximación cualitativa requieren un manejo sofisticado y apropiado del cálculo elemental.

3. En el nivel didáctico:

   a) Lo atractivo de los algoritmos y la tentación de la reducción algorítmica, la cual es más cómoda para el profesor y el estudiante.

   b) La imposibilidad de crear algoritmos en la aproximación cualitativa.

   c) El status infra-matemático del registro gráfico.

   d) El rechazo de los problemas que no pueden ser resueltos completamente.

   e) Frente a las dificultades de comprensión de los estudiantes, la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algebraica y algorítmica y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en ese dominio. En consecuencia, muchos estudiantes indican que en el cálculo es más seguro funcionar mecánicamente que intentar comprender. Se genera así un circulo vicioso: para obtener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial ya que es lo que se evalúa. Asimismo, subsisten unos niveles de exigencia mínimos tanto para los profesores como para los alumnos.

También Artigue (1989, 1992) distingue los siguientes tres niveles de interacción entre los registros de representación gráfica y algebraico:

1. *El nivel de la interpretación*: una tarea se dice que pertenece a este nivel si tiene las características siguientes:

   a) La información se dada simultáneamente en los dos registros. Por ejemplo, una ecuación diferencial en forma simbólica (registro algebraico) y un dibujo del campo de direcciones(registro gráfico).

   b) El problema a resolver requiere la interacción entre las dos formas de información. Tareas típicas en este nivel son:

      1) Relacionar dibujos de campos de direcciones y planos fase con ecuaciones diferenciales.

      2) Dibujar usando algún software matemático el plano fase de algunas ecuaciones diferenciales y desEstos *esquemas* contienen conexiones cognitivas muy débiles para: 1) leer, interpretar y tratar un problema de valor inicial planteado en el registro gráfico y 2) coordinar y usar simultáneamente los registros gráficos y algebraicos para tratar con una función implícita y sus derivadas a fin de poder construir su gráfica.cribir sus principales características

      3) Dada una ecuación dependiente de un parámetro, determinar y analizar los diferentes planos fase.

2. *El nivel de la predicción*: una tarea se dice que pertenece a este nivel si tiene las características siguientes:

   a) La información está dada sólo en un registro, por ejemplo una ecuación diferencial o un plano fase.

   b) El problema a resolver requiere una solución en el otro registro. Por ejemplo, si se da una ecuación diferencial, se precisa dibujar su plano fase, y si se da un plano fase se debe crear una ecuación diferencial compatible cualitativamente con el plano fase dado.

   Tareas típicas en este nivel para una ecuación de la forma $y' = f(t, y)$ son:

   a) Identificar, a partir de la ecuación diferencial, los invariantes geométricos en el plano fase.

   b) Dividir el plano $t - y$ de acuerdo al signo de $f(t, y)$.

c) Determinar algebraicamente los conjuntos abiertos del plano donde las condiciones de Cauchy-Lipschitz se cumplen e interpretar las propiedades correspondientes de existencia, unicidad y maximalidad de las soluciones en términos gráficos.

d) Relacionar las características de la ecuación diferencial y las asíntotas de las soluciones.

3. *El nivel de la justificación* (ver Hubbard y West, 1991, cap. 1)

   Tareas típicas en este nivel son:

   a) Probar que una solución intersecta una curva dada

   b) Probar que una solución no puede intersectar una curva

   c) Probar que una solución tiene una asíntota.

A partir de esos niveles de interacción Artigue (1989, 1992) analiza la naturaleza de las dificultades encontradas en la resolución cualitativa y reporta que los estudiantes acceden al nivel de la interpretación sin mostrar problemas particulares y que su actuación en el nivel de la predicción es satisfactoria. Por el contrario, en el nivel de la justificación el porcentaje de éxito baja sensiblemente debido, en gran parte, al hecho de que el registro gráfico es usado sólo como un sub-registro para la representación y nunca para la justificación.

Por su parte, Hernández (1994) elabora una propuesta para la enseñanza de las EDO en las escuelas de ingeniería del sistema universitario mexicano. Básicamente su propuesta consiste en implementar el marco geométrico desde el inicio y limitar el marco algebraico a los métodos para resolver ecuaciones de variables separables, las lineales de primer y segundo orden, y el método de la transformada de Laplace. Asimismo, promueve el uso del software computacional para el cálculo de integrales, la simplificación de expresiones algebraicas y para articular, cuando sea posible, la solución algebraica con su representación gráfica.

Rasmussen (1996), durante un curso introductorio siguiendo un enfoque cualitativo, investiga el pensamiento de una estudiante de Ciencias del Mar (Amy, con muy buenos antecedentes de cálculo y algún conocimiento de dinámica de poblaciones) sobre los métodos cualitativos de solución de EDO de primer orden. La evidencia recogida señala que Amy: 1) ha desarrollado un conocimiento proceptual de las EDO adecuado, y 2) muestra una comprensión conceptual y gráfica profunda del concepto de derivada de una función, por una parte, y conocimiento de los procesos que modela una EDO, por otra, siendo ambos factores que coadyuvan en la adquisición de los conocimientos y habilidades específicas para analizar e interpretar una EDO de primer orden usando los métodos cualitativos. Empero, a pesar del éxito de Amy cuando analiza una EDO usando técnicas cualitativas, durante su trabajo surgen algunos conflictos potenciales nada desdeñables. Por ejemplo, Amy extiende la estrategia para encontrar soluciones constantes de ecuaciones autónomas a ecuaciones no autónomas, lo cual la conduce a considerar funciones que tienen pendiente cero y, a la vez, se aproximan a una asíntota vertical. Así, al considerar las ecuaciones $\dfrac{dy}{dt} = t+1$ y $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + y$, afirma que la primera tiene una asíntota vertical en $t = -1$ y la segunda tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

Habre (2000), por su parte, reporta que el impacto del currículo reformado de EDO sobre el pensamiento y las competencias de los estudiantes puede ser mínimo y, contrariamente a los objetivos del currículo enseñado, el conocimiento conceptual permanece fuertemente ligado a esquemas algebraicos. Esto demuestra que el modo de pensamiento algebraico y algorítmico aparece como un obstáculo epistemológico. En efecto, durante la última semana del curso, a cada uno de los nueve participantes se le realizó la siguiente entrevista semi-estructurada:

1. ¿En qué piensas primero cuando se te pide resolver una EDO?
2. Resuelve $y' = 2y - y^2$.
3. Resuelve $y' + ky = -t$, con $k \in \mathbb{R}$ un parámetro.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

1. En la cuestión 1), todos los entrevistados (9/9) pensaron primero en buscar una solución analítica.

   Y sólo después que se les pidiera pensar otras alternativas, 6/9 consideraron el enfoque cualitativo. Pero de éstos últimos sólo 2/6 expresaron su beneplácito y satisfacción con él:

> Paul: "*También podríamos resolverla gráficamente y no tendrías que encontrar una expresión*".
> Doug: "*Seguro que hay otras formas de resolver una EDO: graficando el campo de pendientes. Yo supongo que me siento cómodo, si, resolviéndola de esta manera*"

Los otros cuatro estudiantes (4/6), por diversas razones, expresaron ciertas reservas para usar la aproximación geométrica:

> Bob: "*Bien, no es usualmente en la forma que yo mismo pienso... cuando veo un problema por primera vez, no lo pienso geométricamente porque no es la forma en que mi mente trabaja*".
> Grace: "*Yo me siento mejor haciendo matemáticas que visualizándolas. Yo trabajo mejor de esa forma".*
> Jack: "*Yo creo que podría mira esa opción después de no ser capaz de encontrar una forma de resolverla*".
> Jill: "*Si puedo hacerlo de esta manera (analíticamente), yo lo haría de esta forma. No quisiera hacerlo (geométricamente) usando el ordenador*".

Mientrás que los otros tres estudiantes (3/9) rechazaron la aproximación geométrica debido a la creencia en el poder y superioridad de la respuesta simbólica frente a la gráfica:

> Jim: "*Bien... yo podría hacer el gráfico, pero no podría conocer la ecuación. Yo podría ser capaz de bosquejar la gráfica, pero eso sólo sería una conjetura*".
> Justin: "*Una solución geométrica algunas veces es satisfactoria; pero no, si puedo encontrar una solución analítica a partir de la cual tu puedes conocer todo*".
> John: "*Los gráficos no te dan una solución, sólo te dan un dibujo. Si tienes una fórmula, ella te va a decir todo... un dibujo te da una idea general... Si tienes una fórmula, yo creo que eso tiende a ser mejor*".

2. En la cuestión 2), otra vez todos (9/9) escogieron en primer lugar una aproximación analítica. Sólo después de fracasar en el intento de integrar $\int \frac{dy}{2y-y^2}$, 7 de 9 optaron por

resolver el problema geométricamente; mientras los otros 2 de 9 insistieron en integrar para encontrar una fórmula analítica para la solución de la EDO.

3. En la cuestión 3), a pesar de haber fracasado al integrar la ecuación de variables separables del item número 2, todos los entrevistados escogieron la aproximación analítica. Y con alguna guía todos obtienen la respuesta simbólica $y = \frac{C}{e^{kt}} - \frac{t}{k} + \frac{1}{k^2}$ Sin embargo, debido a la presencia en la fórmula de y de la constante C y el parámetro k, ninguno fue capaz de interpretar la fórmula obtenida. Veamos:

   Jim: *Nada! (la solución no dice nada).*

   I: *¿Por qué nada?*

   Jim: *Porque tú no sabes quien es k.*

   I: *Supongamos que sabemos que k es, digamos* $k = 1$.

   Jim: *Ok, así la fórmula va a ser* $-t + 1 + \frac{C}{e^t}$.

   I: *Ahora, ¿sabrías decir cómo es la solución?*

   Jim: *Ummm... bien... como... No!*

En conclusión, ante la tarea de resolver una EDO, todos los entrevistados intentan, en primer lugar, una aproximación cuantitativa. Y, a pesar de que el curso tuvo una orientación cualitativa, los esquemas de los estudiantes para la noción de resolver una EDO permanecen anclados en los aspectos algebraicos. Para todos los entrevistados, una solución necesita tener una fórmula algebraica explícita; 7 de 9 mostraron algunas reservas con la aproximación geométrica y, sorprendentemente, ninguno tuvo éxito en relacionar los aspectos algebraicos y geométricos de la ecuación $y' = 2y - y^2$.

de~Gyves (2006), desde una perspectiva semiótica y discursiva, analiza las prácticas discursivas en el aula que favorecen el predominio de los métodos algebraicos simbólicos sobre los gráficos y visuales. Señala que el registro gráfico requiere nuevas formas de comunicación y, por tanto, una toma de conciencia de prácticas discursivas pertinentes permite mejorar la comunicación en el aula. En contraste, el registro algebraico puede transmitirse sin dicha conciencia. Ello se explica por la naturaleza del registro algebraico, cuyas operaciones son bastante parecidas a transcripciones. Lo que no sucede con el registro gráfico. Las representaciones geométricas no describen por sí mismas un orden de operatividad sobre ellas, por lo que existe una mayor dependencia de apoyos intermedios para dejar huellas del proceso. De manera que la comunicación sin una buena aplicación de prácticas discursivas sólo es tolerable en el registro algebraico y las implicaciones de una falta de prácticas discursivas acordes a respresentacione geométricas repercute en la reproducción deficiente de sus métodos de solución.

Raychaudhuri (2007) estudia [2] la interpretacion, evocación y aplicación que hacen los estudiantes de los teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones lineales y ecuaciones no lineales, así como el papel que juegan en ello los distintos elementos en la estructura de los teoremas: *conceptos, condiciones, conectivos y conclusiones*. Encuentra que muchos estudiantes conciben que un problema de valor inicial $y' + p(t)y = q(t),\ y(t_0) = y_0$ tiene solución única sólo donde los coeficientes $p(t)$ y $q(t)$ son continuos, sobre la base de concepciones erróneas de los conceptos de función, continuidad e integración. Y en el caso de un problema de valor inicial para la ecuación no lineal $y' = f(t,y),\ y(t_0) = y_0$, ellos usan sólo la parte de la condición referida a $\frac{\partial f}{\partial y}$, sin tener en cuenta la condición sobre la condición inicial y la conclusión sobre el intervalo de definición de la solución, pues las consideran irrelevantes. Otros, cuando se les pide encontrar donde existe una solución única, no usan los teoremas de existencia, sino que siguen el proceso rutinario de encontrar primero la solución y luego su dominio. Al final del artículo muestra el valor que tienen los teoremas de existencia y unicidad desde la perspectiva de una estudiante:

> I: *What do you think is the purpose of having a theorem like this in every chapter?*
> Laura: *I don't read theorems ... I don't think they are that important ... just know how to solve the equation ... and then the words that they are using there ... in theorems ... are not the words you should use ... in solving problems I don't think that's necessary*
> I: *Sorry, say that again. You don't think the theorems are necessary?*
> Laura: *I don't think about that, no. The only times I know them ... is when the teacher is teaching us ... I don't look over the theorems ... just solve the problems.*(p.380)

[2]Este estudio se llevó a cabo en 1999 con estudiantes de ciencias e ingenieria durante un curso introductorio de EDO de un semestre en la Universidad de California en Irvine. El texto del curso fue Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (6th edn) by W. E. Boyce and R. C. DiPrima.

También, a partir de las nociones de procesos matemáticos (subyacentes en los conceptos) y de objeto matemático, y con el propósito de elucidar la estructura de las definiciones matemáticas, Raychaudhuri (2008) elabora un marco teórico (llamado *contexto-entidad-proceso-objeto*) para analizar las construcciones de los estudiantes del concepto de solución de una ecuación diferencial de primer orden [3]. Justifica su trabajo señalando:

> The often studied but little understood concept of solution to a differential equation warrants educational research on its own merit. However, with the advent of technology, the research carried out in this area concentrated primarily on comparison of the effects of teaching strategies between analytical and the other methods. There is some research that explores student understanding of equilibrium solution to autonomous DEs, but none offers an indepth analysis of this valuable concept based on a theoretical framework centered on the definition(p.161).

Parte de la premisa de que las definiciones de los conceptos matemáticos se pueden clasificar en dos categorias: estática y dinámica. En una definición estática, el objeto definido es generado por la propiedad declarada en la definición. Pero en una definición dinámica eso no ocurre y, por el contrario, hay procesos duales, uno declarado y el otro implicado, a saber: un proceso matemático que apoya la propiedad definida y otro proceso (el cual no es declarado explicitamente en la definición) que genera el objeto. Y como ejemplo de definición dinámica trae a la cuenta la definición de solución de una EDO: *"Cualquier función diferenciable $y = \phi(t)$ que satisface la ecuación diferencial $y' = f(t,y)$ para todo t en algún intervalo se llama solución"*. La definición identifica una entidad matemática (una función) que la solución tiene en el contexto de EDO; hay dos procesos matemáticos (el proceso que permite verificar la propiedad de ser solución: la diferenciación, y el proceso que permite obtener el objeto solución: la integración) que extienden la función al objeto matemático llamado solución. Por tanto, la solución a una EDO como una entidad es una función. La solución como un objeto es solución en tanto que entidad junto con el proceso requerido por la propiedad en la definición. Entonces para que

[3]Este estudio se llevó a cabo con estudiantes de ciencias e ingenieria durante un curso introductorio de EDO de un semestre en la Universidad de California en Irvine. El curso se enfocó, en primer lugar, al desarrollo de algoritmos para encontar fórmulas explícitas. Y, en segundo lugar, al análisis cualitativo del comportamiento de las soluciones. El texto del curso fue Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (6th edn) by W. E. Boyce and R. C. DiPrima.

un estudiante pueda comprender la solución de una EDO como un objeto debe entender lo que la solución representa como una entidad en el contexto de las EDO, así como el proceso matemático que hace que una función sea solución. Pero para comprender realmente el concepto de solución también hace falta comprender los vínculos entre los proceso de generar y de definir. Así, entre las preguntas de investigación que este autor se plantea se tienen:

1. ¿Cómo los estudiantes se enfrentan a la dualidad de procesos en una definición dinámica? ¿Hay un proceso que sea dominante?

2. ¿Cuáles son las construcciones que los estudiantes hacen del concepto de solución como una entidad y como un objeto?

3. ¿Cómo ésas construcciones están influenciadas por los roles que juegan el contexto matemático y los procesos utilizados para determinar la entidad y transformarla en un objeto?

Entre los resultados obtenidos se tienen los siguientes:

1. La ecuación diferencial no es vista como una relación entre la función desconocida, algunas de sus derivadas y la variable independiente, sino que como algo que tiene y'. Para los estudiantes, lo esencial en una EDO es la presencia de la derivada.

2. La solución como una entidad puede ser una función o un número.

3. La solución como objeto representa *una función que genera, vía diferenciación, la ecuación diferencial*. En consecuencia, los esquemas conceptuales de los estudiantes contienen un objeto solución en el que la función solución aparece primero y la ecuación diferencial despues. Una función dada es solución de la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ si:

   a) al derivar la solución se obtiene $f(x,y)$ (es decir, las pendientes son iguales).

   b) al derivar la solución y evaluarla en un punto coincide con el valor $f(x,y)$ en ese punto (es decir, las pendientes en un punto son iguales).

   Esta interpretación incorrecta del contexto y del proceso de definir es causada por la interacción de dos efectos: 1) la semejanza de la ecuación $y' = f(x,y)$ con la forma de la derivada de una función y 2) el proceso que genera la solución, es decir, la integración, visualizada como el proceso inverso de la diferenciación.

4. Para determinar si una función es una solución, en vez de verificar si dicha función satisface la ecuación diferencial, se recurre a la solución general, encontrada vía integración, para verificar si tal función pertenece a esa familia.

En consecuencia, se señala la necesidad de que las definiciones matemáticas se caratericen por tener en cuenta los conocimientos conocidos y la intuición de los estudiantes, enmarcándose dentro de su zona de desarrollo próximo. Asimismo, se pregunta: ¿Cómo se puede alcanzar el nivel de la solución como objeto, si no se tiene una imagen correcta de la solución como una entidad? ¿Cómo se puede alcanzar el nivel de la solución como objeto, si no se tiene una proceso correcto que relaciona la ecuación diferencial y su solución? Y termina conjeturando que hay un tiempo de gestación en el que el estudiante convive con lo que él llama una imagen fluida de solución. Probablemente esta imagen sea incorrecta o extremadamente procedimental. Pero cuando el estudiante comienza a hacer conexiones con otros conceptos relacionados (por ejemplo, las propiedades de la solución), lentamente va emergiendo otra imagen más sólida, hasta comprender el concepto de solución más allá de su nivel de objeto. No se puede asegurar en que momento y bajo que circunstancias este fenómeno ocurre. Lo que si se puede asegurar es que no sucederá si no se hace un esfuerzo continuo para reflexionar sobre las imágenes construidas y conectarlas significativamente con otras imágenes, lo que conduce al equilibrio de la estructura cognitiva del estudiante.

Camacho, Perdomo y Santos-Trigo (2009), analizan los tipos de comportamiento de los estudiantes cuando intentan resolver algunos problemas de ecuaciones diferenciales, los cuales se han presentado desde una perspectiva diferente a la que normalmente se hace durante el proceso de instrucción [4]. Las principales preguntas de investigación que guian este estudio son:

1. ¿Usan los estudiantes su conocimiento previo (significado de la derivada, el concepto de función, representaciones gráficas, etc) para dar respuesta a cuestiones sobre ecuaciones diferenciales que no necesariamente requieren métodos que pertenecen a este ámbito?

2. ¿Qué uso hacen de los diferentes sistemas de representación?

3. ¿Qué influencia tiene la forma de plantear la cuestión sobre el modo en que los estudiantes

[4] Este estudio se llevó a cabo con 10 estudiantes de matemáticas de quinto semestre y 11 estudiantes de física de segundo semestre en la Universidad de La Laguna, España.

lo abordan?

4. ¿Qué tipo de estrategias y representaciones usan cuando se enfrentan a problemas contextualizados?

Las respuestas a los problemas propuestos muestran que los estudiantes prefieren usar el registro algebraico frente al registro gráfico. Muchos de ellos, además, conciben el concepto de ecuación diferencial como una entidad aislada de otras nociones que ellos ya conocen, y su proceso de solución como un mero asunto de encontrar una expresión algebraica explícita o implícita para la solución. También consideran como información relevante, sólo la información suministrada en la ecuación diferencial que les conduce a aplicar algun método algorítmico para encontrar la solución, mostrando una falta de comprensión del concepto de solución cuando no recuerdan dichos métodos. En las conclusiones, por tanto, se señala que hay que introducir los conceptos de las EDO a partir de otros conceptos ya conocidos, así como legitimar el registro de representación gráfico en el proceso de solución de una ecuación diferencial. Ello podría permitirles a los estudiantes hacer conexiones entre diferentes temas estudiados y tener una visión más amplia del concepto de ecuación diferencial, que no estaría limitada al uso de ciertos trucos simbólicos de poco valor y que son olvidados fácilmente.

Finalmente, en Moreno y Azcárate (1997) se pueden encontrar las siguientes expresiones de profesores que nos muestran el pensamiento dominante entre los profesores universitarios acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las EDO:

- "(...)aunque tiramos un poquito del modelo, nosotros no podemos tirar mucho; más que nada por el objetivo en el que se enmarca una asignatura como ésta. A este nivel, las matemáticas se toman de forma subsidiaria; los estudiantes hacen acopio de herramientas técnicas y se refuerza el aprendizaje de estas técnicas"(p.26)
- "Los estudiantes están de aprendices y en este "taller" se les dice cómo se maneja el serrucho. Luego, más adelante ya se les dirán por qué se maneja de esa forma y no de otra, cuál es la utilidad y sus aplicaciones; aquí la motivación se queda en el modelo, y no podemos tirar mucho de él.(...) a ti te dicen que tienes que dar un sumario de técnicas y de herramientas sin motivarla y sin encontrar la gracia que tiene todo eso"(p.28)

- “(...) EDO de primer orden: son de este tipo...se resuelven de esta forma...!pero se resuelven!, no se “prueba que se resuelven”. A continuación tienen una lista de problemas muy extensa, no sé cuantos, pero, desde luego, 500 seguro”(p.28)
- “En general el método gráfico es una tontería, pero trae mucha información... Sobre todo tiene interés para los problemas no lineales. Dependiendo del problema, trataría de usar uno u otro método. Veo todos los métodos sencillos”(p. 28).
- “(...)Considero que los automatismos y la rutina es importantísima. Parece ser que la rutina es un término peyorativo pero, para mí, en esta asignatura es fundamental, porque precisamente e slo que estamos inculcando; equivocado o no, pero es así”(p. 30).
- “Sólo vemos los métodos de resolución algebraica, los numéricos no se ven en esta asignatura y los gráficos ni siquiera decimos que existen”(29).
- “Conceptualmente creo que el método bueno es el algebraico. El método numérico, si no tienes bien trillado el planteamiento algebraico, creo que sería complicado. Desde el punto de vista metodológico y conceptual, el método numérico debe recurrirse como tal recurso, no como planteamiento previo. El método gráfico se usa poco, parece que es un complemento para ver las cosas, pero no algo en sí mismo bueno”(p.29).

En relación con el uso del ordenador, en Moreno y Azcárate (2003) se encuentra:

1. “La parte negativa es que con eso... si utilizas demasiado el ordenador, pierden la práctica de... hacer ese mismo tipo de cosas ellos a mano. Todas estas... todas estas gráficas las puedes dibujar a mano, no necesitas el ordenador y, si lo haces con el ordenador, olvidas qué es lo que hacías. Dibujar el plano de fases, dibujar un campo de direcciones, si dejas que el ordenador te lo haga, ¡perderías esa parte!, ¡que tú seas capaz de hacerlo!”

Evidentemente, esas concepciones sustentan las decisiones últimas respecto a todo lo que supone la práctica docente: planificación, metodología, diseño y gestión de situaciones de aprendizaje, evaluación, etc. Y como lo reporta Moreno (2001, p.380), la persistencia de los métodos de enseñanza tradicional frente a alternativas más novedosas de enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias puede explicarse por:

1. Una fuerte creencia - entre los profesores- sobre el pobre nivel de competencia matemática de los estudiantes que les hace considerar como impensable cualquier otro enfoque que ponga al estudiante en situación de pensar y razonar más allá de los aspectos básicos que acaba memorizando y mecanizando.

2. Una concepción de las matemáticas, y en particular de las ecuaciones diferenciales, muy formalista que sobrevalora la manipulación lógica y simbólica frente al tratamiento numérico, gráfico y visual de las ecuaciones diferenciales, como principio incuestionable del aprendizaje significativo. Bajo esta concepción, los aspectos gráficos y visuales son considerados como un cierto soporte heurístico, un mero auxiliar didáctico para presentar algunos conceptos matemáticos y sus interrelaciones. Pero una vez que han sido usados ellos deben ser retirados de la urdimbre conceptual. Hay, pues, una creencia absoluta en el poder de los métodos algebraicos/algorítmicos/analiticos y se desprecian los aspectos gráficos/visuales, considerándolos como no matemáticos.

3. Miedo a la perdida de los contenidos específicos de lo que algunos profesores consideran las "matemáticas de verdad" a favor de contenidos y técnicas propias de las matemáticas aplicadas, que no tienen la misma consideración que las matemáticas puras, tradicionales y "de toda la vida".

Capítulo 4

Marco Teórico

Este trabajo se enmarca dentro del programa de investigación cognitivo que proponen la denominada Teoría APOS[1] o Teoría APOE [2] y la metodología RUMEC[3] (Arnawa, Kartasasmita, Baskoro y otros, 2012; Artigue, 2003; Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996; Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997; Azcárate y Camacho, 2003; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, DeVries, St~John, Tolias y Vidakovic, 1997; Cooley, Trigueros y Baker, 2007; Dubinsky, 1991, 1996; Dubinsky y McDonald, 2001; Meel, 2003; Parraguez y Oktaç, 2010; Trigueros, 2005; Weller, Clark, Dubinsky, Loch, McDonald y Merkovsky, 2003).

La teoría APOS es una teoría constructivista del aprendizaje que extiende la obra de Piaget sobre la abstracción reflexiva al estudio de la cognición de conceptos matemáticos en el nivel universitario y proporciona un marco epistemológico que permite, por un lado, describir y explicar desde varios puntos de vista el nivel de desarrollo de la estructura cognitiva del sujeto, así como las dificultades, obstáculos, inconsistencias e incoherencias que aparecen en sus distintas producciones orales y escritas y, por otro, determinar las construcciones mentales necesarias que el sujeto debe realizar para lograr comprender y aplicar los conceptos matemáticos. Se dice que una idea o un pensamiento es inconsistente para un sujeto cuando éste considera compatible una proposición y su negación. Así las inconsistencias se refieren a contradicciones dentro de una teoría matemática. Ahora bien, cuando se resuelve un mismo problema en diferentes sistemas de

[1]Acrónimo de Actions, Process, Objects, Schemas.
[2]Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema.
[3]Research in Undergraduate Mathematics Education Community.

representación puede suceder que se generen respuestas contradictorias entre sí. Llamamos a estas ideas o pensamientos contradictorios, incoherencias. Por lo tanto, se puede tener un alumno cuyo pensamiento o ideas sean inconsistentes (que contradicen la teoría) pero coherentes (que las ideas son equivalentes al cambiar de sistemas de representación). La Estructura Cognitiva de un sujeto se refiere al contenido total y a la organización de las ideas en torno a una área particular del conocimiento, almacenados en su mente, que crece y se desarrolla desde la más temprana infancia. También se refiere al significado de un concepto: lo qué podemos hacer, decir, pensar o producir con él. Y, por lo tanto, es mucho más que la evocación de un símbolo o cualquier imagen mental. En el transcurso del proceso de recordar o manipular un concepto, muchos procesos son traídos a escena de manera que consciente o inconscientemente afectan su uso. Según Riviere (1987, p. 21), la Psicología Cognitiva remite la explicación de la conducta a entidades mentales, procesos y disposiciones de naturaleza mental que conforman una Estructura Cognitiva Mediadora (Estructura de Representación). Es decir, se presupone la idea de que las funciones de conocimiento no sólo están determinadas por funciones “bottom-up”, sino también, en mayor o menor grado, por funciones “top-down” . Así, por ejemplo, la percepción de un objeto no es un proceso exclusivamente “de abajo arriba”, sino que aquello que percibimos está determinado por procesos “de arriba abajo”, es decir, por la Estructura Cognitiva. La teoría APOS plantea que la construcción del conocimiento matemático en la estructura cognitiva de una persona pasa por tres estructuras mentales básicas, no necesariamente secuenciales: acción, proceso y objeto. Para construir dichas estructuras, la persona usa ciertos mecanismos mentales, tales como la interiorización, coordinación y encapsulación.

La metodología de investigación RUMEC se basa en un ciclo recursivo de tres componentes dinámicas: 1) el análisis teórico inicial, el cual proporciona un modelo epistemológico del concepto en cuestión, es decir, qué significa entender ese concepto y cómo esa comprensión puede ser construida por el estudiante, 2) diseño e implementación de una secuencia didáctica, la cual tiene un propósito doble, por una parte, favorece la construcción del concepto por parte de los estudiantes y, por otra, le permite al investigador recopilar datos de investigación, y 3) la observación, evaluación y revisión del análisis teórico inicial y de la secuencia didáctica para realizar otra iteración del ciclo (ver Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997, p.4).

En la siguiente lista Dubinsky (1996) resumen algunas de las ideas piagetianas que el grupo RUMEC ha tratado de implementar tanto en la investigación didáctica como en su práctica docente:

- Concentrarse en los mecanismos mediante los cuales se lleva acabo el desarrollo intelectual. Es decir, la abstracción reflexiva y la dualidad desequilibración-reequilibración.

- Ayudar a los estudiantes a construir acciones, a interiorizarlas en procesos y a encapsular éstos últimos en objetos.

- Ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de las estructuras que han construido.

- Prestar la atención necesaria a todas las producciones de los estudiantes: los errores, las dificultades, los obstáculos, lo que dicen, lo que hacen, etc.

- Permitir que los estudiantes construyan las bases de los conceptos sobre la experiencia antes de enfrentar el formalismo matemático, pues, cuando se objeta que los aspectos formales de las matemáticas son una cadena de símbolos carente de sentido para los estudiantes, la dificultad no permanece en la naturaleza de la expresión formal, sino en la pérdida de las conexiones entre estas y las situaciones.

- Crear ambientes para la clase en los que se promuevan interacciones sociales ricas tanto entre los estudiantes como con el profesor.

4.1. La Teoría APOS: Conceptos fundamentales

A continuación, siguiendo (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996; Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997; Dubinsky, 1991, 1996; Dubinsky y McDonald, 2001; Trigueros, 2005), se presentan las ideas piagetianas fundamentales de la teoría APOS (ver Glosario en http://www.avizora.com/publicaciones/epistemologia/textos/).

4.1.1. La abstracción reflexiva

Dubinsky (1991, 1996) señala que el concepto de *abstracción reflexiva*, el cual fue introducido por Piaget para describir la construcción de estructuras lógico-matemáticas durante el desarrollo cognitivo de la persona, es el mecanismo principal en la construcción de conocimiento matemático y puede ser una herramienta potente en el estudio del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). La *abstracción reflexiva* es el proceso cognitivo por medio del cual una acción sobre un objeto, ya sea físico o mental, se reconstruye y organiza en un plano superior del pensamiento, es decir, el sujeto, a partir de las acciones sobre los objetos, puede inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos, tomando conciencia de dichas acciones, separando la forma de su contenido y organizando esta información en un nivel superior. En el proceso de la abstracción reflexiva están presentes dos mecanismos: uno, *la proyección* sobre un nivel superior de lo que ha sido derivado de un nivel inferior y, el otro, *la reflexión* que permite reconstruir y reorganizar dentro de un sistema más grande eso que ha sido transferido por la proyección. Estos mecanismos se activan a través de las acciones físicas o mentales que el sujeto hace sobre el objeto de conocimiento. La interacción entre el sujeto y el objeto de conocimiento es dialéctica, es decir, no es posible separar al objeto de conocimiento del sujeto que conoce. Agrega, además, que el estudio de la abstracción reflexiva, en tanto que intenta describir o explicar qué es lo que se necesita que suceda, es complementario a nociones como la de los obstáculos epistemológicos de Guy Brousseau o la del conflicto entre imagen del concepto y definición del concepto de David Tall, que explican por qué las cosas no suceden (Dubinsky, 1991, p.103).

En Dubinsky (1991, p.97) encontramos las tres grandes clases de abstracción definidas por Piaget: *la abstracción empírica, pseudo-empírica y reflexiva*.

1. *La abstracción empírica*: el conocimiento se deriva de las propiedades de los objetos. El sujeto, a través de su acción sobre los objetos del mundo, extrae propiedades comunes a los objetos y hace generalizaciones extensionales, esto es, el sujeto transita de lo específico a lo general. Pero, el conocimiento de estas propiedades por parte del sujeto es el resultado de construcciones internas.

2. *La abstracción pseudo-empírica*: el conocimiento se deriva de las propiedades de las ac-

ciones que el sujeto introduce en los objetos.

3. *La abstracción reflexiva*: se refiere al proceso cognitivo, completamente interno, de construcción de nuevas estructuras a partir de las ya existentes por medio de la observación y la abstracción.

Estas tres clases de abstracción no son independientes entre sí. Las acciones que conllevan a la abstracción pseudo-empírica o a la reflexiva son realizadas sobre objetos cuyas propiedades, el sujeto sólo llega a conocer a través de la abstracción empírica. Por otro lado, la abstracción empírica se posibilita gracias a esquemas de asimilación[4] que fueron construidos por la abstracción reflexiva. Esta interdependencia puede resumirse de la siguiente manera: en la abstracción empírica y pseudo-empírica se deriva conocimiento de los objetos a partir de la ejecución (física o mental) de acciones sobre éstos. La abstracción reflexiva permite interiorizar y coordinar estas acciones para llegar a formar nuevas acciones y, por último, nuevos objetos (que puede que no sean objetos físicos, sino matemáticos como una función o un grupo). La abstracción empírica permite extraer datos de estos nuevos objetos a través de acciones sobre estos objetos, y así progresivamente se van construyendo las entidades matemáticas en la mente del sujeto hasta llegar a ser plasmadas en teorías axiomáticas.

Tal como ya se ha dicho el concepto de abstracción reflexiva lo introdujo Piaget como la pieza clave para describir la construcción cognitiva de conceptos lógico-matemáticos. Se considera que la abstracción reflexiva, en su forma más avanzada, es la que conlleva a la clase de pensamiento matemático que permite separar los procesos de su contenido y convertir los procesos mismos en objetos. Así la abstracción reflexiva se muestra como una descripción del mecanismo del desarrollo intelectual. Además, en esta dinámica del desarrollo puede apreciarse ese mecanismo más general que se encuentra tanto en la psicogénesis como en la historia del pensamiento matemático, la *triada dialéctica* que conduce de lo *intra-objetal* o análisis de

[4]Para Piaget el proceso de desarrollo cognitivo se basa en dos mecanismos o procesos: la organización y la adaptación. El proceso de adaptación es considerado como el equilibrio entre los procesos de asimilación y de acomodación. La asimilación permite al sujeto incorporar los objetos a su estructura cognoscitiva, a sus esquemas previos en un proceso activo mediante el cual el sujeto transforma la realidad a la cual se adapta. La acomodación es el proceso inverso por el cual el sujeto transforma su estructura cognoscitiva, sus esquemas, para poder incorporar los objetos de la realidad.(Tall,1991, p.9)

los objetos, a lo *inter-objetal*, es decir, al estudio de las relaciones y transformaciones entre dichos objetos, y de allí a lo *trans-objetal* o estudio de las estructuras construidas tomando como soporte dichas tranformaciones (Piaget y García, 1982).

En este sentido, Dubinsky (1991, pp.101-102), retomando los hallazgos de Piaget, propone cinco tipos de abstracción reflexiva que considera son sumamente importantes para el PMA:

1. *la interiorización*: que consiste en trasladar o traducir una sucesión de acciones materiales sobre un objeto cognitivo a un sistema de operaciones interiorizadas o construcción mental de un proceso interno referente a una serie de acciones sobre dicho objeto que pueden ser ejecutadas en la mente, sin necesidad de pasar por todos los pasos específicos.

2. *la coordinación*: acto cognitivo de construir un nuevo proceso a partir de dos o más procesos. Esta construcción puede realizarse por simple concatenación.

3. *la encapsulación*: esto es la conversión de un proceso (dinámico) en un objeto (estático), o la tematización de un esquema.

4. *la generalización*: acción cognitiva que se presenta cuando el sujeto aprende a aplicar un esquema pre-existente a una amplia colección de fenómenos. Esto puede ocurrir porque el sujeto se vuelve consciente de la extensa aplicabilidad del esquema. El esquema no cambia, no obstante, ahora posee una amplia aplicabilidad.

5. *la reversión*:esta acción cognitiva se da cuando el sujeto es capaz de construir un nuevo proceso, a partir de un proceso que ya existe internamente, invirtiendo un proceso interiorizado (*desencapsular o destematizar*).

Las ideas esenciales de la teoría APOS acerca de lo que significa aprender y comprender algo en matemáticas y de cómo acceder a un conocimiento cuando se lo necesita, están contenidas en el siguiente párrafo (Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997)

> El conocimiento matemático de una persona es su tendencia [5] a responder ante una situación-problema [6] matemática por medio de: la reflexión sobre los proble-

[5] La tendencia de una persona tiene que ver con las relaciones que establece entre sus constructos mentales y con las interconexiones que usa para comprender un concepto, y la forma en que los usa (o fracasa al usarlos) en una situacion-problema.

[6] El término situación-problema hace referencia a la dicotomía desequilibración/reequilibración.

> mas y sus soluciones en un contexto social, la construcción o reconstrucción de las acciones, los procesos y los objetos matemáticos y la organización de estos en esquemas para usarlos al enfrentarse con las situaciones. (p. 5)

La acción de reflexionar, componente central tanto del aprendizaje como de la comprensión, implica poner atención consciente a las operaciones que son realizadas. La comprensión en matemáticas va mucho más allá de la habilidad para realizar cálculos sofisticados: es necesario ser consciente de cómo los procedimientos funcionan, de mirar el resultado sin llegar a realizar todos los cálculos, de ser capaz de trabajar con variaciones de un algoritmo, de ver relaciones y de organizar las experiencias, tanto matemáticas como no-matemáticas.

Poseer un conocimiento consiste en la tendencia del sujeto a hacer construcciones mentales que sirvan para tratar con una situación-problema. Las construcciones más frecuentes son recordar algo previamente establecido o repetir un método conocido. Pero el desarrollo del conocimiento matemático se da cuando se hace una reconstrucción diferente de un problema previamente tratado. Solo entonces la reconstrucción hecha no coincide exactamente con lo que ya existía, y puede contener algunos logros de un nivel superior. Así, surgen las preguntas siguientes: ¿Cuál es la naturaleza de estas reconstrucciones? ¿De qué manera se construyen?.

4.1.2. Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas

En la teoría APOS la comprensión de un concepto matemático comienza con *acciones*, es decir, la manipulación física o mental de un objeto previamente construidos para formar otro objeto ; cuando se adquiere un control consciente de la acción, entonces ella es interiorizada para formar un *proceso*, el cual, a su vez, cuando se adquiere conciencia de la totalidad del proceso, es encapsulado en un *objeto*. Los objetos pueden ser desencapsulados para volver a los procesos de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, los procesos y los objetos pueden ser organizados en *esquemas*.

Es importante observar que las construcciones mentales - de procesos y objetos y de sus interrelaciones - no ocurren necesariamente en una secuencia lógica simple y, por el contrario, ellas pueden aparecer simultáneamente y requerirse la una a la otra.

En Asiala y otros (1997) encontramos las siguientes definiciones de los términos acción, proceso, objeto y esquema, así como de las respectivas concepciones:

1. *Acción. Concepción de acción.* Una *acción* es una transformación, ya sea mental o física, que el sujeto realiza sobre un objeto para obtener otro objeto. Esta transformación es percibida por el sujeto esencialmente como externa. La transformación se lleva a cabo, explícitamente o de memoria, mediante una secuencia de instrucciones paso a paso que indican las operaciones a realizar. Una persona tiene una *concepción de acción* de un concepto matemático si su nivel de competencia para resolver problemas se limita a la ejecución de las transformaciones implicadas. Es importante señalar que una persona con una comprensión de mayor nivel también puede realizar una acción si así lo considera apropiado, sin estar supeditado a ella. Algunos ejemplos de acción y concepciń de acción son los siguientes:

    a) calcular el valor de una función en punto dado o manipular la fórmula de una función. La persona tendrá una concepción de acción del concepto función cuando su conocimiento del concepto se limita a calcular, mediante una fórmula, el valor de la función en un punto dado, y es incapaz de interpretar una situación como una función, a menos que tenga una fórmula para calcular valores.

    b) resolver una ecuación siguiendo los pasos de un ejemplo similar. La persona tendrá una concepción de acción de la noción de resolución de ecuaciones si su nivel de competencia para resolver dicha ecuación se limita a imitar un ejemplo resuelto.

    c) calcular la derivada de una función siguiendo unas reglas dadas. El sujeto tiene una concepción de acción de la diferenciación si calcula la derivada de una función paso a paso siguiendo unas reglas (aprendidas de memoria o contenidas en una lista).

    Un sujeto que tiene una concepción de acción de un concepto, digamos, el concepto de función, tendrá serias dificultades para comprender otras nociones derivadas tales como función definida por tramos, función inversa, composición de funciones, conjunto de funciones, función derivada y soluciones de una ecuación diferencial. La dificultad radica en que todas estas nociones requieren de concepciones de proceso y/o objeto del concepto de función. Por tanto, el sujeto debe ser capaz de ir más allá de una concepción de acción, desarrollando la capacidad de interiorizar acciones en procesos o encapsular procesos en objetos.

2. *Proceso. Concepción de proceso*. Cuando una acción se repite y la persona reflexiona sobre ella, entonces puede ser interiorizada en un proceso, esto es, el sujeto hace una construcción interna que le permite realizar la acción. Esta construcción ya no está necesariamente dirigida por un estímulo externo. Una persona que ha construido un proceso tiene un control consciente sobre todos y cada uno de los pasos de una acción sin necesidad de recurrir a representasiones ostensivas de los mismos. Una persona cuyo nivel de comprensión de un concepto se limita a concebir los procesos correspondientes a dicho concepto, se dice que está o tiene una concepción de proceso de ese concepto. Algunos ejemplos de proceso y concepción de proceso son los siguientes:

    a) concebir que una función puede recibir uno o más inputs, realizar una o más operaciones sobre ellos y devolver los resultados como outputs, sin llegar a realizar efectivamente los cálculos.

    b) resolver una ecuación tomando como guía la forma de la ecuación. En este caso, la persona es capaz de describir los pasos necesarios para resolver la ecuación, sin necesidad de realizarlos. La persona tiene una concepción de proceso de la noción de resolución de ecuaciones si tiene un proceso para encontrar soluciones, pero no es capaz de realizar una acción sobre el conjunto solución sin conocer las soluciones explicítamente.

    c) encontrar la función derivada de una función usando reglas. La persona tiene a lo más una concepción de proceso de la diferenciación si puede encontrar la derivada de funciones elementales, pero no puede utilizar la idea de la segunda derivada a menos que la primera derivada haya sido calculada explícitamente.

Una vez que la persona ha construido un proceso, éste puede ser transformado de varias formas. Un proceso puede ser revertido o puede ser coordinado con otros procesos. Con una concepción de proceso de función, se pueden relacionar dos o más funciones para construir una composición, o revertir el proceso para obtener funciones inversas, etc.

3. *Objeto. Concepción de Objeto*. Una persona puede construir objetos cognitivos de dos maneras. Primero, cuando la persona es consciente del proceso como una totalidad, puede pensar en él como un todo, y es capaz de actuar sobre él, realizando, si fuera necesario, las transformaciones necesarias y suficientes (acciones o procesos) implicadas, se dice que el sujeto ha construido un objeto cognitivo para el correspondiente proceso. Se dice también que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. Segundo, cuando reflexiona sobre un esquema, es consciente del esquema como una totalidad y es capaz de realizar acciones sobre él, se dice que la persona ha tematizado el esquema en un objeto. Una persona tiene una concepción de objeto de un concepto matemático cuando su nivel de comprensión le permite realizar acciones sobre él, así como desencapsular el objeto para volver al proceso del cual se obtuvo si fuera necesario (con el fin de usar sus propiedades y manipularlo); o en el caso de un esquema tematizado, destematizarlo en sus diversas componentes. Algunos ejemplos de encapsulación (tematización) de un proceso (de esquema) en un objeto son los siguientes:

   a) visualizar una función como la suma de dos funciones sin hacer referencia a ejemplos específicos. Una persona tiene una concepción de objeto de una función si es capaz de descomponer una función en la suma de otras dos funciones.

   b) reconocer en una situación cómo y por qué la regla de la cadena está implicada. Tal persona tiene una concepción de objeto de la regla de la cadena, como resultado de haber tematizado el esquema correspondiente, si puede actuar sobre él y combinarlo con otras reglas.

   c) comprender las relaciones entre distintos métodos y seleccionar el más apropiado para encontrar las posibles soluciones de una ecuación algebraica.

   d) reconocer, seleccionar y usar correctamente las reglas generales de la diferenciación implicadas en una situación.

En matemáticas es muy importante que una persona sea capaz de moverse entre una concepción de proceso y una concepción de objeto de una idea matemática. La encapsulación de procesos en objetos y la desencapsulación de los objetos para volver a los procesos que los engendraron, se dan cuando se piensan, por ejemplo, en las operaciones con funciones o en conjuntos de funciones. En general, se considera que la operación de encapsular procesos en objetos es sumamente difícil. De hecho, esta es un área que demanda más experimentación (Dubinsky, 1996). El mecanismo para pasar de un nivel a otro es siempre, y como ya se mencionó, la abstracción reflexiva, entendida en el sentido de la reflexión que hace el sujeto sobre el sentido de las operaciones que se efectúan sobre el objeto matemático y del efecto que tienen sobre él.

4. *Esquema*[7]. Una vez que se ha construido objetos y procesos, estos pueden ser interconectados de varias formas: por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados; procesos y objetos se pueden relacionar por el hecho de que el primero actúa sobre el segundo. Así un esquema para cierta parcela de las matemáticas es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados, consciente o inconscientemente, en la mente de la persona en una estructura coherente y que pueden ser evocados para enfrentar una situación problema. Una función y una característica sumamente importante de la coherencia de un esquema es su uso para decidir si algo está o no al alcance del esquema. Los mismos esquemas pueden ser tratados como objetos y formar parte de un esquema de nivel superior (tematización de un esquema). Por ejemplo, el esquema de espacio de funciones puede ser aplicado a conceptos como espacio dual, espacio de transformaciones lineales y álgebra de funciones. En resumen, un esquema es una estructura cognitiva coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas previamente construidos.

Tal como ya se ha mencionado, hay al menos dos formas de construir objetos: a partir de procesos y de esquemas. Los objetos pueden ser transformados por acciones de nivel

[7] Skemp (1971) utilizó el término esquema como una estructura de relaciones jerarquícas la cual permite integrar nuevo conocimento y experiencias. Comprender algo significa asimilarlo en un esquema adecuado. Una condicón necesaria para el funcionamiento cognitivo de orden superior es la capacidad del sujeto de categorizar cosas del mundo. El banco de patrones de acciones que el sujeto usa en la actividad matemática es objeto mismo de categorización. En un nivel primario, se categorizan eventos perceptuales; mientrás que en un nivel secundario, se categorizan las respuestas del cerebro a la categorización perceptual.Un esquema es entonces una organización estructural obtenidad a través del mecanismo de la categorización conceptual. La categorización conceptual es interna y requiere categorización perceptual y memoria. Un esquema de acción o esquema de orden cero es la realización de una secuencia de acciones para alcanzar un objetivo. Un esquema de orden n es una categorización de esquemas de orden inferior.

superior que conllevan a otros procesos, objetos 0 esquemas nuevos. Por tanto, tenemos un mecanismo que puede ser visto como una espiral ascendente de acciones, procesos y objetos dentro de esquemas que se reconstruyen y crecen. Algunos ejemplos de esquemas son los siguientes:

a) Un esquema para resolver ecuaciones algebraicas, el cual puede incluir varios métodos para transformar ecuaciones y una concepción de lo que significa resolver una ecuación.

b) Un esquema para la diferenciación, el cual puede incluir varias reglas para encontrar la derivada de una función y alguna interpretación geométrica o fśica de la derivada.

c) Las reglas matemáticas, tales como la regla de la cadena para la diferenciación, que requieren coordinar dos o más acciones, procesos u objetos, pueden también ser entendidos vía un esquema.

Los miembros del grupo RUMEC postulan que el esquema de una persona para un concepto incluye la versión del concepto que está descrita en la descomposición genética, como también otros conceptos que la persona percibe que tienen que estar relacionados al concepto en el contexto de una situación-problema. La distinción entre el esquema y esos otros conceptos es como la distinción entre órgano y célula en biología. Ambos son objetos, pero el órgano (esquema) proporciona la organización necesaria para el funcionamiento de las células en beneficio del organismo. El esquema de una persona es la totalidad de conocimiento que está relacionado (consciente o inconscientemente) a un tema matemático en particular. Una persona tendrá un esquema de función, un esquema de derivada, un esquema de grupo, etc. El esquema de una persona puede incluir acciones o respuestas tales como. *Cada vez que veo este símbolo yo hago eso*.

Los esquemas son muy importantes para el fortalecimiento matemático de la persona. Sin embargo, la investigación en este campo está lejos de saber en profundidad cómo éstos determinan o se relacionan con el rendimiento matemático. El uso en investigación y en enseñanza de la noción de esquema es más reciente y por lo mismo se cuenta con menos referencias de su aplicación al análisis de la manera como los estudiantes construyen los conceptos matemáticos. Todo lo que se puede hacer, por el momento, es conectar las construcciones cognitivas necesarias de un concepto en un guía genérica de desarrollo y comprensión (descomposición genética) y estudiar cómo esto es asimilado por cada persona (esquema). Sin embargo, no basta con especificar las acciones y los procesos y los objetos que intervienen en la solución de un problema o de un conjunto de problemas, sino que es necesario, además, tener en cuenta que estos elementos están interconectados unos con otros. Cuando se toman en consideración esas relaciones, es posible identificar, en las acciones de los estudiantes que resuelven un mismo problema, esquemas en distinto grado de formación o de estructuración, dependiendo de cuáles rela ciones pueden identificarse como construidas. Lo que se define como esquema es una herramienta conceptual de análisis que permite distinguir e identificar ciertas características de lo que hacen los individuos cuando resuelven problemas de matemáticas. La diversidad en la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos puede estudiarse tomando como referencia la manera como cambian o evolucionan los esquemas.

4.1.3. Evolución de los esquemas

En su trabajo sobre epistemología genética, (Piaget y García, 1982) proponen que los esquemas evolucionan y explícitan los mecanismos involucrados en esta evolución. Ahí se pueden distinguir tres fases o etapas que se caracterizan por el grado de construcción de relaciones entre los elementos constitutivos del esquema. Piaget y García llegan a esta idea a partir de los estudios psicogenéticos de Piaget y la sustentan en ellos. Intentan, además, demostrar que algo similar ocurre en la historia. Piaget y García ejemplifican la existencia de tres niveles, los niveles intra, inter y trans para las construcciones algebraicas, para algunas construcciones geométricas y en el caso de la mecánica newtoniana. Proponen que este tipo de construcción puede encontrarse en cualquier proceso de construcción de conocimiento y, además, que al estudiar cada una de estas etapas se encuentra que el proceso es anidado, es decir, que dentro de cada etapa de construcción del conocimiento se puede encontrar una triada intra, inter, trans, en un nivel distinto. En la etapa intra, se construyen relaciones internas del objeto o fenómeno; posteriormente, se encuentra una etapa inter, en la que el individuo constituye relaciones entre los objetos o fenómenos de conocimiento; y, por último una etapa trans en la que las relaciones adquieren mayor coherencia y se estructuran las relaciones del nivel inter. En este nivel, el individuo puede trabajar con el esquema de una manera mucho más estructurada que cuando el esquema está en otras fases constitutivas, lo cual no quiere decir que el esquema permanece ya inmóvil, pues los esquemas siguen construyéndose y enriqueciéndose mediante la construcciónn de nuevas relaciones con otros objetos u otros esquemas.

El grupo RUMEC parte de estos planteamientos acerca de la evolución de los esquemas para hacer una primera adaptación que permita el análisis de los esquemas que pueden vislumbrarse a través del trabajo de los estudiantes cuando resuelven problemas de matemáticas que no requieren el uso de un único concepto. La identificación de las transformaciones que intervienen en la evolución de los esquemas es una tarea compleja. Como un primer acercamiento, lo interno de las relaciones se refiere a su construcción en términos de acciones, procesos y objetos relativos a un mismo concepto matemático, el inter a las relaciones entre diversos conceptos y el trans a la posibilidad de tomar un conjunto de conceptos que pueden ser considerados como acciones, procesos, objetos o esquemas, conjuntamente con sus relaciones como un objeto sobre el cual se pueden ejercer nuevas acciones. En algunos trabajos realizados por miembros del grupo RUMEC se ha encontrado que hay algunos fenómenos dentro del contexto de la enseñanza de las matemáticas en la universidad que efectivamente se pueden explicar con mayor facilidad si se introducen las nociones de esquema y de su evolución en la forma descrita anteriormente (Arnawa, Kartasasmita, Baskoro y otros, 2012; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, DeVries, St~John, Tolias y Vidakovic, 1997; Cooley, Trigueros y Baker, 2007; Parraguez y Oktaç, 2010; Trigueros, 2005; Weller, Clark, Dubinsky, Loch, McDonald y Merkovsky, 2003).

Respecto a la naturaleza del desarrollo de los esquemas resulta que éstos puede describirse a través de ciertos *niveles o estadios* que ocurren en un orden específico: *intra nivel*, *inter nivel* y *trans nivel* (Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, DeVries, St~John, Tolias y Vidakovic, 1997). Por ejemplo, en un esquema de la geometría estos niveles podrían llamarse *: intrafigural, interfigural, transfigural*. En un esquema analítico *: intraoperacional, interoperacional, transoperacional*. La existencia de éstos estadios, uno de los principios fundamentales de la epistemología genética, expresa que el desarrollo del sistema cognoscitivo no es ni un crecimiento continuo, ni un proceso lineal:[8].

[8]El sistema cognoscitivo se considera como un sistema abierto cuya dinámica está determinada en gran medida

> Esta progresión no consiste en simples rebasamientos, puramente lineales, tales como los encontrados en toda sucesión dialéctica elemental, sino que es necesario referirse a un rebasamiento continuo de los instrumentos mismos de rebasamiento, lo cual le confiere a los instrumentos cognoscitivos su riqueza y complejidad particular. ... Cada estadio no puede ser concebido como un crecimiento natural a partir del estadio precedente, puesto que consiste en una reorganización de la totalidad de los instrumentos anteriormente utilizados por el sujeto. (Piaget y García, 1982).

En los trabajos publicados se asocia el nivel intra con la construcción de relaciones entre procesos, objetos y esquemas relacionados con un mismo concepto, el nivel inter con la existencia de relaciones entre diferentes conceptos relacionados con una misma área de las matemáticas y el nivel trans con el hecho de que el estudiante dé muestra, a lo largo de su trabajo, de utilizar una estructura coherente de relaciones entre los conceptos y de ser capaz de determinar cuándo es aplicable dicha estructura y cuándo no.

En el glosario de la teoría APOS (ver http://www.avizora.com/publicaciones/epistemologia/textos/) encontramos las definiciones siguientes:

Intra nivel de un esquema: se caracteriza por centrarse en ítems o características individuales aisladas de otras acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. La persona aún no ha construido ninguna relación entre ellos, y menos aun estructuras. Por ejemplo, en el desarrollo de un esquema de la regla de la cadena, un estudiante puede usar indistintamente reglas especiales de la regla de la potencia general y no llegar a relacionarlas como casos especiales de dicha regla.

Inter nivel de un esquema: se caracteriza por la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos. En este nivel una persona comienza a agrupar ítems o características de naturaleza similar y tal vez pueda denominarlas por un mismo nombre. Por ejemplo, al encontrar

por los intercambios con el medio. Su evolución se caracteriza por períodos de equilibrio dinámico o de equilibración (estadios), seguidos de rupturas de equilibrio (desequilibración) y de reorganizaciones (reequilibración) que conduce al sistema a nuevas condiciones estacionarias (nuevo estadio). Así pues, los estadios son períodos de estabilidad relativa que involucran todo tipo de fluctuaciones que surgen de las situaciones cambiantes con las cuales está confrontado permanentemente el sujeto. Y la transición de un estadio cognoscitivo al siguiente es un ejemplo típico de la inestabilidad de un sistema que no logra ya absorber ciertas perturbaciones (contradicciones internas, incapacidad de resolver ciertos problemas, etc) y debe por lo tanto reorganizar los instrumentos asimiladores para incorporar nuevas situaciones.

la derivada de una función, un estudiante que visualiza conjuntamente la regla de la potencia general y otras situaciones especiales (tales como las funciones trigonométricas) bajo la descripción de la regla de la cadena, podría estar en el inter nivel del desarrollo de un esquema de la regla de la cadena. El estudiante no entiende porque ellos son casos especiales de la regla de la cadena, sino que piensa en términos de procedimientos similares que involucran funciones interiores y exteriores. En Clark y otros (1997, p. 360) se llama a este nivel *pre-esquema*: colección de elementos relacionados de alguna manera.

Trans nivel de un esquema: se caracteriza porque la persona ha construido una estructura subyacente que permite entender las relaciones descubiertas en el inter nivel y que a la vez da coherencia al esquema. Esta coherencia determina lo que está o no al alcance del esquema. En este nivel, la comprensión pasa de una lista a una regla general. Por ejemplo, un estudiante está en el trans nivel de desarrollo del esquema de la regla de la cadena si entiende que varios casos especiales son aplicaciones de ésta regla e identifica las funciones que dan origen a la composición en cuestión. El estudiante también es capaz de aplicar la regla de la cadena a nuevas situaciones buscando una composición de funciones. En este caso, se dice que este estudiante tiene un esquema de la regla de la cadena.

Es importante observar que no se habla de tematizar un esquema antes de que haya alcanzado el trans nivel, es decir, antes de que se convierta en un esquema. En este sentido, es mejor pensar en términos de una versión débil (instrumental) de un trans nivel: observar cómo la persona decide lo que está dentro y lo que está fuera del esquema. Evidentemente, esto conduce a esquemas tematizados que no siempre funcionan de la mejor manera posible. Empero, esto es lo que lo sucede en la realidad y, por tanto, es sumamente importante detectar tales esquemas para poder corregirlos. Así, el esquema tiene que ser desequilibrado y reconstruido.

También, a veces, suele usarse la misma etiqueta para referirse a dos esquemas que comparten casi la misma colección de elementos, pero con una estructura subyacente diferente que les da coherencia. Por ejemplo, alguien puede estar en el *trans nivel* con respecto al esquema de la regla de la cadena para funciones reales de una variable, pero puede estar en el *intra nivel* con respecto al esquema de la regla de la cadena para funciones reales de varias variables.

Por otra parte, cuando se habla de un esquema a secas, se supone que nos estamos refiriendo a un esquema que ya ha alcanzado el trans nivel de desarrollo.

La etiqueta *madurez del esquema* (Clark y otros, 1997) suele utilizarse para referirse a la fuerza o potencia de un esquema. Esta noción es similar a lo que sucede con el concepto de función. Si el proceso de construcción se reduce a un proceso sintáctico que organiza símbolos en una fórmula de acuerdo a ciertas reglas sintácticas, y si éste es el proceso que es encapsulado en un objeto, entonces el estudiante acaba con una concepción de función débil. Aquí la causa no es el fracaso del proceso de encapsulación, sino la encapsulación de un proceso que no era lo suficientemente rica. De igual manera, una persona puede tematizar un esquema que tiene una estructura coherente débil y, en consecuencia, está persona puede no ser capaz de aplicar ese esquema en situaciones nuevas. Por ejemplo, un estudiante puede tener un esquema de la regla de la cadena que le permite diferenciar funciones definidas mediante fórmulas algebraicas estándares, pero no es capaz de reconocer una composición de funciones cuando aparecen funciones definidas mediante integrales y, por tanto, de aplicar la regla de la cadena. Un esquema de composición de composición de funciones débil puede conducir a un esquema de regla de la cadena también débil.

4.1.4. Descomposición genética

El primer paso para implementar la metodología RUMEC, es proponer un análisis teórico inicial de los conceptos matemáticos en el que se describen las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje. El resultado es un modelo de cognición llamado *descomposición genética del concepto*. Una descomposición genética de un concepto matemático es, pues, una descripción detallada de los constructos cognitivos que una persona debe hacer para llegar a comprender y poder manejar con flexibilidad el concepto en cuestión. Una descomposición genética no tiene por que ser única. Pueden coexistir varias descomposiciones genéticas de un mismo concepto. En un principio, son los investigadores quienes proponen, basados en su experiencia en el aula, una descomposición genética del concepto por estudiar; posteriormente, a través de la propia investigación, dicha descomposición se refina de modo que dé cuenta de mejor manera de lo que se observa que hacen los estudiantes cuando trabajan con ese concepto. Lo que es importante es que cualquier descomposición genética de un concepto sea un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto.

El diseño de una descomposición genética de un concepto matemático parte de una teoría del aprendizaje, el conocimiento matemático implicado y las investigaciones previas. Esto permite proponer un sistema de construcciones que el sujeto debe hacer conforme aprende el concepto matemático bajo los términos acción, proceso y objeto, es decir, se destacan las acciones y los distintos procesos, además de la forma de irlos estructurando para posibilitar la construcción de la concepción objeto y para propiciar después la construcción de las relaciones entre dichas acciones, procesos y objetos. De esta manera, se fomenta la construcción de los esquemas que se consideran necesarios para el aprendizaje de los conocimientos matemáticos. Así, una descomposición genética funciona como una guía para el aprendizaje de ese concepto.

Un ejemplo de descomposición genética

Un ejemplo de una *descomposición genética* [9] es el siguiente:

1. Descomposición genética para la comprensión gráfica de la función derivada (Asiala y otros, 1997).

    a) **Prerequisitos:**

    1) Representación gráfica de objetos matemáticos

        a' Representación gráfica de un punto.

        b' Representación gráfica de una recta y del concepto de pendiente.

    2) Coordinar representaciones de puntos con una función

        a' Interpretar gráficamente el punto (x,y) cuando $y = f(x)$

[9] El proceso de construcción de una buena descomposición genética o, al menos de una adecuada, es bastante largo. En este momento se cuenta con descomposiciones genéticas para muchos conceptos del cálculo, del álgebra lineal, del álgebra abstracta, de ecuaciones diferenciales y de lógica. La mayor parte de ellas han sido publicadas y se encuentran en la fase de la segunda o tercera iteración (véanse Arnawa, Kartasasmita, Baskoro y otros, 2012; Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, DeVries, St~John, Tolias y Vidakovic, 1997; Cooley, Trigueros y Baker, 2007; Meel, 2003; Parraguez y Oktaç, 2010; Trigueros, 2005; Weller, Clark, Dubinsky, Loch, McDonald y Merkovsky, 2003) .

b' Superar la necesidad de contar con una fórmula para taratar con una función [10].

$b)$ **Rutas gráfica y analítica hacia la derivada**

- 1a. Gráfica: acción de conectar dos puntos sobre una curva para dibujar una cuerda y acción de calcular la pendiente de la recta secante que pasa por dichos puntos.
- 1b. Analítica: acción de calcular la razón de cambio promedio usando el cociente de incrementos en un punto.
- 2a. Gráfica: interiorización de las acciones en el punto $1a$ en un proceso cuando los puntos de la gráfica se aproximan tanto como se quiera.
- 2b. Analítica: interiorización de las acciones en el punto $1b$ en un proceso cuando la longitud de los intervalos de tiempo se aproxima a cero.
- 3a. Gráfica: encapsulación del proceso en el punto $2a$ para obtener la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes y, también, el de la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función.
- 3b. Analítica: encapsulación del proceso en el punto $2b$ para obtener la razón de cambio instantánea de una variable respecto la otra.
- 4. Interiorización de los procesos en los puntos $2a$ y $2b$ para obtener la definición de la derivada de una función en un punto como el límite del cociente de incrementos en ese punto.

$c)$ **Intepretación gráfica de la derivada**

1) Interpretación gráfica de la derivada en un punto

   - Vencer la necesidad de derivar una fórmula [11]

[10] Un estudiante puede mostrar una concepción de proceso de una función cuando ésta se representa por expresiones algebraicas, ecuaciones o conjuntos de pares ordenados, pero estar en el nivel de acción para una situación gráfica. Una concepción de acción es patente cuando se tiene necesidad de una fórmula para la función. Esta necesidad puede provocar respuestas sin sentido, incoherentes o inconsistentes.

[11] Un estudiante que muestra esta necesidad en una situación gráfica no tiene una concepción de acción en el registro gráfico.

- Coordinar con el punto 1 para concebir $f'(a)$ como la pendiente de la recta tangente[12].
- Coordinar varias interpretaciones de $f'(a)$

2) Interpretación gráfica de la derivada como una función

- Visualizar la derivada como la función: $x \to$ la pendiente en $(x, f(x))$
- Identificar f' con la linea tangente en un punto.

d) **Usando el concepto de derivada**

1) Hacer varias coordinaciones para obtener el gráfico de f

- Interpretación gráfica de $f(x)$ para una x fija.
- Interpretación de $f'(x)$ para una x fija como la pendiente
- Concebir o realizar el proceso de mover x en un intervalo
  - relacionar la monotonía de la función y el signo de la derivada
  - relacionar pendiente infinita (tangente vertical) y derivada infinita
  - relacionar la concavidad de la función y el signo de la segunda derivada
- Dibujar la gráfica completamente.

[12]En el nivel de acción, se puede identificar la recta tangente en un punto y calcular su pendiente. Hay al menos dos formas de construir esta acción. Una memorizar la regla de que *la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente al gráfico en ese punto*. Y otra construcción más rica se obtiene al concebir la tangente como el limite de las secantes. De esta última el estudiante construirá el proceso de la función derivada.

Capítulo 5

Objetivos

Objetivos generales

1. Contribuir al desarrollo teórico y metodológico de la didáctica de las matemáticas en el nivel superior, mediante la descripción y caracterización de los mecanismos de funcionamiento y desarrollo del pensamiento matemático avanzado en torno al tema de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

2. Enriquecer la metodología de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias con secuencias de aprendizaje en las cuales, contrario al acercamiento convencional algebraico y algorítmico, se coordinan las diferentes representaciones semióticas y se incorpora una base de significados pertinentes de acuerdo a las prácticas científicas de referencia de los destinatarios.

Objetivos específicos

1. Diseñar y validar una Descomposición Genética del concepto de solución de una EDO de primer orden desde una perspectiva cuantitativa y cualitativa y en sintonía con las prácticas científicas de referencia de los estudiantes.

2. Elaborar e implementar un secuencia didáctica coherente con la descomposición genética inicial.

3. Evaluar la coherencia de la Descomposición Genética Inicial y su impacto sobre el pensamiento, conocimientos y competencias de los estudiantes.

4. Estudiar qué dificultades y obstáculos experimentan los estudiantes, así como las técnicas y conceptos que utilizan cuando se les plantean tareas que requieren de la interacción y la coordinación de aspectos gráficos y algebraicos para graficar o bien el diagrama de soluciones o la solución de un problema de valor inicial para una ecuación diferencial de primer orden.

El producto de esta investigación será una Descomposición Genética, la cual favorece la construcción de un esquema gráfico-algebraico y flexible del concepto de solución de una EDO de primer orden.

Capítulo 6

Metodología

Desde una perspectiva de investigación cualitativa y teniendo en cuenta el marco de la Teoría APOS, se ha implementado la metodología RUMEC[1]. Esta metodología se basa en un ciclo recursivo de tres componentes dinámicas:

1. El análisis teórico inicial, el cual proporciona un modelo epistemológico del concepto en cuestión, es decir, qué significa entender ese concepto y cómo esa comprensión puede ser construida por el estudiante.

2. Diseño e implementación de una secuencia didáctica, la cual tiene un propósito doble, por una parte, favorecer la construcción del concepto por parte de los estudiantes y, por otra, permitirle al investigador recopilar datos de investigación, y

3. La observación, evaluación y revisión del análisis teórico inicial y de la secuencia didáctica para realizar otra iteración del ciclo.

En este sentido, el proceso de investigación se ha centrado en la construcción y validación de un modelo de cognición llamado *Descomposición Genética Inicial* (DGI) del concepto de solución de una EDO de primer orden, esto es, una descripción de los constructos cognitivos que un estudiante debe hacer para desarrollar un esquema gráfico-algebraico flexible del concepto de solución de una EDO de primer orden. Y de acuerdo con esa DGI, se ha delimitado un contexto de investigación y de enseñanza y aprendizaje que permite la recogida de datos. En este estudio ese contexto es la asignatura de Ecuaciones Diferenciales I que se imparte en el primer

[1] Research in Undergraduate Mathematics Education Community.

semestre de cada año en las carreras de Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Estadistica de la Escuela de Matemática de la Universidad de El Salvador. Y lo que se hace es un estudio de casos con estudiantes de matemáticas y estadística que cursaron dicha asignatura durante el primer semestre del año 2009, de febrero a junio. El estudio de casos se centra en realizar una descripción rica y densa de los mecanismos de construcción de los estudiantes de los conceptos y procesos de la noción de solución de una EDO de primer orden, cuando ellos participan de un proceso de enseñanza y aprendizaje en el que se hace un balance entre la perspectiva tradicional y la perspectiva moderna y se favorece la articulación de los registros de representación gráfica y algebraica de las soluciones de una EDO. De manera que este estudio es: particular, descriptivo, heurístico e inductivo. Es particular en cuanto se centra en un grupo especifico de estudiantes; es descriptivo porque pretende realizar una rica y densa descripción del fenómeno objeto de estudio; es heurístico en tanto que el estudio nos iluminará en la comprensión del caso, nos ayudará a descubrir nuevos significados, a ampliar nuestra experiencia o a confirmar lo que ya sabemos; y es inductivo, puesto que llegaremos a generalizaciones, conceptos o hipótesis a través de procedimientos inductivos.

Para llevar a cabo este proceso, se distinguen los momentos siguientes:

1. Análisis y reflexión teórica sobre los problemas (epistemológicos, cognitivos y didácticos) y las recomendaciones de otras investigaciones centradas en el tema de estudio.

2. Identificación de los esquemas o concepciones de otras nociones matemáticas necesarias para comenzar un estudio de enfoque cualitativo de las EDO.

3. Elaboración de una Descomposición Genética Inicial (DGI), que conjuga el análisis epistemológico, cognitivo y didáctico inicial.

4. Validación experimental de la Descomposición Genética Inical, por medio del diseño y experimentación de situaciones de aprendizaje deducidas de la DGI. Lo ideal es diseñar e implementar una propuesta didáctica acabada coherente con la DGI y llevar a cabo un seguimiento detallado del comportamiento de los estudiantes con el fin de recoger datos de investigación, utilizando diversos instrumentos de recogida de datos (exámenes,

entrevistas grabadas, observación de interacciones y producciones durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, revisión de los cuadernos de tareas, etc.). Los datos obtenidos serán analizados y categorízados y servirán para hacer una evaluación de la DGI. Para el análisis de los datos utilizaremos: tablas de respuestas de los problemas propuestos, redes sistémicas y extractos de transcripciones de las entrevistas.

6.1. Análisis teórico inicial

La solución general de una EDO escalar de primer orden $F(t,x,x') = 0$ es el conjunto de todas sus soluciones. En algunos casos la solución general puede ser representada en forma explícita como una función $x(t) = G(t,C)$ que depende de una constantge arbitraria C; valores específicos de C definen soluciones particulares de la EDO. En otros muchos casos la solución general se escribe en forma implícita como $H(x,t,C) = 0$ o en forma paramétrica $x = x(s,C),\ t = t(s,C)$. Geométricamente, la solución general de una EDO es una familia de curvas en el plano tx que dependen del parámetro C. Estas curvas son llamadas curvas integrales de la EDO. Se llama diagrama de soluciones al conjunto de curvas integrales. A cada solución particular le corresponde una curva que pasa por un punto del plano.

Una EDO de primer orden escrita en forma normal $x' = f(t,x)$, como el proceso de búsqueda de sus soluciones, puede visualizarse como un esquema que establece una red rica de relaciones entre las múltiples representaciones e interpretaciones de los siguientes objetos: i) el objeto función, ii) el objeto derivada, iii) el objeto ecuación y iv) el objeto solución.

Si la función $x' = f(t,x)$ se expresa mediante una expresión analítica, la ecuación diferencial resume la información sobre $x'(t)$ y se trata de describir $x(t)$ ya sea mediante argumentos analíticos o geométricos. Sin embargo, si la función $x' = f(t,x)$ se expresa en forma gráfica, para identificar $x(t)$ lo natural es hacerlo mediante argumentos geométricos. En esta ruta hay muchos conceptos involucrados y varias condiciones que no son las que normalmente se trabajan ni en los textos ni en las clases.También hay casos en los que no se puede disponer de una solución analítica (ya sea implícita o explícitamente) y, por tanto, es necesario tratar de analizar las soluciones de otra manera. Para ello, se puede calcular con bastante precisión soluciones numéricas o usar el cálculo y la tecnología para visualizar las gráficas de las soluciones. En este sentido, el método de Euler se muestra como un método númerico fundamental para aproximar las soluciones de una EDO, así como para entender como funciona la aplicación DFIELD, por ejemplo. En fin, uno de los objetivos de la teoría de las EDO es el de lograr una descripción lo más completa posible del comportamiento de las soluciones de una ecuación, cuando no se dispone, como ocurre la mayoría de veces, de una fórmula que las represente.

Si $x(t)$ es una solución de la ecuación, el gráfico de $x(t)$ es llamado curva solución. Si $x_0 = x(t_0)$, entonces el punto (t_0, x_0) está sobre la curva solución. Además, la EDO dice que $x'(t_0) = f(t_0, x_0)$, lo cual da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $x(t)$ en el punto (t_0, x_0). Así cada curva solución es una curva cuya pendiente en el punto (t_0, x_0) es $f(t_0, x_0)$. Esta interpretación da una nueva comprensión geométrica de la EDO. Imagínemos que en cada punto (t, x) de un rectángulo R se pega un pequeño segmento de recta con pendiente $f(t, x)$. El resultado es llamado campo de pendientes. También se puede dibujar el lugar geométrico de puntos en los que las tangentes a las curvas solución tienen una misma dirección: $x'(t) = f(t, x) = k,\;$ con $\;k \in R\;$ un parámetro. Este conjunto de puntos se llama isoclina. La familia de isoclinas de la ecuación diferencial se determina al darle valores al parámetro k, y permiten trazar aproximadamente las curvas solución. Obsérvese que a través de la isoclina $f(t, x) = k_0$, una solución de la ecuación diferencial cruza la isoclina con pendiente k_0. La isoclina $k = 0$ da la curva donde aparecen los puntos posibles extremos de las curvas solución. El análisis del signo de $f(t, x)$ permite determinar la monotonía de las curvas solución. De la ecuación $x' = f(t, x)$ se obtiene $x'' = f_t + f_x x' = f_t + f_x f$. El signo y los ceros de x'' permiten determinar la cóncavidad de las curvas solución y la existencia de posibles puntos de inflexión. Coordinando todos estos hechos, lo cual representa un problema complejo para los estudiantes, junto con el teorema de existencia y unicidad, la prolongación y asíntotas de las soluciones es posible dibujar el diagrama de soluciones de la ecuación. En los cursos de cálculo todos estos conceptos ya han sido estudiados por los estudiantes; el problema que hay que analizar es precisamente la posibilidad de los estudiantes de transferir esos conocimientos para tratar problemas distintos a los problemas tipo e integrar toda esa información relativa a distintos conceptos en la solución del problema.

Si la ecuación escalar es de la forma $x' = f(x)$, es decir, es autónoma, es posible desarrollar un estudio cualitativo de las soluciones sin grandes complicaciones técnicas. Ello permite ilustrar aun nivel elemental algunas de las cuestiones importantes del análisis moderno de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, se introducen los conceptos de puntos de equilibrio y de línea fase como herramientas alternativas para describir el diagrama de soluciones (Devaney, 1999, págs 74-86). Si la ecuación escalar autónoma depende de un parámetro: $x' = f(x, \mu)$, para estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación cuando el parámetro μ varía se introducen los conceptos de valor de bifurcación y diagrama de bifurcación (Blanchard, Devaney y Hall, 1997; Devaney, 1995).

Entre los resultados básicos para describir completamente el comportamiento de las soluciones de ecuaciones autónomas se tienen los siguientes (ver Pérez, Hernández y Montaner, 2003, pp. 307-313):

1. *Si $x(t)$ es una solución constante de $x' = f(x)$ y $x'(t_0) = 0$ para algún valor de t_0 de su intervalo de definición, entonces $x(t)$ es una solución constante.* De aquí se deduce que toda solución de una ecuación autónoma es o constante, o estrictamente creciente o estrictamente decreciente en todo su intervalo de definición.

2. *Si $x(t)$ es una solución de $x' = f(x)$, entonces para cada $c \in \mathbb{R}$, $z(t) = x(t+c)$ es también solución.* De aqui se deduce que el conjunto de soluciones de una ecuación autónoma tiene la propiedad de *invariancia por traslaciones en el tiempo*.

3. *Sea $f(x)$ es una función con derivada continua en un intervalo $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ y sea $x(t)$ es una solución de $x' = f(x)$, definida en el intervalo maximal (α, ω). Si los valores de $x(t)$ permanecen para todo $t \in [t_0, \omega)$ en un intervalo cerrado y acotado $[m, M] \subset \mathbb{I}$, entonces $\omega = \infty$ (y análogamente a la izquierda de t_0).* Este resultado se usa para determinar cuando el intervalo maximal se vuelve infinito.

4. *Con las mismas hipótesis de la proposición anterior, se verifica que $\omega = \infty$. Si* $\lim_{t\to\infty} x(t) = \xi$*, entonces $f(\xi) = 0$ (y análogamente a la izquierda de t_0).* Este resultado se usa para determinar el comportamiento asintótico y el papel de las soluciones estacionarias.

A manera de resumen puede decirse lo siguiente:

i. Si x_0 está entre dos ceros consecutivos de $f(x)$, digamos x_1 y x_2, entonces la solución $x(t;x_0)$[2] está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, su rango es el intervalo (x_1, x_2) y se aproxima a uno de ellos cuando $t \to \infty$ y al otro cuando $t \to -\infty$, dependiendo del signo de $f(x_0)$.

ii. Si f no tiene ningún cero a la derecha de $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $x(t;x_0)$ es no acotada para $t \in [0, \omega(x_0))$ si $f(x_0) > 0$, o para $t \in (\alpha(x_0), 0)$ si $f(x_0) < 0$. Y análogamente si no hay ceros a la izquierda de x_0.

iii. Si f no se anula nunca, entonces toda solución de $x' = f(x)$ toma todos los valores reales.

Se llama trayectoria u órbita del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ respecto de la ecuación $x' = f(x)$ al rango o recorrido de la solución $x(t;x_0)$. Geométricmanete las órbitas son las proyecciones sobre el eje Ox de las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial. Si $x(t)$ es una solución de $x' = f(x)$, todas las soluciones de la forma $x(t+c)$, con $c \in \mathbb{R}$ dan lugar a la misma órbita, pues todas ellas tienen el mismo rango. Por tanto, sólo hay dos tipos de órbitas para una ecuación escalar autónoma: puntos (correspondientes a puntos de equilibrio) e intervalos abiertos, acotados o no. Sobre estos intervalos se dibuja una flecha que indica el sentido en que varía $x(t;x_0)$ cuando t crece. La colección de todas las órbitas constituye el diagramas de fases o línea fase de la ecuación $x' = f(x)$. El diagrama de órbitas se dibuja fácilmente a partir de la gráfica de la función f: los ceros, son los puntos de equilibrio; si $f(x_0) > 0$, la órbita es un segmento de $\mathbb{R}$ orientado positivamente; si $f(x_0) > 0$, la órbita es un segmento de $\mathbb{R}$ orientado negativamente.
En el caso de sistemas planos

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned} \tag{6.1}$$

con f, g, f_y y g_y continuas en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se tienen las siguientes propiedades:

1. El conjunto de soluciones (6.1) tiene la propiedad de invariancia por traslaciones en el tiempo, es decir, si $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es solución, entonces, para cada $c \in \mathbb{R}$, $w(t) = z(t+c)$ es también solución. Si $z(t)$ está definida en (α, ω), $w(t)$ lo estará en $(\alpha - c, \omega - c)$.

[2] La solución del problema de valor incial $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ se denota por $x(t;t_0,x_0)$.

2. Si la solución $z(t)$ de (6.1) permanece en un subconjunto cerrado y acotado $B \subset \Omega$ para todo $t \in [t_0, \omega)$, entonces $\omega = \infty$ (y análogamente a la izquierda de t_0).

3. Si $\lim_{t\to\omega} z(t) = \xi \in \Omega$, entonces $\omega = \infty$ y $f(\xi) = 0$ (y análogamente para $t \to \alpha$).

Se llama trayectoria u órbita de una solución $z(t)$ de (6.1) a la proyección sobre $\mathbb{R}^2$ de su gráfica $G_z = \{(t, z(t)) \in \mathbb{R}^3 : t \in (\alpha, \omega)\}$. Las trayectorias del sistema (6.1) son las curvas integrales del campo vectorial definido por $(f(x,y), g(x,y))$, es decir, las curvas tales que el vector tangente en cada uno de sus puntos coincide con el que dicho campo vectorial asigna al punto en cuestión. El diagrama de fases del sistema (6.1) es el conjunto de trayectorias de sus soluciones en tanto que subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Por cada punto de Ω pasa una única trayectoria. Y una trayectoria tampoco puede cortarse a sí misma. El diagrama de fases del sistema (6.1) consta de trayectorias que no se cortan que pueden ser de tres tipos:

1. Curvas abiertas simples.

2. Curvas cerradas simples, correspondientes a soluciones periódicas.

3. Puntos de equilibrio, correspondientes a a soluciones constantes.

6.2. Análisis cognitivo y didáctico

El análisis de las dificultades de aprendizaje de los teoremas de existencia y unicidad para una ecuación diferencial ordinaria, teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y las exigencias teóricas de estos resultados, indica que no basta con que el profesor haga las demostraciones de estas propiedades en la clase, para que cada estudiante pueda visualizar y capturar toda la fenomenología intrínseca en una ecuación de primer orden de la forma $x' = f(t,x)$. Es necesario que cada estudiante construya gradualmente esos resultados a partir de su experiencia, intuición y enfrentamiento con un conjunto variado de ejemplos, contraejemplos y actividades desequilibrantes de los esquemas algebraicos-algorítmicos. Así para construir un esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una EDO, el estudiante debe coordinar el objeto solución con los de la primera y segunda derivadas y con los conceptos de continuidad, diferenciación y antidiferenciación a nivel proceso u objeto. Para identificar las propiedades de una solución, el estudiante debe llevar a cabo acciones o procesos sobre la función desconocida a través del cálculo de derivadas, de límites, del análisis de la continuidad, asíntotas, o del proceso equivalente cuando la función del lado derecho de la ecuación se representa de manera gráfica. Estos procesos deben coordinarse con el esquema de función para precisar el comportamiento de las soluciones. Todas estas acciones o procesos individuales deben así coordinarse en el esquema que hemos llamado gráfico-algebraico. La coherencia de ese esquema se puede verificar mediante la capacidad del estudiante de dibujar una variedad de soluciones que satisfagan todas las propiedades implicadas. Consideramos que un estudiante se encuentra en un nivel intra-propiedades cuando es capaz de establecer relaciones entre acciones, procesos u objetos relacionados únicamente con la coordinación de un esquema algebraico; por ejemplo, puede encontrar una fórmula para la solución general de la EDO, pero fracasa en la tarea de construir el diagrama de soluciones. Para dibujar el diagrama de soluciones intenta coordinar la primera derivada con el comportamiento de las soluciones, pero no es consciente de otras propiedades fuera del marco analítico. El nivel inter-propiedades se caracteriza en términos de la posibilidad del estudiante de coordinar los efectos de las acciones, procesos u objetos provenientes de un esquema algebraico y un esquema gráfico para dibujar el comportamiento de una solución. Pero no las puede coordinar para construir el diagrama de soluciones. El nivel trans-propiedades se determina por la capacidad del estudiante de coordinar todos los esquemas y objetos mencionados como parte de una estructura, solución general, lo cual se pone en evidencia por la posibilidad del estudiante de dibujar sin ambiguedad el diagrama de soluciones o encontrar diversas soluciones que satisfagan dichas propiedades y ciertas condiciones iniciales.

6.3. La Descomposición Genética Inicial

La construcción de un esquema rico del concepto de solución de una EDO de primer orden, debe comenzar con la descripción de una situación factible de ser expresada en el lenguaje de las EDO (Modelación). Se plantea así el problema de hallar $y(t)$. El estudiante entonces debe movilizar sus esquemas previos para describir y relacionar las distintas representaciones ostensivas de $y(t)$ y $y'(t)$, es decir, sobre los objetos de primer nivel: los conceptos de función y función derivada. Sobre estos objetos debe realizar las correspondientes acciones de primer nivel: representar y coordinar dichos objetos en los registros gráfico, numérico y algebraico. Con estos conocimientos se aborda la tarea de construir un esquema gráfico-analítico del concepto de solución de una ecuación de primer orden: $y' = f(t,y)$. En general, el camino a seguir se puede esquematizar de la manera siguiente: primero hay que encapsular en cada registro un proceso de solución. Luego coordinar procesos de solución en los dos registros, para llegar a encapsular un proceso de solución que requiere coordinar objetos y procesos en los registros gráfico y algebraico. En el cuadro 6.1 se muestran las diferentes rutas de solución que se quieren construir en el esquema solución, cada una de las cuales supone usar una o más representaciones ostensivas de los objetos y procesos implicados.

$y'(t) = f(t,y(t))$	a representación de $y(t)$			
De representación de $f(t,y(t))$	Analítica	Gráfica	Tabla	Verbal
Analítica	X	X	X	X
Gráfica		X		
Tabla		X	X	
Verbal	X	X		

Cuadro 6.1: Métodos de solución de una EDO en función de las representaciones ostensivas de $f(t,y)$ y $y(t)$

A partir del marco de referencia disciplinar y el análisi cognitivo, didáctico e histórico de las EDO de primer orden realizado, se propone la siguiente Descomposición Genética Inicial, esto es, un análisis teórico inicial y una descripción detallada de los constructos cognitivos que una persona debe hacer para llegar a comprender y poder manejar con flexibilidad el concepto de solución de una EDO de primer orden.

Descomposición Genética

1.- Prerequisitos: conocimientos previos.

1.1.- Describir las propiedades globales y locales de la gráfica de una función.

1.2.- Visualizar el efecto de una transformación geométrica sobre la gráfica de una función sin necesidad de realizar dicha transformación de manera algebraica.

1.3.- Construir la gráfica de una función, coordinando las distintas propiedades de la función y sus derivadas si:

1.3.1.- La función primera derivada está dada mediante una expresión algebraica.

1.3.2.- La función primera derivada está dada mediante una gráfica.

1.3.3.- Es conocida una serie de propiedades analíticas de la función y sus derivadas.

1.4.- Interpretar física y geométricamente la derivada.

1.5.- Usar la regla de la cadena y el Tteorema Fundamental del Cálculo para ampliar la clase de funciones conocidas.

1.6.- Dibujar un función dada, en forma implicita o explicita, usando Matlab.

1.7.- Dibujar una curva en el plano y en el espacio a partir de sus ecuaciones paramétricas, con lapíz y papel y usando Matlab.

2.- Resolución de EDO sencillas usando antiderivadas. Objetivo: desequilibrar el esquema simbólico del TFC, y plantear la posibilidad de realizar acciones y procesos en los registros algebraico y gráfico para resolver una ecuación diferencial.

2.1.- Resolver ecuaciones sencillas de la forma $x' = f(t)$ y $x' = f(x)$, con $f : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función conocida en el registro gráfico.

2.1.1.- Resolver ecuaciones de la forma $x' = f(t)$, aplicando las técnicas de integración y comprobando que la fórmula obtenida es, en efecto, solución de la ecuación.

2.1.2.- Resolver ecuaciones de la forma $x' = f(x)$, por simple inspección o adivinación, usando propiedades de las funciones y comprobando que la fórmula obtenida es, en efecto, solución de la ecuación.

2.1.3.- Reflexionar sobre el papel que juegan las variables independiente y dependiente en las ecuaciones de la forma $x' = f(t)$ y $x' = f(x)$, en el objeto solución, así como sobre los procedimientos utilizados.

2.1.4.- Discriminar las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de la forma $x' = f(t)$ y $x' = f(x)$.

2.2.- Resolver por integración problemas de valor inicial $x' = f(t)$, $x(t_0) = x_0$, determinando su intervalo máximal de existencia y comprobando que la fórmula obtenida es solución del problema de valor inicial.

2.3.- Dibujar el diagrama de soluciones de $x' = f(t)$, usando la fórmula obtenida por integración, primero con lapíz y papel y después con Matlab.

2.4.- En el diagrama de soluciones de $x' = f(t)$, dibujar soluciones de varios problemas de valor inicial $x' = f(t),\ x(t_0) = x_0$ haciendo variar el punto (x_0, t_0).

2.5.- Observar e interpretar geométricamente el hecho de que si $x(t)$ es solución de $x' = f(t)$, entonces también $y(t) = x(t) + C$ es solución para toda constante C.

2.6.- Realizar el proceso de dibujar el diagrama de soluciones de $x' = f(t)$, con $f(t)$ una función dada mediante una gráfica.

2.7.- Realizar el proceso de dibujar el diagrama de soluciones de $x' = f(t)$, con $f(t)$ dada mediante una expresión algebraica sencilla, primero simbólicamente y, después, gráficamente a partir del dibujo de la gráfica de $f(t)$.

2.8.- Reflexionar sobre la complementariedad de los procedimientos simbólicos y gráficos.

2.9.- Conocer el Teorema de Existencia y Unicidad para problemas de la forma $x' = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$ y sus implicaciones en la construcción del diagrama de soluciones.

2.10.- Encapsular el conjunto solución de una EDO como un objeto constituido por una unión de curvas solución de la misma forma que no tienen puntos en común. Esta familia de curvas o funciones puede construirse a partir de una fórmula o directamente del lado derecho de la ecuación.

2.11.- Comprobar que una función dada en forma explicita satisface una EDO.

2.12.- Comprobar que una función dada en forma implícita satisface una EDO.

3.- Introducción a la fenomenología de las EDO.

3.1.- Traducir situaciones de movimiento de una particula en un campo gravitatorio, bajo la influencia o no de fuerzas de resistencia, al lenguaje de las EDO.

3.2.- Traducir situaciones sencillas en dinámica de poblaciones al lenguaje de las EDO, por ejemplo, los modelos de crecimiento poblacional malthusiano y logístico.

3.3.- Hacer un bosquejo de las soluciones de los modelos de Malthus y logístico, primero, haciendo un estudio cualitativo (tanto en el registro algebraico como gráfico) y, luego, un estudio cuantitativo, obteniendo la fórmula de las soluciones.

3.4.- Conocer los modelos de depredador-presa, competencia y SIR, identificando el papel de las variables y los parámetros en dichos modelos.

4.- Estudio gráfico y visualización del diagrama de soluciones de $y'(t) = f(t,y)$.

4.1.- Verificar en que partes del plano se cumplen o no las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad y precisar las implicaciones sobre el diagrama de soluciones.

4.2.- Interpretar geométricamente una EDO como un campo de pendientes y sus soluciones como curvas integrales del campo.

4.3.- Construir el campo de pendientes de ecuaciones de la forma $y'(t) = f(t,y)$ y trazar soluciones sobre ellos si:

4.3.1.- $y'(t) = f(t)$, con $f(t)$ una función dada mediante una expresión algebraica.

4.3.2.- $y'(t) = f(t)$, con $f(t)$ una función dada mediante una gráfica.

4.3.3.- $y'(t) = f(y)$, con $f(y)$ una función dada mediante una expresión algebraica.

4.3.4.- $y'(t) = f(y)$, con $f(y)$ una función dada mediante una gráfica.

4.3.5.- $y'(t) = f(t,y)$, con $f(t,y)$ una función dada mediante una expresión algebraica.

4.4.- Construir campos de pendientes mediante isoclinas.

4.5.- Relacionar campos de pendientes y EDO.

4.6.- Describir el campo de pendientes de ecuaciones de la forma $y'(t) = f(t)$ o $y'(t) = f(y)$, a partir de una solución conocida.

4.7.- Identificar las zonas de monotonía, concavidad, extremos, puntos de inflexión, asíntotas, soluciones particulares inmediatas.

4.8.- Coordinar toda la información anterior para construir manualmente el diagrama de soluciones.

4.9.- Usar Dfield para dibujar el campo de direcciones y el diagrama de soluciones.

4.10.- Establecer la coherencia entre los dibujos obtenidos con Dfield y la información implicada por la EDO.

4.11.- Observar e interpretar geométricamente el hecho que si $y(t)$ es solución de $y' = f(y)$, entonces también $z(t) = y(t+C)$ es solución para toda constante C.

4.12.- Usar el método de Euler para construir soluciones numéricas y visualizar como funciona Dfield.

4.13.- Identificar soluciones de equilibrio y construir líneas de fase.

4.14.- Construir diagramas de bifurcación.

5.- Estudio analítico de una EDO.

5.1.- Encontar la solución general utilizando métodos algebraicos: ecuaciones lineales, variables separables y exactas.

5.2.- Interpretar la solución general y valorar su utilidad.

5.3.- Encontrar el intervalo de existencia de una solución particular.

5.4.- Graficar soluciones particulares usando Matlab.

6.- Cordinar 4 y 5

6.4. Diseño de la secuencia didáctica

El objetivo general de la secuencia didáctica es construir un esquema gráfico-algebraico flexible del concepto de solución de una EDO que evoque, no sólo una expresión algebraica en la que se relaciona una función y su derivada y algún método algebraico para encontrar una fórmula que satisfaga la ecuación diferencial, sino una red rica de relaciones gráficas, algebraicas e intuitivas entre la ecuación diferencial y sus soluciones que favorezca el análisis cuali-cuantitativo y la visualización del diagrama de soluciones de la ecuación. Para ello, el estudiante debe coordinar el objeto solución con los objetos, ecuación diferencial, primera derivada y segunda derivada, los conceptos de continuidad, asíntotas, puntos de equilibrios, valor de bifurcación, antidiferenciación e integración a nivel de proceso u objeto.

Ahora bien, considerando tanto los conocimientos previos de los estudiantes, como las dificultades teóricas y de comprensión de los teoremas subyacentes que sirven de sustrato para realizar un estudio cualitativo y cuantitativo de una ecuación diferencial, no basta con demostrar en la clase, de manera más o menos rigurosa, los teoremas en cuestión, para que cada estudiante puedan dar sentido, visualizar y capturar toda la fenomenología intrínseca de una ecuación diferencial de primer orden. Hace falta considerar algo más que la lógica matemática, la declaración de las definiciones, exposición de teoremas y tratar la complejidad de las nociones matemáticas para facilitar el aprendizaje. Hay que permitir que los estudiantes construyan las bases de los conceptos sobre la experiencia antes de enfrentar el formalismo matemático: Y ello es lo se pretende con la descomposición genética: dibujar o trazar un ruta de aprendizaje significativa. Por tanto, el objetivo específico de la secuencia didáctica es provocar la necesidad en los estudiantes de coordinar los registros de representación algebraico y gráfico, así como facilitar una variedad actividades y de ejemplos previos que les permita fortalecer su experiencia e intuición, a fin de construir esquemas ricos de esos teoremas fundamentales y enfrentarse en mejores condiciones a sus demostraciones y aplicaciones. Para ello, se han privilegiado ejercicios que pueden ser trabajados con lápiz y papel, aunque no se excluye el uso de la tecnología, y que permiten mostrar la limitaciones de privilegiar el enfoque algebraico. Luego, se proponen ejercicios que pueden ser resueltos con o sin la computadora, haciendo énfasis en la necesidad de establecer conexiones coherentes en los dos registros. Esta secuencia didáctica se ha desarrollado en la Unidad I del curso de Ecuaciones Diferenciales I durante un periodo de 4 semanas (24 horas) previo a estudiar los métodos de solución algebraicos de solución para una EDO de primer orden: variables separables, lineales y exactas.

1.- Actividad 1: conocimientos previos. Con estos ejercicios se pretende familiarizar a los estudiantes con los conocimientos necesarios en el diseño: manejar una serie de operaciones gráficas sobre una función, poseer un esquema gráfico-algebraico de los objetos función y función derivada y hacer una introducción al uso del MatLab. Se proponen ejercicios como los siguientes:

   1.1.- Calcular $f'(x)$ sí $f(x) = \int_{-2x}^{x^2} \sin(s^2)\, ds$.

   1.2.- Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_0^x f(t)\, dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt,\ \forall x \in R$. Encontrar una fórmula explícita para $f(x)$.

   1.3.- Bosquejar tres posibles gráficas para $h(x)$ si:

      a) $h(x)$ es continua en R.

      b) $h(0) = 2,\ h'(-2) = h'(3) = 0,\ \lim\limits_{x \to 0} h'(x) = \infty$.

c) $h'(x) > 0$ cuando $-4 < x < -2$ y $-2 < x < 3$.

d) $h'(x) < 0$ cuando $x < -4$ y $x > 3$.

e) $h''(x) < 0$ cuando $x < -4$, $-4 < x < -2$ y $0 < x < 5$.

f) $h''(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y $x > 5$.

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \infty$.

h) $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = -2$.

i) Si se remueve la condición (a) referida a la continuidad, dejando las demás condiciones iguales, cuáles serian los posibles gráficos de $h(x)$.

1.4.- Dada la gráfica de una función $y = f(x)$, bosquejar la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

1.4.1.- $g_1(x) = f(x-1)$

1.4.2.- $g_2(x) = f(x) - 1$

1.4.3.- $g_3(x) = -f(x)$

1.4.4.- $g_4(x) = f(-x)$

1.4.5.- $g_5(x) = f^2(x)$

1.4.6.- $g_6(x) = \sqrt{f(x)}$

1.4.7.- $g_7(x) = 1 - 2f(1-x)$

1.4.8.- $g_8(x) = |f(x)|$

1.4.9.- $g_9(x) = f(|x|)$

1.4.10.- $g_{10}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

1.5.- Escribir una expresión matemática, lo más simple posible, que exprese el comportamiento que a continuación se describe

1.5.1.- En $t = 0$, $y = y_0$ y $y(t)$ crece aproximándose a un límite.

1.5.2.- En $t = 0$, $y = y_0$ y $y(t)$ decae aproximándose a un límite.

1.5.3.- En $t = 0$, $y = 0$, para t grande $y(t)$ se acerca a 0 y $y(t)$ tiene un máximo local en $\dfrac{1}{b}$.

1.5.4.- $y = 0$ en $t = 0$ y $t = \dfrac{n\pi}{\omega}$, $n = 1, 2, \cdots$, $y(t)$ oscila y su amplitud decrece cuando t crece.

1.6.- Plantear y resolver problemas de movimiento de una particula en un campo gravitatorio, bajo la influencia o no de fuerzas de resistencia. Por ejemplo:

1.6.1.- Desde lo alto de un edificio se arroja un objeto. Determinar la velocidad de caída en cada instánte de tiempo. Suponga que sobre el objeto, además de la fuerza de gravedad, actúa la fuerza de resistencia del aire, la cual es proporcional a la velocidad. Para resolver este problema es recomendable hacerlo de dos maneras: una, tomando como sistema de referencia lo alto del edificio y, otra, el nivel del suelo.

1.6.2.- Se deja caer un huevo desde lo alto de un edificio y se estrella a los 4 segundos de ser soltado. ¿Qué altura tiene el edificio?

1.6.3.- Supóngase que la aceleración de la gravedad en un planeta es la mitad de la que existe en la Tierra. Demuestre que una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde la superficie del planeta, alcanzaría una altura máxima igual al doble que en la Tierra cuando se emplea la misma velocidad inicial.

1.6.4.- Escribir una expresión matemática que describa cada una de las situaciones siguientes:

1.6.4..1- Cuando un fluido fluye a través de una tubería, la fuerza de fricción entre la pared de la tubería y el fluido se asume proporcional a la longitud de la tubería y al cuadrado de la velocidad del fluido. También se asume que ella es inversamente proporcional al diámetro de la tubería. Escriba una expresión para dicha fuerza de fricción..

1.6.4..2- La razón de crecimiento de una población de bacterias es proporcional al número de bacterias.

1.6.4..3- Una cierta área puede sostener una población máxima de 100 individuos. La razón de crecimiento de una población en esta área es proporcional al producto de la población y la diferencia entre la población actual y la población máxima sostenible.

1.6.4..4- La razón de decaimiento de una sustancia radioactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente.

1.6.4..5- Una papa que se ha estado horneando se saca del horno. La temperatura del cuarto en el que se encuentra la cocina es $65^{o}F$. La razón a la cual la papa se enfria es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuarto y la temperatura de la papa.

1.6.4..6- Cuando factores ambientales imponen una cota superior al tamaño de la población, la razón de cambio relativa de la población crece directamente proporcional a la diferencia entre su cota superior y su tamaño actual.

1.6.4..7- Un medicamento se inyecta en el flujo sanguíneo de un paciente a razón constante de r gramos/segundo. Simultáneamente, la sustancia se elimina con una rapídez proporcional a la cantidad presente en cada instante. Determine una ecuación para la cantidad de medicamento presente en cada instánte.

El objetivo es tener en cuenta, desde el inicio, el papel de las EDO como lenguaje para describir situaciones del mundo.

2.- Actividad 2: Resolviendo ecuaciones de la forma $x' = f(t)$, con f una función dada en el registro algebraico y gráfico.

2.1.- Comprobar si una función dada en el registro algebraico es solución de una EDO de primer.

2.2.- Discriminar entre solución explícita y solución implicita.

2.3.- Encontrar la solución general de ecuaciones de la forma $x' = f(t)$ (f es independiente de la variable x).

Por su sencillez, el estudio de las técnicas para resolver ecuaciones de primer orden, $x' = f(t,x)$, hay que iniciarlo con el estudio de estas ecuaciones. La ecuación indica que $x(t)$ es una antiderivada de $f(t)$. Y por el Teorema Fundamental del Cálculo, se sabe que la antiderivada más general es $x(t) = \int f(t)\ dt + C$. Geométricamente, la fórmula obtenida representa una familia de curvas que llenan el plano desplazandóse verticalmente.

2.4.- Resolver el problema de valor inicial $x'(t) = f(t), \ x(t_0) = x_0$.

En efecto, $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$, entonces $x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds + x(t_0)$. Geométricamente, esta fórmula representa una curva en el plano pasando por el punto (t_0, x_0).

2.5.- A partir de la fórmula para la solución general obtenida en el numeral 2.1, dibujar el diagrama de soluciones correspondiente, primero con lapíz-papel y, después, usando MatLab.

2.6.- Dado un punto cualquiera del plano, dibujar o identificar en el diagrama de soluciones en 2.3 la curva que pasa por este punto.

El objetivo es observar que por cada punto del plano pasa una y solo una curva solución y que el plano se puede descomponer como la unión de curvas solución que no se intersectan. Esta observación servirá como conocimiento previo para introducir el Teorema de Existencia y Unicidad para la ecuación $x' = f(t,x)$.

2.7.- Dibujar el diagrama de soluciones de $x' = f(t)$, sin resolver la ecuación.

El objetivo es observar que el diagrama de soluciones puede construirse directamente de la EDO, sin necesidad de encontrar dicha fórmula, lo cual es de interés cuando la antiderivada de $f(t)$ es poco informativa o no se puede encontrar.

2.8.- Dibujar el diagrama de soluciones de $x' = f(t)$, cuando $f(t)$ está dada por una gráfica.

2.9.- Desequilibrando y equilibrando los esquemas de los estudiantes.

Resolver las siguientes ecuaciones, justificando la técnica utilizada y verificando que la solución obtenida satisface la ecuación diferencial:

2.9.1.- Sea $f : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada en el registro gráfico.

2.9.1.1.- $x' = f(t)$

2.9.1.2.- $x' = f(x)$

2.9.2.- $x' = t$

2.9.3.- $x' = -t$

2.9.4.- $x' = t + 1$

2.9.5.- $x' = t^2$

2.9.6.- $x' = \sin(t)$

2.9.7.- $x' = \tan(t)$

2.9.8.- $x' = \frac{1}{t}$

2.9.9.- $x' = -\frac{1}{t^2}$

2.9.10.- $x'' = t$

2.9.11.- $x'' = \sin(t)$

2.9.12.- $x' = x$

2.9.13.- $x' = -x$

2.9.14.- $x' = x + 1$

2.9.15.- $x' = x^2$

2.9.16.- $x' = x^2 + 1$

2.9.17.- $x' = \sin(x)$

2.9.18.- $x' = \frac{1}{x}$

2.9.19.- $x'' = x$

2.9.20.- $x'' = -x$

2.9.21.- $x' = e^x$

El objetivo de estos ejercicios es llamar la atención del estudiante sobre el papel de las variables dependiente e independiente, la validez de las fórmulas obtenidas por antidiferenciación y el uso de la regla de la cadena.

Se observa que en algunos de estos problemas no funciona la técnica de la antiderivada para hallar la fórmula de la solución. Sin embargo, para todos ellos podemos dibujar mediante argumentos gráficos el diagrama de soluciones correspondientes. En este momento, es conveniente enunciar el Teorema de Existencia y Unicidad (TEU) y estudiar algunas de sus consecuencias.

3.- Actividad 3: Describiendo situaciones-problema con el lenguaje de las EDO.

Para tener en cuenta la fenomenología de las EDO, se propone abordar el planteamiento y descipción de problemas de movimiento de una particula en un campo gravitatorio, bajo la influencia o no de fuerzas de resistencia, así como los modelos de población de Malthus y Logístico, resolviendo dichos modelos tanto gráfica como algebraicamente y estableciendo la coherencia de las respectivas soluciones.

3.1.- Plantear y resolver los siguientes problemas:

3.11.- Desde lo alto de un edificio se arroja un objeto. Determinar la velocidad de caída en cada instánte de tiempo. Suponga que sobre el objeto, además de la fuerza de gravedad, actúa la fuerza de resistencia del aire, la cual es proporcional a la velocidad.

3.12.- Supóngase que la aceleración de la gravedad en un planeta es la mitad de la que existe en la Tierra. Demuestre que una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde la superficie del planeta, alcanzaría una altura máxima igual al doble que en la Tierra cuando se emplea la misma velocidad inicial.

3.2.- Describir el comportamiento de una población cuya razón de crecimiento per cápita es constante.

Si la razón de crecimiento per cápita es constante: $x' = rx$.

Entonces el diagrama de soluciones puede construirse observando que $x(t) = 0$ es solución y que se verifica el TEU. Por otra parte, $x''(t) = (x')' = (rx)' = rx' = r^2x(t)$ y siendo $x(t) > 0$ se tiene:

- Si $r > 0$, entonces $x'(t) > 0$ y $x''(t) > 0$ y, por tanto, $x(t)$ es creciente y cóncava hacia arriba.
- Si $r < 0$, entonces $x'(t) < 0$ y $x''(t) > 0$ y, por tanto, $x(t)$ es decreciente y cóncava hacia abajo.
- Si $r = 0$, la población permanece constante.

3.3.- Describir el comportamiento de una población cuya razón de crecimiento per cápita decrece linealmente con respecto al tamaño de la población.

Si la razón de crecimiento per cápita decrece linealmente con respecto al tamaño de la población obtenemos la ecuación logística: $x' = rx(1 - \frac{x}{K}) = \frac{r}{K}x(K - x)$, con r y K parámetros positivos (K es la población máxima que puede sostener ese medio).

Luego, en primer lugar, se observa que las funciones constantes $x(t) = K$ y $x(t) = 0$ son soluciones de la ecuación y que se verifica el TEU. En segundo lugar, sabiendo que $x(t) > 0$ se obtiene:

- Si x es pequeño comparado con K, entonces $\frac{x}{K} \approx 0$ y así $\frac{x'(t}{x(t)} \approx r$,es decir, la población experimenta un comportamiento exponencial.
- Si x está cerca de K y $\frac{x}{K} < 1$, entonces $\frac{x'(t)}{x(t)}$ está próxima 0 y tiene signo positivo, es decir, la razón de crecimiento es pequeña y la población se comporta de manera creciente.
- Si x está cerca de K y $\frac{x}{K} > 1$, entonces $\frac{x'(t)}{x(t)}$ está próxima 0 y tiene signo negativo, es decir, la razón de crecimiento es pequeña y la población se comporta de manera decreciente.
- $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = K$. En efecto, si x está cerca de K y $\frac{x}{K} \approx 1$, entonces

$$\begin{aligned} x'(t) = r\frac{x}{K}(K-x) &\Rightarrow x'(t) = r(K-x) \\ &\Rightarrow (K-x)' = -r(K-x) \\ &\Rightarrow z'(t) = -rz(t), \text{ con } z(t) = K-x. \end{aligned}$$

  Por lo tanto, $\lim\limits_{t\to\infty} z_0 e^{-rt} = 0$, es decir, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = K$.
- Si $0 < x < K$ entonces $x' > 0$ y, por lo tanto, x es creciente.
- Si $K < x$ entonces $x' < 0$ y, por lo tanto, x es decreciente.

Ahora como

$$x''(t) = (\frac{r}{K}x(K-x))' = \frac{r}{K}x'(K-x) - \frac{r}{K}xx' = (\frac{r}{K})^2 x(K-x)(K-2x).$$

Se cumple que:

- Si $x(t)$ es una solución no constante, entonces $x'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{K}{2}$, es decir, los puntos de inflexión de las soluciones no constantes ocurren en los puntos de corte con la recta $x(t) = \frac{K}{2}$.
- Si $0 < x < K/2$ entonces $x'' > 0$ y, por lo tanto, x es cóncava hacia arriba.

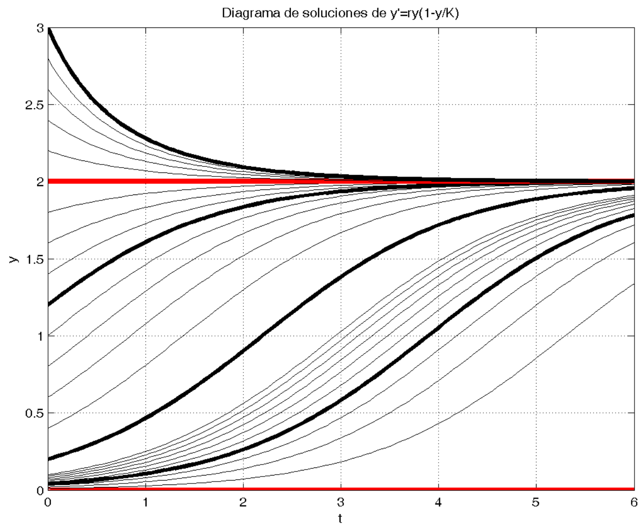


Figura 6.1: Diagrama de soluciones de la ecuación logística

- Si $K/2 < x < K$ entonces $x'' < 0$ y, por lo tanto, x es cóncava hacia arriba.
- Si $K < x$ entonces $x'' > 0$ y, por lo tanto, x es cóncava hacia arriba.

Coordinando las observaciones anteriores con la información sobre la monotonía y la concavidad, se obtiene el diagrama de soluciones que se muestra en la figura 6.1.

3.4.- Discutir y plantear los modelos depredador-presa, competencia de especies y el modelo epidemiológico SIR.

4.- Actividad 4: Construyendo el diagrama de soluciones de una EDO usando cálculo elemental.

4.1.- Resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden $y'(x) = 1 + xy$, dibujando el diagrama de soluciones.

Por ejemplo, para la ecuación $y'(x) = 1 + xy$ se observa que

a) $y' = 0 \Leftrightarrow 1 + xy = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x}$. Si $x > 0$ y $y > -\dfrac{1}{x}$, entonces $1 + xy > 0$, o sea, $y' > 0$. También $y' > 0$, si $x < 0$ y $y < -\dfrac{1}{x}$. De la misma manera se verifica que $y' < 0$ si $x > 0$ y $y < -\dfrac{1}{x}$ ó $x < 0$ y $y > -\dfrac{1}{x}$. Por tanto, la hipérbola $y = -\dfrac{1}{x}$ divide al plano en regiones donde y' tiene signo constante. Como sobre esta hipérbola $y' = 0$ y hay cambio de signo al pasar de una región a otra, entonces sobre las ramas de la hipérbola se hallan los puntos máximos y mínimos de las curvas solución.

b) $y' = 1 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$, es decir, las curvas solución cruzan los ejes formando un ángulo de 45 grados.

c) $y'' = xy' + y = x(1+xy) + y = x + (x^2+1)y$. Entonces $y'' = 0 \Leftrightarrow x + (x^2+1)y = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{x}{1+x^2}$. Esta última curva divide al plano en dos regiones. En la región $y > -\dfrac{x}{1+x^2}$, $y'' > 0$ y en la región $y < -\dfrac{x}{1+x^2}$, $y'' < 0$. Por tanto, sobre esta curva se encuentran los puntos de inflexión de las curvas solución.

d) $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{x}{1+x^2}}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$

e) Como $\dfrac{-\frac{x}{1+x^2}}{-\frac{1}{x}} < 1$, si $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} < -\dfrac{x}{1+x^2}$. Si $x < 0$, $-\dfrac{1}{x} > -\dfrac{x}{1+x^2}$.

Juntando toda esta información se obtiene el diagrama de soluciones que se muestra en la figura 6.2.

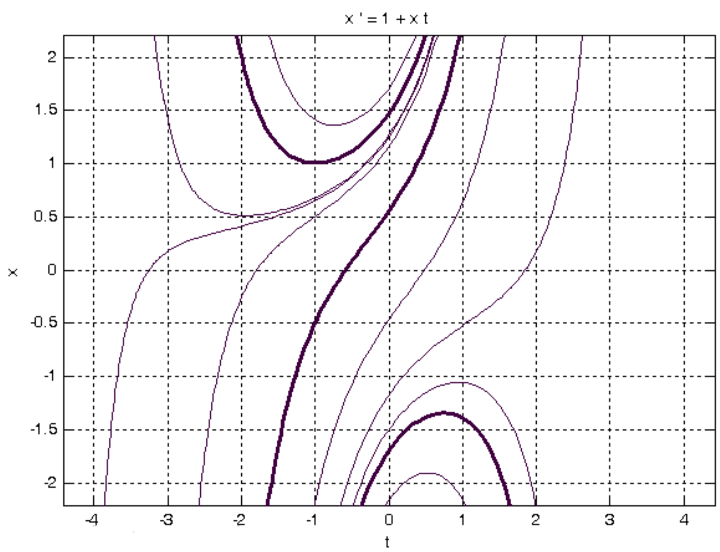


Figura 6.2: Diagrama de soluciones de la ecuación $y'(x) = 1 + xy$.

5.- Actividad 5: Construyendo el diagrama de soluciones de una EDO usando campos de pendientes.

Dibujar el campo de pendientes de las siguientes ecuaciones:

5.1.- $x' = 1 - x^2$

5.2.- $x' = x$

5.3.- $x' = t^2$

5.4.- $x' = x - t$

En primer lugar, hay que verificar en que region del plano se cumple el TEU. Luego, se coMuchos estudiantes son expertos en, por ejemplo, derivar una función y hallar sus valores extremos. Sin embargo, pueden estos estudiantes conceptualizar esas acciones y manipularlas si éstas no son presentadas en forma de ecuación?, sí la información referida a los intervalos de monotonía y concavidad, extremos, asíntotas es dada a los estudiantes, pueden éstos coordinar y visualizar las implicaciones gráficas de dichas propiedades? Qué constructos mentales usan? Son igualmente relevantes la primera y segunda derivadas? Toma en cuenta sólo una condición mientrás ignora las otras? si se le obliga a contemplar diferentes condiciones para un mismo intervalo, es capaz de coordinarlas? Cómo se puede medir el nivel de comprensión demostrado por el estudiante?
nsidera la malla contenida en $R = \{(t,x)/ -4 \leq t \leq 4,\ \ -2 \leq x \leq 2\}$ determinada por los puntos

$$\{(t,x)/t = \pm 4, \pm 3{,}5, \pm 3, \pm 2{,}5, \pm 2, \pm 1{,}5, \pm 1, \pm 0{,}5, 0 \text{ y } x = \pm 2, \pm 1{,}5, \pm 1, \pm 0{,}5, 0\}.$$

Y usando una hoja electrónica, se calcula $f(t,x)$ en cada uno de los puntos de la malla. Para la ecuación $x' = 1 - x^2$, por ejemplo, se obtienen la tabla y el campo de pendientes que se muestran en las figuras 6.3 y 6.4.

En particular, se observa que si $f(t,x) = f(t)$, entonces sobre rectas paralelas al eje x las pendientes son constantes. Si $f(t,x) = f(x)$, entonces sobre rectas paralelas al eje t las pendientes son constantes.

5.5.- En cada uno de los campos de pendientes obtenidos en los ejercicios 5.1-5.4, dibujar el diagrama de soluciones.

5.6.- Antes de usar MatLab, sea f es una función dada en el registro gráfico. Dibujar con lapíz-papel el campo de pendientes y el diagrama de soluciones correspondiente de las siguientes ecuaciones:

7.1.- $x' = f(t)$

7.2.- $x' = f(x)$

x'=f(t,x)=1-x^2										
h=0.5	**x**	**-2**	**-1.5**	**-1**	**-0.5**	**0**	**0.5**	**1**	**1.5**	**2**
t										
-4		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
-3.5		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
-3		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
-2.5		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
-2		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
-1.5		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
-1		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
-0.5		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
0		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
0.5		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
1		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
1.5		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
2		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
2.5		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
3		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
3.5		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3
4		-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3

Figura 6.3: Valores de la pendiente en la malla R de la ecuación $x' = 1 - x^2$.

5.7.- Dibujar campos de pendientes con lapíz-papel mediante isoclinas.

5.8.- Escribir un M-archivo para dibujar campos de pendientes.

5.9.- Dibujar campos de pendientes y diagramas de soluciones, usando la aplicación Dfield.

6.- Actividad 6: Construyendo el diagrama de soluciones de una EDO usando cálculo elemental, campos de pendientes, isoclínas y el applet dfield.

6.1.- Dibujar el diagrama de soluciones de las siguientes ecuaciones

1) $y'(x) = 2x - y$

2) $y'(x) = x^2 - y$

El objetivo es conjugar toda la información que se pueda derivar de la ecuación diferencial, el campo de pendientes y las isoclinas. Se puede utilizar MatLab para dibujar el campo de pendientes (usando Dfield) y dibujar las curvas donde $y' = 0$ y $y'' = 0$, así como el conjunto de isoclínas.

Por ejemplo, para la ecuación $y'(x) = 2x - y$ se obtiene:

a) $y' = k \Leftrightarrow 2x - y = k \Leftrightarrow y = 2x - k$.

b) Si $y > 2x$, entonces $y' < 0$. Si $y < 2x$, entonces $y' > 0$. Y como sobre esta recta $y' = 0$ y hay cambio de signo, entonces sobre ella se hallan los puntos mínimos de

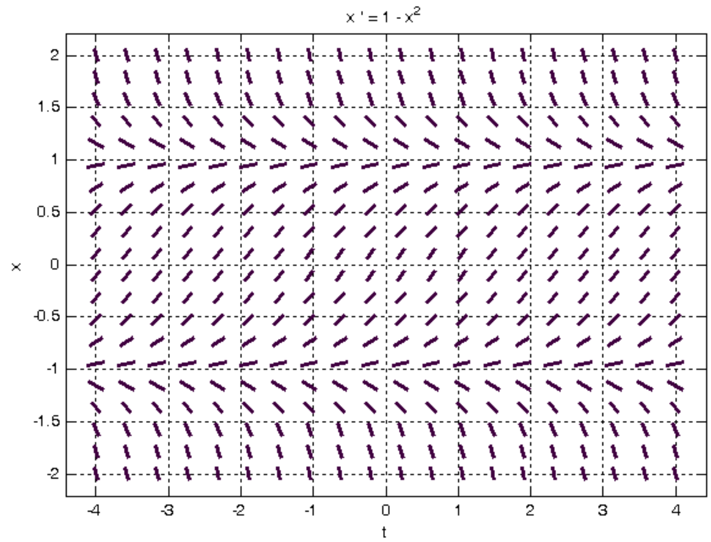


Figura 6.4: Campo de direcciones de la ecuación $x' = 1 - x^2$.

las curvas solución.

c) $y'' = 2 - y' = 2 - 2x + y$. Por tanto, $y'' = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 2$. En la región $y > 2x - 2$, $y'' > 0$ y en la región $y < 2x - 2$, $y'' < 0$. Además, esta curva es una curva solución de la ecuación. De manera que las curvas solución distintas de $y = 2x - 2$ no tienen puntos de inflexión.

Coordinando toda esta información se obtiene el diagrama de soluciones que se muestra en la figura 6.5.

6.2.- Dibujar el campo de pendientes y el diagrama de soluciones de las ecuaciones siguientes, usando Dfield y estudiando la coherencia con la información que se deriva de la ecuación diferencial (monotonía, concavidad, extremos, puntos de inflexión, asíntotas, simetrias, etc).

6.2.1.- $y'(x) = 2x - y$

6.2.2.- $y'(x) = x^2 - y$

7.- Actividad 7: Resolviendo ecuaciones mediante el método de Euler.

El objetivo es comprender como funcionan las técnicas numéricas, en particular, qué es lo que hace la aplicación Dfield para dibujar las soluciones. Para ello, se sugiere resolver mediante el método de Euler una EDO cuya solución algebraica es conocida.

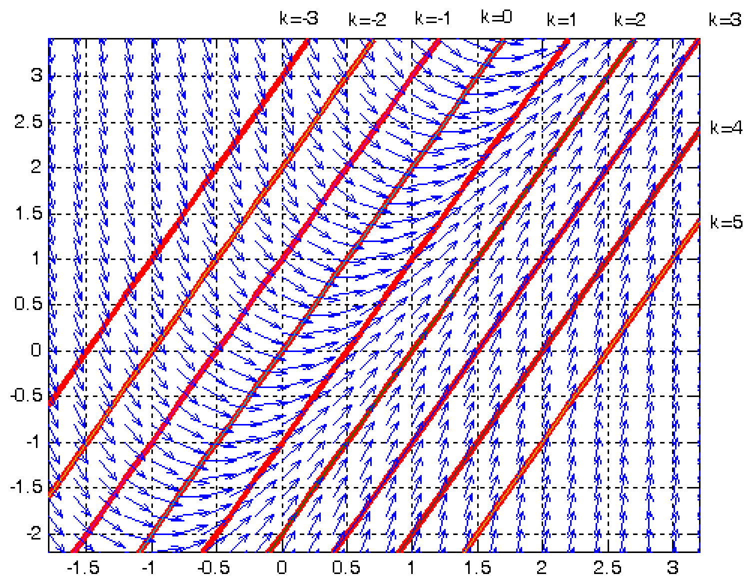


Figura 6.5: Valores de la pendiente en la malla

Por ejemplo, dado el problema de valor inicial $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 1$, $x(0) = 1$

7.1.- Resolverlo algebraicamente, haciendo el cambio de variable dependiente $z = 2x - 1$.

7.2.- Resolverlo numéricamente, mediante el método de Euler.

7.3.- Comparar las soluciones 7.1.- y 7.2.-, mediante una tabla.

8.- Actividad 8: Resolviendo EDO de primer orden mediante técnicas algebraicas.

8.1.- Usando la técnica algebraica-simbólica pertinente, resolver ecuaciones lineales, de variables separables y exactas.

8.2.- Determinar el intervalo máximo de existencia de cada una de las soluciones obtenidas en 8.1.

8.3.- Apartir de las soluciones obtenidas en 8.1, ya sea en forma explícita o implícita, dibujar el diagrama de soluciones usando MatLab.

Soluciones como la solución del problema de valor inicial $y' - 2xy = 1, y(0) = -\frac{1}{2}$: $y(x) = e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt - \frac{1}{2}e^{x^2}$, nos permiten seguir insistiendo en la utilidad y potencia de los métodos cualitativos para visualizar la gráfica de una solución o del diagrama de soluciones.

9.- Actividad 9: Integrando las herramientas gráficas y analíticas.

10.- Actividad 10: Dibujando líneas fase y diagramas de bifurcación de una EDO de primer orden que dependen de un parámetro.

6.5. Sujetos de la investigación

En esta investigación se hace un estudio de casos. El caso lo constituyen 5 estudiantes que cursaron la asignatura Ecuaciones Diferenciales I que se impartió en el primer semestre del año 2009 a las carreras de Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Estadistica de la Escuela de Matemática de la Universidad de El Salvador. Los datos de recogieron durante las primeras cuatro semanas de la asignatura.

Los estudiantes participantes se han etiquetado como **E1**, **E2**, **E3**, **E4** y **E5**. En la tabla siguiente se muestran sus características.

	Característica				
Estudiante	Edad	Sexo	Nivel de estudios	Matricula de la asignatura	Rendimiento académico (CUM)
E1	23	Femenino	VII ciclo	Segunda	Regular
E2	21	Masculino	V Ciclo	Primera	Excelente
E3	20	Femenino	V Ciclo	Primera	Bueno
E4	21	Masculino	V Ciclo	Primera	Excelente
E5	20	Femenino	V Ciclo	Primera	Muy bueno

Cuadro 6.2: Características de los sujetos participantes.

6.6. Instrumentos de recogida de datos

Para la recogida de datos se utilizaron básicamente tres instrumentos: 1) tareas, 2) exámenes parciales y 3) entrevistas semi-estructuradas grabadas en audio. Mediante las tareas se recogieron las soluciones ampliadas de los estudiantes a los problemas seleccionados, cuya presentación se hizó en sesiones de laboratorio de 2 horas durante la primera semana de clases. Las entrevistas semi-estructuradas se llevaron a cabo sobre las soluciones escritas elaboradas por los estudiantes, ya sean tareas o exámenes, y han servido para explorar, profundizar y reflexionar sobre las estrategias, conocimientos y habilidades que utilizan los estudiantes en sus razonamientos al resolver la tarea, así como aquellas que utilizan para superar las dificultades y errores cometidos.

6.7. Metodología de análisis de datos

Los datos de investigación se describen y analizan a través de tablas de respuestas de los problemas propuestos, redes sistémicas (Jorba y Sanmarti, 1996) y extractos de transcripciones de las entrevistas. Para cada ítem se ha elaborado una red sistémica, en la cual se resumen las producciones hechas por los sujetos investigados al resolver cada uno de las tareas propuestas. En estas redes se ha usado la siguiente notación:

- Una linea vertical ($|$) para denotar las acciones que ejecuta el sujeto. Esta línea vertical va precedida por las etiquetas asignadas a los estudiantes: E1, E2, E3, E4 y E5.
- Una llave abierta hacia la derecha ($\{$) para denotar bifurcaciones en las acciones o producciones de los sujetos. Cada acción va precedida por las etiquetas que corresponden a los estudiantes que realizan dicha acción.
- Una linea vertical discontinua para separar grupos temáticos de acciones.

En cada red, la trayectoria de resolución de cada sujeto queda descrita al leer, de izquierda a derecha, las acciones que están precedidas por la etiqueta correspondiente. Por ejemplo, en la figura 6.6, se observa que para encontrar una función que cumpla $x' = x+1$, el estudiante **E1** muestra dificultades para reconocer las variables dependiente e independiente. Ello lo lleva a integrar simbólicamente, primero, con respecto a x y, luego, respecto a t, obteniendo respectivamente las respuestas: $x = \frac{x^2}{2} + x + C$ y $x = xt + t + C$.

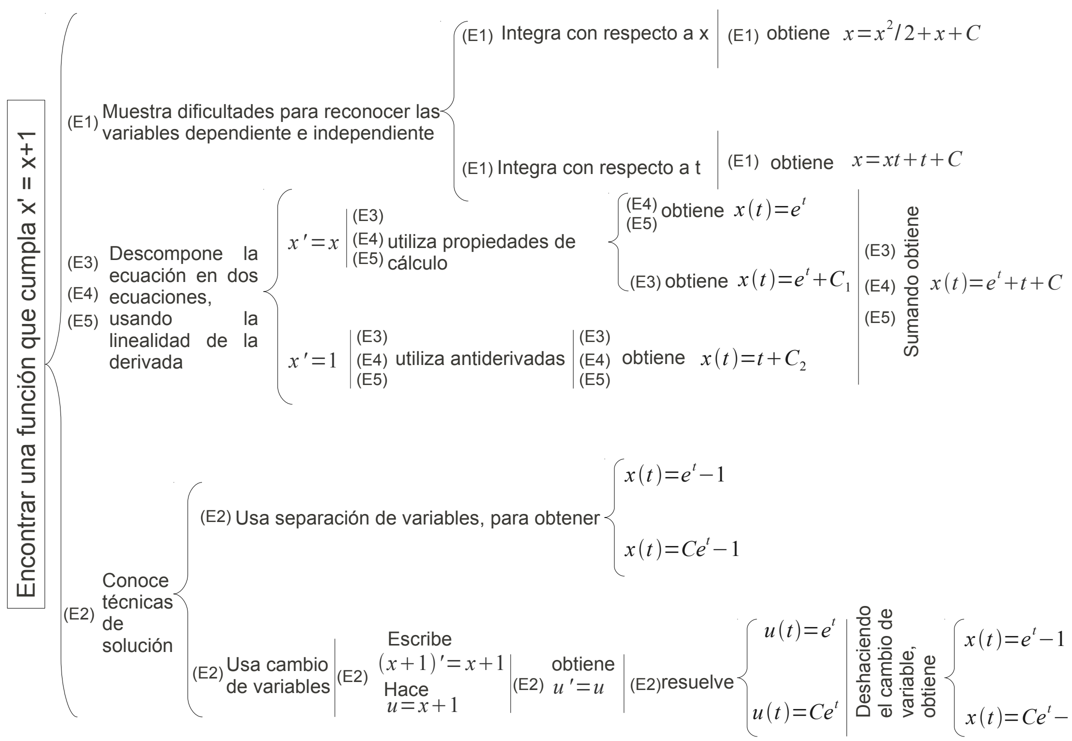


Figura 6.6: Red sistémica para la ecuación $x' = x + 1$

Capítulo 7

Análisis de Datos

A continuación se hace una descripción de los problemas seleccionados para validar la descomposición genética, así como un análisis de las respuestas escritas y entrevistas de los sujetos. Para cada problema se hace un resumen de los resultados principales, se presentan extractos significativos de las transcripciones de las entrevistas y se construye una red sistémica.

Para no perder de vista el contexto de esta investigación es importante recordar que los datos que se analizan se obtuvieron durante las primeras cuatro semanas del desarrollo de la asignatura Ecuaciones Diferenciales I que se impartió en el primer semestre de 2009. La asignatura se enfocó desde una perspectiva que integra los aspectos algebraicos y gráficos. Y para modificar el débil estatus de los aspectos gráficos, previo a estudiar los métodos simbólicos básicos de resolución de ecuaciones de primer orden, se trabajó durante 4 semanas el análisis cualitativo. Por ejemplo, para hacer conexión con los conocimientos básicos de cálculo, se introdujeron las nociones de *curva que pasa por un punto* y *diagrama de soluciones* para hacer referencia a los conceptos de *solución de un problema de valor inicial* y *solución general*, respectivamente. Asimismo se resolvieron por métodos gráficos y analíticos las ecuaciones de malthus y logística, sin contar con fórmulas para las respectivas soluciones de estas ecuaciones.

7.1. Descripción de datos y resultados preliminares

7.1.1. Ejercicio 1

Enunciado. En cada uno de los siguientes items, encontrar una función que cumpla con la relación dada, por simple inspección o usando otra técnica. Justifique la técnica utilizada y verifique que la función obtenida cumple con la relación.

$a)\ x' = t$	$b)\ x' = -t$	$c)\ x' = t+1$	$d)\ x' = t^2$	$e)\ x' = \sin t$
$f)\ x' = \tan t$	$g)\ x' = \dfrac{1}{t}$	$h)\ x' = -\dfrac{1}{t^2}$	$i)\ x'' = t$	$j)\ x'' = \sin t$
$k)\ x' = x$	$l)\ x' = -x$	$m)\ x' = x+1$	$n)\ x' = x^2$	$o)\ x' = x^2+1$
$p)\ x' = 2tx$	$q)\ x' = \sin(x)$	$r)\ x' = \dfrac{1}{x}$	$s)\ x'' = x$	$t)\ x'' = -x$
$u)\ x' = e^x$				

Objetivo. Este ejercicio tiene un objetivo doble: por un lado, se trata de diagnosticar las habilidades de los estudiantes al iniciar el curso de EDO y, por otro, se trata de desequilibrar los esquemas previos de los estudiantes. Los tipos de relaciones que hemos considerados se corresponden con las siguientes formas: $x' = f(t)$, $x' = f(x)$, $x'' = f(t)$ o $x'' = f(x)$. Se espera que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos de cálculo diferencial e integral adecuadamente y sin mayores dificultades.

Administración. Este ejercicio se entregó a los estudiantes en la primera clase y se les pidió devolver la resolución escrita del mismo en la clase del día siguiente. Posteriormente, en el transcurso de la primera semana de clases, se realizó a cada uno de los estudiantes una entrevista semi-estructurada para discutir sobre la resolución escrita presentada y explorar su pensamiento, dificultades y errores. La entrevista fue grabada en audio.

Discusión de resultados. Los ejercicios de la forma: $x' = f(t)$ o $x'' = f(t)$ son resueltos integrando simbólicamente ambos lados de la relación una o dos veces respectivamente o calculando mentalmente las antiderivadas requeridas. En el cuadro 7.1 se resumen las respuestas dadas por los estudiantes a algunas de estas ecuaciones.

Se puede observar que el estudiante **E1** tiene una concepción de proceso la cual consiste

	Ecuación-Respuestas		
Estudiante	$x' = t$	$x' = \tan(t)$	$x'' = \text{sen}(t)$
E1	$\int \frac{d}{dx} = \int t\ dt \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t^2 + C$	$\int \frac{d}{dt} = \int \tan(t) = lnsec(t) + C$	$\int \frac{dx^2}{dt^2} = \int \sin(t)\ dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\cos(t) + C_1 \Rightarrow x(t) = -\sin(t) + C_1 t + C$
E2	$x = \int t\ dt = \frac{1}{2}t^2 + K$	$x = \int \tan(t)\ dt = ln\|sec(t)\| + K$	$x' = -\cos(t) + K_1 \Rightarrow x(t) = -\sin(t) + K_1 t + K_2$
E3	$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + C_1$	$x(t) = -ln\|\cos(t)\| + C_1$	$x(t) = -\sin(t) + C$
E4	$x = \frac{1}{2}t^2 + C_1$	$x = -ln\|\cos(t)\| + C_1$	$x(t) = -\sin(t) + C$
E5	$x = \frac{1}{2}t^2 + C$	$x = ln\|-\cos(t)\| + C$	$x' = -\cos(t) \Rightarrow x(t) = -\sin(t) + C$

Cuadro 7.1: Soluciones de ecuaciones de la forma $x' = f(t)$ ó $x'' = f(t)$.

en integrar simbólicamente respecto a la variable t ambos lados de la ecuación. Al realizar la acción de integrar escribe algunas expresiones sintácticamente incorrectas: $\int \frac{d}{dx} = \int t\ dt$ y $\int \frac{d}{dt} = \int \tan(t)$. Asimismo llama la atención la acción de sumar la constante de integración sólo despues de que la antiderivada ha sido efectivamente calculada. Ello muestra, a pesar de que las respuestas obtenidas son correctas, un débil dominio tanto del Teorema Fundamental del Cálculo, como del papel de las variables y los diferenciales implicados en la relación. En la entrevista con el estudiante **E1** encontramos más evidencias que apoyan esta afirmación. Por ejemplo, al tratar de encontrar una función $x(t)$ que cumpla con la relación $x'' = sen(t)$, expresa lo siguiente:

> E1: Bien, por lo que hemos visto anteriormente en cálculo, si nos dan la derivada, entonces aplicamos su inversa, por decirlo así, integramos la derivada de x con respecto a t. Aquí tendríamos que integrar dos veces para poder encontrar la función que al derivarla dos veces nos de sen(t). Entonces para la primera integral del sen(t) con respecto a t, nos daría menos cos(t) más una constante. Ahora, nuevamente esta función la volvemos a integrar siempre con respecto a t y tendríamos la integral de menos cos(t) más C1, más una constante verdad, para obtener luego la función que al derivarla nos de luego sen(t). Aquí en este caso nosotros tendríamos que integrar nuevamente acá y obtendríamos menos el sen(t) más la constante anterior que teníamos que es la constante C1 y nuevamente más una nueva constante que sería C2. Utilizamos una misma constante para ambas y obtendríamos sen(t) más una constante C en general.
>
> **I: ¿Cuánto da en la segunda integración?**
>
> E1: La integral de menos cos t, que sería entonces menos sen t
>
> **I: ¿Qué pasó con la integral de C1?**
>
> E1: Es una constante. Que es como cuando ... bueno, tendría que quedar un t acá ($C1t$), verdad. Esta es la cosa, porque es como cuando tenemos algo más una constante entonces al integrar tiene que quedar una t para que nos de una constante nada más.

Sin embargo, al iniciar la solución del ejercicio, este estudiante muestra dificultad para identificar las variables independiente y dependiente en la ecuación dada:

E1: Como aquí nos dan la segunda derivada, ¿verdad?, y la segunda derivada nos dan que es sen(t) ... Tendremos una variable independiente y una variable dependiente ... Bueno con lo que nosotros hemos visto ... ...

I: ¿Cuál es la variable dependiente?

E1: La variable dependiente es t

I: ¿y la variable independiente?

E1: La variable independiente es la variable x.

Esta dificultad persiste, aún después de haber comprobado que la función obtenida satisface la relación dada, reflejando con ello la presencia de un esquema de cálculo diferencial e integral simbólico anclado en el uso rígido de las variables x (para la variable independiente) e y (para la variable dependiente):

I: ¿Qué tiene que hacer para verificar que esta función cumple con la relación?

E1: Derivar ... derivar ... lo escribo o así, quiere que lo escriba o así nada más.

I: Si, derive y escriba la derivada.

E1: Entonces la primera ... bueno, siempre la escribo así, no se, entonces tendríamos que derivar aquí. La derivada del seno seria menos coseno de t, por el signo menos, quedaría cos t más C_1, porque ésta, la derivada de C_2 con respecto de t ya se elimina.

I: Si.

E1: Luego derivamos nuevamente. Y sería la segunda derivada de t. Ahora la derivada del coseno que sería seno nada más y como aquí verdad que se deriva el ángulo por ... que seria 1 nada más, y aquí ya se anularía la constante. Y entonces de esta manera, podríamos aplicar lo inverso de lo que habíamos hecho acá, encontramos ... la derivada del seno.

I: A ver, ¿cuál es la variable independiente en esta expresión ($x'' = \sin t$)?

E1: x

I: x es la variable independiente. Y ¿la variable dependiente?

E1: t

El estudiante **E2** tiene una concepción de proceso que hace referencia al método de separación de variables, la cual le permite operar simbólicamente las variables y los diferenciales y escribir $x = \int t\, dt$. No obstante, llama la atención la acción de agregar la constante de integración al realizar el calculo efectivo de la integral $\int t\, dt$, la cual en un primer momento había sido olvidada.

E2: Vaya, la primera derivada de x con respecto a t es t, entonces está ecuación es equivalente a esta la derivada de x con respecto a t es igual a t, entonces aquí se pueden operar las diferenciales y tendría que dx es igual a t por dt, verdad, yo acá integro a ambos lados y me queda la integral de dx igual a la integral de t por dt. La integral de dx es x y la integral de t dt es un medio de t cuadrado más C, donde C es una constante. Entonces, todas las soluciones de la ecuación diferencial son x igual a un medio de t cuadrado más C, sería toda la familia de soluciones.

I: ¿Cómo se llama este método?

E2: Este, este método se llama método de ecuaciones diferenciales separadas.

I: Ecuaciones de variables separables. O sea que Ud. ya conoce la técnica y aplica esa técnica.

E2. Si

Los estudiantes **E3**, **E4** y **E5** muestran una concepción de proceso que hace referencia al calculo de antiderivadas, las cuales son calculadas mentalmente o usando algún software de cálculo simbólico.

I: Comencemos con el ejercicio 1 ($x' = t$). ¿Cuenteme lo qué hizo?

E3: Bueno, ehee, integre mentalmente.

I: Si.

E3: Si, integre mentalmente y solamente eso hice.

I: ¿Integro mentalmente?

E3: Es que como por integración ya sabemos, ¿verdad?, que es esto (t) al cuadrado entre 2, por la propiedad de la integral de x elevado a la algo.

E4: Si, yo a veces ocupo el Mathematica para hacer cálculos, ese es el que ocupo yo sobre todo, porque el Matlab ya lo había oído, pero no sé, no me llamaba la atención.

I:Si.

E4: También ocupo un integrador que está en línea para el cálculo de primitivas. Y lo que me gusta es que, por ejemplo, en mi calcu, uno de estos ejercicios, cuando lo hice en mi calcu me dio bien, bien fea la, la primitiva, me dio logaritmo de la diferencia dentro menos otro logaritmo de la diferencia del conjugado del anterior. Y cuando lo integre con ese me dio de un solo el logaritmo de la tangente de x medio, que era más fácil para despejar, sólo las inversas, más fácil.

Por otra parte, los ejercicios de la forma $x' = f(x)$ ó $x'' = f(x)$ son resueltos integrando simbólicamente la relación o recordando algunas propiedades de las funciones conocidas. Este proceso ha permitido sacar a la luz dificultades referidas al reconocimiento de las variables dependientes e independientes y el uso rígido de los métodos de integración simbólica, así como al uso incorrecto de la linealidad de la derivada. En el cuadro 7.2 se resumen las respuestas dadas por los estudiantes a algunas de estas ecuaciones.

	Ecuación-Respuestas			
Estudiante	$x' = x$	$x' = x+1$	$x' = x^2$	$x' = x^2+1$
E1	$x(t)=e^t$	$\int \frac{dt}{dx}=\int x+1\ dt \Rightarrow x(t)=xt+t+C$	$\int \frac{dt}{dx}=\int x^2\ dt \Rightarrow x(t)=x^2t+C$	$\int \frac{dx}{dt}=\int (x^2+1)\ dt \Rightarrow x(t)=-\frac{1}{t}+t+C$
E1		$\int \frac{dt}{dx}=\int x+1\ dt \Rightarrow x(t)=\frac{1}{2}x^2+x+C$	$\int \frac{dt}{dx}=\int x^2\ dt \Rightarrow x(t)=-\frac{1}{t}+C$	
E2	$x=K_1e^t$	$(x+1)'=x+1 \Rightarrow x=K_1e^t-1$	$\frac{dx}{x^2}=dt \Rightarrow x=-\frac{1}{t+K}$	$\frac{dx}{x^2+1}=dt \Rightarrow x=\tan(t+K)$
E3	$x=e^t+C_1$	$x=e^t+t+C_1$	$x(t)=-\frac{1}{t}+C_1$	$x(t)=-\frac{1}{t}+t+C_1$
E4	$x=e^t+C_1$	$x=e^t+t+C_1$	$x(t)=-\frac{1}{t}+C_1$	$x(t)=-\frac{1}{t}+t+C_1$
E5	$x=e^t+C$	$x=e^t+t+C$	$x(t)=-\frac{1}{t}+C$	$x(t)=-\frac{1}{t}+t+C$

Cuadro 7.2: Soluciones de ecuaciones de la forma $x' = f(x)$

En las producciones de los estudiantes se pueden observar los siguientes patrones de comportamiento: Para resolver la ecuación $x' = x$, los estudiantes **E1**, **E3**, **E4** y **E5** recurren a la memoria de largo plazo para afirmar que la función exponencial e^t es la única función que es igual a su derivada; sin embargo, para **E1** la función buscada es $x(t) = e^t$, y para **E3**, **E4** y **E5** es $x(t) = e^t + C$.

I: ¿Ésta que está aquí (ejercicio No 11: $x' = x$) como la resolvió?

E3: Bueno, esa la resolví mentalmente así, pero por integración no, sino por simple inspección. Yo sólo busque una función ($e^t + C$) que al derivarla me diera esto ($x' = x$).

I: Si, véalo, derive.

E4: ... ¿cuál me dijo?

I: Este, el número 11, $e^t + C$

E4: Este es cero y e^t es la misma función.

I: ¿Qué función le debe de dar?

E4: x ... pero en realidad me dio un número ... me hace falta la constante.

I: ¿Entonces será solución?

E4:... ... uhmm ...

I: Evidentemente x prima no es igual a x. ¿Qué está pasando?

E4: no sé, afecta esto ... sólo podría ser e^t.

I: ¿Dónde colocaría la constante?

E4: Aquí ($e^t + C$)

I: ¿Por qué le sumo la constante?

E4: No sé, ... porque así nos enseñaron ha hacerlo en cálculo II, a sumarle una constante.

Mientras que el estudiante **E2** para resolver la ecuación $x' = x$ moviliza el método para resolver ecuaciones lineales con coeficientes constantes, hallando las raices de la ecuación característica

$\lambda - 1 = 0$.

Para resolver las ecuaciones $x' = x + 1$ y $x' = x^2$, el estudiante **E1** integra ambos lados de la ecuación con respecto a t y calcula las respectivas integrales considerando a $x(t)$ como una constante, evidenciando dificultades para identificar el rol de las variables dependientes e independientes, así como un débil dominio del proceso de integración simbólica y del Teorema Fundamental del Cálculo:

E1: La primera derivada es igual a x más 1 ($x' = x + 1$). Como siempre estaríamos trabajando ... la variable, ¿aquí no?, yo siempre la tomé así que la variable dependiente es t y la variable independiente es x. Esta fue la duda que tuve yo al inicio, pero yo así lo trabajé. Entonces integre con respecto a t.

I: A ver hágalo.

E1: Bien, lo voy hacer. Entonces tendríamos la integral de $\frac{dx}{dt}$, y esto me quedaría entonces una función que al ... ... aunque aquí además ... Bueno, integramos, y si no tendríamos que estudiar los criterios de la derivada. Bueno ... yo lo hice ... integrando.

I: ¿Cómo integró?

E1: Bueno, apliqué la integral. Bueno, como siempre, ¿verdad?, la variable, sacando primero la variable independiente y la dependiente, entonces la derivada nos quedaría $\frac{dt}{dx}$ (ver figura A.3), la variable independiente y la variable dependiente, independiente y dependiente.

I: Cuando Ud. tiene esta notación $x = x(t)$, x como función de t. ¿Quién es la variable independiente?

E1: ¿La independiente?

I: Si.

E1: La variable independiente es t

I: ¿Y cuál es la variable dependiente?

E1: La variable dependiente es x.

I: Y cuando Ud. tiene esta notación $\frac{dx}{dt}$, la derivada de x con respecto de t, ¿cuál es la variable independiente? ¿y cuál esla variable dependiente?

E1: La variable independiente es t y la dependiente es x.

Luego al integrar lo hace incorrectamente:

I: Entonces, que está diciendo la ecuación $x' = x + 1$.

E1: Bien, como nos dan x' es igual a x más 1 y x', ¿verdad?, es igual a $\frac{dx}{dt}$, entonces aplicamos la integral a ambos lados. Entonces tendríamos x de t es igual a la integral de x más 1 por el diferencial de t ($x(t) = \int (x + 1)\, dt$, ver figuras A.3 y A.5); al integrar tendríamos que, bueno, si lo vemos como proceso de integral, tendríamos que buscar una función cuya derivada sea x más 1. Entonces aquí seria entonces un medio de x cuadrado más x más una constante C (ver figura A.5). Entonces, ahora si aplicamos la derivada, al derivar podemos observar acá que obtenemos la función que teníamos.

I: Entonces Ud. diría que la solución buscada es $x(t) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$.

E1: Uhmm ... ... creo que me equivoqué, porque estoy tomando como si x fuera, o sea, estoy tomando al revés las funciones porque ehee, perdón, aquí comprobando (risas) se me fue la ... quien era la variable dependiente y quién es la variable independiente. Entonces vuelvo a integrar, porque estamos integrando respecto a t, entonces esto seria entonces, como estamos trabajando con una constante, x t más t más una constante, entonces esta sería mi x de t igual a xt más t más una constante (ver figura A.5).

Al proponerle la tarea de verificar que la función $x(t) = xt + t + C$ cumple con la relación o ecuación en cuestión, agrega:

E1: Derivamos ... ... y obtenemos la función que teníamos.

I: Derive, pero recuerde que x depende de t y, por tanto, la respuesta obtenida $x(t) = xt + t + C$. es una ecuación implícita, es decir, que define a x como función de t de manera implícita, porque x no está despejada en función de t. Observe que aquí aparece el producto x por t y x es función de t. A ver, verifique que ella satisface la ecuación.

E1: Bueno, aquí tendríamos la derivada de x, estaríamos derivando con respecto a t ... como x es en función de t ... ehee, derivamos con respecto a t, quedaría x más 1 porque es ... y la constante respecto a t al derivarla me quedaría x más 1 ... uhmm

I: Observe que x depende de t y, por lo tanto, este (xt) es un producto de dos funciones que dependen de t.

E1: Ahja!

I: O sea que lo que tiene aquí es un producto.

E1: Va, entonces derivamos aplicando la regla del producto. Lo voy a escribir otra vez. Sería ... nada más como ... sería la regla ... la puedo escribir

I: Si.

E1: La derivada del producto, siempre se me olvida quien va primero, seria la derivada de la primera por la segunda más la derivada de la segunda por la primera. Entonces aplicamos, la primera derivada en este caso sería x y la segunda t, la derivada de la primera que en este caso sería 1 por t más la derivada de ...

I: ¿Con respecto a que variable está derivando?

E1: Uhmm ...

I: ¿Por qué la derivada de x le dió 1?

E1:Uhmm ... estoy derivando con respecto a t.

I:Ujum!

E1: Ehee ... ¿por respetar el orden de las variables?

I: Derive como Ud. cree que debe ser ... la pregunta es por qué puso 1 ahí.

E1: Lo tendría que escribir como, como la función, como x igual a x de t, trabajando de esta manera

I: No, no lo sé. Ud escribió 1 ahí. Yo lo que le pregunto es de dónde saco el 1.

E1: Vaya como es la ... vaya ... bueno ... es que lo quería hacer ... la derivada de la primera función con respecto a t nos daría cero porque la primera función estaría acá ... entonces ...

I: Pero, ¿por qué ahora la derivada da cero?

E1: Es que como es cero por la derivada de x con respecto a t, x es una constante nada más.

I: x es una función de t, x es la que ha encontrado aquí, verdad, y x es una función de t.

E1: Uhmm ... uhmm ... no ...

I: Si, esta x que aparece aquí a este lado, a lado izquierdo, es la misma que aparece aquí al lado derecho, que es una función de t.

E1: Ujum!... tendría entonces que ... por eso le preguntaba que si utilizaba esta

I: Si, si, en efecto, la x que aparece aquí es la misma x que aparece acá.

E1: x de t

I: Ujum ..., o sea, cuando dice que la derivada es cero está diciendo que no depende de t, pero depende de t.

E1:Ujum ... ...

Con el fin de reflexionar sobre la estrategia utilizada, y ser consciente del proceso seguido y las acciones realizadas, se propone la tarea de hallar una función que cumpla la ecuación $x' = t+1$, con $x = x(t)$ una función que depende de t.

E1: Sería ... y si derivo ... aquí quedaría ... es que el problema que tengo ahorita es la escritura. No sé si tendría que escribir dx/dt y escribir con respecto a quien estoy derivando ...

I: Si, aquí se nota que está derivando con respecto a t, x' también se denota como dx/dt.

E1: ... más cero, así cuando escribimos esto nos queda, si paso al mismo me quedaría dx/dt igual a ... derivamos con respecto a t me quedaría 1

I: Dígame, ¿qué hizo?

E1: Como aplicar la regla de la derivada.

I: ¿Qué derivó?

E1: Derive esto ($x' = t+1$).

I: Observe que con eso obtiene la segunda derivada, porque está ya es la primera derivada y al derivarla, se obtiene la segunda derivada.

E1: O sea que, tendríamos que encontrar x' dt ... sería la integral de x' dt y sería igual a la integral de t más 1 por el diferencial dt. Ahora ... al integrar directamente obtenemos un medio de t al cuadrado más una constante.

I: Compruebe que esa es una solución.

E1:Es igual a la derivada con respecto a x, perdón, la derivada de x con respecto de t, que sería la variable independiente x y la variable dependiente t, estaríamos derivando con respecto a t, de toda la expresión un medio de t al cuadrado más t más una constante C. Ahora ... En todo caso sería dx/dt igual a x' ... Derivamos adentro ... aplicamos la regla de una vez ... esta sería ... y llegamos entonces a la relación de la que partimos (ver figura A.5).

I: ¿Qué diferencia hay entre las expresiones $x' = x+1$ **y** $x' = t+1$**?**

E1: Que aquí nada más aparece la variable independiente y aquí también tenemos a x en función de t.

I: Fíjese que en este caso ($x' = t+1$) **funciona el procedimiento de integrar directamente.**

E1: Ahja!

I: ¿Qué utilizó para decir que la integral de x prima dt es igual a x ($\int x'\,dt = x$)**?**

E1: Ahja, porque aquí tenemos la función, yo siento que aquí lo tengo un poquito más claro porque aquí tengo, bien claro, por decirlo así, que la variable dependientes es x y la independiente es t, y a mi me confunde cuando no nos aparece la variable independiente, entonces como escribir esta función de t ... y no me recuerdo muy bien como va.

I: Cuando Ud. integra aquí, qué es lo que utiliza. ?'Por qué puede integrar de esta manera? ?'Qué resultados utiliza para hacer estas integraciones?

E1: La ley de ... la derivada, la ley de las antiderivadas. Y aplicando las leyes ya está porque es una ecuación, por decirlo así, en la que no hay que hacer cambio ni nada, de una vez aplicando las leyes.

Sin embargo, las dificultades persisten:

I: Vaya, veamos el 14: $x' = x^2$**.**

E1: ... Y aquí nuevamente en el catorce tendríamos la derivada, estaríamos hablando, verdad, de la derivada de x con respecto a t igual a x cuadrado; no nos aparece la variable independiente, sólo la dependiente, entonces tendríamos que buscar una función que ...

I: ¿Cuál es la variable dependiente?

E1: ¿La dependiente? t y la, lo dije al revés, ¿verdad?, ya dije que sólo nos aparecía la variable dependiente.

I: Si.

E1: La dependiente sería t y la independiente sería x ... entonces necesitamos encontrar la función que al derivarla ...

I: Recuerde que Ud. puede encontrar una función ya sea adivinando o integrando.

E1:Ujum! ... aquí tendríamos la función x de t igual a la integral, al integrar esto, que nos quedaría entonces ... ... x cuadrado t más una constante C (ver figura A.6).

I: Derive esta expresión ($x(t) = x^2t + C$) para ver si obtiene la relación $x' = x^2$.

E1: ... ... aquí creo que no me va a dar, ya me di cuenta ... derivamos x cuadrado t más una constante ... al menos que yo me equivque, pero esto seria x cuadrado nada más.

I: Recuerde que x es función de t y, por lo tanto, lo que tiene aquí es un producto de funciones de t.

E1: Estaría otra vez en el mismo caso. Por eso le digo, me quedaría x cuadrado por dx ... ...

I: ¿Que le queda al aplicar la regla del producto?

E1: Ujum!

I: La derivada de t con respecto de t es 1. Ahora, ¿cuánto es la derivada de x cuadrado con respecto a t?

E1: Cero.

I: ¿Será cero? ¿Cuánto es la derivada de x cuadrado con respecto a t si x depende de t? ¿Cómo se calcula esta derivada, la derivada de x cuadrado con respecto a t?

E1: ... ...

I: ¿Cómo se calcula la derivada de x cuadrado con respecto a t? ¿Qué nos dice la regla de la cadena?

E1: ... que hay derivar con ... hay que aplicar a la función la derivada que nos dan a la función completa ... ...

I: Trate de hallar una función que cumpla que ($x' = x^2$) adivinado.

E1: ... ...

I: Bien, dejémoslo ahí. Veamos el número 15: $x' = x^2 + 1$. Y antes de intentar hacer algún procedimiento, trate de usar lo que Ud. conoce de cálculo, es decir, ¿qué función conoce Ud. que tenga la propiedad de que su derivada es igual a x cuadrado más 1?

E1: ... ... tangente

I: ¿Cuál es la derivada de la tangente?

E1: ... ...

I: Escriba x de t igual a tangente de t y sustituya la tangente para ver si verifica la propiedad en cuestión. ¿Cuál es la derivada de la tangente?

E1: ... secante por tangente.

I: Ahora calcule x cuadrado más 1.

E1: ... ...

Por su parte, los estudiantes **E3**, **E4** y **E5** integran incorrectamente con respecto a t ambos lados de la ecuación $x' = x^2$; y usando el hecho de la derivación e integración son operaciones inversas calculan la integral del lado izquierdo; mientrás que para calcular el lado derecho combinan la observación de que $x(t) = -\frac{1}{t}$ cumple la relación $x' = x^2$ y la necesidad de sumar una constante al realizar la integral indefinida. Este procedimento también aparece en el estudiante **E1** al intentar resolver el ejercicio.

Para resolver la ecuación $x' = x+1$, **E3**, **E4** y **E5**, usan la estrategia de descomponer dicha ecuación en dos ecuaciones: $x' = x$ y $x' = 1$ (cuyas soluciones son ya conocidas), expresando la función buscada como la suma de las soluciones de estos dos subproblemas. Esta misma estrategia de descomposición usan para resolver la ecuación $x' = x^2 + 1$, considerando las ecuaciones: $x' = x^2$ y $x' = 1$.

I: ¿Y la trece ($x' = x+1$)?

E3: Igual, igual, como ya hice la de x prima igual a x y la de x prima igual a 1 entonces las sume ($x(t) = e^t + t + C$).

I: Suma las soluciones de cada una ($x' = x$ y $x' = 1$).

E3: Si.

I: Verifique si esta ($x(t) = e^t + t + C$) función es solución.

E3: ... ... no, no es solución.

I: ¿Cuál podría ser una solución?

E3: Una solución uhmm ... ... no sé.

I: ¿Qué ha utilizado para resolver esta ecuación?

E3: ... uhmm...

I: ¿Qué operación ha hecho para encontrar esta solución?

E3: Mentalmente, pensé en los dos casos anteriores, la separe en dos ecuaciones y como ya sé las soluciones de cada una, las sume.

I: Pero ya vimos que esta función no cumple con la propiedad deseada.

E3: Si, es cierto, por eso creo que lo que he hecho no es cierto ...

I: ¿Por qué?

E3: ... ...

I: Bien, pasemos al 15 ($x' = x^2 + 1$). Ha hecho lo mismo que antes, lo cual ya vimos que no es cierto. Mejor inténtelo buscando una función cuya derivada sea el cuadrado de ella más uno.

E3: ... ... no, no sé.

I: ¿Recuerda alguna propiedad de cálculo?

E3: ... ... no, no recuerdo nada.

I: ¿En que estaba pensando al dar esta respuesta?

E4: Yo lo que hice fue ... quiero ver que fue lo que hice ... si separe en dos partes la ecuación.

I: Eso se repite aquí en el ejercicio 15.

E4: Ahja!

I: ¿De dónde obtuvo esa propiedad?

E4: Ahja, risas, no sé invento, risas, para poder resolverlo ... si porque yo de ecuaciones diferenciales medio había leído, porque tengo allí un mi folleto, pero allí en la computadora, pero no es tan así como.

I: Examinemos algunas de las respuestas que Ud. ha dado en estos ejercicios, por ejemplo, ¿cómo obtuvo la respuesta del ejercicio 13 ($x' = x+1$)**?**

E5: Ummm ... yo, yo la mayoría las puse porque me acordaba de ellas, no porque no sabia ningún método para encontrarlas.

I: Si.

E5: La mayoría se resolvieron así y en las otras mi compañero me ayudó.

I: Veamos, por ejemplo, ¿cómo resolvió x'= x + 1?

E5: Ummm ... primero escribí la solución de x' = x que era e^t, y de ahí sólo, por lógica, le agregue el t más C, que al derivarlo sería 1 (ver figura A.40).

I: ¿De dónde saco el término t?

E5: De aquí, de x' = 1.

I: Lo que ha hecho es descomponer la ecuación en dos ecuaciones.

E5: Ujum!

I: ¿De dónde obtuvo esa propiedad?

E5: ¿La de la suma?

I: Si.

E5: No, (risas) no sé como, sólo me base en la derivada de la ... en que la derivada de la suma es la suma de las derivadas.

I: Si.

E5: En eso es lo que me base.

I: Vamos a ver, parece ser que este x' = x cuadrada más 1, lo resolvió de la misma manera.

E5: Si, como ya tenía la solución de x' = x cuadrada, sólo le agregue la t más C (ver figura A.41).

Por su parte, el estudiante **E2** resuelve la ecuación $x' = x+1$ haciendo el cambio de variables $z = x+1$; mientrás que en las ecuaciones $x' = x^2$ y $x' = x^2+1$ usa la técnica de separación de variables, mostrando un dominio simbólico de la técnica:

I: Esto que Ud. ha hecho está bien, es un procedimiento correcto. Y de hecho se llama así de variables separables. Ahora, ¿Por qué funciona esa técnica? ¿Puede decirme por qué funciona?

E2: Uhmm ... por la definición de diferencial.

I: ¿Qué significa este diferencial?

E2: O sea, el término respecto al cual hay que integrar.

I: Simbólicamente, sí. Pero, qué significa dx. Si x es la variable dependiente, qué es el diferencial de x. Porque fíjese que aquí Ud. paso de una notación de derivada ...

E2: A operar con diferenciales.

I: Si, ¿cómo?

E2: Si esta es la derivada de x con respecto de t, esto es lo mismo que esto ($x' = \frac{dx}{dt}$).

I: Pero, ($x' = \frac{dx}{dt}$), no es un cociente entre dx y dt. Sino que es la notación de Leibniz de derivada y es un solo símbolo. Entonces, ¿qué es el diferencial de x?

E2: El diferencial de x se aproxima por el aumento de x.

I: Si. ¿Y ese aumento cómo se puede describir?

E2: Por delta x.

I: ¿Y delta x cómo se puede calcular ?

E2: ... ...

I: Delta x es el cambio en la variable dependiente, ¿no?

E2: Es como $x(2)-x(1)$, digamos en el intervalo de 1 a 2, y... entonces ... sería igual a la derivada por el diferencial de t.

I: Esa es la idea clave. Luego vamos a ver por qué el método funciona.

E2: Eso no lo había visto.

I: Ahora, volviendo a lo que ha hecho, ¿por qué puede integrar a los lados?

E2: ... ...

I: Bueno, este método ya lo conocía Ud., verdad. ¿Ya lo había estudiado por su cuenta antes de llevar este curso?

E2: Si.

La necesidad de sumar una constante se justifica de la manera siguiente:

I: Una pregunta, al ver todo lo que ha hecho, ¿por qué en todas las integrales que ha calculado siempre le ha sumado una constante?

E1: ... ahaa ... ¿cuando integramos?

I: Si, ¿por qué?

E1: ... porque cuando ponemos la integración o los límites de integración siempre como que hace falta la constante para poder verificar, más que todo se utiliza cuando tenemos limites de integración para poder evaluar la integral ...

A manera de ejemplo paradigmático, en la figura 7.1 se muestra una red sistémica que resume los resultados de las entrevistas de los estudiantes al resolver la ecuación $x' = x + 1$.

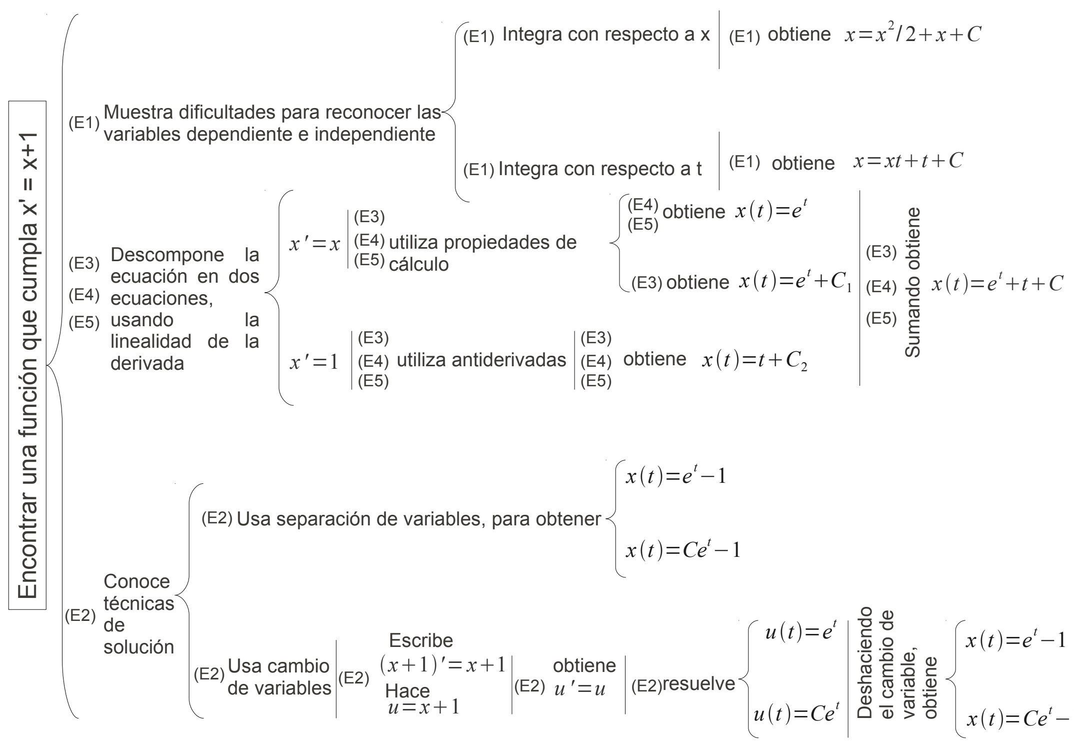


Figura 7.1: Red sistémica para la ecuación $x' = x + 1$

7.1.2. Ejercicio 2

Enunciado. Bosquejar la gráfica de la función $h(x)$ si:

a) $h(x)$ es continua en R.

b) $h(0) = 2,\ h'(-2) = h'(3) = 0,\ \lim_{x\to 0} h'(x) = \infty$.

c) $h'(x) > 0$ cuando $-4 < x < -2$ y $-2 < x < 3$.

d) $h'(x) < 0$ cuando $x < -4$ y $x > 3$.

e) $h''(x) < 0$ cuando $x < -4$, $-4 < x < -2$ y $0 < x < 5$.

f) $h''(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y $x > 5$.

g) $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty$.

h) $\lim_{x \to \infty} h(x) = -2$.

i) Si se remueve la condición (a) referida a la continuidad, dejando las demás condiciones iguales, cuáles serian los posibles gráficos de $h(x)$.

Objetivo. El objetivo de este ejercicio es movilizar el esquema gráfico-algebraico de las relaciones entre los objetos función y función derivada y llamar la atención de los estudiantes sobre los conocimientos y operaciones necesarios en las actividades subsiguientes. Se espera que los estudiantes sean capaces de movilizar sus conocimientos previos de cálculo diferencial e integral adecuadamente y sin mayores dificultades.

Administración. Este ejercicio se trabajó en pequeños grupos en la primera clase y se pidió a los estudiantes devolver la resolución escrita en la clase del día siguiente. Posteriormente, en el transcurso de la primera semana de clases, se realizó a cada uno de los estudiantes una entrevista semi-estructurada para discutir sobre la resolución escrita presentada y explorar su pensamiento, dificultades y errores. La entrevista fue grabada en audio.

Discusión de resultados. En este ejercicio todos los entrevistados son capaces de determinar y coordinar analíticamente la monotonía y concavidad de la función, identificar las raíces, los extremos, los puntos de inflexión, las asíntotas horizontales, pero ninguno de ellos logra dibujar una gráfica coherente con las condiciones dadas, observándose dificultades para:

1. Ubicar en el plano los puntos libres $(-4, h(-4))$, $(-2, h(-2))$,$(3, h(3))$.
2. Dar significado geométrico a la expresión $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$.
3. Dar significado geométrico a la expresión $\lim_{x \to 0} h'(x) = +\infty$.
4. Coordinar en el registro gráfico la monótonia y concavidad de la función.
5. Relacionar apropiadamente en el registro gráfico las propiedades de diferenciabilidad y continuidad de una función.

Veamos:

E1: ... vaya, de 5 a más infinito iba a ser cóncava hacia arriba. De allí como nos da que el límite de h(x) cuando x tiende a más infinito es -2, esto quiere decir que hay una asíntota; y el límite cuando x va a menos infinito de h(x) tiende al infinito, y allí si no estoy segura que hacer ...

I: ¿Qué tipo de asíntota es la que está implicada en la condición h?

E1: Es una asíntota horizontal.

I: ¿Y la condición g) como se refleja en el gráfico (ver figura A.7)?

E1: Que crece, que no vuelve a bajar.

I: Veamos, ¿de -2 a 0 como es la función? ¿Cómo se refleja en la gráfica la condición f), es decir, que de -2 a 0 la segunda derivada es positiva?

E1: ... ...

I: ¿Es coherente lo que dice la gráfica con lo que dice la condición f)?

E1: Tendría que empezar más arriba, ¿verdad?, ... viene como una cúbica ... ...

I: Y está condición que dice que el límite de h prima de x cuando x tiende a cero es infinito, ¿cómo está reflejada en el gráfico?

E1: ... ...

I: ¿Qué quiere decir esa condición?

E1: ... ...

I: ¿Qué significa geométricamente esa condición?

E1:... ... ...

I: ¿Cómo se interpreta geométricamente la derivada?

E1: ... ...

I: ... veamos, cómo se refleja en la gráfica la condición que dice que el límite de h prima de x cuando x tiende a cero es infinito.

E2: Es una tangente vertical y por eso traté de corregirlo porque en el gráfico eso no se veía bien. Debe ser bien pegadito al eje vertical. Es como la cúbica, solo que rotada 90 grados.

I: Si.

E2: El ejercicio lo hice por los intervalos que quedan definidos por las condiciones y viendo como son la primera y la segunda derivada en cada uno de ellos.

I: ¿Por qué paro aquí en el punto (-4, 0)?

E2: Porque h prima es negativa cuando x es menor que -4, o sea que la función decrece. También es cóncava hacia abajo.

I: La pregunta es por qué paro en el punto (-4,0). ¿Por qué no se vino hasta aquí?

E2: ... ...

I: Una pregunta, ¿el punto (-4, h(-4)) podría dibujarse aquí (arriba de la horizontal $y = 2$)?

E2: No.

I: ¿Por qué?

E2: Bueno, porque h(0) es 2, ¿verdad?, y supuestamente tendría que pasar la función por estos dos puntos y entonces no se cumpliría que la función es creciente.

I: ¿Dónde debería colocarse el punto (-4, h(-4))?

E2: Debajo de 2.

E3: Como dice que h es continua, eso me da la idea que h es una función que no tiene cambios bruscos. También dice que h(0) vale 2, o sea que pasa por aquí y que h'(-2) es igual a h'(3) que es igual a cero ambas, entonces a mi me da la idea de que hay un mínimo o un máximo en -2 y 3, que serían estos puntos aquí, entonces eso me da la idea.

I: Si.

E3: De allí este límite ($\lim_{x\to 0} h'(x) = +\infty$) si no pude aplicarlo yo, entonces no, no ... ...

I: De hecho no se refleja esa condición en la gráfica.

E3: No.

I: ¿Cómo se representaría esa condición en la gráfica?

E3: Es que eso no, no lo entiendo, ese límite, qué es lo que le hace ese límite a la gráfica ... no sé.

I: ¿Qué representa geométricamente la derivada?

E3: Uhmm ...

I: En este punto $((0,2))$ **que representa la derivada.**

E3: En ese punto, uhmm ... sería un número también

I: ¿Qué representa ese número?

E3: Uhmm ... este la pendiente de la recta tangente.

I: Ahora que nos diría este límite.

E3: Que cerca de cero la derivada se vuelve infinita.

I: En términos geométricos cómo se traduciría eso.

E3: Uhmm ... ... que la pendiente se va haciendo grande ... que la tangente es vertical.

I: ¿Qué se puede decir del gráfico de h?

E3: Uhmm ... ...

I: ¿Qué se puede decir de h'(-4)?

E3: Ehee ... es una constante ... sería una constante, un número.

I: ¿Qué número sería?

E3: Uhmm ...

I: ¿Cuál es el significado geométrico de h'(-4)?

E3: Geometricamente ... sería ... un punto, que es como que no exista nada en ese punto.

I: ¿Por qué no existe?

E3: Uhmm ... porque siento que la gráfica aquí tiene un cambio repentino en ese punto, uhmm ... no sabría como explicarlo.

I: ¿Geométricamente que significaría ese cambio repentino? Por geométricamente me refiero en términos de rectas tangentes.

E3: La pendiente cambia.

I: Si ... ¿por qué ubico el punto (-4, h(-4)) aquí? Y, por ejemplo, ¿por qué no lo ubico por acá (arriba de la horizontal $y = 2$**)?**

E3: Para empezar ... bueno, como nos dicen que la función es continua, tome en cuenta que la función no iba a tener cambios así de puntos bruscos ...

I: Respetando todas las condiciones ¿podría dibujar el punto (-4, h(-4)) aquí (arriba de la horizontal $y = 2$**)?**

E3: ... si lo podría dibujar ... ... no sé.

I: Bien ... ¿qué sucede si remueve o quita la condición a), que pide que la función h sea continua? ¿Cómo sería el gráfico?

E3: Bueno, para empezar podría poner este punto aquí (arriba de la horizontal $y = 2$).

I: ¿Podría?

E3: Si, porque nos dicen que no es continua, vaya, podría poner ese punto allí y dejar las mismas condiciones anteriores.

I: ¿Qué significa geométricamente la condición de qué límite de h'(x) cuando x tiende a 0 sea infinito?

E4: Que digamos tiene allí una ... que la aproximación lineal es ... digamos una recta vertical allí en ese punto; por ejemplo, vaya, la raíz cúbica tiene esa característica que en 0 la aproximación lineal es infinita, o sea, la tangente es vertical.

I: Pero eso no se refleja en el gráfico.

E4: Aquí no mucho ... deber ser más empinada al acercarse a 0 ... más pegadita al eje para que de verdad se viera que la derivada se va haciendo allí más grande y más grande.

I: Si. Otra cuestión es ... vamos a ver, ¿el punto (-4, h(-4)) se podría colocar por aquí?

E4: Uhmm ... pues ... ¿respetando la continuidad siempre?

I: Si, respetando no sólo la continuidad, sino todas las demás condiciones.

E4: Ehee, pues ... ... si, si también porque la segunda derivada entre, digamos, -4 y -2 es igual a la, tiene el mismo signo que la derivada aquí, de -4 a infinito, entonces podemos subir este aquí.

I: Si.

E4: Podríamos hacer esto ... o bajar hasta (-2,0), algo así digo yo.

I: ¿Qué está pasando en este intervalo? ¿cómo es la segunda derivada allí?

E4: ... positiva ... y hay cambio de signo, entonces no se podría subir ... porque el problema es que debemos respetar que sea continua.

I: Si.

E4: Y como tenemos que la gráfica tiene que ser así en esa parte.

I: Si tomamos en cuenta esta recta horizontal, ¿en que partes de ella puedo colocar el punto (-4, h(-4))? ¿cuáles serian las zonas adecuadas para colocarlo?

E4: ... ...

I: ¿Podría colocarlo aquí?

E4: No, porque sería el mismo, la concavidad sería igual

I: ¿Qué otra condición se viola?

E4: ... el problema es que es creciente, entonces podríamos ponerlo en cualquier punto desde aquí hacia abajo pero sin tomar el 0 ... si, ¿verdad?

I: ... ¿qué significa geométricamente la condición de que el límite de h'(x) sea infinito cuando x tienda a cero?

E5: Este ... uhmmm ... que la derivada tiene una asíntota, podría decirse.

I: ¿Algo más preciso respecto con la gráfica de h(x)?

E5: Bueno, yo lo que entendí que era una recta así, vertical, ¿verdad?, y = 0.

I: ¿Qué papel juega en la gráfica esa recta vertical?

E5: Qué había un cambio de ... concavidad en el punto (0,2).

I: Si.

E5: Pero yo lo había dibujado así, ¿verdad?, porque cuando son así también la, es cero, pero no cumplía con las demás condiciones.

I: Sin embargo, en el gráfico no se ve reflejado eso que Ud. dice. ¿Cómo interpreta geométricamente la derivada?

E5: ¿Cuando x tiende a cero igual a infinito?

I: Sólo la derivada.

E5: Que no existe cuando x tiende a cero.

I: ¿Qué significa eso geométricamente?

E5: ... uhmmm ... uhmmm ...

A manera de resumen en la figura 7.2 se muestra una red sistémica para los resultados de las entrevistas de los estudiantes al resolver el ejercicio número 2.

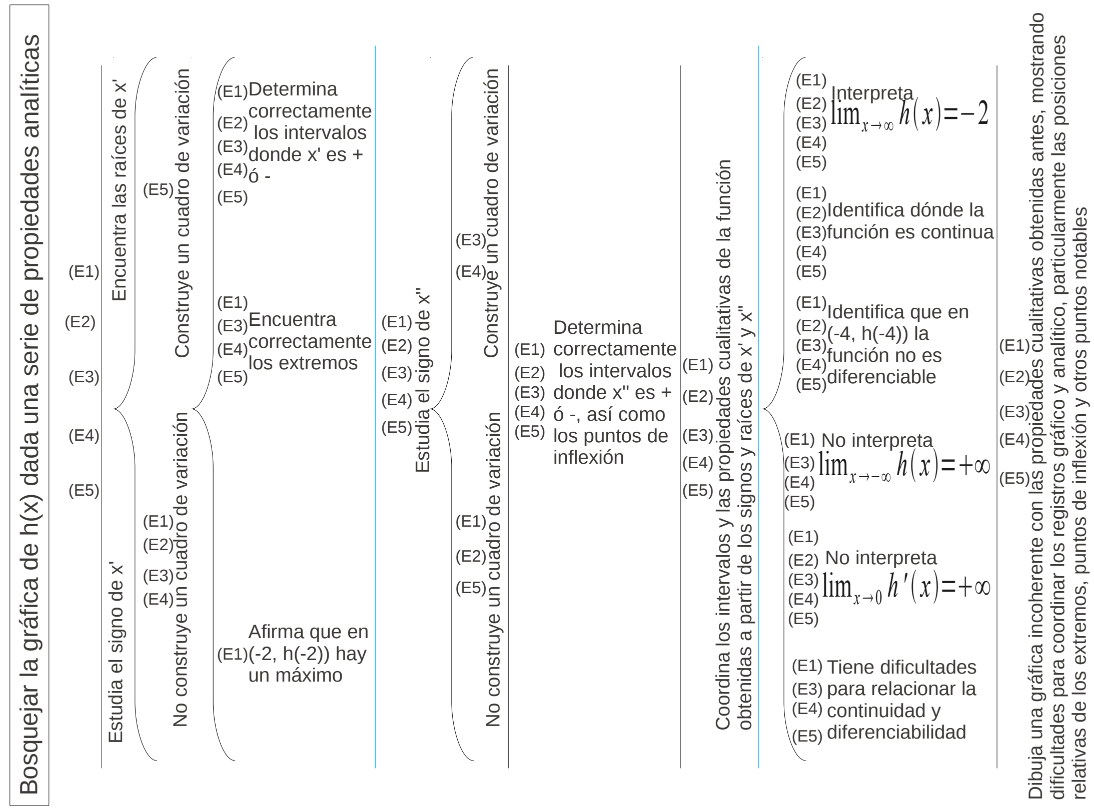


Figura 7.2: Red sistémica para la construcción de la gráfica de la función $h(x)$ dada una serie de propiedades analíticas.

7.1.3. Ejercicio 3

Enunciado. Sin resolver la ecuación, dibujar el diagrama de soluciones de $x' = e^{-t}\cos t$. El diagrama de soluciones es la representación gráfica que muestra el comportamiento local y global de todas las soluciones de la ecuación.

Objetivo. El objetivo de este ejercicio es iniciar la construcción de un esquema gráfico-algebraico de las relaciones entre los objetos función y función derivada, transfiriendo adecuadamente los conocimientos previos de cálculo diferencial.

Administración. Este ejercicio se entregó a los estudiantes en el primer examen parcial. Posteriormente, se realizó a cada uno de los estudiantes una entrevista semi-estructurada para discutir sobre la resolución escrita presentada y explorar su pensamiento, dificultades y errores. La entrevista fue grabada en audio.

Discusión de resultados. Todos los estudiantes son capaces de obtener en el registro algebraico los extremos de las soluciones y los intervalos de monotonía a partir, respectivamente, del estudio de las raíces y el signo de la primera derivada de las soluciones (la cual está dada por la ecuación). Asimismo todos, salvo el estudiante **E2** que abandona esta ruta debido a la dificultad para resolver $\tan t < -1$ y opta por resolver el ejercicio usando la calculadora, obtienen sin mayor dificultad los puntos de inflexion y los intervalos de concavidad de dichas soluciones a partir, respectivamente, de determinar las raíces y signo de la segunda derivada de las soluciones (obtenida al derivar una vez la ecuación dada). Vale señalar que los estudiantes **E3** y **E4** usan el cuadro de variación como recurso para resumir y coordinar la información analítica. Sin embargo, se observan dificultades para coordinar en el registro gráfico los intervalos de monotonía y concavidad, así como dificultades de traducción del registro algebraico al gráfico, a fin de construir gráficas coherentes con las propiedades derivadas en el registro algebraico. Veamos:

> E1: Uhmm ... ... ahora para graficar si tengo problemas, ya de allí, ya si no ... ... tal vez con calculadora quizá pueda hacerme un poco más la idea o no sé; pero así, nomás, si no ... (ver figura A.8).
>
> **I: Veamos, ¿qué significan estas marcas de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$?**
>
> E1: Ummm ... que aquí hay concavidad hacia abajo y aquí hacia arriba.
>
> **I: ¿Qué sucede de $-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$?**
>
> E1: Ujum, de $-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$ ... ...
>
> **I: ¿Dibuje esa parte de la gráfica?**
>
> E1: ... ... de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ es decreciente ... luego aquí de $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{4}$ es cóncava hacia arriba... ..., si ¿verdad?, sería así porque de $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, desde aquí hasta aquí, hasta este punto, va a ser decreciente... luego de $-\frac{\pi}{2}$ hasta $-\frac{\pi}{4}$ sería ... de $-\frac{\pi}{2}$ hasta $-\frac{\pi}{4}$, aquí sería cóncava hacia abajo.
>
> **I: Si.**
>
> E1: Por aquí cambia de concavidad, entonces, es hacia arriba ... ahja!, de $-\frac{\pi}{4}$ hasta $\frac{\pi}{2}$. Ahora, cambia de concavidad, así ¿verdad?, por aquí así ..., ¿verdad?
>
> **I: Si.**
>
> E1: Luego aquí de $-\frac{\pi}{2}$ ... a $\frac{3\pi}{2}$ sería ... ... ahorita si no ...
>
> **I: Si. ¿Aquí que paso?**
>
> E5: Este, no me cuadro el análisis porque, bueno aquí me daban todavía para valores positivos que habían máximos y mínimos, ¿verdad?, entonces yo creí que iba aquí también parte de la función, pero bueno aquí al final lo que hice, como me contradije un poco, evalué el límite de la derivada cuando t tiende a infinito entonces me dio cero, que quiere decir que tiende a un límite, más o menos eso fue lo que hice.

I: Si, pero también esto es cierto, ¿no?: que estas funciones tienden a cero. ¿Cuál es la diferencia de comportamiento entre ellas?

E5: Que esta es siempre positiva.

I: Si.

E5: Bueno, aunque también con esto no se puede mucho saber ... cuando tiende a infinito es indefinido, ¿verdad?, a saber hacia donde tiende, bueno, ella sola.

I: ¿Cómo encontró que el limite es cero?

E5: Por esto ... esto tiende a cero, entonces ...

I: ¿Por qué?

E5: Uhmmm ... uhmm ...

Se observa que el estudiante **E5** hace la inferencia falsa de que en infinito las soluciones tienden a cero dado que $\lim_{t\to\infty} e^{-t}\cos t = 0$.

A manera de resumen en la figura 7.3 se muestra una red sistémica para los resultados de las entrevistas de los estudiantes al resolver el ejercicio número 3.

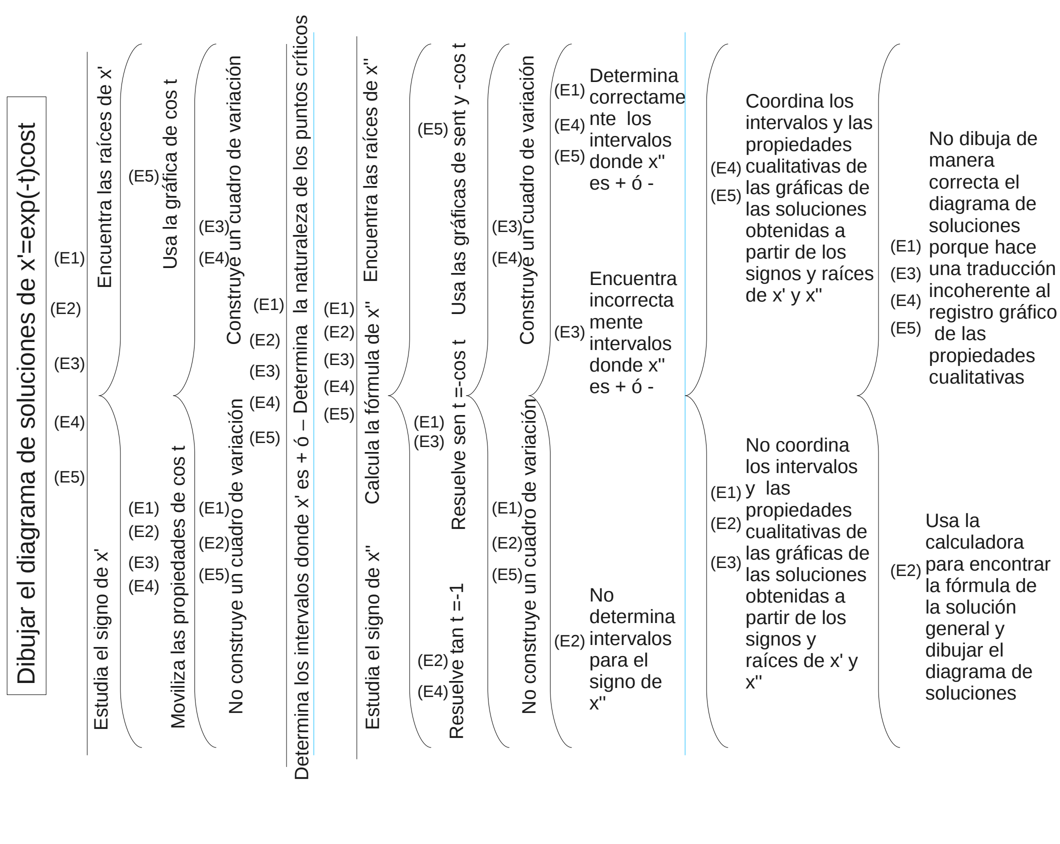


Figura 7.3: Red sistémica para la construcción del diagrama de soluciones de la ecuación $x' = e^{-t}\cos t$

7.1.4. Ejercicio 4

Enunciado. Considere la ecuación diferencial ordinaria $x' = \sin(x)$. En el mismo plano tx, dibuje las curvas solución que pasan por los siguientes puntos:

$$(0,\pi/4),(0,\pi/2),(0,3\pi/4),(1,\pi/2),(-1,\pi/2),(0,3\pi/2),(0,-\pi/2).$$

Suponga que las soluciones existen y están definidad en todo $\mathbb{R}$.

Objetivo. El objetivo de este problema, además de favorecer el modo de pensamiento gráfico, es explorar los mecanismos que usan los estudiantes para transferir los conocimientos y habilidades gráficas y algebraicas heredadas del cálculo diferencial e integral para dibujar soluciones de ecuaciones autónomas.

Administración. Este problema se entregó a los estudiantes en el primer examen parcial. Posteriormente, se realizó a cada uno de los estudiantes una entrevista semi-estructurada para discutir sobre la resolución escrita presentada y explorar su pensamiento, dificultades y errores. La entrevista fue grabada en audio.

Discusión de resultados. Los resultados de este problema muestran que todos los estudiantes tienen dificultades para deducir las propiedades locales y globales de las soluciones y traducir estas propiedades al registro gráfico y, en consecuencia, fracasan en la tarea propuesta. Entre los errores más destacados se tienen: no aplicar la regla de la cadena al calcular la segunda derivada ($x'' = f'(x)$), lo cual es debido al rol que juega la variable x, el olvido de las soluciones constantes y al traslado mecánico del esquema gráfico-algebraico válido para el caso $x' = f(t)$. Para obviar dichas dificultades y dar respuesta al problema, el estudiante **E2** recurre a la calculadora y los estudiantes **E1** y **E5** sustituyen en el lado derecho de la ecuación la variable x por la variable t y trabajan con la ecuación $x' = \sin(t)$. Veamos:

E1: Vaya, tengo que la derivada de la x es el sen x y está en función de ella misma.

I: Si.

E1: Entonces la derivada es igual a cero cuando esto ($\sin x$) es igual a cero, o sea, para $x = n\pi$, por el seno, ¿verdad?, ... (ver figura A.9)

I: Si.

E1: Lo que no pensé era ver si estas ($x = n\pi$) eran soluciones de la ecuación, ¿verdad? Pero vemos que si, porque si derivamos acá ($x = n\pi$) tenemos que x' es igual a cero; luego si sustituimos acá ($\sin(x)$) da cero, entonces si son soluciones.

I: Si.

E1: Luego para analizar si es mayor que cero o menor que cero sólo se analiza la gráfica del sen x.

I: Si.

E1: Para la segunda derivada de la misma manera.

I: Si.

E1: Para sacar la segunda derivada, tengo que la derivada es ... y por la regla de la cadena, ¿verdad?, la derivada del seno, que es coseno, por la derivada de x.

I: ¿Con respecto a que variable está derivando?

E1: Con respecto a t ... y me quedaría de esta manera ($x'' = \cos x x' = \cos x \sin x$), ¿verdad?

I: Si.

E1: Y luego analizo el signo de cada una. Cuando sean del mismo signo va a ser mayor que cero. Cuando sean de signo contrario va a ser menor que cero.

I: Si.

E1: Entonces ... ... el cuadro de variación me queda así (asociando los lugares donde $x' = 0$ y $x'' = 0$ a los valores de la variable t).

I: Si.

E1: Luego para la gráfica ... ... uhmm ... allí si esta el problema ... ...

I: Haga nuevamente el cuadro de variación, considerando que nada más tiene la gráfica de sen x.

E1:... ... ... es igual a sen x.

I: Si, pero lo que tiene nada más es la gráfica.

E1: Uhmm ... suponiendo que sólo me da el gráfico (ver figura A.10).

I: Si. ¿Cómo es el diagrama de soluciones?

E1: Esto es g(x) ($g(x) = \sin x$). Entonces es igual a cero donde g(x) es igual a cero. Y esto es igual a cero si x es igual a estos valores, ¿verdad?, serían -3π, -2π, $-\pi$, 0, π, 2π, 3π, ¿verdad?, allí es igual a cero.

I: Si.

E1: ... luego ... la derivada es mayor que cero si x pertenece a ..., puedo hacer los intervalos, ¿va?, de -3π a -2π, etc. Igual si la derivada es menor que cero. Aquí sería de -3π a -2π es negativa y sería decreciente ... así obtengo donde la derivada es positiva y negativa.

I: Si.

E1: Luego para saber la segunda derivada, sería g'(x) por x', que es igual a g'(x) por g(x) ($x'' = g'(x)x' = g'(x)g(x)$). Entonces aquí lo que hay que hacer es analizar otra vez el signo. Y como g'(x) es la pendiente de la recta tangente, hay que ver su signo y luego multiplicarlo por el signo de g(x).

I: Si.

E1: Pero entonces, desde aquí en adelante, desde -3π hasta -2π, esto es negativo ... bueno aquí sería $-\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{3\pi}{2}$ ... ¿así verdad? Sería mayor que cero aquí ... ... y sería negativa, la segunda derivada es negativa y la primera es positiva. De $-\frac{3\pi}{2}$ a $-\pi$ ya sería negativa, la segunda derivada es positiva y la primera es negativa ... ... De 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, la primera derivada y la segunda derivada son negativas... De $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, ya serían positiva y negativa ... ... Luego la gráfica sería así ... ... (ver figura A.11)

I: ¿Cómo le resulta más fácil hacer el análisis del signo de las derivadas?

E1: Es mas fácil aquí (señalando la forma algebraica). Esto (el análisis gráfico) es difícil, porque hay que ir viendo donde la pendiente va hacia abajo, va hacia arriba y dónde la gráfica está arriba y está abajo.

E2 establece que $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ son soluciones de la ecuación, pero muestra dificultades para determinar el signo de x' y reconocer la regla de la cadena al calcular x'' a partir de la ecuación. Y opta por calcular la solución general de la ecuación con el método de separación de variables y graficar las soluciones pedidas mediante la calculadora.

E3 y **E4** determinan correctamente las raíces y signo de x' y x'', verificando que las raíces de x', $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, son soluciones de la ecuación. Sin embargo, **E3** no hace interpretación geométrica alguna sobre las raíces de x'', lo que la conduce a colocar los puntos de inflexión de las soluciones pedidas sobre el eje vertical. Mientrás que **E4** dibuja soluciones que no respetan simultáneamente la monotonía ni la concavidad establecidas analíticamente.

E4: Vaya, para graficar las otras sólo tome en cuenta la monotonía, pero ignore completamente la concavidad. Pero si, en el cuadro de variación igual escribí la conclusión para la monotonía y la concavidad.

I: ¿Hay coherencia o concordancia entre el cuadro de variación y la gráfica?

E4: Si, se cumple la monotonía y la concavidad.

I: ¿En esta parte, de π a 2π, que sucede?

E4: Uhmm ...esta es la que si se me fue.

I: Dibujela.

E4: Uhmm ... ... a ver ... ... queda así.

E5 determina correctamente las raíces y signo de x', pero no verifica que las raíces de x', $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, sean soluciones de la ecuación; calcula las raíces de x'', pero no les asigna ningun significado en relación con las soluciones pedidas. Por otra parte, trata la ecuación como si fuere una ecuación no autónoma, sacando conclusiones que se corresponde con el caso $x' = f(t)$.

I: ¿Qué sucede con la gráfica?

E5: Si, verdad, la gráfica está errónea (ver figura A.44).

I: ¿Qué falta en la gráfica?

E5: Los puntos de equilibrio, no los señale.

I: Si, verdad, los ceros de esta función.

E5: Ahja!, porque aquí dije que había un máximo o un mínimo, pero no necesariamente que la derivada se haga cero quiere decir que hayan máximos o mínimos.

I: Si.

E5: Entonces pueden tender así, que la derivada tienda a cero, tal vez.

I: ¿Qué se puede decir de los ceros de f, sí f solamente depende de t?

E5: Que en esos valores hay máximos o mínimos.

I: Y cuando f depende solamente de x, ¿cómo se interpretan los puntos de equilibrio?

E5: Se interpretan como soluciones constantes.

I: Ahora, sabiendo eso, ¿cómo dibujaría la gráfica?

E5: Vaya, como ya tengo los puntos de equilibrio, que en este caso no son máximos o mínimos, ya quedamos que en estos puntos de equilibrio hay soluciones constantes.

I: Si.

E5: Entonces los puntos de equilibrio serían ... $n\pi$ ... ... vaya, entonces trazaría los puntos de equilibrio, teniendo así al menos hacia donde tiende la función ... ... vaya, y luego vería la concavidad. Bueno aquí si saque la segunda derivada (ver figura A.44).

I: Si.

E5: Pero ya no concluí con el análisis del signo de la segunda derivada. Bueno, entonces sacaría la concavidad para ver ... ..., por ejemplo, cuando x está entre -2π y $-\pi$, es mayor que cero entonces es creciente la función.

I: Si.

E5: Sería de aquí a acá, en esta parte, podría ser así ... ... seria creciente, verdad.

I: Si.

E5: Y luego de 0 a π también es creciente, podría ser así. Y habría que analizar los puntos de inflexión también para ver si hay cambio de concavidad en algún punto de por acá, o también podría ser, bueno si si, solo esa es la única manera porque esta tiene que tender al punto de equilibrio cero ... y luego ... también podríamos hacer la recta ... fácil ... ... ujum ... ... bien entonces π es un sumidero entonces la función se va acercando, verdad, a π, entonces de π a 2π es decreciente, entonces si se acerca a π sería algo así.

I: Si.

E5: Y de 0 a $-\pi$ también es decreciente, entonces también sería de esta manera. Y también coincide porque $-\pi$ es un sumidero también.

I: Si. ¿Dónde ocurren los puntos de inflexión?

E5: ... en $n\frac{\pi}{2}$, ya los había calculado, para n entero impar.

I: Si, para descartar los puntos de equilibrio.

E5: Cabal, en medio del intervalo estarían.

I: ¿Cómo dibujaría las soluciones que pasan por los puntos $(-2,-\frac{\pi}{4})$ y $(2,\frac{\pi}{4})$?

E5: ... ... uhmm ... ... así

I: ¿Dónde está el punto de inflexión de cada una de las soluciones?

E5: Aquí (señalando el punto de corte de entre las soluciones y el eje vertical).

I: Si.

E5: ... ... así más o menos, se ve bien cercana a esta.

I: Si.

E5: ... ...

I: Bueno, en realidad, en esta (la solución que pasa por el punto $(-2,-\frac{\pi}{4})$) los puntos de inflexión están sobre esta recta, entonces la gráfica tendría que venir así.

E5: ¿Se mueve?

I: Si, ¿por qué cree que se mueven?

E5: Uhmm ... ... yo supuse que los puntos de inflexión estarían sobre el eje vertical.

I: Esto (las raíces de $x''=0$) lo que dice es que los puntos de inflexión de las soluciones aparecen al cortar esta recta.

E5: Ah?, Uhmm ... pero, vaya, si digo que pasa por este punto, por ejemplo, vaya cuando encuentre la solución entonces me va a quedar sumando una C , que estaría moviendo la gráfica.

I: ¿Cómo se movería la gráfica?

E5: Ahaa!, verticalmente.

A manera de resumen en la figura 7.4 se muestra una red sistémica para los resultados de las entrevistas de los estudiantes al resolver el ejercicio número 4.

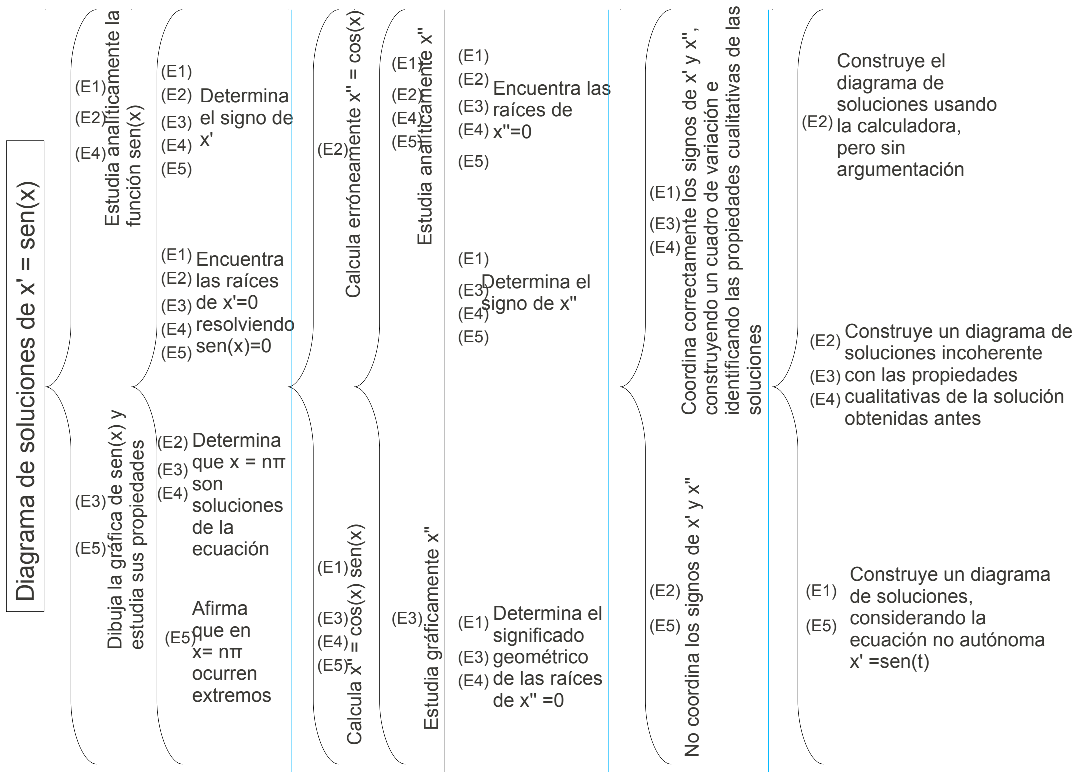


Figura 7.4: Red sistémica para la construcción de soluciones de la ecuación $x' = \sin x$

7.1.5. Ejercicio 5

Enunciado. Sea $f(x)$ la función que se muestra en la figura 7.5.

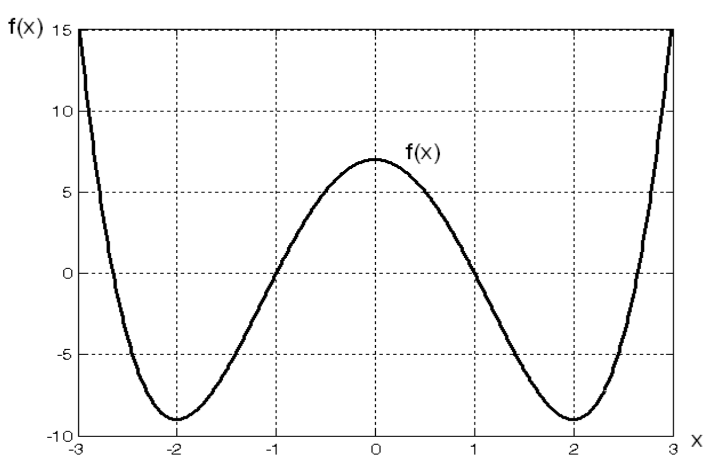


Figura 7.5: Gráfica de $f(x)$

Dibujar el diagrama de soluciones de $x' = f(x)$.

Objetivo. El objetivo de este problema es enriquecer el esquema gráfico-algebraico para dibujar diagramas de soluciones de ecuaciones autónomas movilizando operaciones y relaciones en el registro gráfico no canónicas entre los objetos solución y ecuación diferencial. Se espera que los estudiantes movilicen y hagan una transferencia adecuada de sus conocimientos de cáculo diferencial e integral.

Administración. Este ejercicio se entregó a los estudiantes en el primer parcial. Posteriormente, se realizó a cada uno de los estudiantes una entrevista semi-estructurada para discutir sobre la resolución escrita presentada y explorar su pensamiento. La entrevista fue grabada en audio.

Discusión de resultados. El estudiante **E2** determina la monotonía de las soluciones y las soluciones constantes a partir del signo y raíces de $f(x)$, pero no dice nada acerca de la concavidad y los puntos de inflexión de las soluciones. Pero dibuja un diagrama de soluciones más o menos coherente. Llama la atención que escribe la fórmula $\frac{1}{k}\log(\frac{1-\cos x}{\sin x}) = f(x) = t$. Los estudiantes **E1**, **E3**, **E4** y **E5**, a partir del reconocimiento gráfico del signo y raíces de $f(x)$, determinan, respectivamente, la monotonía y los puntos máximos y mínimos de las soluciones (en lugar de concluir que son soluciones constantes). Luego, ignorando la regla de la cadena, escriben $x'' = f'(x)$ (en lugar de $x'' = f'(x)f(x)$) y a partir del reconocimiento de las pendientes de las rectas tangentes y extremos en la gráfica de $f(x)$, determinan la concavidad y los puntos de inflexión de las soluciones (en vez de los lugares geométricos de los puntos de inflexión). Como resultado dibujan diagramas de soluciones correspondientes a ecuaciones no autónomas, evidenciándose una interferencia y débil transferencia de sus conocimientos de cálculo a otros contextos no rutinarios. En las entrevistas se da la oportunidad de ser conscientes de sus errores:

I: Ahora veamos cómo hizo el último problema del examen $\frac{dx}{dt} = f(x)$, donde $f(x)$ está dada mediante una gráfica.

E4: En este me equivoqué en todo, comenzando con la segunda derivada (ver figuras A.37 y A.38).

I: Hágalo de nuevo.

E4: Vaya, aquí ..., vaya, le llame a estos puntos alfa y beta. Entonces y' es igual a cero si y sólo si x es igual a alfa, -1, 1 y beta ... (identificando el signo de f, construye el cuadro de variación para y').

I: Si.

E4: Y la segunda derivada es la derivada de f' por x', que es f de x. Entonces y" es cero si y sólo si f'(x) es cero o f(x) es cero. Pero f'(x) es cero si x es igual a -2, 0 y 2. Ahora el cuadro de variación para y" sería ... ... (identificando los signos de f(x) y f'(x), obtiene el signo del producto).

I: Si.

E4: Ahora, la monotonía me la da esta, la función original, o sea, entre ... (lee e interpreta el signo de y' en el cuadro de variación). Y la concavidad, me la da esta, la segunda derivada, entonces aquí sera creciente y cóncava hacia abajo ... (continua leyendo e interpretando los signos de y' e y" en los intervalos correspondientes).

I: Si.

E4: Vaya, las soluciones de equilibrio son x igual a alfa, -1, 1 y beta ... bueno, tengo que ser más específico porque antes de -3 y después de 3 no puedo hacer nada porque no se ve ...

I: Supongamos que el comportamiento que se observa se mantiene, es decir, que antes de -3 y después de 3 la gráfica es creciente y cóncava hacia arriba.

E4: Ahaa!, ..., vaya, y los puntos de inflexión son -2, 0 y 2.

I: Si.

E4: ... ... (lee el cuadro de variación y va dibujando)... (después de 3 minutos termina diciendo) los puntos de equilibrio aparecen donde se rompe la forma de la ecuación, pues esta no puede pasar de aquí para acá por sufriría un cambio brusco.

I: Si. ¿Qué ventaja le ve Ud. al cuadro de variación (ver figura A.39)?

E4: Una gran ventaja. Y con estas dos cositas que yo le agrego me sirve bastante para no equivocarme.

I: ¿Dibuje la gráfica de la solución que pasa por ?

E4: Uhmm ... ... (ver figura A.39)

I: Muy bien, paremos aquí.

I: Bien. Veamos el problema del examen número 4 ($x' = f(x)$).

E5: En este me confundí, ehee ... supuse que era una no autónoma. Si es no autónoma, si es así, ¿verdad?

I: Si. La ecuación es autónoma porque la función del lado derecho depende sólo de x.

E5: Ujumm, yo supuse que era no autónoma y allí me confundí.

I: Y ahora, sabiendo que es autónoma, ¿cómo la resolvería?

E5: Bueno, primero podría calcular los puntos de equilibrio que en este caso son fáciles -1 y 1, y aquí podría suponer que es -2.6, una aproximación, ¿verdad?

I: Si.

E5: ... ... estos serían los puntos de equilibrio, podría ser la recta así ... ... y ver el signo de 2.6 en adelante ... entre 2.6 y 1 es negativa la derivada y también de -1 a 2.6 ... y de -1 a 1 es creciente la función. Entonces 1 seria un sumidero ... y en -2.6 en adelante es positiva, y acá es positiva también, entonces esta seria una fuente ... Bien, entonces en 2.6 la solución se aleja del punto de equilibrio, acá. Y es de 2.6 en adelante creciente, entonces ... seria ... ah, podría decir también que en 2, en -2 hay punto de inflexión porque la segunda derivada sería cero. Entonces en -2, bueno también aquí en 2, ... en 2.0 ... ... ujum ... es creciente ...es decreciente ... ujum ... entre -1 y 1 es creciente la función, entonces sería así, tendría un punto de inflexión en cero y pasaría por aquí ... ...

I: ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de inflexión?

E5: Uhmm ... toda la recta esta.

I: Si.

E5: Y de -1 a -2.6 es decreciente la función y hay un punto de inflexión en -2 ... ...

I: ¿Y aquí que pasa?

E5: Ehee, bueno de -2.6 en adelante es creciente, y es un sumidero quiere decir que se acerca aquí, y hay un punto de inflexión en , bueno aquí no hay, ... acá también es creciente ... así.

I: ¿Cómo puede asegurar que se da este tipo de comportamiento?

E5: Bueno, no podría decir nada, lo hago como suposición, si porque no me dice que haya punto de inflexión ni nada, podría ser así también.

I: ¿Calcule la segunda derivada?

E5: ... ... $x'' = f'(x)x' = f'(x)f(x)$ ...

I: ¿Donde aparecen los puntos de inflexión?

E5: Donde f'(x)=0 o f(x)=0 ... ... pero cuando f(x)=0 aparecen los puntos críticos, y entonces los puntos de inflexión aparecen cuando f'(x)=0 y entonces serían cuando x es -2 y 0.

I:Si.

E5: Y de -2.6, de 2.6, perdón, a 3 pongámole, porque no sabemos como es de aquí en adelante.

I: Si, se supone que el comportamiento que se observa se mantiene de aquí en adelante.

E5: Bien, cuando este es, cuando no son negativas sería de -2.6 a -2 y luego de 1 a 2 ... ... aquí voy a sacar la unión de los intervalos.

I: Si.

E5: Sería ... ... acá es positiva ... bueno así quedan los otros intervalos, sólo estos son.

I: ¿Cómo es la concavidad acá?

E5: Sería ... de 1 a 3 ..., de 1 a 3 seria cóncava hacia ...

I: No de 2.6 en adelante

E5: Ah!, de aquí para arriba. Sería cóncava hacia arriba

I: En resumen, ¿qué ha obtenido?

E5: La función seria creciente, cóncava hacia arriba y 2.6 es una fuente... entonces sería así.

I: Bien. Lo que ha hecho esta muy bien: dibujar la línea fase y ver el tipo de punto de equilibrio, pero de cara a construir el diagrama de soluciones es necesario completar la información con la segunda derivada para conocer la concavidad de las soluciones, de acuerdo.

Bien, lo dejamos aquí.

A manera de resumen en la figura 7.6 se muestra una red sistémica para los resultados de las entrevistas de los estudiantes al examinar y/o resolver el ejercicio número 2.

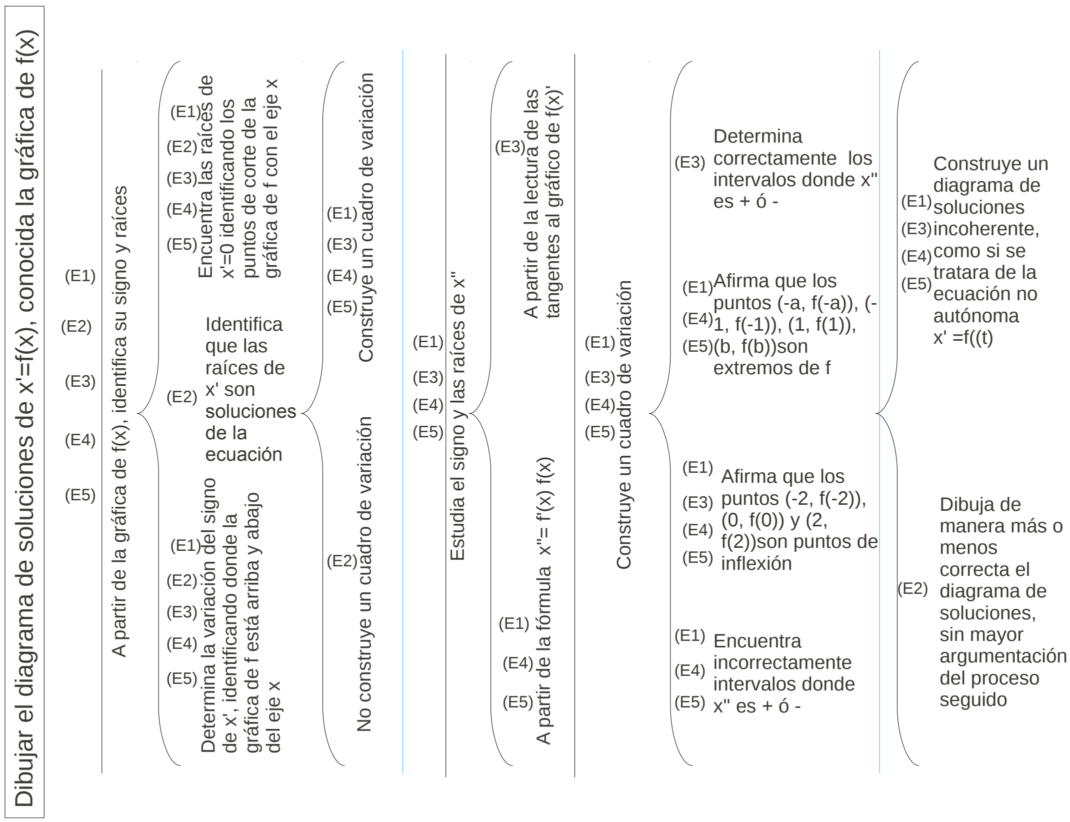


Figura 7.6: Red sistémica para la construcción del diagrama de soluciones de la ecuación $x' = f(x)$, con $f(x)$ dada a través de su gráfica.

7.2. Discusión general

Las producciones de los estudiantes a los problemas propuestos nos han permitido obtener los resultados siguientes.

El problema 1, el cual tiene como objetivos diagnosticar las habilidades previas y desequilibrar los esquemas previos de los estudiantes, permite mostrar la existencia de una tendencia muy fuerte a movilizar de manera espontánea y mecánica el modo de pensamiento algebraico, simbólico y algorítmico, sin utilizar control conceptual alguno sobre los procedimientos y resultados obtenidos. Lo cual puede denominarse como la tradición heredada de un enfoque del cálculo algebraico y algorítmico. Al resolver ecuaciones de la forma $x' = f(t)$ o $x'' = f(t)$, a pesar de que las respuestas obtenidas son correctas, llama la atención lo siguiente: 1) la escritura de expresiones sintacticamente incorrectas al integrar ambos lados de la ecuación, 2) usar de manera mecánica el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, 3) la acción de sumar la constante de integración sólo después que la antiderivada ha sido efectivamente calculada (la cual no es escrita al plantear la antideriva en forma integral) y 4) la fijación del rol de las variables y e x como variables dependiente e independiente, respectivamente, lo cual genera bloqueos constantes al tratar ecuaciones de la forma $x' = f(x)$. Por otra parte, los constantes bloqueos que experimentan los estudiantes al resolver ecuaciones de la forma $x' = f(x)$, son explicados en parte por el rol de variable dependiente que juega la variable x en la ecuación, por la dificultad de conceptualizar una solución como una función que satisface la EDO y la ambiguedad de la letra x en la EDO, la cual representa tanto una función desconocida y una variable en la EDO. Ello conduce a algunos estudiantes a integrar simbólicamente ambos lados de la ecuación. Si se integra con respecto a t, se considera a x como una constante, evidenciándose dificultades para visualizar el lado derecho de la ecuación $f(x(t))$ como una composición de funciones. Si la integración se hace con respecto a la variable x, se ignora la presencia de la variable independiente t en el lado izquierdo de la ecuación y se aplica sin más el hecho de que la derivada y la integración son operaciones inversas una de la otra. Complementariamente, al plantear la tarea de comprobar si las expresiones obtenidas satisfacen la EDO, se observan dificultades para aplicar la regla de la cadena. Asimismo llama la atención que se hace una transferencia mecánica a ecuaciones de la forma $x' = f(x)$ del hecho de que dos antiderivadas de una función $f(t)$ difieren en una constante, lo cual es válido para resolver ecuaciones de la forma $x' = f(t)$. Así, por ejemplo, afirman que $x(t) = e^t + C$ es solución de $x' = x$, pues la función e^t lo es. Finalmente, al intentar resolver las ecuaciones $x' = x + 1$ y $x' = x^2 + 1$, extienden la propiedad de linealidad de la derivada a las soluciones y descomponen cada ecuación, respectivamente, en los siguientes subproblemas:

$$\begin{array}{ccc} x' = x & & x' = x^2 \\ & y & \\ x' = 1 & & x' = 1 \end{array}$$

Luego resuelven cada subecuación por separado y obtienen la solución de la EDO sumando ambas soluciones parciales, evidenciándose otra vez la dificultad de conceptualizar una solución como una función que satisface la EDO. En fin, ello nos indica que las ecuaciones elegidas son adecuadas para llamar la atención de los estudiantes sobre las generalizaciones y transferencias incorrectas y desequilibrar los conocimientos y habilidades de la tradición heredada del cálculo.

El problema 2, cuyo objetivo es movilizar un esquema gráfico-algebraico de las relaciones entre una función y la primera y segunda derivadas, muestra las dificultades para transferir los conocimientos y/o habilidades para construir la gráfica de una función usando las técnicas de la primera y segunda derivadas cuando no se cuenta con una fórmula para dicha función, así como las dificultades para manipular, coordinar y visualizar las implicaciones gráficas de las propiedades necesarias y suficientes para describir global y localmente la gráfica de una función. Si bien es cierto todos los sujetos investigados son capaces de determinar y coordinar analíticamente las propiedades globales y locales de la función, ninguno logra dibujar una gráfica coherente con las condiciones dadas y las propiedades obtenidas. Llaman la atención las dificultades para ubicar los puntos libres $(-4, h(-4))$, $(-2, h(-2))$,$(3, h(3))$, coordinar en el registro gráfico la monotonía y la concavidad, así como la diferenciabilidad y continuidad de la función y la ausencia de tangentes verticales en los esquemas conceptuales de los estudiantes. Para vencer algunas de estas dificultades, el problema 2 puede modificarse pidiendo hacer gráficas de funciones que pasan por determinado punto.

El problema 3, pone en evidencia que la construcción de un esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una EDO de primer orden debe iniciar con la transferencia gradual, en conexión con los conocimientos previos de los estudiantes, de las habilidades gráfico-algebraicos de cálculo a fin de poder dibujar diagramas de soluciones de ecuaciones no autónomas de primer orden de la forma $x' = f(t)$, sin la necesidad de contar con una fórmula para dichas soluciones. Pues, distintamente a lo actuado en el problema 2, no todos los sujetos investigados son capaces de determinar y coordinar analíticamente las propiedades globales y locales de las soluciones; y entre aquéllos que si lo hacen, ninguno logra dibujar una diagrama de soluciones coherente con las propiedades obtenidas, salvo uno de los estudiantes que se decanta por el uso de la calculadora para encontrar la fórmula de la solución general y luego dibujar el diagrama de soluciones. Vale destacar el uso del cuadro de variación como herramienta para resumir y coordinar la monotonía y concavidad de las soluciones, así como el uso del lenguaje gráfico de las funciones para determinar las raíces y variación del signo de la primera y segunda derivadas. Por otra parte, a fin de enriquecer este esquema y favorecer el modo de pensamiento gráfico, se hace necesario plantear tareas similares en las cuales o bien la función $f(t)$ tiene una gráfica inmediata o bien se proporciona la gráfica de $f(t)$ (tal como se ha planteado en los ejercicios 4 y 5). Y después de construir un cuadro de variación para resumir y coordinar las propiedades cualitativas de las gráficas de las soluciones, el proceso de traducción se puede ilustrar, tal como suele hacerse en los cursos de cálculo, dibujando verticalmente los planos tanto del diagrama de soluciones como de la función $f(t)$. También el problema 3 puede modificarse pidiendo hacer gráficas de soluciones que pasan por determinados puntos.

En el problema 4, una vez construido un esquema gráfico-algebraico para ecuaciones de la forma $x' = f(t)$, la tarea siguiente es ampliar dicho esquema para tratar con ecuaciones autónomas, es decir, de la forma $x' = f(x)$. Al igual que lo actuado en el problema 3, algunos estudiantes muestran dificultades para determinar y coordinar analíticamente las propiedades globales y locales de las soluciones, lo cual es básicamente debido a: 1) calcular la derivada del lado derecho de la ecuación sin tener en cuenta que $f(x)$ es una composición de funciones, 2) al rol que la variable x tiene en la ecuación y 3) el olvido de las soluciones constantes. El estudiante E2 usa la calculadora gráfica para dibujar el diagrama de soluciones pedido sin brindar argumentación alguna. Y el estudiante E5, ante la dificultad para coordinar los signos de x' y x'' y cumpliendo con su oficio, dibuja el diagrama de soluciones de la ecuación $x' = \sin(t)$. Otros estudiantes, haciendo uso del cuadro de variación como herramienta de síntesis y coordinación, determinan y coordinan las propiedades cualitativas de las soluciones, pero ninguno logra dibujar las curvas solución pedidas de manera coherente con las propiedades obtenidas, lo cual evidencia dificultades para traducir y coordinar dichas propiedades cualitativas en el registro gráfico. De hecho, un estudiante dá como respuesta el diagrama de soluciones de la ecuación $x' = \sin(t)$, evidenciando que ha trasladado mecánicamente el esquema gráfico-algebraico para el caso $x' = f(t)$ sin tener en cuenta el rol de la variable x en la ecuación autónoma. Por otra parte, para extender la técnica gráfica mencionada al final de la discusión del ejercicio 3 y enriquecer el esquema gráfico-algebraico, después de construir un cuadro de variación para resumir y coordinar las propiedades cualitativas de las gráficas de las soluciones, el proceso de traducción se puede facilitar rotando 90 grados en sentido antihorario el plano de la gráfica de $f(x)$ y, a continuación, a la par dibujar horizontalemente el plano del diagrama de soluciones pedido.

En el problema 5, se pretende enriquecer el esquema gráfico-algebraico en construcción y favorecer el modo de pensamiento gráfico. Todos los sujetos investigados son capaces de determinar la monotonía de las soluciones no constantes a partir de la lectura del signo de $f(x)$. Salvo E2 que recurre a la calculadora hacer el diagrama solicitado, los demás sujetos afirman que en las raices de $f(x)$ ocurren los extremos de las soluciones; también, leyendo las pendientes de las rectas tangentes en la gráfica de $f(x)$, determinan incorrectamente la concavidad y los puntos de inflexión de las soluciones. Ello es debido a calcular x'' derivando del lado derecho de la ecuación sin tener en cuenta que $f(x)$ es una composición de funciones y generalizar incorrectamente las caracterizaciones de puntos máximo, minímo y puntos de inflexión como raíces de la primera y segunda derivadas, respectivamente. En fin, en este caso ninguno de los sujetos logra deducir las propiedades cualitativas relevantes de las soluciones. En la entrevista se da la oportunidad de reflexionar y enmendar los errores cometidos a fin de determinar y coordinar analíticamente las propiedades globales y locales de la función, sin embargo, ninguno logra dibujar una gráfica coherente con las las propiedades obtenidas. Pensamos que este proceso de traducción se pueden facilitar retomando la técnica menciona al final de la discusión del problema 4.

Capítulo 8

Conclusiones y estudios futuros

Siguiendo las preguntas de investigación y los objetivos plasmados en la sección 1, redactamos las conclusiones en cuatro apartados: conclusiones generales, conclusiones metodológicas, conclusiones experimentales y trabajos futuros.

Conclusiones generales

En primer lugar, a pesar de las dificultades metodológicas encontradas en la practica, es importante mencionar que esta experiencia ha resultado sumamente formativa pues nos ha permitido sistematizar, experimentar y fundamentar didácticamente muchas ideas metodológicas innovadoras que sobre la enseñanza y el aprendizaje de las EDO que hemos estado utilizando en la docencia desde hace ya algún tiempo. En efecto, la evidencia recogida permite afirmar que la Descomposición Genética diseñada y las correspondientes secuencias de aprendizaje experimentadas favorecen la articulación de los registros de representacion gráfica y algebraica de las soluciones de una EDO, superando la exclusividad de los procesos de algebrización y algoritmización a que ha estado sometida la enseñanza y el aprendizaje de ésta disciplina durante mucho tiempo.

En segundo lugar, al habernos informado sobre el estado actual de la investigación didáctica de estos tópicos despues de 35 años de reforma curricular, podemos dar cuenta de la vigencia y relevancia que el enfoque cuali-cuantitativo de las EDO tiene hoy día en el curriculo salvadoreño, así como la urgencia de implementarlo. Creemos que la adopcción de la perspectiva cuali-cuantitativa de las EDO permite innovar el sistema didáctico y facilitar los medios cognitivos y culturales para el desarrollo intelectual y la formación científico-técnica de los estudiantes.

En tercer lugar, y sin pretender negar la diversidad de perspectivas teóricas que existen en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, el camino recorrido y los resultados obtenidos nos dan la convicción que la Teoría APOS ofrece unas herramientas teóricas y metodológicas muy concretas, valiosas y adecuadas para la investigación didáctica en la Educación Superior. De hecho, en lo sucesivo esperamos poder continuar con la experimentación de situaciones de enseñanza y aprendizaje para las EDO deducidas de la Descomposición Genética elaborada, que vengan a enriquecer y hagan evolucionar el sistema didáctico salvadoreño y, en particular, los esquemas conceptuales de los estudiantes de tal manera que sean flexibles y robustos. En particular, usaremos esta descomposición genética como guía orientadora al introducir en el currículo de EDO las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).

Conclusiones metodológicas

En el aspecto metodológico, podemos afirmar que la posibilidad de contar con datos escritos (tareas y exámenes) y orales (entrevistas semi-estructuradas grabadas en audio) de los sujetos investigados, nos ha permitido describir detalladamente e indagar en profundidad los mecanismos de construcción de los estudiantes de los conceptos y procesos de la noción de solución de una EDO de primer orden. En particular, el uso de las redes sistémicas ha resultado ser una herramienta muy útil para organizar, presentar, intrepretar y caracterizar las producciones y los esquemas de los estudiantes. Sin embargo, sentimos la necesidad de afinar y profundizar en el uso de la entrevista grabada para registrar cada detalle lo más natural que sea posible. Sentimos que es necesario explicar, persuadir y negociar con los sujetos de investigación su colaboración y la necesidad de que expresen en voz alta lo que piensan durante la resolución de los problemas planteados, pues el silencio prolongado y el hablar en voz baja, lo que además de complicar la transcripción, conduce al investigador a brindar explicaciones adicionales para enrumbar el pensamiento del estudiante. Aunque esto no siempre es del todo negativo. Por ejemplo, al observar las dificultades conceptuales y procedimentales del estudiante **E1** al tratar de resolver la ecuación $x' = x + 1$, despúes de un tiempo prudencial, el investigador propone fijar la atención en la ecuación $x' = t + 1$ y comparar ambas formas y los procedimientos de solución respectivos. Aparentemente el estudiante logra hacer conexión con sus conocimientos previos y discrimar las técnicas de solución. Pero el efecto o sego que ello puede tener en las respuestas y pensamiento de los estudiantes no ha sido tenido en cuenta. Probablemente, las intervenciones del investigador pueden conducir a que los estudiantes solo cumplan con su oficio: dar las respuestas esperadas por el investigador. Creemos que una alternativa para minimizar tales influencias y procurar respuestas lo más naturales y espontáneas como se aposible, es grabar dichas entrevistas en video.

Conclusiones experimentales

La evidencia experimental sugiere que las tareas o los problemas escogidos para validar la Descomposición Genética Inicial han cumplido su función, pues han permitido desequilibrar el modo de pensamiento procedimental, algebraico y algoritmico predominante en los estudiantes, a la vez que provocan la necesidad de complementarlo y reequilibrarlo con otras habilidades, técnicas y herramientas gráficas, es decir, objetos, acciones y procesos de corte cualitativo. En los problemas 1 y 2, los cuales pretende movilizar, diagnosticar y desequilibrar los conocimientos y las habilidades previas de los estudiantes, se muestra la existencia de una tendencia muy fuerte a movilizar de manera espontánea y mecánica el modo de pensamiento algebraico, simbólico y algorítmico, sin utilizar control conceptual alguno sobre los procedimientos y resultados obtenidos. Lo cual bloquea las acciones de los sujetos cuando se rompe el esquema algebraico-algorítmico estándar y ya no se tiene a disposición de manera ostensiva o explícita una parte o elemento del proceso, tal como sucede en el problema 2 en el cual no se cuenta con una fórmula para la función o en los problemas 3, 4 y 5 donde la x es desconocida. Esta tendencia puede denominarse como la *concepción tradicional heredada* de un enfoque del cálculo que privilegia lo algebraico y algorítmico. El problema 2, asumiendo que se ha logrado determinar y resumir, por ejemplo, en un cuadro de variación, las propiedades locales y globales de una función, muestra a la vez las dificultades subyacentes de traducción del registro algebraico al gráfico, así como de coordinación de dichas propiedades cualitativas en el registro gráfico, en un esquema algebraico-algorítmico estándar del cálculo. Y evidentemente, para vencer este obstáculo de origen didáctico en el estudio de las EDO, la tendencia hacia esta *concepción tradicional heredada* debe ser tratada y modificada. Y gradualmente ello es lo que se presigue en los problemas 3, 4 y 5 al evocar para distintas formas de ecuaciones y distintos registros, un esquema del concepto de solución de una EDO que hace referencia y moviliza una red de relaciones gráficas y algebraicas entre las soluciones desconocidas y sus derivadas que permite deducir las propiedades locales y globales de las soluciones (monotonía, concavidad, puntos de inflexión, soluciones de equilibrio, etc.) para poder construir el diagrama de soluciones de la ecuación o, de manera particular, dar argumentos y justificaciones en el registro gráfico a fin dibujar la gráfica de un problema de valor inicial. En fin, estas tareas, además de favorecer la aproximación cuali-cuantitativa y establecer conexiones con los conocimientos y/o habilidades previas del cálculo diferencial e integral de los estudiantes, tienen la bondad de hacer transparentes ciertas particularidades del aprendizaje que no son evidentes a partir de los desarrollos algebraicos y algorítmicos, a saber:

- La tendencia a la fijación de las variables y e x como variables dependiente e independiente, lo cual genera bloqueos constantes y confusiones en el momento de resolver problemas.

- La tendencia a movilizar de manera espontánea y mecánica el modo de pensamiento algebraico y algorítmico, sin utilizar control conceptual alguno a sobre los procedimientos y resultados obtenidos.

- La tendencia a hacer generalizaciones y transferencias incorrectas. Por ejemplo, extender la propiedad de linealidad de la derivada a la suma de las soluciones de dos ecuaciones o una ecuación: Si x_1 y x_2 satisfacen respectivamente las ecuaciones $x_1' = f(x_1)$ y $x_2' = g(x_2)$ entonces $x = x_1 + x_2$ satisface $x' = f(x) + g(x)$; obtener la solución general de una ecuación de la forma $x' = f(x)$ sumando una constante a una solución particular de dicha ecuación; afirmar que las soluciones de la ecuación $x' = e^{-t}\cos(t)$ tienden a cero dado que el lado derecho de esta ecuación así lo hace, etc.

- Las dificultades para manipular, coordinar y visualizar las implicaciones gráficas de las propiedades necesarias y suficientes para describir global y localmente la gráfica de una función, ya sea que se cuente o no con una fórmula para dicha función.

- Las dificultades para transferir los conocimientos y/o habilidades para construir la gráfica de una función usando las técnicas estándar de la primera y segunda derivadas cuando no se cuenta con una fórmula para dicha función.

- La necesidad de retroalimentar el concepto de antiderivada y el Teorema Fundamental del Cálculo.

- La necesidad de contar con un repertorio de ecuaciones sencillas cuyas soluciones no se obtienen por aplicación directa del Teorema Fundamental del Cálculo, que puedan servir de contrajemplos desequilibrantes del esquema algebraico-algorítmico estándar.

- La necesidad de transferir los conocimientos y/o habilidades gráfico-algebraicos del cálculo al dibujo de soluciones de ecuaciones no lineales de primer orden de la forma $x' = f(t)$, cuando $f(t)$ está dada o bien por una fórmula o bien por una gráfica.

- La necesidad de transferir el esquema gráfico-algebraico válido para ecuaciones de la forma $x' = f(t)$ al dibujo tanto de soluciones particulares como del diagrama de soluciones de ecuaciones autónomas de primer orden de la forma $x' = f(x)$, con $f(x)$ dada o bien por una fórmula o bien por una gráfica.

- La necesidad de transferir el esquema gráfico-algebraico válido para ecuaciones de la forma $x' = f(x)$ al dibujo tanto de soluciones particulares como del diagrama de soluciones de ecuaciones no autónomas de primer orden de la forma $x' = f(t,x)$.

Trabajos futuros

A partir de la Descomposición genética inicial del concepto de solución de una ecuación difrencial de primer orden elaborada en este trabajo, y siguiendo las pautas que indica la metodología RUMEC, haremos una iteración más de dicha descomposición genética. El objetivo será seguir experimentando con situaciones de enseñanza y aprendizaje para las EDO, deducidas a partir de dicha descomposición genética, que nos permitan observar y evaluar la consistencia y coherencia entre los constructos cognitivos propuestos en la descomposición y las producciones discursivas de los estudiantes. Y de esta manera aportar datos sobre los efectos en el aprendizaje de una perspectiva de la ensenanza que coordina los aspectos gráficos y algebraicos. En particular, nos interesa documentar cómo opera la transferencia de conocimientos y habilidades del estudiante al usar su esquema gráfico-algebraico, construido en el contexto de las ecuaciones autónomas, en el estudio de las ecuaciones no autónomas de primer orden de la forma $x' = f(t,x)$, así como de las ecuaciones autónomas dependientes de un parámetro. Rasmussen (1996) llama la atención sobre el hecho de que algunos estudiantes generalizan la definición de soluciones de equilibrio para ecuaciones autónomas (las raíces del lado derecho de la ecuación diferencial $x' = f(x)$) al tratar con ecuaciones no autónomas. Por ejemplo, al tratar las ecuaciones $\frac{dx}{dt} = x - t$ y $\frac{dx}{dt} = t + 1$ los estudiantes tienden a afirmar que $x = t$ y $t = -1$ son soluciones de equilibrio, respectivamente. Evidentemente ello requiere un tratamiento adecuado. En esta misma dirección, la descomposición genética se puede extender a la solución sistemas de dos ecuaciones diferenciales de orden uno, estudiando la potencia cognitiva del esquema gráfico-algebraico, construido para las ecuaciones escalares de primer orden, al tratar de relacionar el comportamiento de las soluciones en el espacio tridimensional y el comportamiento de las órbitas en el plano fase. También, considerando que en el desarrollo curricular del curso de EDO, el software MatLab y los applets dfield y pplane de John Polking se han usado de manera marginal para resolver tareas exaula en las que se pide hacer conexiones entre las propiedades cualitativas del diagrama de soluciones que generan dichas herramientas y la información cuantitativa y cualitativa deducida a partir de la EDO, otra dirección de trabajo de interés será profundizar en el uso de estas herramientas de cálculo y estudiar su impacto sobre el pensamiento, conocimientos y habilidades de los estudiantes

Por otra parte, podemos estudiar la robustez de la descomposición genética elaborada experimentando las secuencias didácticas con estudiantes de carreras de ingeniería, biología y economía.

Finalmente, en el aspecto metodológico y para desarrollar nuestra competencia investigativa, se nos plantean dos direcciónes de trabajo: una, registrar las entrevistas y las clases en video, a fin de poder contar con producciones de los estudiantes los más naturales y espontáneas como sea posible. Otra, hacer uso de herramientas informáticas para el análisis de datos cualitativos.

Bibliografía

Arnawa, I.; Kartasasmita, B.; Baskoro, E. y otros (2012). «Applying the APOS theory to improve students ability to prove in elementary abstract algebra». *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, **13(1)**, pp. 133–148.

Arslan, S. (2010a). «Do students really understand what an ordinary differential equation is?» *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **41(7)**, pp. 873–888.

Arslan, S. (2010b). «Traditional instruction of differential equations and conceptual learning». *Teaching Mathematics and its Applications*, **29(2)**, pp. 94–107.

Artigue, M. (1989). «Une recherche dingenierie didactique sur lenseignement des equations differentielles en premier cycle universitarie». *IREM, Université Paris 7, Cahiers du Séminarie de Didactique des mathématiques et de linformatique*, **(107)**, pp. 284–209.

Artigue, M. (1992). «Functions from Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices». En: Dubinsky E. y G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy*, volumen 25 de *MAA notes*. MAA, Washington, DC: MAA.

Artigue, M. (2003). «Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario?» *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, **X(2)**.

Asiala, M.; Brown, A.; DeVries, D.; Dubinsky, E.; Mathews, D. y Thomas, K. (1996). «A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education». *Research in collegiate mathematics education*, **2(3)**, pp. 1–32.

Asiala, M.; Cottrill, J.; Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1997). «The development of students' graphical understanding of the derivative». *The Journal of Mathematical Behavior*, **16(4)**, pp. 399–431.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). «Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático». *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, **X(2)**.

Baker, B.; Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). «A calculus graphing schema». *Journal for Research in Mathematics Education*, pp. 557–578.

Blanchard, P. (1994). «Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint». *The college mathematics journal*, **25(5)**, pp. 372–384.

Blanchard, P.; Devaney, R. y Hall, G. (1997). *Differential Equations*. Prentice-Hall.

Borrelli, R. y Coleman, C. (2004). *Differential Equations: A Modeling Perspective*. John Wiley & Sons, Inc..

Boyce, W.E. y DiPrima, R.C. (2001). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons.

Brodetsky, S. (1919). «The Graphical Treatment of Differential Equations». *The Mathematical Gazette*, **9(142)**, pp. 377–382.

Brodetsky, S. (1920a). «The Graphical Treatment of Differential Equations (Continued)». *The Mathematical Gazette*, **10(144)**, pp. 3–8.

Brodetsky, S. (1920b). «The Graphical Treatment of Differential Equations (Continued)». *The Mathematical Gazette*, **10(145)**, pp. 35–38.

Brodetsky, S. (1920c). «The Graphical Treatment of Differential Equations (Continued)». *The Mathematical Gazette*, **10(146)**, pp. 49–59.

Camacho, M.; Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2009). «Revisiting university students knowledge that involves basic differential equation questions». *PNA*, **3(3)**, pp. 123–133.

Camacho, M.; Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2012a). «An exploration of students' conceptual knowledge built in a first ordinary differential equations course (Part I)». *The Teaching of Mathematics*, **XV(1)**, pp. 1–20.

Camacho, M.; Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2012b). «An exploration of students' conceptual knowledge built in a first ordinary differential equations course (Part II)». *The Teaching of Mathematics*, **XV(2)**, pp. 1–20.

Campillo, P. y Devesa, A. (2000). «Una experiencia en el uso de un asistente matemático». *Revista EMA*, **5(2)**, pp. 170–181.

Chau, O. y Pluvinage, F. (1999). «Comparaison de compétences dans les approches algébrique, qualitative et informatique des équations différentielles ordinaires en premiére année universitaire». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19(2)**, pp. 195–220.

Clark, J.; Cordero, F.; Cottrill, J.; Czarnocha, B.; DeVries, D.; St John, D.; Tolias, G. y Vidakovic, D. (1997). «Constructing a schema: The case of the chain rule?» *The Journal of Mathematical Behavior*, **16(4)**, pp. 345–364.

Cooley, L.; Trigueros, M. y Baker, B. (2007). «Schema thematization: a framework and an example». *Journal for Research in Mathematics Education*, pp. 370–392.

Dana-Picard, T. (2007). «Motivating constraints of a pedagogy-embedded computer algebra system». *International Journal of Science and Mathematics Education*, **5(2)**, pp. 217–235.

Dana-Picard, T. y Kidron, I. (2008). «Exploring the phase space of a system of differential equations: Different mathematical registers». *International Journal of Science and Mathematics Education*, **6(4)**, pp. 695–717.

Dana-Picard, T.; Kidron, I. y Street, H. (2006). «A pedagogy-embedded Computer Algebra System as an instigator to learn more mathematics». En: *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*, pp. 128–135.

de Gyves, N. (2006). «Discursos en los registros algebraico y geométrico de las ecuaciones diferenciales ordinarias». *Educación Matemática*, **18(2)**, pp. 123–148.

Devaney, R. (1995). «Bifurcations, Equilibria, and Phase Lines: Modern Topics in Differential Equations Courses».
http://math.bu.edu/odes/

Dubinsky, E. (1991). «Reflective abstraction in advanced mathematical thinking». En: *Advanced mathematical thinking*, pp. 95–126. Springer.

Dubinsky, E. (1996). «Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria». *Educación Matemática*, **8(3)**, pp. 24–41.

Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). «APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research». *NEW ICMI STUDIES SERIES*, **7**, pp. 275–282.

Duval, R. (2006). «A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics». *Educational studies in mathematics*, **61(1-2)**, pp. 103–131.

Evangelista, A. (2011). «Exploring students spontaneous and scientific concepts in understanding solution to linear single differential equations». En: *14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education,Portland,O*, .

Gollwitzer, H. (1991). «Visualization in Diferential Equations». En: W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, Mathematical Association of America Washington, DC, USA.

Guerra, M. (2002). *Descripción y caracterización de los esquemas conceptuales del concepto de solución de una ecuación diferencial de primer orden en estudiantes que han concluido una asignatura bajo el enfoque tradicional. Un estudio de casos.* Tesina o Proyecto, Universidad Autónoma de Barcelona.

Guerra, M. (2003). «Esquemas del concepto de ecuación diferencial ordinaria en un contexto curricular tradicional, un estudio de casos». *Revista Virtual, Matemáticas Educación e Internet*, **4**, pp. 1–10.

Guerrero, O.; Camacho, M. y Mejía, H. (2010). «Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema». *Enseñanza de las Ciencias*, **28(3)**, p. 341.

Habre, S. (2000). «Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting». *The Journal of Mathematical Behavior*, **18(4)**, pp. 455–472.

Habre, S. (2002). «Writing in a reformed differential equations class». En: *Proceedings of the 2 nd International Conference on the Teaching of Mathematics*, .

Habre, S. (2003). «Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **34(5)**, pp. 651–662.

Habre, S. (2012). «Improving understanding in ordinary differential equations through writing in a dynamical environment». *Teaching Mathematics and its Applications*, **31(3)**, pp. 153–166.

Hernández, A. (1994). «Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, algebraico y gráfico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias». *Cuadernos de Investigación 30*, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.

Hoffman, J.; Johnson, C. y Logg, A. (2004). *Dreams of calculus: perspectives on mathematics education*. Springer.

Hubbard, J.; Habre, S. S y West, B. (2001). «The convergence of an Euler approximation of an initial value problem is not always obvious». *The American Mathematical Monthly*, **108(4)**, pp. 326–335.

Hubbard, J. y West, B. (1991). *Differential Equations: a Dynamical Systems Approach*. Springer Verlag.

Hubbard, J. y West, B. (1995). «Systems of Nonlinear Differential Equations». En: *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*, pp. 131–201. Springer.

Hubbard, J. y West, B. (1997). *Differential equations: a dynamical systems approach*. Springer Verlag.

Hughes, D. (1991). «Visualization and Calculus Reform». En: W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, Mathematical Association of America Washington, DC, USA.

Jorba, J. y Sanmarti, N. (1996). *Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación contínua*. Ministerio de Educación y Cultura. Gobierno de España..

Kallaher, M. (1999). *Revolutions in differential equations: Exploring ODEs with modern technology*. 50. MAA.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. volumen 2. Oxford University Press.

Kwon, O. (2009). «Conceptualizing the realistic mathematics education aproach in the teaching and learning of ordinary differential equations». *Colección Digital Eudoxus*, **(11)**.

Lomen, D. (1999). «Data as an Essential Part of a Course in Differential Equations». *MAA NOTES*, pp. 51–58.

Lomen, D. y Lovelock, D. (2000). *Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. Compañía Editorial Continental.

Meel, D. (2003). «Models and theories of mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren's model of the growth of mathematical understanding and APOS theory». *CBMS Issues in Mathematics Education*, **12**, pp. 132–181.

Moreno, M. (2001). *El profesor universitario de matemáticas. Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos*. Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

Moreno, M y Azcárate, C. (1997). «Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología. Estudio de casos». *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, **15(1)**, pp. 21–34.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). «Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales». *Enseñanza de las Ciencias*, **21(2)**, pp. 265–280.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). «Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory». *Linear Algebra and its Applications*, **432(8)**, pp. 2112–2124.

Pérez, Carlos Fernández; Hernández, Francisco José Vázquez y Montaner, José Manuel Vegas (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias: sistemas dinámicos*. Editorial Paraninfo.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo XXI.

Polking, J.; Boggess, A. y Arnold, D. (2001). *Differential equations*. Prentice Hall.

Rasmussen, C. (1996). «Qualitative problem solving strategies of first order differential equations: the case of Amy». En: *Electronic Proceedings of the Fifth Conference on the Teaching of Mathematics*, .

Rasmussen, C. (2001). «New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties». *The Journal of Mathematical Behavior*, **20(1)**, pp. 55–87.

Rasmussen, C. y Whitehead, K. (2003). «Learning and Teaching Ordinary Differential Equations». *A. Selden & J. Selden (Eds.)*.

Raychaudhuri, D. (2007). «A layer framework to investigate student understanding and application of the existence and uniqueness theorems of differential equations». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **38(3)**, pp. 367–381.

Raychaudhuri, D. (2008). «Dynamics of a definition: a framework to analyse student construction of the concept of solution to a differential equation». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **39(2)**, pp. 161–177.

Ricardo, H. (2003). *A Modern Introduction to Differential Equations*. Houghton Mifflin Company.

Riviere, A. (1987). *El sujeto de la Psicología Cognitiva*. Editorial Alianza: Madrid.

Rowland, D. (2006). «Students' difficulties with units in differential equations in modelling contexts». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **37(5)**, pp. 553–558.

Rowland, D.R. y Jovanoski, Z. (2004). «Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **35(4)**, pp. 503–516.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2004). «De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo».

Sánchez, D. (2002). *Ordinary differential equations: a brief eclectic tour*. MAA.

Shannon, K. (1994). «Using spreadsheets and DERIVE to teach differential equations». En: *Electronic Proceedings of the Seventh Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics: Orlando. http://archives. math. utk. edu/ICTCM/EP-7. html*, .

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. London: Penguin Books.

Trigueros, M. (2005). «La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior». *Educación Matemática*, **17(1)**, pp. 5–31.

Weller, K.; Clark, J.; Dubinsky, E.; Loch, S.; McDonald, M. y Merkovsky, R. (2003). «Student performance and attitudes in courses based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle». *Research in collegiate mathematics education*, **V**, pp. 97–131.

Apéndice A

Entrevistas

A.1. Estudiante 1

I: Bien, en la primera guía de ejercicios se propusieron ciertas tareas en las que se pedía encontrar, por simple inspección u otra forma, una función a partir de una relación conocida entre la función y la primera o la segunda derivada. Lo que quiero pedirle es que Ud. me cuente en voz alta lo que hizo para resolver cada ejercicio. De acuerdo! Entonces comenzemos con el ejercicio número 10: $x'' = \sin t$

E1: Como aquí nos dan la segunda derivada, ¿verdad?, y la segunda derivada nos dan que es sen(t) ... Tendremos una variable independiente y una variable dependiente ... Bueno con lo que nosotros hemos visto ... ...

I: ¿Cuál es la variable dependiente?

E1: La variable dependiente es t

I: ¿y la variable independiente?

E1: La variable independiente es la variable x.

I: Si.

E1: Bien, por lo que hemos visto anteriormente en cálculo, si nos dan la derivada, entonces aplicamos su inversa, por decirlo así, integramos la derivada de x con respecto a t. Aquí tendríamos que integrar dos veces para poder encontrar la función que al derivarla dos veces nos de sen(t). Entonces para la primera integral del sen(t) con respecto a t, nos daría menos cos(t) más una constante. Ahora, nuevamente esta función la volvemos a integrar siempre con respecto a t y tendríamos la integral de menos cos(t) más C1, más una constante verdad, para obtener luego la función que al derivarla nos de luego sen(t). Aquí en este caso nosotros tendríamos que integrar nuevamente acá $(-\cos t + C1)$ y obtendríamos menos el sen(t) más la constante anterior que teníamos que es la constante C1 y nuevamente más una nueva constante que sería C2. Utilizamos una misma constante para ambas y obtendríamos sen(t) más una constante C en general.

I: ¿Cuánto da en la segunda integración?

E1: La integral de menos cos t, que sería entonces menos sen t

I: ¿Qué pasó con la integral de C1?

E1: Es una constante. Que es como cuando ... bueno, tendría que quedar un t acá $(C1t)$, verdad. Esta es la cosa, porque es como cuando tenemos algo más una constante entonces al integrar tiene que quedar una t para que nos de una constante nada más.

I: Por lo tanto, la solución puede escribirla como $x(t) = -\sin(t) + C_1 t + C_2$,donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

E1: Ahja.

I: Verifique que esta familia de funciones es una solución.

E1: Uhmm ... ...

I: ¿Qué tiene que hacer para verificar que esta función cumple con la relación?

E1: Derivar ... derivar ... lo escribo o así, quiere que lo escriba o así nada más.

I: Si, derive y escriba la derivada.

E1: Entonces la primera ... bueno, siempre la escribo así, no se, entonces tendríamos que derivar aquí $(x(t))$. La derivada del seno seria menos coseno de t, por el signo menos, quedaría cos t más C_1, porque ésta, la derivada de C_2 con respecto de t ya se elimina.

I: Si.

E1: Luego derivamos nuevamente. Y sería la segunda derivada de t. Ahora la derivada del coseno que sería seno nada más y como aquí verdad que se deriva el ángulo por ... que seria 1 nada más, y aquí ya se anularía la constante. Y entonces de esta manera, podríamos aplicar lo inverso de lo que habíamos hecho acá, encontramos ... la derivada del seno.

I: A ver, ¿cuál es la variable independiente en esta expresión $(x'' = \sin t)$?

E1: x

I: x es la variable independiente. Y ¿la variable dependiente?

E1: t

I: Bueno. Veamos el ejercicio 13: . Explíqueme que hizo en el 13.

E1: La primera derivada es igual a x más 1 ($x' = x + 1$). Como siempre estaríamos trabajando ... la variable, ¿aquí no?, yo siempre la tomé así que la variable dependiente es t y la variable independiente es x. Esta fue la duda que tuve yo al inicio, pero yo así lo trabajé. Entonces integre con respecto a t.

I: A ver hágalo.

E1: Bien, lo voy hacer. Entonces tendríamos la integral de $\frac{dx}{dt}$, y esto me quedaría entonces una función que al ... ... aunque aquí además ... Bueno, integramos, y si no tendríamos que estudiar los criterios de la derivada. Bueno ... yo lo hice ... integrando.

I: ¿Cómo integró?

E1: Bueno, apliqué la integral. Bueno, como siempre, ¿verdad?, la variable, sacando primero la variable independiente y la dependiente, entonces la derivada nos quedaría $\frac{dt}{dx}$ (ver figura A.3), la variable independiente y la variable dependiente, independiente y dependiente.

I: Cuando Ud. tiene esta notación $x = x(t)$, x como función de t. ¿Quién es la variable independiente?

E1: ¿La independiente?

I: Si.

E1: La variable independiente es t

I: ¿Y cuál es la variable dependiente?

E1: La variable dependiente es x.

I: Y cuando Ud. tiene esta notación $\frac{dx}{dt}$, la derivada de x con respecto de t, ¿cuál es la variable independiente? ¿y cuál esla variable dependiente?

E1: La variable independiente es t y la dependiente es x.

I: Entonces, que está diciendo la ecuación $x' = x + 1$.

E1: Bien, como nos dan x' es igual a x más 1 y x', ¿verdad?, es igual a $\frac{dx}{dt}$, entonces aplicamos la integral a ambos lados. Entonces tendríamos x de t es igual a la integral de x más 1 por el diferencial de t ($x(t) = \int (x+1)\, dt$, ver figuras A.3 y A.5); al integrar tendríamos que, bueno, si lo vemos como proceso de integral, tendríamos que buscar una función cuya derivada sea x más 1. Entonces aquí seria entonces un medio de x cuadrado más x más una constante C (ver figura A.5). Entonces, ahora si aplicamos la derivada, al derivar podemos observar acá que obtenemos la función que teníamos.

I: Entonces Ud. diría que la solución buscada es $x(t) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$**.**

E1: Uhmm ... ... creo que me equivoqué, porque estoy tomando como si x fuera, o sea, estoy tomando al revés las funciones porque ehee, perdón, aquí comprobando (risas) se me fue la ... quien era la variable dependiente y quién es la variable independiente. Entonces vuelvo a integrar, porque estamos integrando respecto a t, entonces esto seria entonces, como estamos trabajando con una constante, x t más t más una constante, entonces esta sería mi x de t igual a xt más t más una constante (ver figura A.5).

I: Compruebe que $x(t) = xt + t + C$ **satisface la relación.**

E1: Derivamos ... ... y obtenemos la la función que teníamos.

I: Derive, pero recuerde que x depende de t y, por tanto, la respuesta obtenida $x(t) = xt + t + C$**. es una ecuación implícita, es decir, que define a x como función de t de manera implícita, porque** x **no está despejada en función de t. Observe que aquí aparece el producto x por t y x es función de t. A ver, verifique que ella satisface la ecuación.**

E1: Bueno, aquí tendríamos la derivada de x, estaríamos derivando con respecto a t ... como x es en función de t ... ehee, derivamos con respecto a t, quedaría x más 1 porque es ... y la constante respecto a t al derivarla me quedaría x más 1 ... uhmm

I: Observe que x depende de t y, por lo tanto, este (xt) **es un producto de dos funciones que dependen de t.**

E1: Ahja!

I: O sea que lo que tiene aquí es un producto.

E1: Va, entonces derivamos aplicando la regla del producto. Lo voy a escribir otra vez. Sería ... nada más como ... sería la regla ... la puedo escribir

I: Si.

E1: La derivada del producto, siempre se me olvida quien va primero, seria la derivada de la primera por la segunda más la derivada de la segunda por la primera. Entonces aplicamos, la primera derivada en este caso sería x y la segunda t, la derivada de la primera que en este caso sería 1 por t más la derivada de ...

I: ¿Con respecto a que variable está derivando?

E1: Uhmm ...

I: ¿Por qué la derivada de x le dió 1?

E1:Uhmm ... estoy derivando con respecto a t.

I:Ujum!

E1: Ehee ... ¿por respetar el orden de las variables?

I: Derive como Ud. cree que debe ser ... la pregunta es por qué puso 1 ahí.

E1: Lo tendría que escribir como, como la función, como x igual a x de t, trabajando de esta manera

I: No, no lo sé. Ud escribió 1 ahí. Yo lo que le pregunto es de dónde saco el 1.

E1: Vaya como es la ... vaya ... bueno ... es que lo quería hacer ... la derivada de la primera función con respecto a t nos daría cero porque la primera función estaría acá ... entonces ...

I: Pero, ¿por qué ahora la derivada da cero?

E1: Es que como es cero por la derivada de x con respecto a t, x es una constante nada más.

I: x es una función de t, x es la que ha encontrado aquí, verdad, y x es una función de t.

E1: Uhmm ... uhmm ... no ...

I: Si, esta x que aparece aquí a este lado, a lado izquierdo, es la misma que aparece aquí al lado derecho, que es una función de t.

E1: Ujum!... tendría entonces que ... por eso le preguntaba que si utilizaba esta x.

I: Si, si, en efecto, la x que aparece aquí (en el lado izquierdo) es la misma x que aparece acá (en el lado derecho).

E1: x de t

I: Ujum ..., o sea, cuando dice que la derivada es cero está diciendo que no depende de t, pero depende de t.

E1:Ujum ... ...

I: A ver, antes de continuar hagamos este otro: x prima igual a t más 1 ($x' = t + 1$), donde siempre x es función de t. ¿Cómo lo hace?

E1: Sería ... y si derivo ... aquí quedaría ... es que el problema que tengo ahorita es la escritura. No sé si tendría que escribir dx/dt y escribir con respecto a quien estoy derivando ...

I: Si, aquí se nota que está derivando con respecto a t, x' también se denota como

dx/dt.

E1: ... más cero, así cuando escribimos esto nos queda, si paso al mismo me quedaría dx/dt igual a ... derivamos con respecto a t me quedaría 1

I: Dígame, ¿qué hizo?

E1: Como aplicar la regla de la derivada.

I: ¿Qué derivó?

E1: Derive esto ($x' = t + 1$).

I: Observe que con eso obtiene la segunda derivada, porque está ya es la primera derivada y al derivarla, se obtiene la segunda derivada.

E1: O sea que, tendríamos que encontrar x' dt ... sería la integral de x' dt y sería igual a la integral de t más 1 por el diferencial dt. Ahora ... al integrar directamente obtenemos un medio de t al cuadrado más una constante.

I: Compruebe que esa es una solución.

E1:Es igual a la derivada con respecto a x, perdón, la derivada de x con respecto de t, que sería la variable independiente x y la variable dependiente t, estaríamos derivando con respecto a t, de toda la expresión un medio de t al cuadrado más t más una constante C. Ahora ... En todo caso sería dx/dt igual a x' ... Derivamos adentro ... aplicamos la regla de una vez ... esta sería ... y llegamos entonces a la relación de la que partimos (ver figura A.5).

I: ¿Qué diferencia hay entre las expresiones $x' = x + 1$ y $x' = t + 1$?

E1: Que aquí nada más aparece la variable independiente y aquí también tenemos a x en función de t.

I: Fíjese que en este caso ($x' = t + 1$) le funciona este procedimiento (integrar directamente).

E1: Ahja!

I: ¿Qué utilizó para decir que la integral de x prima dt es igual a x ($\int x' \, dt = x$)?

E1: Ahja, porque aquí tenemos la función, yo siento que aquí lo tengo un poquito más claro porque aquí tengo, bien claro, por decirlo así, que la variable dependientes es x y la independiente es t, y a mi me confunde cuando no nos aparece la variable independiente, entonces como escribir esta función de t ... y no me recuerdo muy bien como va.

I: Cuando Ud. integra aquí ($x' = t + 1$) que es lo que está utilizando. ¿Por qué puede

integrar de esta manera? ¿Qué resultados está utilizando para hacer estas integraciones?

E1: La ley de ... la derivada, la ley de las antiderivadas. Y aplicando las leyes ya está porque es una ecuación, por decirlo así, en la que no hay que hacer cambio ni nada, de una vez aplicando las leyes.

I: Vaya, veamos el 14: $x' = x^2$.

E1: ... Y aquí nuevamente en el catorce tendríamos la derivada, estaríamos hablando, verdad, de la derivada de x con respecto a t igual a x cuadrado; no nos aparece la variable independiente, sólo la dependiente, entonces tendríamos que buscar una función que ...

I: ¿Cuál es la variable dependiente?

E1: ¿La dependiente? t y la, lo dije al revés, ¿verdad?, ya dije que sólo nos aparecía la variable dependiente.

I: Si.

E1: La dependiente sería t y la independiente sería x ... entonces necesitamos encontrar la función que al derivarla ...

I: Recuerde que Ud. puede encontrar una función ya sea adivinando o integrando.

E1:Ujum! ... aquí tendríamos la función x de t igual a la integral, al integrar esto, que nos quedaría entonces ... ... x cuadrado t más una constante C (ver figura A.6).

I: Derive esta expresión ($x(t) = x^2t + C$) para ver si obtiene la relación $x' = x^2$.

E1: ... ... aquí creo que no me va a dar, ya me di cuenta ... derivamos x cuadrado t más una constante ... al menos que yo me equivque, pero esto seria x cuadrado nada más.

I: Recuerde que x es función de t y, por lo tanto, lo que tiene aquí es un producto de funciones de t.

E1: Estaría otra vez en el mismo caso. Por eso le digo, me quedaría x cuadrado por dx ... ...

I: ¿Que le queda al aplicar la regla del producto?

E1: Ujum!

I: La derivada de t con respecto de t es 1. Ahora, ¿cuánto es la derivada de x cuadrado con respecto a t?

E1: Cero.

I: ¿Será cero? ¿Cuánto es la derivada de x cuadrado con respecto a t si x depende de

t? ¿Cómo se calcula esta derivada, la derivada de x cuadrado con respecto a t?

E1: ... ...

I: ¿Cómo se calcula la derivada de x cuadrado con respecto a t? ¿Qué nos dice la regla de la cadena?

E1: ... que hay derivar con ... hay que aplicar a la función la derivada que nos dan a la función completa ... ...

I: Trate de hallar una función que cumpla que ($x' = x^2$) adivinado.

E1: ... ...

I: Bien, dejémoslo ahí. Veamos el número 15: $x' = x^2 + 1$. Y antes de intentar algún procedimiento, trate de usar lo que Ud. conoce de cálculo, es decir, ¿qué función conoce Ud. que tenga la propiedad de que su derivada es igual a x cuadrado más 1?

E1: ... ... tangente

I: ¿Cuál es la derivada de la tangente?

E1: ... ...

I: Escriba x de t igual a tangente de t y sustituya la tangente para ver si verifica la propiedad en cuestión. ¿Cuál es la derivada de la tangente?

E1: ... secante por tangente.

I: Ahora calcule x cuadrado más 1.

E1: ... ...

I: Bien, después vamos a volver sobre este. Ahora, veamos el número 16: $x' = 2tx$, Tenemos que x' es igual 2 t por x ¿Cómo encontró está solución?

E1: Igual, aquí aplicando la regla del producto ... necesitamos una función que al derivarla nos de esto ...

I: Si, siga.

E1: ... ...

I: Una pregunta, al ver todo lo que ha hecho, ¿por qué en todas las integrales que ha calculado siempre le ha sumado una constante?

E1: ... ahaa ... ¿cuando integramos?

I: Si, ¿por qué?

E1: ... porque cuando ponemos la integración o los límites de integración siempre como que hace falta la constante para poder verificar, más que todo se utiliza cuando tenemos limites de integración para poder evaluar la integral ...

I: Muy bien, tomemos un descanso de unos 15 minutos.

I: Ahora revisemos lo que ha hecho en el ejercicio No. 2, en el que se pide la construcción de la gráfica de $h(x)$. Cuénteme en voz alta lo que ha hecho. Una vez haya terminado le haré algunas preguntas.

E1: ... primero lo voy a graficar y después le voy a decir lo que he hecho.

I: Creo que es mejor que cuando vaya graficando, me vaya contando lo que ha hecho.

E1: No, primero la gráfico y después le digo.

I: Vaya, pues, empecemos.

E1: Lo primero, por lo que decía la primera condición que cumplía la función, es que la función era continua en todo $\mathbb{R}$, ¿verdad? Lo segundo era que la función en cero llegaba a 2, o sea, siempre tiene que pasar por este punto. Después la primera derivada evaluada en -2 nos iba a dar un mínimo o un máximo. En este caso sería un máximo. Y también en 3 iba a dar otro así. En la primera derivada nos daba que en el intervalo de -4 a 2 iba haber como una concavidad; aquí va haber un cambio de concavidad de -4 a 2, y nos quedaría así; también siempre la primera derivada nos decía que para valores menores que -4 iban a ser cóncavos hacia abajo y menores que 3 también serían cóncavos hacia abajo y de -4. Evaluando ya en la segunda derivada, podemos ver que de -4 siguen siendo cóncavas hacia abajo, y que de -4 a -2 es cóncava hacia arriba, y que -2 a 6 iba ser hacia abajo y para los de 0 a 5 aquí va a seguir siendo cóncava hacia abajo, de 5 a más infinito iba a ser cóncava hacia arriba ...

I: Siga.

E1: ... vaya, de 5 a más infinito iba a ser cóncava hacia arriba. De allí como nos da que el límite de h(x) cuando x tiende a más infinito es -2, esto quiere decir que hay una asíntota; y el límite cuando x va a menos infinito de h(x) tiende al infinito, y allí si no estoy segura que hacer ...

I: ¿Qué tipo de asíntota es la que está implicada en la condición h?

E1: Es una asíntota horizontal.

I: ¿Y la condición g) como se refleja en el gráfico (ver figura A.7)?

E1: Que crece, que no vuelve a bajar

I: ¿Cuál es el dominio de la función?

E1: Los reales.

I: ¿Dónde es continua la función?

E1: En los reales.

I: ¿Dónde es diferenciable la función?

E1: ...

I: ¿En que partes de su dominio la función es diferenciable, es decir, la derivada existe?

E1: Lo que pasa es que en -4 no existiría la derivada porque no es, hay un nombre para eso, no es suave, tiene un cambio brusco, por eso no existiría acá. Entonces sería derivable en $\mathbb{R}$ menos el -4.

I: Veamos, ¿de -2 a 0 como es la función? ¿Cómo se refleja en la gráfica la condición f), es decir, que de -2 a 0 la segunda derivada es positiva?

E1: ... ...

I: ¿Es coherente lo que dice la gráfica con lo que dice la condición f)?

E1: Tendría que empezar más arriba, ¿verdad?, ... viene como una cúbica ... ...

I: Y está condición que dice que el límite de h prima de x cuando x tiende a cero es infinito, ¿cómo está reflejada en el gráfico?

E1: ... ...

I: ¿Qué quiere decir esa condición?

E1: ... ...

I: ¿Qué significa geométricamente esa condición?

E1:... ... ...

I: ¿Cómo se interpreta geométricamente la derivada?

E1: ... ...

I: La derivada se interpreta como la pendiente de la recta tangente y la condición entonces lo que está indicando es que cerca de cero las tangentes se vuelven verticales, es decir, que está pasando algo parecido a lo que sucede cuando volteamos la cúbica.

E1: Ujum! ...

I: Veamos, que más, ¿cómo se refleja en el gráfico la condición de que el límite cuando x tiende a más infinito de h de x es -2? ¿qué significa geométricamente está condición?

E1: ... ...

I: ¿Cuáles son los extremos de la función?

E1: ... ...

I: ¿Cuáles son los máximos y los mínimos de la función?

E1:... ... ...

I: ¿Cuáles son los puntos de inflexión de la función?

E1:... ... ...

I: Bueno, lo dejamos allí, revise bien lo que ha hecho y lo vemos después. I: Veamos el ejercicio número 3, que fue punto del examen (dibujar el diagrama de soluciones de $x' = e^{-t}\cos t$). ¿Cuenteme en voz alta lo que hizo?

E1: ¿Este es el ejercicio?

I: Si, $x' = e^{-t}\cos t$.

E1: A pues si. Entonces lo primero que encuentro son los puntos máximos o mínimos, igualando a cero ($e^{-t}\cos t = 0$). Entonces, esto (e^{-t}) nunca va a ser cero, pero esto ($\cos t$) si.

I: Si.

E1: Entonces veo donde el cost es igual a cero. Y esto es para los $t = \dfrac{n\pi}{2}$ con n impar, son puntos máximos o mínimos.

I: Si.

E1: Luego veo donde la derivada es mayor o menor que cero. El signo me lo va a dar el $\cos t$, ¿verdad?, porque ésta ($e^{-t}\cos t$) siempre es positiva.

I: Si.

E1: Entonces, ehee ... analizando la gráfica del coseno veo que si t pertenece a estos subintervalos va a ser positiva, ¿verdad?, la derivada. Y si pertenece a estos va a ser negativa.

I: Si.

E1: Luego saco la segunda derivada, que aquí se complica un poco más porque salen más términos.

I: Si.

E1: Entonces factorando e^{-t}, me queda de esta manera $e^{-t}(\cos t - \sin t) = 0$. Y, igual, nuevamente esta (e^{-t}) nunca va a ser cero, pero estas dos si ($(\cos t - \sin t) = 0$).

I: Si.

E1: Entonces esto se cumple cuando el seno t es igual a -coseno t ($\sin t = -\cos t$), o bien, la tangente t es -1 ($\tan t = -1$), lo que sería en $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{2}$ ... todos esos valores.

I:Si.

E1: Luego sólo veo hacia donde va a ser cóncava hacia arriba y donde va a ser cóncava hacia abajo. Y para eso solo veo donde la gráfica de la tangente es mayor que -1 y menor que -1

I: Si.

E1: Uhmm ... ... sale más fácil ver donde la gráfica del seno es mayor que la gráfica del coseno, y al revés también. Entonces ... ...

I: Dibuje la gráfica.

E1: Uhmm ... ... ahora para graficar si tengo problemas, ya de allí, ya si no ... ... tal vez con calculadora quizá pueda hacerme un poco más la idea o no sé; pero así, nomás, si no ... (ver figura A.8).

I: Veamos, ¿qué significan estas marcas de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$?

E1: Ummm ... que aquí hay concavidad hacia abajo y aquí hacia arriba.

I: ¿Qué sucede de $-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$?

E1: Ujum, de $-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$ ... ...

I: Dibuje esa parte de la gráfica ($-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$).

E1: ... ... de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ es decreciente ... luego aquí de $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{4}$ es cóncava hacia arriba... ..., si ¿verdad?, sería así porque de $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, desde aquí hasta aquí, hasta este punto, va a ser decreciente... luego de $-\frac{\pi}{2}$ hasta $-\frac{\pi}{4}$ sería ... de $-\frac{\pi}{2}$ hasta $-\frac{\pi}{4}$, aquí sería cóncava hacia abajo.

I: Si.

E1: Por aquí cambia de concavidad, entonces, es hacia arriba ... ahja!, de $-\frac{\pi}{4}$ hasta $\frac{\pi}{2}$. Ahora, cambia de concavidad, así ¿verdad?, por aquí así ..., ¿verdad?

I: Si.

E1: Luego aquí de $-\frac{\pi}{2}$ ... a $\frac{3\pi}{2}$ sería ... ... ahorita si no ...

I: Se lo dejo para que lo siga intentando. La dificultad que tiene es en la coordinación de los signos de las derivadas. Le sugiero que construya un cuadro de variación. Veamos

ahora el número 3 del examen ($x' = \sin x$). ¿Explíqueme qué hizo?

E1: Vaya, tengo que la derivada de la x es el sen x y está en función de ella misma.

I: Si.

E1: Entonces la derivada es igual a cero cuando esto ($\sin x$) es igual a cero, o sea, para $x = n\pi$, por el seno, ¿verdad?, ... (ver figura A.9)

I: Si.

E1: Lo que no pensé era ver si estas ($x = n\pi$) eran soluciones de la ecuación, ¿verdad? Pero vemos que si, porque si derivamos acá tenemos que x' es igual a cero; luego si sustituimos acá da cero, entonces si son soluciones.

I: Si.

E1: Luego para analizar si es mayor que cero o menor que cero sólo se analiza la gráfica del sen x.

I: Si.

E1: Para la segunda derivada de la misma manera.

I: Si.

E1: Para sacar la segunda derivada, tengo que la derivada es ..., y por la regla de la cadena, ¿verdad?, la derivada del seno por la derivada del coseno.

I: ¿Con respecto a que variable está derivando?

E1: Con respecto a t ... y me quedaría de esta manera, ¿verdad?

I: Si.

E1: Y luego analizo el signo de cada una. Cuando sean del mismo signo va a ser mayor que cero. Cuando sean de signo contrario va a ser menor que cero.

I: Si.

E1: Entonces ... ... el cuadro de variación me queda así.

I: Si.

E1: Luego para la gráfica ... allí si esta el problema ... ...

I: Aquí Ud. se ayuda del cuadro de variación. Sin embargo, en el ejercicio anterior no lo consideró.

E1: Es que me confundí todo.

I: Haga la gráfica usando el cuadro de variación.

E1: Prácticamente es lo mismo que he estado haciendo, pero hay que imaginarse ...

I: Si.

E1: ... si x pertenece de 0 a π, desde aquí hasta acá, es creciente, aunque no sabemos como. Luego de aquí, de 0 a $\frac{\pi}{2}$, hasta aquí, desde acá hasta acá, es creciente. No, perdón, es cóncava hacia arriba ... Como sabemos que es decreciente ... ah!, no de 0 a π es creciente.

I: Si.

E1: Ahja!, luego de 0 a $\frac{\pi}{2}$ es cóncava hacia arriba.

I: Si.

E1: Tendría que ser algo así ... luego cambia de concavidad y siempre es creciente.

I: Si.

E1: ... ... luego las demás serían de la misma manera.

I: Si.

E1: Por ejemplo, de 0 a $-\pi$, podríamos verlas más o menos de esta manera ...

I: Dibújelas.

E1: Bien. De π a 2π, desde aquí hasta aquí, es decreciente, viene aquí. Luego de ... sería de π a $\frac{\pi}{2}$, bueno de 0 a $\frac{\pi}{2}$, luego de $\frac{\pi}{2}$ a π. De $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$, hasta aquí, sería cóncava hacia abajo.

I: Si.

E1: De π a $\frac{3\pi}{2}$, ahja!, es cóncava hacia abajo. Esta parte, es cóncava hacia abajo.

I: Si.

E1: Y aquí de π a 2π, es decreciente ... es como así.

I: ¿Cómo es la gráfica de π a $\frac{3\pi}{2}$? ¿Cómo es la concavidad?

E1: Ahaa, es hacia abajo, pero la dibuje al revés.

I: ¿Qué problema hay?

E1: Yo creo que hay un problema aquí. De 0 a $\frac{\pi}{2}$ es cóncava hacia arriba. De $\frac{3\pi}{2}$ a $\frac{5\pi}{2}$, bueno, de $\frac{\pi}{2}$ a π es cóncava hacia abajo. De π a $\frac{3\pi}{2}$ ... es cóncava hacia abajo también.

I: Si.

E1: ... no, aquí en el cuadro es que lo hice mal (ver figura A.9).

I: Si.

E1: En el cuadro es que hay un error. Es en $\frac{\pi}{4}$ que van los cambios, no en $\frac{\pi}{2}$.

I: Haga nuevamente el cuadro de variación, considerando que nada más tiene la gráfica de sen x.

E1:... ... ... es igual a sen x.

I: Si, pero lo que tiene nada más es la gráfica.

E1: Uhmm ... suponiendo que sólo me da el gráfico (ver figura A.10).

I: Si. ¿Cómo es el diagrama de soluciones?

E1: Esto es g(x) ($g(x) = \sin x$). Entonces es igual a cero donde g(x) es igual a cero. Y esto es igual a cero si x es igual a estos valores, ¿verdad?, serían -3π, -2π, $-\pi$, 0, π, 2π, 3π, ¿verdad?, allí es igual a cero.

I: Si.

E1: ... luego ... la derivada es mayor que cero si x pertenece a ..., puedo hacer los intervalos, ¿va?, de -3π a -2π, etc. Igual si la derivada es menor que cero. Aquí sería de -3π a -2π es negativa y sería decreciente ... así obtengo donde la derivada es positiva y negativa.

I: Si.

E1: Luego para saber la segunda derivada, sería g'(x) por x', que es igual a g'(x) por g(x) ($x'' = g'(x)x' = g'(x)g(x)$). Entonces aquí lo que hay que hacer es analizar otra vez el signo. Y como g'(x) es la pendiente de la recta tangente, hay que ver su signo y luego multiplicarlo por el signo de g(x).

I: Si.

E1: Pero entonces, desde aquí en adelante, desde -3π hasta -2π, esto es negativo ... bueno aquí sería $-\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{3\pi}{2}$ ... ¿así verdad? Sería mayor que cero aquí ... ... y sería negativa, la segunda derivada es negativa y la primera es positiva. De $-\frac{3\pi}{2}$ a $-\pi$ ya sería negativa, la segunda derivada es positiva y la primera es negativa ... ... De 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, la primera derivada y la segunda derivada son negativas... De $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, ya serían positiva y negativa ... ... Luego la gráfica sería así ... ... (ver figura A.11)

I: ¿Cómo le resulta más fácil hacer el análisis del signo de las derivadas?

E1: Es mas fácil aquí (señalando la forma algebraica). Esto (el análisis gráfico) es difícil, porque hay que ir viendo donde la pendiente va hacia abajo, va hacia arriba y dónde la gráfica está arriba y está abajo.

I: ¿Cómo determina el signo de la segunda derivada?

E1: ... ...

I: ¿Cuál es el signo de la segunda derivada de $-\frac{\pi}{2}$ **a** $-\frac{3\pi}{2}$**?**

E1: Negativo.

I: Bien, paremos aquí.

1. En cada uno de los siguientes literales, encuentre al menos una funcion $X(t)$ cuya primera derivada $X'(t)$ o segunda derivada $X''(t)$ cumpla la condición dada.

2/22

1) $X' = t$ $\quad \int \frac{d}{dx} = \int t \, dt$

$\Rightarrow X(t) = \frac{1}{2}t^2 + C$

2) $X' = -t$ $\quad \int \frac{d}{dx} = \int -t \, dt$

$\Rightarrow X(t) = -\frac{1}{2}t^2 + C$

3) $X' = t+1$ $\quad \int \frac{d}{dx} = \int (t+1) \, dt$

$\Rightarrow X(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + C$

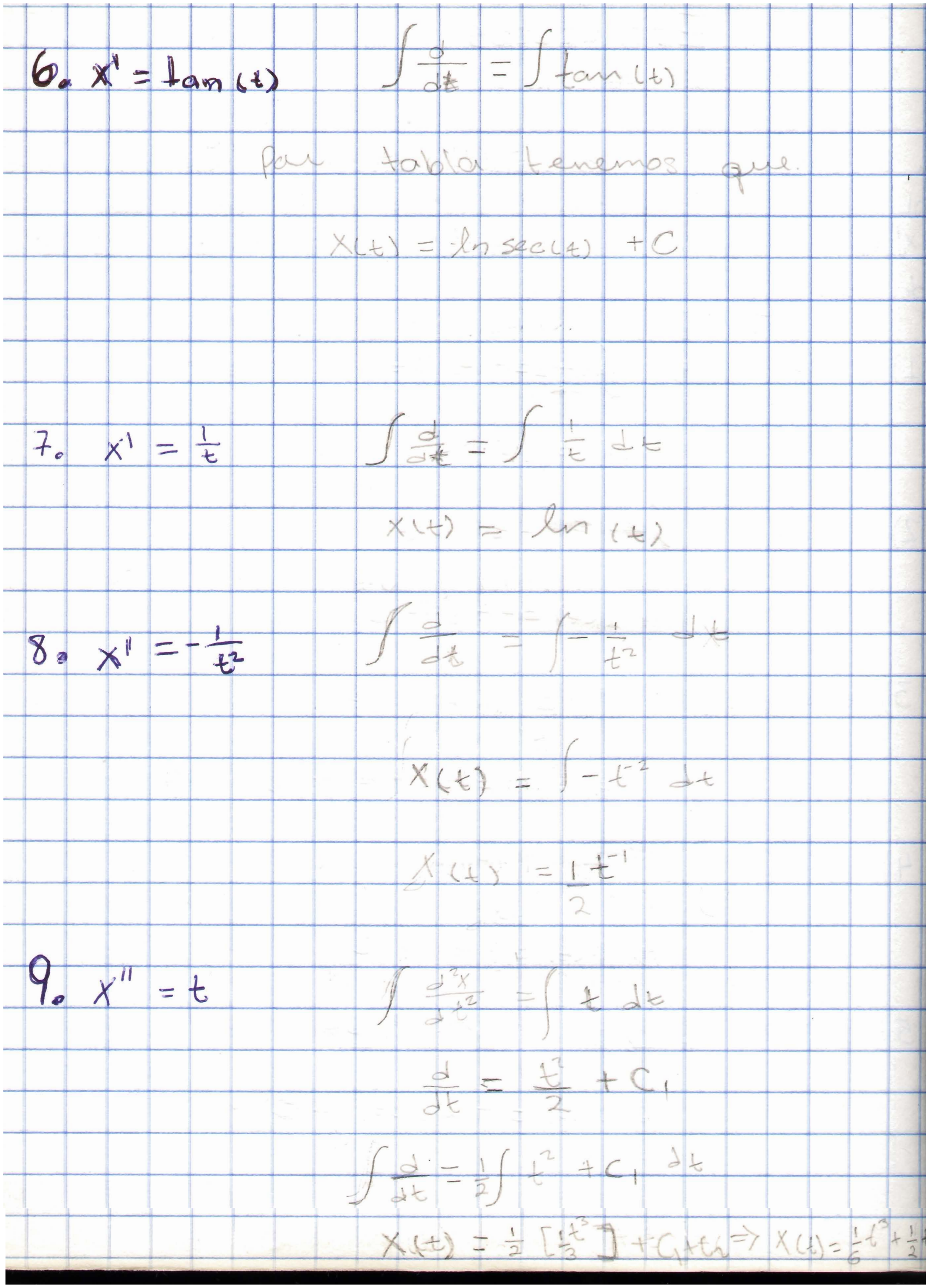
4) $X' = t^2$ $\quad \int \frac{d}{dx} = \int t^2 \, dt$

$\Rightarrow X(t) = \frac{1}{3}t^3 + C$

5) $X' = sen(t)$ $\quad \int \frac{d}{dx} = \int sen(t) \, dt$

$\Rightarrow X(t) = -Cos(t) + C$

Figura A.1: Entrevista estudiante 1.



6. $x' = \tan(t)$ $\qquad \int \frac{d}{dt} = \int \tan(t)$

por tabla tenemos que

$x(t) = \ln \sec(t) + C$

7. $x' = \frac{1}{t}$ $\qquad \int \frac{d}{dt} = \int \frac{1}{t}\, dt$

$x(t) = \ln(t)$

8. $x' = -\frac{1}{t^2}$ $\qquad \int \frac{d}{dt} = \int -\frac{1}{t^2}\, dt$

$x(t) = \int -t^{-2}\, dt$

$x(t) = \frac{1}{2} t^{-1}$

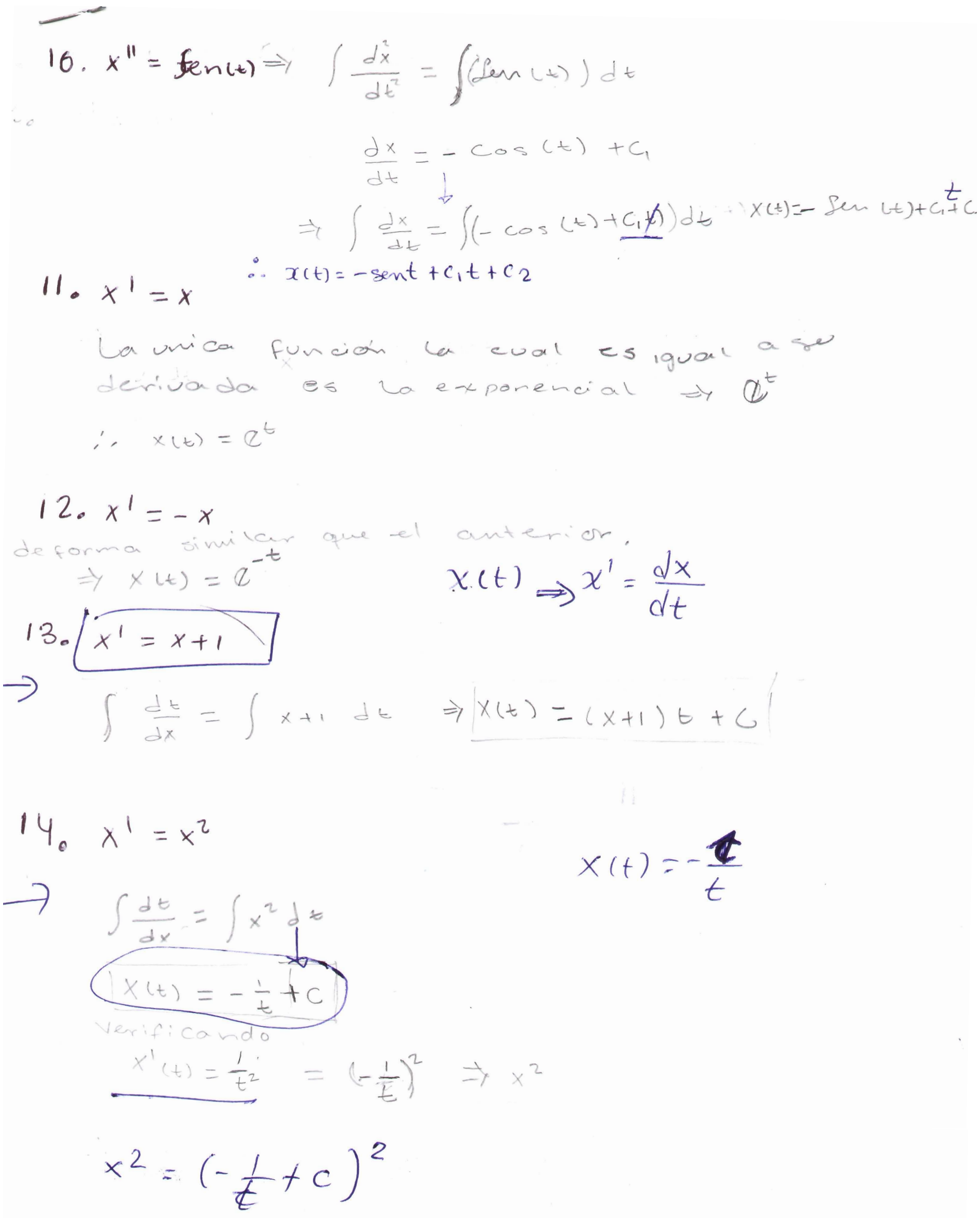
9. $x'' = t$ $\qquad \int \frac{d^2x}{dt^2} = \int t\, dt$

$\frac{d}{dt} = \frac{t^2}{2} + C_1$

$\int \frac{d}{dt} = \frac{1}{2} \int t^2 + C_1\, dt$

$x(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right] + C_1 t + C_2 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}$

Figura A.2: Entrevista estudiante 1.



10. $x'' = \text{sen}(t) \Rightarrow \int \frac{d^2x}{dt^2} = \int (\text{sen}(t))\, dt$

$\frac{dx}{dt} = -\cos(t) + C_1$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{dt} = \int (-\cos(t) + C_1 t)\, dt \quad x(t) = -\text{sen}(t) + C_1 t + C$

$\therefore\ x(t) = -\text{sen}\,t + C_1 t + C_2$

11. $x' = x$

La unica función la cual es igual a su derivada es la exponencial $\Rightarrow e^t$

$\therefore\ x(t) = e^t$

12. $x' = -x$

de forma similar que el anterior,

$\Rightarrow x(t) = e^{-t}$ $\quad x(t) \Rightarrow x' = \frac{dx}{dt}$

13. $\boxed{x' = x + 1}$

$\rightarrow \int \frac{dt}{dx} = \int x+1\ dt \Rightarrow \boxed{x(t) = (x+1)t + C}$

14. $x' = x^2$ $\quad x(t) = -\frac{\cancel{c}}{t}$

$\rightarrow \int \frac{dt}{dx} = \int x^2\, dt$

$x(t) = -\frac{1}{t} + C$

Verificando

$x'(t) = \frac{1}{t^2} = \left(-\frac{1}{t}\right)^2 \Rightarrow x^2$

$x^2 = \left(-\frac{1}{t} + c\right)^2$

Figura A.3: Entrevista estudiante 1.

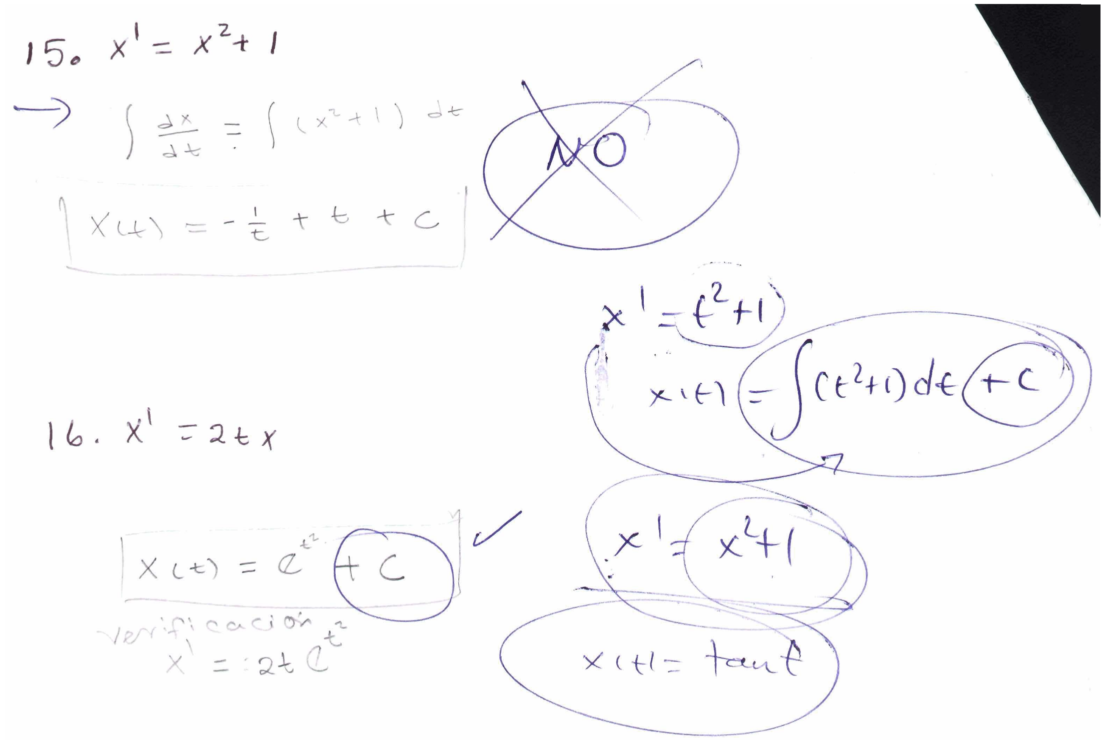


Figura A.4: Entrevista estudiante 1.

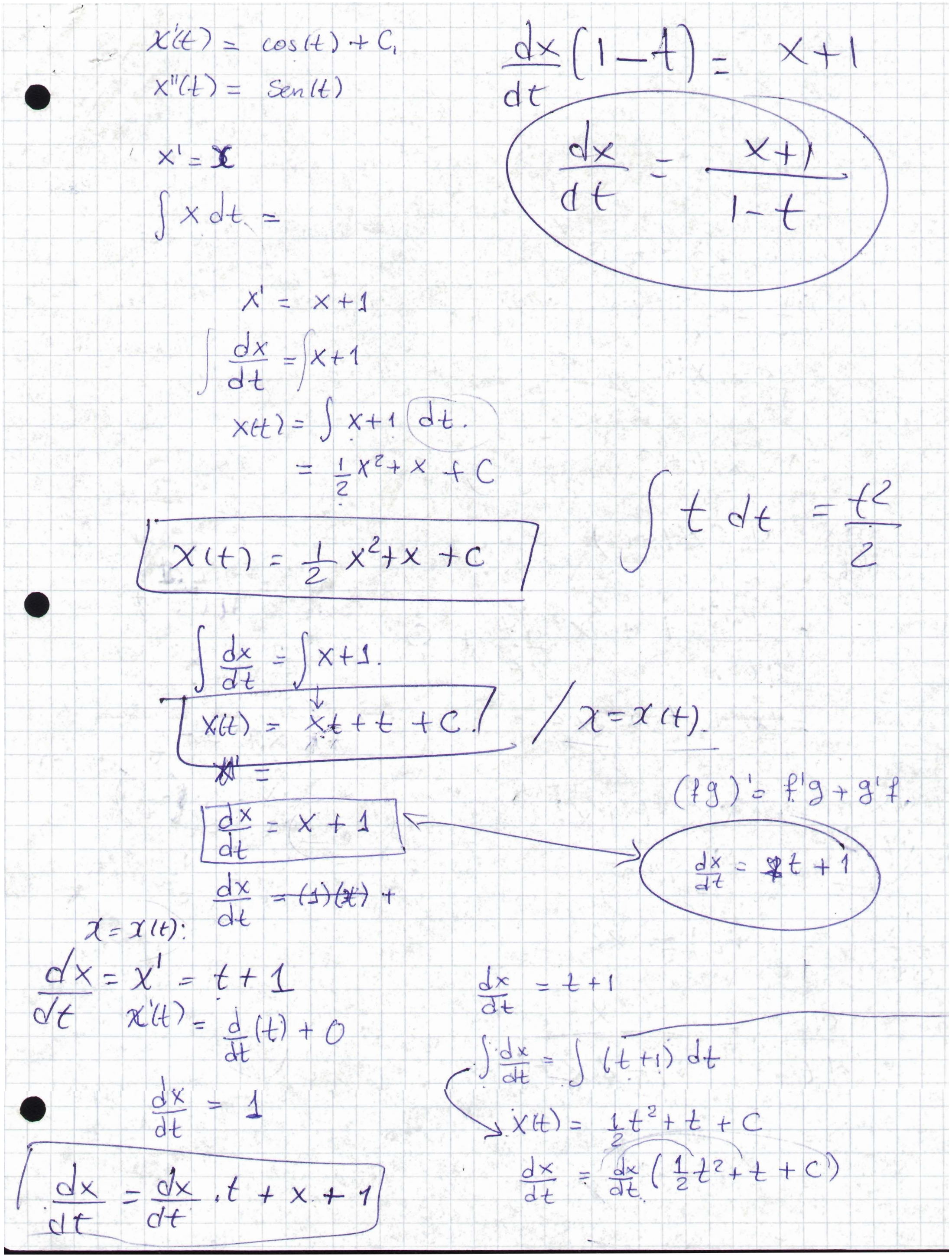
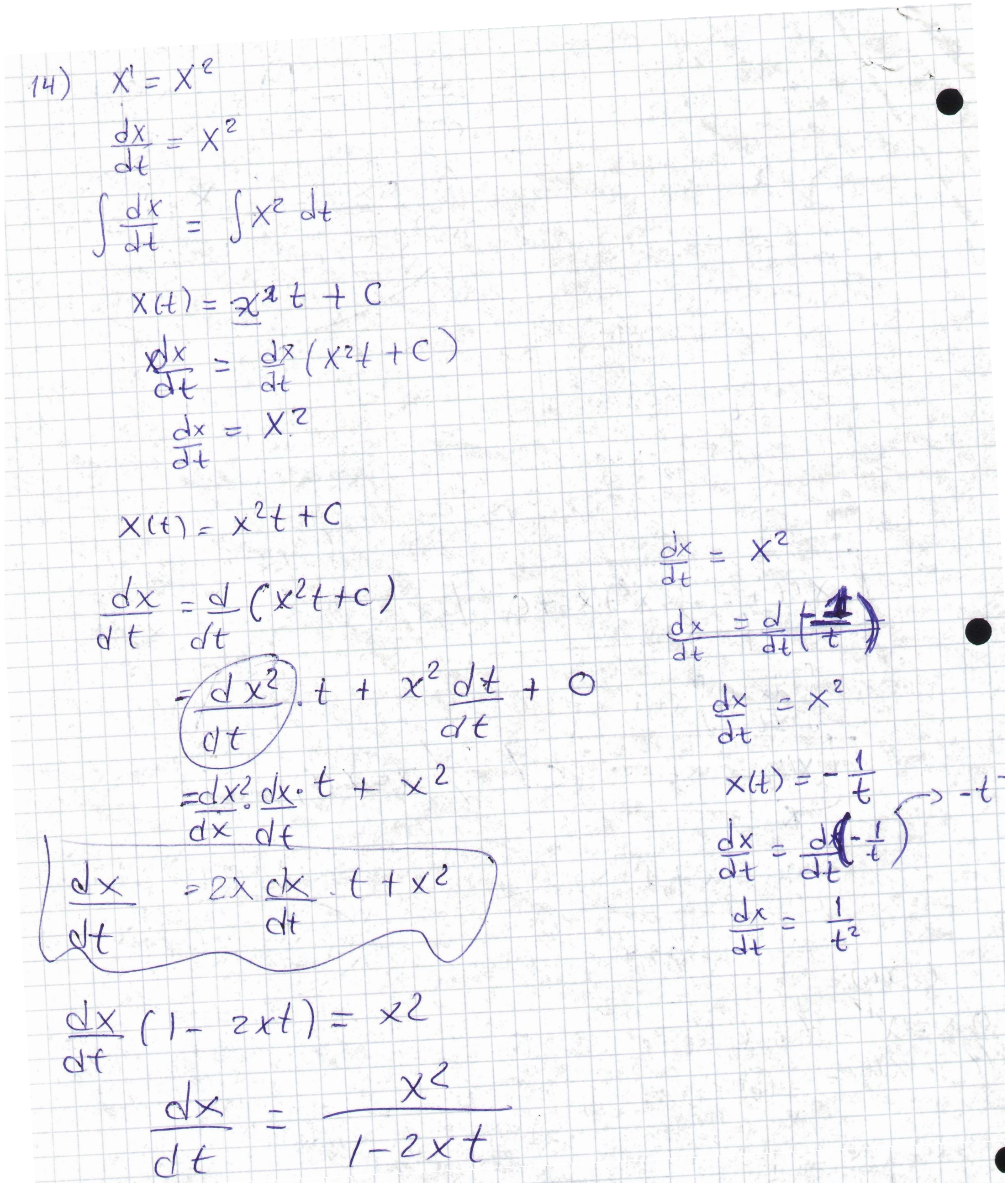


Figura A.5: Entrevista estudiante 1.



14) $X' = X^2$

$\frac{dx}{dt} = X^2$

$\int \frac{dx}{dt} = \int X^2 \, dt$

$X(t) = \cancel{x^2}\, t + C$

$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}(X^2 t + C)$

$\frac{dx}{dt} = X^2$

$X(t) = x^2 t + C$

$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x^2 t + c)$

$= \frac{dx^2}{dt} \cdot t + x^2 \frac{dt}{dt} + 0$

$= \frac{dx^2}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot t + x^2$

$\boxed{\frac{dx}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \cdot t + x^2}$

$\frac{dx}{dt}(1 - 2xt) = x^2$

$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{1 - 2xt}$

$\frac{dx}{dt} = X^2$

$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{t}\right)$

$\frac{dx}{dt} = x^2$

$x(t) = -\frac{1}{t} \rightarrow -t^{-1}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{t}\right)$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2}$

Figura A.6: Entrevista estudiante 1.

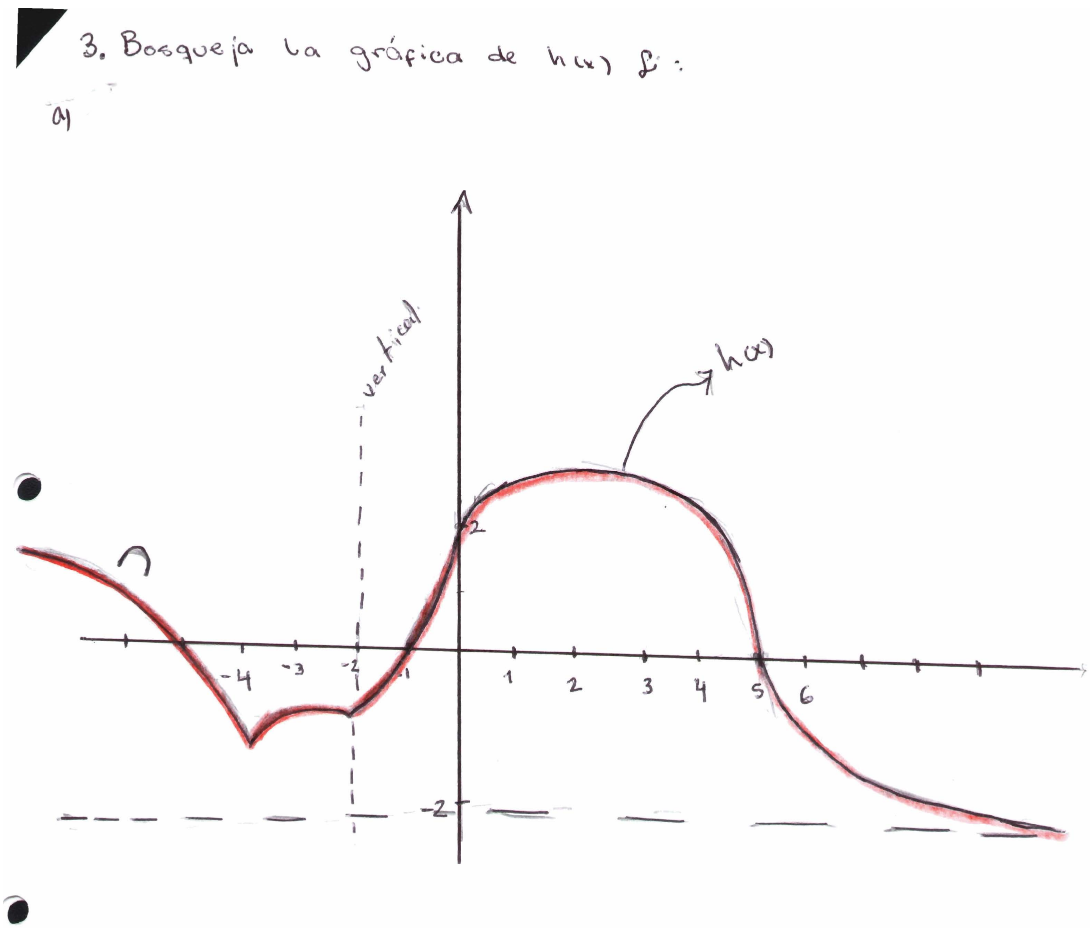
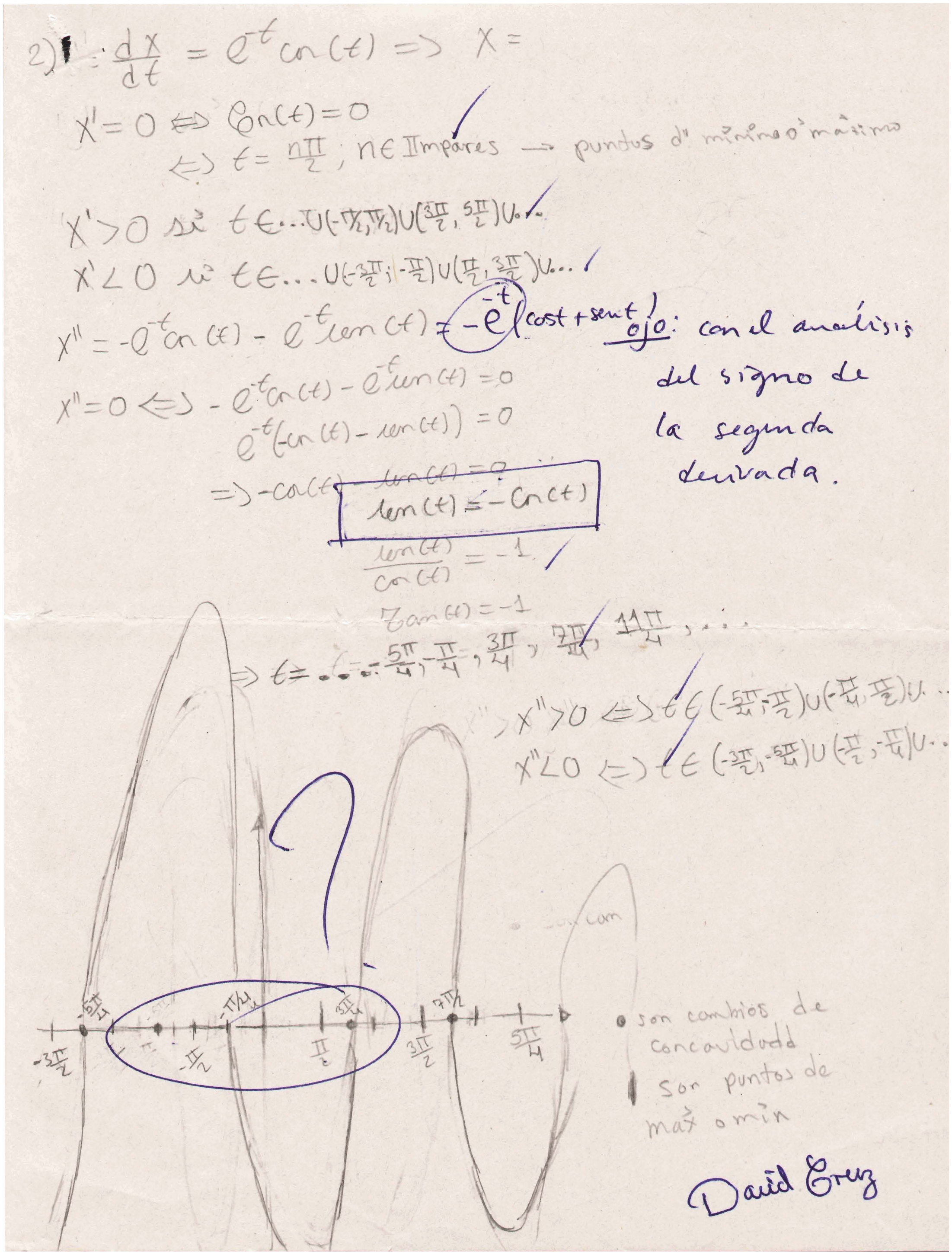


Figura A.7: Entrevista estudiante 1.


2) $\frac{dx}{dt} = e^{-t}\cos(t) \Rightarrow x =$

$x' = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{n\pi}{2}$; $n \in$ Impares → puntos de mínimo o máximo

$x' > 0$ si $t \in \ldots \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \cup \ldots$

$x' < 0$ si $t \in \ldots \cup (-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup \ldots$

$x'' = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$

ojo: con el análisis del signo de la segunda derivada.

$x'' = 0 \Leftrightarrow -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) = 0$

$e^{-t}(-\cos(t) - \sin(t)) = 0$

$\Rightarrow -\cos(t) \cancel{- \sin(t) = 0}$ $\boxed{\sin(t) = -\cos(t)}$

$\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -1$

$\tan(t) = -1$

$\Rightarrow t = \ldots, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \ldots$

$x'' > 0 \Leftrightarrow t \in (-\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup \ldots$

$x'' < 0 \Leftrightarrow t \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{4}) \cup (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) \cup \ldots$

Figura A.8: Entrevista estudiante 1.

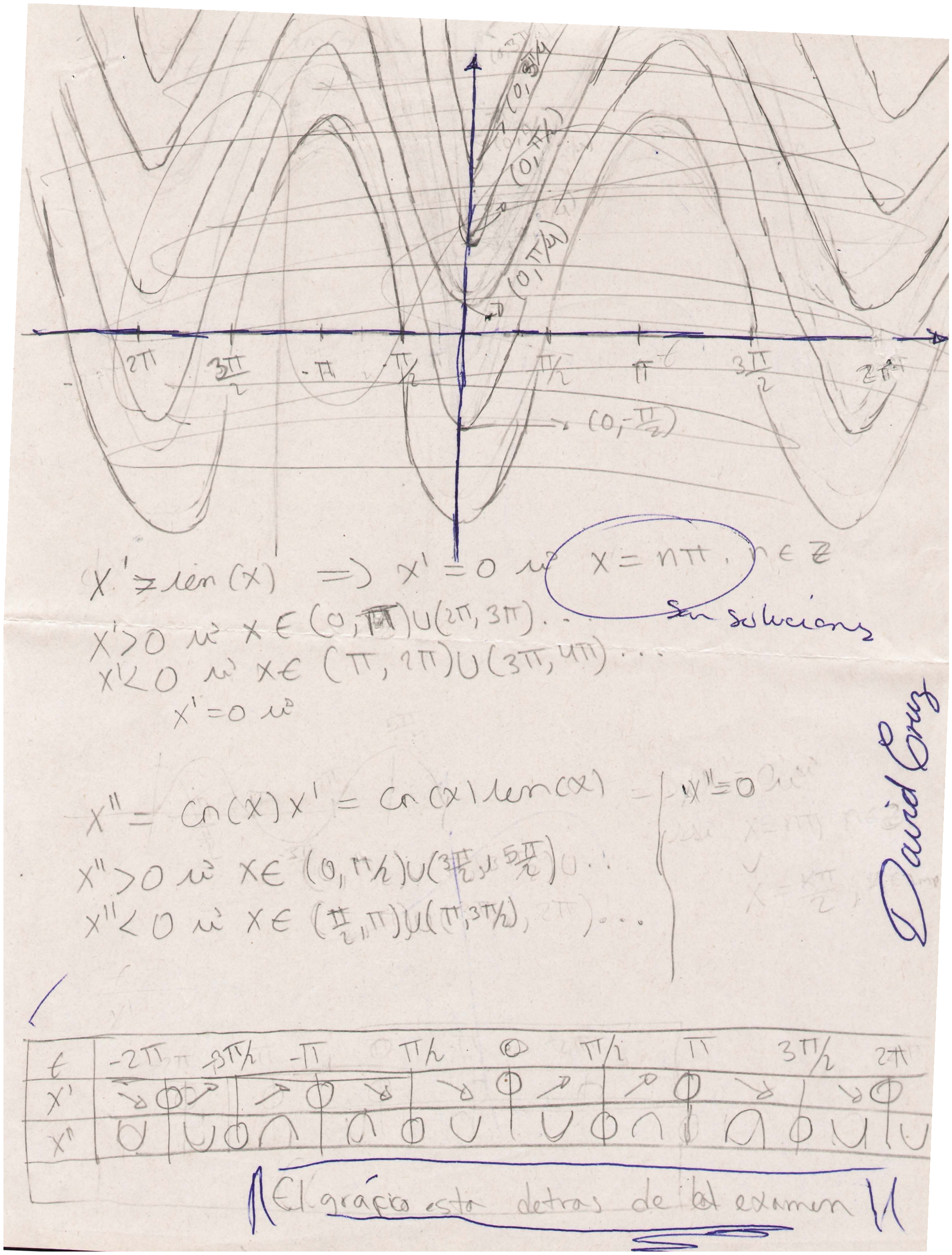
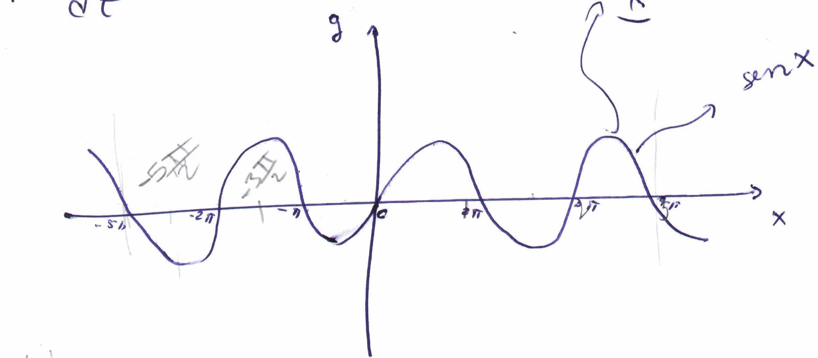


Figura A.9: Entrevista estudiante 1.

$\therefore \dfrac{dx}{dt} = g(x)$



$$\frac{dx}{dt} = g(x)$$

$x' = 0 \iff g(x) = 0$

$\quad \Rightarrow x = -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi,$

$x' > 0 \iff x\ (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi)$

$x' < 0 \iff x\ (-3\pi, -2\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi)$

$x'' = g'(x) \cdot x'$

$\quad = g'(x) \cdot g(x)$

$\Rightarrow x'' > 0\ x \in (-3\pi, -\frac{5\pi}{2}) \cup (-2\pi, -3\pi/2) \cup (-\pi, -\pi/2) \cup (0, \pi/2) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$

$\quad\ x'' < 0\ x \in (-\frac{5\pi}{2}, -2\pi) \cup (-\frac{3\pi}{2}, -\pi) \cup (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

Figura A.10: Entrevista estudiante 1.

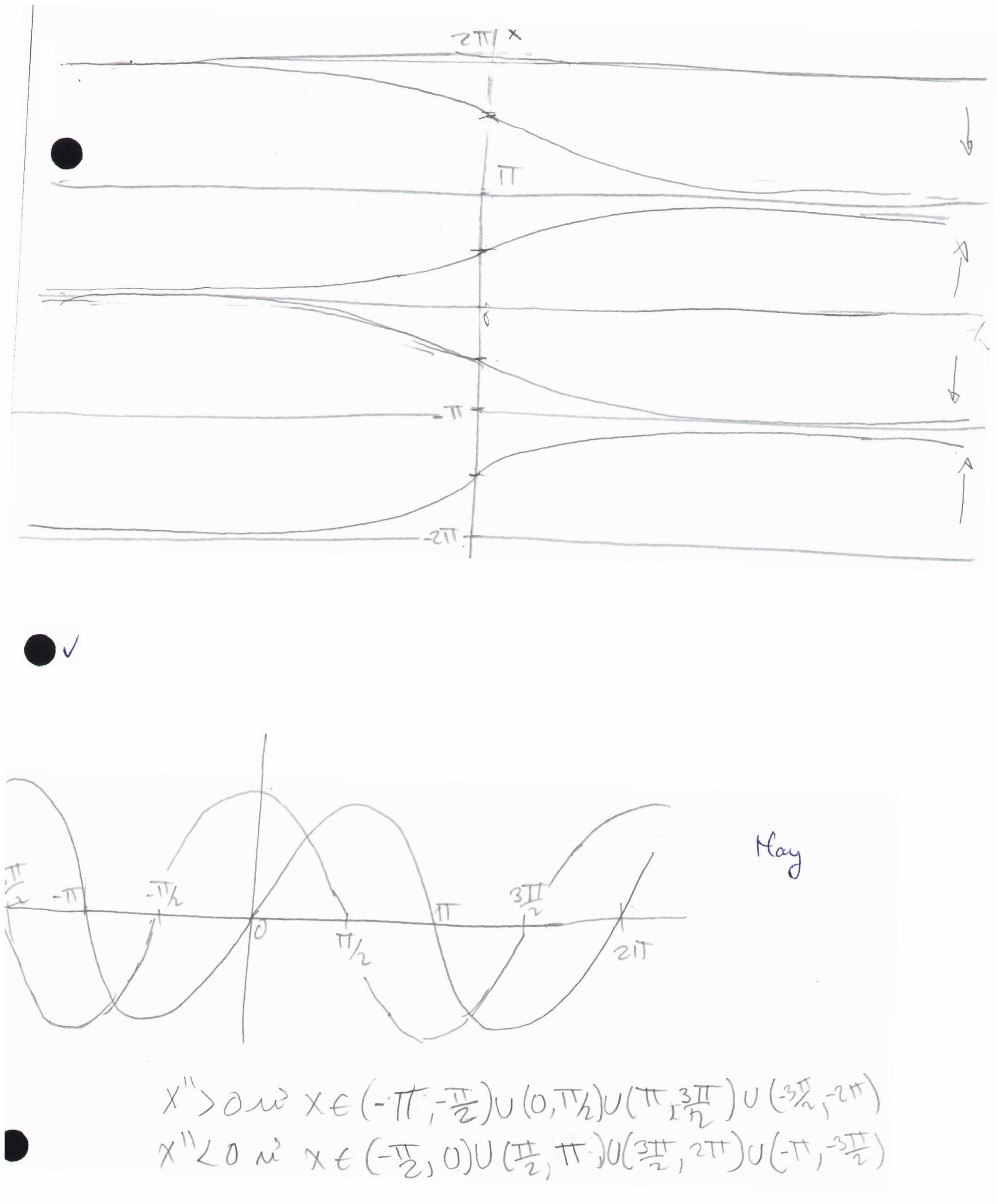


Figura A.11: Entrevista estudiante 1.

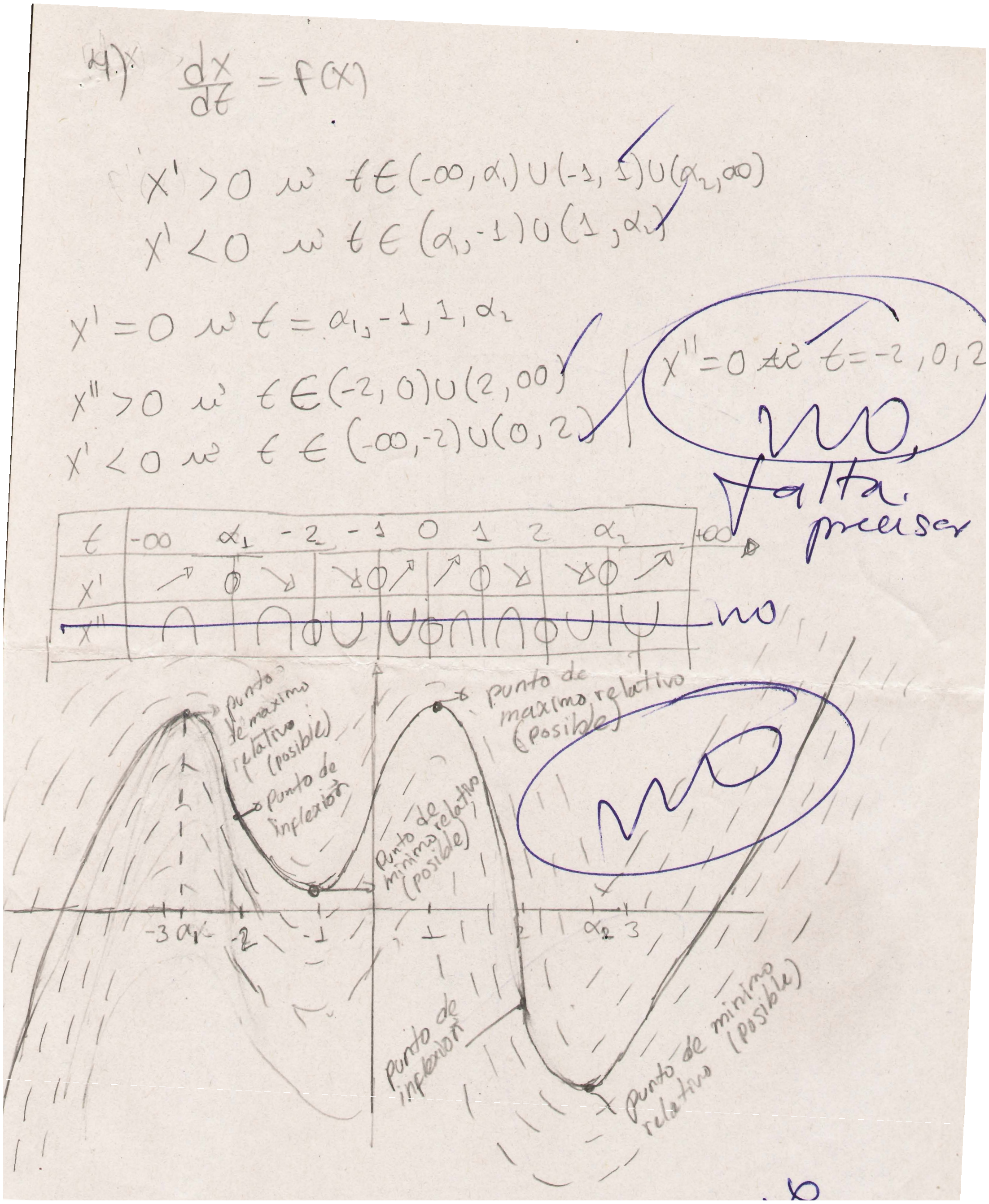


Figura A.12: Entrevista estudiante 1.

A.2. Estudiante 2

I: Bien, en la primera guía de ejercicios se propusieron ciertas tareas en las que se pedía encontrar, por simple inspección u otra forma, una función a partir de una relación conocida entre la función y la primera o la segunda derivada. Lo que quiero pedirle es que me cuente en voz alta lo que hizo para resolver cada ejercicio. De acuerdo! Entonces comenzemos con el ejercicio número 1.

E2: Vaya, la primera derivada de x con respecto a t es t, entonces está ecuación es equivalente a esta la derivada de x con respecto a t es igual a t, entonces aquí se pueden operar las diferenciales y tendría que dx es igual a t por dt, verdad, yo acá integro a ambos lados y me queda la integral de dx igual a la integral de t por dt. La integral de dx es x y la integral de t dt es un medio de t cuadrado más C, donde C es una constante. Entonces, todas las soluciones de la ecuación diferencial son x igual a un medio de t cuadrado más C, sería toda la familia de soluciones.

I: Esta es una familia de funciones. ¿Geométricamente cómo es esta familia de funciones?

E2: O sea, tendríamos una parábola, verdad, con vértice en el origen y tendríamos toda la familia de parábolas ...

I: ¿Cómo es esa familia de parábolas?

E2: No sé, como C es un aumento, las parábolas pueden ir para arriba o para abajo.

I: C es una traslación vertical.

E2: Entonces familia de parábolas se obtiene como traslación vertical de la parábola con vértice en el origen.

I: Bien, aquí hace lo mismo. De hecho, en todos ha hecho lo mismo (ver figuras A.13 y A.14). Veamos, ¿cómo verifica que esta función cumple la condición deseada, que es solución? ¿Qué es lo que hace para ello?

E2: Derivarla.

I: ¿Cuánto le da esa derivada?

E2: La derivada es igual a t.

I: Inmediato, verdad, y lo mismo ha hecho para todos los demás, verdad.

E2: Si.

I: ¿Cómo se llama este método?

E2: Este, este método se llama método de ecuaciones diferenciales separadas.

I: Ecuaciones de variables separables. O sea que Ud. ya conoce la técnica y aplica esa técnica.

E2. Si

I: Eso está muy bien. Vamos a ver. Sin embargo la mayoría de estos ejercicios, como Ud. puede ver, se pueden hacer por simple inspección, ¿no?, o recordando las propiedades de la derivada; por ejemplo, esta, verdad.

E2: Ujum!

I: Esto que Ud. ha hecho está bien, es un procedimiento correcto. Y de hecho se llama así de variables separables. Ahora, ¿Por qué funciona esa técnica? ¿Puede decirme por qué funciona?

E2: Uhmm ... por la definición de diferencial.

I: ¿Qué significa este diferencial?

E2: O sea, el término respecto al cual hay que integrar.

I: Simbólicamente, sí. Pero, qué significa dx. Si x es la variable dependiente, qué es el diferencial de x. Porque fíjese que aquí Ud. paso de una notación de derivada ...

E2: A operar con diferenciales.

I: Si, ¿cómo?

E2: Si esta es la derivada de x con respecto de t, esto es lo mismo que esto ($x' = \dfrac{dx}{dt}$).

I: Pero, ($x' = \dfrac{dx}{dt}$), no es un cociente entre dx y dt. Sino que es la notación de Leibniz de derivada y es un solo símbolo. Entonces, ¿qué es el diferencial de x?

E2: El diferencial de x se aproxima por el aumento de x.

I: Si. ¿Y ese aumento cómo se puede describir?

E2: Por delta x.

I: ¿Y delta x cómo se puede calcular ?

E2: ... ...

I: Delta x es el cambio en la variable dependiente, ¿no?

E2: Es como $x(2) - x(1)$, digamos en el intervalo de 1 a 2, y... entonces ... sería igual a la derivada por el diferencial de t.

I: Esa es la idea clave. Luego vamos a ver por qué el método funciona.

E2: Eso no lo había visto.

I: Ahora, volviendo a lo que ha hecho, ¿por qué puede integrar a los lados?

E2: ... ...

I: Bueno, este método ya lo conocía Ud., verdad. ¿Ya lo había estudiado por su cuenta antes de llevar este curso?

E2: Si.

I: Nada más decirle que además de utilizar la técnica de separación de variables que Ud. ya domina, también puede movilizar sus conocimientos de cálculo. Por ejemplo, en esta ecuación, lo que se pregunta cuál es la función que tiene la propiedad de que coincide con su derivada. Inmediatamente, nos damos cuenta que las funciones son de tipo exponencial. Igual en estas otras.

E2: Ujum!

I: Para terminar, compruebe que esta función es solución de esta ecuación.

E2: ... ...

I: Bien, dejemos estos ejercicios y pasemos a examinar la coherencia entre la gráfica que Ud. dibujó (ver figura A.15) y estas condiciones. Por ejemplo, veamos, cómo se refleja en la gráfica la condición que dice que el límite de h prima de x cuando x tiende a cero es infinito.

E2: Es una tangente vertical y por eso traté de corregirlo porque en el gráfico eso no se veía bien. Debe ser bien pegadito al eje vertical. Es como la cúbica, solo que rotada 90 grados.

I: Si.

E2: El ejercicio lo hice por los intervalos que quedan definidos por las condiciones y viendo como son la primera y la segunda derivada en cada uno de ellos.

I: ¿Por qué paro aquí en el punto (-4, 0)?

E2: Porque h prima es negativa cuando x es menor que -4, o sea que la función decrece. También es cóncava hacia abajo.

I: La pregunta es por qué paro en el punto (-4,0). ¿Por qué no se vino hasta aquí?

E2: ... ...

I: Una pregunta, ¿el punto (-4, h(-4)) podría dibujarse aquí?

E2: No.

I: ¿Por qué?

E2: Bueno, porque h(0) es 2, ¿verdad?, y supuestamente tendría que pasar la función por estos dos puntos y entonces no se cumpliría que la función es creciente.

I: ¿Dónde debería colocarse el punto (-4, h(-4))?

E2: Debajo de 2.

I: Bien, paremos aquí.

Guía n° 1

Resolver. 22/22

1. $x' = t \Rightarrow x = \int t\,dt \Rightarrow x = \frac{1}{2}t^2 + k$ R/ $x = \frac{1}{2}t^2 + k$.

2. $x' = -t \Rightarrow x = \int -t\,dt \Rightarrow x = -\frac{1}{2}t^2 + k$ R/ $x = -\frac{1}{2}t^2 + k$.

3. $x' = t+1 \Rightarrow x = \int (t+1)\,dt \Rightarrow x = \frac{1}{2}t^2 + t + k$ R/ $x = \frac{1}{2}t^2 + t + k$.

4. $x' = t^2 \Rightarrow x = \int t^2\,dt \Rightarrow x = \frac{1}{3}t^3 + k$ R/ $x = \frac{1}{3}t^3 + k$.

5. $x' = \operatorname{sen} t \Rightarrow x = \int \operatorname{sen} t\,dt \Rightarrow x = -\cos t + k$. R/ $x = -\cos t + k$.

6. $x' = \tan t \Rightarrow x = \int \tan t\,dt \Rightarrow x = \ln|\sec t| + k$ R/ $x = \ln|\sec t| + k$

7. $x' = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \int 1/t\,dt \Rightarrow x = \ln|t| + k$ R/ $x = \ln|t| + k$

8. $x' = -1/t^2 \Rightarrow x = \int -1/t^2\,dt \Rightarrow x = 1/t + k$ R/ $x = 1/t + k$

9. $x'' = t \Rightarrow x' = \int t\,dt \Rightarrow x' = \frac{1}{2}t^2 + k_1 \Rightarrow x = \int \frac{1}{2}t^2 + k_1 = \frac{1}{6}t^3 + k_1 t + k_2$
R/ $x = \frac{1}{6}t^3 + k_1 t + k_2$

10. $x'' = \operatorname{sen} t \Rightarrow x' = -\cos t + k \Rightarrow x = -\operatorname{sen} t + k_1 t + k_2$
R/ $x = -\operatorname{sen} t + k_1 t + k_2$

11. $x' = x \Rightarrow x' - x = 0$; la ecuación característica
$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$
$\therefore x = k_1 e^t$ R/ $x = k_1 e^t$

12. $x' = -x \Rightarrow x' + x = 0$; la ecuación característica:
$\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$
$\therefore x = k_1 e^{-t}$ $\therefore$ R/ $x = k_1 e^{-t}$.

13. $x' = x + 1 \Rightarrow (x+1)' = x + 1 \Rightarrow x + 1 = k_1 e^t$
$\Rightarrow x = k_1 e^t - 1$ R/ $x = k_1 e^t - 1$.

Figura A.13: Entrevista estudiante 2.

14. $x' = x^2$.

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t+k. \Rightarrow x = -\frac{1}{t+k}$

R/ $x = -\frac{1}{t+k}$

15. $x' = x^2+1 \Rightarrow \frac{dx}{x^2+1} = dt \Rightarrow \tan^{-1}(x) = t+k \Rightarrow x = \tan(t+k)$

R/ $x = \tan(t+k)$

16. $x' = 2tx \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2t\,dt \Rightarrow \ln|x| = t^2+k \Rightarrow x = k_1 e^{t^2}$

R/ $x = k_1 e^{t^2}$.

17. $x' = sen(x) \Rightarrow \frac{dx}{sen(x)} = dt \Rightarrow \ln|\csc x - \cot x| = t + k_1$

R/ $\ln|\csc x - \cot x| = t + k_1$

18. $x' = \frac{1}{x} \Rightarrow x\,dx = dt \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = t+k \therefore x = \pm\sqrt{2t+k_1}$

19. $x'' = x$; la ecuación característica:

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \{1, -1\}$

$\therefore x = k_1 e^t + k_2 e^{-t}$ R/ $x = k_1 e^t + k_2 e^{-t}$.

20. $x'' = -x$; la ecuación característica es

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \{-i, i\}$; $i = \sqrt{-1}$

$\Rightarrow x = k_1 e^{it} + k_2 e^{-it} = k_1(\cos t + i\,sen\,t) + k_2(\cos t - i\,sen\,t)$

$= \underbrace{(k_1+k_2)}_{k_3}\cos t + \underbrace{(k_1 i - k_2 i)}_{k_4} sen\,t$

R/ $\therefore x = k_3 \cos t + k_4\, sen\,t$

21- $x' = e^x$

$\Rightarrow e^{-x}dx = dt \Rightarrow -e^{-x} = t + k_1 \Rightarrow e^{-x} = -t - k_1$

$\Rightarrow -x = \ln(-t-k_1)$

R/ $\Rightarrow x = -\ln(-t-k_1)$

22. $x'' = -4t^2x$ una solución es: $x = 0$

Figura A.14: Entrevista estudiante 2.

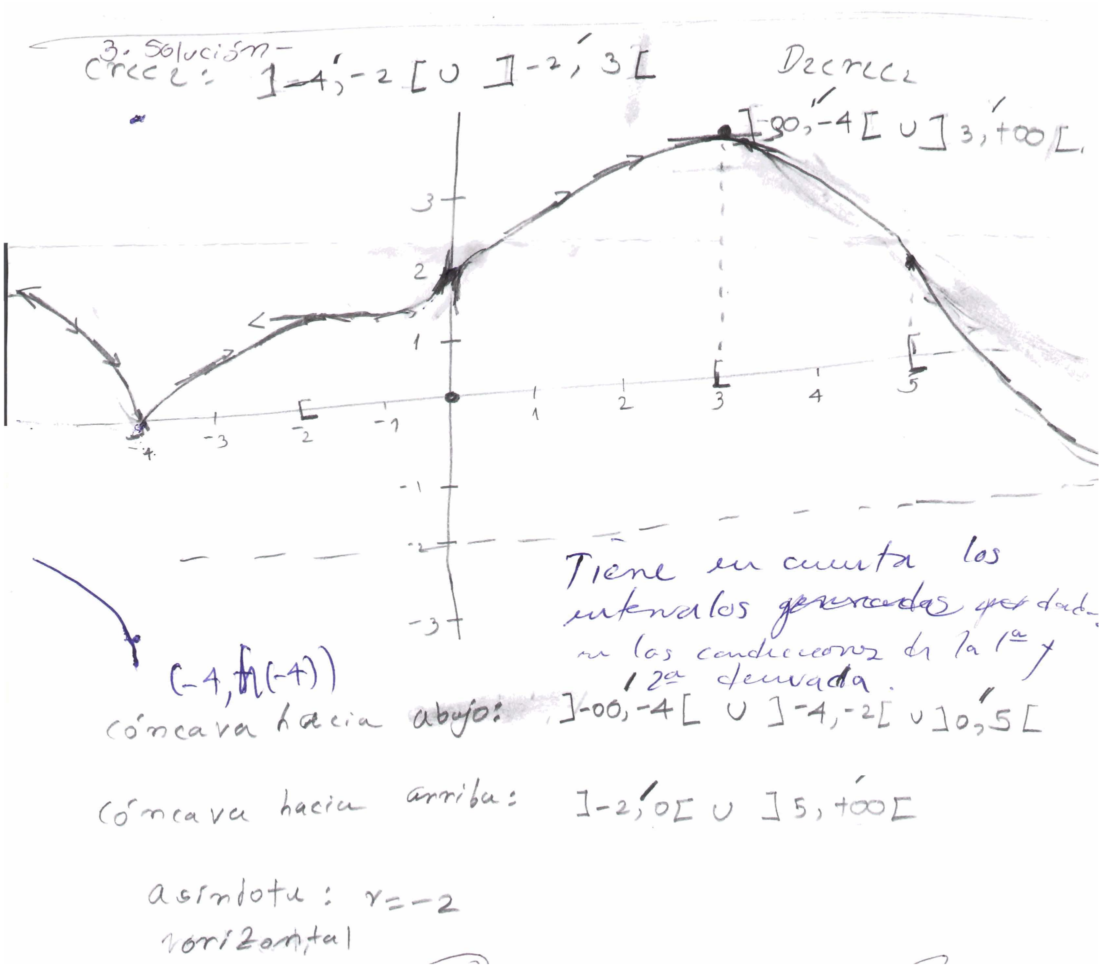


Figura A.15: Entrevista estudiante 2.

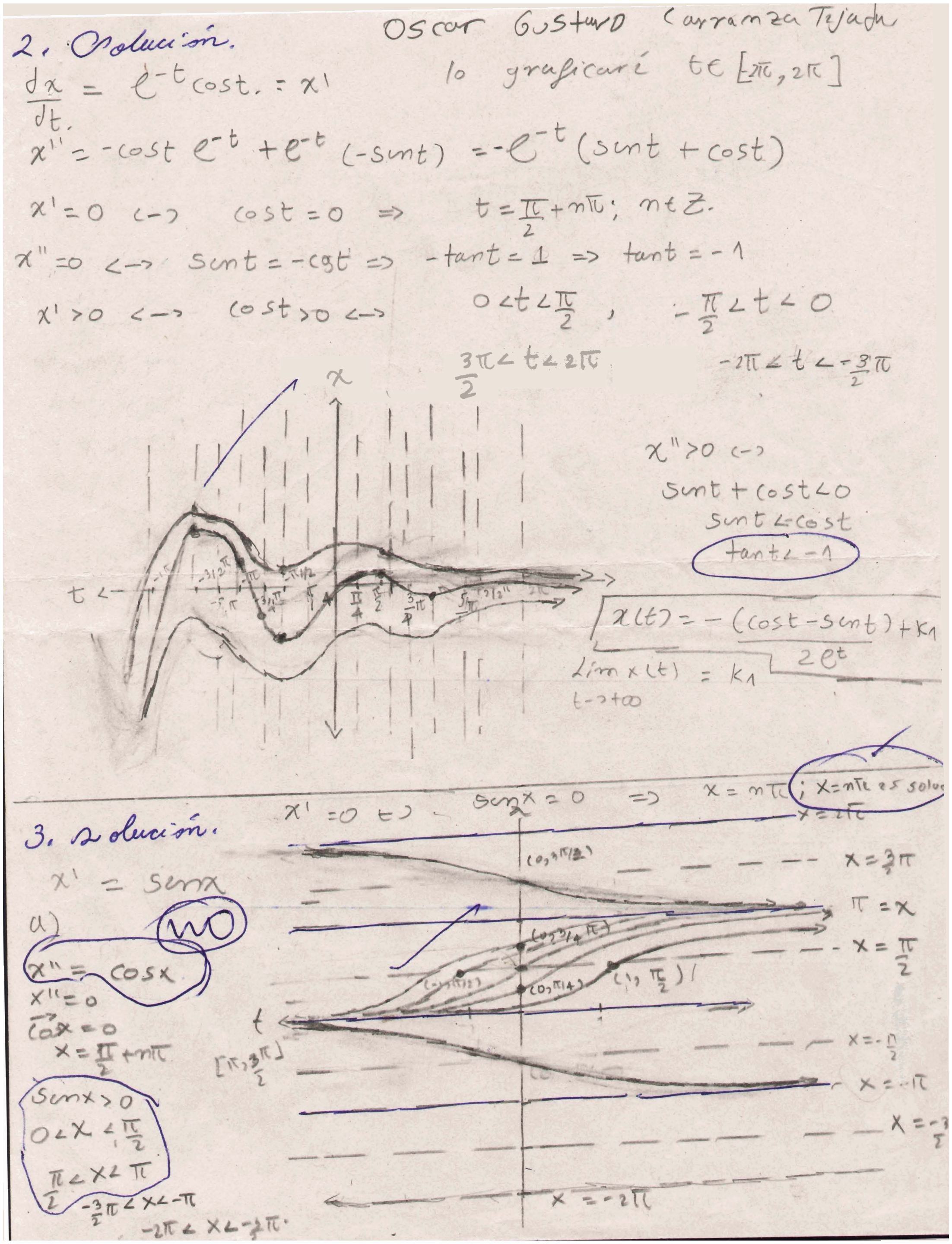


Figura A.16: Entrevista estudiante 2.

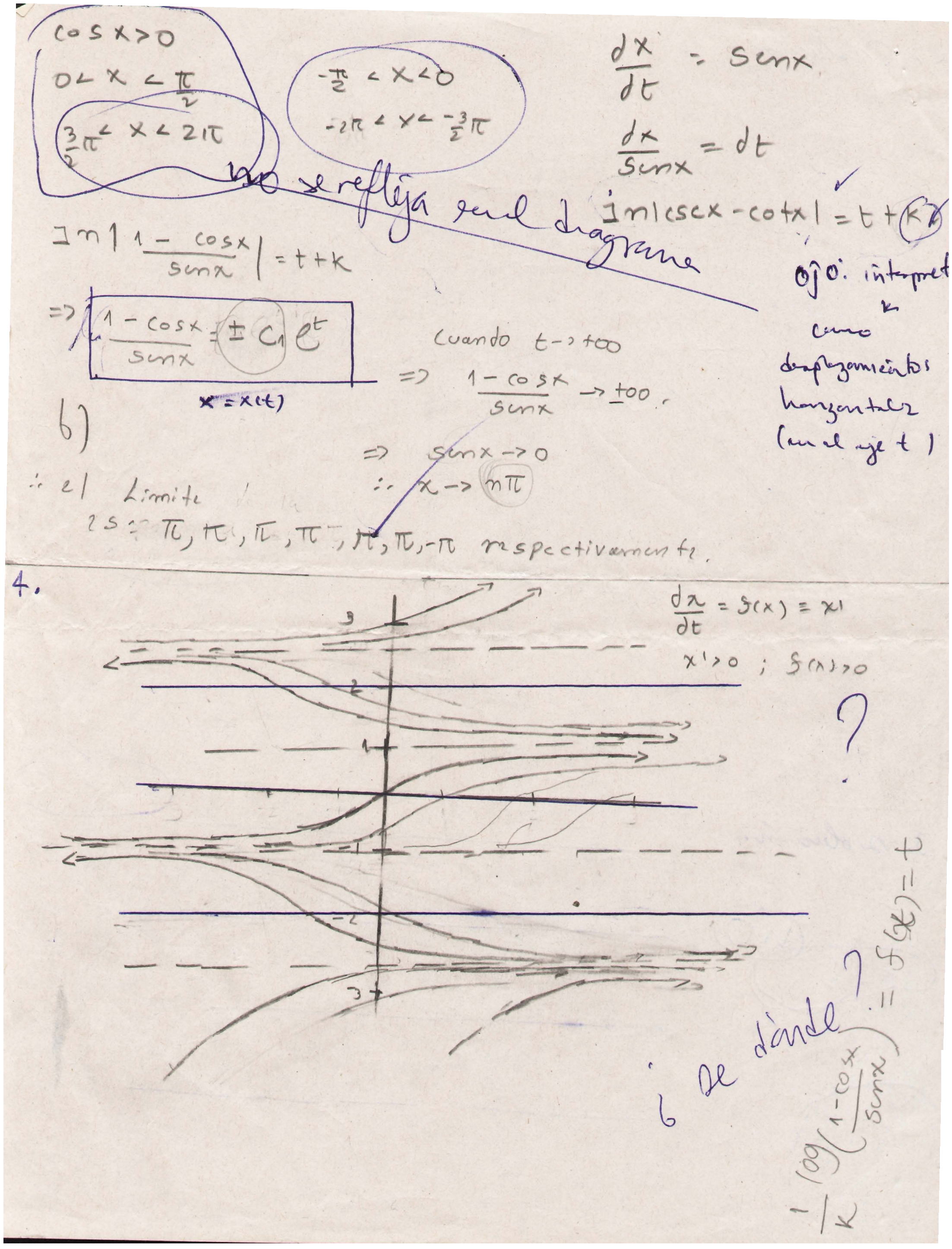


Figura A.17: Entrevista estudiante 2.

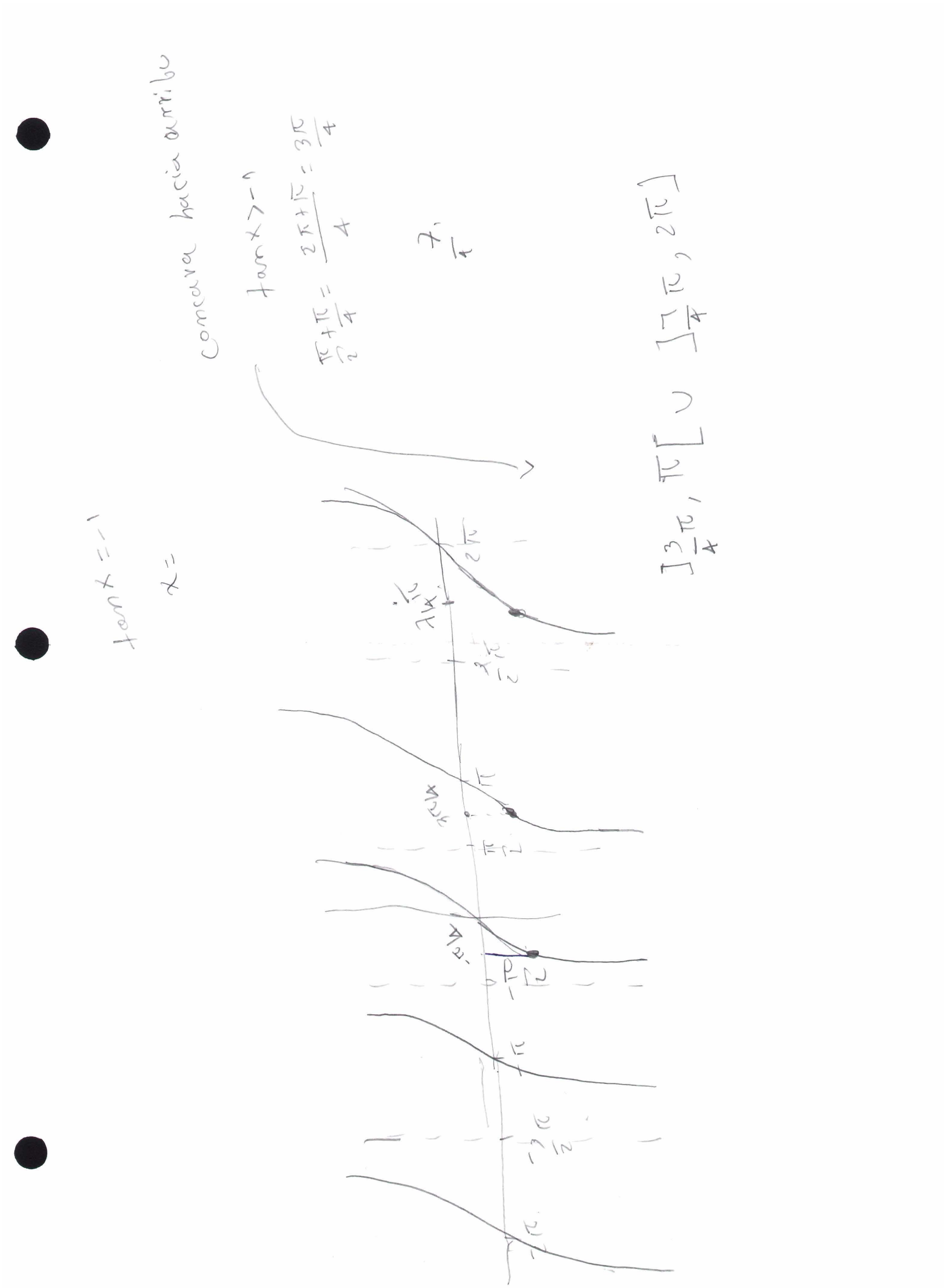


Figura A.18: Entrevista estudiante 2.

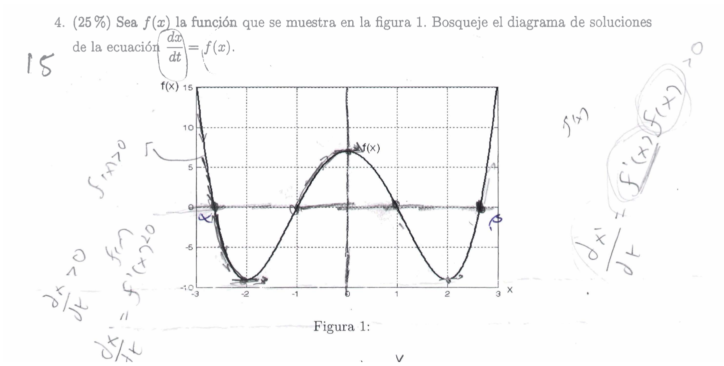


Figura A.19: Entrevista estudiante 2.

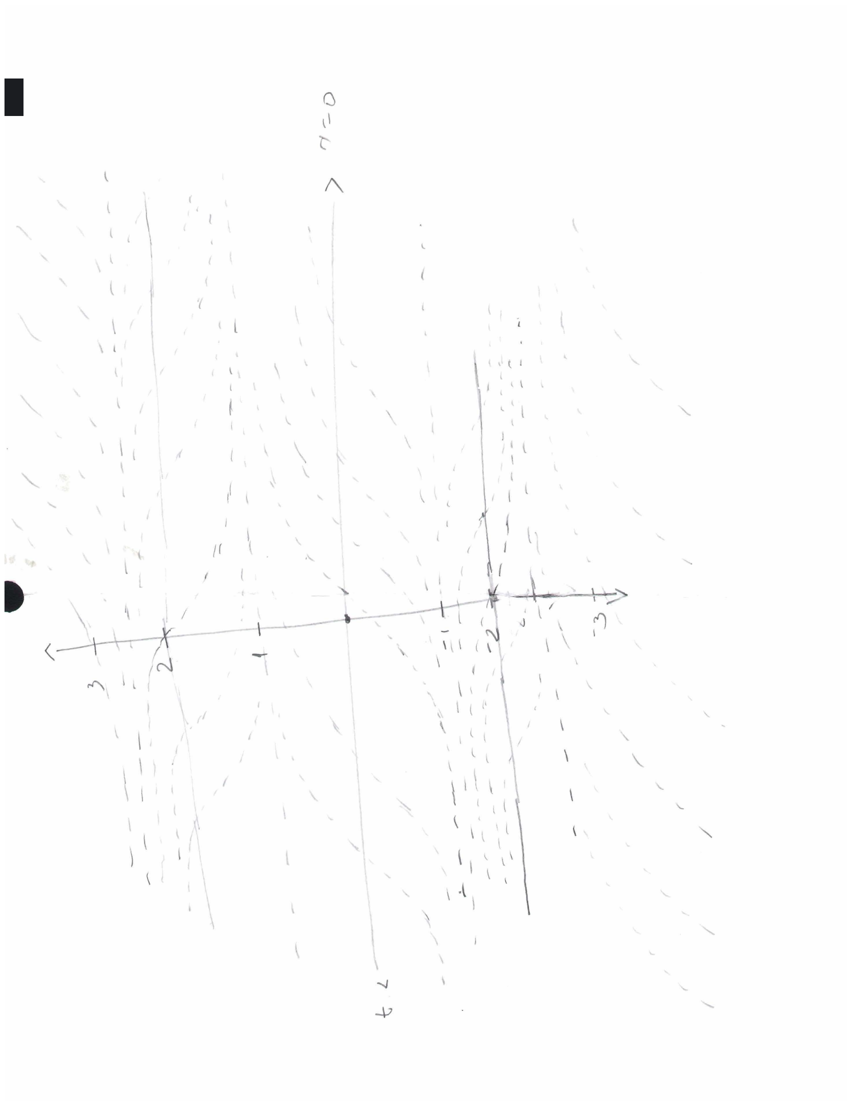


Figura A.20: Entrevista estudiante 2.

A.3. Estudiante 3

I: En primer lugar quiero agradecerle su valiosa colaboración. Lo que quiero es que revisemos lo que Ud. ha hecho, contándome en voz alta todo lo que ha hecho para que quede grabado en la cinta.

E3: Si.

I: Lo que Ud. haga no tiene ninguna implicación positiva ni negativa, de manera que no le afectará en nada. Yo estoy tratando de recoger algunos datos sobre la enseñanza y el aprendizaje de estos temas. Veamos, comencemos entonces con estos ejercicios en los que se pedía encontrar una función x de t conociendo la primera derivada o la segunda derivada, o alguna relación entre ambas derivadas. Comencemos con el 1 ($x' = t$). ¿Cuenteme lo qué hizo?

E3: Bueno, ehee, integre mentalmente.

I: Si.

E3: Si, integre mentalmente y solamente eso hice.

I: ¿Integro mentalmente?

E3: Es que como por integración ya sabemos, ¿verdad?, que es esto al cuadrado entre 2, por la propiedad de la integral de x elevado a la algo.

I: Verifique que esta función cumple la relación dada.

E3. Si la cumple.

I: Es inmediato, verdad.

E3: Si se ve (ver figura A.21).

I: Y hasta aquí todas se resuelven por integración.

E3: Si.

I: ¿Ésta que está aquí (ejercicio No 11: $x' = x$) como la resolvió?

E3: Bueno, esa la resolví mentalmente así, pero por integración no, sino por simple inspección. Yo sólo busque una función ($x = e^t + C$) que al derivarla me diera esto.

I: ¿Y este otro como lo hizo?

E3: También por inspección, porque también están las reglas de las derivadas de las funciones trigonométricas que se van repitiendo, sólo el signo es el que cambia.

I: Si. Entonces resumiendo podemos decir que estos ejercicios los ha resuelto por integración y estos otros por inspección.

E3: Ujum!

I: ¿Este otro como lo hizo?

E3: Ese por propiedad.

I: ¿Qué propiedad utilizó?

E3: Este, como sabemos que la derivada de e^t es la misma función.

I: Ujum.

E3: Así sería también para la segunda, la tercera, siempre es e^t.

I: Si ... Ahora compruebe que esta función es solución de esta.

E3: ¿Qué es solución?

I: Si.

E3: O sea que al derivarla me tiene que dar esa.

I: Si, véalo, derive.

E3: ... ¿cuál me dijo?

I: Este, el número 11, $e^t + C$

E3: Este es cero y e^t es la misma función.

I: ¿Qué función le debe de dar?

E3: x ... pero en realidad me dio un número ... me hace falta la constante.

I: ¿Entonces será solución?

E3:... ... uhmm ...

I: Evidentemente x prima no es igual a x. ¿Qué está pasando?

E3: no sé, afecta esto ... sólo podría ser e^t.

I: ¿Dónde colocaría la constante?

E3: Aquí

I: ¿Por qué le sumo la constante?

E3: No sé, ... porque así nos enseñaron ha hacerlo en cálculo II, a sumarle una constante.

I: Ahja! Y eso es lo que ha hecho en los ejercicios que resolvio por integración.

E3: Pero, eso de multiplicarle una constante no lo sabía, a la e^t. Entonces aquí podría poner C_1 aquí.

I: Póngaselo y vea que pasa.

E3: ... la derivada de esto siempre va a ser C_1e^t.

I: ¿Cuál es la diferencia entre las soluciones de x prima igual a t y x prima igual a x?

E3: En la primera va sumada la constante y en la otra va multiplicada.

I: Si, pero ¿cuál es la diferencia entre las ecuaciones: x prima igual a t y x prima igual a x?

E3: Son distintas ...

I: ¿En que sentido son distintas?

E3: ... ...

I: ¿En que se diferencian?

E3: ... en todo, gráficamente son distintas ... también para cualquier valor de t vamos a tener unos valores diferentes, aunque le demos el mismo valor de t siempre vamos a tener un valor diferente en las dos.

I: ¿Observa alguna otra diferencia?

E3: Uhmm ...

I: Por jemplo, entre los lados derechos de cada ecuación.

E3: Los lados derechos son distintas ... porque esta depende del valor de t y esta depende de toda la función.

I: Eso es. Todas estas ecuaciones de acá solo dependen de t y las ha resuelto encontrando antiderivadas. Estas otras sólo dependen de x, y como ya no se visualizan como antiderivadas, las ha resuelto adivinando.

E3: Ujum!

I: Bien, veamos ... ¿verifique si esta es solución?

E3: ... ... no es, por esto, por el C; tendría que ir aquí también multiplicado por $-e^t$.

I: ¿Cómo obtuvo esa solución?

E3: No sé, bueno ... pensando sí la solución de $x' = x$ es $x(t) = e^t + C$, la solución de ésta ($x' = -x$)debe llevar un menos aqui.

I: ¿Verifique si $x(t) = -Ce^t$ es solución de $x' = -x$?

E3: ... ...creo que no es.

I: Veamos ... ¿cómo hizo la catorce?

E3: Esa ..., me di ... intentando con varias funciones.

I: ¿Y la trece ($x' = x+1$)?

E3: Igual, igual, como ya hice la de x prima igual a x y la de x prima igual a 1 entonces las sume ($x(t) = e^t + t + C$).

I: Suma las soluciones de cada una ($x' = x$ y $x' = 1$).

E3: Si.

I: Verifique si esta ($x(t) = e^t + t + C$) función es solución.

E3: ... ... no, no es solución.

I: ¿Cuál podría ser una solución?

E3: Una solución uhmm ... ... no sé.

I: ¿Qué ha utilizado para resolver esta ecuación?

E3: ... uhmm...

I: ¿Qué operación ha hecho para encontrar esta solución?

E3: Mentalmente, pensé en los dos casos anteriores, la separe en dos ecuaciones y como ya sé las soluciones de cada una, las sume.

I: Pero ya vimos que esta función no cumple con la propiedad deseada.

E3: Si, es cierto, por eso creo que lo que he hecho no es cierto ...

I: ¿Por qué?

E3: ... ...

I: Bien, pasemos al 15 ($x' = x^2 + 1$). Ha hecho lo mismo que antes, lo cual ya vimos que no es cierto. Mejor inténtelo buscando una función cuya derivada sea el cuadrado de ella más uno.

E3: ... ... no, no sé.

I: ¿Recuerda alguna propiedad de cálculo?

E3: ... ... no, no recuerdo nada.

I: Dejémoslo. Veamos el número 16. ¿Cómo obtuvo esta función que está aquí?

E3: Esta, también a prueba y error.

I: Verifíquelo.

E3:... ... ... no es solución.

I: ¿Cuál es el problema?

E3: La C_1.

I: Otra vez. ¿Qué podría hacer? ¿Dónde colocaría C1?

E3: Aquí multiplicando.

I: Haga eso y verifíquelo.

E3: ... ... hoy si.

I: Ahora, veamos el ejercicio 17. Ehee, que hizo aquí.

E3: Si, ese fue un gran error.

I: ¿Cómo obtuvó esto?

E3: Pues ...

I: En que estaba pensando cuando escribió esto.

E3: Si, ese fue error, pero ... en mi mente tenía pensado que la función era el seno de x, entonces trate de que esta función al derivarla me diera el seno de x, y ...... ya

I: Si.

E3: Entonces, lo hice como al contrario.

I: Si, pero al derivar aquí tiene que usar ...

E3: la regla del cociente ahja!, pero no lo tome en cuenta.

I: Vaya, vamos a ver. Bueno, este sí verdad.

E3: Sólo que C_1 no iría aquí tampoco.

I: Compruébelo.

E3: Uhmm ... ... si, C_1 da problema otra vez ... hay que ponerla aquí multiplicando.

I: ¿Cómo la obtuvo la solución de $x'' = -x$? ... bueno una función que satisfaga la ecuación.

E3: Igual, así como ... esta, sólo, sólo sabía que iba a cambiar el signo, porque como este al derivarlo de aquí pasa a ... el signo y aquí va a variar.

I: Antes Ud. ha resuelto esta ecuación

E3: Ujum!, pero si se fija aquí, es que en esa no, lo pensamos en el aspecto de que e a la t no cambia, sólo íbamos a ver el signo, como iba ir, eso era como íbamos a arreglar el signo para que al final diera menos y como el que manda en el signo aquí también es el exponente, verdad, entonces eso es lo que hice.

I: Bien, quitemos la constate y verifique si esta expresión satisface la ecuación.

E3:... ... si

I: Veamos, será cierto que la segunda derivada es menos x.

E3: ... ... ahaa, no.

I: Quiere decir que lo que ha hecho no está bien. Mejor utilice el cálculo. Y por simple inspección, encuentre funciones que al derivarlas dos veces den menos x. ¿En qué funciones piensa? E3: ... ... uhmm ... en el coseno de t.

I: ¿Puede encontrar alguna otra función?

E3: Otra sería seno de t.

I: Bien, terminemos aquí, le agradezco su colaboración.

I: Explíqueme que hizo en este (ver figura A.23).

E3: Como dice que h es continua, eso me da la idea que h es una función que no tiene cambios bruscos. También dice que h(0) vale 2, o sea que pasa por aquí y que h'(-2) es igual a h'(3) que es igual a cero ambas, entonces a mi me da la idea de que hay un mínimo o un máximo en -2 y 3, que serían estos puntos aquí, entonces eso me da la idea.

I: Si.

E3: De allí este límite si no pude aplicarlo yo, entonces no, no ... ...

I: De hecho no se refleja esa condición en la gráfica.

E3: No.

I: ¿Cómo se representaría esa condición en la gráfica?

E3: Es que eso no, no lo entiendo, ese límite, qué es lo que le hace ese límite a la gráfica ... no sé.

I: ¿Qué representa geométricamente la derivada?

E3: Uhmm ...

I: En este punto que representa la derivada.

E3: En ese punto, uhmm ... sería un número también

I: ¿Qué representa ese número?

E3: Uhmm ... este la pendiente de la recta tangente.

I: Ahora que nos diría este límite.

E3: Que cerca de cero la derivada se vuelve infinita.

I: En términos geométricos cómo se traduciría eso.

E3: Uhmm ... ... que la pendiente se va haciendo grande ... que la tangente es vertical.

I: ¿Qué se puede decir del gráfico de h?

E3: Uhmm ... ...

I: Que la gráfica de la función, cerca de 0, a este lado se va pegando al eje vertical y a este otro se va despegando, si.

E3: Pero, uhmm ... cómo saber ... este ... a bueno si, verdad, porque es h la que tiende, es x la que tiende a cero, verdad.

I: Si.

E3: En el caso que y fuera cero, sería para acá, en el eje y.

I: Si.

E3: Ahaa, es que eso no entendía yo, fíjese, que es lo que decía.

I: Si.

E3: Y aquí como nos dice que h'(x) es mayor que cero en el intervalo de -4 , cuando x es mayor que 4 y menor que -4, entonces la pendiente crece, digamos, ehee ..., que la gráfica es creciente. En el intervalo de -4 a -2, aquí, crece. Y de allí, está el otro, cuando x es mayor que -2 y menor que 3, también sigue creciendo, va. Aquí dice que x es menor que cero, entonces la gráfica es creciente en el intervalo cuando x es menor que -4, entonces aquí viene así y cuando x es mayor que 3 empieza caer. Y sobre la segunda derivada, ehee x prima es menor que cero en el intervalo x menor que 4, o sea que es cóncava hacia abajo, verdad, es cóncava hacia abajo, verdad.

I: Si.

E3: Entonces es cóncava hacia abajo. También cuando x está entre -2 y… - 4 y -2, que sería aquí este pedacito, verdad, sería así,

I: Si.

E3: Así, pero como aquí también hay un ... punto crítico, que puede haber un máximo o un mínimo, entonces la función tendría como un cambio así como la cúbica así, repentina así.

I: Si.

E3: Y aquí nos dice que la segunda derivada es mayor que cero en el intervalo de cuando x es menor que -2, mayor que -2 y menor que 0, o sea aquí, y es lo que le estaba diciendo que va a tener un cambio repentino porque va a ser cóncava hacia arriba, entonces allí es donde se va a dar el punto, donde va a tener el punto de cambio de concavidad en -2.

I: ¿Ese punto cómo se llama?

E3: Ehee, si nos referimos a la segunda derivada se llama punto de inflexión.

I: Ujum.

E3: Y ... por aquí voy, verdad.

I: Si.

E3: También cuando x es mayor que 5, es cóncava hacia arriba ... y el límite cuando x tiende a menos infinito se va a infinito, o sea que esta tendiendo aquí, se viene por aquí y dice que se va a infinito, entonces va para allá la recta ehee la gráfica.

I: Si.

E3: El otro es el límite cuando x tiende a infinito es -2, es -2, o sea que viene aquí, infinito verdad, se va aquí, viene aquí y se va tendiendo a -2.

I: Si.

E3: O sea que aquí va haber una asintota en -2.

I: Si. Una pregunta: Ud dijo que en este punto y este otro posiblemente habían extremos, los puntos serían (-2, h(-2)) y (3, h(3)). A ver, ¿por qué en (3, h(3)) hay un máximo?

E3: Por las demás ... condiciones que nos dan.

I: ¿Cuáles condiciones?

E3: A la h’ cuando es mayor que cero y cuando es menor que cero, en este caso cuando es mayor que cero, porque nos dicen que de -2 a 3 va crecer y de allí nos dice aquí ... dónde está ... dónde está la concavidad ... cuando x es mayor que 3 viene decreciendo, por eso.

I: ¿Eso caracteriza al máximo?

E3: Ahja.

I: ¿Y aquí, en este punto por no hay ni máximo ni mínimo?

E3: Por lo ... porque aquí nos dicen que la gráfica es creciente aquí, o mayor que cero de -4 a -2, pero también nos dicen que de -2 a 3, entonces es creciente, entonces no va a haber ningún momento para que la gráfica pueda decrecer para que haiga un mínimo, pero si hay que tomar en cuenta que puede haber un máximo todavía. Pero de allí, respecto a la derivada esta, a la segunda derivada que es menor que cero ya nos dice que de -4 a -2, si verdad,

I: Si.

E3: Hay un cambio de concavidad, entonces ya nos da la idea de que no puede ser un máximo tampoco.

I: Si ... ahora ¿por qué en (-4, h(-4)) hay un mínimo local?

E3: Mínimo local ... bueno yo , no sabría explicarle porque es un mínimo local, pero si, yo según las condiciones entiendo que ehee por eso se forma de esa manera el gráfico, porque no nos dan una condición que pase de -2, por eso.

I: ¿Qué se puede decir de h'(-4)?

E3: Ehee ... es una constante ... sería una constante, un número.

I: ¿Qué número sería?

E3: Uhmm ...

I: ¿Cuál es el significado geométrico de h'(-4)?

E3: Geometricamente ... sería ... un punto, que es como que no exista nada en ese punto.

I: ¿Por qué no existe?

E3: Uhmm ... porque siento que la gráfica aquí tiene un cambio repentino en ese punto, uhmm ... no sabría como explicarlo. :Diana **I: ¿Geométricamente que significaría ese cambio repentino? Por geométricamente me refiero en términos de rectas tangentes.**

E3: La pendiente cambia.

I: Si ... ¿por qué ubico el punto (-4, h(-4)) aquí? Y, por ejemplo, ¿por qué no lo ubico por acá?

E3: Para empezar ... bueno, como nos dicen que la función es continua, tome en cuenta que la función no iba a tener cambios así de puntos bruscos ...

I: Respetando todas las condiciones ¿podría dibujar el punto (-4, h(-4)) aquí?

E3: ... si lo podría dibujar ... ... no sé.

I: Bien ... ¿qué sucede si remueve o quita la condición a, que pide que la función h sea continua? ¿Cómo sería el gráfico?

E3: Bueno, para empezar podría poner este punto aquí.

I: ¿Podría?

E3: Si, porque nos dicen que no es continua, vaya, podría poner ese punto allí y dejar las mismas condiciones anteriores.

I: Ujum ... bien, terminemos aquí.

I: Para continuar veamos: ¿cómo resolvió este ejercicio?

E3: Este todavía no lo he hecho.

I: ¿Qué ideas tiene para resolverlo?

E3: Este me está costando bastante, pero ... vaya tengo que aquí en este punto, en este y en este hay mínimos o máximos

I: Si.

E3: Porque allí se anula la derivada, entonces mi g(x) evaluada en 2, 0 y -2 pues, ehee, voy a tener mi ... puedo tener un mínimo o un máximo, y también que cómo se comporta este gráfico aquí.

I: ¿Puede haber un máximo aquí en este punto?

E3: Puede ser

I: ¿Cómo puede asegurarlo? ¿o hay un mínimo? ¿cómo puede asegurar que hay un máximo o un mínimo?

E3: Analizando como se comporta la derivada aquí y aquí.

I: ¿Cómo es la derivada allí a cada lado?

E3: Aquí es mayor que cero y aquí también, verdad, en este punto es mayor que cero, entonces la gráfica va creciendo.

I: Si.

E3: Entonces esa es una sospecha de que puede haber un máximo, porque la gráfica va creciendo.

I: Si.

E3: Entonces, igual aquí, puede que venga algo así, que tenga ... como ... que vaya la gráfica algo así, así pero siempre creciendo si ... esa es la idea que yo tengo.

I: ¿Cree Ud. que habrían máximos?

E3: Si, yo pienso que los tres son máximos.

I: Los tres. ¿Qué más puede sacar?

E3: Uhmm ... ... vaya, como nos dicen que pasa por el punto (0,1), este ehee ... que es continua también la función

I: ¿Por qué es continua?

E3: Bueno, yo lo he argumentado por el teorema que dice que si la función es derivable entonces es continua, y como ya nos dice que es derivable es continua.

I: Ujum! ¿algo más?

E3: Eso del límite no lo había visto porque no lo entendía como se comportaba el límite de la función de h(x), lo que le dije.

I: ¿Cuál límite?

E3: Del límite, por ejemplo, al evaluar algún límite, si yo quisiera evaluar algún límite aquí, por ejemplo aquí si el límite cuando, digamos, x se acerca a 3 este se va para arriba, entonces eso de, pero estoy con respecto a h'(x), entonces a eso no le había hallado cómo ...

I: Cuando estudiaron cálculo vieron ejercicios de este tipo.

E3: Vimos, pero ... nos daban, así en Cálculo II, nos daban ejercicios, así como que nos daban ... la función, nos daban la función y nos pedían que encontráramos la derivada, los puntos críticos, el cuadro de variación, la segunda derivada, los puntos de inflexión, la concavidad y de allí graficábamos.

I: Si

E3: Eso nos pedían, pero nos daban la función.

I: La fórmula.

E3: Ahja!.

I: ¿Les daban gráficas de funciones?

E3: No, no, eso no lo vimos.

I: Pero esto es bastante parecido a eso

E3: Yo estoy algo perdida.

I: La gráfica da la información de la primera derivada. ¿Dónde la derivada es positiva?

E3: Uhmm ... ... aquí ... aquí

I: ¿Dónde la derivada es negativa?

E3: De, uhmm ... menos infinito a -2.

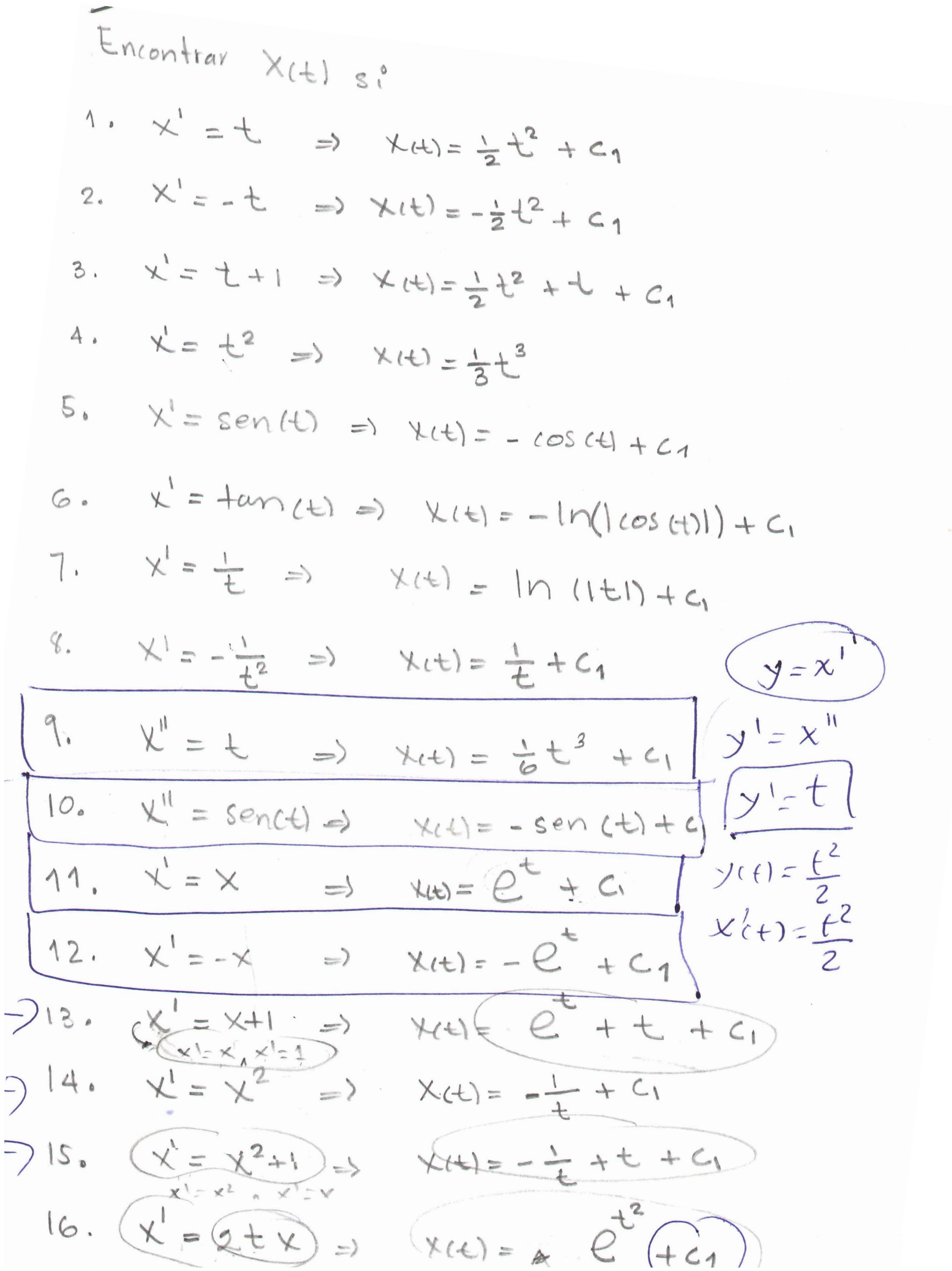
I: Eso se ha obtenido de manera sencilla sólo viendo el gráfico de g'(x). Ahora ¿qué se puede decir de g(x)?

E3: Que es creciente, que es creciente en este intervalo y que aquí es decreciente.

I: Ahora, ¿qué puede decir de la segunda derivada?

E3: Eso es lo que no hallo como involucrarlo ... ...

I: Bien, paremos aquí, se lo dejo para que lo siga pensando. Trate de usar la interpretación geométrica de la primera derivada.



Encontrar $x(t)$ si:

1. $x' = t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1$
2. $x' = -t \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + c_1$
3. $x' = t+1 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + c_1$
4. $x' = t^2 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{3}t^3$
5. $x' = sen(t) \Rightarrow x(t) = -cos(t) + c_1$
6. $x' = tan(t) \Rightarrow x(t) = -ln(|cos(t)|) + c_1$
7. $x' = \frac{1}{t} \Rightarrow x(t) = ln(|t|) + c_1$
8. $x' = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{t} + c_1$
9. $x'' = t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{6}t^3 + c_1$
10. $x'' = sen(t) \Rightarrow x(t) = -sen(t) + c$
11. $x' = x \Rightarrow x(t) = e^t + c_1$
12. $x' = -x \Rightarrow x(t) = -e^t + c_1$
13. $x' = x+1 \Rightarrow x(t) = e^t + t + c_1$

    $x' = x \wedge x' = 1$
14. $x' = x^2 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{t} + c_1$
15. $x' = x^2+1 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{t} + t + c_1$

    $x' = x^2 \wedge x' = v$
16. $x' = 2tx \Rightarrow x(t) = e^{t^2} + c_1$

$y = x'$

$y' = x''$

$\boxed{y' = t}$

$y(t) = \frac{t^2}{2}$

$x'(t) = \frac{t^2}{2}$

Figura A.21: Entrevista estudiante 3.

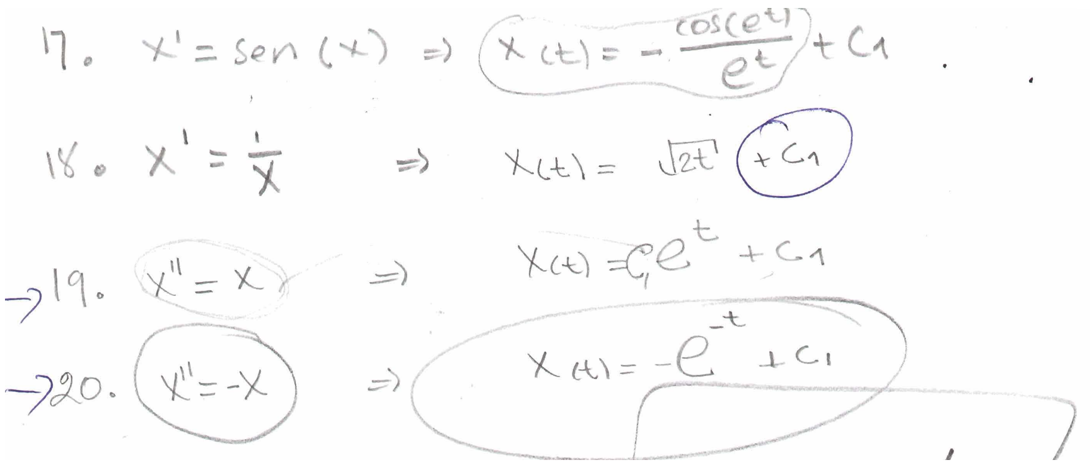


Figura A.22: Entrevista estudiante 3.

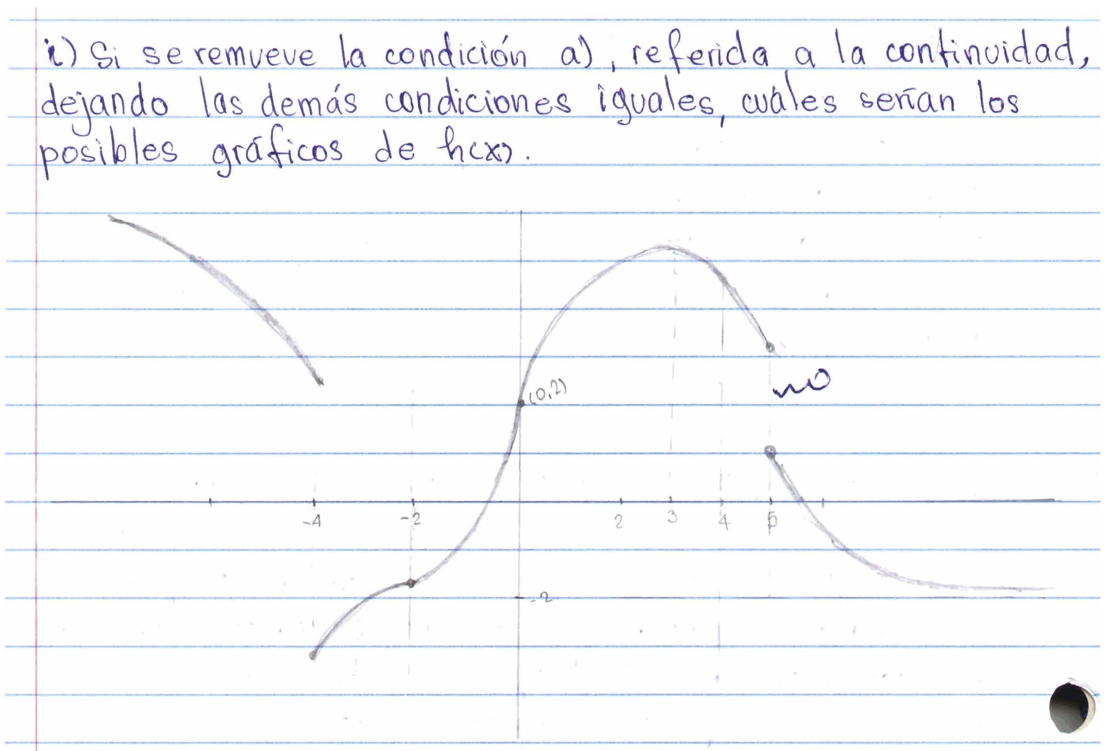


Figura A.23: Entrevista estudiante 3.

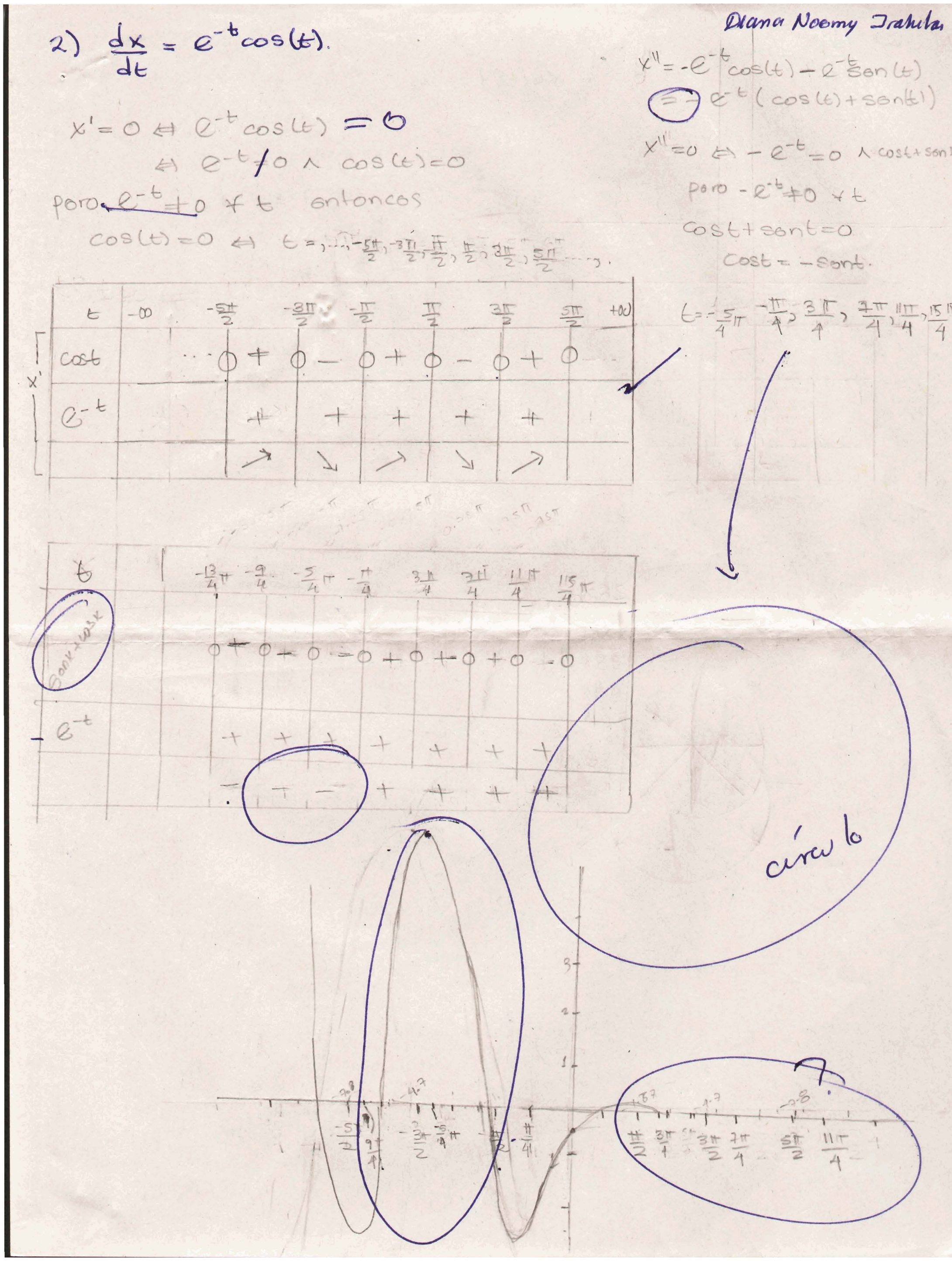


Figura A.24: Entrevista estudiante 3.

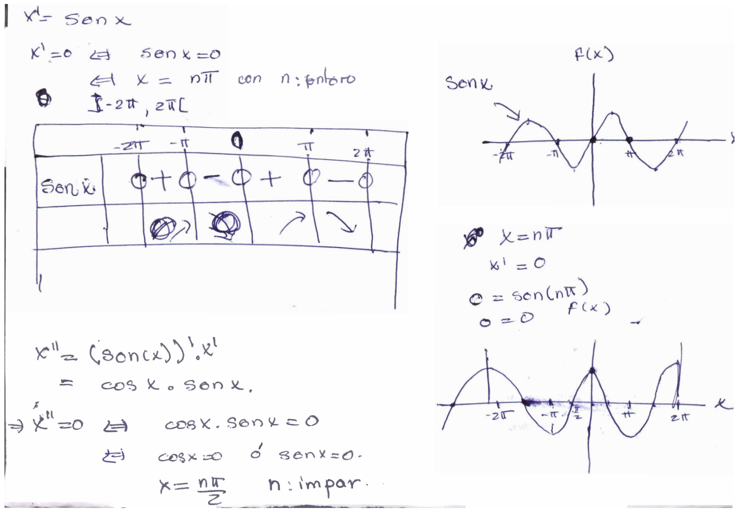


Figura A.25: Entrevista estudiante 3.

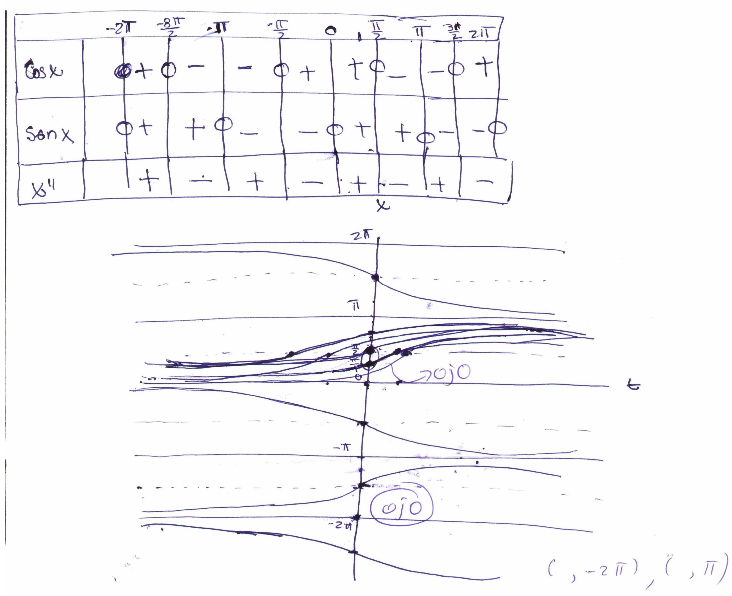


Figura A.26: Entrevista estudiante 3.

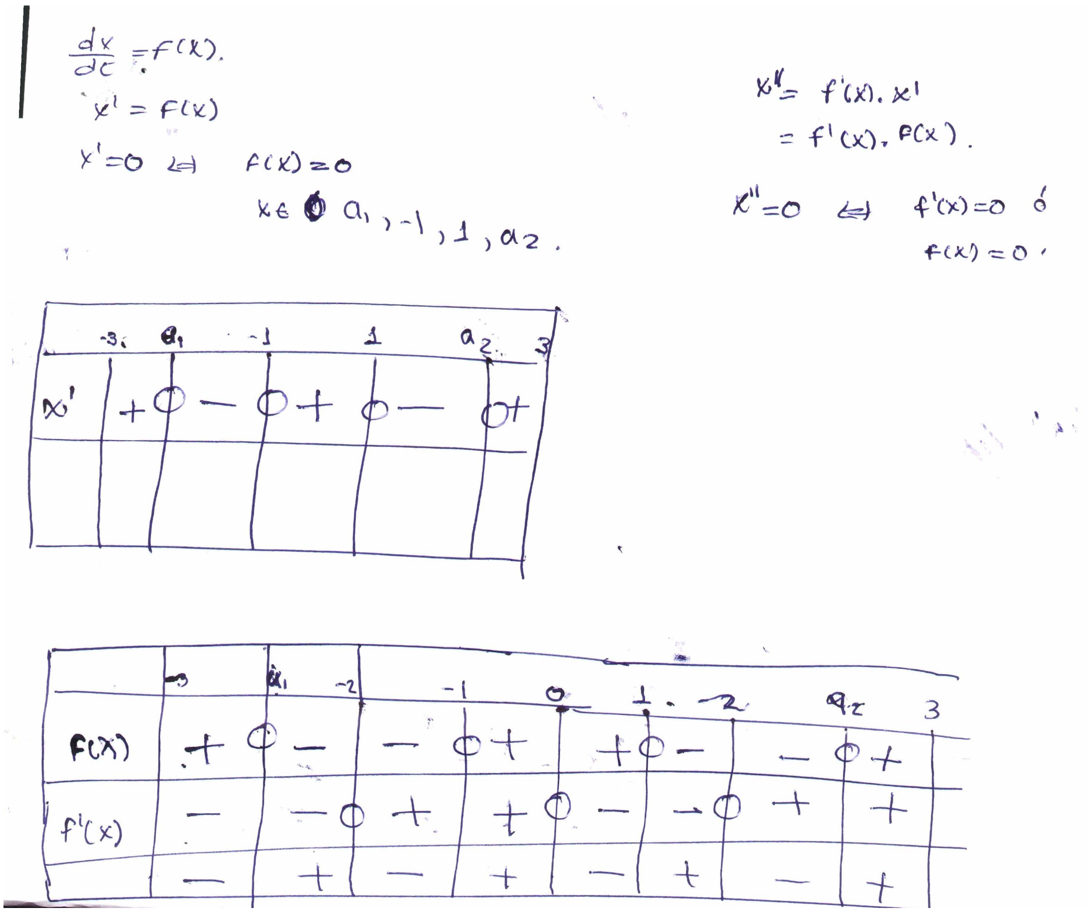


Figura A.27: Entrevista estudiante 3.

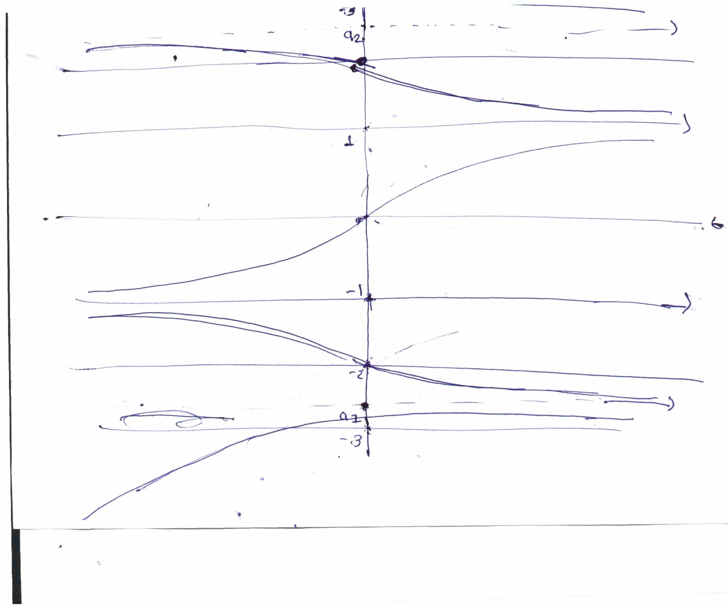


Figura A.28: Entrevista estudiante 3.

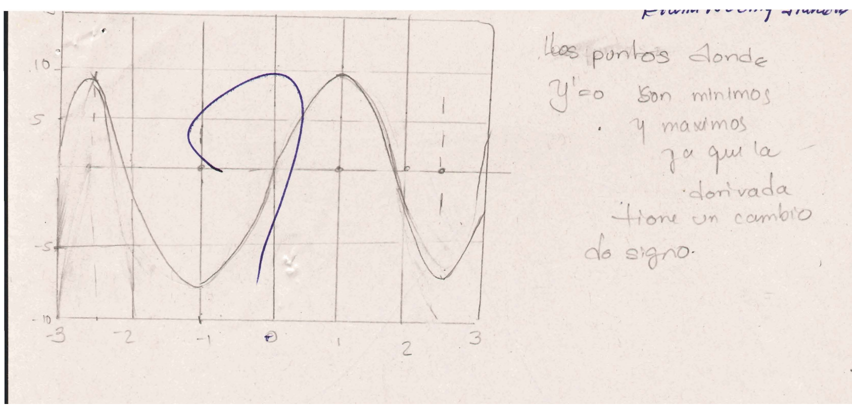


Figura A.29: Entrevista estudiante 3.

A.4. Estudiante 4

I: Antes de iniciar quiero preguntarle algo: ¿ya había usado Ud. antes algún software matemático?

E4: Si, yo a veces ocupo el Mathematica para hacer cálculos, ese es el que ocupo yo sobre todo, porque el Matlab ya lo había oído, pero no sé, no me llamaba la atención.

I:Si.

E4: También ocupo un integrador que está en línea para el cálculo de primitivas. Y lo que me gusta es que, por ejemplo, en mi calcu, uno de estos ejercicios, cuando lo hice en mi calcu me dio bien, bien fea la, la primitiva, me dio logaritmo de la diferencia dentro menos otro logaritmo de la diferencia del conjugado del anterior. Y cuando lo integre con ese me dio de un solo el logaritmo de la tangente de x medio, que era más fácil para despejar, sólo las inversas, más fácil.

I: En relación con esto, ¿a qué cree que se debió el error en estas respuestas? por ejemplo, en esta en el ejercicio 13 (ver figura A.30), la cual ya comprobó que no es solución.

E4: Si, no ... por esto quizás los vinculamos a estos directamente (los ejercicios 11 y 14).

I: Si.

E4: Y como bastante tiempo que no habíamos estudiado, yo no volví a estudiar en vacaciones.

I: ¿En que estaba pensando al dar esta respuesta?

E4: Yo lo que hice fue ... quiero ver que fue lo que hice ... si separe en dos partes la ecuación.

I: Eso se repite aquí en el ejercicio 15.

E4: Ahja!

I: ¿De dónde obtuvo esa propiedad?

E4: Ahja, risas, no sé invento, risas, para poder resolverlo ... si porque yo de ecuaciones diferenciales medio había leído, porque tengo allí un mi folleto, pero allí en la computadora, pero no es tan así como.

I: Bueno, esto es muy introductorio y sólo requiere conocer las antiderivadas y sus propiedades. Por ejemplo, en esta ecuación $x' = x^2 + 1$, podemos pensar que se nos pide encontrar, usando sólo sus conocimientos de cálculo, las funciones que cumple con la propiedad de su derivada es igual al cuadrado de la misma función más 1 ... ¿qué función cumple con esta propiedad?

E4: La tangente

I: ¿Y en esta otra (el ejercicio 16) en que piensa?

E4: En la regla de la cadena ... y esta es otra diferencia que se puede establecer.

I: Bien, otro punto que quiero que revisemos es el de esta gráfica, veamos ¿cómo se refleja esta condición aquí en la gráfica (ver figura A.32)?

E4: Ahja ... uhmm ...

I: ¿Qué significa geométricamente la condición de qué límite de h'(x) cuando x tiende a 0 sea infinito?

E4: Que digamos tiene allí una ... que la aproximación lineal es ... digamos una recta vertical allí en ese punto; por ejemplo, vaya, la raíz cúbica tiene esa característica que en 0 la aproximación lineal es infinita, o sea, la tangente es vertical.

I: Pero eso no se refleja en el gráfico.

E4: Aquí no mucho ... deber ser más empinada al acercarse a 0 ... más pegadita al eje para que de verdad se viera que la derivada se va haciendo allí más grande y más grande.

I: Si. Otra cuestión es ... vamos a ver, ¿el punto (-4, h(-4)) se podría colocar por aquí?

E4: Uhmm ... pues ... ¿respetando la continuidad siempre?

I: Si, respetando no sólo la continuidad, sino todas las demás condiciones.

E4: Ehee, pues ... ... si, si también porque la segunda derivada entre, digamos, -4 y -2 es igual a la, tiene el mismo signo que la derivada aquí, de -4 a infinito, entonces podemos subir este aquí.

I: Si.

E4: Podríamos hacer esto ... o bajar hasta (-2,0), algo así digo yo.

I: ¿Qué está pasando en este intervalo? ¿cómo es la segunda derivada allí?

E4: ... positiva ... y hay cambio de signo, entonces no se podría subir ... porque el problema es que debemos respetar que sea continua.

I: Si.

E4: Y como tenemos que la gráfica tiene que ser así en esa parte.

I: Si tomamos en cuenta esta recta vertical, ¿en que partes de ella puedo colocar el punto (-4, h(-4))? ¿cuáles serian las zonas adecuadas para colocarlo?

E4: ... ...

I: ¿Podría colocarlo aquí?

E4: No, porque sería el mismo, la concavidad sería igual

I: ¿Qué otra condición se viola?

E4: ... el problema es que es creciente, entonces podríamos ponerlo en cualquier punto desde aquí hacia abajo pero sin tomar el 0 ... si, ¿verdad?

I: Si ... Y si se remueve la condición de la continuidad ¿cómo quedaría el gráfico?

E4: Ahaa!, yo hice uno alternativo, aquí lo hice.

I: ¿Qué es lo que se pierde? ¿cómo cambia el gráfico?

E4: Lo hice así, aunque igual, verdad, no había reparado mucho aquí en la condición esta, tiene que ser más empinado, así como así

I: Pero la pregunta es ¿qué condiciones se afectarían al eliminar la condición de continuidad?

E4: Uhmm ...

I: ¿Por qué lo separó en 3?

E4: Para hacerla más discontinua (risas)

I: ¿Cómo es la derivada en 3?

E4: Es cero.

I: Por tanto, si existe la derivada es continua allí.

E4: Tiene razón, aquí no se puede separar ... si, ¿verdad?, se me fue por alto esa.

I: ¿En que punto no se sabe si la derivada existe?

E4: En x=0, pero la gráfica si es continua aquí,

I: ¿Por qué es continua la gráfica en el punto (0, 2)?

E4: Uhmm ... ...

I: ¿En que otros puntos no se sabe si la derivada existe?

E4: Uhmm ... ... en -4 no se dice nada de la derivada, entonces allí se puede romper la gráfica.

I: Si. Dibuje 5 gráficas que cumplan esas condiciones.

E4: Uhmm ... ...

I: Bien, paremos aqui.

I: Veamos el ejercicio número 2 del examen, bosquejar el diagrama de soluciones de $\frac{dx}{dt} = e^{-t}\cos t$**.**

E4: Vaya, como me pedía que dibujara la gráfica, ¿verdad?, entonces ahí lo que hice fue primero encontrar, como me daba la derivada, entonces encontrar los ceros, vaya. Entonces aquí encontré los ceros. Esto nunca es cero, entonces solamente lo daba el coseno de t, entonces está aquí, en todos los reales, entonces yo lo limite para cuando t estuviera entre aquí, para hacer el análisis más continuo (ver figura A.33). Entonces ya de allí saque la segunda derivada y encontré los ceros para saber donde estaban los posibles puntos de inflexión.

I: Si.

E4: Vaya, me dieron estos, entonces ya después vine e hice el cuadro de variación. Entonces puse todos los de -2π a 2π y todos los que me habían salido aquí y de aquí, para hacer uno ... Entonces aquí pusé los signos, evaluando , aquí igual evaluando. Y ya de allí decidí escribirlo así para entender como va la curva y que sea más fácil de graficar. Eso creo que me ayudo bastante.

I: Si.

E4: Por cierto, hice esto también que cuando es más más es así (ver figura A.34).

I: Si. ¿Cómo sigue el gráfico de aquí en adelante?

E4: Apues!, allí si ... no lo analice porque vaya, aquí baja esto, baja un poco, y ya de allí empieza como a subir otra vez, pero imagino que allí empieza como la solución trigonométrica lo que hace es como irle dando unos pequeño bajes y la función exponencial que siempre decrece entonces es como que fuera medio oscilando, pero medio, porque la exponencial siempre está allí.

I: Si.

E4: Y al continuar para allá la gráfica tiende a cero.

I: ¿Qué sucede con el gráfico cuando t tiende a menos infinito?

E4: Son más grandes las oscilaciones, porque la exponencial se hace grande.

I: ¿Cómo es la gráfica?

E4: Ahaa!, me cuesta visualizar la gráfica.

I: Bien, introduzca la ecuación en el dfield y después hablamos.

I: Ahora consideremos el problema número 3 del examen ($\frac{dx}{dt} = \sin x$**).**

E4: Vaya, aquí los ceros, ¿verdad?, son todos múltiplos de π.

I: Si.

E4: Vaya, ahja!, de $-\pi$ a 0 la primera derivada es negativa.

I: Si.

E4: Y ya de allí calcule la segunda derivada que es la derivada del seno que es el coseno por y', que es el seno.

I: Si.

E4: Entonces es cero si y sólo si cualquiera de los dos es cero y se dan las dos condiciones, ¿verdad?, y luego hice el cuadro de variación (ver figura A.36).

I: Si.

E4: Esta ... ahja!, también saque las soluciones, bueno las de equilibrio, que no sabía que se llamaban así. Entonces también que satisfacían la ecuación diferencial, entonces esas rectas horizontales también son soluciones.

I: Si.

E4: Y las grafique de un sólo (ver figura A.36).

I: Si.

E4: Vaya, para graficar las otras sólo tome en cuenta la monotonía, pero ignore completamente la concavidad. Pero si, en el cuadro de variación igual escribí la conclusión para la monotonía y la concavidad.

I: ¿Hay coherencia o concordancia entre el cuadro de variación y la gráfica?

E4: Si, se cumple la monotonía y la concavidad.

I: ¿En esta parte, de π a 2π, que sucede?

E4: Esta es la que si se me fue.

I: Dibujela.

E4: Uhmm ... ... a ver ... ... queda así.

I: Ahora veamos cómo hizo el último problema del examen $\frac{dx}{dt} = f(x)$, donde $f(x)$ está dada mediante una gráfica.

E4: En este me equivoqué en todo, comenzando con la segunda derivada (ver figuras A.37 y A.38).

I: Hágalo de nuevo.

E4: Vaya, aquí ..., vaya, le llame a estos puntos alfa y beta. Entonces y' es igual a cero si y sólo si x es igual a alfa, -1, 1 y beta ... (identificando el signo de f, construye el cuadro de variación para y').

I: Si.

E4: Y la segunda derivada es la derivada de f' por x', que es f de x. Entonces y" es cero si y sólo si f'(x) es cero o f(x) es cero. Pero f'(x) es cero si x es igual a -2, 0 y 2. Ahora el cuadro de variación para y" sería ... ... (identificando los signos de f(x) y f'(x), obtiene el signo del producto).

I: Si.

E4: Ahora, la monotonía me la da esta, la función original, o sea, entre ... (lee e interpreta el signo de y' en el cuadro de variación). Y la concavidad, me la da esta, la segunda derivada, entonces aquí sera creciente y cóncava hacia abajo ... (continua leyendo e interpretando los signos de y’ e y” en los intervalos correspondientes).

I: Si.

E4: Vaya, las soluciones de equilibrio son x igual a alfa, -1, 1 y beta ... bueno, tengo que ser más específico porque antes de -3 y después de 3 no puedo hacer nada porque no se ve ...

I: Supongamos que el comportamiento que se observa se mantiene, es decir, que antes de -3 y después de 3 la gráfica es creciente y cóncava hacia arriba.

E4: Ahaa!, ..., vaya, y los puntos de inflexión son -2, 0 y 2.

I: Si.

E4: ... ... (lee el cuadro de variación y va dibujando)... (después de 3 minutos termina diciendo) los puntos de equilibrio aparecen donde se rompe la forma de la ecuación, pues esta no puede pasar de aquí para acá por sufriría un cambio brusco.

I: Si. ¿Qué ventaja le ve Ud. al cuadro de variación (ver figura A.39)?

E4: Una gran ventaja. Y con estas dos cositas que yo le agrego me sirve bastante para no equivocarme.

I: ¿Dibuje la gráfica de la solución que pasa por ?

E4: Uhmm ... ... (ver figura A.39)

I: Muy bien, paremos aquí.

Encontrar $x(t)$ si:

1. $x' = t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1$
2. $x' = -t \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + c_1$
3. $x' = t+1 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + c_1$
4. $x' = t^2 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{3}t^3$
5. $x' = sen(t) \Rightarrow x(t) = -\cos(t) + c_1$
6. $x' = \tan(t) \Rightarrow x(t) = -\ln(|\cos(t)|) + c_1$
7. $x' = \frac{1}{t} \Rightarrow x(t) = \ln(|t|) + c_1$
8. $x' = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{t} + c_1$
9. $x'' = t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{6}t^3 + c_1$
10. $x'' = sen(t) \Rightarrow x(t) = -sen(t) + c$
11. $x' = x \Rightarrow x(t) = e^t + c_1$
12. $x' = -x \Rightarrow x(t) = -e^t + c_1$
13. $x' = x+1 \Rightarrow x(t) = e^t + t + c_1$

    $x' = x,\ x' = 1$
14. $x' = x^2 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{t} + c_1$
15. $x' = x^2+1 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{t} + t + c_1$

    $x' = x^2,\ x' = x$
16. $x' = 2tx \Rightarrow x(t) = e^{t^2} + c_1$

$y = x'$

$y' = x''$

$y' = t$

$y(t) = \frac{t^2}{2}$

$x'(t) = \frac{t^2}{2}$

Figura A.30: Entrevista estudiante 4.

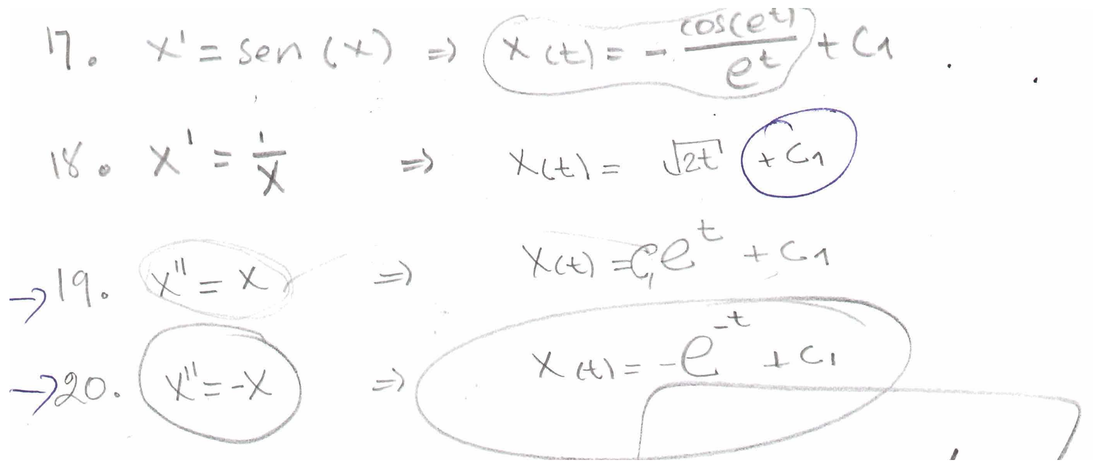


Figura A.31: Entrevista estudiante 4.

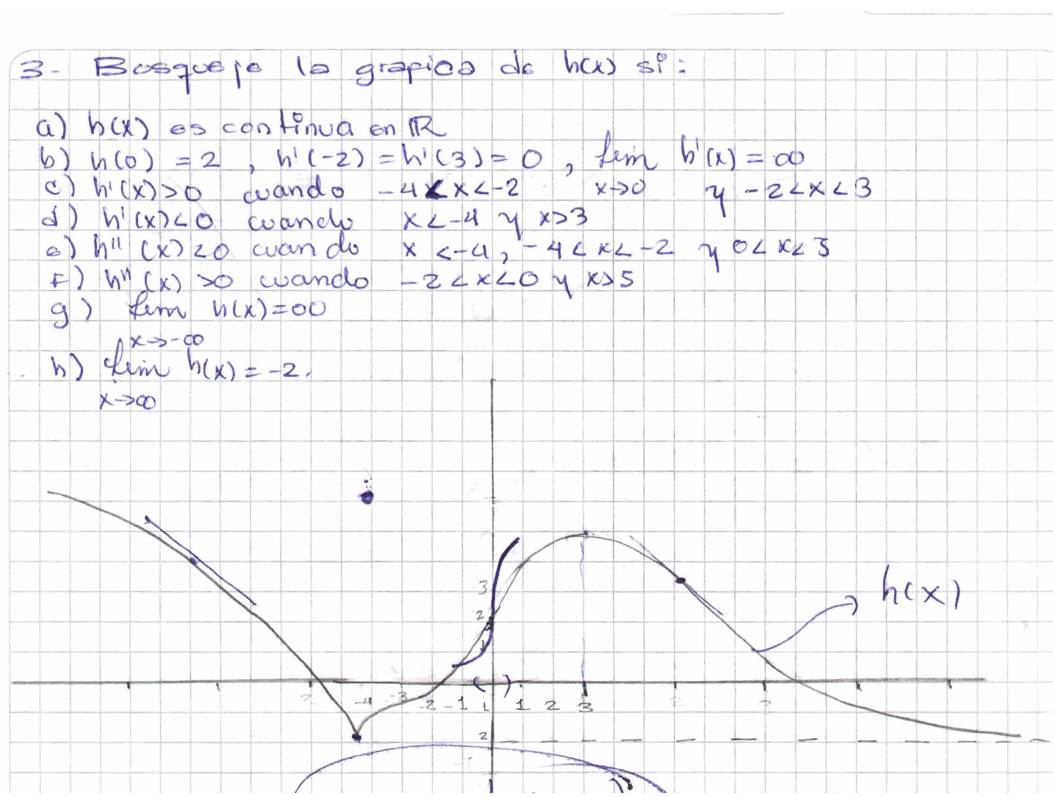
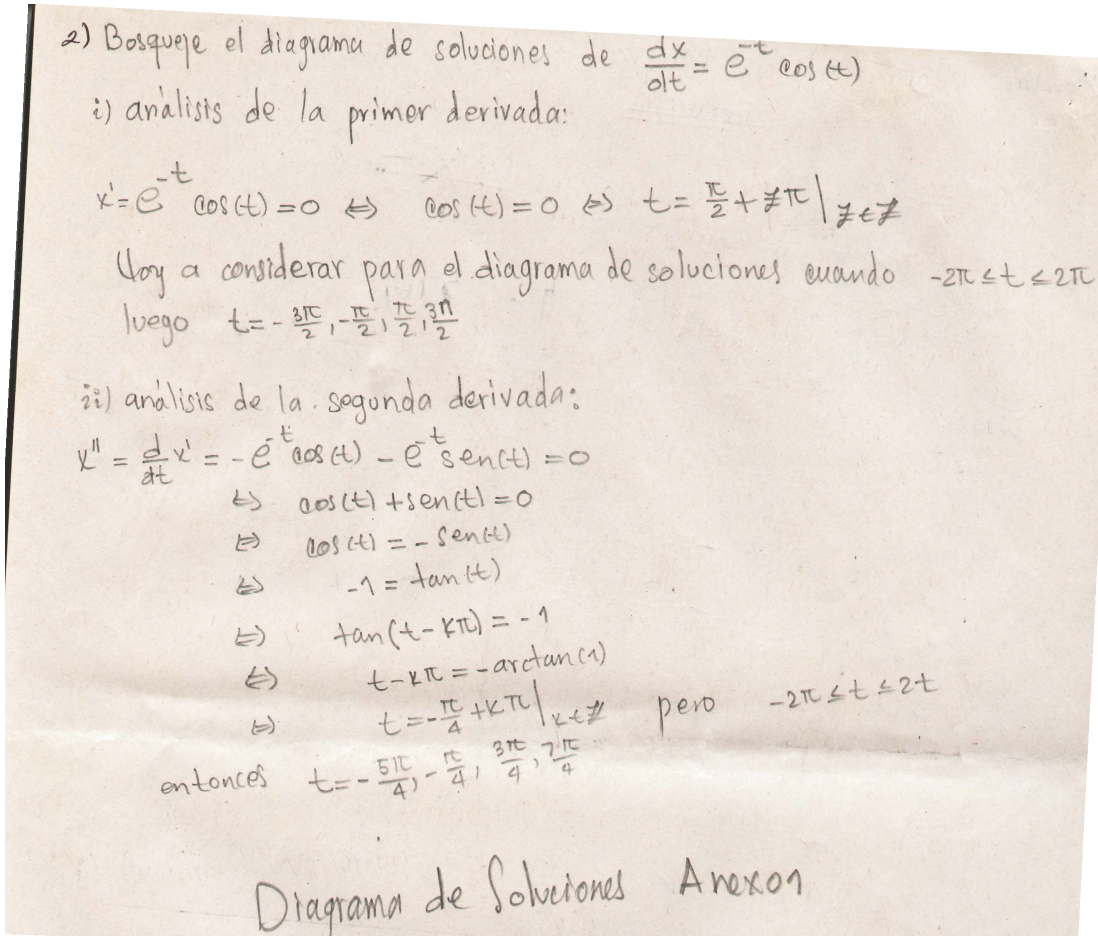


Figura A.32: Entrevista estudiante 4.



2) Bosqueje el diagrama de soluciones de $\frac{dx}{dt} = e^{-t}\cos(t)$

i) análisis de la primer derivada:

$$x' = e^{-t}\cos(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi \,\Big|_{\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}}$$

Voy a considerar para el diagrama de soluciones cuando $-2\pi \le t \le 2\pi$

luego $t = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ii) análisis de la segunda derivada:

$$x'' = \frac{d}{dt}x' = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(t) + \operatorname{sen}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(t) = -\operatorname{sen}(t)$$

$$\Leftrightarrow -1 = \tan(t)$$

$$\Leftrightarrow \tan(t - k\pi) = -1$$

$$\Leftrightarrow t - k\pi = -\arctan(1)$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \,\Big|_{k\in\mathbb{Z}}$$ pero $-2\pi \le t \le 2t$

entonces $t = -\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Diagrama de Soluciones Anexo1

Figura A.33: Entrevista estudiante 4.

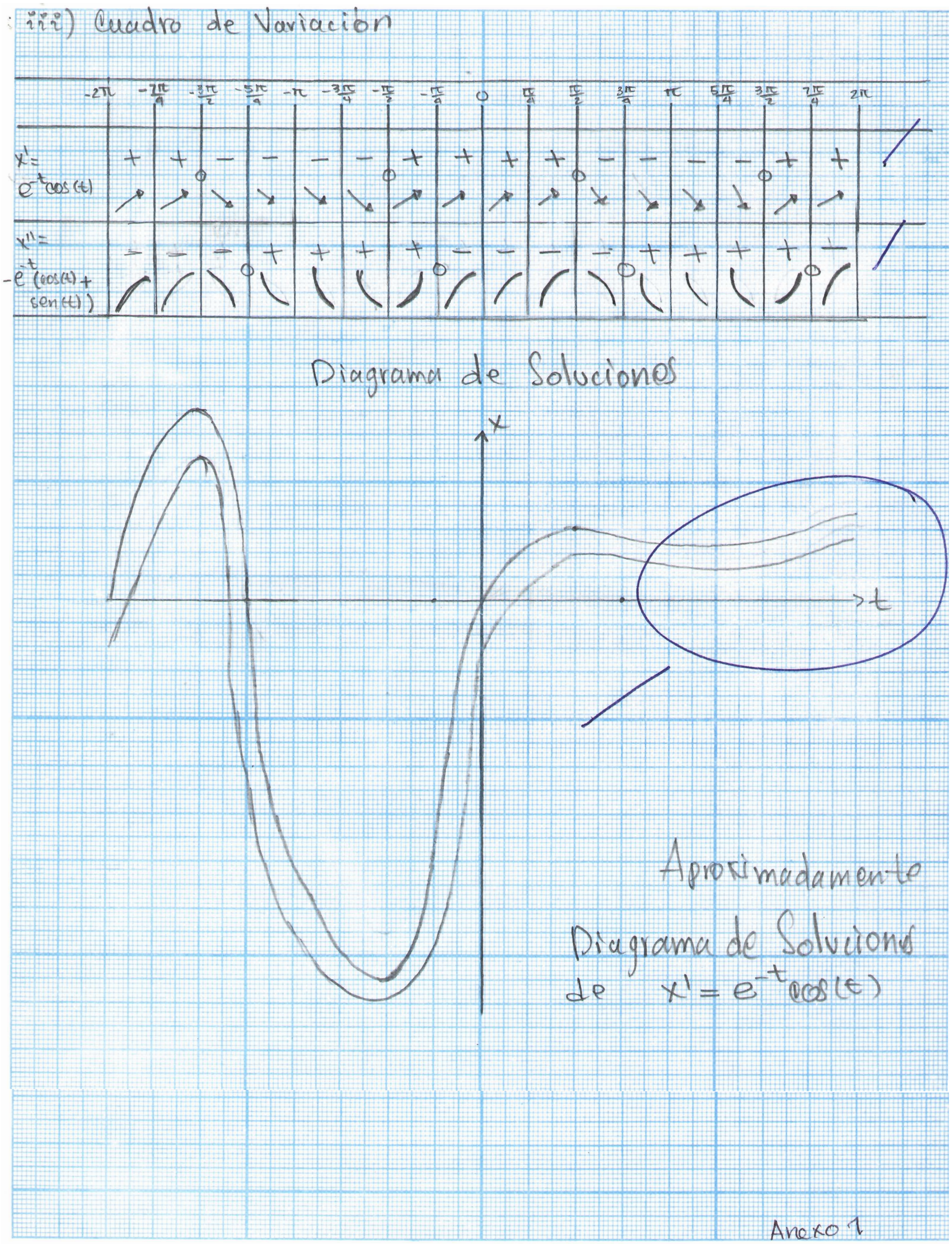


Figura A.34: Entrevista estudiante 4.

3. $\frac{dx}{dt} = sen(x)$

i) Análisis de la primera derivada:

$x' = sen(x) = 0 \iff x = \mathbb{Z}\pi \mid z \in \mathbb{Z}$

Voy a hacer el diagrama de soluciones para cuando $-2\pi \leq t \leq 2\pi$

segunda derivada

ii) $x'' = (sen(x))' = cos(x)\,x' = cos(x)\,sen(x) = 0$

$\iff cos(x) = 0 \vee sen(x) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \mid z \in \mathbb{Z}$

Obs: - Nótese que $x = k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$ es solución

$(k\pi)' = sen(k\pi)$

$0 = 0$. Es una identidad

Diagrama de Soluciones anexo 2

Figura A.35: Entrevista estudiante 4.

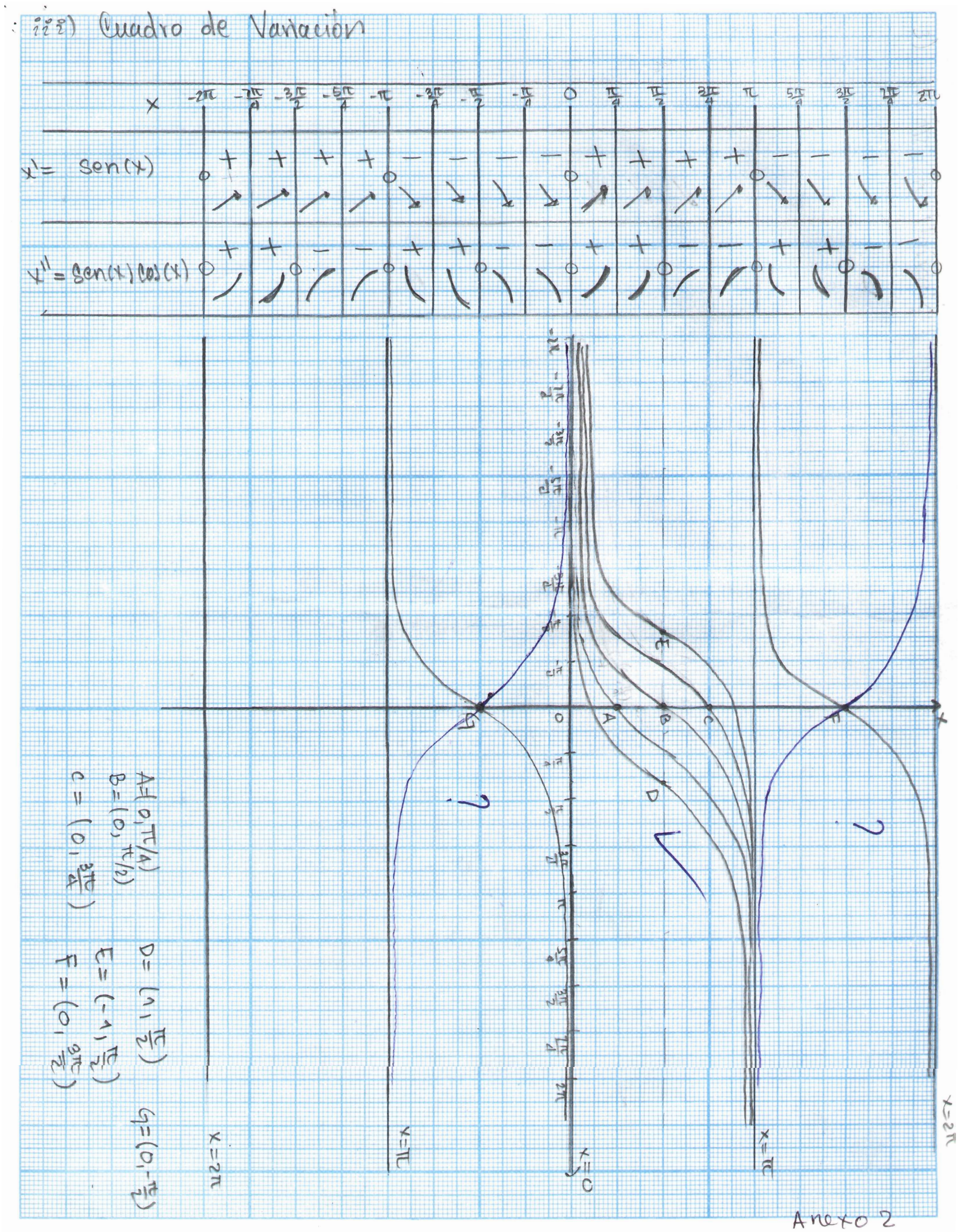


Figura A.36: Entrevista estudiante 4.

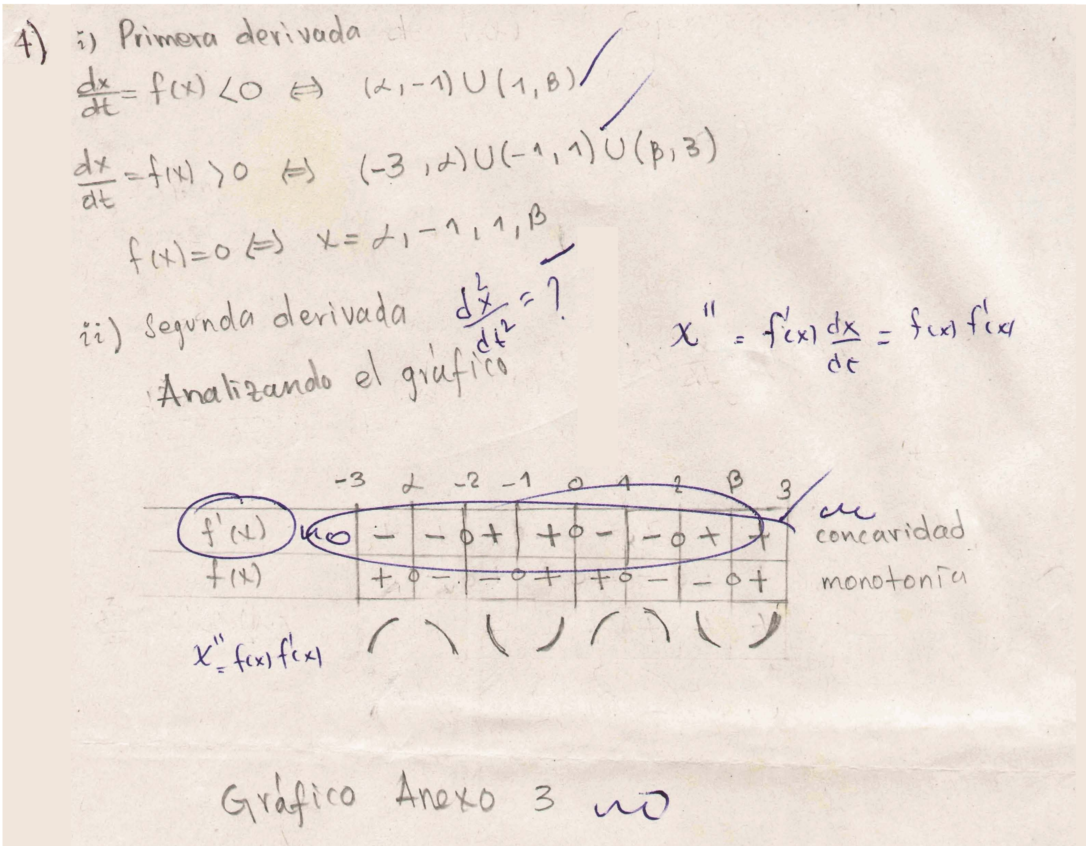


Figura A.37: Entrevista estudiante 4.

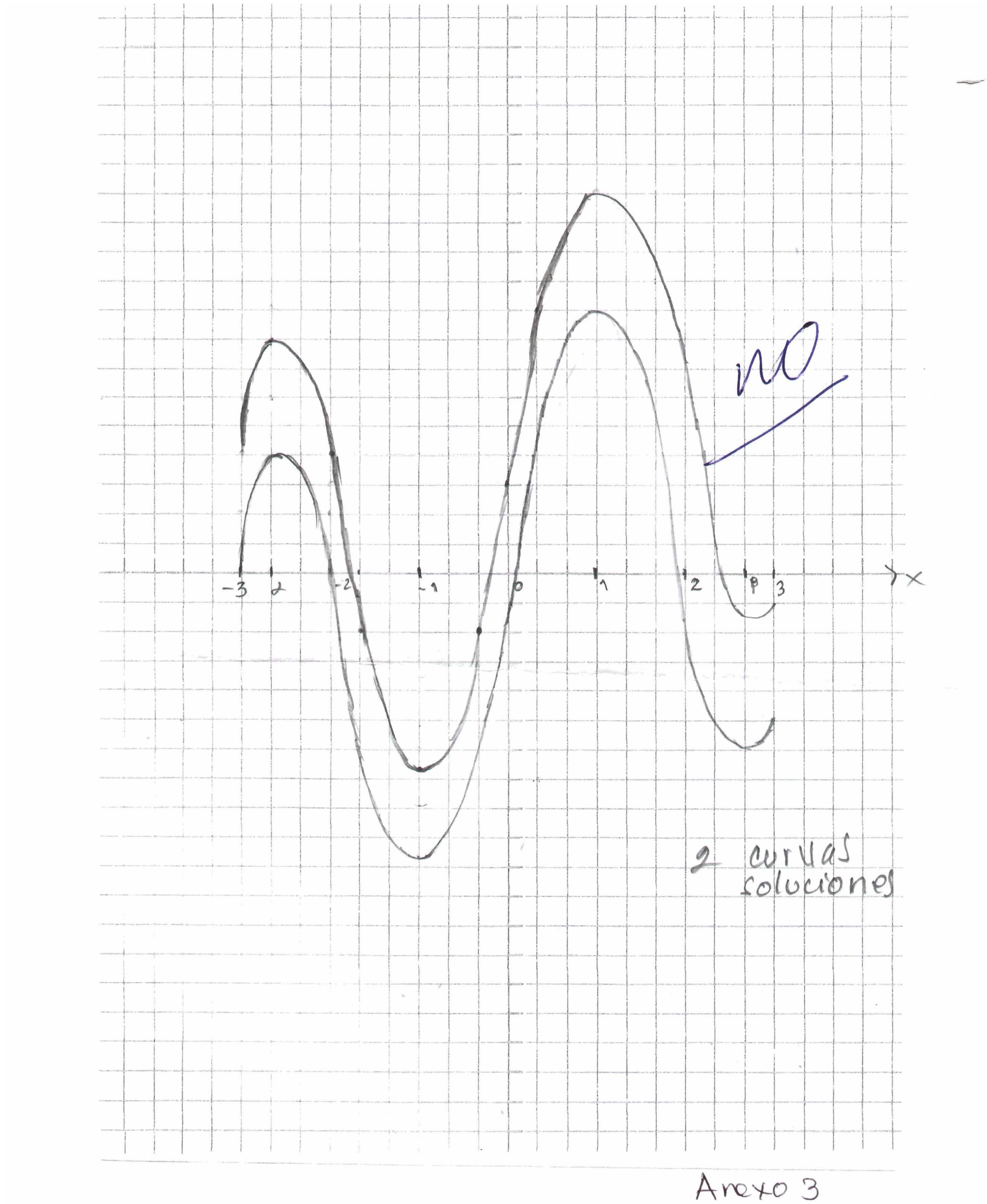


Figura A.38: Entrevista estudiante 4.

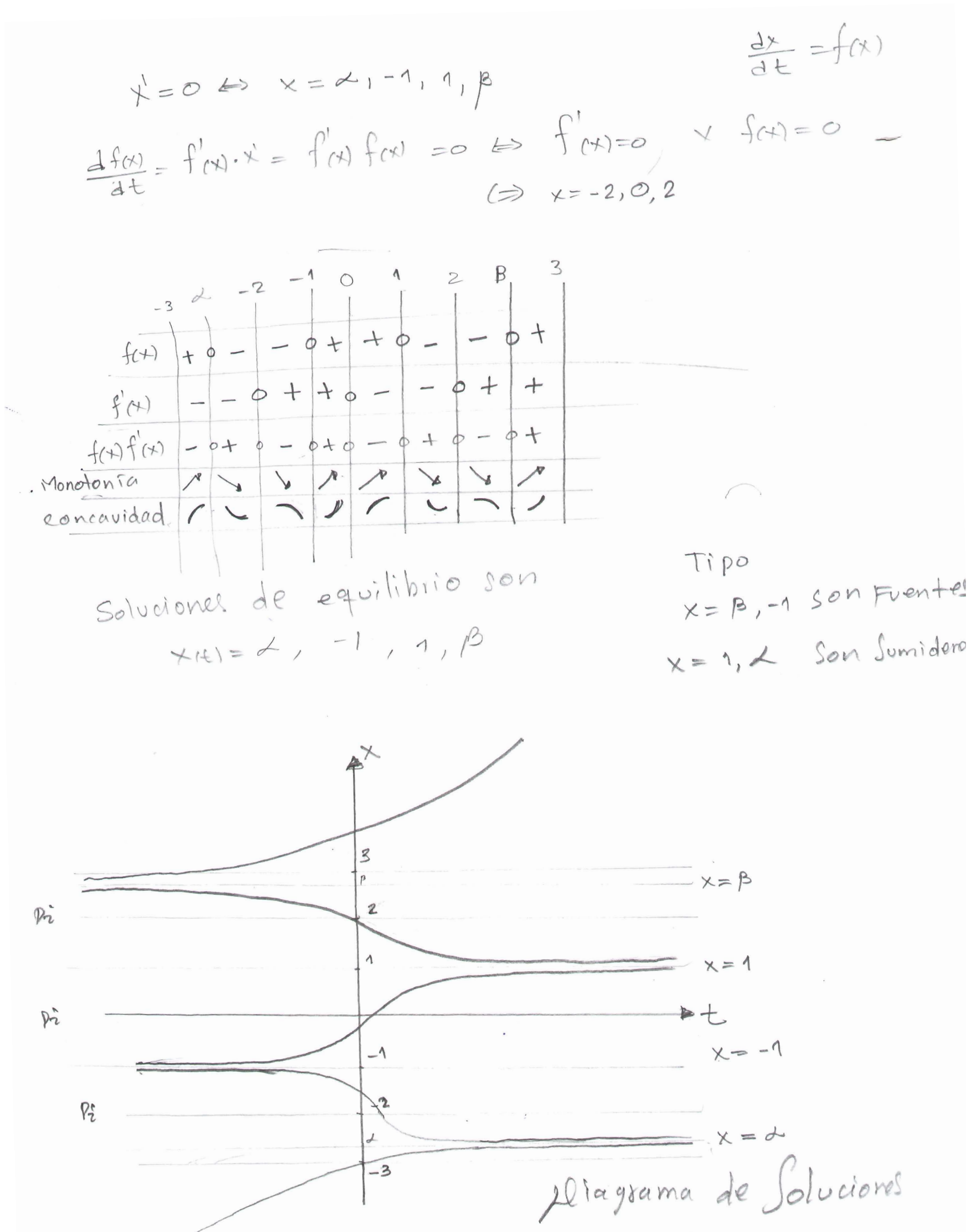


Figura A.39: Entrevista estudiante 4.

A.5. Estudiante 5

I: Examinemos algunas de las respuestas que Ud. ha dado en estos ejercicios, por ejemplo, ¿cómo obtuvo la respuesta del ejercicio 13 ($x' = x + 1$)**?**

E5: Ummm ... yo, yo la mayoría las puse porque me acordaba de ellas, no porque no sabia ningún método para encontrarlas.

I: Si.

E5: La mayoría se resolvieron así y en las otras mi compañero me ayudó.

I: Veamos, por ejemplo, ¿cómo resolvió x'= x + 1?

E5: Ummm ... primero escribí la solución de x' = x que era e^t, y de ahí sólo, por lógica, le agregue el t más C, que al derivarlo sería 1 (ver figura A.40).

I: ¿De dónde saco el término t?

E5: De aquí, de x' = 1.

I: Lo que ha hecho es descomponer la ecuación en dos ecuaciones.

E5: Ujum!

I: ¿De dónde obtuvo esa propiedad?

E5: ¿La de la suma?

I: Si.

E5: No, (risas) no sé como, sólo me base en la derivada de la ... en que la derivada de la suma es la suma de las derivadas.

I: Si.

E5: En eso es lo que me base.

I: Vamos a ver, parece ser que este x' = x cuadrada más 1, lo resolvió de la misma manera.

E5: Si, como ya tenía la solución de x' igual x cuadrada, sólo le agregue la t más C (ver figura A.41).

I: ¿Y éstos cómo los resolvió?

E5: Si, ya después que me enseño una compañera, los hice por integración.

I: Si.

E5: Así los hice después, pero en un primer momento, si, no sabia.

I: ¿Por qué les ha sumado una constante?

E5: Jojo (Risas), porque cuando uno más o menos integra les agrega la C, ¿verdad?

I: ¿La función es solución de la ecuación?

E5: ... ummm ... ... parece que no.

I: Observe que si removemos la C, la función que se obtiene es una solución, pero sumándole la C no lo es. También si, en vez de sumar, multiplicamos esta expresión por C la función obtenida es solución.

E5: Si, verdad...

I: Bien, por el momento solo eso, paremos aquí.

I: Revisemos la construcción de la gráfica de una función, conociendo una lista de sus propiedades. Por ejemplo, ¿qué significa geométricamente la condición de que el límite de h'(x) sea infinito cuando x tienda a cero?

E5: Este ... uhmmm ... que la derivada tiene una asíntota, podría decirse.

I: ¿Algo más preciso respecto con la gráfica de h(x)?

E5: Bueno, yo lo que entendí que era una recta así, vertical, ¿verdad?, y = 0.

I: ¿Qué papel juega en la gráfica esa recta vertical?

E5: Qué había un cambio de ... concavidad en el punto (0,2).

I: Si.

E5: Pero yo lo había dibujado así, ¿verdad?, porque cuando son así también la, es cero, pero no cumplía con las demás condiciones.

I: Sin embargo, en el gráfico no se ve reflejado eso que Ud. dice. ¿Cómo interpreta geométricamente la derivada?

E5: ¿Cuando x tiende a cero igual a infinito?

I: Sólo la derivada.

E5: Que no existe cuando x tiende a cero.

I: ¿Qué significa eso geométricamente?

E5: ... uhmmm ... uhmmm ...

I: Lo que significa es que tenemos una recta tangente vertical que corta a la gráfica en el punto (0,2). Ahora, veamos si se quita la condición de continuidad, ¿cómo quedaría la gráfica?

E5: Ummm ... , más o menos, podría quedar seccionada también, ¿ verdad?

I: ¿Dónde la seccionaría?

E5: En -4, quizá, que es la parte en la que da un poco de más problema por estos cambios de aquí, ¿verdad?

I: ¿Podría seccionarla aquí en el punto (3, h(3))?

E5: Ummm ... quizás no, porque la derivada ... quizás no existiría la derivada y entonces no sería continua.

I: ¿En que otro punto podría seccionarla?

E5: .... en 0.

I: ¿Por qué?

E5: Porque límite de h'(x) es infinito cuando x tiende a cero.

I: Bien, sólo esto por el momento.

I: Bien, consideremos ahora el problema 2 del examen ($\frac{dx}{dt} = e^{-t}\cos t$). Explíqueme en voz alta lo que hizo.

E5: Yo lo que hice fue un análisis cualitativo.

I: Si.

E5: Bueno, si, cualitativo, entonces analice los signos de la derivada. Esta como siempre es positiva solo evalué los signos del coseno, ¿verdad?

I: Si.

E5: Y cuando hice la gráfica me guié más o menos por los intervalos donde la derivada es positiva y negativa o donde la gráfica es creciente y decreciente. Luego analice la segunda derivada para ver donde habían, tal vez, posibles puntos de inflexión y la concavidad de la función.

I: ¿Esta, verdad?

E5: Si, aquí no era muy difícil saberlo, donde ... el coseno era el signo opuesto con el seno ... Y, pues, eso fue más que todo lo que use y gráficamente para verlo más fácilmente los puntos de corte, allí donde se cortaban el coseno con el menos seno, por que era importante.

I: Si. ¿Aquí que paso?

E5: Este, no me cuadro el análisis porque, bueno aquí me daban todavía para valores positivos que habían máximos y mínimos, ¿verdad?, entonces yo creí que iba aquí también parte de la función, pero bueno aquí al final lo que hice, como me contradije un poco, evalué el límite de la derivada cuando t tiende a infinito entonces me dio cero, que quiere decir que tiende a un límite, más o menos eso fue lo que hice.

I: Si, pero también esto es cierto, ¿no?: que estas funciones tienden a cero. ¿Cuál es la diferencia de comportamiento entre ellas?

E5: Que esta es siempre positiva.

I: Si.

E5: Bueno, aunque también con esto no se puede mucho saber ... cuando tiende a infinito es indefinido, ¿verdad?, a saber hacia donde tiende, bueno, ella sola.

I: ¿Cómo encontró que el limite es cero?

E5: Por esto ... esto tiende a cero, entonces ...

I: ¿Por qué?

E5: Uhmmm ... uhmm ...

I: Bien lo dejamos.

I: Veamos el problema 3 del examen ($\frac{dx}{dt} = \sin x$**).**

E5: Bueno, hoy que ya vimos más o menos los puntos de equilibrio la solución ya sería un poco más fácil.

I: Si. Veamos, el análisis del signo de la derivada está bien.

E5: Si.

I: ¿Qué sucede con la gráfica?

E5: Si, verdad, la gráfica está errónea (ver figura A.44).

I: ¿Qué falta en la gráfica?

E5: Los puntos de equilibrio, no los señale.

I: Si, verdad, los ceros de esta función.

E6: Ah ja, porque aquí dije que había un máximo o un mínimo, pero no necesariamente que la derivada se haga cero quiere decir que hayan máximos o mínimos.

I: Si.

E5: Entonces pueden tender así, que la derivada tienda a cero, tal vez.

I: ¿Qué se puede decir de los ceros de f, sí f solamente depende de t?

E5: Que en esos valores hay máximos o mínimos.

I: Y cuando f depende solamente y, ¿cómo se interpretan los puntos de equilibrio?

E5: Se interpretan como soluciones constantes.

I: Ahora, sabiendo eso, ¿cómo dibujaría la gráfica?

E5: Vaya, como ya tengo los puntos de equilibrio, que en este caso no son máximos o mínimos, ya quedamos que en estos puntos de equilibrio hay soluciones constantes.

I: Si.

E5: Entonces los puntos de equilibrio serían ... $n\pi$ ... ... vaya, entonces trazaría los puntos de equilibrio, teniendo así al menos hacia donde tiende la función ... ... vaya, y luego vería la concavidad. Bueno aquí si saque la segunda derivada (ver figura A.44).

I: Si.

E5: Pero ya no concluí con el análisis del signo de la segunda derivada. Bueno, entonces sacaría la concavidad para ver ... ..., por ejemplo, cuando x está entre -2π y $-\pi$, es mayor que cero entonces es creciente la función.

I: Si.

E5: Sería de aquí a acá, en esta parte, podría ser así ... ... seria creciente, verdad.

I: Si.

E5: Y luego de 0 a π también es creciente, podría ser así. Y habría que analizar los puntos de inflexión también para ver si hay cambio de concavidad en algún punto de por acá, o también podría ser, bueno si si, solo esa es la única manera porque esta tiene que tender al punto de equilibrio cero ... y luego ... también podríamos hacer la recta ... fácil ... ... ujum ... ... bien entonces π es un sumidero entonces la función se va acercando, verdad, a π, entonces de π a 2π es decreciente, entonces si se acerca a π sería algo así.

I: Si.

E5: Y de 0 a $-\pi$ también es decreciente, entonces también sería de esta manera. Y también coincide porque $-\pi$ es un sumidero también.

I: Si. ¿Dónde ocurren los puntos de inflexión?

E5: ... en $n\frac{\pi}{2}$, ya los había calculado, para n entero impar.

I: Si, para descartar los puntos de equilibrio.

E5: Cabal, en medio del intervalo estarían.

I: ¿Cómo dibujaría las soluciones que pasan por los puntos siguientes?

E5: ... ...

I: ¿Dónde está el punto de inflexión?

E5: Aquí.

I: Si.

E5: ... ... así más o menos, se ve bien cercana a esta.

I: Si.

E5: ... ...

I: Bueno, en realidad, en esta los puntos de inflexión están sobre esta recta, entonces la gráfica tendría que venir así.

E5: ¿Se mueve?

I: Si, ¿por qué cree que se mueven?

E5: Uhmm ... ... yo supuse que los puntos de inflexión estarían sobre el eje vertical.

I: Esto lo que dice que los puntos de inflexión de las soluciones aparecen al cortar esta recta.

E5: Ah?, Uhmm ... pero, vaya, si digo que pasa por este punto, por ejemplo, vaya cuando encuentre la solución entonces me va a quedar sumando una C , que estaría moviendo la gráfica.

I: ¿Cómo se movería la gráfica?

E5: Ahaa!, verticalmente.

I: Aquí en este caso lo que sucede es que si tenemos una solución, al desplazar la variable independiente también se obtiene otra solución.

E5: Ujumm!

I: Bien. Veamos el problema del examen número 4 ($x' = f(x)$).

E5: En este me confundí, ehee ... supuse que era una no autónoma. Si es no autónoma, si es así, ¿verdad?

I: Si. La ecuación es autónoma porque la función del lado derecho depende sólo de x.

E5: Ujumm, yo supuse que era no autónoma y allí me confundí.

I: Y ahora, sabiendo que es autónoma, ¿cómo la resolvería?

E5: Bueno, primero podría calcular los puntos de equilibrio que en este caso son fáciles -1 y 1, y aquí podría suponer que es -2.6, una aproximación, ¿verdad?

I: Si.

E5: ... ... estos serían los puntos de equilibrio, podría ser la recta así ... ... y ver el signo de 2.6 en adelante ... entre 2.6 y 1 es negativa la derivada y también de -1 a 2.6 ... y de -1 a 1 es creciente la función. Entonces 1 seria un sumidero ... y en -2.6 en adelante es positiva, y acá es positiva también, entonces esta seria una fuente ... Bien, entonces en 2.6 la solución se aleja del punto de equilibrio, acá. Y es de 2.6 en adelante creciente, entonces ... seria ... ah, podría decir también que en 2, en -2 hay punto de inflexión porque la segunda derivada sería cero. Entonces en -2, bueno también aquí en 2, ... en 2.0 ... ... ujum ... es creciente ...es decreciente ... ujum ... entre -1 y 1 es creciente la función, entonces sería así, tendría un punto de inflexión en cero y pasaría por aquí ... ...

I: ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de inflexión?

E5: Uhmm ... toda la recta esta.

I: Si.

E5: Y de -1 a -2.6 es decreciente la función y hay un punto de inflexión en -2 ... ...

I: ¿Y aquí que pasa?

E5: Ehee, bueno de -2.6 en adelante es creciente, y es un sumidero quiere decir que se acerca aquí, y hay un punto de inflexión en , bueno aquí no hay, ... acá también es creciente ... así.

I: ¿Cómo puede asegurar que se da este tipo de comportamiento?

E5: Bueno, no podría decir nada, lo hago como suposición, si porque no me dice que haya punto de inflexión ni nada, podría ser así también.

I: ¿Calcule la segunda derivada?

E5: ... ... $x'' = f'(x)x' = f'(x)f(x)$ ...

I: ¿Donde aparecen los puntos de inflexión?

E5: Donde f'(x)=0 o f(x)=0 ... ... pero cuando f(x)=0 aparecen los puntos críticos, y entonces los puntos de inflexión aparecen cuando f'(x)=0 y entonces serían cuando x es -2 y 0.

I:Si.

E5: Y de -2.6, de 2.6, perdón, a 3 pongámole, porque no sabemos como es de aquí en adelante.

I: Si, se supone que el comportamiento que se observa se mantiene de aquí en adelante.

E5: Bien, cuando este es, cuando no son negativas sería de -2.6 a -2 y luego de 1 a 2 ... ... aquí voy a sacar la unión de los intervalos.

I: Si.

E5: Sería ... ... acá es positiva ... bueno así quedan los otros intervalos, sólo estos son.

I: ¿Cómo es la concavidad acá?

E5: Sería ... de 1 a 3 ..., de 1 a 3 seria cóncava hacia ...

I: No de 2.6 en adelante

E5: Ah!, de aquí para arriba. Sería cóncava hacia arriba

I: En resumen, ¿qué ha obtenido?

E5: La función seria creciente, cóncava hacia arriba y 2.6 es una fuente... entonces sería así.

I: Bien. Lo que ha hecho esta muy bien: dibujar la línea fase y ver el tipo de punto de equilibrio, pero de cara a construir el diagrama de soluciones es necesario completar la información con la segunda derivada para conocer la concavidad de las soluciones, de acuerdo. Bien, lo dejamos aquí.

EJERCICIOS

Encontrar $x(t)$ si:

1. $x' = t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t^2 + c$
2. $x' = -t \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + c$
3. $x' = t+1 \Rightarrow x(t) = \underline{t^2 + t + c}$
4. $x' = t^2 \Rightarrow x(t) = \frac{t^3}{3} + c$
5. $x' = \text{sen}\, t \Rightarrow x(t) = -\cos t + c$
6. $x' = \tan(t) \Rightarrow x(t) = \ln(-|\cos(t)|) + c$
7. $x' = \frac{1}{t} \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{t^2} + c$
8. $x' = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow x(t) = 2\frac{1}{t^3} + c$
9. $x'' = t \Rightarrow x' = \frac{t^2}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{t^3}{6} + c$
10. $x'' = \text{sen}\, t \Rightarrow x' = -\cos(t) \Rightarrow x(t) = -\text{sen}(t) + c$
11. $x' = x \Rightarrow x(t) = e^t + c$

    $x'(t) = x(t) \Rightarrow x(t) = e^t + c$ –
12. $x' = -x \Rightarrow x(t) = e^{-t} + c$
13. $x' = x+1 \Rightarrow x(t) = e^t + t + c$

    $x'(t) = x(t) + 1 \Rightarrow \boxed{x(t) = e^t + t + c}$
14. $x' = x^2 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{t} + c$

    $x'(t) = (x(t))^2 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{t}$

Figura A.40: Entrevista estudiante 5.

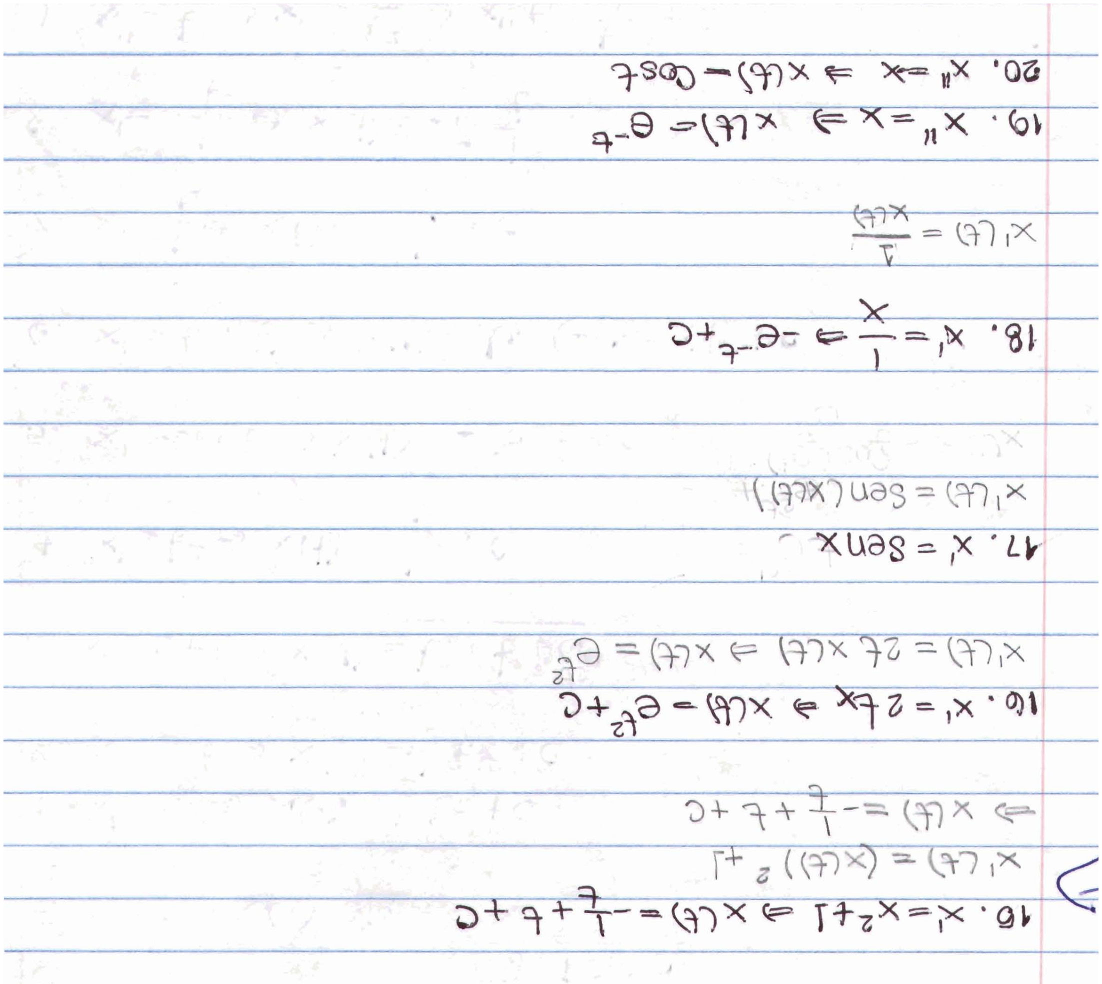


Figura A.41: Entrevista estudiante 5.

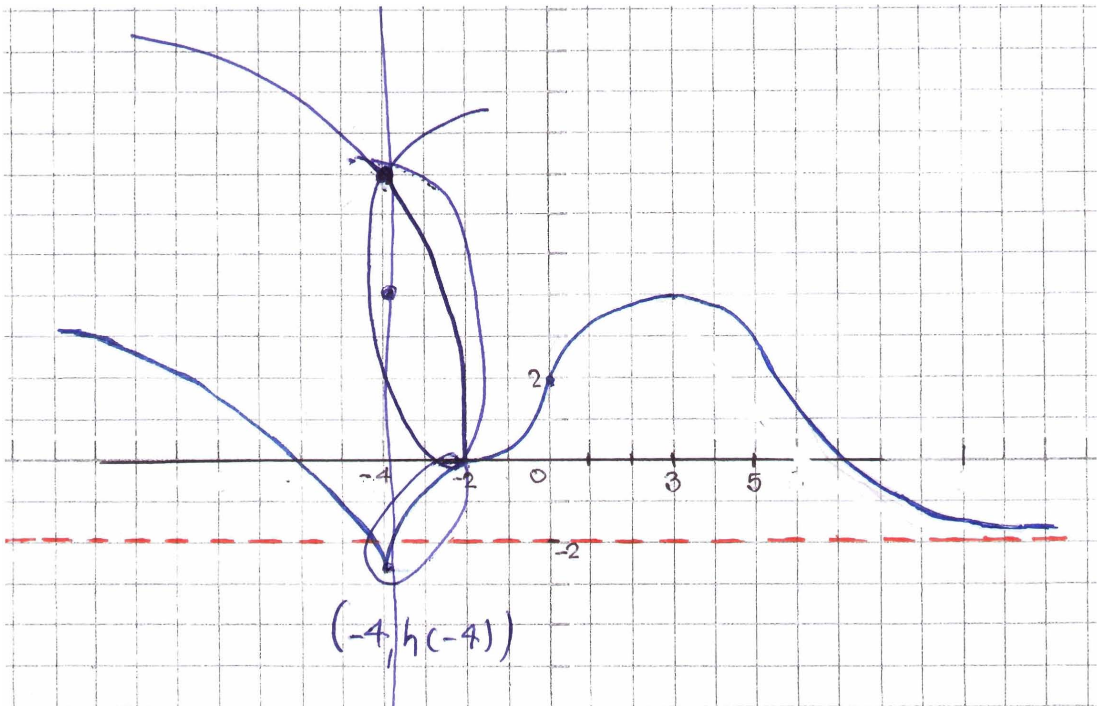
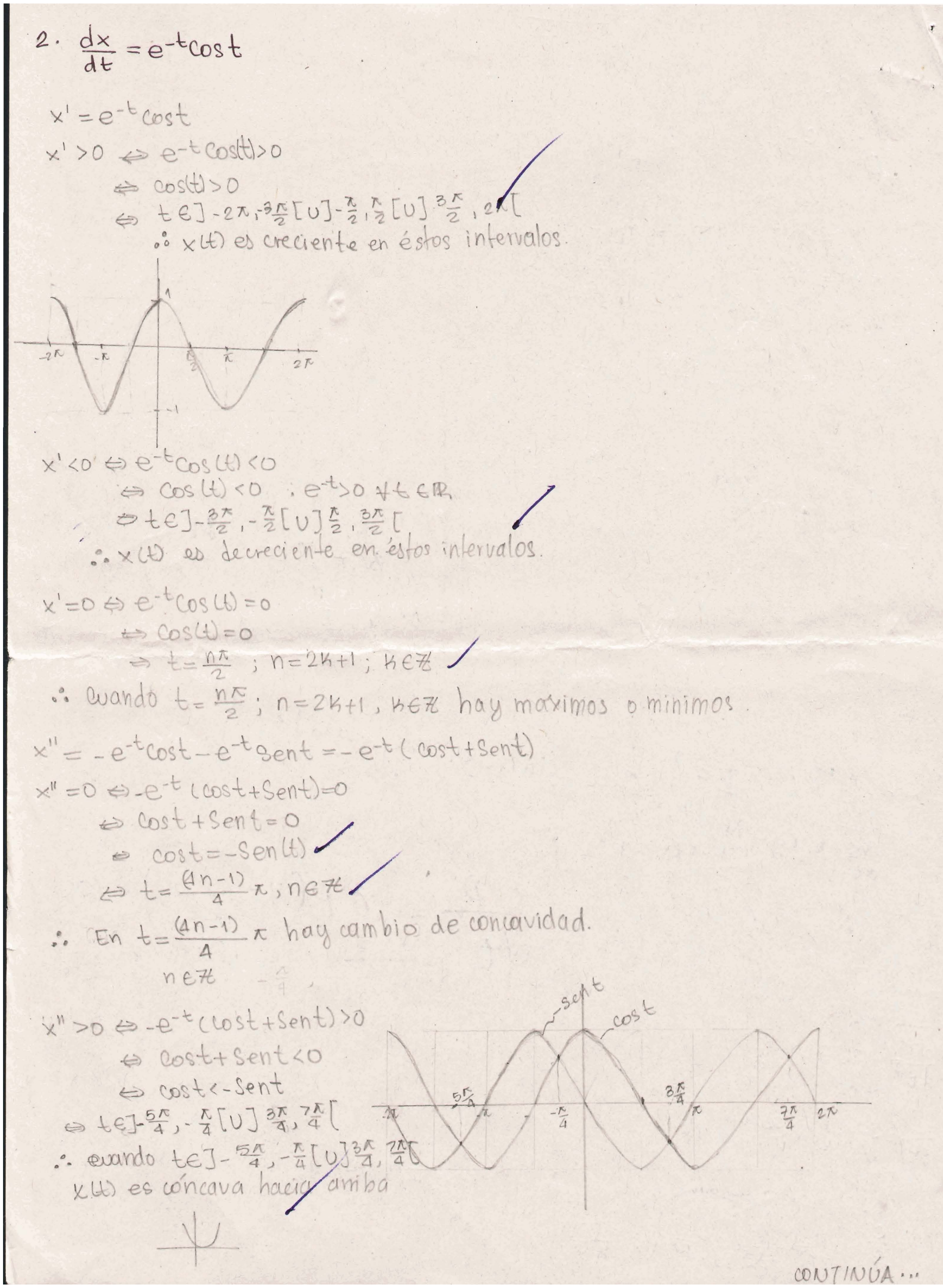


Figura A.42: Entrevista estudiante 5.



2. $\frac{dx}{dt} = e^{-t}\cos t$

$x' = e^{-t}\cos t$

$x' > 0 \Leftrightarrow e^{-t}\cos(t) > 0$

$\Leftrightarrow \cos(t) > 0$

$\Leftrightarrow t \in]-2\pi, -\frac{3\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

∴ x(t) es creciente en éstos intervalos.

$x' < 0 \Leftrightarrow e^{-t}\cos(t) < 0$

$\Leftrightarrow \cos(t) < 0$; $e^{-t} > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow t \in]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

∴ x(t) es decreciente en éstos intervalos.

$x' = 0 \Leftrightarrow e^{-t}\cos(t) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(t) = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{n\pi}{2}$; $n = 2k+1$; $k \in \mathbb{Z}$

∴ cuando $t = \frac{n\pi}{2}$; $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ hay maximos o minimos.

$x'' = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t = -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)$

$x'' = 0 \Leftrightarrow -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) = 0$

$\Leftrightarrow \cos t + \operatorname{sen} t = 0$

$\Leftrightarrow \cos t = -\operatorname{sen}(t)$

$\Leftrightarrow t = \frac{(4n-1)}{4}\pi, n \in \mathbb{Z}$

∴ En $t = \frac{(4n-1)}{4}\pi$ hay cambio de concavidad.
$n \in \mathbb{Z}$

$x'' > 0 \Leftrightarrow -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) > 0$

$\Leftrightarrow \cos t + \operatorname{sen} t < 0$

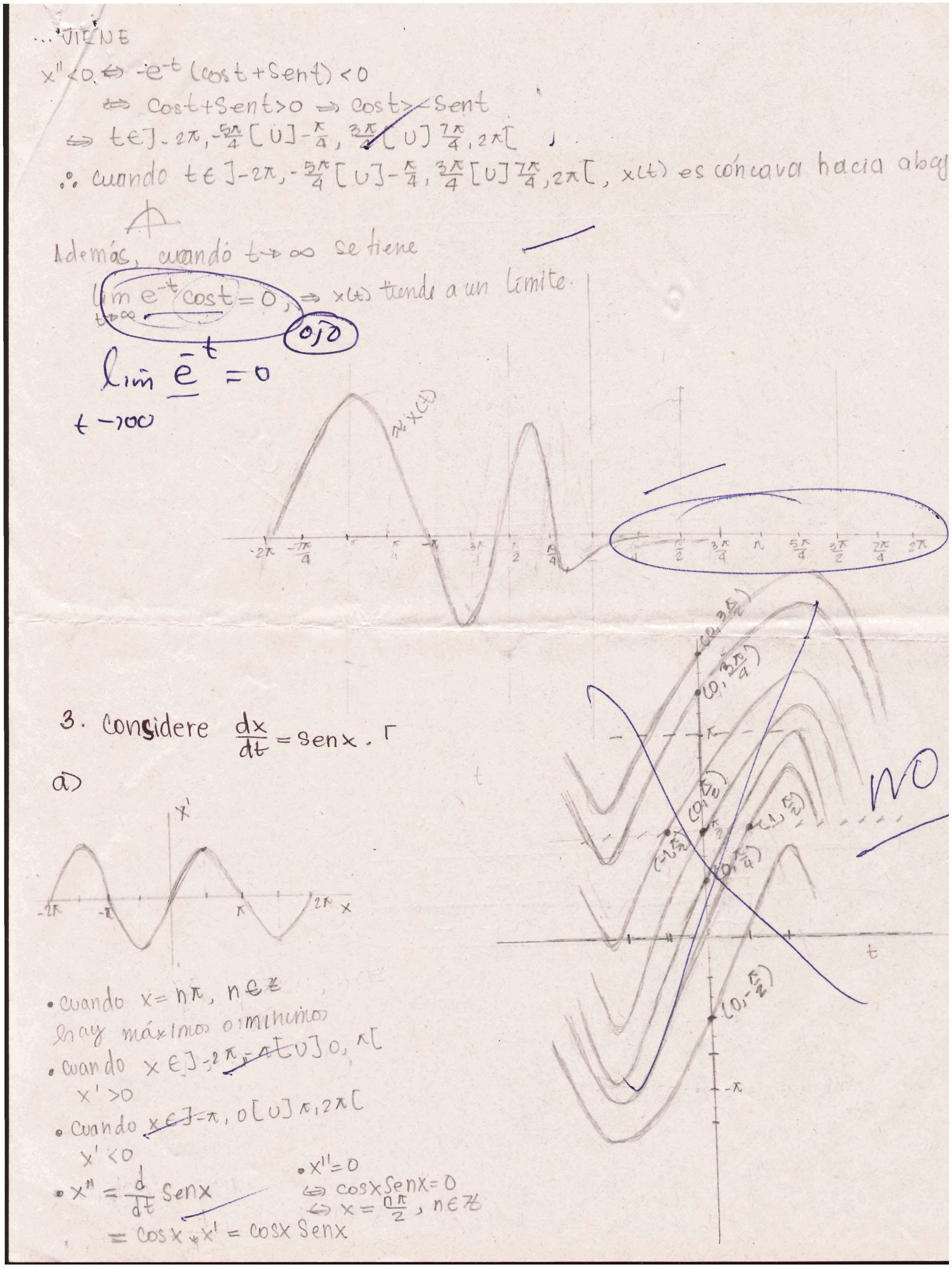
$\Leftrightarrow \cos t < -\operatorname{sen} t$

$\Leftrightarrow t \in]-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[$

∴ cuando $t \in]-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[$
x(t) es cóncava hacia arriba

CONTINÚA...

Figura A.43: Entrevista estudiante 5.



...VIENE

$x'' < 0 \Leftrightarrow -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) < 0$

$\Leftrightarrow \cos t + \operatorname{sen} t > 0 \Rightarrow \cos t > -\operatorname{sen} t$

$\Leftrightarrow t \in]-2\pi, -\frac{5\pi}{4}[\cup]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{7\pi}{4}, 2\pi[$

$\therefore$ cuando $t \in]-2\pi, -\frac{5\pi}{4}[\cup]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{7\pi}{4}, 2\pi[$, $x(t)$ es cóncava hacia abajo

Además, cuando $t \to \infty$ se tiene

$\lim_{t\to\infty} e^{-t}\cos t = 0$, $\Rightarrow$ $x(t)$ tiende a un límite.

ojo

$\lim_{t \to \infty} e^{-t} = 0$

3. Considere $\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen} x$.

a)

• cuando $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
hay máximos o mínimos

• cuando $x \in]-2\pi, -\pi[\cup]0, \pi[$
$x' > 0$

• cuando $x \in]-\pi, 0[\cup]\pi, 2\pi[$
$x' < 0$

• $x'' = \frac{d}{dt}\operatorname{sen} x$
$= \cos x \cdot x' = \cos x \operatorname{sen} x$

• $x'' = 0$
$\Leftrightarrow \cos x \operatorname{sen} x = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

NO

Figura A.44: Entrevista estudiante 5.

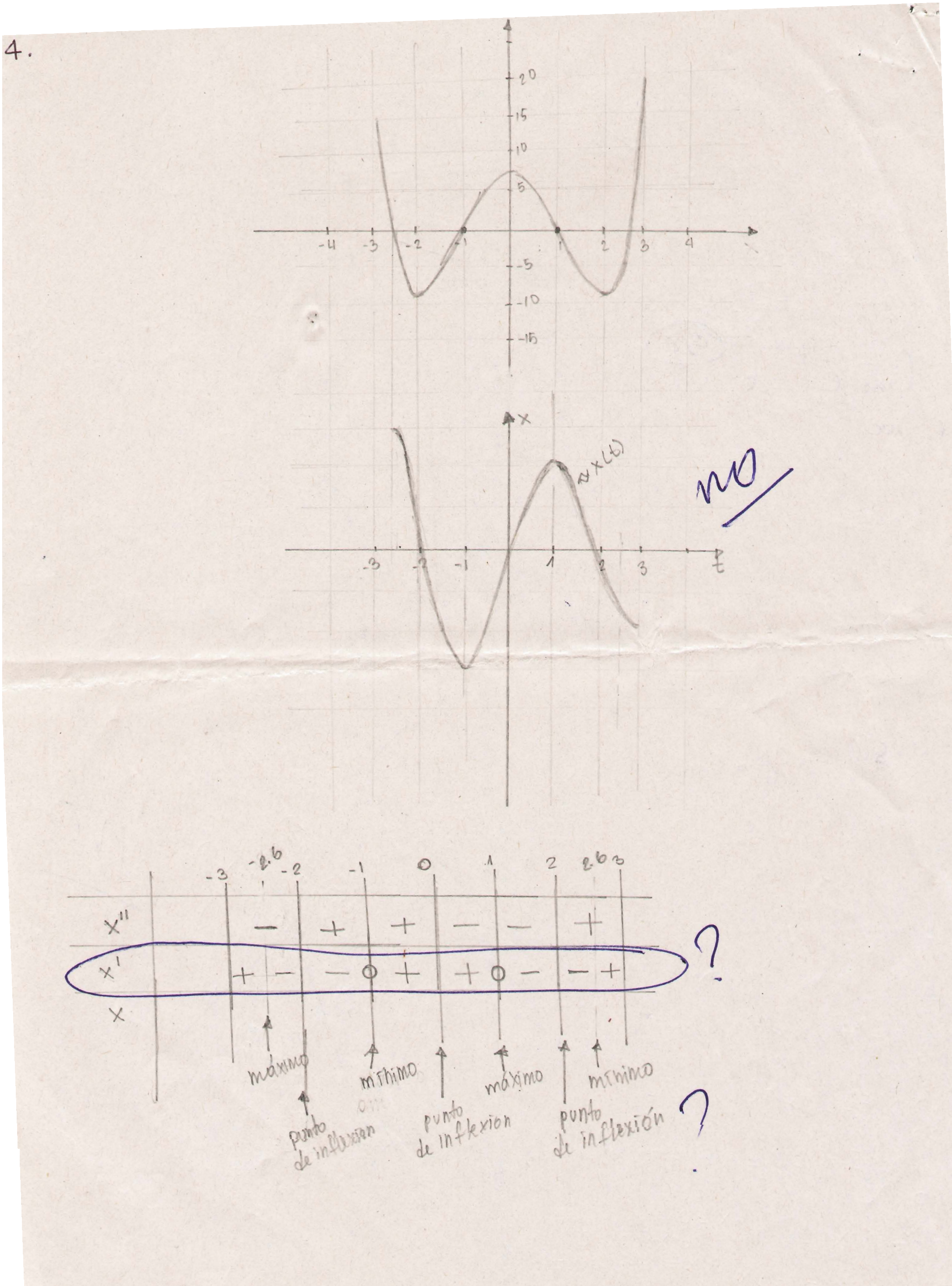


Figura A.45: Entrevista estudiante 5.

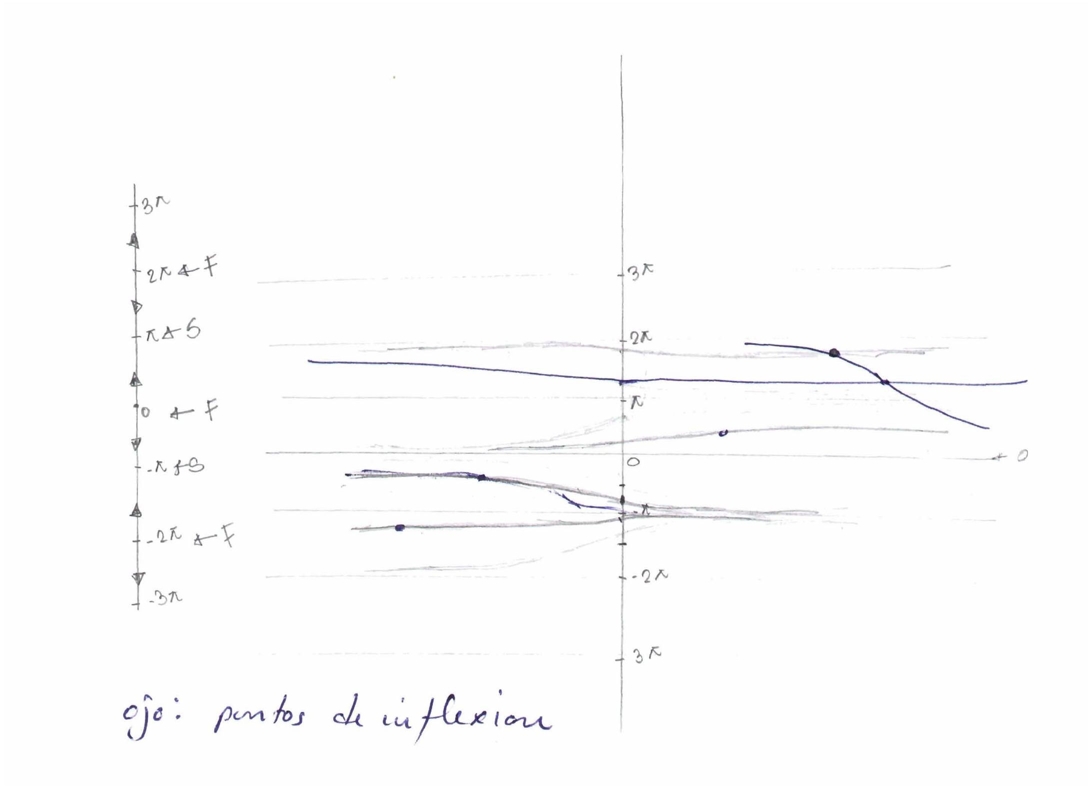


Figura A.46: Entrevista estudiante 5.

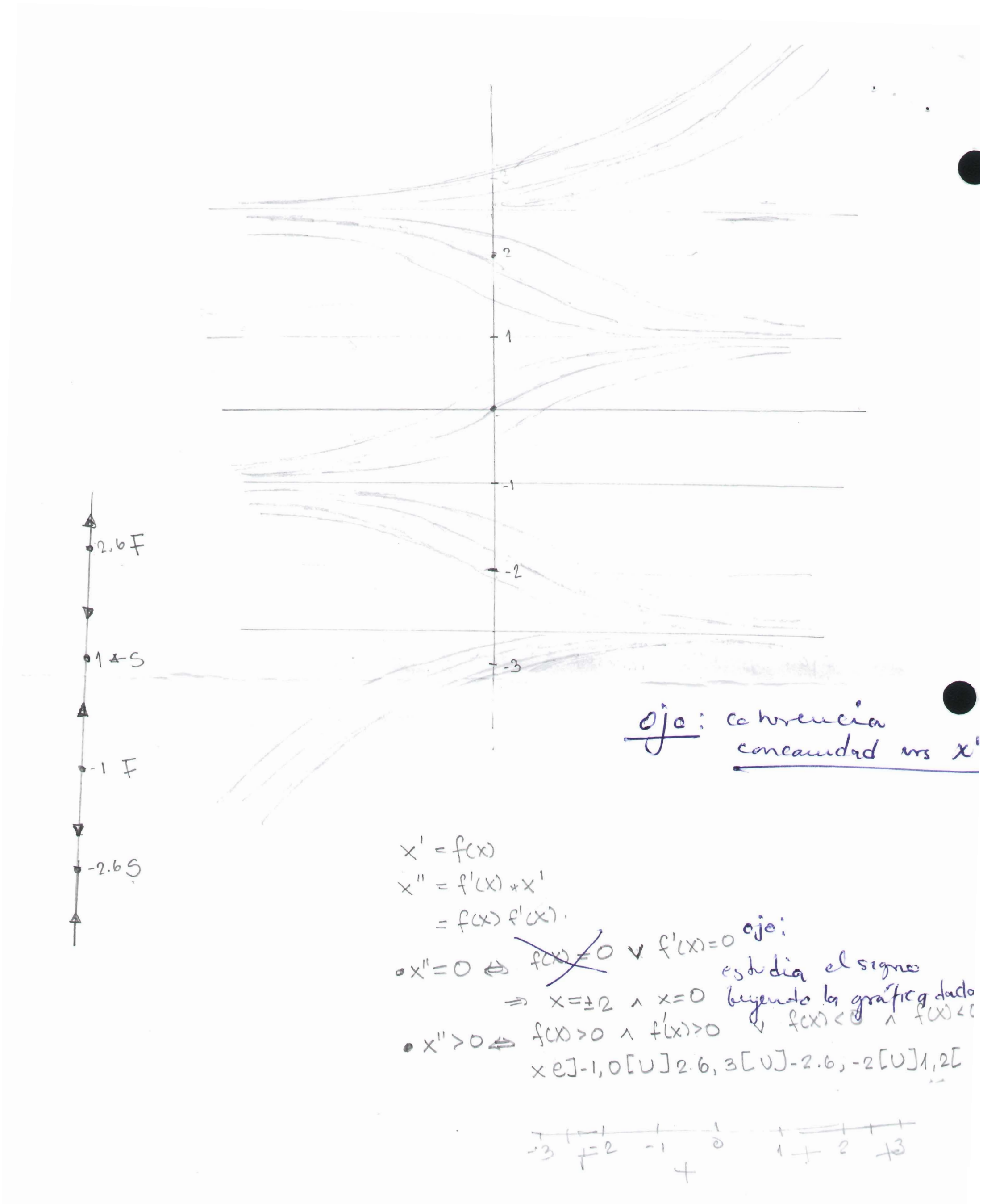


Figura A.47: Entrevista estudiante 5.