UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

"Espacios de funciones holomorfas en un abierto de $\mathbb{C}$ e introducción al estudio de las transformaciones conformes".

Trabajo de grado para optar al titulo de Licenciado en Matemática

Estudiante
Mario Enrique Hernández Carpio
HC09001

Asesor
Dr. Simón Alfredo Peña Aguilar

Ciudad Universitaria, 23 de septiembre de 2015

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS PERIODO 2011-2015

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:
ING. MARIO ROBERTO NIETO LOVO
VICERRECTORA ACADÉMICA:
MAESTRA ANA MARÍA GLOWER DE ALVARADO
VICERRECTOR ADMINISTRATIVO:
MAESTRO ÓSCAR NOÉ NAVARRETE
SECRETARIA GENERAL:
DRA. ANA LETICIA DE AMAYA
DEFENSORA DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS:
LICDA. CLAUDIA MARÍA MELGAR DE ZAMBRANA
FISCAL:
LIC. FRANCISCO CRUZ LETONA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:
M.SC. MARTÍN ENRIQUE GUERRA CÁCERES
VICEDACANO:
LIC. RAMÓN ARÍSTIDES PAZ SÁNCHEZ
SECRETARIO:
LIC. CARLOS ANTONIO QUINTANILLA APARICIO

ESCUELA DE MATEMATICA

DIRECTOR:
DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES
SECRETARIA:
LICDA. ALBA IDALIA CÓRDOVA CUELLAR

“Sonrie”

Sonríe porque el cerebro,
Con ingeniosa inocencia,
Siga forjando en las nubes
Imposibles siluetas.

Sonríe porque del caos
Y su impetuosa demencia,
Pueda el espíritu humano
Concebir belleza.

Sonrie que tu sonrisa
Con elegancia muestra,
Que el infinito cabe
En las distancias pequeñas.

...

Sonríe que tu sonrisa
Enuncia un lindo teorema:
“Existe una curva rosa
De curvatura perfecta”
(M.C.)

Agradecimientos y Dedicatoria

Agradezco y dedico este trabajo a:

a Dios
por el aire y por los acontecimientos excepcionales que solamente pueden deberse al accionar de un algo superior.

mi madre Concepción y mi abuela María
por su ejemplo, apoyo y sacrificios.

mi hermano Alex
por su nobleza, coraje y valor.

a mi tío Heriberto
por su ejemplo y apoyo.

a mi tía Isabel
por enseñarme a leer.

al Dr. Simón Alfredo Peña Aguilar
por su asesoría en el desarrollo de este trabajo.

al profesor Osmaro
por su dedicación, amistad y enseñanzas.

al profesor Campos
por sus enseñanzas y motivarme con sus clases a estudiar matemáticas.

al todos mis buenos profesores y profesoras
por hacer del aula un lugar agradable.

a mis amigas y amigos
por todo lo que hemos compartido a lo largo del camino.

Índice general

1. Espacio de funciones holomorfas

1.1. Convergencia de una sucesión de funciones holomorfas

Comencemos esta sección recordando la fórmula local de Cauchy

Teorema 1.1. Fórmula local de Cauchy
Sea $\overline{D}$ un disco cerrado, y u una función holomorfa en $\overline{D}$. Sea γ el círculo que es frontera de $\overline{D}$. Entonces para cada z_0 en D, abierto y conexo, tenemos

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{u(z)}{z-z_0}dz$$

Nuestro siguiente paso es encontrar una expresión para las derivadas de una función holomorfa u en el interior de un disco D en términos de integrales sobre la frontera de D, para lograrlo primero veremos el siguiente teorema.

Teorema 1.2. Sea u una función holomorfa sobre un disco cerrado $\overline{D}(z_0, R)$, $R > 0$. Si C_R representa la frontera de D. Entonces u puede desarollarse como serie de potencias

$$u(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$$

cuyos coeficientes a_n estan dados por la fórmula:

$$a_n = \frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{u(z)}{z-z_0}dz$$

Demostración. Por el teorema (1.1), para todo z dentro de C_R, tenemos

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{u(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma$$

Si $0 < s < R$. Sea $D(z_0, s)$ el disco de radio s centrado en z_0. Veamos que u puede expresarse como serie de potencias sobre este disco. Escribimos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varsigma - z} &= \frac{1}{\varsigma - z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{\varsigma - z_0}\left(\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\varsigma - z_0}}\right)\\ &= \frac{1}{\varsigma - z_0}\left(1 + \frac{z-z_0}{\varsigma - z_0} + \left(\frac{z-z_0}{\varsigma - z_0}\right)^2\cdots\right)\end{aligned}$$

Esta serie geométrica converge absoluta y uniformemente para $|z - z_0| < s$ debido a que

$$\left|\frac{z-z_0}{\varsigma - z_0}\right| \leq s/R < 1$$

La función u está acotada sobre γ. Como las sumas parciales de la serie en el lado derecho de la igualdad anterior son continuas en $D(z_0, s)$, podemos integrar término a término obteniendo

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma \cdot (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

donde $a_n = \int_\gamma u(\varsigma)/(\varsigma - z_0)^{n+1} d\varsigma$. Por otra parte

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left| \frac{u(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} \right| d\varsigma \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\|u\|_R}{R^{n+1}} d\varsigma = \|u\|_R / R^n \end{aligned}$$

lo que prueba que la serie $u(z)$ es convergente.

Teorema 1.3. Sea u una función holomorfa sobre un disco cerrado $\overline{D}(z_0, R)$, $R > 0$. Si $0 < R_1 < R$. Denotemos por $\|u\|_R$ al supremo de la normas de u sobre el circulo de radio R. Entonces para $z \in \overline{D}(z_0, R_1)$ tenemos

$$|u^n(z)| \leq \frac{n! R}{(R - R_1)^{n+1}} \|u\|_R$$

Demostración. Como u es holomorfa, el teorema (1.2) garantiza que es analítica y puede expresarse como serie de potencias. La serie de Taylor para u al rededor de un punto $z \in \overline{D}(z_0, R_1)$ tiene coeficientes $a_n = u^n(z)/n!$. Por el teorema (1.2) se tiene que $a_n = 1/(2\pi i) \int_\gamma u(\varsigma)/(\varsigma - z)^{n+1} d\varsigma$, entonces

$$u^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{n+1}} d\varsigma$$

luego

$$\begin{aligned} |u^n(z)| &\leq \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{n+1}} d\varsigma \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_\gamma \left| \frac{u(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{n+1}} \right| d\varsigma \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_\gamma \frac{\|u\|_R}{(R - R_1)^{n+1}} d\varsigma = \frac{n! R}{(R - R_1)^{n+1}} \|u\|_R \end{aligned}$$

Lo que demuestra que la serie para $u^n(z)$ es convergente.

Teorema 1.4. Sea D un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ y denotemos con $O(D)$ al conjunto de funciones holomorfas en D; para todo subconjunto compacto K de D, para todo subconjunto compacto y acotado A de D tal que $K \subset \overset{\circ}{A}$, existen constantes c_j $j \in \mathbb{N}$ tales que, para toda función $U \in O(D)$, se tiene

$$\sup_{\zeta \in K} |u^{(j)}(\zeta)| \leq c_j \|u\|_A$$

donde $u^{(j)}$ representa a la j- ésima derivada de u y $\|u\|_A$ representa al supremo de la norma de u en A.
Demostración. El teorema se prueba tomando $K = \overline{D}(z_0, R_1)$ y $A = \overline{D}(z_0, R)$, con $R_1 < R$, en el teorema anterior.

COROLARIO 1.1. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en D que converge uniformemente en todo compacto de D a una función u. Entonces u es holomorfa en D; además la sucesión $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a u' en todo compacto de D.

Demostración Como cada u_n es holomorfa en D entonces es analítica en D de manera que cada u_n es continua en D; como una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente lo hace a una función continua, entonces u es continua. Sea Δ un triángulo en D. Entonces Δ es compacto; si $\partial\Delta$ representa la frontera de Δ, entonces por el teorema de Cauchy

$$\int_{\partial\Delta} u(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Delta} u_n(z)dz = 0$$

En consecuencia el teorema de Morera implica que u es holomorfa en D. Por el teorema (1.4), existe una constante positiva c_1 tal que

$$|u-u'| \leq c_1\|u\|_D$$

donde $\|u\|_D$ denota el supremo de u sobre D. Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a u, entonces $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a u'

TEOREMA 1.5. Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas, sin ceros en D, que converge uniformemente en todo compacto de D, a la función holomorfa u, entonces, o bien $u=0$ o bien u no tiene ceros en D.

Demostración. Supungamos que $u\neq 0$ y sea z_0 un cero de u, como D es conexo, z_0 es aislado de multiplicidad $k>0$; si $B(z_0,r)\subset D$ es suficientemente pequeño, $B^*(z_0,2r)$ no contiene ceros de u y

$$k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u'(z)}{u(z)}dz$$

donde $\gamma = B(z_0,r)$. De acuerdo con el corolario (1.1), la integral anterior es el limite de las integrales

$$\int_\gamma \frac{u_n'(z)}{u_n(z)}dz$$

cuando $n\to\infty$, entonces $k=0$ lo cual es una contradicción.

COROLARIO 1.2. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{C}}$ una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas de D en $\mathbb{C}$ que converge uniformemente en todo compacto de D, entonces, o bien la función limite u es constante, o bien, ella es inyectiva.

Demostración. Sean $z_1,z_2\in D$ con $z_1\neq z_2$, tales que $u(z_1)=u(z_2)=a$, y u no es constante; sean B_1 y B_2 dos discos abiertos y disjuntos contenidos en D cuyos centros son z_1 y z_2 respectivamente. Entonces la función $u(z)-a$ tiene por ceros a z_1 en B_1 y a z_2 en B_2. De acuerdo con el teorema (1.5), para n suficientemente grande, u_n-a tiene un cero en B_1 y un cero en B_2, lo cual es una contradicción a la hipotesis.

TEOREMA 1.6. Sea $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ una serie de funciones holomorfas en el abierto D de $\mathbb{C}$. Si f converge uniformemente (resp. normalmente) en todo compacto de D, entonces f es holomorfa y $\sum v_n'$ converge uniformemente (resp. normalmente) en todo compacto a f'.

Demostración. Por una parte, sea $u_p(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{p} v_n(z)$, la conclusión para la convergencia uniforme resulta de aplicar el corolario (1.1) a la sucesión $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$

Por otra parte si $(u_p(z))_{p\in\mathbb{N}}$ converge normalmente en todo compacto de D, entonces converge uniformemente en todo compacto de D y nuevamente u es holomorfa. Además existen constantes positivas $M_1, M_2, \ldots$ tales que

1. $|u_p| < M_p, \forall z \in K(compacto), \forall p \in \mathbb{N}$.
2. $\sum M_p$ converge.

de acuerdo con el teorema (1.4) se tiene

$$|u_p'| \leq c_1 \|u_p\|_D \leq c_1 M_p = Q_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

para alguna constante positiva c_1. Como $\sum M_p$ converge, entonces $\sum Q_p$ también converge, de donde, por la definición de convergencia normal se deduce que $\sum v_n'$ converge normalmente.

Finalmente, por el teorema (1.4) se tiene que $|f' - u_p'| \leq c_1 \|f - u_p\|$ de donde se concluye que $\sum v_n'$ converge a f'.

1.2. Sucesiones exaustivas de compactos de un abierto D de $\mathbb{R}^2$, teorema de Stieltjes-Vitali-Montel

Teorema 1.7. Para todo abierto D de $\mathbb{R}^2$, existe una sucesión creciente de compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (es decir $k_n \subset K_{n+1}$), de D tales que todo compacto K de D está contenido en alguno de los K_n, además $\cup_n K_n = D$.

Demostración. Consideremos los discos cerrados contenidos en D y donde las coordenadas del centro y los radios son racionales; estos discos forman un conjunto númerable con el cual se forma la sucesión $(\overline{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$; para todo n, $K_n = \cup_{i=0}^{n} \overline{B}_i$, es compacto por ser unión finita de compactos y $K_n \subset K_{n+1}$.

Los interiores B_j de los discos forman un recubrimiento de abiertos para D, entonces todo compacto K de D está contenido en una unión finita de B_j, y entonces en un K_n. para todo $z \in D$, $\{z\}$ es compacto, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z \in K_n$, de donde la última afirmación es cierta.

Teorema 1.8. Teorema de Stieltjes-Vitali-Montel Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto D de $\mathbb{C}$ y si esta sucesión está uniformemente acotada en todo compacto de D, entonces existe una subsucesión (U_{n_j}) uniformemente convergente en todo compacto de D a una función u que es holomorfa en D.

Demostración. Por una parte, sea K un compacto de D y A un compacto acotado de D tal que $K \subset \overset{\circ}{A}$; $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformente acotada en A, la sucesión $||u_n||_A$ está acotada. De acuerdo con el teorema (1.4) la sucesión de primeras derivadas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada en K; de acuerdo con el teorema del valor medio resulta que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en K (y entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todos $z, \zeta \in K$ satisfaciendo que $|z - \zeta| \leq \eta$, tenemos $|u_n(z) - u_n(\zeta)| \leq \epsilon$); además para todo $z \in K$ y todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n(z)$ está en un disco cerrado de radio finito y entonces compacto, entonces, de acuerdo con el teorema de Ascoli, el conjunto $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto relativamente compacto del espacio $C^0(K; \mathbb{C})$ de funciones continuas de K en $\mathbb{C}$ equipado de la norma de convergencia uniforme, entonces existe una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente en K.

Por otra parte, Consideremos una subsucesión de compactos (K_p) de D, como en el teorema (1.7). Entonces, para $q \leq p$, toda subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente sobre K_p converge uniformemente en K_q.

Sea $(u_{n_{l_p}})$ una subsucesión uniformemente convergente en K_p, la sucesión $(u_{n_{l_p}})$ está uniformemente acotada en K_{p+1}, entonces existe una subsucesión $(u_{n_{l_{p+1}}})$ que converge uniformemente en K_{p+1}; la sucesión $(u_{n_{l_{p+1}}})$ está uniformemente acotada en K_{p+2}, entonces existe una subsucesión $(u_{n_{l_{p+2}}})$ que converge uniformemente en K_{p+2}; en general, sobre cada compacto K_r, con $r > p$, de la sucesión existe una subsuseción de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre K_r. Tomemos la subsucesión (v_r) cuyo r-ésimo término es el r-ésimo término de la sucesión $(u_{n_{l_{p+r}}})$. La sucesión (v_r) converge uniformemente sobre cada compacto K_r, con $r > p$. Por el teorema (1.7) (v_r) converge uniformemente sobre cada compacto de D.

1.3. Topología del espacio de funciones continuas en un abierto D de $\mathbb{C}$; espacio de funciones holomorfas en D

Antes de comenzar el estudio de los espacios de funciones continuas sobre un conjunto propio, abierto y conexo D de $\mathbb{C}$ es necesario conocer o recordar, según sea el caso, algunos aspectos relativos a los espacios normados.

En cualquier espacio normado X, de norma $\|\cdot\|$, un conjunto A en X es abierto cuando para cada $x_0 \in A$ se puede encontrar una bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ contenida en A. Por tanto, para cualquier $x_0 \in X$, las bolas abiertas de centro x_0 y radios positivos forman una base de entornos de x_0. El manejo de estos entornos básicos resulta especialmente cómodo; consideremos la bola unidad de X

$$U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$$

Es claro que la bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ puede escribirse como $x_0 + rU$, luego cualquier bola abierta se obtiene a partir de la bola unidad mediante una homotecia y una traslación. En resumen, al analizar los abiertos en una topología invariante por traslación es suficiente con analizar los entornos de cero.

Ahora damos inicio al estudio de los resultados esenciales de esta sección. El conjunto $C(D) = C^0(D, \mathbb{C})$ de funciones continuas en D es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial. Para todo compacto K de D la aplicación

$$\begin{array}{rcl} C(D) & \to & \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto & \rho_k(f) = \sup\limits_{z\in K} |f(z)| \end{array}$$

es una seminorma y entonces

$$\text{para} \quad f, g \in C(D), \rho_k(f+g) \leq \rho_k(f) + \rho_k(g)$$

$$\text{para} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad f \in C(D), \quad \rho_k(\lambda f) = |\lambda|\rho_k(f)$$

Para todo $\epsilon > 0$, la seminorma ρ_k define la bola cerrada de $C(D)$ centrada en 0, de radio ϵ

$$V(K, \epsilon) = \{f \in C(D); \rho_k(f) \leq \epsilon\}$$

Proposición 1.1. Sea K un conjunto compacto y fijo, la semi-norma ρ_k dota al espacio $C(D)$ de la topología τ_k, invariante por traslación, para la cual la suma de funciones y la multiplicación de una función por un escalar son continuas.

Demostración. La seminorma ρ_k define la diferencia

$$\begin{array}{rcl} q_k : C(D) \times C(D) & \to & \mathbb{R}_+ \\ (f,g) & \mapsto & \rho_k(f-g) \end{array}$$

q_k posee las propiedades de una distancia.

Para todo $f \in C(D)$ y para todo $\epsilon > 0$, sean $W_\epsilon^f = \{g \in C(D); q_k(g,f) < \epsilon\}$; el conjunto $\{W_\epsilon^f, \epsilon \in \mathbb{R}_+\}$ es un sistema fundamental de vecindarios de f en una topología bien determinada de $C(D)$, pues dado $\epsilon > 0$ y $f \in C(D)$, $W_{\epsilon/2}^f \subset W_\epsilon^f$. Para todo $h \in C(D)$, se tiene $q_k(f+h, g+h) = q_k(f,g)$, entonces, por la traslación h, $W_\epsilon^0 = V(K,\epsilon)$ es transformado en W_ϵ^h, así la topología anterior es invariante por traslación.

La continuidad de la suma y de la multiplicación por un escalar se verifican inmediatamente.

Proposición 1.2. Si K describe la familia de conjuntos compactos de D y ϵ es un número real positivo, el espacio $C(D)$ está provisto de una topología única τ, invariante por traslación, en la cual los conjuntos $V(K,\epsilon)$ constituyen un sistema fundamental de entornos de 0 y para la cual la suma y la multiplicación por un escalar son continuas.

Demostración. Veamos que la topología τ es la cota superior de las topologías τ_k cuando K describe la familia de compactos de D. Consideremos al conjunto $\cup\beta_k$, donde β_k es la base de la topología τ_k vista en la proposición (1.1); $\cup\beta_k$ es una subbase para τ. Esto es cierto ya que por conocimientos de topología general si $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ es el conjunto potencia de un espacio X, y $\sigma \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ es tal que $\cup_{S\subset\sigma} = X$, entonces σ es subbase para alguna topología sobre X. Particularmente τ es la cota superior de las topologías τ_k.

Luego, por lo anterior, un sistema fundamental de entornos de 0 está formado por conjuntos $\cap_{j\in J} V(K_j, \epsilon_j)$, donde $(K_j)_{i\in J}$ es cualquier familia finita de compactos de D, pues $V(K_1,\epsilon_1) \cap V(K_2,\epsilon_2) \supset V(K_1 \cup K_2, \text{ínf}(\epsilon_1,\epsilon_2))$; los $V(K,\epsilon)$ con K compacto y ϵ en los reales positivos, constituyen un sistema fundamental de entornos de 0, de esto a su vez, se deduce que τ sea invariante por traslación y que tanto la suma de funciones continuas como la multiplicación de un función continua por un escalar sean continuas.

Proposición 1.3. La toplogía τ puede ser definida por una distancia invariante por traslación.

Demostración. Sea $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión exaustiva de compactos de D, tomamos: $\rho_i = \rho_{k_i}$; para toda función $f \in C(D)$,

$$\delta(f) = \sum_{i\geq 1} 2^{-i} inf(1, \rho_i(f)); \quad (\delta(f) \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-1} = 1)$$

para $f, g \in C(D)$, $d(f,g) = \delta(f-g)$. Se muestra que d es una distancia invariante por traslación que define la topología τ; este último punto se verifica también:

1. Todo $V(K,\epsilon)$, con $\epsilon < 1$ contiene una bola (centrada en 0) para d. Sea i tal que $K \subset K_i$, entonces $d(f,0) = \delta(f) \leq 2^{-i}\epsilon$, resulta: $\rho_i(f) \leq \epsilon$, entonces $B(0, 2^{-i}\epsilon) \subset V(K_i,\epsilon) \subset V(K,\epsilon)$.
2. Toda bola $B(0,\epsilon)$ para d contiene un $V(K,\epsilon')$: sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-i} \leq 2^{-1}\epsilon$, a continuación $f \in V(K_i, 2^{-1}\epsilon)$, resulta
$$\delta(f) \leq p_i(f) + 2^{-i} < \frac{\epsilon}{2} + 2^{-i} \leq \epsilon$$

Teorema 1.9. El espacio $C(D)$ provisto de la topología τ (llamada topología de la convergencia compacta) es un espacio vectorial topológico (E.V.T.), localmente convexo, metrizable y completo (y entonces, por definición, espacio de Fréchet)

Demostración. Sabiendo que para funciones complejas la suma de funciones continuas es continuas y que la multiplicación de una función continua con un número complejo también es continua se verifica que $C(D)$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$; también se acaba de probar que $C(D)$ está dotado de una topología τ.

Por otra parte los conjuntos $V(K,\epsilon)$ son convexos y dado que τ es invariante por tralación se deduce que cada $f \in \mathbb{C}(D)$ tiene una base local de conjuntos convexos; además se definió una métrica para $C(D)$ por lo que $C(D)$ es métrico.

Para verificar que $C(D)$ es completo veamos que se satisface el **teorema de Cantor**, que dice: "El espacio métrico (X,d) es completo si y sólo si dada cualquier familia numerable de conjuntos $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cerrados, no vacíos y encajados ($F_{n+1} \subset F_n$, para $n \in \mathbb{N}$), tales que el ínfimo del conjunto de los diámetros de los F_n es 0, se tiene que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ es diferente de vacío". El espacio $C(D)$ satisface el teorema de Cantor pues la función cotinua $f = 0$ pertenece a cualquier conjunto cerrado $\{f \in C(D); sup|f(z)|_{z\in K} \leq \epsilon\}$

Teorema 1.10. El sub-espacio $O(D)$ de $C(D)$, y entonces el subespacio vectorial povisto de la topología inducida por τ, es cerrado en $C(D)$, entonces completo, en particular, $O(D)$ es un espacio de Fréchet.

Demostración. De la teoría de análisis funcional se sabe que, para un conjunto compacto cualquiera $K \subset D$, la convergencia en $C(K)$ con la norma $\|u\| = sup_{z\in K}|u(z)|$ equivale a la convergencia uniforme en $C(K)$ con la distancia usual de funciones, de esto y dada la inclusión de K en D, se deduce la equivalencia de la convergencia, en $C(D)$, considerando la norma $||\cdot||$, con la convergencia uniforme considerando la distancia usual de funciones. Por otra parte, dado que si $u \in O(D)$ entonces $u \in C(D)$ podemos utilizar lo anteriormente expresado, como sigue.

En el primer capítulo se probó que toda sucesión uniformemente convergente de funciones de $O(D)$ converge a una función en $O(D)$, de manera que $O(D) \subset C(D)$ contiene a todos sus puntos de acumulación y en consecuencia es cerrado en la topología τ. Además, de la teoría de la Topología se sabe que si (X,d) es un espacio métrico completo y $Y \subset X$, con Y diferente de vacío, entonces (Y,d) es completo si y solamente si Y es cerrado en X, entonces $O(D)$ es completo.

Proposición 1.4. Si $A \subset O(D)$ es compacto, entonces A es cerrado y acotado.

Demostración. $O(D)$ es separado, porque es metrizable, entonces el compacto A es cerrado. Para K compacto de D, veamos que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi_k : O(D) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \sup_{z\in K} |f(z)| \end{array}$$

es continua: consideremos al conjunto (a,b) abierto en $\mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_k^{-1}((a,b)) & = & \{f \in O(D); a < \varphi_k(f) < b\} \\ & = & \{f \in O(D); a < \sup_{z\in K} |f(z)| < b\} \\ & = & \{f \in O(D); \sup_{z\in K} |f(z)| < b\} - \{f \in O(D); \sup_{z\in K} |f(z)| \leq a\} \\ & = & \{f \in O(D); \sup_{z\in K} |f(z)| < b\} \cap \{f \in O(D); \sup_{z\in K} |f(z)| \leq a\}^c \end{array}$$

Como la intersección de dos conjuntos abiertos es un abierto, entonces $\varphi_k^{-1}((a,b))$ es un abierto en $O(D)$, de manera que φ_k es continua.

Luego, si A es un compacto de $O(D)$, entonces $\varphi_k(A)$ es compacto, entonces es acotado en $\mathbb{R}$: así las funciones $f \in A$ son uniformemente acotadas en K, entonces para todo compacto K de D, existe ϵ_A tal que $A \subset V(K, \epsilon_A)$, y entonces para todo elemento $V(K, \epsilon)$ del sistema fundamental de entornos considerado, existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que $A \subset V(K, \lambda\epsilon) = \lambda V(K, \epsilon)$, esto significa, por definición, que A está acotado; esto equivale al hecho de que A está contenido en una bola $B(0, r)$ para la distancia d en $O(D)$.

Teorema 1.11. Todo conjunto cerrado y acotado de $O(D)$ es compacto.

En la demostración de este teorema utilizaremos el siguiente resultado elemental de topología en espacios métricos:

Lema 1.1. Si un espacio métrico X posee la propiedad siguiente: toda sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X posee una subsucesión (u_{n_j}) que converge, entonces X es compacto.

Demostración del teorema (1.11)**.** Sea A un conjunto cerrado y acotado de $O(D)$; de acuerdo con la demostración de la proposición (1.4), el que A esté acotado significa: para todo compacto K de D, las funcioones f en A son uniformemente acotadas en K.

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A; ella está uniformemente acotada en todo compacto de D, entonces, de acuerdo con el teorema de Stieljes -Vitali-Montel existe una subsucesión (u_{n_j}) uniformemente convergente, en todo compacto de D, a un limite $u \in O(D)$; A es cerrado, $u \in A$; de acuerdo al lema (1.1), A escompacto.

1.4. Series y productos infinitos de un conjunto abierto D de $\mathbb{C}$

Recordemos que una función f que está definida en un conjunto abierto D excepto en un conjunto discreto de puntos S de D, es llamada **función meromorfa en** D. Si z_0 es uno de tales puntos, entonces existe un entero m tal que $(z - z_0)^m f(z)$ es holomorfa en un vecindario de z_0. Entonces f es el cociente de dos funciones holomorfas en el vecindario de z_0.

1.4.1. Convergencia de una serie de funciones meromorfas

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones meromorfas en el conjunto abierto D de $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. Diremos que la serie $\sum f_n$ **converge uniformemente** (resp. normalmente) sobre un subconjunto A de D, si existe un subconjunto finito J de $\mathbb{N}$ tal que.

1. Para todo $n \in \mathbb{N} \setminus J$, f_n no tiene polos en A.
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus J} f_n$ es uniformemente (resp. normalmente) convergente en A. La convergencia normal implica la convergencia uniforme.

Observación 1.1. De ahora en adelante trabajaremos con series de funciones meromorfas que convergen uniformemente (resp. normalmente) en todo compacto $K \subset D$.

Para todo abierto $U \subset D$, existe un natural $n_0 = n_0(U)$, tal que para $n > n_0$, f_n no tiene polos en $\overline{U}$, de modo que son holomorfas en U, entonces

$$f = \sum_{n\leq n_0} f_n + \sum_{n>n_0} f_n \tag{1.1}$$

la suma finita de funciones meromorfas $\displaystyle\sum_{n\leq n_0} f_n$ es meromorfa y $\displaystyle\sum_{n>n_0} f_n$ es uniformemente (resp. normalmente) convergente sobre todo compacto de U; además $\overline{U}$ es compacto, por ser cerrado y acotado, entonces por el teorema (1.6), $\sum\limits_{n>n_0} f_n$ es holomorfa en U.

Entonces f es una función meromorfa en U independientemente de la elección de n_0.

Teorema 1.12. Sea $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ una serie de funciones meromorfas en D; si ella converge uniformemente (resp. normalmente) en todo compacto de D, su suma f es meromorfa en D. La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f'_n$ converge uniformemente (resp. normalmente) en todo compacto de D y su suma es la función f'.
Demostración. De acuerdo con la observación (1.1), f es meromorfa en todo conjunto compacto de D y entonces en el interior de todo abierto relativamente compacto de D, entonces lo es en un entorno de todo punto de D, y entonces es meromorfa en D.
Sea U un abierto relativamente compacto de D; sea $n_0 = n_0(U)$, entonces en la expresión (1.1) de f, la serie $\sum_{n>n_0} f_n$ es uniformemente (resp. normalmente) convergente en todo compacto de U; de acuerdo al teorema (1.6) $\sum_{n>n_0} f'_n$ converge uniformemente (resp. normalmente) en todo compacto de U, entonces por la definición (1.1), $\sum f'_n$ converge uniformemente (resp. normalmente) en todo compacto de U. Todo compacto de D está contenido en un abierto $U \subset D$, de manera que la convergencia ocurre en todo compacto de D.

Observación 1.2. EL resultado obtenido anteriormente es válido para la suma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ de dos series de funciones meromorfas $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^-} h_n$ o en otros términos $g_0 = f_0$; $g_n = f_n$, $h_n = f_{-n}$ para $n \in \mathbb{N}^-$, las series $\sum g_n$ y $\sum h_n$ convergen normalmente en todo compacto de D.

1.4.2. Ejemplo

Ejemplo 1.1. La serie
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (z-n)^{-2} \tag{1.2}$$

Lema 1.2. La serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (z-n)^{-2}$ converge en todo compacto de $\mathbb{C}$

Demostración. Sea $x = Rez$; al ser cerrado y acotado todo compacto K esta contenido en una banda $\beta(x_0, x_1) : x_0 \leq x \leq x_1$ de $\mathbb{C}$; el intervalo $[x_0, x_1]$ contiene un número finito de enteros; sea $z \in \beta(x_0, x_1)$, para $n < x_0$, $|(z-n)^{-2}|$ está acotado por $(x_0 - n)^{-2}$; para $n > x_1$, $|(z-n)^{-2}|$ está acotado por $(x_1 - n)^{-2}$. Consideremos la serie
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus[x_0,x_1]} (z-n)^{-2} \tag{1.3}$$
de funciones holomorfas en $\beta(x_0, x_1) : x_0 \leq x \leq x_1$; segun la observación (1.2) la convergencia de esta serie se puede obtener de la convergencia de las series $\sum_{n>x_1} (x_1 - n)^{-2}$ y $\sum_{n<x_0} (x_1 - n)^{-2}$, cada una de las cuales es la "serie p" con $p = 2 > 1$, entonces ellas convergen y en consecuencia $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus[x_0,x_1]} (z-n)^{-2}$ converge normalmente en $\beta(x_0, x_1)$. Los términos de (1.2) omitidos en (1.3) son meromorfos con un número finito de polos en $\beta(x_0, x_1)$, entonces la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (z-n)^{-2}$ de funciones meromorfas converge normalmente en $\beta(x_0, x_1)$ y particularmente en K.

Resultado 1. Propiedades de $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (z-n)^{-2}$

1. De acuerdo con el teorema (1.12), la suma $f(z)$ es meromorfa en $\mathbb{C}$; además tiene periodo 1: $f(z+1) = f(z)$
2. Los polos son los enteros, son dobles y tienen residuo nulo, en un vecindario de $n \in \mathbb{Z}$, $f(z)$ es igual a $(z-n)^{-2}$ más la adición de una función holomorfa.
3. Sea $y = Imz$, entonces, cuando $y \to \infty$, $f(z)$ tiende a 0 uniformemente. A causa de la periodicidad de f, es suficiente verificar está tercera propiedad en una banda $\beta(x_0, x_1)$ de anchura superior a 1. En

$\beta(x_0, x_1)$ consideremos a $z = x + iy$, entonces, para un término cualquiera $(z-n)^{-1}$ de la serie $f(z)$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(z-n)^2} &= \frac{1}{[(x-n)+iy]^2} \\
&= \frac{[(x-n)-iy]^2}{[(x-n)+iy]^2[(x-n)-iy]^2} \\
&= \frac{(x-n)^2+y^2-i2(x-n)y}{|(x-n)+iy|^4}
\end{aligned}
$$

en la última expresión, para $x_0 < x < x_1$ y n fijo, cuando y tiende a ∞, el módulo del denominador crece mucho más rapido que el del numerador, de manera que $|(z-n)^{-2}|$ tiende uniformemente a 0 y en general $f(z) = \sum_{z\in\mathbb{Z}}(z-n)^{-2}$ tiende uniformemente a 0.

Proposición 1.5. Se tiene que

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(z-n)^{-2} = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2$$

La demostración de la proposición anterior se presentará después de enunciar y demostrar el siguiente lema.

Lema 1.3. $g(z) = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2$ posee las tres propiedades mencionadas en el resultado (1)
Demostración.

1. Evidentemente g es meromorfa y periódica de periodo 1.

2. Debido a la periodicidad es suficiente estudiar al polo $z = 0$; $\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2 \sim \frac{1}{z^2}$ en un vecindario de 0.

3. Utilizando la igualdad $\operatorname{sen}\pi z = \frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}$ y desarrollando se obtiene que $|\operatorname{sen}\pi z|^2 = \operatorname{sen}^2\pi x + \operatorname{senh}^2\pi y$, entonces, cuando y tiende a ∞, $g(z)$ tiende uniformemente a 0.

Ahora veamos la demostración de la proposición (1.5)
Demostración. Consideremos $h = f - g$; al expresar a f y a g como serie de potencias se observa que h es una función entera; por otra parte veamos que h está acotada: es suficiente la verificación en una banda $\beta(x_0, x_1)$ de anchura 1; sea $y_0 > 0$ para $|y| < y_0$ tenemos que h es una función continua en un conjunto compacto, entonces h está acotada; por otra parte $h(z)$ tiende uniformemente a 0 cuando $|y| \to \infty$ de manera que h también está acotada para $|y| > y_0$, , así, por el teorema de Liouville que dice que toda función entera y acotada es constante, se tiene que h es constante. Además, como $h(z)$ tiende a 0 cuando $|y| \to \infty$, entonces $h = 0$ y $f = g$.

1.4.3. Aplicación

$k(z) = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(z-n)^{-2}$ es holomorfa en un entorno de 0; $k(0) = 2\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^{-2}$; por otra parte, en un vecindario de 0,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2 &= \pi^2(sen\pi z)^{-2}\\
&= \pi^2\left(\pi z-\frac{(\pi z)^3}{3!}+\frac{(\pi z)^5}{5!}-\cdots\right)^{-2}\\
&= \frac{\pi^2}{(\pi z)^2}\left[\left(1-\frac{(\pi z)^2}{3!}+\frac{(\pi z)^4}{5!}-\cdots\right)^{-1}\right]^2\\
&= \frac{\pi^2}{(\pi z)^2}\left(1+\frac{\pi^2 z^2}{6}+\cdots\right)^2
\end{aligned}
$$

la última igualdad se obtiene con la serie binomial de Newton. Entonces, en un vecindario de 0

$$\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2-\frac{1}{z^2}=\frac{\pi^2}{\pi^2 z^2}\left(1+\frac{\pi^2 z^2}{6}+\cdots\right)^2-\frac{1}{z^2}\sim\frac{\pi^2}{3}$$

cuando $|z|$ es infinitamente pequeño, entonces

$$k(0)=\frac{\pi^2}{3};\ \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-2}=\frac{\pi^2}{6}$$

1.4.4. Teorema de Mittag-Leffler en $\mathbb{C}$

Se sabe que para una función meromorfa f no nula en un abierto conexo U de $\mathbb{C}$; los polos de f estan aislados, además, en cualquier vecindario de todo punto $z_0 \in U$, existe un desarrollo de Laurent para f

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k=\sum_{k=p}^{1} a_k(z-z_0)^{-k}+g(z-z_0)$$

donde g es una serie de potencias en el vecindario de z_0, entonces una función holomorfa.

El polinomio en $(z-z_0)^{-1}$ sin término constante

$$p=\sum_{k=p}^{1} a_{-k}(z-z_0)^{-k} \tag{1.4}$$

es llamado **la parte principal de f en z_0**; todo polinomio de la forma (1.4) será llamado **parte principal de una función meromorfa, de polo z_0** .

Sea Z un conjunto numerable de puntos en $\mathbb{C}$; los elementos de Z se pueden ordenar en una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sea creciente; además si Z es el conjunto de polos de una función $f \in M(\mathbb{C})$, entonces $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ningún valor de adherencia en $\mathbb{C}$, porque uno de tales valores correspondería a un polo no aislado de f, entonces si Z es infinito, $|z_n| \to \infty$ cuando n tiende a ∞.

TEOREMA 1.13. Teorema de Mittag-Leffler
Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que la sucesión $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sea creciente. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de partes principales de los polos z_n. Existe una infinidad de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, que tienen por polos a los z_n, y para todo $n \in \mathbb{N}$, tienen como la parte principal a P_n.

Demostración.
Si $z_n \neq 0$, $h_n(z)=P_n((z-z_n)^{-1})$ es holomorfa en $B(0,|z_n|)$ y además es la suma de una serie entera uniformemente convergente en el disco $B\left(0,\frac{1}{2}|z_n|\right)$; existe un polinomio $Q_n(z)$ obtenido a partir del desarrollo

de Taylor de h_n en 0 tal que $|h_n(z) - Q_n(z)| \leq 2^{-n}$ en $B\left(0, \frac{1}{2}|z_n|\right)$. Si $z_0 = 0$ se tiene $Q_0 = 0$. Entonces la serie de funciones meromorfas $\sum(P_n((z-z_n)^{-1}) - Q_n(z))$ converge uniformemente en todo compacto de $\mathbb{C}$; por el teorema (1.12) su suma es una función meromorfa f, satisfaciendo la conclusión del enunciado. En general la función f tiene la forma

$$f(z) = g(z) + \sum_{n\in\mathbb{N}}(P_n((z-z_n)^{-1}) - Q_n(z))$$

donde g es una función entera, de modo que dos funciones meromorfas que satisfacen la conclusión difieren en una función entera.

1.4.5. Productos infinitos de funciones holomorfas

Definición 1.2. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en D, y A un subconjunto de D. Se dice que el producto infinito $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ converge normalmente en A si.

1. La sucesión $f_n(z)$ converge a 1, uniformemente en A; lo cual implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $|f_n - 1| < 1$ en A; entonces $\log f_n$ está definida en A.
2. La serie $\sum_{n\geq n_0} \log f_n$ converge normalmente en A.

Proposición 1.6. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en el conjunto abierto D de $\mathbb{C}$, A un subconjunto de D y $f_n = 1 + u_n$, entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:

1. $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalmente en A.
2. La serie $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge normalmente en A.

Demostración.
Primera implicación: supongamos que $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalmente en A. Para n suficientemente grande $\log f_n$ es infinitesimalmente equivalente a u_n, es decir $\log f_n \approx u_n$, ya que utilizando el desarollo de Taylor para $\log f_n$ se ve que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log f_n}{f_n - 1} = 1$. Como por hipotesis $\sum_{n\geq n_0} \log f_n$ converge normalmente en A, entonces $\sum_{n\geq n_0} u_n$ también converge normalmente en A y como consecuencia $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge normalmente en A.
Segunda implicación: supongamos que la serie $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge normalmente en A. De la hipotesis se deduce que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalmente y uniformemente en A, de modo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n| < 1$ para $n \geq n_0$, entonces $|f_n - 1| < 1$ para $n \geq n_0$, y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 1 en A. Por un argumento análogo al utilizado en la primera implicación se tiene que $\sum_{n\geq n_0} \log f_n$ converge normalmente en A y entoces, por definición de convergencia normal de un producto de funciones se concluye que $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalmente en A

Resultado 2. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en el conjunto abierto D de $\mathbb{C}$ y $f_n = 1+u_n$, si $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalmente en todo compacto K de D, entonces la sucesión $(\prod_{n\leq p} f_n)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en todo compacto de D a una función f continua en D.

Demostración. Por la definición de convergencia normal del producto de funciones continuas, para todo abierto $U \subset D$ relativamente compacto, existe un número entero $n_0 = n_0(U)$ tal que, para $n > n_0$, $|f_n - 1| < 1$ en $\overline{U}$; consideremos $g = \prod_{n\leq n_0} f_n$ y $h_p = \prod_{n_0<n\leq p} f_n$

$$\prod_{n\leq p} f_n = g \cdot h_p \quad \text{y} \quad \log h_p = \sum_{n_0<n\leq p} \log f_n$$

Por la definición de convergencia del producto y dado que una serie convergente de funciones continuas converge a una función continua, la serie $\sum_{n_0<n} \log f_n$ converge uniformemente en todo compacto de U a una función l continua en U, entonces $(\prod_{n\leq p} f_n)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en todo compacto a la función $g \cdot \exp l$, que es continua en U.

En el siguiente resultado veremos como se comporta un producto infinito de funciones holomorfas que converge normalmente; la notación $Z(f)$ representará al conjunto de ceros de la función f.

Teorema 1.14. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en el conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ tal que el producto infinito $\prod_n f_n$ converge normalmente en todo compacto de D, entonces $f = \prod_n f_n$ es holomorfa en D. Además, $Z(f) = \cup_{n\in\mathbb{N}} Z(f_n)$ y si para $g \in O(D)$, $m_z(g)$ designa el orden de multiplicidad del cero z de g, se tiene $m_z(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_z(f_n)$

Demostración. $\prod_{n\leq p} f_n$ es holomorfa para todo $p \in \mathbb{N}$; de acuerdo con el resultado (2), f es el limite uniforme de $(\prod_{n\leq p} f_n)_{p\in\mathbb{N}}$ en todo compacto de D, como cualquier sucesión de funciones holomorfas normalmente convergente, converge a una función holomorfa, se tiene que f es holomorfa en el interior de cada conjunto compacto de D y entonces en D.

Para todo abierto relativamente compacto $U \subset D$, el conjunto de ceros $Z(f_n|U)$ es vacío cuando $n \geq n_0(U)$, de donde se tiene la última afirmación.

Teorema 1.15. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en el conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ tal que el producto infinito $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalmente en todo compacto de D, entonces la serie de funciones meromorfas $\sum_{n\in\mathbb{N}}(f'_n/f_n)$ converge normalmente en todo compacto de D y su límite es f'/f

Demostración. En todo abierto U relativamente compacto de D, según la notación empleada en la demostración del resultado (2): $f = g \cdot \prod_{n>n_0} f_n$; $|f_n - 1| < 1$ en $\overline{U}$ para $n > n_0$. Entonces

$$f' = g' \prod_n f_n + g \left[f'_{n_0+1} \prod_{n\neq n_0+1} f_n + f'_{n_0+2} \prod_{n\neq n_0+2} f_n + f'_{n_0+3} \prod_{n\neq n_0+3} f_n + \cdots \right]$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{g' \prod_n f_n + g \left[f'_{n_0+1} \prod_{n\neq n_0+1} f_n + f'_{n_0+2} \prod_{n\neq n_0+2} f_n + f'_{n_0+3} \prod_{n\neq n_0+3} f_n + \cdots \right]}{g \prod_n f_n} \\ &= \frac{g'}{g} + \left[\frac{f'_{n_0+1}}{f_{n_0+1}} + \frac{f'_{n_0+2}}{f_{n_0+2}} + \frac{f'_{n_0+3}}{f_{n_0+3}} + \cdots \right] \\ &= \frac{g'}{g} + \sum_{n>n_0} \frac{f'_n}{f_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f'_n}{f_n} \end{aligned}$$

Además $\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} + \sum_{n>n_0} (\log f_n)' = \sum_{n\leq n_0} (\log f_n)' + \sum_{n>n_0} (\log f_n)'$; por la definición de convergencia normal la serie del miembro derecho converge normalmente en todo compacto de U ,esto de acuerdo con el teorema (1.6)

1.4.6. Ejemplo de producto infinito

Ejemplo 1.2. La expresión $\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z}$ es igual a un producto infinito.

Proposición 1.7.

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z}$$

Demostración. La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\frac{z^2}{n^2})$ puede expresarse como $z^2\sum_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{n^2})$, es decir, como el producto de una constante con una serie de Riemann de exponente 2, entonces ella es normalmente convergente en todo subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. De acuerdo con la proposición (1.6), el producto infinito $f(z) = z\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-\frac{z^2}{n^2})$ converge normalmente en todo compacto de $\mathbb{C}$. Entonces, de acuerdo con el teorema (1.14) f es holomorfa en $\mathbb{C}$; sus ceros son los enteros.

Como $f(z) = z\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$, entonces

$$f'(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) - 2z^2\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2}\prod_{n\in\mathbb{N}-\{r\}}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\right]$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) - 2z^2\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2}\prod_{n\in\mathbb{N}-\{r\}}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\right]}{z\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} \\
&= \frac{1}{z} - 2z\left[\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1/n^2}{(n^2-z^2)/n^2}\right] \\
&= z^{-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} 2z(z^2-n^2)^{-1}
\end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema (1.15), $f'(z)/f(z)$ es una serie normalmente convergente en todo compacto de $\mathbb{C}$. Para completar la demostración actual es necesario enunciar y demostrar el siguiente lema.

Lema 1.4. El limite $F(z)$ de la serie $z^{-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} 2z(z^2-n^2)^{-1}$ es $\frac{\pi}{\tan \pi z}$

Demostración.

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}\frac{z}{n(z-n)}
\end{aligned}$$

Ya se probó que la serie $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}\frac{z}{n(z-n)}$ converge normalmente en todo compacto de $\mathbb{C}$; de acuerdo con el teorema (1.12), su suma es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y es la misma de $F(z)$. Además, de acuerdo con la proposición (1.5)

$$F'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}(z-n)^{-2} = -\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2$$

pero

$$\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2 = \frac{d}{dz}\left(\frac{\pi}{\tan \pi z}\right)$$

entonces $F(z) = \frac{\pi}{\tan \pi z}$.

Ahora podemos finalizar la demostración de la proposición (1.7). De acuerdo al lema anterior

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi\frac{\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}$$

entonces $f(z) = c\operatorname{sen}\pi z$ donde $c \in \mathbb{C}$. Como $f(z)$ converge en todo compacto de $\mathbb{C}$ y $f(z) = z\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$, entonces cuando $z \to 0$, $\frac{f(z)}{z}$ tiende a 1 y $\operatorname{sen}\pi z$ tiende a π, de donde $c = \frac{1}{\pi}$, así

$$\frac{f(z)}{z} = \prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z}$$

1.4.7. La función Γ

A continuación definiremos una función meromorfa $\Gamma(z)$ tal que, para $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\begin{aligned} g_n(z) &= z(1+z)(1+\frac{1}{2}z)\cdots(1+\frac{1}{n}z)\frac{1}{n^z} \\ &= \frac{1}{n!}z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)n^{-z} \end{aligned}$$

Para $n \geq 2$, sea:

$$f_n(z) = \frac{g_n(z)}{g_{n-1}(z)} = \left(1+\frac{z}{n}\right)\frac{1}{n^z}(n-1)^z = \left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^z$$

Para $1 \leq r < n$ y $|z| \leq r$, tiene sentido definir $\log f_n(z)$ y

$$\log f_n(z) = \log\left(1+\frac{z}{n}\right) + z\log\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Utilizando el desarrollo de taylor para la función $\log\left(1+\frac{z}{n}\right)$, obtenemos $|\log f_n(z)| \leq 2\dfrac{r^2}{n^2}$. Entonces la serie $\sum_{n\geq 2}\log f_n$ converge normalmente en todo compacto de $B(0,r)$; entonces el producto infinito $g_1\prod_{n\geq 2}\frac{g_n}{g_{n-1}}$ converge normamente en todo compacto de $\mathbb{C}$. Su valor es la función holomorfa g, límite uniforme sobre todo compacto de las funciones $g_n = g_1 f_2\cdots f_n$, g tiene por ceros a los enteros negativos con multiplicidad 1.

Para z no negativo,

$$\begin{aligned} \frac{g(z)}{g(z+1)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{g_n(z)}{g_n(z+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{z}{z+1+n}\cdot\frac{n^{z+1}}{n^z} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{nz}{z+1+n} \\ &= z \end{aligned}$$

Entonces $\dfrac{g(z)}{g(z+1)} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, además $g(1) = \lim_{n\to\infty} g_n(1) = 1$

la función meromorfa $\frac{1}{g(z)}$ es denotada con $\Gamma(z)$; ella admite por polos solo a enteros negativos con multiplicidad 1 y satisface:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

y

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Teorema 1.16. Formula de complementos

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$$

Demostración. De acuerdo a lo visto anteriormente $g_n(z) = \frac{1}{n!} z(z+1)(z+2) \cdots (z+n) n^{-z}$, así

$$g_n(1-z) = (1-z)(1-\frac{1}{2}z) \cdots (1-\frac{1}{n}z)(n+1-z)n^{-1+z}$$

también sabemos que $g_n(z) = z(1+z)(1+\frac{1}{2}z) \cdots (1+\frac{1}{n}z)\frac{1}{n^z}$, utilizando está expresión de $g_n(z)$ se obtiene

$$g_n(z) \cdot g_n(1-z) = \frac{1}{n} z(n+1-z) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

de donde, por la proposición (1.7)

$$g(z) \cdot g(1-z) = \lim_{n \to \infty} g_n(z) \cdot g_n(1-z) = z \cdot \prod_{k \in \mathbb{N} - \{0\}} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi}$$

1.4.8. Teorema de Weierstrass en $\mathbb{C}$

Sea Z un conjunto discreto de puntos de $\mathbb{C}$; consideremos una sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de los elementos de Z tal que $|(z_n)|_{n \in \mathbb{N}}$ sea creciente y que $|z_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Teorema 1.17. Sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{C}$ tal que $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ sea creciente y que $|z_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces existe una infinidad de funciones enteras cuyos ceros son los puntos z_n, la multiplicidad del cero z_n es igual el número de veces que z_n figura en la sucesión.

Demostración. Supongamos que $z_0 \neq 0$. Para $z \in B(0, |z_n|)$, $\log(1 - z_n^{-1} z)$ es holomorfa y su desarrollo de Taylor $-\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}(z_n^{-1} z)^k$ converge uniformemente en $\overline{B}(0, 2^{-1}|z_n|)$. Sea $P_n(z) = \sum_{k=1}^{k_n} k^{-1}(z_n^{-1} z)^k$ tal que $|\log(1 - z_n^{-1} z) + P_n(z)| < 2^{-n}$ en $\overline{B}$. Tomemos $a_n(z) = (1 - z_n^{-1} z) \exp P_n(z)$. Para todo compacto K de $\mathbb{C}$ existe n_0 tal que para $n \geq n_0$, tengamos $K \subset \overline{B}_n$, la serie $\sum_{n \geq n_0} \log a_n$ es normalmente convergente en K, entonces también lo es el producto infinito $\prod_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Entonces por el teorema (1.14), $f = \prod_{n \in \mathbb{N}} a_n$ es una función entera satisfaciendo asi la conclusión.

Si $z_0 = 0$ aparece k veces en la sucesión, es suficiente construir la función $z^k f$. Cualquier otra de las infinitas funciones de la conclusión es de la forma fh, donde h es una función entera sin ceros.

2. Aplicaciones holomorfas, transformaciones conformes

2.1. Aplicación holomorfa en un vecindario de un punto regular

Sea f una aplicación diferenciable de un abierto U de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{C}$. Sea z_0 un punto de U y $\gamma_j : I = [0,1] \to \mathbb{C}$ con $j = 1,2$ dos arcos diferenciables de origen z_0; sea $\delta_j = f \circ \gamma_j$ con $j = 1,2$ dos arcos diferenciables de origen $w_0 = f(z_0)$. Designaremos por $\gamma_j'(0)$ a la derivada de γ_j en 0 las cuales supondremos no nulas para $j = 1,2$; $\gamma_j'(0) \in \mathbb{R}^2$

Por la regla de la cadena $\delta_j'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0)$. Identificando a $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, entonces $\gamma_j'(0) \in \mathbb{C}$ y

$$Arg\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \quad \left(\text{resp. } \; Arg\frac{\delta_2'(0)}{\delta_1'(0)} \right)$$

es el ángulo orientado entre γ_1 y γ_2 en z_0 (resp. el ángulo entre δ_1 y δ_2 en w_0). Una aplicación diferenciable f de un vecindario de z_0 en $\mathbb{C}$ en un vecindario de w_0 en $\mathbb{C}$ tal qe $f(z_0) = w_0$ y, que posee la propiedad siguiente: para dos arcos diferenciables γ_1 y γ_2, de origen z_0 que se transforman mediante f en dos arcos δ_1 y δ_2 de origen w_0

$$Arg\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = Arg\frac{\delta_2'(0)}{\delta_1'(0)}$$

es llamada una **transformación conforme** en z_0, entonces diremos que f es conforme en z_0 si conserva los ángulos en z_0. Si f es conforme en todo punto de un abierto U de $\mathbb{C}$ diremos que f es conforme en U.

Diremos que una transformación conforme f es **directa** si conserva la orientación de los ángulos y diremos que es indirecta si la invierte.

Proposición 2.1. Toda función f holomorfa en un vecindario de z_0 en $\mathbb{C}$ tal que $f'(z_0) \neq 0$ es una transformación conforme directa en z_0.

Demostración. Por la regla de la cadena $\delta_j'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} &= \frac{f'(z_0)\delta_2'(0)}{f'(z_0)\delta_1'(0)} \\ &= \frac{\delta_2'(0)}{\delta_1'(0)}\end{aligned}$$

Proposición 2.2. Toda aplicación lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que conserva los ángulos es bien de la forma $f(z) = cz$ o $f(z) = c\overline{z}$ con $c \in \mathbb{C}$ constante.

Demostración. Sea T una transformación lineal que cumple las condiciones dadas y sea $c = re^{i\omega} = T(1)$. Consideremos a la aplicación lineal S tal que

$$z \mapsto r^{-1}e^{-i\omega}z = c^{-1}z$$

tenemos que $(S \circ T)(1) = 1$. La composición $S \circ T$ conserva los ángulos pues S y T lo hacen, de manera que la imagen de i mediante $S \circ T$ es ia, con $a \in \mathbb{R}$, esto debido a que el ángulo en posición estandar con rayos sobre los semiejes positivos se conserva o se refleja respecto del eje real. El punto $1 + i$ se transforma en $1 + ia$, se tiene que $Arg(1 + ia) = \pm Arg(1 + i)$ entonces $a = \pm 1$. Luego:

- Si $a = 1$, $S \circ T$ es la identidad, entonces $T = S^{-1}$ y $T(z) = cz$
- Si $a = -1$ $S \circ T$ se define por: $z \mapsto \overline{z}$, y entonces $T(z) = c\overline{z}$

A continuación enunciamos dos teoremas que utilizaremos luego en la demostración de una proposición

Teorema 2.1. Sea $f(T) = a_1T + a_2T^2 + \cdots$ una serie de potencias con $a_1 \neq 0$. Entonces existe una única serie de potencias $g(T)$ tal que $f(g(T)) = T$. Esta serie de potencias también satisface $g(f(T)) = T$.

Teorema 2.2. Si $f(z) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_nz^n$ y $h(z) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} b_nz^n$ son series de potencias convergentes, y supongamos que el termino constante de $h(z)$ es 0. Supongamos también que $f(z)$ es absolutamente convergente para $|z| \leq r$, con $r > 0$, y que $s > 0$ es un número tal que $\sum_{n\leq 1} |b_n|s^n \leq r$.

Si $g = f(h)$ es la serie de potencias obtenida mediante la composición,

$$h(z) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k\geq 1}^{\infty} b_kT^k \right)^n$$

Entonces g converge absolutamente para $|z| \leq s$, y para z, $g(z) = f(h(z))$.

Las demostraciones de los dos teoremas anteriores se encuentran en el capitulo 2 de la cuarta edición del libro "Complex Analysis", de Serge Leang.

Proposición 2.3. Sea $f(z)$ una función holomorfa en un vecindario de z_0 en $\mathbb{C}$, tal que $f'(z_0) \neq 0$, entonces, para un vecindario de $w_0 = f(z_0)$, existe una aplicación holomorfa $g(w)$ reciproca de f y $g'(w) = f'(z)^{-1}$.

Demostración. Haciendo uso de traslaciones podemos suponer, sin perder generalidad, que $z_0 = 0$ y entonces $f(0) = 0$; de modo que f sea analítica en un entorno de 0. Lo anterior significa que f tiene una serie de potencias convergente alrededor de 0, entonces podemos ver a f como definida en el disco de convergencia D de dicha serie, es decir $f : D \to \mathbb{C}$.

Como f es analítica, el teorema (2.1) garantiza la existencia de una serie de potencias g (única) tal que $f(g(T)) = T$ y $g(f(T)) = T$. Sea V_0 un disco centrado en 0 tal que $g(V_0) \subset D$. Tal entorno de 0 existe simplemente porque g es continua. Sea $U_0 = f^{-1}(V_0)$ el conjunto de todos los $z \in D$ tales que $f(z) \subset V_0$. Sea

$$f_0 : U_0 \to V_0$$

la restricción de f a U_0. Veremos que f_0 es un isomorfismo analítico. Notemos que $g(V_0) \subset U_0$ debido a que, por el teorema (2.2), para $w \in V_0$ tenemos $f(g(w)) = w$, entonces podemos considerar la restricción g_0 de g a V_0 como el mapeo

$$g_0 : V_0 \to U_0$$

Nuevamente por el teorema (2.2), para $z \in U_0$ tenemos $g_0(f_0(z)) = z$, lo cual prueba que f_0 y g_0 son funciones inversas la una de la otra, concluyendo así la demostración del teorema.

DEFINICIÓN 2.1. Si f es una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$, todo punto $z \in U$ tal que $f'(z_0) \neq 0$ ea llamado un **punto regular** de f.

RESULTADO 3. Sea $f(z)$ una función holomorfa en un vecindario de z_0 en $\mathbb{C}$, tal que $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es un isomorfismo analítico local (también llamada aplicación biholomorfa)

Demostración. Por definición, f es un isomorfismo analítico local en el punto z_0 si existe un abierto U conteniendo a z_0 tal que f es un isomorfismo analítico sobre U, entonce la conclusión se obtiene de la proposición (2.3).

2.2. Aplicación holomorfa $w = f(z)$ en un vecindario de z_0 tal que $f'(z_0) = 0$

2.2.1. Caso particular

$f(z) = z^p \quad p \in \mathbb{N}, p \geq 2$, entonces $f'(0) = 0$. Sea $z = \rho e^{i\theta}$, entonces $w = \rho^p e^{ip\theta}$; los ángulos no se conservan en 0. La aplicación reciproca, en un abierto donde ella está definida es $z = w^{1/p} = e^{1/pLogw}$ para una determinación del logaritmo. De forma precisa, para las determinaciones principales del argumento y del logaritmo, tenemos:

$$-\pi < Argw < \pi$$
$$Logw = Log|w| + iArgw$$

Sea Ω la diferencia del plano complejo con el semieje real negativo; para $w \in \Omega$, se obtienen para z, p funciones distintas

$$z = w^{1/p} = e^{1/p[Log(w)+ik2\pi i]} = e^{1/pLogw}e^{ik2\pi/p} = e^{1/plow|w|}e^{i[Argz+k2\pi/p]}; \quad k = 0, 1, \ldots, p-1$$

Lo anterior se debe a que dos determinaciones continuas del logaritmo sobre un mismo abierto conexo, difieren en un multiplo de $2\pi i$.

2.2.2. Caso general

Por un desplazamiento del origen, el análisis se reduce al caso: $z_0 = 0$; $f(z_0) = f(0) = 0$. Con el desarollo del Taylor de f en 0, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots \\ &= \frac{f^{(p)}(0)x^p}{p!} + \frac{f^{(p+1)}(0)x^{p+1}}{(p+1)!} \cdots \\ &= \frac{f^{(p)}(0)x^p}{p!}\left[1 + \frac{f^{(p+1)}(0)x}{(p+1)} + \cdots\right] \end{aligned}$$

entonces $f = z^p c^p g(z)$ donde g es una función holomorfa en un vecindario de $z = 0$ tal que $g(0) = 1$ y $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$; además $g(z) = 1 + g_1(z)$ con $g_1(0) = 0$. Entonces, para $|z|$ suficientemente pequeño, $Log(1+g_1(z))$ tiene sentido, entonces también lo tiene: $h(z) = ce^{1/pLogg(z)}$; de suerte que $f = z^p h^p(z) = (zh)^p$. Como $[zh(z)]^p$ es holomorfa en un vecindario de 0, entonces también lo es $zh(z)$. Además $[zh(z)]'$ evaluada en 0 es igual a $c \neq 0$, entonces de acuerdo con la proposición (2.3) la aplicación holomorfa $zh(z) : z \to \varsigma$ es invertible en un vecindario de $z = 0$; la aplicación reciproca de $w = \varsigma^p$, para $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ es $\varsigma = w^{1/p}$ con las p determinaciones

$$\varsigma = e^{1/plog|w|}e^{i[Argw+k2\pi/p]}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1$$

La aplicación reciproca de f es composición de $\varsigma = w^{1/p}$ con la aplicación reciproca del isomorfismo local: $zh(z) = \varsigma$.

2.3. Propiedades de las aplicaciones holomorfas

Teorema 2.3. Sea f una función holomorfa no constante, en un abierto conexo D de $\mathbb{C}$. Entonces $f(D)$ es un abierto de $\mathbb{C}$

Demostración. Es suficiente mostrar que la imagen de un abierto D suficientemente pequeño es un abierto de $\mathbb{C}$. Por el resultado (3), en un vecindario de $z_0 \in D$ en el cual $f'(z_0) \neq 0$, f es un isomorfismo analítico local, entonces la inversa de f es continua y en consecuencia $f(D)$ es abierto. Por otra parte, en un vecindario de $z_0 \in D$ en el cual $f'(z_0) = 0$, por la sección (2.2), f es composición del isomorfismo local $zh(z) = \varsigma$ con de la aplicación $w = \varsigma^p$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$; la imagen de un abierto mediante el isomorfismo $zh(z)$ es un abierto y la imagen del disco $|\varsigma| < r$ (conjunto abierto) para r suficientemente pequeño es el disco $|w| < r^p$, que también es un abierto. Finalmente, como f es composición de funciones que llevan conjuntos abiertos en conjuntos abiertos, entonces $f(D)$ es abierto.

Corolario 2.1. Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f \in O(D)$, una aplicación inyectiva de D en $\mathbb{C}$, entonces f es un homeomorfismo de D en $f(D)$ y $f^{-1} \in O(f(D))$.

Demostración. De acuerdo con el teorema (2.3), f es inyectiva, continua y abierta; para todo abierto U de D, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ es un abierto de $\mathbb{C}$, entonces f^{-1} es continua y es un homeomorfismo. Además f es inyectiva, entonces debido a los resultados de las sección (2.2) $f'(z_0) \neq 0$ en todo punto $z_0 \in D$, pues en caso contrario f no sería inyectiva; luego por la proposición (2.3) $(f^{-1})'(f(z_0)) = f'(z_0)^{-1}$, entonces f^{-1} es holomorfa en z_0, entonces lo es en $f(D)$.

Definición 2.2. Sean D y D' dos abiertos de $\mathbb{C}$, un homeomorfismo holomorfo $f : D \to D'$ con inversa también holomorfa es llamado **isomorfismo**.

Corolario 2.2. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : D \to C$ una aplicación holomorfa inyectiva, entonces f es un isomorfismo de D en $f(D)$.

Demostración. Dado que las componentes conexas de D forman una partición de D, vasta con aplicar el corolario (2.1) a cada una de ellas.

Observación. Las definiciones y resultados anteriores son validos si f está definida en un abierto del conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (la esfera de Riemman) y toma valores en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

2.4. Representación conforme

El principal problema de la representación conforme consiste en que, dados dos abiertos conexos D y D' en $\mathbb{P}^1$, pueda encontrarse un isomorfismo de D en D'; para responder a este problema podemos tomar como primer paso el siguiente teorema.

Teorema 2.4. $\mathbb{C}$ y $B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ no son isomorfos pero son homeomorfos.

Demostración. Suponga que existe un isomorfismo $f : \mathbb{C} \to B(0, 1)$, entonces f es una función entera y acotada, entonces, de acuerdo con el terorema de Liouville, es una función constante.

Sea f un isomorfismo dado de D en D' y g un isomorfismo cualquiera, entonces $f^{-1} \circ g = sD \to D$ es un isomorfismo de D en si mismo y entonces un automorfismo. Reciprocamente, para todo automorfismo $S : D \to D$, $g = f \circ s$ es un isomorfismo de D' en D.

los automorfismos de D forman un grupo $\Gamma(D)$ y para todo $s \in \Gamma(D)$,

$$s \to s' = f \circ s \circ f^{-1} : D' \to D'$$

es un automorfismo de D', de donde la siguiente aplicación es un isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(D) & \to & \Gamma(D') \\ s & \mapsto & s' \end{array}$$

Ahora nuestro principal objetivo, es establecer que todo abierto simplemente conexo distinto de $\mathbb{C}$ es isomorfo al disco unitario $B = B(0, 1)$.

2.4.1. Automorfismos de $\mathbb{C}$

Todo automorfismo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera, inyectiva, no constante; f se prolonga en $\mathbb{P}^1$ en una función que tiene a ∞ como punto sigular aislado; sea $\zeta = z^{-1}$, $g(\zeta) = f(\zeta^{-1})$ admite 0 como punto singular aislado.

Si $\zeta = 0$ es un punto singular esencial, la imagen del disco $|\zeta| < 1$ por g es densa en $\mathbb{C}$ (Ver "Analyse Complexe" de P. Dolbeault, Capitulo 2, teorema 4.3.6), además como f es entera la imagen de $|z| < 1$ mediante f es abierta, ello contradice la inyectividad de f. Entonces $\zeta = 0$ es un polo de g y f es un polinomio en z; para que f sea inyectiva, a causa del teorema fundamental de la aritmética, que dice que todo polinomio de grado mayor que 0 tiene al menos una raíz compleja, es necesario y suficiente que el grado de f sea 1, y entonces $f = az + b$ con $a, \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$; lo anterior prueba el siguiente resultado

Teorema 2.5. El grupo de automorfismos de $\mathbb{C}$ es

$$\Gamma(\mathbb{C}) = \{z \to az + b; a \neq 0\}$$

2.4.2. Automorfismos de $\mathbb{P}^1$

Definición 2.3. Una aplicación homografica, también conocida como transformación fraccional lineal o transformación de Möbius, está definida por

$$z \to w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y tales que $ad - bc \neq 0$;

Observemos que si multiplicamos a a, b, c y d por un mismo número complejo λ se tiene

$$\frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{az + b}{cz + d}$$

debido a que λ se cancela en el lado izquierdo de la igualdad, de manera que una misma aplicación homografica puede representarse de diferetes maneras, de hecho puede representarse de infinitas maneras.

Ahora veamos que las aplicaciones homograficas son conformes. Derivando tenemos

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

la función f no está definida en $z = -d/c$, pero si lo está en cualquier otro punto del plano complejo, y la formula para su derivada muestra que $f' \neq 0$ en todo $z \neq -d/c$. Entonces, por la proposición (2.1), f es conforme en $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$.

Las homografías tienen inversa: a partir de

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

podemos resolver directamente para z en terminos de w, de modo que f tiene por aplicación inversa a

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

que es de la misma naturaleza que f. Las homografías son isomorfismos analíticos de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^1$ y constituyen, entonces, un grupo G de automorfismos de $\mathbb{P}^1$.
Por otra parte observemos que si $c \neq 0$,

$$\begin{aligned} w = \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{a}{c}\left(\frac{z+b/a}{z+d/c}\right) \\ &= \frac{a}{c}\left(\frac{z+d/c+(b/a-d/c)}{z+d/c}\right) \\ &= \frac{a}{c}\left(\frac{z+d/c}{z+d/c}+\frac{b/a-d/c}{z+d/c}\right) \\ &= \frac{a}{c}\left(1+\frac{b/a-d/c}{z+d/c}\right) \\ &= \frac{a}{c}\left(1+\frac{bc-ad}{ac(z+d/c)}\right) \end{aligned}$$

de manera que la homografía es composición de las aplicaciones $w_1 = z + d/c$ (traslación); $w_2 = ac(w_1)$ (homotopía -rotación y homotecia-); $w_3 = 1/w_2$ (inversión); $w_4 = (bc - ad)w_3$ (homotopía); $w_5 = w_4 + 1$ (traslación) y $w_6 = w_5 a/c$ (homotopía)

Si $c = 0$, se trata de una homotopia seguida de una traslación.

Resultado 4. Por lo anterior es claro que las homografías son composiciones de rotaciones, traslaciones, inversiones y homotecias; entonces las homografías transforman a las rectas en rectas o circunferencias y a las circunferencias en rectas o circunferencias.

En el estudio de las transformacines conformes tiene particular interes la existencia de transformaciones que lleven algunas regiones “sencillas” de $\mathbb{C}$ (como semiplanos o cuadrantes), en el disco unitario, ya que mediante la composición de ellas con otras transformaciones conformes podemos establecer un isomorfismo entre regiones “complicadas” y el disco unitario. Consideremos por ejemplo a una homografía que convierta al eje real en el disco unitario, (o viceversa). Por el resultado (4) tenemos seguridad de que una de dicha transformaciones está completamente determinada por su comportamiento en tres puntos. Sea

$$z = f(w) = \frac{aw+b}{cw+d}$$

tal que $1, -1$ e $-i$ tengan por imagenes a $\infty, 0$ y 1 respectivamente. Para que $f(1) = \infty$ y $f(-1) = 0$, f debe tener como factores a $w + 1$ y $(w-1)^{-1}$ y para que $f(-i) = 1$, f debe tener a los factores constantes $-i-1$ y $(-i+1)^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} z &= \frac{w+1}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{-i+1} \\ &= \frac{-iw-i}{w-1} \end{aligned}$$

es una homografía que transforma el disco unitario en el eje real. Como veremos más adelante, esta aplicación también transforma el disco unidad en el semiplano superior y, su inversa

$$\frac{z-i}{z+i}$$

transforma el semiplano superior en el disco unidad.

2.5. Automorfismos del disco unitario

Como primer paso para determinar la forma de los automorfismos del disco unidad $B(0,1)$ estudiemos el enunciado y demostración del siguiente teorema.

Teorema 2.6. Lema de Schwarz Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ una función holomorfa del disco unitario en si mismo tal que $f(0) = 0$. Entonces

1. Tenemos que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in B(0,1)$
2. Si para algún $z_0 \neq 0$ tenemos $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces existe un número complejo α, con $|\alpha| = 1$, tal que $f(z) = az$

Demostración. Como f es holomorfa, puede descomponerse en serie de potencias

$$f = a_1 z + \cdots$$

El termino constante es cero debido a que por hipotesis $f(0) = 0$. Entonces $f(z)/z$ es holomorfa en $B(0,1)$ y

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \left|\frac{1}{r}\right| \quad \text{para} \quad |z| = r < 1$$

Además por el principio del módulo máximo la desigualdad anterior también se cumple para $|z| \leq r$. Dejando que r tienda a 1 se prueba la primera parte del teorema. Si además tenemos que

$$\left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = 1$$

entonces, de nuevo, por el principio del módulo máximo, $f(z)/z$ no puede tener un máximo, salvo que f sea constante y, entonces existe una constante α tal que $f(z)/z = \alpha$, de donde se concluye la segunda parte del teorema.

Como una aplicación del lema de Schwarz, podemos determinar todos los automorfismos analíticos del disco unitario. Primero veamos algunos ejemplos de tales funciones.

Para comenzar, notemos que si ϕ es un número real, la transformación

$$z \to e^{i\phi} z$$

puede interpretarse geométricamente como una rotación de centro el origen y ángulo ϕ. Si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$e^{i\phi} z = re^{i(\phi+\theta)} z$$

Así, por ejemplo, la transformación $z \to iz$ es una rotación anti horaria por un ángulo de $\pi/2$.

Si α es un número complejo con $|\alpha| < 1$, y si

$$g_a(z) = g(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$$

entonces g es holomorfa en el disco cerrado $|z| \leq 1$. Además si $|z| = 1$, entonces $z = e^{i\theta}$ para algún número real θ, y

$$g(z) = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - \overline{\alpha})}$$

Salvo el número complejo $e^{i\theta}$, cuyo módulo es 1, el denominador de la expresión anterior es igual al número complejo conjugado del numerador, y entonces

$$\text{si} \quad |z| = 1 \quad \text{entonces} \quad |g(z)| = 1$$

por el principio del módulo máximo, podemos agumentar que si $|z| < 1$, entonces $|g(z)| < 1$. Como la imagen de un conjunto abierto mediante una función holomorfa es también un abierto, se sigue que si $|z| < 1$ entonces $|g(z)| < 1$. Además g es una homografía, entonces es invertible y se verifica facilmente que

$$g_a \circ g_a = identidad$$

enonces g_a es su propia función inversa en el disco unidad y g_a da un isomorfismo analítico del disco unidad con sigo mismo.

Observemos que $g_a(\alpha) = 0$. Ahora probaremos que salvo las rotaciones, no hay otros automorfismos analíticos del disco unidad.

Teorema 2.7. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ un automorfismo analítico del disco unidad tal que $f(\alpha) = 0$. Entonces existe un número real ϕ tal que

$$f(z) = e^{i\phi} \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$$

Demostración. Sea $g = g_a$ el automorfismo mencionado anteriormente entonces $f \circ g^{-1}$ es un automorfismo del disco unidad que lleva al cero en si mismo, y entonces tiene un cero en 0. Es suficiente probar que la función $h(w) = f(g^{-1}(w)) = f(z)$ es de la forma

$$h(w) = e^{i\phi} w$$

para concluir la prueba del teorema.

La primera parte del lema de Schwarz nos dice que

$$|h(w)| \leq |w| \quad \text{si} \quad |w| < 1$$

Como la función inversa h^{-1} también tiene un cero en el origen, podemos tomar la desiguadad anterior en el sentido contrario que es $|w| \leq |h(w)|$ y la segunda parte del lema de Schwarz nos garantiza que $h(w) = e^{i\phi} w$, con lo que se termina la prueba del teorema.

Corolario 2.3. Si f es un automorfismo del disco que deja fijo al origen, entonces $f(z) = e^{i\phi} z$ para algún número real ϕ, es decir f es una rotación.

Resultado 5. Las trasformaciones conformes del disco unitario en si mismo son trasformaciones de Möbius.

2.6. Automorfismos del semi plano superior

Antes de ver los automorfismos del semiplano superior estudiemos un poco de las funciones que lo relacionan con el disco unidad.

Teorema 2.8. Sea H el semiplano superior. La transformación

$$f : z \to \frac{z-i}{z+i}$$

es un isomorfismo del semiplano superior con el disco unidad.

Demostración. Sea $w = f(z)$ y $z = x + iy$. Entonces

$$f(z) = \frac{x + i(y-1)}{x + i(y+1)}$$

como $z \in H$,$y > 0$, y se sigue que $(y-1)^2 < (y+1)^2$, además

$$\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= |z-i|^2 \\ &< x^2 + (y+1)^2 \\ &= |z+1| \end{aligned}$$

y entonces

$$|z-i| < |z+i|$$

entonces f convierte el semiplano superior en el disco unidad. Su función inversa

$$z = h(w) = -i\frac{w+1}{w-1}$$

transforma al disco unidad en el semiplano superior.

Ahora encontraremos un isomorfismo del pimer cuadrante con el disco unidad a partir de la transformación $w = (z-i)/(z+i)$.

Como sabemos que el semiplano superior es isomorfo al disco unidad, es suficiente con exhibir un isomorfismo del primer cuadrante con el semiplano superior. La transformación $z \mapsto z^2$ cumple esto.

Si $f : H \to B(0,1)$ es el isomorfismo del semiplano superior con el disco unidad entonces

$$z \mapsto f(z^2)$$

es el isomorfismo deseado del primer cuadrante con el disco unidad. Entonces la función

$$z \mapsto \frac{z^2 - i}{z^2 + i}$$

da un isomorfismo del primer cuadrante con el disco unidad.

La existencia de un isomorfismo $f : H \to B(0,1)$, en algún sentido, determina los automorfismos de H. Del estudio general de isomorfismos y automorfismos, sabemos que

$$Aut(H) = f^{-1}Aut(B(0,1))f$$

lo que significa que cada automorfismo de H es de la forma $f^{-1} \circ \phi \circ f$, con ϕ algún automorfismo de D. La cuestion es dar una descripción más explicita de $Aut(H)$.

Teorema 2.9. Los automorfismos del semiplano superior son homografías

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

tales que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$

Demostración. Sea $z = x + iy$, entonces

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\
&= \frac{az+b}{cz+d} \cdot \frac{\overline{cz+d}}{\overline{cz+d}} \\
&= \frac{[(ax+b)+iay]\overline{[(cx+d)+icy]}}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{[(ax+b)+iay][(cx+d)-icy]}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{[(ax+b)(cx+d)-a^2y^2]+i[ay(cx+d)-cy(ax+b)]}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{[(ax+b)(cx+d)+acy^2]+i[y(ad-bc)]}{|cz+d|^2}
\end{aligned}$$

entonces

$$Imf(z) = \frac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2} = \frac{y}{|cz+d|^2} \geq 0$$

con lo que f es un automorfismo de H.

Por otra parte, todos los automorfismos h del semiplano superior son homografías debido a que el conjunto de homografías tiene estructura de grupo ya que podemos expresar $h = f^{-1} \circ \phi \circ f$, donde

$$f = \frac{z-i}{z+i}$$

y ϕ es un automorfismo de $B(0,1)$ y, entonces h también es una homografía.

2.7. Teorema de la representación conforme para un abierto simplemente conexo D de $\mathbb{C}$

Teorema 2.10. Todo abierto simplemente conexo D del plano complejo, distinto de $\mathbb{C}$, es isomorfo al disco unitario.

Corolario 2.4. Dos abiertos simplemente conexos D_1 y D_2 del plano complejo, distintos de $\mathbb{C}$, son isomorfos entre si.

Demostración. Por el teorema (2.10) existen isomorfismos f y g de, respectivamente, D_1 y D_2 en el disco unitario, entonces la aplicación $h = f \circ g^{-1}$ es un isomorfismo de D_1 en D_2.

Corolario 2.5. Dos abiertos simplemente conexos D_1 y D_2 del plano complejo, distintos de $\mathbb{C}$, son homeomorfos entre si.

Demostración. Si cada uno de los conjuntos D_1 y D_2 es igual a $\mathbb{C}$ el resultado es cierto. Si ambos, D_1 y D_2, son diferentes de $\mathbb{C}$ el teorema (2.10) garantiza la conclusión y si solamente uno de los conjuntos es diferente de $\mathbb{C}$, la existencia del homomorfismo se argumenta con los teoremas (2.4) y (2.10).

Para demostrar el teorema (2.10) veremos primero otros resultados.

Proposición 2.4. Para todo abierto simplemente conexo D de $\mathbb{C}$, distinto de $\mathbb{C}$, existe un abierto D_1 relativamente compacto (acotado) de $\mathbb{C}$ y un isomorfismo de D en D_1.

Demostración. Se sabe que la función $\log z$ admite una determinación continua en todo abierto simplemente conexo D de $\mathbb{C}$.

Sea $a \in \mathbb{C}$, tal que a no está en D; como D es simplemente conexo, por lo comentado en el parrafo anterior, existe una determinación holomorfa g de $log(z-a)$; además g es inyectiva, en efecto, para $z_1, z_2 \in D$ tales que $g(z_1) = g(z_2)$, tenemos $e^{g(z_1)} = e^{g(z_2)}$ y entonces $z_1 - a = z_2 - a$, de donde $z_1 = z_2$.

Sea $z_0 \in D$, como la imagen de un conjunto abierto mediante una función holomorfa es un abierto, $g(D)$ contiene un disco $B_r = B(g(z_0), r)$; entonce el disco $B_r + 2\pi i$, no contiene punto alguno de $g(D)$, pues en ese caso existirían z y z' en D tales que $g(z') = g(z) + 2\pi i$, entonces tomando la exponencial en ambos miembros de la igualdad anterior tenemos, $z' - a = z - a$; esto es imposible debido a que g es una determinación de $log(z-a)$. Entonces para todo $z \in D$, tenemos: $|g(z) - g(z_0) - 2\pi i| \geq r > 0$; la función

$$h : z \mapsto \frac{1}{g(z) - g(z_0) - 2\pi i}$$

es holomorfa, inyectiva y acotada en D, en consecuencia h define un isomorfismo de D en $D_1 = h(D)$, entonces D_1 está contenido en $\overline{B(0, r^{-1})}$, con lo cual termina la demostración.

Para demostrar el teorema (2.10), podemos suponer que D esta acotado; más precisamente, utilizando una homotecia y una traslación conveniente podemos suponer que $z_0 = 0 \in D$ y $D \subset B(0,1)$.

Lema 2.1. Sea $A = \{f \in O(D); f \quad \text{es inyectiva}; f(0) = 0; |f(z)| < 1; z \in D\}$. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes.

1. $f \in A; D' = f(D) = B = B(0,1)$.
2. $f \in A; |f'(0)|$ es máximo.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Sea $f \in A$ y $D' = f(D)$; como f es holomorfa e inyectiva, entonces f es un isomorfismo de D en D'. Sea g un isomorfismo de D en B tal que $g(0) = 0$ (esto se puede lograr mediante una traslación); entonces $f = h \circ g$, donde h es un isomorfismo de B en D' tal que $h(0) = 0$. La parte (1) del lema equivale a decir que h es un automorfismo de B que conserva el 0, entonces h es una rotación, de donde $h'(0) = 1$ y $|f'(0)| = |g'(0)|$.

$\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$: Sea $f \in A$ tal que existe $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$ y a no esta en $f(D)$. $f(z) \in B$, entonces

$$\frac{f(z) - a}{1 - \overline{a} f(z)} \in B$$

$f(D)$ es simplemente conexo, entonces

$$F(z) = log \frac{f(z) - q}{1 - \overline{a} f(z)}$$

está definida, es holomorfa e inyectiva en D y la parte real $Re(F(z))$, de $F(z)$ es negativa.

Si $u, v \in \mathbb{C}$, con $Re(u) < 0, Re(v) < 0$ tenemos $|v - u|/|v + \overline{u}| < 1$, esto resulta de que $|Re(v) - Re(u)| < |Re(v) + Re(u)|$.

Entonces $g(z) = \frac{F(z)-F(0)}{F(z)+\overline{F(0)}}$ es holomorfa e inyectiva en D, $g(0) = 0$ y $|g(z)| < 1$, entonces $g \in A$. Además

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{F'(z)[F(z)+\overline{F(0)}] - F'(z)[F(z)-F(0)]}{[F(z)+\overline{F(0)}]^2} \\ &= \frac{F'(z)[\overline{F(0)}+F(0)]}{[F(z)+\overline{F(0)}]^2} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{F'(0)[\overline{F(0)}+\overline{F(0)}]}{[F(0)+\overline{F(0)}]^2} \\ &= \frac{F'(0)}{F(0)+\overline{F(0)}} \\ &= \frac{F'(0)}{2Re(F(0))} \end{aligned}$$

Además

$$F'(z) = \left(\frac{1-\overline{a}f(z)}{f(z)-a}\right)\left(\frac{f'(z)(1-\overline{a}f(z)) + \overline{a}f'(z)(f(z)-a)}{[1-\overline{a}f(z)]^2}\right)$$

$$\Rightarrow F'(0) = \frac{1}{-a}\left(\frac{f'(0)(1-|a|^2)}{1}\right)$$

Así

$$\frac{g'(0)}{f'(0)} = \frac{1-|a|^2}{-2aRe(F(0))} = \frac{1-|a|^2}{-2a\log|a|}$$

de donde se verifica que:

$$\left|\frac{g'(0)}{f'(0)}\right| = \frac{1-|a|^2}{2|a|log|1/a|}$$

Finalmente veamos que $\dfrac{1-|a|^2}{2|a|log|1/a|} > 1$. Sea $m = |a|$, consideremos la función $t(m) = \dfrac{1-m^2}{2m\log 1/m}$. Entonces para $m \in (0,1)$

$$\begin{aligned} t'(m) &= \frac{-2m(2m\log m^{-1}) - 2(1-m^2)(\log m^{-1}-1)}{(2m\log m^{-1})^2} \\ &= \frac{-4m^2\log m^{-1} - 2(1-m^2)(\log m^{-1}-1)}{(2m\log m^{-1})^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

entoces $t(m)$ es decreciente en $(0,1)$. Por otra parte $\lim\limits_{m\to 1} t(m) = \dfrac{0}{0}$, por la regla de L'Hopital $\lim\limits_{m\to 1} t(m) = \dfrac{-2m}{2(\log m^{-1}-1)} = 1$. De los últimos dos resultados se deduce que $\dfrac{1-|a|^2}{2|a|log|1/a|} > 1$, y la prueba termina.

Demostración del teorema (2.10) Supongamos que $z_0 = 0 \in D$ y $D \subset B(0,1)$. De acuerdo al lema (2.1) es suficiente probar que existe $f \in A$ tal que $\sup_{g\in A}|g'(0)|$ se consigue para $|f'(0)|$. Supongamos que $O(D)$ esta provisto de la topología de la convergencia uniforme sobre todo compacto y consideremos al conjunto $\mathcal{B} = \{f \in A; |f'(0)| \geq 1\}$ de $O(D)$.

$\mathcal{B}\neq 0$, porque D está contenido en $B(0,1)$ y entonces $id_D \in \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ está acotado en $O(D)$, porque para todo $z \in D$, $|f(z)| < 1$, entonces para todo compacto K de D, $|f(K)| < 1$.

$\mathcal{B}$ es cerrado en D, en efecto, sea $f \in \overline{\mathcal{B}}$, existe una sucesión (f_n), $f_n \in \mathcal{B}$, tal que $f = \lim f_n$ (uniformemente sobre todo compacto de D); entonces $f(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. $f' = \lim_{n\to+\infty} f'_n$ (uniformemente sobre todo compacto de D); lo anterior de acuerdo a los resultados previamente vistos para sucesiones de funciones holomorfas. Entonces $|f'(0)| = \lim_{n\to+\infty} |f'n(0)| \geq 1$; en particular, f no es constante sobre D pues como f es el limite uniforme de funciones holomorfas inyectivas, entonces ella también es inyectiva. Finalmente, $|f_n(z)| < 1$ sobre D entonces $|f(z)| < 1$ sobre D; pero no hay ningun punto $z \in D$ tal que $|f(z)| = 1$, en virtud del principio del módulo máximo porque f no es constante, por lo tanto $f \in \mathcal{B}$. El conjunto $\mathcal{B}$ es cerrado y acotado en $O(D)$, entonces es compacto de acuerdo a lo visto en el capitulo anterior, además, utilizando el desarollo en serie de potencias para g, se ve que la aplicación de $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}$ que lleva a g en $|g'(0)|$ es continua, por lo tanto ella alcanza su cota superior sobre $\mathcal{B}$.

3. Problemas resueltos

Problema 1. Sea $D = D(0,1)$ el disco unitario, $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conteniendo a $\overline{D}$ y $f \in O(D)$. Suponga que $f(0) = 1$ y que $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Mostrar que f posee al menos un cero en D.
Solución
Supongamos que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D$, entonces, de acuerdo a la hipotesis $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D}$. Para $z \in \overline{D}$, tomemos $g(z) = [f(z)]^{-1}$. Entonces g es continua en $\overline{D}$ y por ser cociente de funciones holomorfas en D, es holomorfa en D. Con lo anterior se tiene que $g(0) = 1$ y $|g(z)| < 1$ para $|z| = 1$. Esto contradice el principio del módulo máximo. En consecuencia, f posee al menos un cero en D.

Problema 2. Sea $D = D(0,1)$, $r \in]0,1[$, M un número real positivo y $f \in O(D)$. Supongamos que $f(0) = a_0 \neq 0$, supongamos también que existe $z_0 \in D(0,r)$ tal que $f(z_0) = 0$, y que $|f(z)| \leq M$ si $|z| = r$. Mostrar que $|a_0|r \leq |z_0|(M + |a_0|)$.
Solución
Para $z \in D\backslash\{z_0\}$ consideremos

$$h(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

Entonces h se prolonga a una función holomorfa en D que denotaremos también con h. De acuerdo al principio del módulo máximo, tenemos:

$$\sup\{|h(z)|; |z| \leq r\} = \sup\{|h(u)|; |u| = r\}.$$

En consecuencia,

$$|h(z)| \leq M/(r - |z_0|).$$

de donde se deduce que, para $z = 0$:

$$|a_0|/|z_0| \leq M/(r - |z_0|)$$

lo que equivale a $|a_0|r \leq |z_0|(M + |a_0|)$.

Problema 3. Sea $U \in \mathbb{C}$ un abierto, $a \in U$ y $(g_n)_n$ una sucesión de elementos de $O(U)$. Para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in U$ consideremos $f_n(z) = (z - a)g_n(z)$. Supongamos que la sucesión de funciones $(f_n)_n$ converge uniformemente a 0 en U. Mostrar que sucede lo mismo para la sucesión $(g_n)_n$.
Solución
Sea $\epsilon > 0$. Tomemos a $r > 0$ fijo, tal que $\overline{D}(a,r) \subset U$. Debido a la convergencia de $(f_n)_n$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$z \in U, n \geq N \Rightarrow |f_n(z)| \leq r\epsilon$$

Para $n \geq N$ y $z \in U\backslash D(a,r)$, se tiene:

$$g_n(z) = \frac{|f_n(z)|}{|z - a|} \leq \frac{r\epsilon}{r} = \epsilon$$

Esto se cumple en particular para $|z - a| = r$. De acuerdo al principio del módulo máximo. Esto también se verifica para $|z - a| \leq r$. Tenemos entonces que $g_n(z) \leq \epsilon$ siempre que $z \in U$ y $n \geq N$. Con esto termina la prueba.

Problema 4. Sea P un polinomio con coeficientes complejos y de grado $n > 0$. Probar, para $0 < r \leq R$:

$$M(R)R^{-n} \leq M(r)r^{-n}.$$

donde $M(r) = \sup\{|P(re^{it})|; t \in \mathbb{R}\}$

Solución

La aplicación $z \to z^n P(z^{-1})$ se prolonga a una función entera que denotaremos con g. Para $r \geq 0$, sea $N(r) = \sup\{|g(re^{it})|; t \in \mathbb{R}\}$.

De acuerdo al principio del módulo máximo, tenemos $N(r) = \sup\{g(z); |z| \leq r\}$. Por lo tanto, para $0 < r \leq R$:

$$N(R^{-1}) \leq N(r^{-1}) \Rightarrow M(R)R^{-n} \leq M(r)r^{-n}$$

Problema 5. Sean $D = D(0,1)$ y $f \in O(D)$ sin ceros en D. Probar que existe al menos una sucesión $(z_n)_n$ de puntos de D verificando las siguientes condiciones:

A) $|z_n| \to 1$ cuando $n \to +\infty$

B) La sucesión $(f(z_n))_n$ está acotada.

Solución

Supondremos que no existe alguna sucesión de puntos de D verificando estas condiciones, y mostraremos que $|f(z)| \to +\infty$ cuando $|z| \to 1$.

Si este no es el caso, existe $A > 0$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $z \in D$ verificando que $1 - \epsilon < |z|$ y $|f(z)| \leq A$. De donde deducimos que se puede encontrar una secesión $(z_n)_n$ de puntos de D verificando, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$1 - \frac{1}{n+1} < |z_n| < 1, |f(z_n)| \leq A.$$

Esto contradice el hecho de que $(f(z_n))_n$ no esté acotada. Entonces $|f(z)| \to +\infty$ cuando $|z| \to 1$. Definimos entonces $F : \overline{D} \to \mathbb{C}$ por:

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| = 1 \\ 1/f(z) & \text{si } z \in D \end{cases}$$

De lo anterior se tiene que, F es coninua en $\overline{D}$ y holomorfa en D. El principio del módulo máximo prueba que F es identicamente nula, lo cual es una contradicción. Con esto la demostración termina.

Problema 6. Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $f_1, \ldots, f_n \in O(D)$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ reales tales que $f_k(U) \subset \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$ para $1 \leq k \leq n$. Para $z \in U$, consideremos

$$g(z) = \prod_{n=1}^{n} |f_k(z)|^{\alpha_k}$$

Mostrar que, si g tiene un máximo relativo en un punto $a \in U$, entonces g es constante en U.

Solución

Sea $\log(.)$ la determinación principal del logaritmo y $k \in \{1, \ldots, n\}$. Como $f_k(U) \subset \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$, podemos definir $\log f_k(z)$ para $z \in U$, si establecemos $h_k(z) = e^{\alpha_k \log f_k(z)}$, se tiene:

$$h_k \in O(D), |h_k(z)| = |f_k(z)|^{\alpha_k}$$

Sea h la función dada por el producto de las h_k. De acuerdo con la hipotesis, h es holomorfa en U y $|h| = g$ tiene un máximo local en a. Como U es conexo, resulta del principio del módulo máximo que h, y entonces g, es constante en U.

Problema 7. Sean $D = D(0,1)$ y $U = \mathbb{C}\backslash\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right]$. Probar que

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

es una representación conforme de D en U.

Solución

Sea $w \in U$. Si $w = 0$, $z = 0$ es el único elemento $z \in D$ tal que $f(z) = w$. Supongamos que $w \neq 0$, y consideremos la ecuación en z:

$$(1-z)^2 w - z = 0 \tag{3.1}$$

la cual equivale a

$$\left(z - 1 - \frac{1}{2w}\right)^2 = \frac{1}{4w^2}(1+4w).$$

denotemos con z_1 y z_2 a las raices de esta ecuación. Tenemos $z_1 z_2 = 1$. En consecuencia (3.1) tiene al menos una raíz de módulo 1 si y solamente si, las raices de (3.1) son de la forma $z_1 = e^{i\theta}, z_2 = e^{-i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene

$$2\cos\theta = 2 + \frac{1}{w} \Rightarrow \frac{1}{w} = -4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow w \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right].$$

Esto es un absurdo, vemos entonces que, para $w \in U$. tenemos $|z_1| \neq 1$, $|z_2| \neq 1$. Para $w \in U$, tenemos que $1 + 4w \notin \mathbb{R}^-$. Deducimos que las raices z_1 y z_2 estan dadas por:

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2w} + \frac{1}{2w}\sqrt{1+4w}, \qquad z_2 = 1 + \frac{1}{2w} - \frac{1}{2w}\sqrt{1+4w}$$

Tomemos $\rho_k(w) = |z_k|, k = 1, 2$. Las aplicaciones $w \to \rho_k(w)$ son continuas sobre el abierto conexo $U\backslash\{0\}$, y no tomarán al valor de 1. Vemos que $\rho_1(1) > 1$ y $\rho_2(1) < 1$. Por lo tanto, $\rho_1(U\backslash\{0\}) \subset \mathbb{C}\backslash\overline{D}$ y $\rho_1(U\backslash\{0\}) \subset D$. Es inmediato que $w \to z_2$ se prolonga en una función $\varphi \in O(D)$ tal que $\varphi(0) = 0$. Entonces deducimos que, para $w \in U$, existe un único $z \in U$ tal que $f(z) = w$ y , entonces $z = \varphi(w)$. Para obtener el resultado buscado, es suficiente probar que $f(D) \subset U$.

Sean $z \in D$ y $w = f(z)$. Tenemos que $z = 0$ si y solamente si $w = 0$. Supongamos que $w \neq 0$. Si $w \notin U$ podemos escribir a w en la forma $4^{-1}\operatorname{sen}^{-2}(\theta/2)$ con $\theta \in \mathbb{R}$. La ecuación (3.1) se escribe entonces

$$0 = z^2 - 2\cos\theta z + 1 = (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})$$

Tenemos entonces $|z| = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f(D) \subset U$.

Problema 8. Sean $P = \{z \in \mathbb{C}; Imz > 0\}$ y $U = P\backslash\{ix; x \in [1, +\infty[\}$.

a) Para $z \in U$, mostrar que se puede definir $\sqrt{1+z^2}$

b) Probar que $f(z) = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ es una representación conforme de U en P.

Solución

(a) Si $1 + z^2 = -t \in \mathbb{R}^-$, tenemos que $z^2 = -1 - t$, entonces $z \in i\mathbb{R}$ y $|z| \geq 1$. Como llegamos a una contradicción, se obtiene el resultado.

(b) Veamos que $f(U) \subset P$: para $z \in U$ tomemos $Q(z) = Imf(z)$. Se ve que $Q(i/2) = i/\sqrt{3}$. Como f es continua, entonces Q es continua, además U es conexo, de manera que si $f(U)$ no está incluido en P, existe $z \in U$ tal que $Q(z) = 0$, y $f(z) = u \in \mathbb{R}$. Entonces nos encontramos con que $z^2(1-u^2) = u^2$, entonces $u \neq \pm 1$, y $z^2 = u^2/(1-u^2)$.

Si $|z| < 1$ entonces $z^2 \in \mathbb{R}^+$ de modo que $z \in \mathbb{R}$, lo cual es una contradicción. Si $|u| > 1$, entonces $z^2 \in \mathbb{R}^-$ y se cumplen: $z \in i\mathbb{R}$ y $|z| > 1$. Esto es nuevamente un absurdo. Tenemos así que $f(U) \subset P$.

Sea $w \in P$, se ve que, como en el literal (a), que $\sqrt{1-w^2}$ está bien definida. Por lo tanto podemos definir a $g \in O(D)$ por:
$$g(w) = \frac{w}{\sqrt{1-w^2}}$$
Tenemos que $g(i/2) = i/\sqrt{5} \in P$. Como P es conexo, si $g(P)$ no está incluido en P, vemos que existe $w \in P$ tal que $g(w) = x \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces que $w^2 = x^2/(1+x^2)$, entonces $w \in \mathbb{R}$. Esto es una contradicción.

Por otra parte, supongamos que $w \in P$ verifica $g(w) = ix$, con $x \in [1, +\infty[$. Entonces, $w^2(x^2-1) = x^2$, por lo tanto $x^2 \neq 1$ y $w^2 = x^2/(x^2-1)$. Como $x > 1$ se ve que $w \in \mathbb{R}$. Lo último es también contradictorio. Lo que demuestra:
$$f(U) \subset P, \quad g(P) \subset U$$
Por otra parte es inmediato verificar que $f \circ g(w) = w$ y $g \circ f(z) = z$ para $w \in P, z \in U$. Lo que muestra que f es una representación conforme de U en P cuya biyección reciproca es g.

Problema 9. Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f, g \in O(U)$ tales que no se anulan en U. Supongamos que existe una sucesión $(a_n)_n$ de puntos de U, distintos dos a dos, con límite $a \in U$ y verificando, para todo $n \in \mathbb{N}$:
$$f'(a_n)g(a_n) = g'(a_n)f(a_n)$$
Probar que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f = cg$.
Solución:
Sea $h = f/g$. Para $n \in \mathbb{N}$, se ve que:
$$h'(a_n) = \frac{f'(a_n)g(a_n) - g'(a_n)f(a_n)}{g^2(a_n)} = 0$$
Como $h \in O(U)$ y U es conexo, resulta, del principio de ceros aislados que $h' = 0$. Y nuevamente la conexidad de U muestra que h es constante, de donde se sigue la conclusión buscada.

Problema 10. Sean $D = (0,1)$, $C = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\}$ y Z el conjunto de ceros del poliniomio $P(z) = z^7 - 5z^3 + 12$. Determinar la cardinalidad de $Z \cap D$ y la cardinalidad de $Z \cap C$.
Solución:
Primero verifiquemos que P y P' son coprimos: $P'(z) = 7z^6 - 15z^2 = z^2(7z^4 - 15) = Q(z)R(z)$. $P(z)$ y z^2 son coprimos, por otra parte $P(z) = \dfrac{z^3}{7}R(z) + (-\dfrac{20z^3}{7} + 12)$, entonces $P(z)$ y $R(z)$ son coprimos. En conclusión $P(z)$ y $Q(z)$ son coprimos. Por lo anterior, todas las raices de P son simples.

Tomemos $f(z) = -5z^3 + 12$ y $g(z) = z^7$, para $|z| = 1$ se tiene:
$$1 = |g(z)| < 7 \leq |f(z)|.$$
De acuerdo al teorema de Rouché, f y $P = f + g$ tienen el mismo número de ceros en D. Sin embargo, por el principio del módulo máximo,$|f(z)| \geq 7$ para $|z| \leq 1$. De donde, la cardinalidad de $D \cap Z$ es 0. Sea $B = D(0,2)$. Para $|z| = 2$ se tiene:
$$|f(z)| \leq 40 + 12 = 52 < 128 = |g(z)|$$
Nuevamente, de acuerdo al teorema de Rouché, g y $P = f + g$ tienen el mismo número de ceros en B. De donde la cardinalidad de $B \cap Z$ es 7. De lo anterior se deduce que la cardinalidad de $C \cap Z$ es también 7.

Problema 11. Sean $a, b \in D = D(0,1)$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Probar que la ecuación
$$z^m \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)^n - b = 0$$

posee $m+n$ soluciones pertenecientes a D.
Solución:
Tomemos:

$$f(z) = z^m \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^n, \quad g(z) = f(z) - b, \quad \theta(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

Para $|z| = 1$, se tiene:

$$|\theta(z)| = \frac{|z-a|}{|z||\overline{z-a}|} = 1$$

$$\Rightarrow |f(z) - g(z)| = |b| < 1 = |f(z)|$$

De acuerdo al teorema de Rouché, f y g tienen el mismo número de ceros en D. Como $f(z)$ tiene $m+n$ ceros en D, se deduce que $f(z) - b$ también tiene $m+n$ ceros en D.

Problema 12. Sean $r \in \mathbb{R}^+$, U un abierto de $\mathbb{C}$ conteniendo a $\overline{D}(0,r)$ y $f \in O(U)$. Suponga que $|f(0)| + r|f'(0)| < m = \text{ínf}\{|f(z)|; |z| = r\}$. Probar que f posee al menos dos ceros en $D(0,r)$.
Solución:
Para $|z| \leq r$, tomemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Tenemos $g(z) = f(z) - f(0) - zf'(0)$ por lo tanto, para $|z| = r$, obtenemos:

$$|f(z) - g(z)| = |f(0) + zf'(0)| \leq |f(0)| + r|f'(0)| < m \leq |f(z)|$$

De acuerdo con el teorema de Rouché, f y g tienen el mismo número de ceros en D. Como $g(0) = g'(0) = 0$, se deduce que g posee al menos una raíz doble en $D(0,r)$ y por lo tanto f posee al menos dos ceros en $D(0,r)$.

Problema 13. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones enteras uniformemente convergente en todo compacto de $\mathbb{C}$ a una función entera no nula f. Supongamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, tenemos $f_n(a) \neq 0$. Probar que $f(a) \neq 0$ para todo $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
Solución:
Supongamos que existe $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, tal que $f(a) = 0$. Como f no es nula, por el principio de ceros aislados, a es un cero aislado de f. Existe, por lo tanto, $r > 0$ verificando:

$$\overline{D}(a,r) \cap \mathbb{R} = \emptyset, \quad f(z) \neq 0 \;\text{ si }\; z \in \overline{D}(a,r)\backslash\{a\}.$$

Por lo anterior tenemos $\text{ínf}\{|f(z)|; |z-a| = r\} = m > 0$. De acuerdo con la convergencia uniforme que se tiene por hipotesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si:

$$n \geq N, \quad \text{y} \quad z \in \overline{D}(a,r) \Rightarrow |f(z) - f_n(z)| < m$$

Para $|z-a| = r$, tenemos entonces $|f_N(z) - f(z)| \leq |f(z)|$. De acuerdo al teorema de Rouché, f_N tiene al menos un cero en $D(a,r)$. Como $D(a,r) \cap \mathbb{R} = \emptyset$, esto es un absurdo. De donde se tiene la conclusión.

Problema 14. Sean $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ con $a > e$. Probar que la ecuación

$$h(z) = az^n - e^z$$

posee, en $D(0,1)$, n raices simples.
Solución:
Primero veamos que si $h(z)$ tiene ceros, estos son simples. Supongamos que $u \in \mathbb{C}$ es una raíz de h de orden mayor o igual a 2. Entonces:

$$h(u) = au^n - e^u = 0 = h'(u) = nau^{n-1} - e^u.$$

Deducimos que $a(u-n)u^{n-1}=0$ y, debido a que 0 no es una raíz de h, se tiene $u=n$. Sea $b=\log a>1$, evaluando h en u y aplicando logaritmo natural se tiene que $b+n(\log n-1)=0$. Si $n\geq 3>e$, $\log n-1>0$ y $b+n(\log n-1)\neq 0$. Si $n=1$, obtenemos $b=1$, lo que contradice el hecho de que $a>e$ dado en la hipotesis. Supongamos que $n=2$. Entonces $\log 1+2(\log 2-1)=0$, entonces $\log(4a)=2$, de donde $4a=e^2$. Sin embargo, $e<4$, por lo tanto $a<e$, obteniendo una contradicción. Por lo que, las raices de h son simples.

Consideremos $f(z)=az^n$, $g(z)=-e^z$. Para $|z|=1$, se tiene $e^z=e^{\cos\theta}e^{i\operatorname{sen}\theta}$ con $\theta\in]2\pi k,2\pi(k+1)]$, y algún k en $\mathbb{Z}$, de modo que $|-e^z|=e^{\cos\theta}$. Entonces:

$$0<|g(z)|\leq e<a=|f(z)|.$$

De acuerdo al teorema de Rouché, f y $h=f+g$ tienen el mismo número de ceros en $D(0,1)$ y son n ceros.

Problema 15. Sean $D=D(0,1)$ y $f\in O(D)$ verificando que $f(0)=0$. Probar que la sucesión de termino general $f(z^n)$ converge normalmente en todo compacto de D.
Solución:
Sean $r\in]0,1[$ y $A=\sup\{|f(z)|;|z|\leq r\}$. La función dada por $z\to z^{-1}f(z)$ se prolonga a la función $g\in O(D)$ para la cual $|g(z)|\leq Ar^{-1}$ si $|z|=r$. De acuerdo al principio del módulo máximo, esto también se cumple si $|z|\leq r$. Entonces obtenemos $|f(z)|\leq A|z|r^{-1}$ si $|z|\leq r$. Para $|z|\leq r<1$, tenemos $|z|^n\leq r^n$, por lo tanto

$$|f(z^n)|\leq \frac{A}{r}|z|^n\leq Ar^{n-1}$$

De lo anterior y de la definición de convergencia normal se concluye que la sucesión de termino general $f(z^n)$ converge normalmente en $\overline{D}(0,r)$.

Problema 16. Sean $D=D(0,1)$ y $(f_n)_n$ una sucesión de elementos de $O(D)$. Consideremos

$$f_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m}z^m \quad (z\in D, n\in\mathbb{N})$$

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

a) Existe $M>0$ tal que $|a_{n,m}|\leq M$ para todos los $m,n\in\mathbb{N}$.

b) Para todo $n\in\mathbb{N}$, la sucesión $(a_{n,m})_n$ tiene un límite a_m en $\mathbb{C}$

Mostrar que la sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente en todo compacto de D.
Solución:
De $|a_{n,m}|\leq M$ deducimos que $|a_m|\leq M$ para todo $m\in\mathbb{N}$. De donde resulta que

$$g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m$$

definine una función $g\in O(D)$.
Sea K un conjunto compacto de D. Existe $r\in]0,1[$ tal que $K\subset\overline{D}(0,r)$. Para $|z|\leq r, n, N\in\mathbb{N}$, se tiene:

$$\begin{aligned} |f_n(z)-g(z)| &\leq \sum_{m=0}^{N}|a_{n,m}-a_m|r^m+\sum_{m=N+1}^{\infty}|a_{n,m}-a_m|r^m \quad \text{(Desigualdad triangular)}\\ &\leq \sum_{m=0}^{N}|a_{n,m}-a_m|r^m+\sum_{m=N+1}^{\infty}2Mr^m \quad \text{(Desigualdad triangular)}\\ &\leq \sum_{m=0}^{N}|a_{n,m}-a_m|r^m+\frac{2Mr^{N+1}}{1-r} \quad \text{(Serie Geométrica)}\end{aligned}$$

Consideremos $\epsilon > 0$. Fijando N tal que $\dfrac{2M}{1-r}r^{N+1} \leq \dfrac{\epsilon}{2}$, existe $P \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq P$ y $m \in \{0, 1, \ldots, N\}$ se tiene

$$|a_{n,m} - a_m| \leq \frac{\epsilon}{2(N+1)}$$

Así $\displaystyle\sum_{m=0}^{N} |a_{n,m} - a_m| r^m \leq \sum_{m=0}^{N} \frac{\epsilon}{2(N+1)} = \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, para $n > P$ y $|z| \leq r$, se tiene $|f_n(z) - g(z)| \leq \epsilon$.
Por lo tanto $(f_n)_n$ converge uniformemente en todo compacto de D.

Problema 17. Mostrar que la serie de funciones meromorfas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$$

converge uniformemente en todo compacto de $\mathbb{C}$.
Solución:
Para $n \in \mathbb{N}$ tomemos:

$$f_n(z) = \frac{(-1)^n}{z-n}, \quad g_n(z) = f_n(z) + \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n z}{n(z-n)}.$$

Sean K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y $A = \sup\{|z|; z \in K\}$. Si $n > A$, f_n y g_n no tienen polo alguno sobre K, y para $z \in K$:

$$|g_n(z)| \leq \frac{A}{n(n-A)}$$

Y como resultado la serie $\sum g_n(z)$ converge normalmente en todo compacto de $\mathbb{C}$. Como la serie $\sum(-1)^n/n$ es convergente, se tiene el resultado.

Problema 18. Sean $D = D(0,1)$ y $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$, con

$$u_n(z) = \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$$

Probar que $f \in O(D)$. Y utilizando $f(z^2)$ mostrar que:

$$f(z) = \frac{z}{1-z} \qquad z \in D$$

Solución:
Sean K un subconjunto compacto de D y $r \in]0, 1[$ verificando $K \subset \overline{D}(0, r)$. Para $z \in K$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$|u_n(z)| \leq \frac{r^{2^n}}{1 - r^{2^{n+1}}}$$

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: si $n \geq N \Rightarrow 1 - r^{2^{n+1}} \geq 1/2$. Por lo anterior, si $z \in K, n \geq N$:

$$|u_n(z)| \leq 2r^{2^n}$$

La serie de funciones holomorfas en U, de termino general $u_n(z)$, es normalmente convergente sobre todo compacto de U. De donde $f \in O(D)$.
Para $z \in U$, sean

$$g(z) = \frac{z}{1-z}, \quad h(z) = f(z) - g(z)$$

se tiene que

$$g(z^2) = g(z) - \frac{z}{1-z^2}, \quad f(z^2) = f(z) - \frac{z}{1-z^2}$$

De lo anterior se deduce que $h(z^2) = h(z)$ y, por recurrencia:

$$h(z^{2^n}) = h(z)$$

Como h es continua, se tiene $h(z) = h(0) = 0$. Por lo tanto $f = g$ y la demostración termina.

PROBLEMA 19. Probar que el producto infinito

$$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + z^{2^n}\right)$$

converge normalmente sobre todo conjunto compacto de $D(0,1)$. Mostrar que, para $z \in D(0,1)$, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

Solución:
Sea K un subconjunto compacto de $D(0,1)$, existe $r > 0$ tal que $K \subset \overline{D}(0,r)$. Para $z \in K$, tenemos por lo tanto que $|z^{2^n}| \leq r^{2^n}$. Resulta que la serie de termino general z^{2^n} es normalmente convergente sobre K. De donde se tiene el primer resultado.
Para $z \in D(0,1)$ consideremos:

$$g(z) = \frac{1}{1-z}, \quad h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

se tiene

$$h(z) = h(z^2) = \cdots h(z^{2^n})$$

De acuerdo con el primer punto, $f \in O(D)$, por lo tanto h es continua en D. Entonces:

$$h(z) = h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$$

Por lo tanto $h = f$ y la prueba termina.

PROBLEMA 20. Tomando en cuenta que, para $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$, tenemos:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

a) Probar que los productos $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$, y $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z(1-z)}{n(n+1)}\right)$ convergen normalmente sobre todo compacto de $\mathbb{C}$.

b) Establecer, para $z \in \mathbb{C}$ que:
$\displaystyle \operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z (1-z) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z(1-z)}{n(n+1)}\right).$

Solución:
(a) Las series de termino general $\dfrac{z^2}{n^2}$ y $\dfrac{z(1-z)}{n(n+1)}$ son normalmente convergentes sobre todo compacto de $\mathbb{C}$, de donde se concluye lo afirmado en el primer literal.

(b) Para $z \in \mathbb{C}$, consideremos $f_0(z) = z$ y

$$f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}, \qquad f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

De acuerdo a lo hecho en el literal (a), la serie de funciones meromorfas de termino general f_n'/f_n es normalmente convergente sobre todo compacto de $\mathbb{C}$ y

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi cot \pi z = \frac{(\operatorname{sen} \pi z)'}{\operatorname{sen} \pi z}$$

Existe entonces $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que $\operatorname{sen} \pi z = c f(z)$ para todo $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Como las funciones f y $\operatorname{sen} z$ son enteras, lo anterior sigue siendo cierto para todo $z \in \mathbb{Z}$. Si hacemos tender z a 0, obtenemos $c = \pi$. De lo que se deduce la primera igualdad.
Consideremos

$$h_p(z) = \pi z(1-z) \prod_{n=1}^{p} \left(1 + \frac{z(1-z)}{n(n+1)}\right).$$

se tiene:

$$1 + \frac{z(1-z)}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{z}{n+1}\right)\left(1 + \frac{z}{n}\right) \Rightarrow h_p(z) = \left[\pi z \prod_{n=1}^{p} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\right]\left(1 - \frac{z}{p+1}\right)$$

De la igualdad anterior y de lo hecho en el literal (a) se deduce que para $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z(1-z) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z(1-z)}{n(n+1)}\right)$$

como queriamos probar.