UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO DISCRETO Y APLICACIONES

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:

ALEJANDRA NATALIA REGALADO BONILLA

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, ENERO DE 2016

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO DISCRETO Y APLICACIONES

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:

ALEJANDRA NATALIA REGALADO BONILLA

ASESOR:

DR. SIMÓN ALFREDO PEÑA

CIUDAD UNIVERSITARIA, ENERO DE 2016

AUTORIDADES

RECTOR INTERINO:
LIC. JOSÉ LUIS ARGUETA ANTILLÓN

SECRETARIA GENERAL:
DRA. ANA LETICIA ZAVALETA DE AMAYA

FISCAL GENERAL:
LIC. NORA BEATRIZ MELÉNDEZ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:
LIC. MAURICIO HERNÁN LOVO CÓRDOVA

SECRETARIO:
LIC. CARLOS ANTONIO QUINTANILLA APARICIO

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR:
DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES

SECRETARIA:
MSC. ALBA IDALIA CÓRDOVA CUÉLLAR

CIUDAD UNIVERSITARIA, ENERO DE 2016

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

____

ASESOR INTERNO

DR. SIMÓN ALFREDO PEÑA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

CIUDAD UNIVERSITARIA, ENERO DE 2016

Dedicatoria

A mi padre, quien me inspiró y guió hasta su último suspiro.

Agradecimentos

A mi padre, por amor, confianza y apoyo incondicional,

mis hermanas quienes siempre me apoyaron y cuidaron,

a mis amigos quienes le agregaron el toque de locura a este camino,

a los docentes que a lo largo de los años sembraron el amor por los números en mi,

a mi asesor el Dr. Simón Alfredo Peña por su infinita paciencia, su comprensión y apoyo,

a mis alumnos que iluminan mis dias con sus sonrisas y cariño.

Índice general

1. Ecuaciones diferenciales **1**

Ecuaciones diferenciales 1

Ecuaciones diferenciales primer orden 3

Ecuaciones diferenciales con retardo discreto 5

Existencia y unicidad 15

Estabilidad 17

Linealización 18

Linealización con retardo 19

Relación entre una ecuación y su linealización 20

La ecuación característica 22

La ecuación característica con retardo 22

Ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes 24

Ecuación diferencial logística 43

Ecuación diferencial de segundo grado 49

2. Modelaje de ecuaciones diferenciales **65**

2.1. Modelo Logístico 65

Ecuaciones diferenciales 65

2.2. Modelo Predador-Presa 72

3. Concluciones **77**

Bibliografía 79

Índice de figuras

1.1. **Gráfica de $x'(t) = a\,x(t)$ para distintos valores de $a > 0$ y $k > 0$, en este caso $y(t) = 0$ coincide con una fuente pues con el cambio de el parámetro a las soluciones tienden a elejarse de la solución nula.** 5

1.2. **Para valores de τ menores que $1/e$ la gráfica de la solución con retardo conserva la forma usual de su ecuación análoga sin retardo** 10

1.3. **Tomando valores de τ, tal que $\frac{1}{e} < a\tau < \frac{\pi}{2}$, aparecen oscilaciones, que finalmente covergen a cero.** 10

1.4. **Para valores superiores a $\pi/2$ aparecen soluciones periodicas** 11

1.5. **Interpretación geométrica de la linealización de una ecuación diferencial, en un punto de equilibrio** 20

1.6. **Soluciones de una ecuación logística con un punto de equilibrio en $x(t) = 3$** . 44

1.7. **Bosquejo del análisis cualitativo de la ecuación logística con retardo.** 46

1.8. **Ecuación logística que posee oscilaciones que tienden al estado de equilibrio.** 49

1.9. **Trayectorias de fase de una ecucion de tipo Lotka-Volterra** 64

2.1. **Crecimiento de Paramecium aurelia en tubo de ensayo conteniendo Osterhaut, con bacterias como alimentos. El tamaño de la poblacion es número por 0.5 ml. El tiempo fué medido en dias.** 66

2.2. **Modelo de crecimiento logístico que se asimila a la población de Paramecium aureliade en el tiempo, utilizando la ecuación logística y los lo parámetros $N(0) = 20$, $r = 0{,}99$ y $K = 552$.** 67

2.3. **Modelo logístico con parámetros $\tau = 0{,}1$, $r = 0{,}99$ y $K = 552$, se observan pequeñas oscilaciones alrededor de la figura sin retardo.** 68

2.4. **Al incrementar el retardo las oscilaciones aumentan de dimensión, para $\tau = 1$, $r = 0{,}99$ y $K = 552$, se observa un cambio sustancial.** 69

2.5. **Comparación de el modelo sin y con retardo a medida que el valor de τ incrementa.** 70

2.6. **Decrecimiento exponencial de la población en lapso de 20 dias.** 71

2.7. **Gráfico del modelo orginal depredaror-presa entre linces y conejos.** 72

2.8. **Gráfico de la interación de linces y conejos para un intervalo de 100 años** . . 73

2.9. **Tomando un modelo linealizado e incluyendose los retardos en cada una de las varibles $\tau_1 = 0{,}164$ y $\tau_2 = 0{,}191$, utilizando como función historia los valores de 24 para las presas y 8 depredadores, con estos cambios se genera un desequilibrio en el sistema, que colleva a la extinción de ambas especies** . 74

2.10. **Solución de la ecuación diferencial con retardo del modelo depredador-presa con retardo y función historia o población incial de 8 presas y 30 depredadores.** 74

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales

Para conocer el comportamiento de una función en general, entre las cosas mas importantes se encuentra ser creciente o decreciente, aunque en general sólo puede interesarnos en un intervalo.

Definición 1.1. *Una función f se dice que es creciente en un conjunto S si $f(x) \leq f(y)$ para todo par de de puntos x e y en el conjunto S, con $x < y$. Si la desigualdad primera es estricta se dice que es estrictamente creciente.*

De manera similar sucede para decreciente y estrictamente decreciente.

Definición 1.2. *Una función f es llamada monótona si es creciente o decreciente en S, pero no ambos.*

El término estrictamente monótona, se refiere a que es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en S.

Definición 1.3. *El símbolo $\lim_{x\to p} f(x) = A$, se refiere a que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - A| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - p| < \delta$*

Definición 1.4. *Una función f se dice que es continua en el punto p si,*

- *f está definida en el punto p.*
- $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$

Teorema 1.1. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f está acotada en $[a,b]$. Esto quiere decir que existe una constante $C \geq 0$ tal que, $|f(x)| \leq C$ para toda x en $[a,b]$.*

Prueba Por contradicción, usando el método de bisección. Se asume que f no es acotada en $[a,b]$. Sea c el punto medio de $[a,b]$. Entonces si f no es acotada en $[a,b]$, es decir, no es acotada en al menos uno de los sub intervalos $[a,c]$ o $[c,b]$. Sea $[a,b_1]$ la mitad de $[a,b]$ en la que f no está acotada.
Continuando con el proceso de bisección repetidamente, denotando por $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, el intervalo del paso n-ésimo donde la función no esta acotadan. Así la longitud del intervalo será la mitad de su predecesor por lo que su longitud es $\frac{(a-b)}{2^n}$.
Sea A el conjunto de los puntos extremos de la izquierda $a, a_1, a_2, ..$ asi construida y se α el supremo de A. Entonces α esta en $[a,b]$, por continuidad en la parte inferior de α, existe un intervalo de la forma $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ en el que

$$|f(x) - f(\alpha)| < 1 \tag{1.1}$$

Si $\alpha = a$, el intervalo toma la forma $[a, a+\delta)$ y si $\alpha = b$, este toma la forma $(b-\delta, b]$.
La inecuación (1.1) implica

$$|f(x)| < 1 + |f(\alpha)|$$

así f está acotada por $1 + |f(\alpha)|$ en ese intervalo.
Sin embargo el intervalo $[a, b_n]$ está contenido en $(a-\delta, a+\delta)$, cuando n es tan grande que $\frac{(b-a)}{2^n} < \delta$.
lo que resulta ser una contradicción ya que f no esta acotada ahí.

Teorema 1.2. *Si una función f es continua en cada punto de un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Teorema 1.3. *Sea f una función tal que es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y asumiendo que es derivable en cada punto del intervalo abierto (a,b). Entonces se tiene:*

- *Si* $f'(x) > 0$ *para toda* x *en* $[a, b]$, f *es estrictamente creciente en* (a, b)
- *Si* $f'(x) < 0$ *para toda* x *en* $[a, b]$, f *es estrictamente decreciente en* (a, b)
- *Si* $f'(x) = 0$ *para toda* x *en* $[a, b]$, f *es constante en* (a, b)

Definición 1.5. *Una ecuación diferencial de la forma*

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

donde P *y* Q *son funciones continuas ya definidas, es llamada ecuacion diferencial lineal de primer orden.*
Si $Q(x) = 0$ *es llamada homogénea.*

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Leibnitz (1646-1716) conocía varias soluciones al problema inverso de las tangentes que cumplían alguna condición dada en su solución, en esa época se empleaban sobre todo métodos geométricos.
Él prefirió usar técnicas del recientemente desarrollado cálculo, y finalmente el 11 de Noviembre de 1675, escribió $\int y\ dy = \frac{1}{2}y^2$ resolviendo así la primera ecuación diferencial.
En esos años no había ninguna separación entre el cálculo y las ecuaciones diferenciales, está ocurrió en algún momento del siglo XIX más de doscientos años después y fue sobre todo por cuestiones didácticas, aunque desde un punto de vista más estructural forman una unidad indivisible y que tiene entre otras fuentes a la física y a la geometría.

Se dice que una ecuación diferencial es una ecuación en que interviene una función incógnita y sus derivadas.

Definición 1.6. *Sea* $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ *una función continua con dominio* D, *donde* D *es un conjunto abierto y conexo no vacío, entonces una ecuación diferencial ordinaria (EDO), tiene la forma*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{1.2}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $(t, \mathbf{x}) = (t, x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Tambien se llamará EDO a una ecuación que se pueda transformar en una que tenga ésta forma. El número n se llama *orden* de la ecuación. La función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ se llama el *campo vectorial* asociado a la EDO. Una *solución* de esta ecuación diferencial es una curva o función $\phi : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ donde I es un intervalo abierto y para cada $t \in I$ se cumple $\phi'(t) = \mathbf{f}(t, \phi(t))$.

Para una ecuación diferencial conocida,

$$x'(t) = a\,x(t)$$

tenemos que a es un parámetro, donde para cada valor distinto de a, se obtiene una ecuación diferencial diferente. La ecuación dice que para todo valor de t la relación

$$x'(t) = ax(t)$$

es cierta.

Se puede obtener la solución de esta ecuación utilizando las herramienta de cálculo. Si k es un número real constante, entonces la función $x(t) = ke^{at}$ es una solución, ya que se tiene

$$x'(t) = ake^{at} = ax(t)$$

A la colección de las soluciones de una ecuación diferencial, le llamamos *solución general* de la ecuación.

Para describir de forma cualitativa los cambios de las soluciones, el signo de a es de suma importancia.

1. Si $a > 0$, $\lim_{t\to\infty} ke^{at}$ es igual a ∞, cuando $k > 0$, y es igual a $-\infty$ cuando $k < 0$.

2. Si $a = 0$, $ke^{at} = constante$

3. Si $a < 0$, $\lim_{t\to\infty} ke^{at} = 0$

Nótese que hay una solución especial de la ecuación diferencial, cuando $k = 0$.
Esta es la solución constante $x(t) \equiv 0$. Una solución contante es llamada *solución de equilibrio o punto de equilibrio* de la ecuación. Los equilibrios están entre las soluciones más importantes de las ecuaciones diferenciales.

Decimos que el punto de equilibrio es una fuente cuando las soluciones cercanas tienden a alejarse de él. El punto de equilibrio es un pozo cuando las soluciones cercanas tienden hacia él.

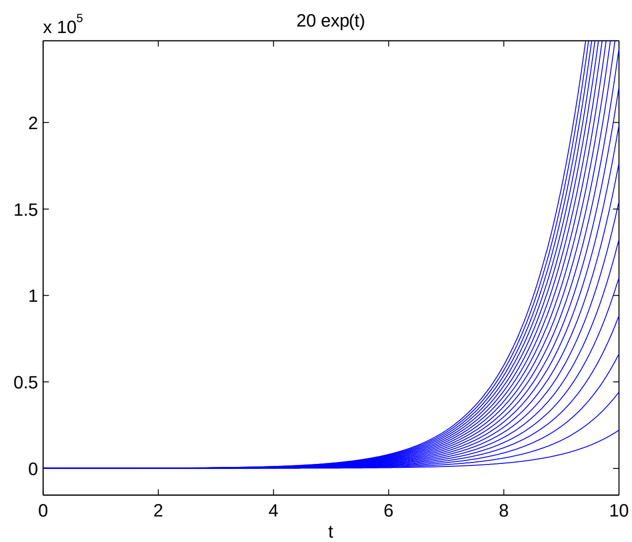


Figura 1.1: **Gráfica de $x'(t) = a\,x(t)$ para distintos valores de $a > 0$ y $k > 0$, en este caso $y(t) = 0$ coincide con una fuente pues con el cambio de el parámetro a las soluciones tienden a elejarse de la solución nula.**

Ecuaciones diferenciales con retardo discreto

Con el tiempo las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales han desempeñado importantes papeles en la historia de la dinámica de las poblaciones teóricas. Sin embargo, en general son las primeras aproximaciones de los considerados sistemas lineales, debido a que se dejan de lado algunas consideraciones de la evolución del sistema. Los modelos más realistas deben incluir algunos de los últimos estados de estos sistemas, es decir, idealmente, un sistema real debe ser modelado por *ecuaciones diferenciales con retardos de tiempo*.

En efecto, el uso de *Ecuaciones Diferenciales con Retardo* en el modelado de la dinámica de población es actualmente muy activo, en gran parte debido al reciente y rápido progreso logrado en la comprensión de la dinámica de varias clases importantes de retardo en las ecuaciones diferenciales y sistemas de estas ecuaciones.

La teoría de ecuaciones diferenciales con retardo se ocupa de modelos donde la variación de la variable de estado x, con el tiempo depende de cada instande t, no sólo de $x(t)$ si no también de los valores de x en instantes anteriores. Una ecuación diferencial con retardo, es aquella en la que en la expresión del estado, aparece el estado en uno o varios instantes.
Esto es:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_n))$$

, una ecuación diferencial general con retardo tiene la forma

$$x'(t) = f(x(t), x(t-\tau)) \tag{1.3}$$

Un problema de valor inicial que contenga retardos requiere más información que su problema análogo sin retardo. El caso más sencillo es aquél en el que apararece un único retardo

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau))$$

Para el sistema diferencial ordinario, una única solución esta determinada por un punto inicial en el espacio Euclideano en un tiempo inicial t_0. Para un sistema que incluye retardos, una solución requiere información en un intervalo entero de la forma $[t_0 - \tau, t_0]$. Ahora para conocer la razón de cambio en t_0, necesitamos saber que sucede en $x(t_0)$ y $x(t_0 - \tau)$, y para $x'(t_0 + \epsilon)$, necesitamos conocer toda la zona en $x(t_0 + \epsilon)$ y $x(t_0 + \epsilon - \tau)$.

Así, con el fin de darle sentido al problema de valor inicial, se necesita dar una función inicial o historia inicial, es decir los valores de $x(t)$ para el intervalo $[-\tau, 0]$. Cada una de estas historias iniciales determinan una única solución de la ecuación diferencial con retardo. Si se requiere que las funciones iniciales sean continuas, entonces el espacio de soluciones tiene la misma dimensión como $C([t_0-\tau, t_0], \mathbb{R})$. En otras palabras ser de dimensión infinita.
Se conoce el problema de valor inicial presentado anteriormente $x'(t) = -ax(t)$, ahora agregando el retardo, se obtiene

$$x'(t) = -ax(t-\tau) \tag{1.4}$$

donde $a > 0$. Esta ecuación diferencial lineal posee un retardo y a diferencia de lo que sucede con la ecuación diferencial lineal ordinaria $x'(t) = -ax(t)$, su comportamiento varía a medida que lo hacen a y τ .
Si $\tau = 0$ las soluciones de la ecuación $x'(t) = -ax(t)$ tienen la forma $x(t) = x(0)e^{-at}$, por lo que convergen exponencialmente a cero. Para el caso cuando el retardo es positivo $\tau > 0$, la ecuación (1.4) no es fácil de integrar y el comportamiento de las soluciones está determinado por las raíces de la ecuación característica.
De igual forma que en el caso ordinario, debemos buscar soluciones de la forma $e^{\lambda t}$, sustituyendo de manera directa en la ecuación (1.4) para obtener

$$\lambda e^{\lambda t} = -ae^{\lambda(t-\tau)} \Longleftrightarrow \lambda + ae^{-\lambda\tau} = 0 \tag{1.5}$$

Las raíces de esta ecuación trascendente proporcionan los valores característicos, que determinan el comportamiento de las soluciones.
Si se toma
$e^{\lambda} = \alpha + \imath\beta; \;\; \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in [0, \infty)$ en (1.5), entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= -ae^{-\alpha\tau} cos(\beta\tau) \\ \beta &= ae^{-\alpha\tau} sen(\beta\tau) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Así es necesario conocer donde estas raices sufren un cambio afectando las soluciones.

Proposición 1.1. *Sea $a, \tau \in (o, \infty)$. Una condición suficiente y necesaria para que todas las raices λ de (1.5) tengan raices con parte real negativa es*

$$0 < a\tau < \frac{\pi}{2} \tag{1.7}$$

Prueba Asumiendo que $a\tau < \frac{\pi}{2}$, debe mostrarse que las raices de (1.5) tienen parte real negativa. Suponiendo que (1.5) tiene una raíz $\lambda = \alpha + \imath\beta$ con $\alpha \geq 0$, se tendría de (1.6) que λ no puede ser real y no negativa. De donde se supone $\beta > 0$ y eso implica,

$$0 < \beta\tau = a\tau e^{-\alpha\tau} sen(\beta\tau) < \frac{\pi}{2}$$

mostrando que el lado izquierdo de

$$\alpha = -ae^{-\alpha\tau} cos(\beta\tau)$$

es no negativa, mientras que el lado derecho es negativo. Esto contradice la prueba de la parte de suficiencia.
Al probar la necesidad en (1.7), se muestra que cuando $a\tau = \frac{\pi}{2}$, (1.5) tiene un par de raices imaginarias puras.
Por ejemplo cuando $a\tau = \frac{\pi}{2}$, (1.6) tiene las raices $(0, \pm\imath\omega)$ donde $\omega = \frac{\pi}{2\tau}$ y esto es la prueba de la necesidad en (1.7).

Proposición 1.2. *Asumiendo $a, \tau \in (0, \infty)$ y*

$$a\tau\, e < 1 \tag{1.8}$$

Entonces

$$\lim_{t\to\infty}[u(t)e^{\lambda_0 t}] = \frac{1}{1+\lambda_0\tau}\left[u(0) + \lambda_0 \int_{-\tau} 0 e^{-\lambda_0 s} u(s)\, ds\right] \tag{1.9}$$

donde λ_0 es una raíz real negativa de

$$\lambda + ae^{-\lambda\tau} = 0 \tag{1.10}$$

y u es alguna solución de

$$u'(t) + au(t-\tau) = 0 \tag{1.11}$$

Prueba Se define F como

$$F(\lambda) = \lambda + ae^{-\lambda\tau}$$

y nótese que

$$F(0) = a > 0$$

$$F\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \frac{-1 + ae\tau}{\tau} < 0,$$

y

$$F\left(\frac{-1}{\tau}\right) < 0$$

luego existe una raíz real negativa de $\lambda + ae^{-\lambda\tau} = 0$ mostrándose que todas las $\lambda_0 \in (\frac{-1}{\tau}, 0)$ satisfacen $|\lambda_0|\tau < 1$.
Siguiendo la representación de la integrodiferencial

$$\frac{d}{dt}\left[y(t) + \lambda\int_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right] = f(t)e^{-\lambda\tau}$$

que alguna solución de (1.11) satisface

$$\frac{d}{dt}\left[v(t) + \lambda_0\int_{t-\tau}^{t} v(s)ds\right] = 0; \tag{1.12}$$

Asi cuando $a\tau < \frac{1}{e}$, las soluciones convergen exponencialmente a cero, como en el caso ordinario.
Es decir que para retardos pequeños las soluciones no sufren grandes cambios. Si $\frac{1}{e} < a\tau < \frac{\pi}{2}$ las soluciones convergen a cero pero oscilando.
Esta es una de las principales características de las ecuaciones con retardo, pues es imposible que esto suceda con una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden. Para $a\tau \geq \frac{\pi}{2}$ aparecen soluciones periodicas y algunas no acotadas.

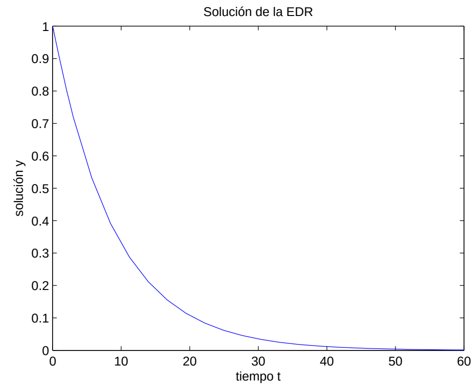


Figura 1.2: **Para valores de τ menores que $1/e$ la gráfica de la solución con retardo conserva la forma usual de su ecuación análoga sin retardo**

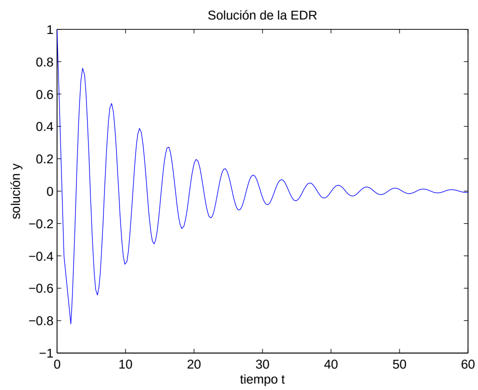


Figura 1.3: **Tomando valores de τ, tal que $\frac{1}{e} < a\tau < \frac{\pi}{2}$, aparecen oscilaciones, que finalmente covergen a cero.**

Métodos de integración

Para encontrar la solución explicíta ya sea de una ecuación que contenga o no retardos, es necesario hacer uso de integración, en ocasiones no es tan sencillo por lo que es apropiado recurrir a técnicas que ayuden a simplificar los cálculos.
Sea s una función definida en $[a, b]$ y sea $P = x, x_1, x_2, ..., x_n$ una partición de $[a, b]$ tal que s es constante en los subintervalos de P. Entonces denotamos por s al valor contante de s_k tomado del k-ésimo subintervalo abierto asi que,

$$s(x) = s_k \quad si \quad x_{k-1} < x < x_k \quad k = 1, 2, 3, ..., n$$

Definición 1.7. *La integral de s de a a b, denotada por el simbolo $\int_a^b s(x)dx$*

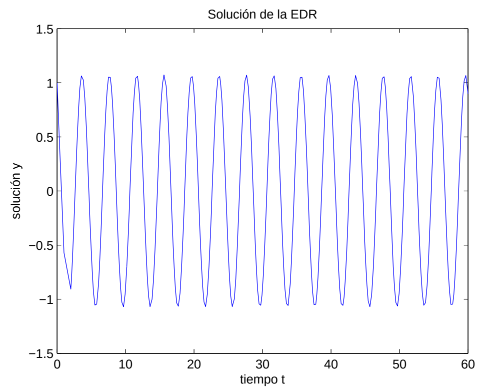


Figura 1.4: **Para valores superiores a $\pi/2$ aparecen soluciones periodicas**

está definida por la siguiente fórmula.

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{i=1}^{n} s_i(x_i - x_{i-1}) \tag{1.13}$$

En 1691, el problema inverso a las tangentes condujo a Leibnitz a descubrir simultáneamente el método de separación de variables para resolver ecuaciones de la forma $y\frac{dy}{dx} = X(x)\,Y(y)$ y el Teorema de cambio de variables en las integrales. Aún cuando no es posible resolver todas las ED de forma completa es posible en ciertos casos, obtener la solución general de una forma explícita. Algunos casos para ecuaciones de primer orden en los que se puede encontrar una solución general se presentan a continuación.

- **Ecuaciones Exactas**

  Consideramos una ED escrita de la forma siguiente:

  $$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1.14}$$

  Desde el punto de vista de la formas diferenciales si ω es 1-forma en $\mathbb{R}^2$ (o en un abierto de $\mathbb{R}^2$) su expresión en coordenadas es:

  $$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

  Por lo tanto en la ecuación (1.14) es $\omega = 0$. Cuando ω sea 1-forma exacta, existirá una función $f(x, y)$ de la forma

$$\omega = d\,f$$

y por lo tanto al ser $\omega = 0$, $f(x, y) = c$ es la solución general de la ecuación. Una condición necesaria para que ω sea exacta es que sea cerrada, es decir $\omega = 0$, en coordenadas esta condición se traduce en:

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{1.15}$$

Suponiendo que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son diferenciables. Esta condición es tambien suficiente en el caso en que el abierto de $\mathbb{R}^2$ en el que se trabaja, sea simplemente conexo o haciendo consideraciones de tipo local.

De acuerdo a este tipo de interpretación, llamaremos ecuación diferencial exacta a aquella que este escrita de la forma (1.14). Las ecuaciones exactas son inmediatamente resolubles, pues basta encontrar una función $f(x, y)$, cuyas derivadas con respecto a x e y coincidan respectivamente con $P(x, y)$ y $Q(x, y)$.

- **Factores integrantes**
  No toda ecuación es exacta, pero podría pensarse que la multiplicaión por un factor global $\mu(x, y)$, haría que la nueva ecuación sea equivalente a la anterior al menos si existe el inverso de μ. Es decir aunque ω no sea exacta, una elección adecuada de μ hace que $\mu\omega$ lo sea. Para ello debería de verificarse la condición de exactitud dada anteriormente:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

  Lo que equivale a una ecuación en derivadas parciales de primer orden para la función μ.

  La obtención de la solución de esta ecuación diferencial es equivalente en dificultad a la resolución de la ecuación de partida (el uso del método de estas características lleva a la ecuación original) pero no es necesario conocerla. Basta hallar una función que verifique esa ecuación, es decir, basta una solu-

ción particular.
Se dice que $\mu(x,y)$ es un factor integrante para esa ecuación.

El uso de factores integrantes no es, un método muy efectivo. De hecho, toda ecuación que tiene una única solución admite una familia infinita de factores integrantes. Es obvio que no sabemos calcular la solución de todas las ED.

- **Variables separadas**
  Se dice que una ecuación diferencial es de variables separadas si se puede escribir en la forma:
  $$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$
  Se trata de una ecuación exacta, escribiéndola en la forma (1.14):
  $$f(x)\,dx - g(y)\,dy = 0$$
  y por tanto se pueden usar los métodos expuestos anteriormente. Sin embargo, en la práctica resulta más directo prescindir de estos planteamientos y escribir:
  $$\int g(y)\,y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx + C$$
  y cambiando la variable de integración en la primera integral:
  $$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C$$
  relación que una vez integrada, permitirá encontrar la solución.

- **Cambio de variable**
  Uno de los métodos más interesantes para la resolución de ED es el de cambios de variable, tanto independiente como dependiente. Sin embargo, no siempre es sencillo adivinar cual es el mejor cambio que simplifica la ecuación y la hace resoluble por algun método elemental. A continuación algunos tipos de ecuaciones y los cambios de variable que ayudan a su solución.

  Ecuaciones homogéneas

Supongamos que la función $f(x, y)$ es homogénea de grado 0, es decir:

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

En este caso, si se escribe $y = zx$, donde z es la nueva incógnita, la nueva ecuación es:

$$z'x + z = f(x, zx) = f(1, z)$$

que es una ecuación de variables separadas:

$$z' = \frac{f(1, z) - z}{x}$$

y que puede resolverse con el método dado anteriormente.

Ecuación de Bernouilli

El siguiente tipo de ecuaciones se puede resolver mediante un cambio en la variable dependiente:

$$y' = f(x)y + g(x)y^r$$

donde r es un número real. Si se pone $z = y^{1-r}$, la nueva ecuación es:

$$z' = (1 - r)(f(x)z + g(x))$$

que es una ecuación lineal de primer orden.

Aunque de formas similares puede hacerse para sistemas de ecuaciones de primer orden, solo para estas ecuaciones pueden hacerse representaciones gráficas sencillas.

Interpretación geométrica de las EDO de primer orden. Isoclinas

Sea $y' = f(x, y)$ una ED de primer orden, a cada punto del plano x, y podemos asignarle un segmento de pendiente $f(x, y)$, de esta manera obtendremos un campo de direcciones en la región en la cúal esté definida f.

Se denominan isoclinas a las curva que unen los puntos donde la pendiente es constante.

De acuerdo con la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, una solución de esta ecuación es tangente en cada punto al campo de direcciones. Es posible de esta forma obtener una gráfica aproximada de las soluciones mediante el dibujo de las isoclinas de la ecuación, curvas de nivel de la función f. Es posible que en algún punto la función f tenga un valor infinito. En este caso no puede hablarse con propiedad de una solución. Sin embargo con respecto al dibujo aproximado de las curvas integrales este hecho puede obviarse mediante la consideración de la curva asociada $x' = \frac{1}{f(x,y)}$, donde $x' = \frac{dx}{dy}$, es decir considerando a x en función de la variable y. De esta forma, cuando aparezca un punto de pendiente infinita para la ecuación inicial, se puede considerar esta otra ecuación y tratar la curva integral como una solución suya. No siempre es sencillo dibujar las isoclinas y por tanto las soluciones.
La existencia y unicidad de una ecuación serán una de las primeras dificultades a tratar. Una ED tiene en general un número infinito de soluciones. Sin embargo si sometemos dichas soluciones a alguna condición de tipo a especificar, podemos elegir entre ellas una sola.

Existencia y unicidad

Puesto que en muchas ocasiones no dispondremos de la solución explícita de una ecuación diferencial, resulta muy interesante el estudio de las propiedades de esas posibles soluciones, así como de su existencia y unicidad. En general, se entiende que un problema está bien planteado cuando tiene solución única y ésta depende en forma continua tanto de los parámetros de la ecuación como de los datos iniciales.

Definición 1.8. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en algún intervalo de la recta. Se dice que f verifica la condición de Lipschitz si:*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in I$$

donde L es la constante de Lipschitz de la función f.

Veamos ahora como toda función derivable con derivada continua es Lipschitziana localmente.

Lema 1.1. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable y acotada en I. Entonces $f(x)$ es Lipschitziana y una constante de Lipschitz es el máximo de la derivada en I.*

Entre los resultados más importantes se encuentra el Teorema de existencia y unicidad que escribe a continuación.

Teorema 1.4. *Sea la ecuación diferencial de primer orden: $x' = f(t, x)$ donde f es una función continua en:*

$$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

y Lipschitziana en la segunda variable en el mismo conjunto D (la condición de lipschitzianidad no necesita establecerse en todo D, pero no se entrará en estos detalles). Entonces existe una solución única $x(t)$, que verifica $x(t_0) = x_0$ y que está definida en un entorno de t_0, $|t - t_0| \leq T$, donde $T = \text{mín}\{a, \frac{b}{K}\}$ siendo $K = \sup\{f(t, x) : (t, x) \in D\}$.

Para mostrar el segundo Teorema de existencia y unicidad, debemos introducir primero el concepto de aplicación contractiva y un Teorema de punto fijo.

Definición 1.9. *Sea (E, d) un espacio métrico y T una aplicación de E en E. Se dice que T es contractiva de constante a si, $\exists\, a$, $0 < a < 1$, tal que*

$$d(T(x), T(y)) < a\, d(x, y), \ \ \forall x, y \in E$$

El resultado que nos interesa relativo a las aplicaciones contractivas es el siguiente Teorema de punto fijo (existen teoremas de punto fijo más generales, como los de Brouwer, Schauder-Tychonoff, que aparecen en teoremas de existencia, para diversos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales).

Teorema 1.5. *Sea (E, d) un espacio métrico completo y $T : E \to E$ una aplicación contractiva de constante a. Entonces existe un único punto fijo de la aplicación T, es decir, $\exists\, x \in E$ tal que $T(x) = x$.*

Otra forma del teorema que proporciona resultados de existencia globales, y su demostración a partir del Teorema del punto fijo.

Teorema 1.6. *(Picard-Lindelof)*
Consideremos la siguiente ecuación diferencial (o sistema de ecuaciones de primer orden):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x) \qquad t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

donde $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y lipschitziana en la segunda variable (vectorial en general) en todo su dominio de definición, esto es: $||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $L > 0$. ($||.||$ denota la norma usual en $\mathbb{R}^n$). Entonces, existe una unica solución $x(t)$ que verifica la condición inicial y está definida en $[t_0, t_1]$.

Estabilidad

Una de las cuestiones más interesantes que se pueden plantear en torno a las ecuaciones diferenciales es la de estabilidad de las soluciones, es decir, si se dan los datos iniciales (una pequeña cantidad), que se puede decir del comportamiento, para todo valor de la variable independiente, de las soluciones correspondientes.
Se definirá primeramente que se entiende por estabilidad de una solución.

Definición 1.10. *Consideremos el siguiente*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

que se supone admite una solución única, $x(t)$, definida para todo $t \geq t_0$. Se dice que $x(t, x_0)$ es una solución estable (a la derecha) si: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, si $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ verifica que $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, entonces $\exists x(t, \tilde{x}_0)$ que es solución, con

$x(t, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$, *definida en* $[t_0, \infty)$ *y tal que:*

$$||x(t, \tilde{x}_0) - x(t, x_0)|| < \epsilon, \qquad \forall t \geq t_0$$

es decir, las soluciones que tienen condiciones iniciales cerca del punto inicial de la solución a estudiar, se mantienen cerca de ésta para todo el tiempo posterior.

Se puede considerar una clase más particular de estabilidad, la llamada estabilidad asintótica.

Definición 1.11. *Se dice que* $x(t, x_0)$ *es una solución asintóticamente estable, si es estable y si existe* $\eta > 0$ *tal que, si* $||\tilde{x}_0 - x_0|| < \eta$ *entonces,*

$$\lim_{t \to \infty} ||x(t, \tilde{x}_0) - x(t, x_0)|| = 0$$

Nótese que se necesita que la solución sea previamente estable. Es decir, la condición de tender a la solución en el infinito no es suficiente para asegurar la estabilidad. Sin embargo, para las ecuaciones de primer orden es una condición suficiente.

Linealización

Tomemos ahora la ecuación diferencial ordinaria

$$x' = f(x) \tag{1.16}$$

Una solución constante o de equilibrio en x_0, deberá cumplir $f(x_0) = 0$.

Así tomemos una perturbación de este punto de equilibrio, es decir una solución cercana de la forma $x(t) = x_0 + \varepsilon u(t)$ entonces

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon u' = f(x) \\ &= f(x_0 + \varepsilon u) \end{aligned}$$

donde podemos utilizar la aproximación de Taylor obteniendo

$$\begin{aligned} \varepsilon u' &= f(x_0 + \varepsilon u) \approx f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon u \\ &= \varepsilon f'(x_0)u \end{aligned}$$

Definiendo $J = f'(x_0)$ obtenemos la ecuación

$$u' = Ju \tag{1.17}$$

Que recibe el nombre de *Linealización* de (1.16)

Linealización con retardo

Supongamos que se tiene la ecuación diferencial ordinaria

$$x' = f(x, x(t-\tau)) \tag{1.18}$$

donde $x(t-\tau)$ es de retardo discreto. Si x_0 es una solución constante o punto de equilibrio, entonces al sustituir (1.18), obtenemos $0 = f(x_0, x_0)$ y esta igualdad nos da la forma para calcular los puntos de equilibrio.

Si $x(t) = x_0 + \epsilon u(t)$, es un solución cercana al punto de equilibrio x_0 entonces

$$x' = \epsilon u' = f(x, x(t-\tau)) = f(x_0 + \epsilon u(t), x_0 + \epsilon u(t-\tau))$$

Usando las aproximaciones de Taylor en dos variable se obtiene

$$\begin{aligned} \varepsilon u' &= f(x_0 + \varepsilon u(t), x_0 + \epsilon u(t-\tau)) \\ &= f(x_0, x_0) + D_1 f(x_0, x_0)\epsilon u + D_2 f(x_0, x_0)\epsilon u(t-\tau) \\ &= D_1 f(x_0, x_0)\epsilon u + D_2 f(x_0, x_0) x(t-\tau)\epsilon u(t-\tau) \\ &= \epsilon[D_1 f(x_0, x_0) x(t) u + D_2 f(x_0, x_0) x(t-\tau) u(t-\tau)] \end{aligned}$$

ahora si hacemos

$$J = D_1 f(x_0, x_0) \tag{1.19}$$

$$J_D = D_2 f(x_0, x_0) \tag{1.20}$$

Entonces podemos escribir

$$u' = Ju(t) + J_D u(t - \tau) \tag{1.21}$$

Relación entre una ecuación y su linealización

En general si no es posible encontrar la solución de una ecuación dada, se puede al menos describir el comportamiento de la misma a travez de otra ecuación. Se dirá que un punto de equilibrio de una ecuación diferencial es hiperbólico si la matriz Jacobiana de f no tiene valores propios con parte real nula. En éste caso unidimensional, ésta condición se traduce al hecho de que $f(x)$ no se anule en dicho punto de equilibrio.
El Teorema de Hartman-Grobman establece que para cada punto de equilibrio x_0 hiperbólico de la ecuación diferencial existe una vecindad V de x_0 y un homeomorfismo h definido en V que manda las soluciones de la ecuación diferencial original sobre las de su linealización. En otras palabras, en dicha vecindad V las soluciones de la linealización y las de la ecuación diferencial original tienen el mismo comportamiento cualitativo.

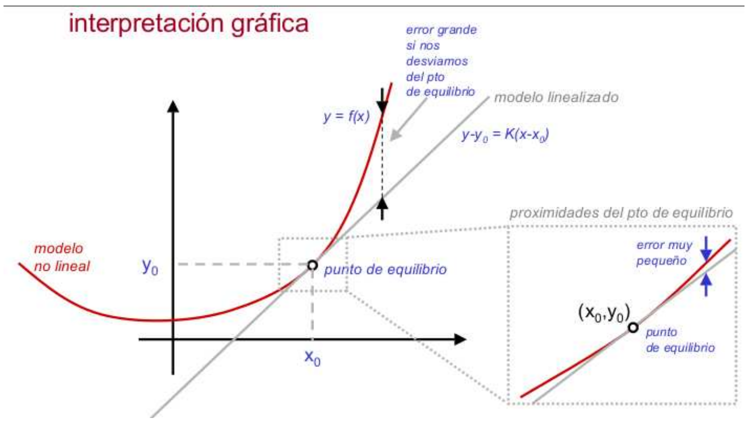


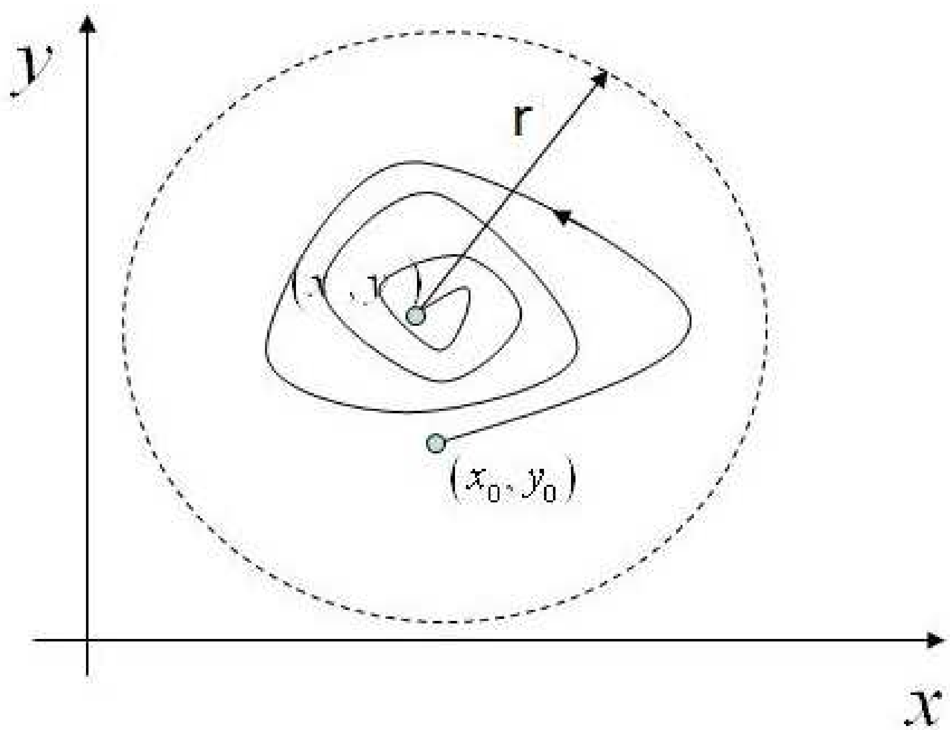
Figura 1.5: **Interpretación geométrica de la linealización de una ecuación diferencial, en un punto de equilibrio**

En base a lo anterior se definirá el comportamiento cualitativo de las soluciones de una ecuación diferencial en una vecindad del punto de equilibrio.

Definición 1.12. ***Estabilidad por la derecha*** *Se dice que un punto de equlibrio P, es estable si para todo $\varepsilon > 0$, existe una $r > 0$ tal que si, $x(t_0)$ está en $B_r(P)$, entonces $x(t)$ está definida para toda $t \geq t_0$ y $x(t)$ está en $B_\varepsilon(P)$ para toda $t \geq t_0$.*

Definición 1.13. ***Estabilidad asintótica por la derecha*** *Se dice que un punto de equilibrio P es asintóticamente (exponencialmente) estable si existe una $r > 0$ tal que si, $x(t_0)$ está en $B_r(P)$ entonces $x(t)$ está definida para toda $t \geq t_0$ y* $\lim_{t\to\infty} x(t) = P$.

Definición 1.14. ***Estabilidad asintótica por la izquierda*** *Se dice que un punto de equilibrio P es asintóticamente (exponencialmente) estable si, existe una $r > 0$ tal que si, $x(t_0)$ está $B_r(P)$, entonces $x(t)$ está definida para toda $t \leq t_0$ y* $\lim_{t\to-\infty} x(t) = P$.



La ecuación característica

Suponiendo que la linealización u de (1.17) es de la forma

$$u(t) = C\, e^{\lambda t}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ al sustituir en (1.17) obtenemos

$$Ju = \lambda u$$

y por tanto $\lambda = J$ con lo que se puede deducir el siguiente resultado.

Proposición 1.3. *Si x_0 es una solución de equilibrio de la ecuación (1.16), se cumplen los siguientes casos.*

a) Si $J = f'(x_0) < 0$ entonces, x_0 es asintóticamente (exponencialmente) estable.

b) Si $J = f'(x_0) > 0$ entonces, x_0 es asintóticamente (exponencialmente) inestable.

c) Si $J = f'(x_0) = 0$, no se puede concluir nada acerca de x_0

Este último debido a que el teorema de la fución inversa garantiza que la función es localmente invertible en todo el dominio a excepción de los puntos donde dicha derivada se anula.
En este caso de una ecuación ordinaria, podemos decir que $\lambda = J$ es la ecuación característica, la cual nos da su solución.

La ecuación característica con retardo

Supóngase que

$$u(t) = Ce^{\lambda t} \quad u(t) \text{ una función real}$$

es una solución de la ecuación (1.21), entonces

$$\begin{aligned} u' &= C\lambda e^{\lambda t} = \lambda u; \\ u(t-\tau) &= Ce^{\lambda(t-\tau)} \\ &= ue^{-\lambda\tau} \end{aligned}$$

sustituyendo en (1.21) resulta

$$\lambda u = Ju + J_D u e^{-\lambda\tau}$$

dividiendo a ambos lados por u nuevamente obtenemos la ecuación característica de (1.18)

$$\lambda = J + J_D e^{-\lambda\tau} \tag{1.22}$$

Definición 1.15. *Sea $x(\theta) = \phi(\theta) > 0$ con $\theta \in [-\tau, 0]$ la función historia o condición inicial de la ecuación (1.18). Diremos que el equilibrio x_0 es estable si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\phi(t) - x_0| \leq \delta$ en el intervalo de historia $[-\tau, 0]$ y eso implica que todas las soluciones de $x(t)$ de (1.18) con historia ϕ en $[-\tau, 0]$ satisfacen que $|x(t) - x_0| < \epsilon$ para toda $t \geq 0$. Si además existe una δ_0 tal que $|\phi(t) - x_0| \leq \delta_0$ en $[-\tau, 0]$, entonces $x(t)$ tiende a x_0 cuando $t \to \infty$ diremos que x_0 es asintóticamente estable.*

Teorema 1.7. *(Principio de estabilidad linealizada para ecuaciones con retardo)*
Si la parte real de todas las soluciones de la ecuación característica (1.22) es negativa, entonces el equilibrio x_0 es asintóticamente estable.

El Teorema anterior está basado en el Jacobiano que forma parte de la ecuación caracterítica, por lo que es la parte análoga de la Proposición (1.3), donde el signo del Jacobiano es negativo garantiza estabilidad asintótica, por lo tanto si J y J_D son negativos λ tendrá signo negativo.

Ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes

Consideremos una ecuación lineal de orden n homogénea de coeficientes constantes:

$$x^{(n)} + a_0 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x' + a_n x = 0 \tag{1.23}$$

Definición 1.16. *Se llama polinomio característico de esta ecuación a:*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{1.24}$$

Los elementos básicos de la ecuación diferencial son las raíces del polinomio característico.

Proposición 1.4. *Si las raíces del polinomio característico, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son todas distintas entre sí el conjunto de funciones:*

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t} \tag{1.25}$$

es una base del espacio de soluciones de la ecuación (1.23)

Retomando el polinomio caracteristico (1.24) y definiendo la siguiente combinación de parámetros

$$\begin{array}{ccc}
b_n = 1 - a_n^2 & c_n = b_n^2 - b_1^2 & d_n = c_n^2 - c_2^2 \\
b_{n-1} = a_1 - a_n a_{n-1} & c_{n-1} = b_n b_{n-1} - b_1 a_2 & d_{n-1} = c_n c_{n-1} - c_2 c_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
b_{n-k} = a_k - a_n a_{n-k} & c_{n-k} = b_n b_{n-k} - b_1 a_{k+1} & d_{n-k} = c_n c_{n-k} - c_2 c_{k+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
b_1 = a_{n-1} - a_n a_1 & c_2 = b_n b_2 - b_1 a_{n-1} & d_3 = c_n c_3 - c_2 c_{n-1}
\end{array}$$

La lista sigue creciendo, se disminuyen los parámetros en cada etapa hasta que solo quedan tres cantidades relacionadas con sus predecesores por la regla

$$q_n = 1 - p_n^2 - p_{n-3}^2$$
$$q_{n-1} = p_n p_{n-1} - p_{n-3} p_{n-2}$$
$$q_{n-2} = p_n p_{n-2} - p_{n-3} p_{n-1}$$

Formulando el siguiente criterio.

La condición necesaria y suficiente para que todas las raices de $P(\lambda)$ satisfaga la condición que $|\lambda| < 1$ es la siguiente:

1. $P(1) = 1 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n > 0$
2. $(-1)^n P(-1) = (-1)^n[(-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(-1) + a_n] > 0$
3. $$\begin{array}{cc} (a) & |a_n| < 1 \\ & |b_n| > |b_1| \\ & |c_n| > |c_2| \\ & |d_n| > |d_3| \\ \vdots & \vdots \\ (q) & |q_n| > |q_{n-2}| \end{array}$$

Estabilidad de ecuaciones lineales.

Para sistemas de ecuaciones y ecuaciones de orden n los conceptos son los mismos, aunque evidentemente las dificultades para saber si una solución es estable o no, son mayores.

Considerese la ecuación diferencial lineal general, de escalares reales, con un único retardo $\tau(\tau > 0)$:

$$\Sigma_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \Sigma_{k=0}^{n} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t-\tau) = 0 \tag{1.26}$$

Se sabe que si la ecuación característica asociada con una ecuación lineal neutro tiene raíces sólo con partes reales negativas y si todas las raices son uniformemente acotadas lejos del eje imaginario, entonces la solución trivial de la ecuación lineal es neutra, uniformemente asintótica y estable. Por lo tanto, el análisis de estabilidad de la ecuación (1.26) es equivalente al problema de determinar las condiciones bajo la cual todas las raíces de su ecuación característica

$$\Sigma_{k=0}^{n} a_k \lambda^k + \left(\Sigma_{k=0}^{n} b_k \lambda^k\right) e^{-\lambda\tau} = 0 \tag{1.27}$$

estan en el semi plano complejo izquierdo y estan uniformemente acotadas por el eje imaginario.
Se denotará

$$P(\lambda) = \Sigma_{k=0}^{n} a_k \lambda^k, \quad Q(\lambda) = \Sigma_{k=0}^{n} b_k \lambda^k \tag{1.28}$$

Sin perdida de generalidad, asumimos $a_n = 1$.

Teorema 1.8. *Si $|b_n| > 1$, entonces para toda $\tau > 0$, existen un número infinito de raices de*

$$P(\lambda) + Q(\lambda) e^{-\lambda\tau} = 0, \tag{1.29}$$

que tienen parte real positiva.

Por lo que la ecuación no sería estable. Generando de forma inmediata como consecuencia el siguiente teorema.

Teorema 1.9. *Si $|b_n| > 1$, entonces la solución trivial de (1.26) es inestable para toda $\tau > 0$.*

$$P(\lambda) + Q(\lambda) e^{-\lambda\tau} = 0,$$

que tienen solución λ con parte real positiva.

Teorema 1.10. *Sea $f(\lambda, \tau) = \lambda^n + g(\lambda, \tau)$, donde $g(\lambda, \tau)$ es una función analítica. Asumimos*

$$\alpha = \lim \sup_{\substack{\Re\, \lambda > 0 \\ |\lambda| \to \infty}} \mid \lambda^{-n} g(\lambda, \tau) \mid < 1 \tag{1.30}$$

Entonces, como τ varia en la suma de las multiplicidades de las raices de $f(\lambda, \tau) =$

0 *en el semiplano abierto derecho, puede cambiar solo si una raíz aparece en o cruza los ejes immaginarios.*

Es decir cuando una raíz cruza el eje, desde el semi plano derecho, habrá un cambio de signo en la part real de la raíz de la ecuación diferencial, lo que generará que la estabilidad cambie.

Prueba Nótese primero que, dado que $f(\lambda, \tau)$ es una función analítica, solo puede tener un número finito de ceros en cualquier conjunto compacto de el plano complejo. Si $f(\lambda, \tau) = 0$ tiene un número infinito de raices en el semiplano abierto derecho, por hipótesis, entonces existe una secuencia λ_j tal que $f(\lambda_j, \tau) = 0$, $|\lambda_j| \to \infty$, cuando $j \to \infty$, que a su vez implica

$$0 = \frac{f(\lambda_j, \tau)}{\lambda_j^n} = 1 + \frac{1}{\lambda_j^n} g(\lambda_j, \tau). \tag{1.31}$$

Por lo tanto, según la condición de la hipótesis se tiene

$$\lim_{j\to\infty} \mid \lambda_j^{-n} g(\lambda_j, \tau) \mid = 1 > \limsup_{\substack{\Re(\lambda)>0 \\ |\lambda|\to\infty}} \mid \lambda_j^{-n} g(\lambda, \tau) \mid, \tag{1.32}$$

Lo que es una contradicción. Por lo tanto se concluye que la multiplicidad total $M(\tau)$ de raices de $f(\lambda, \tau) = 0$ en el semiplano abierto derecho es finita.
Sea $\lambda = \lambda(\tau)$ es una raíz cualquiera de $f(\lambda, \tau) = 0$ colocando un disco alrededor $\lambda(\tau)$, entonces si τ' está lo suficientenemente cerca de τ la multiplicidad total de las raices en el disco es igual a la multiplicidad de $\lambda(z)$. Siguiendo el Teorema de Rouché implica que una raíz de $\lambda(\tau)$ no puede de repente aparecer desaparecer, o cambiar su multiplicidad en un punto finito del plano complejo.
Supongase que $M(\tau)$ cambia, pero que las raices no aparecen al estar o cruzar el eje imaginario. Esto solo puede ocurrir debido a la aparición de una raíz en el infinito. Es decir debería existir τ^* y una raíz $\lambda(\tau)$ tal que $|\lambda(\tau)| \to \infty$ cuando $\tau \to \tau^* + 0$ $o(\tau \to \tau^* - 0)$, con $\Re(\lambda(\tau)) \geq 0$. Sin embargo, donde $\mid e^{-\tau\lambda(\tau)} \mid \leq 1$, cuando $\Re(\lambda(\tau)) \leq 0$ se tiene

$$\lambda^{-n} f(\lambda, \tau) = 1 + \lambda^{-n} g(\lambda, \tau),$$

y $\mid \lambda^{-n} g(\lambda, \tau) \mid \geq \frac{1}{2}(1 - \alpha) > 0$, cuando τ está cerca de τ^*. Esto contradice el hecho de que $f(\lambda(\tau), \tau) = 0$, lo que completa la prueba.

Teorema 1.11. *Considerando la ecuación (1.29), donde $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ son funciones análiticas en $\Re > 0$ y satisface las siguientes condiciones:*

(i) $P(\lambda)$ *y* $Q(\lambda)$ *no tienen raices imaginarias en común.*

(ii) $\overline{P(-\imath y)} = P(\imath y)$, $\overline{Q(-\imath y)} = Q(\imath y)$ *para* y *real;*

(iii) $P(0) + Q(0) \neq 0$

(iv) $\lim\sup\{|\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}|: |\lambda| \to \infty \ \Re(\lambda) \geq 0\} < 1$ *;*

(v) $F(y) \equiv |P(\imath y)|^2 - |Q(\imath y)|^2$ *para toda* y *real tiene a lo sumo un número finito de ceros reales.*

Entonces las siguientes proposiciones son ciertas

(a) *Si* $F(y) = 0$ *tiene raices no positivas, entonces no ocurre un cambio de estabilidad.*

(b) *Si* $F(y) = 0$ *tiene al menos una raíz positiva y cada una de ellas es simple, entonces como* τ *incrementa, pueden producirse un número finitos de cambios de estabilidad y eventualmente la ecuación se vuelve inestable.*

Ahora se mostrará los criterios de estabilidad la ecuacion diferencial de primer grado con retardo discreto de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} + \alpha\frac{dx(t-\tau)}{dt} + \beta x(t) + \gamma x(t-\tau) = 0, \qquad (1.33)$$

donde $\tau, \alpha, \beta, \gamma$ son constantes reales.

Partiendo de la ecuación lineal homogénea de orden dos, con coeficientes constantes

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (1.34)$$

para encontrar soluciones de esta ecuación se suponen soluciones de la forma $y = e^{\lambda x}$.
Así se puede observar que

$y = e^{\lambda x}$ es solución de (1.34) $\Leftrightarrow (e^{\lambda x})'' + a_1(e^{\lambda x})' + a_2(e^{\lambda x}) = 0$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

Que no es mas que la ecuación caracteristica asociada, las soluciones de dicha ecuación nos determina números λ para los cuales $y = e^{\lambda x}$ es solución de (1.34).
Asi para (1.33) su ecuación característica asociada es

$$\lambda + \alpha\lambda e^{-\lambda\tau} + \beta + \gamma e^{-\lambda\tau} = 0, \tag{1.35}$$

Por el Teorema 1.9, cuando $|\alpha| > 1$, la solución trivial de $x(t) \equiv 0$ de (1.33) es siempre inestable para $\tau > 0$. Por lo que asumiremos que $|\alpha| < 1$. El caso cuando $|\alpha| = 1$ será tratado como un caso critico.
En el caso $|\alpha| < 1$, por el Teorema 1.10 sabemos si la estabilidad de la solución trivial $x(t) \equiv 0$ de (1.33) cambia en $\tau = \bar{\tau}$, entonces (1.35) debe tener un par de raices imaginarias puras cuando $\tau = \bar{\tau}$. En virtud del Teorema 1.10, puede pensarse que las raices de (1.35) tiene una función continua en términos del retardo τ es decir

$$\lambda(\tau) + \alpha\lambda e^{-\lambda(\tau)\tau} + \beta + \gamma e^{-\lambda(\tau)\tau} = 0.$$

Para comprender el cambio de la estabilidad, hay que determinar el valor de $\bar{\tau}$ en el que (1.35) puede tener un par de raices imaginarias puras conjugadas. Asumiendo que $\lambda = \imath\omega$, $\omega > 0$ es una raíz de (1.35) para $\tau = \bar{\tau}$, $\bar{\tau} \geq 0$ primero consideremos la siguiente suposición.

(H1) $\beta + \alpha \neq 0$
Se tratará $\beta + \alpha = 0$ como un caso crítico.
De (1.35), se tienen la parte real e imaginaria respectivamente

$$\begin{aligned} \alpha\omega sen\omega\tau + \beta + \gamma cos\omega\tau &= 0 \\ \omega + \alpha\omega cos\omega\tau - \gamma sen\omega\tau &= 0 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Al trasladar β y ω al lado derecho de las ecuaciones (1.36) y elevando al cuadrado

$$\alpha^2\omega^2 sen^2(\omega\tau) + 2\alpha\omega\gamma sen(\omega\tau)cos(\omega\tau) + \gamma^2 cos^2(\omega\tau) = \beta^2$$
$$\alpha^2\omega^2 cos^2(\omega\tau) - 2\alpha\omega\gamma sen(\omega\tau)cos(\omega\tau) + \gamma^2 sen^2(\omega\tau) = \omega^2$$

sumando se obtiene

$$\alpha^2\omega^2 + \gamma^2 = \omega^2 + \beta^2 \tag{1.37}$$

Entonces

$$\omega^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \tag{1.38}$$

Derivando (1.35) con respecto a λ

$$(1 + \alpha e^{-\lambda\tau} - \tau\alpha\lambda e^{-\lambda\tau} - \gamma\tau e^{-\lambda\tau})d\lambda = 0$$

y luego con respecto a τ

$$(\alpha\lambda^2 e^{-\lambda\tau} + \gamma\lambda e^{-\lambda\tau})d\tau = 0$$

igualando y despejando, se tiene

$$\left\{1 + \alpha e^{-\lambda\tau} - \tau(\alpha\lambda + \gamma)e^{-\lambda\tau}\right\}\frac{d\lambda}{d\tau} = \lambda(\alpha\lambda + \gamma)e^{-\lambda\tau}. \tag{1.39}$$

(H2) Sea $\gamma^2 > \beta^2$, bajo esta suposición puede verse que existen las raices puramente imaginarias de (1.35) y son simples. Ya que de lo contario en (1.38) se tendría que ω sería imaginario y por tanto λ no sería imaginario puro como se asumió al inicio.

Despejando en (1.39) despejando y reacomodando en (1.38), se obtiene respectivamente

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{e^{\lambda\tau} + \alpha}{\lambda(\alpha\lambda + \gamma)} - \frac{\tau}{\lambda} \quad y \quad e^{\lambda\tau} = -\frac{\alpha\lambda + \gamma}{\lambda + \beta}. \tag{1.40}$$

$$
\begin{aligned}
sign\left\{\frac{d(\Re\lambda)}{d\tau}\right\}_{\lambda=\imath\omega} &= sign\left\{\Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right\}_{\lambda=\imath\omega}\\
&= sign\left\{\Re\left(\frac{e^{\lambda\tau}}{\lambda(\alpha\lambda+\gamma)}\right)+\Re\left(\frac{\alpha}{\lambda(\alpha\lambda+\gamma)}\right)\right\}_{\lambda=\imath\omega}\\
&\quad \text{Sustituyendo el valor de } e^{\lambda\tau}\\
&= sign\left\{\Re\left(-\frac{\frac{\alpha\lambda+\gamma}{\lambda+\beta}}{\lambda(\alpha\lambda+\gamma)}\right)+\Re\left(\frac{\alpha}{\lambda(\alpha\lambda+\gamma)}\right)\right\}_{\lambda=\imath\omega}\\
&= sign\left\{\Re\left(-\frac{1}{\lambda(\lambda+\beta)}\right)+\Re\left(\frac{\alpha}{\lambda(\alpha\lambda+\gamma)}\right)\right\}_{\lambda=\imath\omega}\\
&\quad \text{Evaluando en } \lambda=\imath\omega\\
&= sign\left\{\Re\left(-\frac{1}{\imath\omega(\imath\omega+\beta)}\right)+\Re\left(\frac{\alpha}{\imath\omega(\imath\omega\alpha+\gamma)}\right)\right\}\\
&\quad \text{Multiplicando denominador y numerador por el conjudado}\\
&\quad -\imath\omega(-\imath\omega+\beta) \text{ y } -\imath\omega(-\alpha\imath\omega+\gamma) \text{ respectivamente}\\
&= sign\left\{\Re\left(\frac{\imath(\beta-\imath\omega)}{\omega(\omega^2+\beta^2)}\right)+\Re\left(\frac{-\imath\alpha(\gamma-\imath\alpha\omega)}{\omega(\gamma^2+\alpha^2\omega^2)}\right)\right\}\\
&\quad \text{Extrayendo unicamente la parte real de cada término}\\
&= sing\left\{\frac{1}{\omega^2+\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\gamma^2+\alpha^2\omega^2}\right\}\\
&\quad \text{Haciendo uso de (1.37)}\\
&= sing\left\{\frac{1-\alpha^2}{\omega^2+\beta^2}\right\}\\
&\quad \text{Como el denominador es positivo}\\
&= sign\left\{1-\alpha^2\right\}=+
\end{aligned}
$$

El último paso es válido dado que $\omega \neq 0$. Por lo tanto si, $|\alpha|<1$, entonces

$$sign\left(\frac{d(\Re\lambda)}{d\tau}\right)|_{\lambda=\imath\omega}=+, \quad es\ decir \quad \frac{d(\Re\lambda)}{d\tau}|_{\lambda=\imath\omega}>0 \tag{1.41}$$

Esto implica que todas las raices que cruzan el eje imaginario en $\imath\omega$ de izquierda a derecha cuando τ aumenta.
se consideran los dos casos siguientes:

- **Caso 1** $\beta+\gamma<0$

Sea $\tau = 0$ en (1.35). Entonces se tiene que

$$0 = \lambda(0) + \alpha\lambda(0) + \beta + \gamma$$

Despejando

$$\lambda(0)(1 + \alpha) = -(\beta + \gamma),$$

y por lo tanto

$$\lambda(0) = -\frac{(\beta + \gamma)}{(1 + \alpha)} > 0;$$

es decir la solución trivial de la ecuación diferencial neutral con retardo (1.33) es inestable cuando no hay retardo, y por (1.41), se mantendrá inestable para toda $\tau > 0$.

- **Caso 2** $\beta + \gamma > 0$
En este caso, $\lambda(0) = -\frac{\beta+\gamma}{1+\alpha} < 0$; es decir que la ecuación (1.33), es asintoticamente estable cuando no hay retardo.
De (1.36), despejando $cos\omega\tau$ en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, se tiene

$$cos\omega\tau = \frac{-(\alpha\omega^2 + \beta\gamma)}{\gamma^2 + \alpha^2\omega^2} \tag{1.42}$$

y

$$sen\omega\tau = \frac{\omega(\gamma - \beta\alpha)}{\alpha^2\omega^2 + \gamma^2} \tag{1.43}$$

Por lo tanto hay un único θ, $0 < \theta \leq 2\pi$, tal que $\omega\tau = \theta$, hace que ambas (1.42) y (1.43) se mantengan. Nótese que si $\gamma^2 > \beta^2$

$$\gamma^2 - \beta^2 = (\gamma - \beta)(\gamma + \beta) > 0$$

, $\beta + \gamma > 0$, por lo tanto, $\gamma - \beta > 0$, de aqui que $\gamma > |\beta| \geq 0$ entonces $\gamma - \alpha\beta > 0$ puesto que $|\alpha| < 1$ y por (1.38)$\Rightarrow$ $sen\omega\tau > 0$. Por lo tanto

$$\theta = arcot\left(-\frac{\alpha\omega^2 + \beta\gamma}{\omega(\gamma - \beta\alpha)}\right) \tag{1.44}$$

y $0 < \theta < \pi$ es el intervalo donde $sen\omega\tau$ es positivo. Denotando

$$\tau_0 = \frac{\theta}{\omega} \tag{1.45}$$

Cuando $0 < \tau < \tau_0$, la solución trivial de la ecuación. (1.33) es uniformemente asintotica estable; cuando $\tau > \tau_0$ es inestable.

Si $\gamma^2 < \beta^2$, no hay raices imaginarias puras en la ecuación (1.35), dado que en (1.38) ω sería complejo y por tanto dado que la solución es de la forma $\imath\omega$ la raíz no seria imaginaria pura. En otras palabras, no hay raices de (1.35) que crucen el eje imaginario cuando τ incrementa. Por lo tanto, no hay cambio en la estabilidad, si importar como se elija el retardo discreto τ.

En el caso que $\gamma + \beta \neq 0$, vemos que $\omega = 0$ es la única solución de (1.38).

Sin embargo, $\lambda = 0$ no es raíz de (1.35) por hipóresis (H1) por lo tanto no hay cambio de estabilidad como tal.

Asi con excepción de los casos críticos se obtiene el siguiente análisis de cambio de estabilidad de la ecuación diferencial neutral con retardo (1.33)

Teorema 1.12. *En (1.33), asumiendo $|\alpha| \neq 1$, luego las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

1. *Si $|\alpha| > 1$, entonces (1.33) es inestable para todos los retardos positivos τ.*

2. *Si $|\alpha| < 1$, $\gamma^2 < \beta^2$, o $\gamma + \beta \neq 0$, entonces el incremento de τ no cambia la estabilidad de (1.33).*

3. *Si $|\alpha| < 1$, $\gamma^2 > \beta^2$ y*

   i *$\beta + \gamma < 0$, entonces (1.33) es inestable para todos los retardos positivos.*

   ii *$\beta + \gamma > 0$, entonces (1.33) es uniforme asintoticamente estable cuando $\tau < \tau_0$ e inestable cuando $\tau > \tau_0$, donde $\tau_0 = \frac{\theta}{\omega}$ y*

$$\omega = \left((\gamma^2 - \beta^2)(1 - \alpha^2)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = arcot\left(-\frac{\alpha\omega^2 + \beta\gamma}{\omega(\gamma - \beta\alpha)}\right)$$

Los casos críticos aún sin resolver son lo siguientes:

- **Caso crítico 1** $|\alpha| = 1$
  El Teorema 1.10 no es válido.

- **Caso crítico 2** $|\alpha| < 1, \beta + \gamma = 0$.
  En este caso, $\lambda(\tau) = 0$ es siempre raíz de (1.35) para toda $\tau \geq 0$. De donde (1.33) nunca puede ser asintóticamente estable. Un análisis parcial de esos casos criticos es
  Asumir a $\lambda = u + \imath v$ es una raíz de (1.35), entonces en (1.35) separando parte real e imaginaria

$$u + \alpha u e^{-\tau u} cos\tau v + \alpha v e^{-\tau u} sen\tau v + \beta + \gamma e^{-\tau u} cos\tau v = 0,$$
$$v - \alpha u e^{-\tau u} sen\tau v + \alpha v e^{-\tau u} cos\tau v - \gamma e^{-\tau u} sen\tau v = 0. \qquad (1.46)$$

- **Análisis del caso crítico 1**

  (i) $\alpha = -1$.
  Para este caso hay tres subcasos a considerar.

  (a) Asumiendo $\gamma + \beta = 0$. Entonces (1.35)

$$\lambda + \alpha\lambda e^{-\lambda\tau} + \beta - \beta e^{-\lambda\tau} = 0$$
$$\lambda(1 + \alpha e^{-\lambda\tau}) + \beta(1 - e^{-\lambda\tau}) = 0$$
Sustituyendo el valor de $\alpha = -1$
$$\lambda(1 - e^{-\lambda\tau}) + \beta(1 - e^{-\lambda\tau}) = 0$$
$$(\lambda + \beta)\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right) = 0 \qquad (1.47)$$

  Si $\beta < 0$, entonces $\lambda > 0$ y (1.33) es siempre inestable para $\tau \geq 0$; mientras que si $\beta \geq 0$, entonces (1.33) es estable, pero no es asintóticamente estable.

(b) Asumiendo $\beta > |\gamma|$. En este caso (1.35) si $\tau = 0$

$$
\begin{aligned}
\lambda + \alpha\lambda + \beta + \gamma &= 0 \\
\lambda(1+\alpha) + \beta &= -\gamma \\
\text{Como } \alpha &= -1 \\
\beta &= -\gamma \\
&\longrightarrow\!\longleftarrow
\end{aligned}
$$

por tanto no tiene sentido cuando $\tau = 0$. Asumiendo que (1.35) tiene una raíz $\lambda = u + \imath v$, donde $u \geq 0$, para algún $\tau > 0$.
De (1.46) , se tiene

$$(u+\beta)^2 + v^2 = e^{-2\tau u}\left((\alpha u + \gamma)^2 + \alpha^2 v^2\right) \tag{1.48}$$

Por lo tanto,

$$(u+\beta)^2 + v^2 \leq (\alpha u + \gamma)^2 + \alpha^2 v^2 \tag{1.49}$$

De $\alpha = -1$, se tiene

$$
\begin{aligned}
(u+\beta)^2 + v^2 &\leq (\gamma - u)^2 + v^2 \\
&\text{Desarrollando los cuadrados} \\
u^2 + 2u\beta + \beta^2 &\leq u^2 - 2u\gamma + \gamma^2 \\
2u(\beta + \gamma) &\leq \gamma^2 - \beta^2 \qquad (1.50)
\end{aligned}
$$

En el caso $\beta > |\gamma|$, se tiene $\beta + \tau > 0$, $\gamma^2 - \beta^2 < 0$. Por tanto (1.50) implica $2u(\beta+\gamma) < 0$, lo que contradice el hecho que $u \geq 0$. Por lo tanto todas las raices de (1.35) deben tener parte real negativa para $\tau > 0$, lo que implica en el caso de (1.33) es asintóticamente estable para todos los retardos positivos.

(c) Asumiendo $\gamma > |\beta|$. Suponiendo en este caso (1.35) tiene una raíz $\lambda = u + \imath v$, donde $u \leq 0$, para algun $\tau > 0$. Entonces, por (1.48)

$$(u+\beta)^2 + v^2 \geq (\alpha u + \gamma)^2 + \alpha^2 v^2 \tag{1.51}$$

Asi

$$2u(\gamma+\beta) \geq \gamma^2 - \beta^2 \tag{1.52}$$

De $\gamma > |\beta|$, se tiene $\beta + \tau > 0$, $\gamma^2 - \beta^2 > 0$, lo que implica $2u(\beta+\gamma) \geq \gamma^2 - \beta^2 > 0$. Esto contradice el supuesto que $u \leq 0$. Por lo tanto, todas las raices de (1.35) tienen parte real positiva cuando $\tau > 0$, lo que implica que (1.33) es inestable para todos los retardos positivos.

Ahora asumiendo

(ii) $\alpha = +1$.

En este caso, se tienen tres subcasos

(a) Asumiendo $\beta = \gamma$. Entonces (1.35) es equivalente a

$$(\lambda+\beta)\left(1+e^{-\lambda\tau}\right) = 0 \tag{1.53}$$

De aqui que si $\beta \geq 0$, entonces (1.33) es estable para toda $\tau \geq 0$ (pero no es asintóticamente estable); mientras que si $\beta < 0$, entonces (1.33) es siempre inestable.

(b) $\beta > |\gamma|$. Suponiendo que (1.35) tiene una raíz $\lambda = u + \imath v$, donde si $u \geq 0$. Entonces por (1.48), se tiene

$$2u(\beta-\gamma) \leq \gamma^2 - \beta^2 \tag{1.54}$$

De $\beta > |\gamma|$, se tiene $\gamma^2 - \beta^2 < 0$, $\beta - \gamma > 0$; por lo tanto (1.54) contradice el hecho que $u \geq 0$. Asi (1.54) será asintoticamente estable.

(c) Se asume que $\gamma < -|\beta|$. Suponiendo en este caso que (1.35) tiene una raíz $\lambda = u + \imath v$, donde $u < 0$, para alguna $\tau \geq 0$, entonces por (1.48) se tiene que $e^{-2u\tau} > 1$

$$\begin{aligned}(u+\beta^2) + v^2 &\geq (\alpha u + \gamma)^2 + \alpha^2 v^2 \\ 2u(\beta-\gamma) &\geq \gamma^2 - \beta^2 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Pero $\gamma^2 - \beta^2 > 0$, $\beta - \gamma > 0$, pero $u \leq 0$ hace a (1.55) imposible. Esta contradicción implica en este caso que para toda $\tau \geq 0$, todas las raices de (1.35) tienen parte real positiva por lo que (1.33) es siempre inestable.

- **Análisis del caso crítico 2** $|\alpha| < 1$, $\beta + \gamma = 0$.
  Este caso se puede dividir en dos

  (i) Asumiendo que $\beta \geq 0$ y suponiendo que (1.35) tiene una raíz $\lambda = u + \imath v$, donde $u > 0$, para alguna $\tau \geq 0$. Entonces (1.49) se aplica a este caso, de donde se obtiene

$$(1 - \alpha^2)u^2 + 2u\beta(1 + \alpha) + v^2(1 - \alpha^2) < 0 \tag{1.56}$$

  Como siempre esto contradice el hecho de que $(1 - \alpha^2)u^2 > 0$, $2u\beta(1 + \alpha) \geq 0$, $v^2(1 - \alpha^2) \geq 0$. Entonces en este caso (1.33) es siempre estable, aunque no de manera asintótica.

  (ii) Asumiendo que $\beta < 0$. De $\gamma + \beta = 0$, se tiene que $\gamma = -\beta > 0$.
  Asi la ecuación (1.35) es equivalente a

$$(\lambda - \gamma)e^{\lambda\tau} + \alpha\lambda + \gamma = 0 \tag{1.57}$$

  Denotando $h(\lambda, \tau) = (\lambda - \gamma)e^{\lambda\tau} + \alpha\lambda + \gamma$. Aqui $h(\lambda, \tau)$ será considerada como una función real de λ. Se tiene

$$h(0, \tau) = 0 \quad h(\gamma, \tau) = \gamma(1 + \alpha) > 0 \tag{1.58}$$

  y

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda}(\lambda, \tau) = \alpha + (\lambda - \gamma)\tau e^{\lambda\tau} + e^{\lambda\tau} \tag{1.59}$$

  De (1.59), se tiene

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda}(0, \tau) = 1 + \alpha - \tau\gamma \tag{1.60}$$

  Por lo tanto si $\tau > \gamma^{-1}(1+\alpha)$, entonces $\frac{\partial h}{\partial \lambda}(0, \tau) < 0$, lo que implica que existe un $\delta > 0$ tal que, cuando $0 < \lambda \leq \delta$, $h(\lambda, \tau) < 0$. De $h(\lambda, \tau) > 0$, se tiene que hay al menos una $\bar{\lambda}$, $\delta \leq \bar{\lambda} < \gamma$, tal que $h(\bar{\lambda}, \tau) = 0$, es decir para este caso $\tau > \gamma^{-1}(1 + \alpha)$, en otras palabras (1.57) siempre tiene una raíz real positiva, lo que implica que (1.35) es inestable.

Formalmente podemos definir ecuaciones diferenciales ordinarias de este tipo de la forma

Definición 1.17. *Una ecuación diferencial de la forma*

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = R(x)$$

se llama ecuación lineal de segundo orden.

.

Algunas de las ecuaciones descendientes de este tipo, tienen diferentes aplicaciones, entre las mas conocidas se encuentra:
La ecuación de Riemann
Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

Un caso particular de esta ecuacione son las de segundo orden, algunas de las mas importantes ecuaciones diferenciales encontradas en ciencia y en ingenieria son las ecuaciones de segundos orden. Algunos ejemplos muy importantes de segundo orden incluyen:

La ecuación de Newton,

$$mx'' = f(x)$$

Ecuaciones de circuito eléctrico en ingeniería,

$$LCx'' + RCx' + x = v(t)$$

Nótese que estas ecuaciones son una subclase especial de los sistemas bidimencionales de ecuaciones diferenciales definidos por la introducción de una variable simple $y = x'$.

Por ejemplo considerando la ecuación constante de segundo orden de la forma,

$$x'' + ax' + bx = 0$$

Si tomamos $y = x'$ la ecuación diferencial anterior se transforma en

$$x' = y, \quad y' + ay + bx = 0$$

Frecuentemente las ecuaciones diferenciales se escriben en términos de sus componentes

$$x'_k = f_k(t, x_1, .., x_n) \quad para \quad k = 1, ..., n$$

Las ecuaciones diferenciales presentadas de esta forma son llamada *sistemas de ecuaciones diferenciales*.
Un sistema de ecuaciones, es una colección de n ecuaciones interrelacionadas de la forma

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Donde las funciones f_j son de valor real de $n+1$ variables.
Al simplificar la notación, utilizando la notación de vector

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ahora se debe escribir el sistema como,

$$X' = F(t, X)$$

donde

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones es llamado *autónomo* si ninguna de las f_j depende de t, así se tendría $X' = F(X)$.
De manera analoga con las ecuaciones diferenciales de primer orden, un vector X_0, para el cual $F(X_0) = 0$ es llamado *punto de equilibrio* para el sistema. Un punto de

equilibrio corresponde a la solución constante $X(t) \equiv X_0$ de el sistema igual que antes.

Estabilidad de sistemas autónomos

Considérese el sistema

$$x' = f(x)$$

con f definida en un abierto D de $\mathbb{R}^n$, continua y Lipschitziana en D. Sea x_0 un punto crítico, es decir, $f(x_0) = 0$. Se define las siguientes nociones de estabilidad. Suponiendo que $x_0 = 0$, para mayor sencillez de notación.

Definición 1.18. *Se dice que el punto crítico 0, es estable si, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon)$, tal que si $||x_0|| < \delta$, entonces $||x(t)|| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$, donde $x(t)$ es la única solución con $x(0) = x_0$.*

Clasificación de puntos críticos. Sistemas lineales autónomos planos. Sea el sistema lineal autónomo en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}$$

donde a, b, c, d son números reales, y la matriz A se escribe

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Definición 1.19. *Se dice que el origen, que es un punto crítico, es un punto elemental si el determinante de la matriz A, es distinto de cero.*

Entonces, sus autovalores son distintos de cero. El único punto singular es el origen, y esto es lo que clasificamos. El tipo de clasificacioń que se desea establecer es el basado en la linealidad del sistema. Es decir, dos sistemas autónomos son linealmente equivalentes si existe una matriz 2×2 que lleva uno en otro.

Definición 1.20. *Dos sistema autónomos lineales $\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} = B\overrightarrow{y}$ (A, B son dos matrices $n \times n$) son linealmente equivalentes si existe una matriz $n \times n$, y P,* *regular, tal que:*

$$B = PAP^{-1}$$

(las coordenadas se transforman como $\overrightarrow{y} = P\overrightarrow{x}$*).*

Ahora que en lo que se está interesado a la hora de establecer la equivalencia lineal son los autovalores. Suponiendo que $detA \neq 0$.
Para autovalores reales se tiene:

- $(trA)^2 > 4\, detA > 0$. Es decir, las raíces reales distintas son del mismo signo. Según este signo, se dice que el origen es:
  - Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, nodo estable.
  - Si $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, nodo inestable.
- $(trA)^2 = 4\, detA$. Es decir, raíces reales iguales. En este caso la matriz A es diagonal o bien no es diagonalizable.
- $detA < 0$. Es decir autovalores de distinto signo: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. El flujo es aún hiperbólico, pero no es una contracción ni una expansión.

La introducción de un retardo incrementa significativamente la localización de las raices de la ecuación característica. Una vez incluido el retardo en el modelo, en general se está interesado en saber si la variación del tamaño del retardo cambia o no las características del estado de equilibrio.
Un estado de equilibrio puede cambiar a inestable si, por el incremento del retardo, las raices características cambian de tener parte real negativa, a tener parte real positiva y esto sucede si y solo si estas raices atraviezan el eje imaginario.
En un estado estable, la ecuación caracteristica de la ecuación diferencial con retardo tiene la forma

$$P(\lambda, \tau) \equiv P_1(\lambda) + P_2(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0 \tag{1.61}$$

Una ecuación diferencial con retardo, tiene más complicaciones al hacer su análisis. Una ecuación diferencial general con retardo tiene la forma.

$$x'(t) = f(x(t), x(t-\tau)) \tag{1.62}$$

Un problema de valor inicial de este tipo requiere más información que su problema análogo sin retardo. Para un sistema ordinario , una única solución está determinada por un punto inicial en el espacio Euclideo en el tiempo t_0. Para un sistema con retardos, se requiere información en el intervalo completo $[t_0 - \tau, t_0]$. Se conoce el rango de cambios de t_0, así que se necesita el valor de las funciones en $x(t_0)$ y $x(t - \tau)$, y para $x'(t_0 + \varepsilon)$, necesitamos conocer $x(t_0 + \varepsilon)$ y $x(t_0 + \varepsilon - \tau)$. por lo que se necesita dar una función inicial o historia inicial, para los valores de $x(t)$ en el intervalo $[-\tau, 0]$.

Ecuación diferencial logística

La ecuación diferencial $N' = r\,N$ puede ser considerada como el primer modelo simple del crecimiento de poblaciones, cuando $r > 0$. La cantidad dada por $N(t)$ es la población en un tiempo t. Asumiendo que la la tasa de crecimiento de la población denotada por $\frac{dN}{dt}$ es directamente proporcional al tamaño de la población. Donde por su puesto ha omitido cierto tipo de circunstancias que afectan el crecimiento de la pobalción, tales como la capacidad del medio, existencia de depredadores, entre otros.

Una ecuación diferencial que cumple con la primera de las restricciones es el *modelo de crecimiento poblacional logístico*. Dado por la ecuación diferencial

$$N' = r\,N\left(1 - \frac{N}{k}\right) \tag{1.63}$$

Donde r y N son parámetros positivos: k da la razón de crecimiento cuando el tamaño de la población es muy pequeño, mientras que N es el orden ideal del tamaño de la población o dicho de otra forma es la capacidad de mantenimiento. Podemos observar que para valores muy pequeños N, podemos tomar $1 - \frac{N}{k} \approx 1$, obténiendose la ecuación esencial $N' = k\,N$, pero si $N > k$, entonces $N' < 0$, en una población significaría decrecimiento.

Esta es una ecuación de primer orden, autónoma, pero es una ecuación no lineal. Podemos escribirla en la forma:

$$N' = \frac{r}{k}\,N\,(k - N) \tag{1.64}$$

Notemos en la ecuación anterior (1.64), para el valor de t que hace $N(t) = k$, obtenemos que $N'(t) = 0$, siendo este un punto de equilibrio de la ecuación diferencial.
Además en la ecuación notamos que para algún valor de t podemos obtener un segundo punto de equilibrio cuando $N(t) = 0$. Es posible encontrar la solución de

forma general, utilizando el método de *Separación de variables*, asi:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{r}{k}\, N(k-N) \\ \frac{dN}{N(k-N)} &= \frac{r}{k}\, dt \\ \int \frac{dN}{N(k-N)} dt &= \frac{r}{k} \int dt \end{aligned}$$

Utilizando el método *Fracciones parciales*, se puede reescribir la integral en la forma:

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{k-N} \right) dN = r\, dt$$

Con lo que la solución general para la ecuación (1.63), es como sigue:

$$N(t) = \frac{M\, r\, e^{r\,t}}{1 + M e^{rt}} \tag{1.65}$$

Donde M, es una constante arbitraria surgida de la integración.

Agreguése ahora el retardo, como sigue:

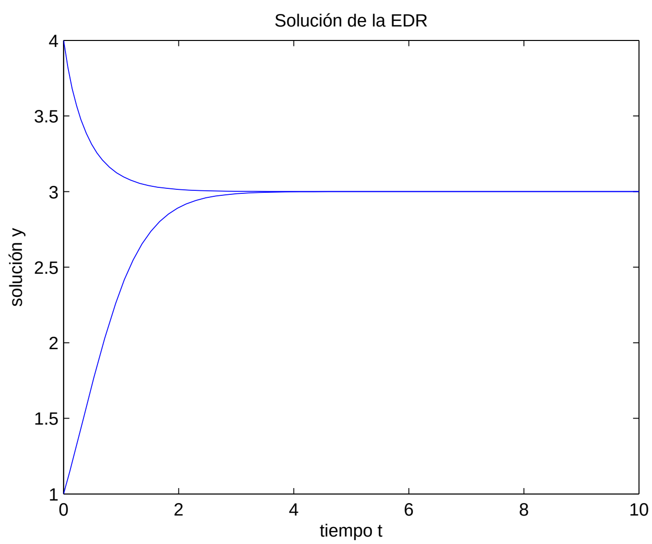


Figura 1.6: **Soluciones de una ecuación logística con un punto de equilibrio en** $x(t) = 3$

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left[1 - \frac{N(t-\tau)}{k} \right] \tag{1.66}$$

Los parámetros siguen siendo los mismos y τ es el tiempo que tarda la respuesta en aparecer, luego de las acciones realizadas. Para este caso la tasa de reproducción también dependerá de la capacidad del medio en el tiempo $t-\tau$, donde τ puede representar el tiempo de gestación del nuevo individuo.

Nuevamente cuando $N=0$ y en $k=N$, encontramos los puntos de equilibrio.
De igual forma podemos intentar resolver con el mismo método de separación de variables, para encontrar la solución analítica.
La ecuación toma la forma siguiente luego de la integración a ambos lados:

$$\int \left(\frac{A}{N} + \frac{B}{k - N(t-\tau)} \right) dN = \frac{r}{k} \int dt$$

Donde A y B son incognitas a determinar, para este caso deben ser constantes, con esta restricción es imposible encontrar dichas constantes. Así el mismo método no resuelve de forma analítica dicha ecuación.
El carácter de las soluciones de (1.66), y el tipo de condiciones de contorno requerido son muy diferentes de los de (1.64). Incluso con la ecuación aparentemente inofensiva (1.66), las soluciones en general tienen que ser encontradas numéricamente. Teniendo en cuenta que para computar la solución para $t > 0$ se requiere $N(t)$ para todo $-\tau \leq t \leq 0$. Sin embargo, podemos conseguir alguna impresión cualitativa de la clase de soluciones de (1.66) que son posibles, por el siguiente razonamiento.

Refiérase a la figura (1.7) y supongamos que para algunos $t = t_1$, se cumple que $N(t_1) = K$ y que además durante algún tiempo cuando $t < t_1$, se tiene que $N(t-\tau) < K$. Luego en la ecuación (1.66) se tiene, debido a que $1 - N(t-\tau)/K > 0$, entonces $\frac{dN(t)}{dt} > 0$ y por lo tanto $N(t)$ en el instante t_1 sigue aumentando, cuando $t = t_1 + \tau$, sustituyendo t se obtiene $N(t-\tau) = N(t_1)$ pero por suposición $N(t_1) = K$ y así $\frac{dN}{dt} = 0$.
Ahora para $t_1 + \tau < t < t_2$, $N(t-\tau) > K$ y así $\frac{dN}{dt} < 0$ y $N(t)$ disminuye hasta $t = t_2 + \tau$ de donde $\frac{dN}{dt} = 0$ de nuevo porque $N(t_2 + \tau - \tau) = N(t_2) = K$.
Si se continua con el proceso con los t_i se tendrá posibilidad de comportamiento oscilatorio.
Nótese que el modelo de ecuación diferencial de retardo (1.66) es capaz de generar soluciones periódicas de ciclo límite, que dependerán de los valores de los t_i según

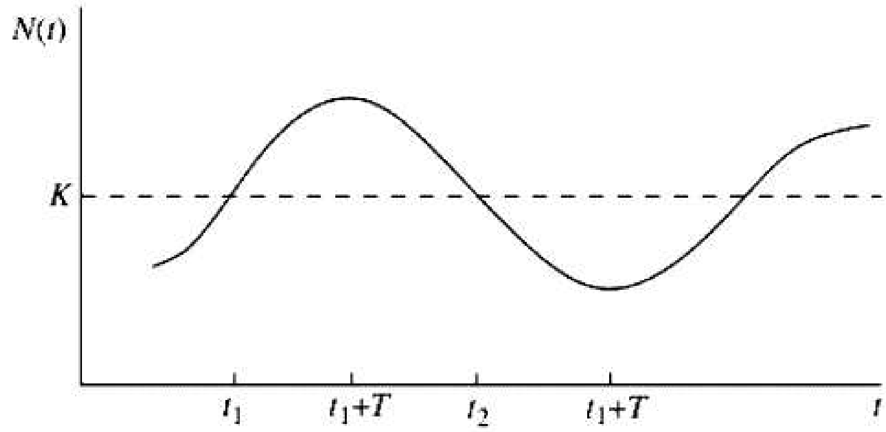


Figura 1.7: **Bosquejo del análisis cualitativo de la ecuación logística con retardo.**

el análisis anterior. Un indicio de su existencia es si el el estado de equilibrio es inestable por las oscilaciones en crecimiento, aunque esto no es concluyente.
Se considera la linealización de (1.66) sobre el equilibrio $N = 0$ y $N = K$. Para pequeñas perturbaciones de $N = 0$ se satisface $\frac{dN}{dt} \approx rN$ demostrando que $N = 0$ es inestable con un crecimiento exponencial y por tanto solo se consideraran perturbaciones sobre el estado de equilibrio $N = K$.
Recurriendo a un modelo no dimensional de (1.66) descrito por

$$N(t)^* = \frac{N(t)}{K}, \quad t^* = rt, \quad \tau^* = r\tau \tag{1.67}$$

donde los asteriscos representan las cantidades adimensionales, para simplificar luego de la sustitución suprimimos los asteriscos pero debemos recordar que estamos trabajando con cantidades adimensionales

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)[1 - N(t-\tau)] \tag{1.68}$$

Linealizando para el estado de equilibrio de esta ecuación, $N = 1$
Tomando una perturbación cerca del estado de equilibrio

$$N(t) = 1 + n(t)$$

$$J = D_1 f(N_0, N_0) = 1 - N(t-\tau) = 0$$
$$J_D = D_2(N_0, N_0) = -N(t) = -1$$
$$\frac{dn(t)}{dt} = Jn(t) + J_D n(t-\tau) = 0 + (-1)n(t-\tau)$$
$$\text{Así} \quad \frac{dn(t)}{dt} \approx -n(t-\tau). \tag{1.69}$$

Las soluciones para $n(t)$ son de la forma

$$n(t) = ce^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -e^{-\lambda\tau}. \tag{1.70}$$

Es una ecuación trascendente en $\tau > 0$. No es fácil encontrar las soluciones analíticas de (1.70). Sin embargo, lo que realmente se quiere saber desde un punto de vista de la estabilidad es si hay algunas soluciones con $Re\lambda > 0$ que desde el primero de (1.70) implica inestabilidad ya que en este caso $n(t)$ crece exponencialmente con el tiempo.

Sea $\lambda = \mu + \imath\omega$ y μ_0 un valor a determinar su existencia. Donde μ_0 es un número real tal que todas las soluciones de λ de la segunda parte de (1.70) satisfacen que $Re\lambda < \mu_0$. Tomandose el módulo en (1.70) se obtiene $|\lambda| = e^{-\mu\tau}$ y así, si $|\lambda| \to \infty$ entonces $e^{-\mu\tau} \to \infty$ lo que requiere que $\mu \to -\infty$. Por lo tanto debe de haber un número μ_0 que acota superiormente $Re\lambda$. Convenientemente se introduce $z = \frac{1}{\lambda}$ y $\omega(z) = 1 + ze^{-\frac{\tau}{z}}$ entonces $\omega(z)$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$. Asi por el teorema de Picard, en la vencindad de $z = 0$, $\omega(z) = 0$ tiene un número infinito de raices complejas. Así hay una infinidad de raices de λ.
Ahora tomando la parte real e imaginaria de la ecuación trascendental en (1.70).

$$\mu = -e^{-\mu\tau} cos\omega\tau, \quad \omega = e^{-\mu\tau} sen\omega\tau \tag{1.71}$$

Hay que determinar el rango de τ tal que $\mu < 0$. Se quiere encontrar las condiciones tales que el limite superior μ_0 en μ es negativo. El primer caso cuando λ es real, es decir $\omega = 0$, de (1.71), si $\omega = 0$, entonces $sen(\omega\tau) = 0$, satisface la segunda ecuación y la primera viene dada por $\mu = -e^{-\mu\tau}$. esta no tiene raices positivas cuando $\mu > 0$ ya que $-e^{-\mu\tau} < 0$ para toda $\mu\tau$, por lo que no cumple con la primera parte de (1.71), Observando cada lado de la ecuación como una función de μ y notando que sólo puede suceder cuando $\tau > 0$ y $\mu < 0$.
Ahora considerando $\omega \neq 0$. De (1.71) si ω es un solución también lo será $-\omega$, por lo que podemos considerar sin perdida de generalidad $\omega > 0$. Por tanto para que

la primera ecuación de (1.71) sea verdadera debe suceder que cuando $\mu < 0$, se requiere además que $\omega\tau < \frac{\pi}{2}$ ya que $e^{-\mu\tau} < 0$ para todo $\mu\tau$. En el inicio, de (1.71) se definió $\mu(\tau)$, $\omega(\tau)$, así se está interesado en los valores de τ donde $\mu(\tau)$ cruza el eje por primera vez de $\mu < 0$ a $\mu > 0$ es decir que μ inicia con valores negativos. Por definición se ha tomado que τ aumenta desde cero, ahora $\mu = 0$ por primera vez cuando $\omega\tau = \frac{\pi}{2}$. Por lo que si $\mu = 0$ en la segunda ecuación de (1.71) da como única solución relevante $\omega = 1$ y esto ocurre cuando $\tau = \frac{\pi}{2}$. Obteniendo así

$$0 < \tau < \tau = \frac{\pi}{2} \tag{1.72}$$

la condición en τ para la estabilidad.
Debemos ahora regresar a las cantidades dimensionales, se tiene que el estado de equilibrio $N(t) = K$ es estable si $0 < r\tau < \frac{\pi}{2}$ y es inestable para $t\tau > \frac{\pi}{2}$. El valor crítico $r\tau = \frac{\pi}{2}$ es el valor de bifurcación, es decir el valor del parámetro $r\tau$ que hace que el caracter de las soluciones de (1.72) cambie de manera abrupta o se bifurca de un estado equilibrio a la solución de tiempo variante. Además si

$$r\tau < \tfrac{37}{4}, \quad N(0) > 0$$

entonces $N(t) \to k$ cuando $t \to +\infty$; y si $r\tau < \frac{\pi}{2}$, entonces (1.66) tiene una solución periodica no constante que oscila con respecto a k.

Para el punto k su linealización es

$$u' = -ru(t - \tau)$$

Y la ecuación característica es

$$\lambda = -\tau e^{-\lambda\tau}$$

De la parte derecha de el polinomio característico podemos notar que, no es un polinomio en la variable λ, si no una ecuación trascendente, la cual posee infinitas soluciones. En base al Teorema sobre la estabilidad de las ecuaciones con retardo, para este caso, el punto de equilibrio $N = k$ es asintóticamente estable, si las infinitas soluciones que posee tienen parte real negativa.
Cuando el retardo es lo suficientemente grande y sobre pasa un valor crítico, el

punto de equilibrio $N = k$ pierde su estabilidad.

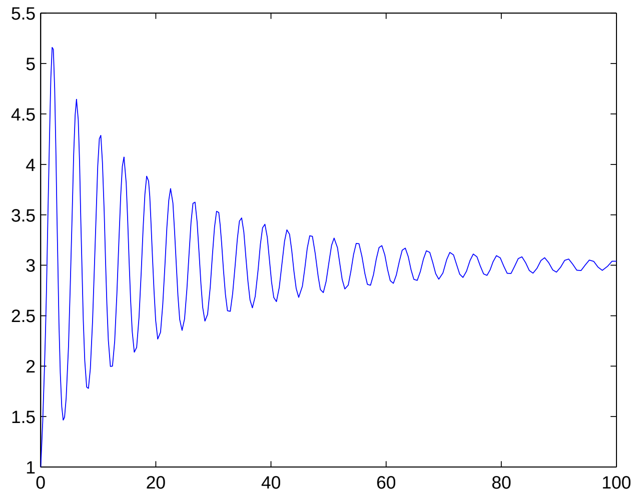


Figura 1.8: **Ecuación logística que posee oscilaciones que tienden al estado de equilibrio.**

Ecuación diferencial de segundo orden

Puede ampliarse los métodos desarrollados para ecuaciones individuales a los sistemas de ecuaciones con un n arbitrario. Por simplicidad se tomará el caso cuando $n = 2$. Se asumirá que las variables x e y son independientes, además estan relacionadas por el sistema de ecuaciones

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

donde f y g son funciones no lineales. El valor del estado estable $\bar{x}$ y $\bar{y}$ satisfacen

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{y})$$
$$\bar{y} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Utilizando pequeñas variaciones se realiza el estudio de la estabilidad de estos estados. Usando la expansión de la serie de Taylor para fuciones de dos variables f y g, se obtiene

$$x'_{n+1} = a_{11}x'_n + a_{12}y'_n$$
$$y'_{n+1} = a_{21}x'_n + a_{22}y'_n$$

Teorema 1.13. *Obteniendo una matriz de cuatro coeficientes*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Es llamado el Jacobiano de el sistema (1). Reescribiendolo en forma matricial

$$\mathbf{x}'_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}'_n \tag{1.73}$$

Encontrando la ecuación característica para (1) dada por

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

El resultado es siempre la ecuación cuadrática

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$$

donde

$$\beta = a_{11} + a_{12}$$
$$\gamma = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$$

Una condición de estabilidad suficiente y necesaria para los sistemas de segundo orden, dada la ecuación característica (1.13), es que ambas tendrán raices de magnitud menor que 1 si

$$2 > 1 + \gamma > |\beta|$$

Para que un estado sea estable debe de satisfacer la siguiente condición:

- $$\beta = a_{11} + a_{22} < 0 \tag{1.74}$$

- $$\gamma = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \tag{1.75}$$

Un estado de equilibrio $(\bar{X}, \bar{Y})$ *de un sistema de ecuaciones*

$$\frac{dX}{dt} = F(X, Y), \quad \frac{dY}{dt} = G(X, Y)$$

su estabilidad vendrá dada por

$$F_x(\bar{X}, \bar{Y}) + G_y(\bar{X}, \bar{Y}) < 0, \tag{1.76}$$

y

$$F_x(\bar{X}, \bar{Y})G_y(\bar{X}, \bar{Y}) + F_y(\bar{X}, \bar{Y})G_x(\bar{X}, \bar{Y}) > 0, \tag{1.77}$$

Donde los términos son las derivadas parciales de F *y* G *con respecto a* X *e* Y *que estan siendo evaluados en el estado de equilibrio.*

Considérese la ecuación diferencial de segundo grado

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1.78}$$

donde a *y* b *son constantes reales. Sea* $d = a^2 - 4b$*. Entonces toda solución de (1.78) en el intervalo de* $(-\infty, +\infty)$ *tiene la forma*

$$y = e^{-\frac{ax}{2}}[c_1u_1 + c_2u_2] \tag{1.79}$$

donde c_1 *y* c_2 *son constantes y las funciones* u_1 *y* u_2 *estan determinadas de acuerdo al signo algebraico de* d *de la siguiente forma:*

- *Si* $d = 0$*, entonces* $u_1(x) = 1$ *y* $u_2(x) = x$
- *Si* $d > 0$*, entonces* $u_1(x) = e^{kx}$ *y* $u_2(x) = e^{-kx}$*, donde* $k = \frac{1}{2}\sqrt{d}$
- *Si* $d < 0$*, entonces* $u_1(x) = \cos kx$ *y* $u_2(x) = \sin kx$*, donde* $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$

El número $d = a^2 - 4b$ es el discriminante de la ecuación cuadrática

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{1.80}$$

Esta es la ecuación caracteristica de la ecuación (1.78). Sus raices estan dadas por la ecuación

$$r_1 = \frac{-a+\sqrt{d}}{2}, \quad r_2 = \frac{-a-\sqrt{d}}{2}$$

De aqui que la naturaleza de las raíces sean determinadas por el valor que tenga d, de aqui que si $d > 0$, las raices seran reales y la ecuación analítica de (1.79) puede ser escrita en la forma

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Si $d < 0$ claramente las raices son complejas y conjugadas entre si, y cada función exponencial $f_1(x) = e^{r_1 x}$ y $f_2(x) = e^{r_2 x}$, son soluciones complejas de la ecuación diferencial (1.78). Para obtener las soluciones reales, debe examinarse la parte real y compleja de f_1 y f_2. Reescribiendo $r_1 = -\frac{1}{2}a + \imath k$, $r_2 = -\frac{1}{2}a - \imath k$, donde $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$, se tiene

$$f_1(x) = e^{r_1 x} = e^{-\frac{ax}{2}} e^{\imath kx} = e^{-\frac{ax}{2}} coskx + \imath e^{-\frac{ax}{2}} senkx$$

y

$$f_2(x) = e^{r_2 x} = e^{-\frac{ax}{2}} e^{-\imath kx} = e^{-\frac{ax}{2}} coskx - \imath e^{-\frac{ax}{2}} senkx$$

Por lo que la solución general tendrá la forma

$$\begin{aligned} y = & \quad c_1 f_1 + c_2 f_2 \\ = & \quad c_1(e^{-\frac{ax}{2}} coskx + \imath e^{-\frac{ax}{2}} senkx) + c_2(e^{-\frac{ax}{2}} coskx - \imath e^{-\frac{ax}{2}} senkx) \\ = & \quad e^{-\frac{ax}{2}} coskx(c_1 + c_2) + \imath e^{-\frac{ax}{2}} senkx(c_1 - c_2) \end{aligned}$$

Considerando el sistema de ecuaciones lineales con retardo

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = \Sigma_{k=1}^{n} \left(a_{jk} x_k(t) + b_{jk} x_k(t-\tau) \right); \quad j = 1, 2, ..., n \tag{1.81}$$

donde a_{jk}, b_{jk} son constantes reales y $\tau \geq 0$. Sea la ecuación asociada a (1.81) denotada como

$$D(\lambda, \tau) = det[a_{jk} + b_{jk} e^{-\lambda\tau} - \lambda\delta_{jk}] = 0 \tag{1.82}$$

Teorema 1.14. *Un conjunto de condiciones suficientes y necesarias para que la solución trivial de (1.81) sea asintóticamente estable para todo $\tau \geq 0$ son las siguientes:*

- *La parte real de todas las raices de*

$$D(\lambda, 0)det[a_{jk} + b_{jk} - \lambda\delta_{jk}] = 0 \tag{1.83}$$

son negativas.

- *Para toda y real y $\tau \geq 0$, se mantiene lo siguiente*

$$D(\imath y, \tau) = det[a_{jk} + b_{jk}e^{-\imath\tau y} - (\imath y)\delta_{jk}] \neq 0 \tag{1.84}$$

donde $\imath = \sqrt{-1}$.

Si (1.83) no mantiene la solución trivial, no es asintóticamente estable para $\tau = 0$. Si existe un número real y y alguna $\tau \geq 0$ tal que

$$D(\imath y - \tau) = 0 \tag{1.85}$$

entonces para esa τ, la ecuación característica (1.82) tendrá un par de raices imaginarias purasy la solución de (1.81) no será asintóticamente estable.
Al probar la parte del resultado de la suficiencia, hay que mostrar que cuando las condiciones (i) y(ii) se mantienen, todas las raices de (1.82) tienen parte real negativa.
Se puede reescribir (1.82) en la forma

$$D(\lambda, \tau) = (-1)^n\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + ... + A_n = 0 \tag{1.86}$$

Donde $A_1, ..., A_n$ son polinomios en a_{jk}, b_{jk} y $e^{-\lambda\tau}$. Asumiendo que a_{jk}, b_{jk} son constantes conocidas y que

$$|e^{-\lambda\tau}| \leq 1, \quad para \quad \tau \geq 0 \quad y \quad \mathbb{R}e(\lambda) \geq 0 \tag{1.87}$$

Es decir que los coeficientes $A_j(j = 1, 2, ..., n)$ en (1.86) están acotados por el valor absoluto. Tomando

$$N = max_{1\leq j\leq n}\left[sup_{\mathbb{R}e(\lambda)\leq 0,\, \lambda\leq 0}(|A_j|)\right] \tag{1.88}$$

y definimos

$$M = max\,(1, (n + 1)N) > 0 \tag{1.89}$$

Cuando $|\lambda| \geq M$ y $\mathbb{R} \geq 0$, se tendrá

$$\begin{aligned} |(-1)^n\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + ... + A_n| &\geq |\lambda|^n \left[1 - \tfrac{|A_1|}{|\lambda|} - ... - \tfrac{|A_n|}{|\lambda|}\right] \\ &\geq M^n \left[1 - \tfrac{nN}{(n+1)N}\right] > 0, \end{aligned} \tag{1.90}$$

Esto implica que en el dominio de $|\lambda| \geq M$ y $\Re(\lambda Z) \geq 0$, la ecuación (1.82) no tiene raices y esto es válido para toda $\tau \geq 0$.
Ahora para la región $|\lambda| < M$, $\Re(\lambda) \geq 0$ y por (i) y(ii), esa región no puede tener raices de (1.82).
Así en general dada una ecuación, al estudiar su estabilidad se requiere conocer la ecuación característica y los valores característicos asociados.
Para una ecuación con retardo discreto de la forma

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) + cx(t-\tau) = 0$$

La ecuación característica asociada

$$D(\lambda, \tau)) = \lambda^2 + a\lambda + b + ce^{-\lambda\tau} = 0$$

Y Para

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha\frac{d^2x(t-\tau)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + b\frac{dx(t-\tau)}{dt} + cx(t) + dx(t-\tau) = 0 \tag{1.91}$$

donde τ, α, a, b, c, d son constantes reales. Su correspondiente ecuación característica es:

$$\lambda^2 + \alpha\lambda^2 e^{-\lambda\tau} + a\lambda + b\lambda e^{-\lambda\tau} + c + de^{-\lambda\tau} = 0 \tag{1.92}$$

Para el primer caso, cuando $|\alpha| > 1$, la solución para (1.91) es la trivial , es decir $x(t) \equiv 0$, por lo que siempre es una solución inestable para el caso de τ positiva. Si se asume que $|\alpha| < 1$, aún sigue en discusión lo que sucede con la solución. El caso de $|\alpha| = 1$ debe ser clasificado como un caso crítico.
Asumiendo que $\lambda = \imath\omega, \omega > 0$, es una raíz de (1.92) para algún τ y asumiendo además que $c + d \neq 0$.

Bajo esas condiciones se tiene que $\omega \neq 0$. Y se tiene la parte real e imaginaria.

$$\begin{aligned} c - \omega^2 + b\omega sen\omega\tau + (d - \alpha\omega^2)cos\omega\tau = 0, \\ a\omega + b\omega cos\omega\tau - (d - \alpha\omega^2)sen\omega\tau = 0 \end{aligned} \tag{1.93}$$

Elevando al cuadrado y sumando se tiene

$$(\omega^2 - c)^2 + a^2\omega^2 = b^2\omega^2 + (d - \alpha\omega^2)^2 \tag{1.94}$$

Desarrollando

$$(1 - \alpha^2)\omega^4 + (a^2 - b^2 + 2d\alpha - 2c)\omega^2 + c^2 - d^2 = 0 \tag{1.95}$$

Y las raíces serán

$$\begin{aligned} \omega^{\pm} \quad = \quad & \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)^{-1}\{(b^2 + 2c - a^2 - 2d\alpha) \\ & \pm[(b^2 + 2c - a^2 - 2d\alpha)^2 - 4(1 - \alpha^2)(c^2 - d^2)]^{\frac{1}{2}}\} \end{aligned} \tag{1.96}$$

Para conocer la forma que tendrán dichas raices, es necesario imponer condiciones y bajo que restricciones estan se cumplen, para ello, se tienen dos casos:

Si $c^2 \leq d^2$, entonces existe una única solución imaginaria, $\lambda = \imath\omega_+, \omega_+ > 0$. Si $c^2 > d^2$, existen dos soluciones imaginarias, $\lambda_\pm = \imath\omega_\pm$ donde, $\omega_+ > \omega_- > 0$, entonces debe cumplirse que:

- $b^2 - 2c - a^2 - 2d\alpha > 0$; y
- $(b^2 + 2c - a^2 - 2d\alpha)^2 > 4(1 - \alpha^2)(c^2 - d^2)$;

de otra forma no tendría soluciones.
Támbien es necesario saber el signo de $\Re\lambda(\tau)$, en el punto donde $\lambda(\tau)$ es puramente imaginaria. Utilizando un razonamiento similar al usado para la obtención de (1.40), partiendo de (1.92) se tiene:

$$(2\lambda + a + [b - \tau(b\lambda + d) + \alpha\lambda(2 - \lambda\tau)]e^{-\lambda\tau})\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} = \lambda(\alpha\lambda^2 + b\lambda + d)e^{-\lambda\tau} \tag{1.97}$$

Si cuando $\lambda(\overline{\tau}) = \imath\omega$ se desea que $\frac{\lambda(\tau)}{d\tau} = 0$ en el punto $\tau = \overline{\tau}$, entonces dado que

$\omega \neq 0$ y $e^{-\imath\omega\tau} \neq 0$, solo resta que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\alpha d}}{2\alpha} \\ \imath\omega &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\alpha d}}{2\alpha} \\ \text{Esto implica que } b &= 0 \\ \imath\omega &= \frac{\pm\sqrt{-4\alpha d}}{2\alpha} \\ \imath\omega &= \pm\imath\frac{\sqrt{\alpha d}}{\alpha} \\ \alpha\omega^2 &= d \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (1.94), se tendrá

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c)^2 + a^2\omega^{=}0 \\ \text{con lo que } a = 0 \text{ y } \omega^2 = c \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = b = 0$, $d = \alpha c$ en este caso y (1.92) es equivalente a

$$(\lambda^2 + c)(1 + \alpha e^{-\lambda\tau}) = 0 \tag{1.98}$$

Por lo tanto, si $a^2 + b^2 + (d - \alpha c)^2 \neq 0$, garantiza la simplicidad de $\lambda = \imath\omega$.
Por conveniencia, se tomara $\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}$ en lugar de $\frac{d\lambda}{d\tau}$. Se tiene:
De (1.97)

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{(2\lambda + a)e^{\lambda\tau} + b + 2\alpha\lambda}{\lambda(\alpha\lambda^2 + b\lambda + d)} - \frac{\tau}{\lambda} \tag{1.99}$$

y de (1.92)

$$e^{\lambda\tau} = -\frac{\alpha\lambda^2 + b\lambda + d}{\lambda^2 + a\lambda + c} \tag{1.100}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
sign\left\{\frac{d(\Re\lambda)}{d\tau}\right\}_{\lambda=\imath\omega} &= sign\left\{\Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right\}_{\lambda=\imath\omega}\\
&= sign\left\{\Re\left[\frac{(2\lambda+a)e^{\lambda\tau}+b+2\alpha\lambda}{\lambda(\alpha\lambda^2+b\lambda+d)}-\frac{\tau}{\lambda}\right]\right\}_{\lambda=\imath\omega}\\
\text{Sustituyendo el valor de }\quad e^{\lambda\tau}&\\
&= sign\left\{\Re\left[\frac{-(2\lambda+a)}{\lambda(\lambda^2+a\lambda+c)}\right]\right.\\
&\quad\left.+\Re\left[\frac{b+2\alpha\lambda}{\lambda(\alpha\lambda^2+b\lambda+d)}\right]\right\}_{\lambda=\imath\omega}\\
\text{Sustituyendo } \lambda=\imath\omega\text{, dividiendo} &\quad \text{y} \quad \text{multiplicando por el conjugado correspondiente}\\
&= sign\left\{\frac{a^2-2(c-\omega^2)}{(c-\omega^2)^2+a^2\omega^2}+\frac{2\alpha(d-\alpha\omega^2)-b^2}{(d-\alpha\omega^2)^2+b^2\omega^2}\right\}\\
\text{De (1.94)}&\\
&= sign\left\{a^2+2\alpha d-2c-b^2+2\omega^2(1-\alpha^2)\right\} \qquad (1.101)
\end{aligned}
$$

Incluyendo la expresión $\omega_\pm^2$ cuando el signo es positivo ω_+^2 y negativo con ω_-^2. En el caso que $c^2<d^2$ solo existe una raíz imaginaria, $\lambda=\imath\omega_\pm$, por lo que unicamente cruza el eje imaginario de izquierda a derecha cuando τ incrementa y la estabilidad de la solución trivial puede perderse y no recuperarse. En el caso que $c^2>d^2$, cruza de izquierda a derecha cuando τ incrementa ocurriendo cuando τ toma el valor correspondiente a ω_+, y cruza de derecha a izquierda cuando τ asume el valor de ω_-. De (1.93) se obtienen los dos siguientes conjuntos de valores de τ para los que no son raices imaginarias:

$$\tau_{n,1}=\frac{\theta_1}{\omega_+}+\frac{2n\pi}{\omega_+}, \qquad (1.102)$$

donde $0\le\theta_1\le 2\pi$, y

$$cos\theta_1=-\frac{ab\omega_+^2+(c-\omega_+^2)(d-\alpha\omega_+^2)}{b^2\omega_+^2+(d-\alpha\omega_+^2)^2} \qquad (1.103)$$

$$sen\theta_1=-\frac{(d-\alpha\omega_+^2)a\omega^2-b\omega_+(c-\omega_+^2)}{b\omega_+^2+(d-\alpha\omega_+^2)^2} \qquad (1.104)$$

y

$$\tau_{n,2}=\frac{\theta_2}{\omega_-}+\frac{2n\pi}{\omega_-}, \qquad (1.105)$$

donde $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$, y

$$cos\theta_n = -\frac{ab\omega_-^2 + (c-\omega_-^2)(d-\alpha\omega_-^2)}{b^2\omega_-^2 + (d-\alpha\omega_-^2)^2} \tag{1.106}$$

$$sen\theta_n = -\frac{(d-\alpha\omega_-^2)a\omega^2 - b\omega_-(c-\omega_-^2)}{b\omega_-^2 + (d-\alpha\omega_-^2)^2} \tag{1.107}$$

donde $n = 0, 1, 2 \ldots$

En el caso que $c^2 < d^2$, solo $\tau_{0,1}$ necesita ser considerado ya que si (1.91) es asintoticamente estable para $\tau = 0$, entonces permanece asintóticamente estable hasta $\tau_{0,1}$ y es inestable a partir de ahi. En el valor de $\tau = \tau_{0,1}$, tiene raices imaginarias puras, $\pm\imath\omega_+$.

En el caso que $c^2 > d^2$, si (1.91) es estable para $\tau = 0$ entonces debe seguir que $\tau_{0,1} < \tau_{0,2}$ ya que la multiplicidad de las raices con partes reales positivas no puede ser negativa. Observese que

$$\tau_{n+1,1} - \tau_{n,1} = \frac{2\pi}{\omega_+} < \frac{2\pi}{\omega_-} = \tau_{n+1,2} - \tau_{n,2} \tag{1.108}$$

Por lo tanto solo puede haber un cambio finito entre la estabilidad y la inestabilidad. Existen valores de los parametros que realizan un número finito de tales cambios de estabilidad. Sin embargo existe un valor de τ, $\tau = \bar{\tau}$, tal que en $\tau = \bar{\tau}$ ocurre un cambio de estabilidad, de estable a inestable, y para $\tau > \bar{\tau}$ la solución se vuelve inestable, de igual forma sucede si (1.91) es inestable para $\tau = 0$. La ecuación (1.91) o puede ser inestable para $\tau > 0$ o tener un número cualquiera de cambios de estabilidad como en el caso anterior.

Cuando τ esta incrementando, la multiplicidad de las raices para las cuales $\Re\lambda > 0$ incrementa en dos cada vez que τ pasa atravez de un valor de $\tau_{n,1}$ y decrece en dos cuando τ pasa atravez de un valor de $\tau_{n,2}$.

Cuando la solución trivial cero es estable para $\tau = 0$, k cambia de estabilidad a inestabilidad a estabilidad, ocurre cuando los parametros son tales que

$$\tau_{0,1} < \tau_{0,2} < \tau_{1,1} < \ldots < \tau_{k-1,2} < \tau_{k,2} < \tau_{k,1} < \tau_{k+1,1} < \tau_{k,2}$$

o k cambia de inestabilidad a estabilidad y a inestabilidad, ese cambio debe ocurrir cuando

$$\tau_{0,2} < \tau_{0,1} < \tau_{1,2} < \ldots < \tau_{k-1,2} < \tau_{k-1,1} < \tau_{k,1} < \tau_{k,2}$$

cuando la solución trivial cero es inestable para $\tau = 0$.
El siguiente teorema enuncia las posibilidades para la ecuación (1.91)

Teorema 1.15. *Si en (1.91) asumimos que* $|\alpha| < 1$, $c+d \neq 0$ *y* $a^2+b^2+(d-\alpha c)^2 \neq 0$. *El número de rices imaginarias positivas (negativas) de (1.92) pueden ser cero, una o dos únicamente.*

- *Si no tiene raices, entonces la estabilidad de la solución cero no cambia para ninguna* $\tau \geq 0$.
- *Si hay una raíz imaginaria con parte real positiva, hay una solución cero que nunca se hace estable para alguna* $\tau \geq 0$. *Si la solución es asintóticamente estable para* $\tau = 0$, *es uniformemente asintótica estable para* $\tau_{(0,1)}, \tau_{(n,1)} = \frac{\theta_1}{\omega_+} + \frac{2n\pi}{\omega_+}$ *donde* $0 < \theta_1 < 2\pi$ *y se hace inestable para* $\tau > \tau_{(0,1)}$.
- *Si existen dos raices imaginarias con parte real positiva* $\imath\omega_+$ *y* $\imath\omega_-$ *, tal que* $\omega_+ > \omega_- > 0$ *entonces la estabilidad en la solución cero puede cambiar a un número finito de veces a medida que se incrementa en pasos de tamaño* τ *y eventualmente se hace inestable.*

Caso crítico 1 $|\alpha| = 1$
En este caso el Teorema no es válido.
Caso crítico 2 $|\alpha| < 1, \quad c + d = 0$
En este caso, $\lambda(\tau) = 0$ es siempre una raíz de (1.92) para toda $\tau \geq 0$.
Los resultados que se obtienen son parciales en estos casos criticos.
Asumiendo que $\lambda = u + \imath v$ es una raíz de (1.92), entonces se tiene al sustituir

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 + 2\imath uv + \alpha(u^2 - v^2 + 2\imath uv)e^{-u\tau}(cosv\tau - \imath senv\tau) \\ +au + \imath av + b(u + \imath v)e^{-u\tau}(cosv\tau - \imath senv\tau) + c \\ +de^{-u\tau}(cosv\tau - \imath v\tau) = 0 \end{aligned} \tag{1.109}$$

De donde la parte real e imaginaria respectivamente son:

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 + au + c + (\alpha(u^2 - v^2) + bu + d)e^{-u\tau}cosv\tau \\ +(2\alpha uv + bv)e^{-u\tau}senv\tau = 0 \end{aligned} \tag{1.110}$$

$$\begin{aligned} 2uv + av + (2\alpha uv + bv)e^{-u\tau}cosv\tau \\ -(\alpha(u^2 - v^2) + bu + d)e^{-u\tau}senv\tau = 0 \end{aligned} \tag{1.111}$$

Despejando los términos que contienen senos y cosenos, elevando al cuadrado y sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}&(u^2-v^2+au+c)^2+(2uv+av)^2\\ &=e^{-2u\tau}((\alpha(u^2-v^2)+bu+d)^2+(2\alpha uv+bv)^2)\end{aligned} \tag{1.112}$$

Análisis del caso crítico 1

- *Resulta estabilidad* Asumiendo que $c>|d|$ y $a\geq\sqrt{2c+2|d|+b^2}$. Suponiendo que (1.92) tiene una raíz $\lambda=u+\imath v$, donde $u\geq 0$, para algún $\tau\geq 0$.
  Por (1.112) si $\alpha=\pm 1$, como consecuencia de asumir $u\geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}&2au^3+2auv^2+(a^2+2c)u^2+(a^2-2c)v^2+2acu+c^2\\ &\leq 2\alpha bu^3+2b\alpha uv^2+(b^2+2d\alpha)u^2+(b^2-2d\alpha)v^2+2bud+d^2\end{aligned} \tag{1.113}$$

  Esto contradice el hecho que $c>|d|$ y $a\geq\sqrt{2c+2|d|+b^2}$. Mostrando que si $|\alpha|=1$, $c>|d|$, y $a\geq\sqrt{2c+2|d|+b^2}$, entonces (1.91) es siempre asintoticamente estable para toda $\tau>0$, ya que u debería ser negativo.

- *Resulta inestabilidad*

  a Asumiendo $\alpha=-1$, $d\leq -|c|$, y $b\geq\sqrt{2|d|-2c+a^2}$. Suponiendo que (1.92) tiene una raíz $\lambda=u+\imath v$, donde $u\leq 0$, para $\tau\geq 0$. De (1.112) se tiene

$$\begin{aligned}&2au^3+2auv^2+(a^2+2c)u^2+(a^2-2c)v^2+2acu+c^2\\ &\geq -2bu^3-2buv^2+(b^2-2d)u^2+(b^2+2d)v^2+2bdu+d^2\end{aligned} \tag{1.114}$$

  Sin embargo esto no puede ser cierto dado que se asumió que $d\leq -|c|$ y $b\geq\sqrt{2|d|-2c+a^2}$. Por lo que (1.91) es inestable en este caso para toda $\tau\geq 0$, por lo tanto tiene que ser que $u>0$.

  b Asumiendo $\alpha=1$, $d>|c|$, y $b\geq\sqrt{2|d|-2c+a^2}$. Suponiendo que (1.92) tiene una raíz $\lambda=u+\imath v$, donde $u\leq 0$, para $\tau\geq 0$. De (1.112) se tiene

$$\begin{aligned}&2au^3+2auv^2+(a^2+2c)u^2+(a^2-2c)v^2+2acu+c^2\\ &\geq 2bu^3+2buv^2+(b^2+2d)u^2+(b^2-2d)v^2+2bdu+d^2\end{aligned} \tag{1.115}$$

Nuevamente esto contradice el hecho que $d > |c|$ y $b \leq -2d - 2c + a^2$. Por lo tanto todas las raices de (1.92) deben tener parte real positiva, lo que inplica que (1.91) es inestable para toda $\tau \geq 0$

Análisis del caso crítico 2 $|\alpha| < 1$, $c + d = 0$.

- *Resulta estabilidad* Asumiendo $c \geq 0$, $a \geq \sqrt{4c + b^2}$. Suponiendo que (1.92) tiene una raíz $\lambda = u + \imath v$, donde $u > 0$, para $\tau \geq 0$. Entonces, de (1.112) se tiene

$$\begin{gathered}(1-\alpha^2)(u^2-v^2)^2 + (1-\alpha)4u^2v^2 + 2(a-b\alpha)(u^3+uv^2) \\ +(a^2+2c-b^2-2d\alpha)u^2 + (a^2-2c-b^2+2d\alpha)v^2 \\ +2(ac-bd)u + c^2 - d^2 < 0\end{gathered} \tag{1.116}$$

Esto no es posible ya que se ha asumido $|\alpha| < 1$, $c \geq 0$, $c + d = 0$, $a \geq \sqrt{4c + b^2}$, y $u > 0$. En este caso todas las raices de (1.112) tienen parte real no positiva; esto implica que (1.91) es estable (Pero no es asintoticamente estable puesto que $\lambda(\tau)$ es siempre una raíz de (1.112).

- *Resulta inestabilidad* Asumiendo $c < 0$, y $\tau > d^{-1}(a + b)$. Considerando la siguiente función de valores reales:

$$\ell(\lambda, \tau) = \lambda^2 + \alpha\lambda^2 e^{-\lambda\tau} + a\lambda + b\lambda e^{-\lambda\tau} + c + de^{-\lambda\tau} \tag{1.117}$$

Observese que

$$\ell(0, \tau) = 0 \tag{1.118}$$

y

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \ell(\lambda, \tau) = \infty \tag{1.119}$$

Dado que asumimos que $|\alpha| < 1$, existe un $M > 0$ tal que si $\lambda \geq M$, $\ell(\lambda, \tau) \geq 0$. Tambien se tiene

$$\frac{\partial \ell(\lambda, \tau)}{\partial \lambda} = 2\lambda + a + (2\alpha\lambda - \alpha\lambda^2\tau + b - b\lambda\tau - d\tau)e^{-\lambda\tau} \tag{1.120}$$

De donde, $\frac{\partial \ell(0,\tau)}{\partial \lambda} = a + b - d\tau < 0$, si $\tau > d^{-1}(a + b)$. Esto implica que, cuando $0 < \lambda \leq \delta(\tau)$, $\ell(\lambda, \tau) < 0$. Por lo tanto, debe existir al menos una $\bar{\lambda}$,

$\delta(\tau) < \bar{\lambda} \leq M$, tal que $\ell(\bar{\lambda}, \tau) = 0$ es decir (1.92) tiene al menos una raíz positiva. Por lo tanto (1.91) es inestable.

Ecuación diferencial Lotka-Volterra

En 1925 el matemático Vito Volterra, quién se intersó en las ecuaciones diferenciales e integrales, cuando tuvo una conversación con el biológo marino Umberto d'Ancona, cuando este finalizó su esfuerzo en el Mediterraneo notó un decrecimiento de cierta población marina como consecuencia de la primera guerra mundial, la proporción de peces predadores capturados tuvo un incremento.
Lotka y Volterra son conocidos como los investigadores de la era de oro de la ecología teórica, cuando intentaron crear las primeras leyes naturales de la ecología.

Para un modelo general de interacción entre dos especies

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta xy \\ y' &= \gamma y + \delta xy \end{aligned} \tag{1.121}$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ denotan la densidad de las especies y α, β, γ y δ son constantes reales. Los términos lineales αx y γy describen el crecimiento o decaimiento de las correspondientes poblaciones x y y en aislamiento. Por ejemplo, si $\lambda > 0$ y $\beta = 0$, la población x crece de manera exponencial como $e^{\lambda t}$; si $\lambda < 0$, esta decae exponencialmente. De forma similar sucede si $\delta = 0$, en este caso el signo de γ decide cuando la población $y(t)$ decae o crece exponencialmente.
La interacción de dos especies es representada por un término de acción de masas que asume implicitamente que las dos especies se encuentran entre si a una velocidad proporcional a cada nivel de la población y que el efecto de la depredación es a su vez proporcional al número de encuentros.
Este sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias tiene dos estados solución estables $(0, 0)$ y $(-\frac{\delta}{\gamma}, -\frac{\alpha}{\beta})$. Se sabe que el estado estacionario trivial es una silla de montar, mientras que el estado de equilibrio no trivial es un centro, y las soluciones en el plano de fase forman una infinita familia de órbitas periódicas.
Este modelo es muy inestable, un pequeño cambio en el modelo hace un cambio radical en el comportamiento cualitativo de las soluciones. Podemos reducir el número de parametros para la forma general de interacción entre dos especies del

modelo (1.121) en el caso que $\alpha, \beta, \delta > 0$. Haciendo el cambio de variable a no dimensionales.

$$\tilde{x} = \frac{\delta}{\gamma}x, \quad \tilde{y} = \frac{\beta}{\alpha}y, \quad \tilde{t} = \alpha t, \quad \mu = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Aplicando las transformaciones en las ecuaciones originales (1.121) y eliminando la tilde de las variables en las ecuaciones resultantes obtenemos

$$\begin{aligned} x' &= x + xy \\ y' &= \mu y + \mu xy \end{aligned} \tag{1.122}$$

Este modelo depende únicamente del parámetro μ y las propiedades cualitativas, pueden ser estudiadas dependiendo de μ. La transformación es invertible y por tanto las funciones originales x y y pueden ser generadas por medio de (1.122). Acomodando convenienemente

$$\tfrac{dx}{dt} = x(1+y), \quad \tfrac{dy}{dt} = \mu y(1+x) \tag{1.123}$$

En el plano fase x, y se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \mu\frac{\mu y(1+x)}{x(1+y)}, \tag{1.124}$$

tiene como punto singular a $x = y = 0$ y $x = y = -1$. Se puede integrar (1.124) de manera exacta y obtener las trayectorias de fase.

$$y - \mu x - log\frac{x^{\mu}}{y} = H, \tag{1.125}$$

donde $H > H_{min}$ es una constante y $H = 1 - \mu$ es el minimo de H sobre todo (x, y) este ocurre cuando $x = y = -1$. Para una $H > 1 - \mu$ dada, las trayectorias (1.125) en el plano fase son cerradas.

Una trayectoria cerrada en el plano x, y implica soluciones periodicas en t para x y y en (1.123). La condición inicial, $x(0)$ y $y(0)$, determina el valor de la constante H en (1.125).

Las soluciones no son estructuralmente estable, una pequeña perturbación puede mover la solución dentro de otra trayectoria que no es la linea cerrada original.

La linealización de estos puntos singulares determina el tipo de singularidad y estabilidad de los estados de equilibrio. Lo primero a considerar es el estado de

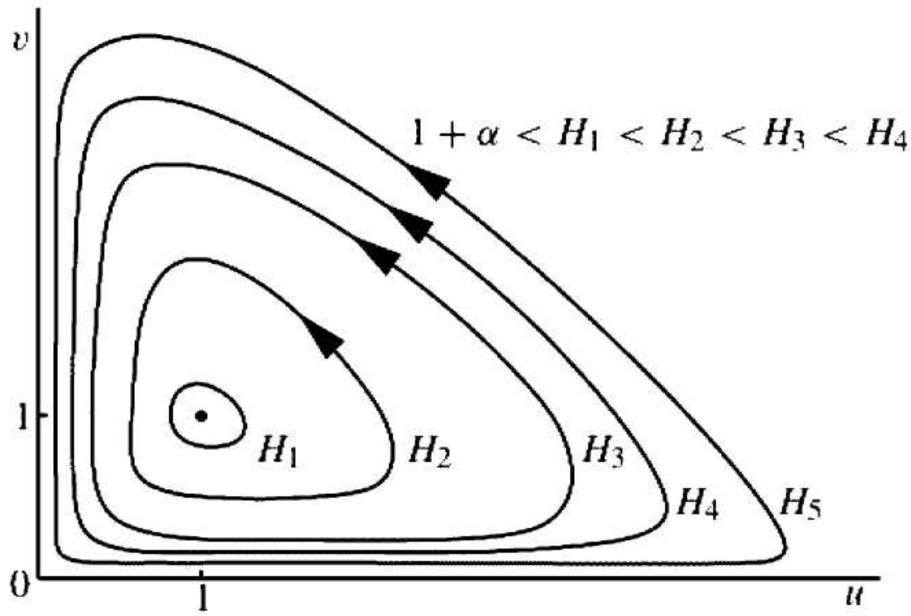


Figura 1.9: **Trayectorias de fase de una ecucion de tipo Lotka-Volterra**

equilibrio $(x, y) = (0, 0)$. Sean u y v pequeñas perturbaciones de $(0, 0)$. Si se quiere solo términos lineales, (1.123) tendremos

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1.126}$$

La solución es de la forma

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} Be^{\lambda t}$$

donde B un vector columna arbitrario constante y los valores propios λ son dados por el polinomio característico de la matriz A y son soluciones de

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \mu$$

De donde al menos uno de los valores propios, $\lambda_1 > 0$, $u(t)$ y $v(t)$ crece exponencialmente y asi $u = 0 = v$ son linealmente inestables. Por lo que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ es un punto de singularidad de silla.

Capítulo 2

Modelaje de ecuaciones diferenciales

2.1. Modelo Logístico

Los paramecios (género Paramecium) son protistas ciliados con forma ovalada, habituales en aguas dulces estancadas con abundante materia orgánica, como charcos y estanques. Son probablemente los seres unicelulares peor conocidos y los protocolos ciliados más estudiados por la Ciencia. El tamaño ordinario de las especies de paramecios está comprendido entre 0,05 y 0,33 milímetros.
Paramecium puede reproducirse de dos maneras distintas. Se puede producir un proceso asexual por división simple (fisión binaria) o se puede producir un proceso de conjugación sexual que tiene lugar en varias fases y que consiste, básicamente, en la unión de dos individuos para el intercambio de su material genético en un a secuencia compleja de división, intercambio y fusión de los núcleos. En ambos casos se produce una división transversal del individuo dando lugar a dos células hijas.

El crecimiento de la población de los protozoam *Paramecium* en tubos de ensayo es tipico ejemplo de crecimiento logistico. Bajo las condiciones de este experimiento que se ha tomado como base, la población deja de crecer cuando existen alrededor de 552 individuos por 0.5 ml. Los puntos en el tiempo muestran cierto error, que es causado tanto por la dificultad de medir con precisión tamaño de la población y por las variaciones ambientales a través del tiempo y al replicar el

experimento en otros los tubos de ensayo.
El grafico (2.1) muestra los valores reales del conteo y un bosquejo de un modelo continuo del mismo.
Una regresión lineal de los datos $\frac{N'}{N}$ versus N dada por $r = 0{,}99$ la razón de crecimiento y $K = 552$.
Susutituyendo los valores en la ecuación logística.

$$N' = 0{,}99N\left(1 - \frac{N}{552}\right)$$

Este modelo de población se encuentra en equilibrio, con un máximo de 552 individuos contabilizados en el experimento. El gráfico (2.2) muestra el modelo

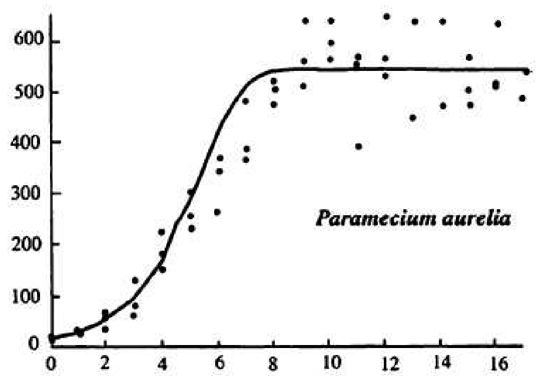


Figura 2.1: **Crecimiento de Paramecium aurelia en tubo de ensayo conteniendo Osterhaut, con bacterias como alimentos. El tamaño de la poblacion es número por 0.5 ml. El tiempo fué medido en dias.**

logístico que representa el crecimiento de dicha población, se mantienen los parámetros de esta forma se pueden asegurar los valores extremos con los que se está trabajando, como punto adicional se necesita un valor inicial del que no se hace mención en [6], ásí para efectos de cálculo del gráfico se utilizó como valor inicial $N(0) = 20$ debido a que se está trabajando con individuos el retardo la condición inicial debe ser un número entero.

La ecuación logística asume que la razón de nacimientos o muertes de los organismos responde instántaneamente a los cambios en el tamaño de la población. Sin embargo hay organismos que muestran pulsos de reproducción y tener cierto

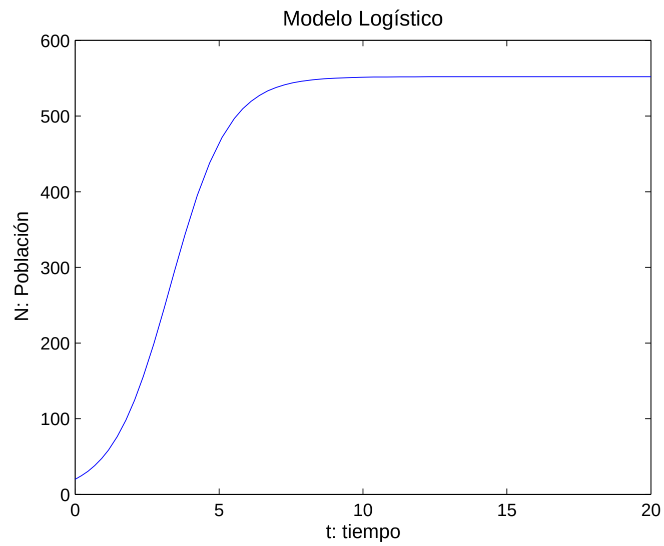


Figura 2.2: **Modelo de crecimiento logístico que se asimila a la población de Paramecium aureliade en el tiempo, utilizando la ecuación logística y los lo parámetros** $N(0) = 20$**,** $r = 0{,}99$ **y** $K = 552$**.**

retraso tiempo (del orden de una generación) antes de que se reproduzcan de nuevo. Los retrasos ocurren si el organismo almacena algún tipo de nutriente, debido al ciclo celular o a las condiciones ambientales que tienen que ver con el suministro de alimento. Hutchinson fué uno de los primeros matemáticos en introducir un retraso en la ecuación logística para tener en cuenta en la incubación y períodos de maduración.

En las Figuras (2.1) y (2.2), se muestra el crecimiento de Paramecium aurelia, es claro que la ecuación ligística no devuelve exactamente la cantidad de individuos en cada día, sin embargo describe el comportamiento general de la poblaçión.

Ahora agregando un retardo a la ecuación y manteniendo los valores de la razón de crecimiento, el limite de la población se tiene:

$$N' = 0{,}99N\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{552}\right)$$

Como se mencionó en un inicio muchos de los modelos que incluyen retardo sufren cambios considerables al agregarse un retardo, sin embargo según la figura

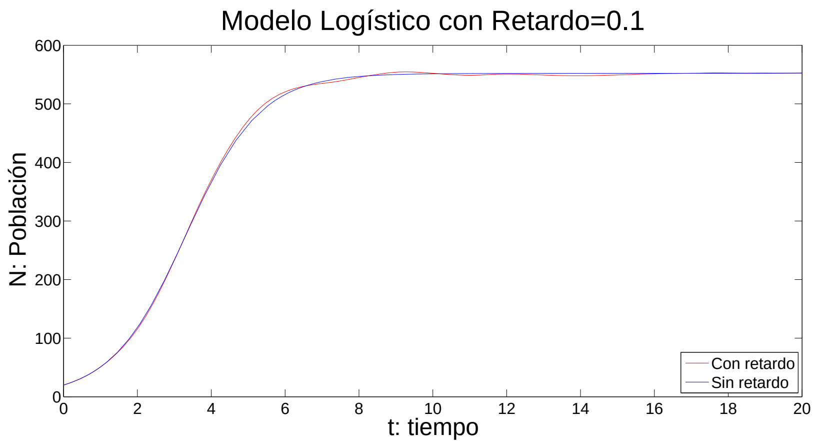


Figura 2.3: **Modelo logístico con parámetros $\tau = 0{,}1$, $r = 0{,}99$ y $K = 552$, se observan pequeñas oscilaciones alrededor de la figura sin retardo.**

(2.3) para este caso al ser el retardo de un valor pequeño mantiene la tendencia original aunque muestra diminutas oscilaciones con respecto al grafico original. Sin embargo se mantiene en equilibrio respetando el limite poblacional impuesto por el valor de $K = 552$ que aún es su punto de equilibrio.
Al incrementar el valor del retardo tambien incrementan las oscilaciones sobre la solución de equilibrio (Ver Figura (2.4)), además puede notarse que se sobrepasa el valor limite de la población admitida en un inicio, sin embargo la tendencia en el tiempo de realización del experimento siempre es al equilibrio. Por lo que puede deducirse que no existirá sobre población ni extinción de la especie.

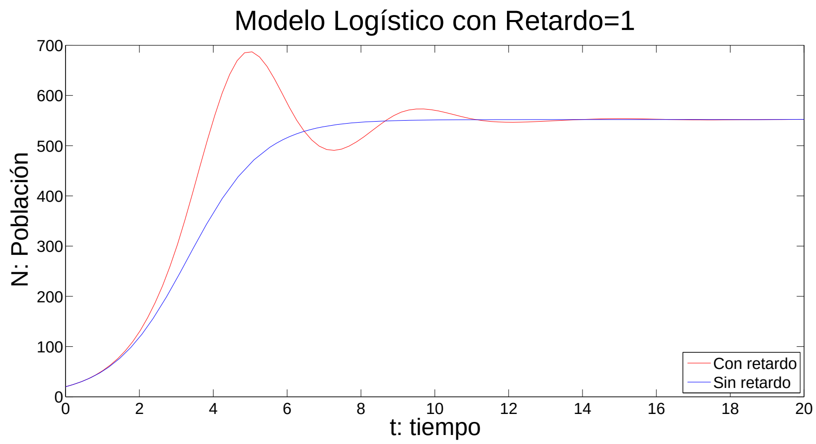
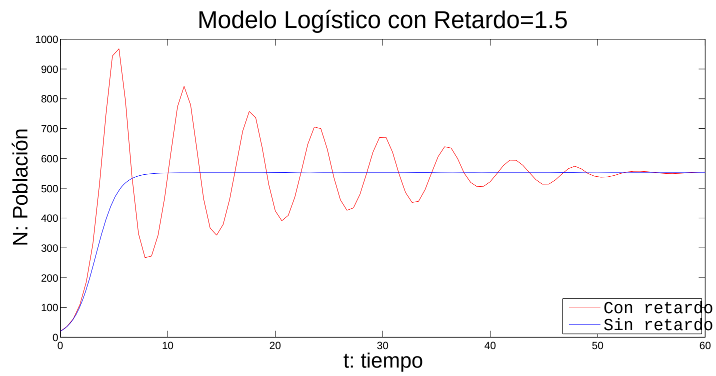


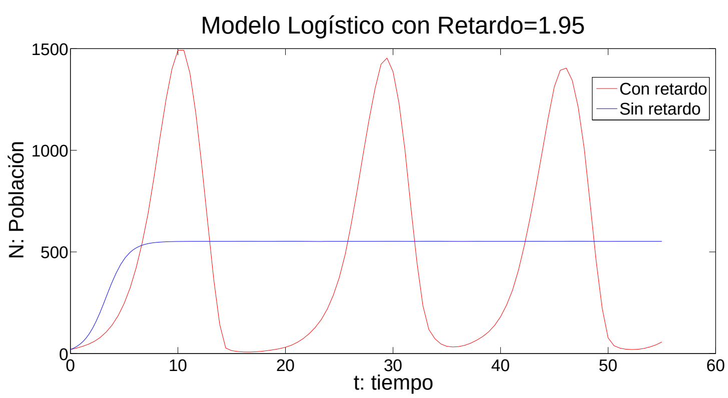
Figura 2.4: **Al incrementar el retardo las oscilaciones aumentan de dimensión, para $\tau = 1$, $r = 0{,}99$ y $K = 552$, se observa un cambio sustancial.**

En (2.5) a medida que el valor de τ incrementa lo hacen tambien las oscilaciones, sobrepasando el nivel de equilibrio establecido un poco menos del doble en (a) y por un poco menos del triple en (b), ademas puede verse que el número de oscilaciones disminuye, con el incremento de τ se la solución tarda más en mantenerse en la solución de equilibrio. Para ambos retardos las soluciones son positivas lo que es congruente con un modelo poblacional.

En (2.6) al seguir aumentando el valor del retardo la solución se vuelve no acotada con tendencia a $-\infty$, si bien pierde las oscilaciones los valores son negativos aproximadamente desde el dia 7 la población se habrá extinguido. En (a) se muestra la solución para $\tau = 2{,}5$ con el cual la solución decrece exponencialmente, alejándose completamente del modelo original con una cantidad multiplo 10^{210}, un acercamiento a esta misma figura (b) muestra el cambio radical producido, a diferencia de las soluciones anteriores que tenian máximos relativos aqui este presenta solamente uno cerca de los 2500 individuos para finalmente extinguirse entre el día 8 y 10.

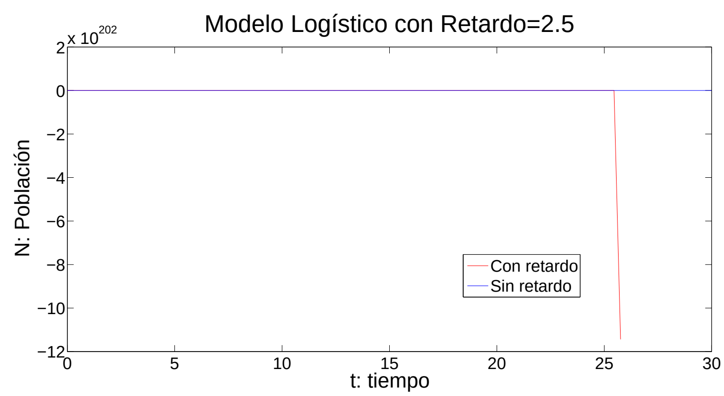


(a) **Para $\tau = 1{,}5$ aparecen soluciones oscilantes, pero finalmente tienden al estado de equilibrio.**

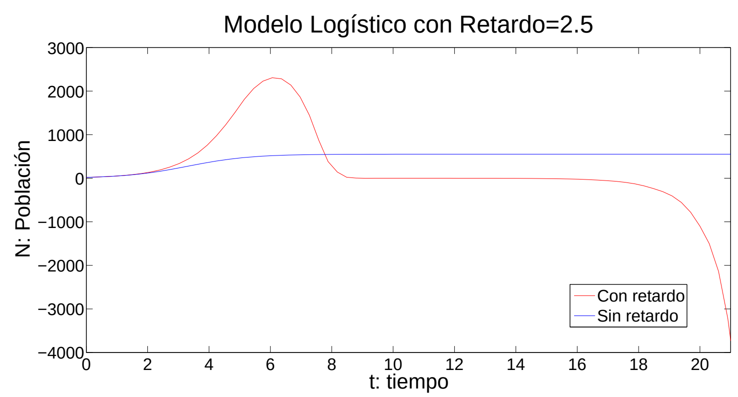


(b) **Solución periodica, oscilante alrededor del punto de equilibrio.**

Figura 2.5: **Comparación de el modelo sin y con retardo a medida que el valor de τ incrementa.**



(a) **Por el gráfico podria deducirse que ambos modelos son constantes con un cambio radical para el que posee retardo, puesto que decrecece exponenecialmente cerca del dia 24**



(b) **Puede notarse que ambas poblaciones se mantienen cercanas solo en los primeros tres dias, para luego separarse por completo de la solución original.**

Figura 2.6: **Decrecimiento exponencial de la población en lapso de 20 dias.**

2.2. Modelo Predador-Presa

Los conejos salvajes debido al estres de su habitát viven menos que los domésticos, con un aproximado de 5 a 7 años y varia entre 28 a 35 días en nacer luego de la fecundación, la cantidad de crias varía entre cuatro y doce, aunque la esperanza de vida es de los 10 años en general no superan el primer año de vida.
Las conejas pueden tener varias crias durante todo el año.
Por otro lado los linces solo tienen una ovulación al año, su periodo de gestación varía en los 63 y 70 dias, la cantidad varía entre una y seis crias, pero lo habitual son dos. A las 12 semanas las crias se inician en la caza nocturna.
El siguiente gráfico muestra la solución en un intervalo de 20 años del modelo propuesto entre linces y conejos de [4] , basado en los datos reales recolectados en ese lapso de tiempo, ajustandose significativamente a la cantidad real de ambas poblaciones. Utilizando el mismo modelo, puede verse que la interacción de ambas

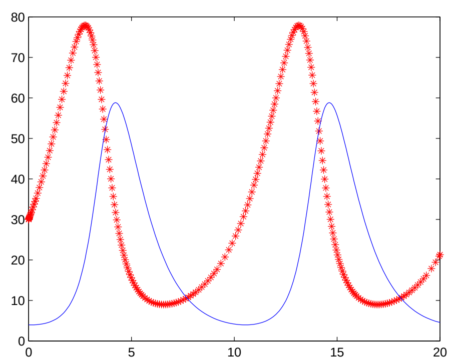


Figura 2.7: **Gráfico del modelo orginal depredaror-presa entre linces y conejos.**

especies con una proyección de 100 años, tiene un comportamiento oscilatorio, el sistema se ha generado de forma que el modelo se mantenga estable, debido a ello ninguna de las especies logra el grado de extinción.
El modelo utlizado para realizar este estudio de interacciones y con el cual se han realizado los gráficos es el siguiente

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}55P - 0{,}027PD$$
$$\frac{dD}{dt} = -0{,}83D + 0{,}026PD$$

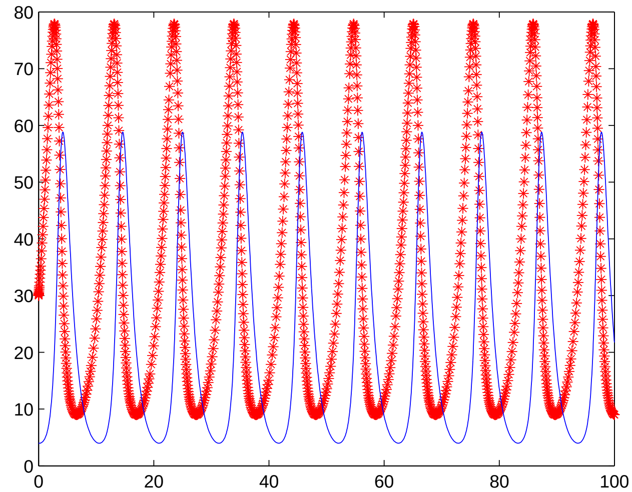


Figura 2.8: **Gráfico de la interación de linces y conejos para un intervalo de 100 años**

Donde P hace referencia a la población de presas, en otras palabras conejos, D simboliza los depredadores en este caso los linces.
Claramente si los depredadores se extinguen la poblacion de presas tiene un crecimiento exponencial, para el caso inverso, la razón de cambio en el crecimiento de los linces se vuleve negativa, disminuyendo de manera significativa la población hasta el punto en que la solución se vuelve negativa, entendiendo que manejado como modelo poblacional no puede ser un valor negativo, se manejara unicamente como extinción de la especie.

Haciendo un cambio en el modelo e incluyendo retardos $\tau_1 = 0{,}164$ que corresponde al tiempo de gestación de los conejos y $\tau_2 = 0{,}191$ equivalente al tiempo de gestación de los linces, esto es porque el modelo esta generado con el tiempo en años.
Con este cambio en el tiempo ya es visible el el desequilibrio generado, por un lado existe un crecimiento significativo de los linces, llevando a la extinción de conejos que como resultado ambas especies se extinguen en un lapso de 30 años aproximadamente.

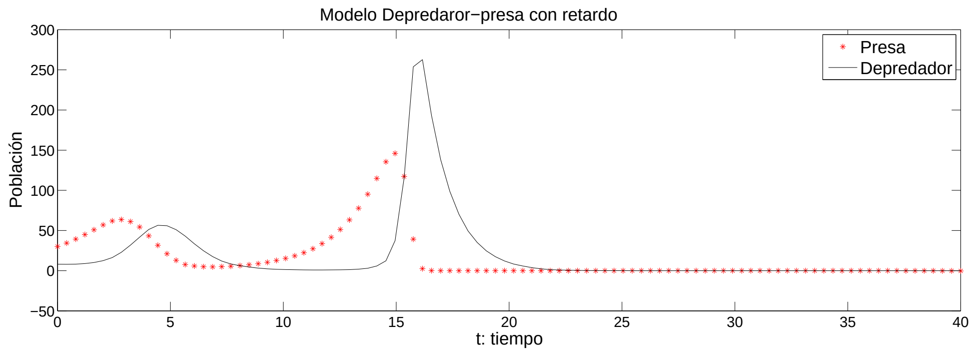


Figura 2.9: **Tomando un modelo linealizado e incluyendose los retardos en cada una de las varibles $\tau_1 = 0{,}164$ y $\tau_2 = 0{,}191$, utilizando como función historia los valores de 24 para las presas y 8 depredadores, con estos cambios se genera un desequilibrio en el sistema, que colleva a la extinción de ambas especies**

En este caso la introducción de un retardo en ambas variables produce una desestabilización del sistema que ya se tenia como estable, que es una de las principales caracteristicas de las ecuaciones con retardo.
Ambas soluciones parecen tener el mismo comportamiento de crecimiento o disminución, sin embargo en el tiempo como es de esperarse la respuesta ante el declive de los conejos no es instantaneo el efecto en la población de los linces. Tomandoles un estimado de tres años en extinguirse luego de los conejos.

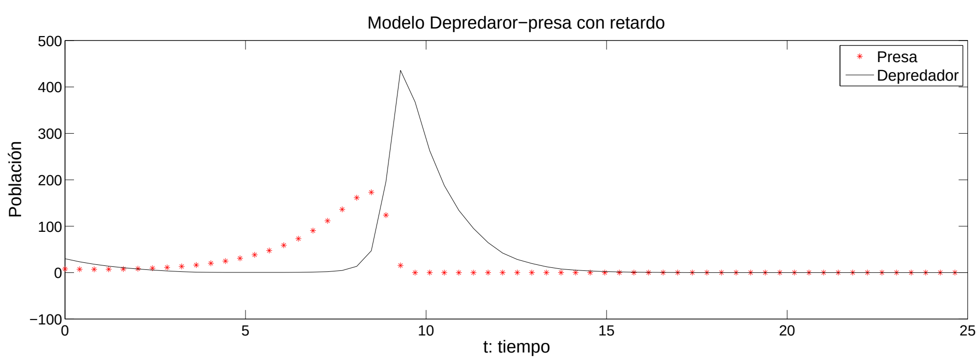


Figura 2.10: **Solución de la ecuación diferencial con retardo del modelo depredador-presa con retardo y función historia o población incial de 8 presas y 30 depredadores.**

Manteniendo los parámetros originales y los retardos, realizando unicamente un cambio en la función inicial para 8 presas y 30 depredadores, puede verse que inicialmente la cantidad de presas aumenta mientras que la de los depredadores disminuye debido a la cantidad de encuentros que estos realizan entre menos conejos se encuentren en el habitat menos encuentros se realizaran disminuyendo la caza y por tanto la cantidad de linces. A medida que los linces disminuyen en una cantidad considerable, los conejos recuperan parte de su población lo que a su vez en repuesta la población de depredadores se recupera. Finalmente y como en el caso anterior ambas poblaciones se extinguen, sin embargo en este caso este fenómeno ocurre de manera mas inmediata en un tiempo aproximado de 15 años en contraste con el anteriror correspondiente a 20 años.

Capítulo 3

Concluciones

El uso de la ecuaciones diferenciales con retardo discreto tiene un amplio campo de aplicación, en general no es posible encontrar de manera analitica la solución, por lo que debe hacerse uso de métodos numéricos y de recursos computacionales para cacularse, a fin de evitar trabajo innecesario es de suma importancia conocer las limitaciones que impone la estabilidad de dichas ecuaciones.
El análisis aplicado a las soluciones para su descripción es similar a una ecuación diferencial ordinaria, tal es el caso de la ecuación caracteristica, sin embargo la complejidad agregada por el retardo es considerable, pues debe tomarse soluciones en función de τ, y estudiar productos de los paramétros con con el retardo.

Bibliografia

Bibliografía

[1] Tom M. Apostol *Calculo de una variable con introducción al algebra lineal (1961)*.

[2] Angel Gabriel Estrella González; Gerardo Emilio García Almeida; Eric José Avila Vales. *Estabilidad local de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones*, Universidad Autónoma de Yucatán.

[3] Antonio García. *Teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (2007)*, Universidad Autonoma Metropolitana, Iztalapa Distrito Federal.

[4] Jackelyne Gómez Restrepo . *Modelo presa-depredador y su contextualización en el ámbito nacional e internacional (2009)*, Ingeniería matemática, Dpto. de Ciencias Básicas, Medellín, Colombia. .

[5] Migueal A. Rodriguez *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (1999)*, Universidad Complutense de Madrid.

[6] Thomas Erneux *Applied Delay Differential Equations(2009)*, Springer.

[7] Freddy Dumortier, Jaume Llibre, Joan C, Artés. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer.

[8] J.D Murray. *Mathematical Biology*, Springer.

[9] K. Gopalsamy. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic Publishers.

[10] Yang Kuang. *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics*, Academic Press.

[11] Leah Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, SIAM