

**Universidad de El Salvador**  
*Facultad de Ciencias Naturales y Matemática*  
*Escuela de Matemática*



**TRABAJO DE GRADUACIÓN:**

**“INTRODUCCIÓN A LA TRANSFORMADA WAVELET Y LA TEORÍA DE ANÁLISIS DE SEÑALES”**

Presentado por:

**Mynor Ademar Melara Estrada**

para optar al título de:

**Licenciado en matemática**

Supervisor:

**Phd. Simón Alfredo Peña Aguilar**

Ciudad Universitaria, 10 de septiembre de 2015.

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

*Autoridades Universitarias 2011-2015*

Ing. Mario Roberto Nieto Lovo  
**RECTOR**

Msc. Ana María Glower de Alvarado  
**VICERRECTORA ACADÉMICO**

Msc. Óscar Noé Navarrete  
**VICERRECTOR ADMINISTRATIVO**

Dra. Ana Leticia de Amaya  
**SECRETARIA GENERAL**

Lic. Francisco Cruz Letona  
**FISCAL GENERAL**

Licda. Claudia María Melgar de Zambrana  
**DEFENSORA DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS**

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

Msc. Martín Enrique Guerra Cáceres  
**DECANO**

Lic. Arístides Paz Sánchez  
**VICEDECANO**

Dr. José Nerys Funes Torres  
**DIRECTOR DE ESCUELA DE MATEMÁTICA**

**Universidad de El Salvador**  
*Facultad de Ciencias Naturales y Matemática*  
*Escuela de Matemática*

**TRABAJO DE GRADUACIÓN:**

**“INTRODUCCIÓN A LA TRANSFORMADA WAVELET Y LA TEORÍA DE  
ANÁLISIS DE SEÑALES”**

Presentado por:

**Mynor Ademar Melara Estrada**

para optar al título de:

**Licenciado en matemática**

Supervisor:

**Phd. Simón Alfredo Peña Aguilar**

*Dedicado a  
mi familia*



# Agradecimientos

Agradezco a mi madre quien ha dedicado su vida a cuidar de nosotros sus hijos y a prepararnos para desenvolvernosen nuestra vida dando especial importancia a la formación académica.

A mis hermanos que siempre me han apoyado y han sido un ejemplo para mí.

A mis sobrinos por ser un motivo para ser mejor.

A mi padre, por serlo.

A mis amigos, compañeros y profesores por ser parte de mi recorrido en diferentes etapas de mi vida.

Al Doctor Simón Peña por proporcionarme los instrumentos necesarios para realizar este trabajo y guiar el camino que debí seguir para concluirlo.

Al Maestro Carlos Gámez por ayudarme con la revisión del anteproyecto y darme sugerencias para mejorarlo.

... y a Dios.



# Resumen

El término análisis deriva de una palabra griega que significa descomposición y es éste sentido etimológico el que se va a utilizar a lo largo de este trabajo. El análisis armónico se ocupa, a grandes rasgos, de la descomposición de funciones en tonos puros que son llamados armónicos. Sin rigor, se considera tonos puros a ciertos objetos que recuerdan a las funciones  $\sin(2\pi nx)$  y  $\cos(2\pi nx)$  con  $n \in \mathbb{Z}$ , las cuales aparecen en los desarrollos de Fourier clásicos. En términos acústicos, en el rango de frecuencias audibles éstas funciones suenan como mantener una nota de una flauta. Con esta ambigüedad, el análisis armónico se convierte en un área muy amplia cuyas fronteras son muy subjetivas y están sujetas a lo qué se desee denominar armónicos.

Este trabajo se inicia recordando algunas nociones elementales de la serie de Fourier, la cual permite representar una señal periódica como una suma infinita de componentes sinusoidales. Se estudia luego la transformada de Fourier, que juega un papel similar en el análisis de las señales no periódicas, y es de aplicación más general que la serie. La motivación principal de la aplicación de la serie o la transformada es obtener el espectro de una señal dada, que revela el contenido frecuencial de la misma. La descripción de la señal en el dominio frecuencial usualmente es más revelador que la representación original en función del tiempo. La transformada, introducida por Fourier al estudiar la conducción del calor en una barra de longitud infinita, se ha aplicado en áreas tales como conducción de calor, óptica, procesamiento de señales y probabilidad. Al ser ideadas para estudiar un problema físico, no sorprende entonces que las series de Fourier hayan encontrado tantas aplicaciones. Los intentos para comprender el comportamiento de estas series sentaron las bases del análisis riguroso. Además de estudiar las propiedades algebraicas y analíticas de la transformada de Fourier, en el primer capítulo se estudian teoremas que brindan condiciones bajo las cuales al aplicar transformada de Fourier a una función y luego a la función obtenida aplicarle transformada de Fourier inversa, este proceso devuelva la función original y aunque la transformada de Fourier en principio se define para funciones en  $L^1(\mathbb{R})$ , el teorema de Plancherel incluido en este primer capítulo extiende su definición para funciones en el espacio  $L^2(\mathbb{R})$ .

Pero el análisis de señales utilizando transformada de Fourier presenta deficiencias significativas en el caso de señales no estacionarias como por ejemplo el fenómeno de Gibbs y aliasing, este último es el efecto que causa que señales continuas distintas se tornen indistinguibles cuando se muestrean digitalmente. El problema es que al utilizar la transformada de Fourier toda la información de la señal se traduce al espectro de la frecuencia perdiéndose toda información referida al tiempo, algo así como si un músico escribiera todas las notas que componen una melodía pero sin especificar en que momento debe tocarse cada nota. La transformada de Fourier con ventana, donde se estudia la señal seccionando su dominio plantea un avance pero no resuelve este problema del análisis tiempo-frecuencia de la señal

debido a la influencia que tiene la anchura de la ventana escogida. Una ventana ancha da buena resolución en frecuencia y si la ventana se estrecha mejora la resolución en el tiempo. Esta limitación desaparece con el análisis de la transformada wavelet para funciones no estacionarias así como también se obtienen beneficios en la compresión de la señal.

Otro desarrollo reciente que ha recibido gran atención es la teoría de wavelets (ondeletas). En este caso las funciones no se expanden en series de Fourier, sino utilizando otras bases ortogonales que son apropiadas para cálculos eficientes, lo que dio lugar a nuevos algoritmos utilizados en procesamiento de señales y para la solución numérica de ecuaciones. Una wavelet es una función que tiene su energía muy localizada en el tiempo y constituye una herramienta poderosa en el análisis de sistemas que presentan excitaciones o respuestas transitorias o tiempo-variantes. La transformada wavelet permite representar una señal en términos de versiones trasladadas y dilatadas de una onda finita (denominada wavelet madre). Una función wavelet permite un análisis simultáneo tiempo-frecuencia. En el segundo capítulo de este trabajo se hace una introducción al estudio de las wavelets presentando su definición y su importancia, profundizando en el significado de localización tiempo-frecuencia y haciendo una comparación con la transformada de Fourier con ventana, donde las limitaciones de esta última quedan expresadas en el teorema de Balian-Low.

Aunque históricamente la primera wavelet conocida es la de Haar (1909), los trabajos precursores del análisis wavelet fueron las técnicas del análisis armónico y la teoría sobre bancos de filtros digitales de los investigadores Littlewood-Paley (1930) y Calderon Zygmund (1960). Sin embargo el gran impulso lo tomó a partir de 1980 con las contribuciones notables al avance de la teoría por parte de Goupillaud, Grosman y Morlet con su formulación de lo que hoy se conoce como transformada de wavelet continua, Jan Olov-Strömberg con su temprano trabajo sobre wavelets discretas (1983), Ingrid Daubechies, con su propuesta de wavelets ortogonales con soporte compacto (1988), Yves Meyer y Stephane Mallat, con su marco multiresolución (1989), Delrat con su interpretación de la transformada wavelet en tiempo-frecuencia (1991), Newland, con su transformada wavelet armónica, y muchos otros desde entonces.

Diferentes tipos de wavelets han sido utilizados para resolver problemas en las áreas de análisis de imágenes, diagnósticos médicos, sismología, análisis estadístico de datos, reconocimiento de patrones y muchas otras que actualmente se están investigando.

Pero son las wavelets de Daubechies D2N las que son estudiadas como objetivo principal de este trabajo. El tercer capítulo se inicia estudiando la wavelet de Haar que es también la primera de las wavelets de Daubechies. Aquí se demuestra con detalle que en efecto proporciona una base del espacio  $L^2(\mathbb{R})$ . Tal demostración brinda algunos elementos que ilustran un poco la manera en que se analiza una señal por medio de wavelets y sirve a la vez como introducción del concepto de análisis multiresolución que es presentado a continuación y que juega un papel importante en el estudio y construcción de wavelets. Una vez establecidos los elementos, teoremas y resultados que sustentan la construcción de wavelets ortonormales de soporte compacto a partir de un análisis multiresolución, en donde la transformada de Fourier y sus propiedades son utilizadas constantemente, se concluye el trabajo estableciendo el proceso para construir las wavelets de Daubechies D2N, en particular, obteniendo una ecuación recursiva y una aproximación de la gráfica de la wavelet D4.

Con toda la investigación realizada que consistió en la búsqueda bibliográfica en libros y artículos de internet, de lo cual se seleccionó lo más importante de acuerdo con los objetivos del trabajo y que es presentado aquí en cada capítulo conteniendo la información principal, los conceptos, teoremas y demás resultados importantes, se concluye con la presentación del documento que se espera sea una base para posteriores trabajos que profundicen en el estudio de esta área.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>1. Nociones básicas del análisis armónico</b>	<b>1</b>
1.1. De la serie a la transformada de Fourier . . . . .	1
1.1.1. Series de Fourier . . . . .	1
1.1.2. El espectro discreto . . . . .	3
1.1.3. Desarrollo de la transformada de Fourier . . . . .	6
1.2. Transformada de Fourier. Definición y cálculo formal . . . . .	10
1.3. Propiedades algebraicas de la transformada de Fourier . . . . .	11
1.4. Ejemplos . . . . .	12
1.5. Propiedades analíticas de la transformada de Fourier . . . . .	15
1.6. Convolución . . . . .	19
1.7. Aproximaciones a la identidad . . . . .	19
1.8. Inversión puntual de la transformada de Fourier . . . . .	23
1.9. La teoría en $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	28
1.10. Teoría de distribuciones . . . . .	31
<b>2. Introducción a la teoría de wavelets</b>	<b>35</b>
2.1. Localización en tiempo y frecuencia . . . . .	35
2.2. Wavelets comparadas con Fourier con ventana . . . . .	36
2.3. Diferentes tipos de transformadas wavelets . . . . .	38
2.4. Bases ortonormales y localización tiempo-frecuencia . . . . .	41
<b>3. Construcción de wavelets</b>	<b>45</b>
3.1. El sistema de Haar . . . . .	45
3.2. Análisis de multiresolución y construcción de wavelets . . . . .	49
3.3. Construcción de wavelets de soporte compacto . . . . .	69
<b>4. Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>A. Resultados del análisis real</b>	<b>91</b>
<b>B. Espacios de Hilbert</b>	<b>97</b>
B.1. Espacios Lineales Normados . . . . .	97
B.2. Ortogonalidad . . . . .	101
B.3. Bases en espacios de Banach . . . . .	104
B.4. Marcos en espacios de Hilbert . . . . .	106

<b>C. Algoritmo</b>	<b>109</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>111</b>

# Capítulo 1

## Nociones básicas del análisis armónico

El análisis armónico o análisis de Fourier estudia la representación de funciones o señales como superposición de ondas “básicas” o armónicos. Investiga y generaliza las nociones de series de Fourier y transformadas de Fourier. A lo largo de los siglos XIX y XX se ha convertido en una materia enorme con aplicaciones en campos diversos como el procesamiento de señales y la mecánica cuántica.

### 1.1. De la serie a la transformada de Fourier

#### 1.1.1. Series de Fourier

Una señal  $x(t)$  es periódica de período  $T_0$  si  $x(t) = x(t + kT_0)$  para todo  $k$  entero. La expansión en series de Fourier consiste en expresarla como una suma infinita de términos seno y coseno, que habitualmente se escribe como

$$\tilde{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} kt\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} kt\right). \quad (1.1)$$

Los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  representan las amplitudes de los términos coseno y seno, respectivamente. La cantidad  $\frac{2\pi}{T_0} = \Omega_0$  es la *frecuencia angular fundamental* (medida en radianes por segundo) de la señal, y en consecuencia, la cantidad  $k\frac{2\pi}{T_0} = k\Omega_0$  representa el  $k$ -ésimo armónico de la frecuencia fundamental. La *frecuencia fundamental*  $f_0$  medida en hertz (Hz) se define como  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  así que  $\Omega_0 = 2\pi f_0$ . Cada una de las funciones seno y coseno de la expresión (1.1) forman un conjunto ortogonal sobre el intervalo  $T_0$ , lo que significa que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\int_0^{T_0} \cos(m\Omega_0 t) \cos(n\Omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{T_0}{2} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\int_0^{T_0} \sin(m\Omega_0 t) \sin(n\Omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{T_0}{2} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\int_0^{T_0} \cos(m\Omega_0 t) \sin(n\Omega_0 t) dt = 0, \text{ para todo } m, n \quad (1.4)$$

Estas relaciones pueden verificarse analíticamente (calculando la integral).

Los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  se determinan por medio de las fórmulas:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos(k\Omega_0 t) x(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sin(k\Omega_0 t) x(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

La serie de Fourier de la ecuación (1.1) se puede escribir de una manera más compacta utilizando exponenciales complejas; basta sustituir en (1.1) los términos seno y coseno por su forma exponencial:

$$\cos(k\Omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{ik\Omega_0 t} + e^{-ik\Omega_0 t})$$

$$\sin(k\Omega_0 t) = i \frac{1}{2} (-e^{ik\Omega_0 t} + e^{-ik\Omega_0 t})$$

Se obtiene entonces

$$\tilde{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ik\Omega_0 t} + \left( \frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-ik\Omega_0 t} \right] \quad (1.5)$$

Definiendo el número complejo  $c_k$  con base a  $a_k$  y  $b_k$  como

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{si } k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

se puede escribir la ecuación (1.5) en la manera más simple

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\Omega_0 t} \quad (1.6)$$

Donde,

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-ik\Omega_0 t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.7)$$

La expresión (1.6) se conoce como serie de Fourier compleja y los coeficientes  $c_k$  se conocen como coeficientes complejos de Fourier.

La ecuación (1.7) explica cómo calcular todos los coeficientes complejos de Fourier a partir de una señal periódica  $x(t)$  dada. Por ello se la suele denominar ecuación de análisis. Por otra parte, la ecuación (1.6) indica cómo reconstruir la señal  $x(t)$  a partir de un conjunto de coeficientes  $c_k$  dados, y por tal motivo se la suele denominar ecuación de síntesis.

### 1.1.2. El espectro discreto

La representación de una señal periódica por medio de una serie de Fourier es equivalente a resolver la señal en sus diferentes componentes armónicos. La expresión de la serie de Fourier compleja (1.6) indica que una señal periódica  $x(t)$  de período  $T_0$  tiene componentes de frecuencia  $0, f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$ , donde  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  es la frecuencia fundamental. Mientras que  $x(t)$  pertenece al dominio tiempo, donde  $t$  es una variable definida continuamente sobre un intervalo finito o infinito, su descripción en el dominio de la frecuencia consta de componentes  $c_k$  concentrados en las frecuencias  $kf_0, k = 0, 1, 2, \dots$ . El gráfico de  $c_k$  en función de la frecuencia  $f = kf_0 = \frac{k}{T_0}$  se denomina espectro de la señal. Dada una señal  $x(t)$  se puede determinar su espectro utilizando la ecuación de análisis; recíprocamente, si se especifica el espectro, es posible determinar la señal temporal asociada utilizando la ecuación de síntesis. Esto implica que la señal periódica  $x(t)$  puede especificarse de dos formas equivalentes:

1. En el dominio tiempo, donde se representa  $x(t)$  como una función de la variable real tiempo;
2. En el dominio frecuencia, donde la señal es descrita por su espectro en función de las frecuencias armónicas de  $f_0$ .

Ambas representaciones son aspectos diferentes de un mismo fenómeno, y no son independientes una de otra, sino que están fuertemente relacionadas entre sí por las ecuaciones de síntesis y análisis, respectivamente.

En general, el coeficiente de Fourier  $c_k$  es un número complejo, de modo que se puede expresar en la forma polar

$$c_k = |c_k| e^{i \arg(c_k)}.$$

El término  $|c_k|$  define la amplitud de la  $k$ -ésima componente armónica de la señal  $\tilde{x}(t)$ , y la gráfica de  $|c_k|$  contra la frecuencia permite obtener el *espectro de amplitud discreto* de la señal. El gráfico del  $\arg(c_k)$  en función de la frecuencia se denomina *espectro de fase discreto* de la señal. Se dice que el espectro es discreto porque tanto la amplitud como la fase de  $c_k$  están concentrados en frecuencias que son múltiplos enteros (positivos y negativos) de la frecuencia fundamental  $f_0$ , y no están definidos para otros valores de frecuencia.

*Ejemplo 1.1.1.* Serie de Fourier de un coseno.

La función periódica  $\tilde{x}(t) = A \cos(\Omega_0 t)$  se puede expresar, usando la fórmula de Euler, como:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= A \cos(\Omega_0 t) \\ &= \frac{A}{2} e^{-i\Omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{i\Omega_0 t}.\end{aligned}$$

Una comparación con la ecuación (1.6) revela que esta expresión coincide con la serie de Fourier; por lo tanto, los únicos coeficientes complejos no nulos son  $c_{-1}$  y  $c_1$ , y su valor es

$$c_{-1} = c_1 = \frac{A}{2}.$$

El espectro discreto se muestra en la figura (1.1) donde ha sido graficado en las dos formas típicas: módulo y fase o parte real y parte imaginaria.

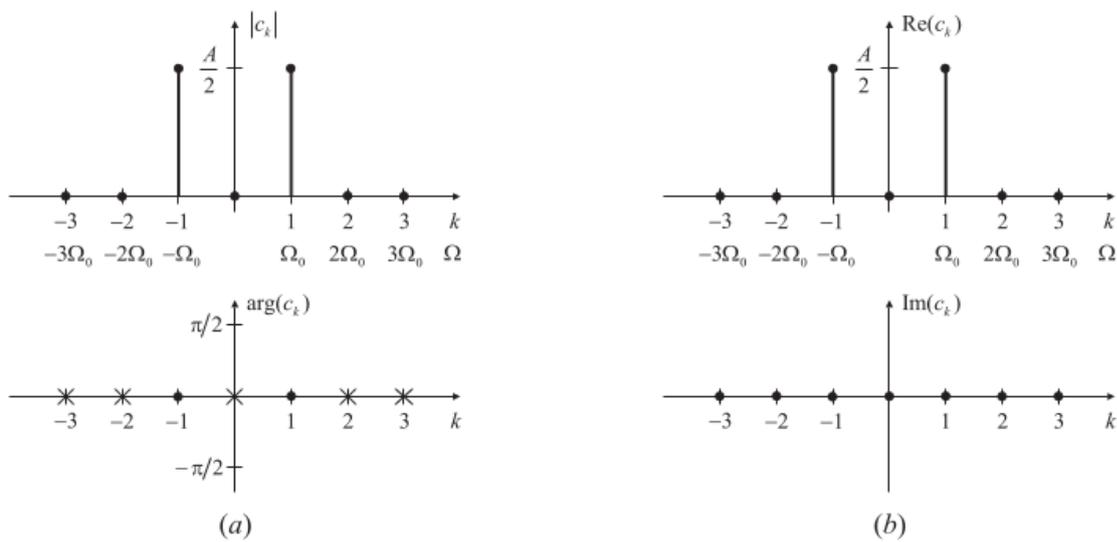


Figura 1.1: Espectro discreto de  $\tilde{x}(t) = A \cos(\Omega_0 t)$ ; (a) módulo-fase y (b) parte real-parte imaginaria.

*Ejemplo 1.1.2.* Serie de Fourier de un tren de pulsos rectangulares

La figura (1.2) muestra un tren periódico de pulsos rectangulares de amplitud  $A$ , duración  $\tau$  y período  $T_0$ . Por conveniencia se elige que el origen del tiempo ( $t = 0$ ) coincida con el centro del pulso. Sobre un período  $-\frac{T_0}{2} < t \leq \frac{T_0}{2}$ , la señal puede describirse analíticamente como

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} A, & \text{si } -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ \frac{A}{2}, & \text{si } t = \pm\frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.8)$$

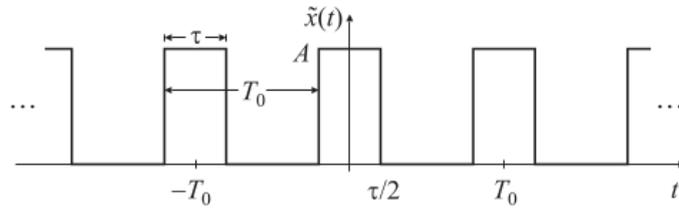


Figura 1.2: Tren periódico de pulsos rectangulares de amplitud  $A$ , duración  $\tau$  y período  $T_0$ .

El espectro discreto de  $\tilde{x}(t)$  formado por los coeficientes complejos  $c_k$  se calcula a partir de la ecuación (1.7). Se encuentra que

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-ik\Omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-ik\Omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{\pi k} \sin\left(\pi\tau \frac{k}{T_0}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

que también puede escribirse como

$$\begin{aligned} c_k &= A \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin\left(\pi\tau \frac{k}{T_0}\right)}{\pi\tau \frac{k}{T_0}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ &= A \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{k}{T_0}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

El espectro de amplitud  $|c_k|$  y de fase  $\arg(c_k)$  en función de los valores discretos de frecuencia  $f_k = \frac{k}{T_0}$ , para un ciclo de trabajo  $\frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{5}$ , se ha graficado en la figura (1.3). Se observa que:

1. El espaciado entre las líneas del espectro de la figura (1.3) está determinado por la frecuencia fundamental  $f_0$  de la señal, que es la inversa del período  $T_0$ ,  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  (en ciclos por segundo).
2. La envolvente de la magnitud del espectro está determinada por la amplitud  $A$  y la duración  $\tau$  del pulso, y sigue una forma tipo  $\frac{\sin x}{x}$ . El valor del espectro a la frecuencia  $f = 0$  es precisamente el valor medio de la señal  $\tilde{x}(t)$ , que vale  $\frac{A\tau}{T_0}$  (como se deduce de la figura (1.3)).
3. La envolvente del espectro de amplitud cruza por cero en frecuencias que son múltiplos de  $\frac{1}{\tau}$  (el ancho del pulso), y que pueden o no coincidir con las líneas espectrales separadas  $\frac{k}{T_0}$ . En este caso particular, como  $\frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{5}$  los ceros de la envolvente del espectro se obtienen para los múltiplos de 5 veces la frecuencia fundamental, como revela la figura (1.3 a).
4. El espectro de fase toma los valores  $0$  y  $\pi$ , según sea el signo de  $\text{sinc}\left(\tau \frac{k}{T_0}\right)$ . La elección del signo de  $\pi$  (positivo o negativo) es irrelevante; en la figura se han elegido de forma de preservar la antisimetría. Debe resaltarse que el valor de la fase es indefinido para aquellos armónicos en donde se anula  $c_k$  (en este caso, los múltiplos de  $5f_0$ ); esta indefinición en la fase se ha indicado con cruces en la figura (1.3 b).

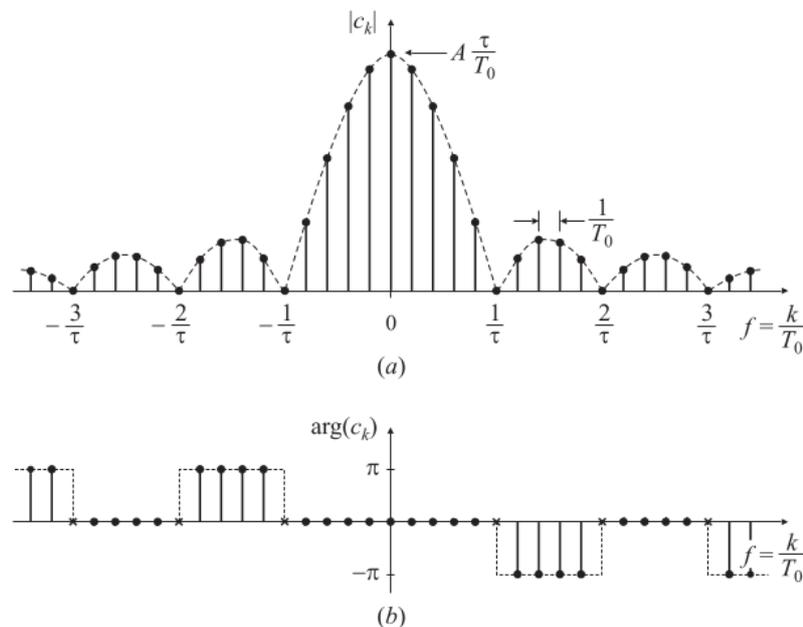


Figura 1.3: Tren periódico de pulsos rectangulares de amplitud  $A$ , duración  $\tau$  y período  $T_0$ .

### 1.1.3. Desarrollo de la transformada de Fourier

En la sección anterior se estudió cómo una señal periódica puede representarse como una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas. Estos resultados pueden extenderse para desarrollar una representación de señales aperiódicas como combinación lineal de exponenciales complejas. La introducción de esta representación es

una de las más importantes contribuciones de Fourier, y el desarrollo que se presenta aquí es muy similar al que él desarrolló en su trabajo original. Los coeficientes complejos de la serie de Fourier de la onda periódica cuadrada del ejemplo (1.1.2) están dados por la expresión (1.9), repetida aquí por comodidad,

$$c_k = A \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc} \left( \tau \frac{k}{T_0} \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.10)$$

donde  $T_0$  es el período de la señal, y  $\tau$  el tiempo durante el cual la señal toma el valor  $A$ . En la figura (1.4) se grafican los valores de estos coeficientes, para un valor fijo de  $\tau$  y distintos valores del período  $T_0$ , en función del número de armónico  $k$ . En la figura (1.5) se han repetido estos gráficos con algunas modificaciones. En primer lugar, se ha graficado  $T_0 c_k$  en lugar de  $c_k$ , y se ha modificado el eje de abscisas, graficando los coeficientes en función de la frecuencia  $f_k = \frac{k}{T_0}$  de los armónicos, y no en función del número  $k$  de armónico. La importancia de estos cambios puede apreciarse examinando la ecuación (1.11). Multiplicando  $c_k$  por  $T_0$  se obtiene

$$T_0 c_k = A \tau \operatorname{sinc} \left( \tau \frac{k}{T_0} \right) = A \tau \left. \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right|_{f=\frac{k}{T_0}} \quad (1.11)$$

Pensando en  $f$  como una variable continua, la función  $A \tau \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f}$  representa la envolvente de los coeficientes  $T_0 c_k$ , y estos coeficientes son simplemente muestras equiespaciadas de esta envolvente. Además, si  $\tau$  se deja fijo, la envolvente de  $T_0 c_k$  es independiente de  $T_0$ . Sin embargo, tal como se observa en la figura (1.5), a medida que aumenta el espaciado entre los pulsos ( $T_0$  crece o disminuye  $f_0$ ) la envolvente se “muestra” más finamente. Cuando  $T_0$  se hace arbitrariamente grande la onda periódica cuadrada original se parece a un pulso: en el dominio tiempo se tiene una señal aperiódica que coincide con un período de la onda cuadrada. Además los coeficientes de la serie de Fourier (multiplicados por  $T_0$ ) son muestras cada vez más próximas entre sí de la envolvente, de manera que, en un sentido que se especificará en seguida, el conjunto de coeficientes de la serie de Fourier tiende a la función envolvente cuando  $T_0 \rightarrow \infty$ .

Este ejemplo ilustra la idea básica del desarrollo de Fourier para representar señales aperiódicas. Específicamente, se piensa en una señal aperiódica como el límite de una señal periódica cuando el período se hace arbitrariamente grande, y se examina el comportamiento en el límite de la representación en series de Fourier. Para tal fin se considera una señal aperiódica  $x(t)$  cualquiera que tenga duración finita; esto es, que para algún número  $T$ ,  $x(t) = 0$  para  $|t| > T$ , como se muestra en la figura (1.6 a). A partir de esta señal aperiódica se puede construir una señal periódica  $\tilde{x}(t)$  (de la cual  $x(t)$  sea un período) replicando  $x(t)$  cada  $T_0$  unidades de tiempo como se observa en la figura (1.6 b). A medida que se incrementa  $T_0$ ,  $\tilde{x}(t)$  se asemeja a  $x(t)$  sobre un intervalo de tiempo mayor y en el límite, cuando  $T_0 \rightarrow \infty$ , ambas señales son idénticas para cualquier valor finito de  $t$ . Es interesante examinar este efecto sobre la representación en serie de Fourier de  $\tilde{x}(t)$  (la señal periódica). Reescribiendo por conveniencia las ecuaciones (1.6) y (1.7), se tiene

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k f_0 t} \quad (1.12)$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-2\pi i k f_0 t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.13)$$

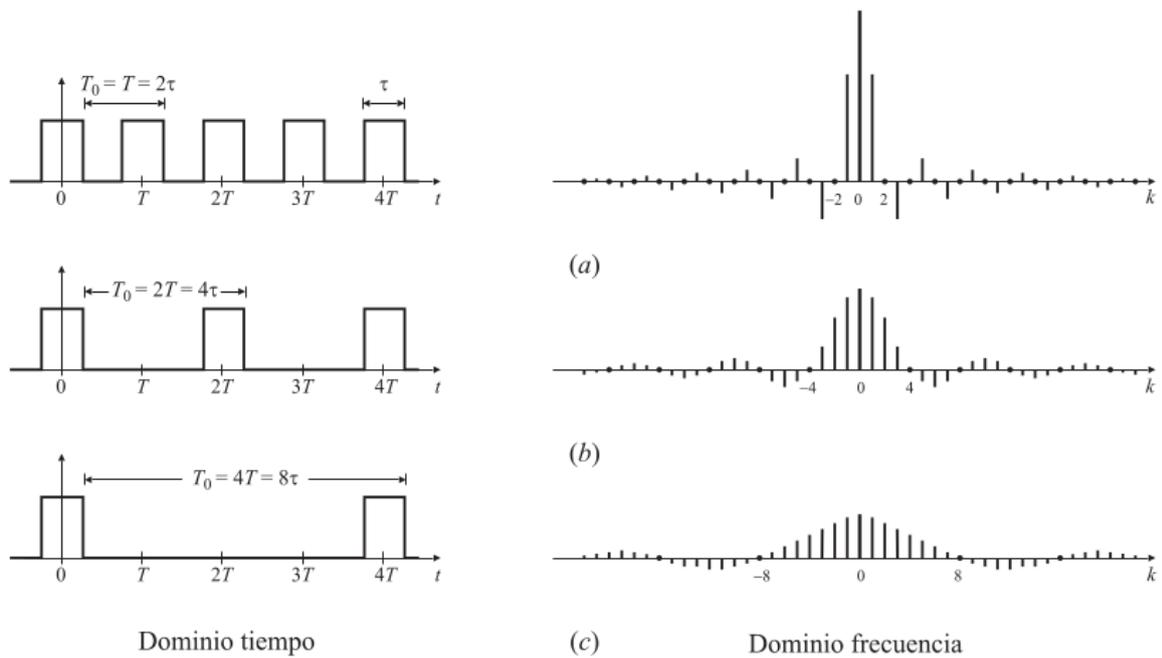


Figura 1.4: Ondas cuadradas de distintos períodos y sus coeficientes de Fourier en función del número de armónico. (a)  $T_0 = 2\tau$ ; (b)  $T_0 = 4\tau$ ; (c)  $T_0 = 8\tau$ .

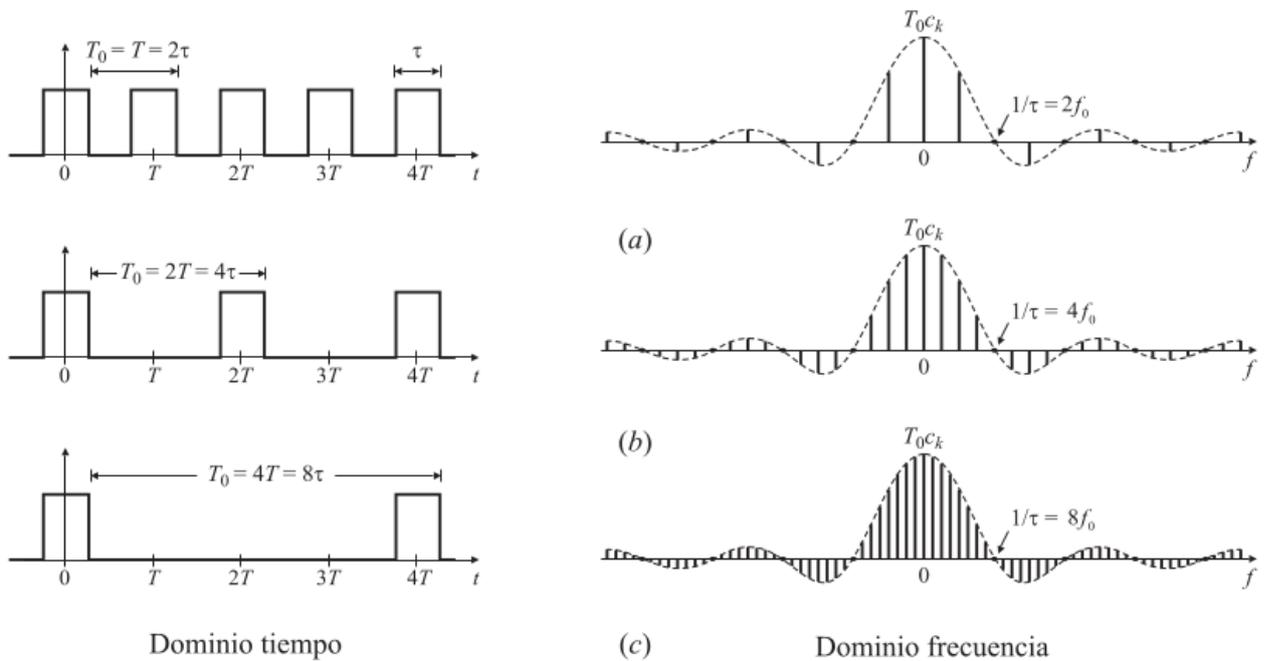


Figura 1.5: Ondas cuadradas de distintos períodos y sus coeficientes de Fourier (escalados por el período  $T_0$ ) en función de la frecuencia  $f_k = \frac{k}{T_0}$ . (a)  $T_0 = 2\tau$ ; (b)  $T_0 = 4\tau$ ; (c)  $T_0 = 8\tau$ .

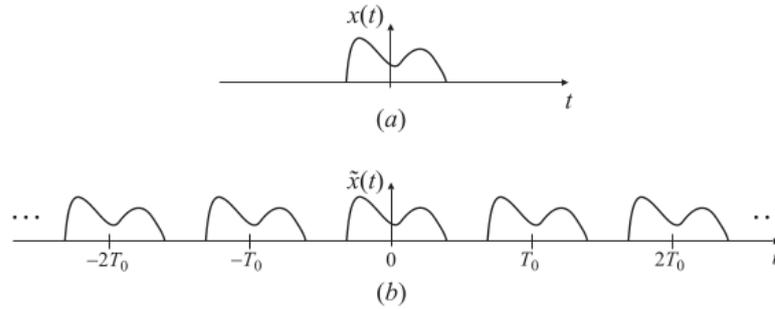


Figura 1.6: (a) Señal aperiódica  $x(t)$ ; (b) señal periódica  $\tilde{x}(t)$  construida a partir de  $x(t)$ .

Dado que  $\tilde{x}(t) = x(t)$  cuando  $|t| < \frac{T_0}{2}$ , y como  $x(t) = 0$  fuera de este intervalo, (1.13) puede reescribirse como

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-2\pi i k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i k f_0 t} dt. \quad (1.14)$$

Si se define  $X(f)$  como la envolvente de  $T_0 c_k$  reemplazando la variable discreta  $k f_0$  por una variable continua  $f$ , se tiene

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt. \quad (1.15)$$

y entonces los coeficientes  $c_k$  resultan

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(k f_0) \quad (1.16)$$

Combinando (1.16) con (1.12),  $\tilde{x}(t)$  puede escribirse en función de  $X(f)$  como

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(k f_0) e^{2\pi i k f_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k f_0) e^{2\pi i k f_0 t} f_0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

dado que  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ . Cuando  $T_0 \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{x}(t)$  se aproxima a  $x(t)$ , y por lo tanto, (1.17) es una representación de  $x(t)$ . Además,  $f_0 \rightarrow 0$   $T_0 \rightarrow \infty$ , y entonces el miembro derecho de (1.17) se convierte en una integral. Esto puede apreciarse interpretando gráficamente la ecuación (1.17). Cada término de la sumatoria es el área de un rectángulo de altura  $X(k f_0) e^{2\pi i k f_0 t}$  y ancho  $f_0$  (como  $t$  no es una “variable” en este análisis se está calculando el valor de  $\tilde{x}(\cdot)$  para un valor determinado de su argumento)

De acuerdo con la interpretación de Riemann de la integral, cuando  $f_0 \rightarrow 0$  la sumatoria de (1.17) converge, por definición, a la integral de  $X(f) e^{2\pi i f t}$ . De acuerdo entonces al hecho que  $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$  cuando  $T_0 \rightarrow \infty$ , las ecuaciones (1.17) y (1.15) se convierten en

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{2\pi i f t} df \quad (1.18)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi i ft} dt. \quad (1.19)$$

respectivamente. Las ecuaciones (1.18) y (1.19) se denominan par transformado de Fourier; la ecuación (1.19) se denomina transformada de Fourier de  $x(t)$ , o ecuación de análisis, mientras que la ecuación (1.18) es la transformada inversa de Fourier de  $X(f)$ , o también ecuación de síntesis.

## 1.2. Transformada de Fourier. Definición y cálculo formal

*Definición 1.2.1.* Funciones integrables.

Sea

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \forall a < b, \int_a^b |f(t)| dt < \infty \right\}$$

y

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right\}.$$

$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  es el espacio de *funciones localmente integrables* en  $\mathbb{R}$  y  $L^1(\mathbb{R})$  es el espacio de *funciones integrables* en  $\mathbb{R}$ .

Sea  $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ .  $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$ , el cual se designará frecuentemente por  $\int g(t)dt$ , es

$$\lim_{S \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} \int_{-S}^T g(t)dt.$$

El valor principal de Cauchy,  $pv \int g(t)dt$ , es

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T g(t)dt.$$

Si  $\int g(t)dt$  existe, entonces  $pv \int g(t)dt$  existe y los dos integrales tienen el mismo valor. En la dirección opuesta,  $pv \int g(t)dt$  puede existir mientras que  $\int g(t)dt$  no, como sucede con  $g(t) = t$ . Por otro lado, si  $pv \int g(t)dt$  existe y  $g$  es impar, i.e.,  $g(t) = g(-t)$ , o  $g \geq 0$  en  $\mathbb{R}$ , entonces

$$pv \int g(t)dt = \int g(t)dt.$$

$\int_a^b g(t)dt$  puede entenderse desde el punto de vista de la integral de Lebesgue y si no, la integral de Riemann funciona para la mayoría de los cálculos y funciones que se van a considerar.

*Definición 1.2.2.* La transformada de Fourier de  $f \in L^1(\mathbb{R})$  es la función  $F$  definida como

$$F(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i t \gamma} dt, \quad \gamma \in \hat{\mathbb{R}},$$

donde  $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ .

Notacionalmente, se escribirá el pareamiento entre la función  $f$  y  $F$  en una de las formas siguientes:

$$f \leftrightarrow F, \hat{f} = F.$$

El espacio de transformadas de Fourier de  $L^1$ -funciones es denotado por  $A(\hat{\mathbb{R}})$ , i.e.,

$$A(\hat{\mathbb{R}}) = \{F : \hat{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C} : \exists f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ tal que } \hat{f} = F\}.$$

*Definición 1.2.3.* Fórmula de inversión.

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y sea  $\hat{f} = F$ . La transformada inversa de Fourier es

$$\check{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \tag{1.20}$$

Se demostrará en el teorema (1.8.2) bajo que condiciones se cumple que  $\check{F} = f$ .

Considerando el pareamiento formal  $f \leftrightarrow F$ , donde  $f = f_1 + i f_2$  y  $F = F_1 + i F_2$ . Entonces por la definición de  $F$ , se obtiene:

$$F_1(\gamma) + i F_2(\gamma) = \int (f_1(t) + i f_2(t)) (\cos 2\pi t \gamma - i \sin 2\pi t \gamma) dt,$$

y entonces

$$F_1(\gamma) = \int (f_1(t) \cos 2\pi t \gamma + f_2(t) \sin 2\pi t \gamma) dt$$

y

$$F_2(\gamma) = \int (f_2(t) \cos 2\pi t \gamma - f_1(t) \sin 2\pi t \gamma) dt.$$

*Definición 1.2.4.* Acotada variación

Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tiene *acotada variación* en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  si existe una constante  $M$  tal que para todo conjunto finito  $t_0 < t_1 < \dots < t_n, t_j \in I$ , se tiene

$$\sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leq M.$$

En este caso se escribirá  $f \in BV(I)$ , y nótese que podría ser  $I = \mathbb{R}$ . Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tiene acotada variación en cada intervalo de longitud finita, entonces  $f$  tiene acotada variación *localmente* y se escribirá  $f \in BV_{\text{loc}}(I)$ . Las funciones que tienen acotada variación en intervalos acotados tienen gráficos de longitud finita y tales funciones son una generalización natural de las funciones continuamente diferenciables.

### 1.3. Propiedades algebraicas de la transformada de Fourier

Notacionalmente, para un  $u$  fijo y una función  $f$  dada, se escribirá

$$(\tau_u f)(t) = f(t - u).$$

$\tau_u f$  es la traslación de  $f$  por  $u$ .

*Teorema 1.3.1.* Propiedades algebraicas de la transformada de Fourier

- a. **Linealidad.** Considerando  $f_j \leftrightarrow \hat{f}_j$  y sea  $c_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2$ , donde  $f_j \in L^1(\mathbb{R})$ . Entonces  $(c_1 f_1 + c_2 f_2)^\wedge(\gamma) = (c_1 \hat{f}_1 + c_2 \hat{f}_2)(\gamma)$ .
- b. **Simetría.** Considerando  $f \leftrightarrow \hat{f}$ , donde  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y  $\hat{f} \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ . Entonces  $\hat{\hat{f}}(\gamma) = f(-\gamma)$ . (Aquí  $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ )
- c. **Conjugación.** Considerando  $f \leftrightarrow \hat{f}$ , donde  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Entonces  $(\overline{f})^\wedge(\gamma) = \overline{\hat{f}(-\gamma)}$ .
- d. **Traslación.** Considerando  $f \leftrightarrow \hat{f}$ , donde  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y tomando  $u \in \mathbb{R}$ . Entonces  $(\tau_u f)^\wedge(\gamma) = e^{-2\pi i u \gamma} \hat{f}(\gamma)$ .
- e. **Modulación.**  $f \leftrightarrow \hat{f}$ , donde  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y tomando  $\lambda \in \hat{\mathbb{R}}$ . Entonces  $(e^{2\pi i t \lambda} f(t))^\wedge(\gamma) = \hat{f}(\gamma - \lambda)$ .
- f. **Dilatación en tiempo.**  $f \leftrightarrow \hat{f}$ , donde  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y tomando  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Se define la  $\lambda$ -dilatación de  $f$  por

$$f_\lambda(t) = \lambda f(\lambda t).$$

$$\text{Entonces } (f_\lambda)^\wedge(\gamma) = \frac{\lambda}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right).$$

La prueba formal de estos resultados se sigue fácilmente de la definición de transformada de Fourier y de las propiedades de integración, por lo que se hará solo un comentario con respecto a la parte b. Resulta que la integrabilidad de  $f$  y  $\hat{f}$  es suficiente para la validez de la fórmula de inversión (1.20), la cual es usada en la prueba de la parte b dado que se tiene  $\hat{\hat{F}}(t) = \hat{F}(-t)$ . La verificación de esta suficiencia requiere algún trabajo el cual se tratará en el teorema 1.8.2.

## 1.4. Ejemplos

*Ejemplo 1.4.1. La Sinc o función de Dirichlet*

Sea  $f(t) = \mathbb{1}_{[-T, T]}(t)$ . Claramente, se tiene  $\hat{\mathbb{1}}_{[-T, T]}(\gamma) = \frac{\sin 2\pi T \gamma}{\pi \gamma}$ . Notacionalmente, se escribe

$$d(\gamma) = \frac{\sin \gamma}{\pi \gamma}$$

$$\text{sinc}(\gamma) = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi \gamma},$$

así que,  $\hat{\mathbb{1}}_{[-T, T]}(\gamma) = d_{2\pi T}(\gamma)$ . Si  $\lambda > 0$ , entonces  $\hat{\mathbb{1}}_{[-\lambda/2\pi, \lambda/2\pi]} = d_\lambda$ . Se conoce a  $d$  como la *función de Dirichlet*.

**Ejemplo 1.4.2. La función de Poisson**

Sea  $f(t) = e^{-2\pi r|t|}$ ,  $r > 0$ . Para calcular  $\hat{f}$  se debe calcular

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T e^{-2\pi r|t|} e^{-2\pi i t \gamma} dt &= \int_{-T}^0 e^{2\pi r t} e^{-2\pi i t \gamma} dt + \int_0^T e^{-2\pi r t} e^{-2\pi i t \gamma} dt \\ &= \frac{1}{2\pi(r - i\gamma)} (1 - e^{-2\pi T(r - i\gamma)}) - \frac{1}{2\pi(r + i\gamma)} (e^{-2\pi T(r + i\gamma)} - 1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r - i\gamma} + \frac{1}{r + i\gamma} \right) + \epsilon(T). \end{aligned}$$

Claramente,  $\lim_{T \rightarrow \infty} \epsilon(T) = 0$  porque  $r > 0$ ; y entonces,

$$\hat{f}(\gamma) = \frac{r}{\pi(r^2 + \gamma^2)}.$$

Se escribirá

$$p(\gamma) = \frac{1}{\pi(1 + \gamma^2)}$$

así que  $p_{(1/r)}(\gamma) = \hat{f}(\gamma)$ . Si  $\lambda = \frac{1}{r} > 0$ , entonces

$$e^{-2\pi|t|/\lambda} \leftrightarrow p_\lambda(\gamma).$$

Se conoce a  $p$  como la *función de Poisson*. Nótese que el decrecimiento exponencial de  $f$  es transformado en el decrecimiento polinomial de  $\hat{f}$ .

**Ejemplo 1.4.3. El Gaussiano**

Sea  $f(t) = e^{-\pi r t^2}$ ,  $r > 0$ . Se podría calcular  $\hat{f}$  por medio de integrales de contorno, pero mejor se trabajará con un real y clásico enfoque.

Por definición de  $\hat{f}$ , la cual es real y par, se tiene

$$\hat{f}'(\gamma) = -2\pi i \int t e^{-\pi r t^2} e^{-2\pi i t \gamma} dt. \quad (1.21)$$

Notando que

$$\frac{d}{dt} (e^{-\pi r t^2}) = -2\pi r t e^{-\pi r t^2},$$

puede reescribirse (1.21) como

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\gamma) &= -2\pi i \int \frac{-1}{2\pi r} (e^{-\pi r t^2})' e^{-2\pi i t \gamma} dt \\ &= \frac{i}{r} \left[ e^{-\pi r t^2} e^{-2\pi i t \gamma} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int e^{-\pi r t^2} (-2\pi i \gamma) e^{-2\pi i t \gamma} dt \right] \\ &= \frac{-2\pi \gamma}{r} \hat{f}(\gamma). \end{aligned}$$

Así,  $\hat{f}$  es una solución de la ecuación diferencial

$$\hat{f}'(\gamma) = \frac{-2\pi \gamma}{r} \hat{f}(\gamma); \quad (1.22)$$

y (1.22) se resuelve con métodos elementales con solución

$$\hat{f}(\gamma) = Ce^{-\pi\gamma^2/r}.$$

Haciendo  $\gamma = 0$  y usando la definición de transformada de Fourier, se observa que

$$C = \int e^{-\pi r t^2} dt.$$

Con la intención de calcular  $C$  primero se evalúa  $a \equiv \int_0^\infty e^{-u^2} du$ :

$$\begin{aligned} a^2 &= \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^\infty e^{-u} du = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Así,  $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  y entonces

$$\int e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Consecuentemente,

$$C = \int e^{-\pi r t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \int e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Por lo tanto, se ha demostrado que

$$e^{-\pi r t^2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\pi\gamma^2/r}.$$

Se escribe

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$$

de manera que si  $\lambda > 0$ , se tiene

$$g_\lambda(t) \leftrightarrow e^{-(\pi\gamma/\lambda)^2}.$$

En particular,

$$\frac{1}{\sqrt{r}} g_{\sqrt{\pi r}} \leftrightarrow g_{\sqrt{\pi/r}}$$

y entonces  $g_{\sqrt{\pi}} \leftrightarrow g_{\sqrt{\pi}}$ . Se conoce a  $g$  como la *función de Gauss* o *Gaussiano*.

#### Ejemplo 1.4.4. La función de Fejér

Sea  $f(t) = \max(1 - |t|, 0)$ . En  $[-1, 1]$ , la gráfica de  $f$  consiste de los lados iguales de un

triángulo isósceles de altura 1;  $f$  se anula fuera de  $[-1, 1]$ . La transformada de Fourier de  $f$  es

$$\begin{aligned}\hat{f}(\gamma) &= \int_0^1 (1-t)e^{-2\pi it\gamma} dt + \int_{-1}^0 (1+t)e^{-2\pi it\gamma} dt \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi i\gamma} + \frac{1}{(2\pi i\gamma)^2} (e^{-2\pi i\gamma} - 1) \right] + \left[ -\frac{1}{2\pi i\gamma} - \frac{1}{(2\pi i\gamma)^2} (1 - e^{-2\pi i\gamma}) \right] \\ &= \frac{-2 + 2 \cos 2\pi\gamma}{(2\pi i\gamma)^2} \\ &= \frac{2(1 - \cos 2\pi\gamma)}{(2\pi\gamma)^2} \\ &= \frac{\sin^2 \pi\gamma}{(\pi\gamma)^2},\end{aligned}$$

idénticamente,

$$\hat{f}(\gamma) = \left( \frac{\sin \pi\gamma}{\pi\gamma} \right)^2.$$

Notacionalmente, haciendo  $\Delta = f$  y

$$w(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin \gamma/2}{\gamma/2} \right)^2,$$

de tal manera que  $w_{2\pi}(\gamma) = \hat{\Delta}(\gamma)$ , es decir,

$$\Delta \leftrightarrow w_{2\pi}. \quad (1.23)$$

Así, si  $\lambda > 0$ , entonces

$$\max \left( 1 - \frac{|q\pi t|}{\lambda}, 0 \right) = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta_{2\pi/\lambda}(t) \leftrightarrow w_\lambda(\gamma). \quad (1.24)$$

Se conoce a  $w$  como la *función de Fejér*,

## 1.5. Propiedades analíticas de la transformada de Fourier

*Teorema 1.5.1.* Propiedades analíticas de la transformada de Fourier.

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

- Acotación. Para cada  $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$ ,  $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .
- Continuidad.  $\hat{f}$  es uniformemente continua en  $\hat{\mathbb{R}}$ , i.e., para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $\gamma$  y cada  $\lambda$  para los cuales  $|\lambda| < \delta$ , se tiene  $|\hat{f}(\gamma + \lambda) - \hat{f}(\gamma)| < \epsilon$ . En particular,  $\hat{f}$  es continua en  $\hat{\mathbb{R}}$ .
- Lemma Riemann-Lebesgue. Se cumple que  $\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \hat{f}(\gamma) = 0$ .

- d. Diferenciación en el tiempo. Supóngase que  $f^{(m)}$ ,  $m \geq 1$ , existe en todo punto y que  $f^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$ . Asumiendo que

$$f(\pm\infty) = \dots = f^{(m-1)}(\pm\infty) = 0,$$

donde  $f(\pm\infty)$  indica que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$  y que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$ . Entonces

$$\widehat{f^{(m)}}(t) = (2\pi i \gamma)^m \hat{f}(\gamma).$$

- e. Diferenciación en frecuencia. Supóngase que  $t^m f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ . Entonces  $f(t), \dots, t^{(m-1)} f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}^1, \dots, \hat{f}^{(m)}$  existe en todo punto y

$$\forall j = 0, 1, \dots, m, ((-2\pi i t)^j f)(t) = \hat{f}^{(j)}(\gamma).$$

*Demostración.* a. Se cumple  $|\hat{f}(\gamma)| \leq \int |f(t)| |e^{-2\pi i t \gamma}| dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ .

- b. Empezando con la estimación

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\gamma + \lambda) - \hat{f}(\gamma)| &\leq \int |f(t)| |e^{-2\pi i t \gamma} (e^{-2\pi i t \lambda} - 1)| dt \\ &= \int |f(t)| |e^{-2\pi i t \lambda} - 1| dt \end{aligned} \quad (1.25)$$

Sea  $f_{[\lambda]}(t) = |f(t)| |e^{-2\pi i t \lambda} - 1|$  de manera que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_{[\lambda]}(t) = 0$  para todo  $t$  y  $|f_{[\lambda]}(t)| \leq 2|f(t)|$ . Así, CDL (el teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, Teorema A.0.8 del Apéndice A) aplicado al lado derecho de (1.25), el cual es independiente de  $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$ . Consecuentemente, se tiene

$$\forall \epsilon > 0, \exists \lambda_0 > 0 \text{ tal que } \forall \lambda \in (0, \lambda_0) \text{ y } \forall \gamma \in \hat{\mathbb{R}}, |\hat{f}(\gamma + \lambda) - \hat{f}(\gamma)| < \epsilon. \quad (1.26)$$

Ésta es la continuidad uniforme deseada.

- c. Supóngase que  $f = 1_{[a,b]}$  y  $\gamma \neq 0$ . Entonces

$$|\hat{f}(\gamma)| = \left| \int_a^b e^{-2\pi i t \gamma} dt \right| = \frac{1}{2\pi |\gamma|} |e^{-2\pi i b \gamma} - e^{-2\pi i a \gamma}| \leq \frac{1}{\pi |\gamma|},$$

y el lado derecho tiende a 0 cuando  $|\gamma|$  tiende a infinito.

Por lo tanto,  $\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\gamma)| = 0$  si  $f = \sum_{j=1}^n c_j 1_{[a_j, b_j]}$ , donde  $b_j \leq a_{j+1}$ .

Para una arbitraria  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , se toma  $\epsilon > 0$ ; y debe encontrarse  $\gamma_\epsilon > 0$  tal que si  $|\gamma| > \gamma_\epsilon$  entonces  $|\hat{f}(\gamma)| < \epsilon$ . Para tal fin se invoca el teorema (A.0.6) y se elige

$$g = \sum_{j=1}^n c_j 1_{[a_j, b_j]},$$

donde  $b_j \leq a_{j+1}$ , por los cuales  $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \frac{\epsilon}{2}$ . Consecuentemente, se tiene

$$\begin{aligned} \forall \gamma \in \hat{\mathbb{R}}, |\hat{f}(\gamma)| &\leq |\hat{f}(\gamma) - \hat{g}(\gamma)| + |\hat{g}(\gamma)| \\ &\leq \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R})} + |\hat{g}(\gamma)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + |\hat{g}(\gamma)|. \end{aligned}$$

Del paso previo se puede tomar  $\gamma_\epsilon > 0$  tal que  $|\gamma| > \gamma_\epsilon$  implica  $|\hat{g}(\gamma)| < \frac{\epsilon}{2}$ . Ésto completa la prueba.

d. Por integración por partes (Teorema A.0.13), se calcula

$$\begin{aligned}
& \int_{-S}^T f^{(m)}(t) e^{-2\pi i t \gamma} dt \\
&= f^{(m-1)}(t) e^{-2\pi i t \gamma} \Big|_{-S}^T + 2\pi i \gamma \int_{-S}^T f^{(m-1)}(t) e^{-2\pi i t \gamma} dt \\
&= f^{(m-1)}(t) e^{-2\pi i t \gamma} \Big|_{-S}^T \\
&\quad + 2\pi i \gamma \left( f^{(m-2)}(t) e^{-2\pi i t \gamma} \Big|_{-S}^T + 2\pi i \gamma \int_{-S}^T f^{(m-2)}(t) e^{-2\pi i t \gamma} dt \right) \\
&= \dots \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (2\pi i \gamma)^j \left( f^{(m-(j+1))}(T) e^{-2\pi i T \gamma} - f^{(m-(j+1))}(-S) e^{2\pi i S \gamma} \right) \\
&\quad + (2\pi i \gamma)^m \int_{-S}^T f(t) e^{-2\pi i t \gamma} dt.
\end{aligned}$$

Haciendo  $S, T \rightarrow \infty$ , el lado derecho converge a  $(2\pi i \gamma)^m \hat{f}(\gamma)$  y el resultado está probado.

e. Sin pérdida de generalidad sea  $m = 1$  y  $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$  fijo. Entonces

$$\frac{\hat{f}(\gamma + \lambda) - \hat{f}(\gamma)}{\lambda} = \int f(t) e^{-2\pi i t \gamma} \left( \frac{e^{-2\pi i t \lambda} - 1}{\lambda} \right) dt,$$

y se designa el integrando por  $f(t, \lambda)$  ( $\gamma$  es fijo).

Por el teorema del valor medio se tiene el estimado

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^{-2\pi i t \lambda} - 1}{\lambda} \right| &= \left| \frac{\cos 2\pi t \lambda - 1}{2\pi t \lambda} 2\pi t - i \frac{\sin 2\pi t \lambda}{2\pi t \lambda} 2\pi t \right| \\
&\leq 2\pi |t| \left| \frac{\cos 2\pi t \lambda - 1}{2\pi t \lambda} \right| + 2\pi |t| \\
&\leq 2\pi |t| \frac{|\sin \xi| |2\pi t \lambda|}{|2\pi t \lambda|} + 2\pi |t| \\
&\leq 4\pi |t|
\end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$|f(t, \lambda)| \leq 4\pi |t f(t)| \text{ a.e.}, \quad (1.27)$$

y también se sabe que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(t, \lambda) = -2\pi i t f(t) e^{-2\pi i t \gamma} \text{ a.e.}, \quad (1.28)$$

como

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\cos 2\pi t \lambda - 1}{\lambda} = 2\pi t \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha} = 0$$

y

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-i \sin 2\pi t \lambda}{\lambda} = -2\pi i t.$$

Por (1.27) y (1.28) es posible invocar CDL y asegurar que

$$\exists \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\gamma + \lambda) - \hat{f}(\gamma)}{\lambda} = \int (-2\pi it) f(t) e^{-2\pi i t \gamma} dt.$$

□

La proposición 1.5.1 siguiente es una extensión para  $m < 0$  del Teorema 1.5.1d

*Proposición 1.5.1.* Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Se define  $g(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du$  y se asume que  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . (Nótese que  $\int f(t) dt = 0$  porque  $g \in L^1(\mathbb{R})$ ) Entonces  $\hat{f}(\gamma) = 2\pi i \gamma \hat{g}(\gamma)$  para  $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$ , y también

$$\forall \gamma \in \hat{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, \hat{g}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i \gamma} \hat{f}(\gamma),$$

donde  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\gamma)}{2\pi i \gamma} = \hat{g}(0)$ .

*Demostración.* Se calcula

$$\begin{aligned} & \int_{-S}^T g'(t) e^{-2\pi i t \gamma} dt \\ &= g(t) e^{-2\pi i t \gamma} \Big|_{-S}^T + \int_{-S}^T g(t) (2\pi i \gamma) e^{-2\pi i t \gamma} dt. \end{aligned}$$

Como  $g(\pm\infty) = 0$  y  $g'(t) = f(t)$  en casi todo punto, por TFCI, se puede concluir que  $2\pi i \gamma \hat{g}(\gamma) = \hat{f}(\gamma)$ .

□

*Ejemplo 1.5.1.*  $C_0(\hat{\mathbb{R}}) \setminus A(\hat{\mathbb{R}}) \neq \emptyset$

El teorema 1.5.1b,c lleva a concluir que  $A(\hat{\mathbb{R}}) \subseteq C_0(\hat{\mathbb{R}})$ , donde  $C_0(\hat{\mathbb{R}})$  es el espacio de funciones continuas  $F$  en  $\hat{\mathbb{R}}$  para las cuales

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} F(\gamma) = 0.$$

Es posible verificar que esta inclusión es propia. Por ejemplo, si  $F$  es definida como

$$F(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\log \gamma}, & \text{si } \gamma > e \\ \frac{\gamma}{e}, & \text{si } 0 \leq \gamma \leq e \end{cases}$$

en  $[0, \infty)$  y como  $-F(-\gamma)$  en  $(-\infty, 0]$ , entonces  $F \in C_0(\hat{\mathbb{R}})$ . El hecho que  $F \notin A(\hat{\mathbb{R}})$  se debe a la divergencia de  $\int_e^\infty \frac{d\gamma}{\gamma \log \gamma}$ .

### Perspectiva desde el cálculo operacional

El teorema 1.5.1 es el mayor componente en el cálculo operacional usado en ingeniería eléctrica y en la resolución de varias ecuaciones diferenciales. Típicamente, un problema de cálculo, por ejemplo, una ecuación diferencial, es transformado en un problema de álgebra por el teorema 1.5.1d; se resuelve el problema de álgebra, y la solución es transformada por la fórmula de inversión en la solución del problema original. Una parte de este formalismo es la noción de *convolución*.

## 1.6. Convolución

*Definición 1.6.1.* Convolución

Para  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , la convolución de  $f$  y  $g$ , denotada por  $f * g$ , es

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du.$$

*Proposición 1.6.1.* Sea  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Entonces  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  y  $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$

*Demostración.* Se omite verificar que  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ . Asumiendo este hecho, se usa el Teorema de Fubini-Tonelli (A.0.9) para calcular

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\gamma) &= \int \int f(t-u)g(u)e^{-2\pi i t \gamma} dudt \\ &= \int \int f(t-u)g(u)e^{-2\pi i(t-u)\gamma} e^{-2\pi i u \gamma} dudt \\ &= \int (f(t-u)g(u)e^{-2\pi i(t-u)\gamma} dt) g(u)e^{-2\pi i u \gamma} du \\ &= \int \hat{f}(\gamma)g(u)e^{-2\pi i u \gamma} du \\ &= \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma). \end{aligned}$$

□

## 1.7. Aproximaciones a la identidad

La siguiente noción es crítica en la aproximación al impulso unitario y para proveer ejemplos en aplicaciones incluyendo procesamiento de señales.

*Definición 1.7.1.* **Aproximación a la identidad**

Una aproximación a la identidad es una familia  $\{k_{(\lambda)} : \lambda > 0\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$  de funciones con las propiedades:

- $\forall \lambda > 0, \int k_{(\lambda)}(t)dt = 1;$
- $\exists K$  tal que  $\forall \lambda > 0, \|k_{(\lambda)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq K;$
- $\forall \eta > 0, \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{|t| \geq \eta} |k_{(\lambda)}(t)| dt = 0.$

El subíndice  $(\lambda)$  en la definición 1.7.1 no necesariamente denota una dilatación. El resultado siguiente, sin embargo, muestra que las dilataciones proporcionan una amplia clase de aproximaciones a la identidad.

*Proposición 1.7.1.* Sea  $k \in L^1(\mathbb{R})$  con la propiedad que  $\int k(t)dt = 1$ . La familia  $\{k_{(\lambda)} : k_{(\lambda)}(t) = \lambda k(\lambda t), \lambda > 0\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$  de dilataciones es una aproximación a la identidad.

*Demostración.* Para verificar la condición de la definición 1.7.1a, se calcula

$$\int k_\lambda(t) dt = \lambda \int k(\lambda t) dt = \int k(t) dt = 1.$$

Para la parte b se calcula

$$\int |k_\lambda(t)| dt = \lambda \int |k(\lambda t)| dt = \int |k(u)| du = K < \infty,$$

donde  $K$  es finito porque  $k \in L^1(\mathbb{R})$ .

Para la parte c, se toma  $\eta > 0$  y se calcula

$$\int_{|t| \geq \eta} |k_\lambda(t)| dt = \lambda \int_{|t| \geq \eta} |k(\lambda t)| dt = \int_{|u| \geq \lambda \eta} |k(u)| du;$$

este último término tiende a 0 cuando  $\lambda$  tiende a  $\infty$  porque  $\eta > 0$  y por la definición de integral.  $\square$

*Proposición 1.7.2.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi.$$

*Demostración.* a. Para probar que esos integrales son iguales, sea  $u = \sin^2 t$  y  $dv = \frac{dt}{t^2}$  en el segundo integral de manera que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt &= -\frac{\sin^2 t}{t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2}{t} \sin t \cos t dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \end{aligned}$$

b. Ahora se muestra que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

para completar el resultado.

Sea  $F(\sigma)$  la transformada de Laplace,

$$F(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \frac{\sin t}{t} dt = \mathcal{L} \left( \frac{\sin t}{t} \right) (\sigma).$$

$F(\sigma)$  es una función continua en  $[0, \infty)$  y el cálculo formal

$$\forall \sigma > 0, \exists F'(\sigma) = - \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \sin t dt,$$

es cierto. La convergencia de  $F(0)$  se obtiene por un argumento de series alternantes. Se puede ver que  $\mathcal{L}(\sin t)(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2 + 1}$ ,  $\sigma > 0$ , ya sea por un cálculo directo usando integración por partes o usando la fórmula general de la transformada de Laplace,

$\mathcal{L}(g^{(2)})(\sigma) = \sigma^2 \mathcal{L}(g)(\sigma) - \sigma g(0) - \sigma g'(0)$ , para la función especial  $g(t) = \sin t$ . Así, usando TFC, se calcula

$$\begin{aligned} F(\sigma) - F(0) &= \int_0^\sigma F'(\eta) d\eta = - \int_0^\sigma \mathcal{L}(\sin t)(\eta) d\eta \\ &= - \int_0^\sigma \frac{d\eta}{1 + \eta^2} = - \tan^{-1} \sigma, \quad \sigma > 0. \end{aligned}$$

Se conoce  $F(\infty) = 0$  por CDL, y así

$$F(0) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tan^{-1} \sigma = \frac{\pi}{2}.$$

□

La familia  $\{d_\lambda\}$  de dilataciones de  $d(t)$  es el *núcleo de Dirichlet*, y la familia  $\{w_\lambda\}$  de dilataciones de  $w(t)$  es el *núcleo de Fejér*. El núcleo de Fejér es una aproximación a la identidad por las proposiciones 1.7.1 y 1.7.2. El núcleo de Dirichlet no es una aproximación a la identidad porque  $d_\lambda \notin L^1(\mathbb{R})$ . Aunque  $\{d_\lambda\}$  no es una aproximación a la identidad, posee la propiedad de que su “masa” se acumula en el origen, mientras su transformada de Fourier tiende a la función idénticamente 1 en  $\hat{\mathbb{R}}$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

La mayor propiedad elemental de las aproximaciones a la identidad está dada en el teorema 1.7.1a. El teorema 1.7.1b es el caso especial para el núcleo de Fejér, y la parte c es el teorema de unicidad de la transformada de Fourier. Se prueba el teorema de unicidad como un corolario de la parte b.

### Teorema 1.7.1. Aproximación y unicidad

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

a) Si  $\{k_{(\lambda)} : \lambda > 0\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$  es una aproximación a la identidad, entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|f - f * k_{(\lambda)}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

b) Se tiene

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int \left| f(t) - \int_{-\frac{\lambda}{2\pi}}^{\frac{\lambda}{2\pi}} \left(1 - \frac{2\pi|\gamma|}{\lambda}\right) \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \right| dt = 0.$$

c) Unicidad. Si  $\hat{f} = 0$  en  $\hat{\mathbb{R}}$ , entonces  $f$  es la 0-función.

*Demostración.* a) Usando el hecho que  $\int k_{(\lambda)}(t) dt = 1$  para calcular

$$\begin{aligned} &\|f - f * k_{(\lambda)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= \int \left| \int k_{(\lambda)}(u) f(t) du - \int k_{(\lambda)}(u) f(t-u) du \right| dt \\ &\leq \int |k_{(\lambda)}(u)| \left( \int |f(t) - \tau_u f(t)| dt \right) du. \end{aligned}$$

Sea  $\epsilon > 0$ . Por teorema A.0.6, existe  $\eta > 0$  con la propiedad que

$$\forall |u| < \eta, \quad \|f - \tau_u f\|_{L^1(\mathbb{R})} < \frac{\epsilon}{K}, \quad (1.29)$$

donde  $\|k_{(\lambda)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq K$ . Por lo que, se tiene el estimado

$$\begin{aligned} \|f - f * k_{(\lambda)}\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq 2 \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{|u| \geq \eta} |k_{(\lambda)}(u)| du + \frac{\epsilon}{K} \int_{|u| \leq \eta} |k_{(\lambda)}(u)| du \\ &\leq \epsilon + 2 \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{|u| \geq \eta} |k_{(\lambda)}(u)| du. \end{aligned}$$

Consecuentemente, por la definición de una aproximación a la identidad, se tiene

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \|f - f * k_{(\lambda)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon;$$

y así, se obtiene la parte a porque  $\epsilon > 0$  puede elegirse tan pequeño como se desee.

b) Para empezar, el cálculo en el ejemplo 1.4.4 muestra que

$$w_\lambda(t) = \int_{-\lambda/2\pi}^{\lambda/2\pi} \left(1 - \frac{2\pi|\gamma|}{\lambda}\right) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma.$$

Entonces, por la definición de convolución y una aplicación del teorema de Fubini-Tonelli, se calcula

$$f * w_\lambda(t) = \int_{-\lambda/2\pi}^{\lambda/2\pi} \left(1 - \frac{2\pi|\gamma|}{\lambda}\right) \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma.$$

Como  $\{w_\lambda\}$  es una aproximación a la identidad, la parte b se sigue de la parte a.

c) Parte c se sigue de la parte b. En efecto, la hipótesis y la parte b implican  $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$ ; y así,  $f$  es la función 0 por teorema A.0.6. □

El literal b del teorema anterior tiene cierta familiaridad con un resultado de inversión para la transformada de Fourier y será utilizado posteriormente en la demostración del teorema de la fórmula de inversión.

*Proposición 1.7.3.* Sea  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  continua en  $\mathbb{R}$ , donde  $L^\infty(\mathbb{R})$  es el espacio de funciones esencialmente acotadas. Si  $\{k_{(\lambda)} : \lambda > 0\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$  es una aproximación a la identidad, entonces

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f * k_{(\lambda)}(t) = f(t).$$

*Demostración.* Primero se calcula

$$\begin{aligned} |f(t) - f * k_{(\lambda)}(t)| &= \left| \int k_{(\lambda)}(u) (f(t) - f(t-u)) du \right| \\ &\leq \int |k_{(\lambda)}(u)| |f(t) - f(t-u)| du \end{aligned}$$

para un fijo  $t \in \mathbb{R}$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $f$  es continua, existe  $\eta < 0$  tal que si  $0 \leq |u| < \eta$ , entonces  $|f(t) - f(t - u)| < \frac{\epsilon}{K}$ , donde  $\|k_{(\lambda)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq K$ . Ésto proporciona la estimación

$$|f(t) - f * k_{(\lambda)}(t)| \leq \epsilon + 2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{|u| \geq \eta} |k_{(\lambda)}(u)| du.$$

Consecuentemente, por la definición de una aproximación a la identidad, se tiene

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} |f - f * k_{(\lambda)}|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon;$$

y así, se obtiene el resultado porque  $\epsilon > 0$  puede elegirse tan pequeño como se desee.  $\square$

## 1.8. Inversión puntual de la transformada de Fourier

### Motivación para el teorema de inversión

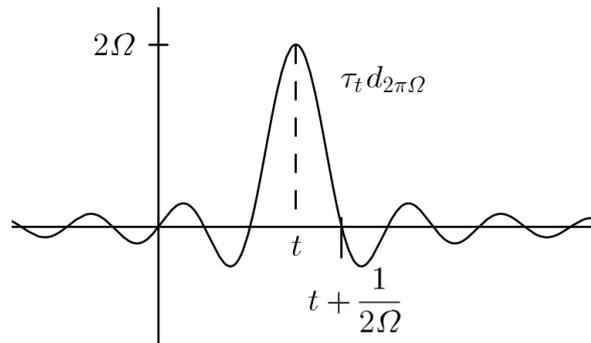


Figura 1.7: Función  $\tau_t d_{2\pi\Omega}$

La fórmula de inversión en el teorema 1.8.1 para  $f$  continua es

$$f(t) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma. \quad (1.30)$$

Para ver que esta fórmula es razonable se hace el siguiente cálculo formal:

$$\begin{aligned} \int \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma &= \int \int f(u) e^{2\pi i (t-u)\gamma} d\gamma \\ &= \int f(u) \left[ \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i (t-u)\gamma} d\gamma \right] du \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int f(u) \frac{\sin 2\pi (t-u)\Omega}{\pi(t-u)} du \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} f * d_{2\pi\Omega}(t). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Obsérvese que el área  $L$  del mayor lóbulo de  $\tau_t d_{2\pi\Omega}$  en la figura 1.7 se mantiene constante para todo  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \int_{t-1/2\Omega}^{t+1/2\Omega} \tau_t d_{2\pi\Omega}(u) du &= \int_{-1/2\Omega}^{1/2\Omega} d_{2\pi\Omega}(u) du \\ &= \int_{-1/2\Omega}^{1/2\Omega} \frac{\sin 2\pi u \Omega}{\pi u} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{u} du. \end{aligned} \quad (1.32)$$

El cálculo en (1.31) envuelve cambio en el orden de las operaciones y un argumento de valor principal. Esos pasos deben ser justificados. La idea básica, sin embargo, es clara. Se espera que  $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} f * d_{2\pi\Omega}(t) = f(t)$  (y esto es (1.30)) porque  $L$  permanece constante cuando el mayor lóbulo converge a  $t$  y porque las oscilaciones de los lóbulos menores en cada lado de  $t$  aumentan rápidamente cuando  $\Omega \rightarrow \infty$ . La intuición es que la contribución total de los lóbulos menores será despreciable para  $\Omega$  grande porque el núcleo de Dirichlet toma valores positivos y negativos. Esta intuición no es del todo correcta porque

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{u} du > 1$$

pero la cancelación es tal que puede verificarse (1.30) bajo las condiciones dadas en el teorema 1.8.1. Otro aspecto que surge en el cálculo (1.31) es el hecho que  $\hat{f}$  no necesita estar en  $L^1(\hat{\mathbb{R}})$  para  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

*Ejemplo 1.8.1.*  $f \in L^1(\mathbb{R})$  no implica  $\hat{f} \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$

Sea  $f(t) = H(t)e^{-2\pi r t}$  donde  $r > 0$  y  $H$  es la *función de Heaviside* definida como  $H = 1_{[0, \infty)}$ . Entonces  $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{2\pi(r+i\gamma)} \notin L^1(\hat{\mathbb{R}})$ . Este hecho debe ser comparado con que si  $f(t) = e^{-2\pi r |t|}$ , entonces  $\hat{f}(\gamma) = p_{1/r} \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ .

Luego de esta introducción, se comienza la prueba del teorema 1.8.1, el cual es la fórmula de inversión puntual de Jordan para la transformada de Fourier.

**Lema 1.8.1. Segundo teorema de valor medio para integrales o teorema de Bonnet**

Sea  $g$  continua en  $[a, b]$  y sea  $f$  creciente en  $[a, b]$ . Existe  $\xi \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a^+) \int_a^\xi g(t)dt + f(b^-) \int_\xi^b g(t)dt.$$

*Demostración.* Se omite. □

### Descomposición de Jordan

La clásica forma del *teorema de descomposición de Jordan* para una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  afirma que  $f \in BV[a, b]$  si y solo si  $f$  puede ser expresada como la diferencia  $f_1 - f_2$  de dos funciones crecientes en  $[a, b]$ .

*Lema 1.8.2.* Sea  $g \in BV[0, \epsilon]$ ,  $\epsilon > 0$ . Entonces

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_0^\epsilon g(t) d_{2\pi\Omega}(t) dt = \frac{1}{2} g(0^+). \quad (1.33)$$

*Demostración.* a) Por el teorema de descomposición de Jordan, se asume que  $g$  es creciente en  $[0, \epsilon]$ ; y, en particular, de la definición de acotada variación,  $g$  es acotada en  $[0, \epsilon]$ .

b) i. Asumiendo  $g(0+) = 0$  y sea  $\eta > 0$ . Como  $\int d(t)dt = 1$  para la función de Dirichlet  $d$ , existe  $C > 0$  tal que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left| \int_a^b \frac{\sin t}{\pi t} dt \right| \leq C.$$

se debe verificar que

$$\overline{\lim}_{\Omega \rightarrow \infty} \left| \int_0^\epsilon g(t) d_{2\pi\Omega}(t) dt \right| \leq \eta C; \quad (1.34)$$

y con ésto se completará la prueba de (1.33) para el caso  $g(0+) = 0$  porque  $\eta > 0$  es arbitrario.

ii. Como  $g(0+) = 0$ , existe  $v = v(\eta) \in (0, \epsilon)$  tal que  $|g(t)| \leq \eta$  para todo  $t \in (0, v)$ . También, por el lema 1.8.1, usando la continuidad de  $d_{2\pi\Omega}$  y la acotación y monotonicidad de  $g$ , existe  $\xi \in [0, v]$  para el cual

$$\begin{aligned} \int_0^v g(t) d_{2\pi\Omega}(t) dt &= g(0+) \int_0^\xi d_{2\pi\Omega}(t) dt + g(v-) \int_\xi^v d_{2\pi\Omega}(t) dt \\ &= g(v-) \int_{2\pi\Omega\xi}^{2\pi\Omega v} \frac{\sin u}{\pi u} du. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\left| \int_0^v g(t) d_{2\pi\Omega}(t) dt \right| \leq C |g(v-)| \leq \eta C. \quad (1.35)$$

iii. Nótese que  $\left(\frac{g(t)}{t}\right) 1_{[v, \epsilon]}(t) \in L^1(\mathbb{R})$  porque no se tiene que lidiar con el origen. Por tanto, por el lema de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_v^\epsilon g(t) d_{2\pi\Omega}(t) dt = 0.$$

Usando este hecho, (1.35), y la desigualdad

$$\left| \int_0^\epsilon g(t) d_{2\pi\Omega}(t) dt \right| \leq \left| \int_0^v g(t) d_{2\pi\Omega}(t) dt \right| + \left| \int_v^\epsilon g(t) d_{2\pi\Omega}(t) dt \right|,$$

se obtiene (1.34).

c) Finalmente, suponiendo que  $g(0+) \neq 0$ . Sea  $h(t) = g(t) - g(0+)$  de manera que  $h(0+) = 0$  y

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_0^\epsilon h(t) d_{2\pi\Omega}(t) dt = 0$$

por parte b. También, se sabe de la proposición 1.7.2 que

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_0^\epsilon d_{2\pi\Omega}(t) dt = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi\Omega\epsilon} d(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Combinando estos hechos, se calcula

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_0^\epsilon g(t) d_{2\pi\Omega}(t) dt = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left( \int_0^\epsilon (h(t) + g(0+)) d_{2\pi\Omega}(t) dt \right) = \frac{g(0+)}{2},$$

porque ambos límites existen cuando se expande el término del medio.  $\square$

Ahora se puede demostrar el teorema de Jordan.

**Teorema 1.8.1. Teorema de Jordan**

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y asumiendo que  $f \in BV[t - \epsilon, t + \epsilon]$  para algún  $t \in \mathbb{R}$  y  $\epsilon > 0$  (es decir,  $f$  es de acotada variación en  $[t - \epsilon, t + \epsilon]$ ). Entonces

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma,$$

Si  $f$  es continua en  $t$ , entonces el lado izquierdo puede ser reemplazado por  $f(t)$ .

*Demostración.* Para cada  $\Omega > 0$ , se definen las “sumas parciales”

$$\begin{aligned} S_\Omega(t) &= \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i t \gamma} \hat{f}(\gamma) d\gamma \\ &= \int f(u) \left( \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i (t-u)\gamma} d\gamma \right) du \\ &= f * d_{2\pi\Omega}(t). \end{aligned}$$

El cálculo está justificado por el teorema de Fubini-Tonelli porque el integral doble en  $\mathbb{R} \times [-\Omega, \Omega]$  es absolutamente convergente. Se escribe  $S_\Omega(t)$  como

$$\begin{aligned} S_\Omega(t) &= \int_f (t - u) d_{2\pi\Omega}(u) \\ &= \int_0^\infty (f(t + u) + (f(t - u))) d_{2\pi\Omega}(u) du. \end{aligned}$$

Sea  $g(u) = f(t + u) + f(t - u)$ , notando que  $t$  es fijo, y sea  $\epsilon > 0$ . El resultado quedará probado cuando se muestre que

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_0^\epsilon g(u) d_{2\pi\Omega}(u) du = \frac{f(t+) + f(t-)}{2} \quad (1.36)$$

y

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_\epsilon^\infty g(u) d_{2\pi\Omega}(u) du = 0. \quad (1.37)$$

La ecuación (1.36) es una consecuencia inmediata del lema 1.8.2. La ecuación (1.37) se sigue del lema de Riemann-Lebesgue y el hecho que  $(\frac{g(t)}{t}) \tau_\epsilon H(t) \in L^1(\mathbb{R})$ , porque  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .  $\square$

Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y  $\hat{f} \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ , es posible utilizar el teorema 1.7.1 para obtener el siguiente teorema de inversión puntual

*Teorema 1.8.2.* Fórmula de inversión para  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$

Sea  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$ , entonces

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma. \quad (1.38)$$

*Demostración.* Como  $\hat{f} \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ , se sigue que  $g$  definida como el lado derecho de (1.38) es uniformemente continua (teorema 1.5.1b).

Nótese que

$$\begin{aligned} & \left\| \int \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma - \int_{-\lambda/2\pi}^{-\lambda/2\pi} \left(1 - \frac{2\pi |\gamma|}{\lambda}\right) \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ & \leq \left\| \int_{|\gamma| > \lambda/2\pi} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ & + \left\| \int_{-\lambda/2\pi}^{\lambda/2\pi} \frac{2\pi |\gamma|}{\lambda} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ & \leq \int_{|\gamma| > \lambda/2\pi} |\hat{f}(\gamma)| d\gamma + \int_{-\lambda/2\pi}^{\lambda/2\pi} \frac{2\pi |\gamma|}{\lambda} |\hat{f}(\gamma)| d\gamma. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Ahora se debe aplicar CDL a la segunda integral en el lado derecho de (1.39). Sea

$$\hat{f}_\lambda(\gamma) = \frac{2\pi |\gamma|}{\lambda} |\hat{f}(\gamma)| 1_{[-\lambda/2\pi, \lambda/2\pi]}(\gamma),$$

de manera que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{f}_\lambda = 0$  en casi todo punto, y  $|\hat{f}_\lambda| \leq 2\pi |\hat{f}| \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ . Consecuentemente, aplicando CDL se tiene

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda/2\pi}^{\lambda/2\pi} \frac{2\pi |\gamma|}{\lambda} |\hat{f}(\gamma)| d\gamma = 0.$$

De la definición de  $L^1(\hat{\mathbb{R}})$ , la primer integral en el lado derecho de (1.39) también tiende a 0 cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\| g(t) - \int_{-\lambda/2\pi}^{-\lambda/2\pi} \left(1 - \frac{2\pi |\gamma|}{\lambda}\right) \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0. \quad (1.40)$$

Ahora, invocando al teorema 1.7.1b,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \int_{-\lambda/2\pi}^{-\lambda/2\pi} \left(1 - \frac{2\pi |\gamma|}{\lambda}\right) \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \right\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0, \quad (1.41)$$

para obtener un resultado puntual, en casi todo punto, en la forma siguiente. La ecuación (1.41) implica que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda/2\pi}^{-\lambda/2\pi} \left(1 - \frac{2\pi |\gamma|}{\lambda}\right) \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma = f(t) \text{ en medida.} \quad (1.42)$$

Un resultado básico debido a F. Riesz es que *convergencia en medida implica convergencia en casi todo punto de una subsecuencia*. Así, (1.42) puede ser cambiado a convergencia en casi todo punto para algún  $\lambda_n$  en lugar de  $\lambda$ . Combinado con (1.40), para  $\lambda_n$  en lugar de  $\lambda$ , este ajuste de (1.42) lleva al hecho que  $f = g$  en casi todo punto; y el resultado se sigue porque  $f$  y  $g$  son continuas.  $\square$

## 1.9. La teoría en $L^2(\mathbb{R})$

*Definición 1.9.1.*

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left( \int |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

$L^2(\mathbb{R})$  es el espacio de *funciones  $f$  cuadrado-integrables* o *señales  $f$  con energía finita*  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ .

El mayor resultado acerca de  $L^2(\mathbb{R})$  es el teorema siguiente

**Teorema 1.9.1. Teorema de Plancherel**

Hay una única biyección lineal  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\hat{\mathbb{R}})$  con las propiedades:

- a)  $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})}$ ;
- b)  $\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  y  $\forall \gamma \in \hat{\mathbb{R}}, \hat{f}(\gamma) = (\mathcal{F}f)(\gamma)$ ;
- c)  $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \exists \{f_n : n = 1, \dots\} \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  que cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n - \mathcal{F}f\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} = 0.$$

*Demostración.* La línea a seguir en la prueba tiene cuatro pasos: verificar que  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})}$  para  $f \in X \subseteq L^2(\mathbb{R})$  (parte i), resultados de clausura en  $\mathbb{R}$  y  $\hat{\mathbb{R}}$  (partes ii y iii, respectivamente), y un argumento rutinario de análisis funcional para obtener el resultado a partir de las partes i, ii, iii (parte iv). Existen diferencias en las dificultades de las partes i, ii y iii dependiendo de en cual espacio  $X$  de elija usar.

- i. Sea  $X = C_c(\mathbb{R})$ , el espacio de funciones continuas (en  $\mathbb{R}$ ) que tienen soporte compacto, y considerando la involución  $\tilde{f}(t) \equiv \overline{f(-t)}$  de  $f \in C_c(\mathbb{R})$ . Se debe probar que  $\hat{f} \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$ . Claramente,  $\hat{f} \in A(\hat{\mathbb{R}})$  porque  $C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ . Se define  $g = f * \tilde{f}$  de manera que  $g$  es continua,  $g \in L^1(\mathbb{R})$  y

$$g(0) = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (1.43)$$

También,

$$\forall \gamma \in \hat{\mathbb{R}}, \hat{g}(\gamma) = |\hat{f}(\gamma)|^2 \quad (1.44)$$

Por el teorema de Fubini-Tonelli y la invarianza bajo traslaciones de la medida de Lebesgue (en el grupo  $\mathbb{R}$ ). Por la proposición 1.7.3 y por (1.44), como  $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  es continua, se tiene

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda/2\pi}^{\lambda/2\pi} \left(1 - \frac{2\pi|\gamma|}{\lambda}\right) |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma = g(0). \quad (1.45)$$

El teorema de Beppo Levi y (1.45) lleva a afirmar que  $\hat{f} \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$  y que

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} = g(0) = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

donde la segunda igualdad se sigue de la definición de  $g$ .

- ii. Ahora se debe mostrar que  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ , y probar que  $C_c(\mathbb{R})$  es denso en  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  tomado con la norma  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$ . Este hecho implica que  $\overline{C_c(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$ . Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y se define  $f_T = f1_{[-T,T]}$ . Para esta prueba,  $f_T$  no designa dilatación.  $f_T \in L^2(\mathbb{R})$  porque  $|f_T| \leq |f|$ , y  $f_T \in L^1(\mathbb{R})$  por la desigualdad de Hölder. Claramente,

$$\|f - f_T\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left( \int_{|t|>T} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

y así  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ .

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Entonces  $\lim_{T \rightarrow \infty} \|f - f_T\| = 0$  por el argumento del párrafo previo. Luego, sea  $f_{S,T} = f_T * \Delta_S$  ( $\Delta_S$  es la dilatación de la función triangular  $\Delta$  definida en el ejemplo 1.4.4), así que  $f_{S,T} \in C_c(\mathbb{R})$ . Para  $\epsilon > 0$  se deben encontrar  $S, T > 0$  tales que  $\|f - f_{S,T}\| < \epsilon$ . Primero, existe  $T = T_\epsilon$  para el cual  $\|f - f_T\| < \frac{\epsilon}{2}$ . Se puede mantener este  $T$  fijo, y se tiene el estimado

$$\begin{aligned} \|f_T - f_{S,T}\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \int \int \Delta_S(u) |f_T(t) - f_T(t-u)| dudt \\ &= \int_{|u| \leq 1/S} \Delta_S(u) \left( \int |f_T(t) - f_T(t-u)| dt \right) du. \end{aligned}$$

Luego, seleccionando  $S_1$  tal que

$$\forall S \geq S_1 \text{ y } \forall |u| \leq \frac{1}{S}, \quad \|f_T - \tau_u f_T\|_{L^1(\mathbb{R})} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Así, para este  $S$ ,

$$\|f_T - f_{S,T}\|_{L^1(\mathbb{R})} < \frac{\epsilon}{4}. \quad (1.46)$$

Finalmente, usando la desigualdad de Minkowski (teorema A.0.11) para obtener el estimado

$$\begin{aligned} \|f_T - f_{S,T}\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \int \left( \int |(f_T(t) - f_T(t-u))\Delta_S(u)|^2 dt \right)^{1/2} du \\ &\quad \int \Delta_S(u) \|f_T - \tau_u f_T\|_{L^2(\mathbb{R})} du. \end{aligned}$$

Se puede elegir  $S \geq S_1$  para el cual

$$\forall |u| \leq \frac{1}{S}, \quad \|f_T - \tau_u f_T\|_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{\epsilon}{4};$$

y así,

$$\|f_T - f_{S,T}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{\epsilon}{4}. \quad (1.47)$$

Combinando (1.46) y (1.47) con el anterior estimado  $\|f - f_T\| < \frac{\epsilon}{2}$ , se tiene la desigualdad deseada, es decir,  $\|f - f_{S,T}\| < \epsilon$ .

iii. Se debe probar ahora que  $C_c(\mathbb{R})^\wedge \subseteq A(\hat{\mathbb{R}}) \cap L^2(\hat{\mathbb{R}})$  es un subespacio denso de  $L^2(\hat{\mathbb{R}})$ . Sea  $G \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$  y supóngase

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}), \int \hat{f}(\gamma) \overline{G(\gamma)} d\gamma = 0. \quad (1.48)$$

Si  $f \in C_c(\mathbb{R})$ , entonces  $\tau_u f \in C_c(\mathbb{R})$  y así (1.48) implica

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}) \text{ y } \forall u \in \mathbb{R}, \int \hat{f}(\gamma) \overline{G(\gamma)} e^{-2\pi i u \gamma} d\gamma = 0. \quad (1.49)$$

Por la desigualdad de Hölder,  $\hat{f} \overline{G} \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ , y así (1.49) lleva a invocar el teorema de unicidad, teorema 1.7.1c, para concluir que  $\hat{f} \overline{G} = 0$  en casi todo punto para cada  $f \in C_c(\mathbb{R})$ .

Nótese que

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}) \text{ y } \forall \gamma \in \hat{\mathbb{R}}, e^{2\pi i t \gamma} f(t) \in C_c(\mathbb{R}).$$

Así,  $C_c(\mathbb{R})^\wedge$  es invariante bajo traslaciones, es decir,

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}) \text{ y } \forall \gamma \in \hat{\mathbb{R}}, \tau_\gamma \hat{f} \in C_c(\mathbb{R})^\wedge.$$

De ésto se puede concluir que para cada  $\gamma_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ , existe  $f = f_{\gamma_0} \in C_c(\mathbb{R})$  para la cual  $|\hat{f}| > 0$  en un intervalo  $I$  centrado en  $\gamma_0$ . Para verificar esta afirmación, supóngase que existe  $\gamma_0$  tal que para cada  $f \in C_c(\mathbb{R})$  y para cada intervalo  $I$  centrado en  $\gamma_0$ ,  $\hat{f}$  tiene un cero en  $I$ . Consecuentemente,  $\hat{f}(\gamma_0) = 0$  para cada  $f \in C_c(\mathbb{R})$ . Por la invarianza bajo traslaciones de  $C_c(\mathbb{R})^\wedge$ ,  $\tau_\gamma \hat{f} \in C_c(\mathbb{R})^\wedge$  para cada  $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$ , y así

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}) \text{ y } \forall \gamma \in \hat{\mathbb{R}}, (\tau_\gamma \hat{f})(\gamma_0) = 0.$$

Es decir,  $\hat{f} = 0$  en  $\hat{\mathbb{R}}$  para cada  $f \in C_c(\mathbb{R})$ . Ésto contradice el teorema de unicidad, teorema 1.7.1c y la afirmación está verificada.

Por lo tanto, si se asume (1.48) se puede concluir que  $G = 0$  en casi todo punto. Consecuentemente, se tiene que  $C_c(\mathbb{R})^\wedge$  es denso en  $L^2(\hat{\mathbb{R}})$ .

iv. Se ha mostrado que  $\mathcal{F}$  es una inyección lineal continua  $C_c(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\hat{\mathbb{R}})$  (parte i), cuando  $C_c(\mathbb{R})$  es dotado con la  $L^2$ -norma, y así  $\mathcal{F}$  tiene una única extensión lineal inyectiva a  $L^2(\mathbb{R})$  por parte ii. Además,  $\mathcal{F}(C_c(\mathbb{R}))$  es cerrado y denso en  $L^2(\hat{\mathbb{R}})$  por partes i y iii. Así,  $\mathcal{F}$  es también sobreyectiva. Los restantes resultados del teorema son ahora inmediatos.  $\square$

Notacionalmente, debido al teorema de Plancherel, es natural referirse a  $\mathcal{F}f$  como la *transformada de Fourier* de  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , y se escribe el pareamiento entre  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\mathcal{F}f$  en una de las siguientes maneras:

$$\mathcal{F}f = \hat{f} = F, \quad f \leftrightarrow F, \quad f = \check{F}.$$

### Teorema 1.9.2. Fórmula de Parseval

Considere  $f \rightarrow F$  y  $g \rightarrow G$ , donde  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Entonces se tiene las fórmulas

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|F\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})}, \quad (1.50)$$

$$\int f(t)\overline{g(t)}dt = \int F(\gamma)\overline{G(\gamma)}d\gamma, \quad (1.51)$$

$$\int f(t)g(t)dt = \int F(\gamma)G(-\gamma)d\gamma, \quad (1.52)$$

y

$$\forall \gamma \in \hat{\mathbb{R}}, \int f(t)g(t)e^{-2\pi i t \gamma} dt = \int F(\lambda)G(\gamma - \lambda)d\lambda. \quad (1.53)$$

*Demostración.* La ecuación (1.50) es parte del teorema 1.9.1. La ecuación (1.51) es consecuencia de (1.50) y el hecho que  $4f\bar{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2$ .

La ecuación (1.52) puede ser probada similarmente o por el siguiente cálculo formal. Este cálculo de hecho da (1.53), del cual (1.52) se sigue para  $\gamma = 0$ . Nótese que  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  y  $F * G \in A(\hat{\mathbb{R}})$ . Se calcula

$$\begin{aligned} (F * G)^\sim(t) &= \int F * G(\gamma)e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \\ &= \int F(\lambda)G(\gamma - \lambda)e^{2\pi i t \gamma} d\gamma d\lambda \\ &= g(t) \int F(\lambda)e^{2\pi i t \lambda} d\lambda \\ &= f(t)g(t), \end{aligned}$$

y entonces,

$$\int f(t)g(t)e^{-2\pi i t \gamma} dt = \int F(\lambda)G(\gamma - \lambda)d\lambda.$$

□

## 1.10. Teoría de distribuciones

### Aproximaciones a la identidad y $\delta$

En  $L^1(\mathbb{R})$ , la convolución es la multiplicación.

*Proposición 1.10.1.*  $L^1(\mathbb{R})$  no tiene una unidad bajo convolución.

*Prueba:* Suponga que  $u \in L^1(\mathbb{R})$  es una unidad. Seleccionando  $f \in L^1(\mathbb{R})$  para el cual  $\hat{f}$  nunca se anula, por ejemplo  $f(t) = e^{-2\pi|t|}$ . Entonces  $\|\hat{f} - \hat{f}\hat{u}\|_{L^\infty(\hat{\mathbb{R}})} \leq \|f - f * u\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$ , así que  $\hat{u}$  es idénticamente 1 en  $\hat{\mathbb{R}}$ . Esto contradice el Lema Riemann-Lebesgue, por lo que necesariamente  $u \notin L^1(\mathbb{R})$ .

Por otro lado, existen familias  $\{k_{(\lambda)}\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$  de funciones, las cuales son apropiadamente llamadas aproximaciones a la identidad, con la propiedad que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|f - f * k_{(\lambda)}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

Similarmente, si  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  es continua en  $\mathbb{R}$  y  $\{k_{(\lambda)}\}$  es una aproximación a la identidad, entonces

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f * k_{(\lambda)}(t) = f(t).$$

Se puede pensar en “ $f * k_{(\lambda)} \rightarrow f$ ” como un conjunto  $\{f * k_{(\lambda)}\}$  de funciones aproximando la función  $f$ ; o se puede pensar en la familia  $\{k_{(\lambda)}\}$  como aproximándose a algo llamado  $\delta$ , la cual juega un papel de una identidad bajo convolución para elementos en  $L^1(\mathbb{R})$ , es decir, “ $f * \delta = f$ ” a pesar de que  $\delta \notin L^1(\mathbb{R})$ .

Con el fin de cuantificar esta última interpretación, asúmase que cada  $k_{(\lambda)}$  es una función par. Fijando el punto  $t = 0$  en la última ecuación y pensando en la integral  $f * k_{(\lambda)}$  como una función,

$$k_{(\lambda)} : C_b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \mapsto f * k_{(\lambda)}(0) = \int k_{(\lambda)}(t)f(t)dt,$$

cuyo dominio  $C_b(\mathbb{R})$  es el conjunto de funciones continuas acotadas en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.10.1.**  $\delta$  es la función

$$\delta : C_b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \mapsto (f * \delta)(0) = f(0),$$

i.e., para cada  $f \in C_b(\mathbb{R})$ ,  $\delta(f) \equiv f(0)$ . Una función cuyo dominio es un conjunto de funciones y cuyo rango es un conjunto de números, es llamado un *funcional*.

$\delta$  es a veces llamada la *función  $\delta$  de Dirac* a pesar del hecho de que no fue descubierta por Dirac ni es una función ordinaria de  $\mathbb{R}$ . Actualmente es vista como la *medida de Dirac*.

Históricamente se ha visto a  $\delta$  como una especie de “función” que es cero en todo lugar excepto en el origen, donde debería ser tan grande como para que  $\int \delta(u)du = 1$ . Esta forma de ver a  $\delta$  no tiene sentido formal aunque es muy usado en física. En cambio la definición de  $\delta$  recién enunciada es matemáticamente más legítima.

Este enfoque de definir objetos tales como  $\delta$  que no existen como funciones ordinarias si no como funcionales cuyo dominio es un espacio de funciones, tiene sus raíces en ideas asociadas con la fórmula de Parseval y soluciones débiles en física. Estos objetos son llamados *distribuciones* o *funciones generalizadas*, y se estudiarán aquí sus propiedades elementales.

Sea:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) = \{f : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ y el soporte de } f \text{ es compacto}\}.$$

El soporte de  $f$  es el conjunto cerrado más pequeño fuera del cual  $f$  se anula.

**Definición 1.10.2. Distribuciones.**

a.  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  es un espacio vectorial. Una función lineal,

$$T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \mapsto T(f),$$

es una *distribución* o *función generalizada* si  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n) = 0$  para toda secuencia  $\{f_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R})$  satisfaciendo las propiedades:

- i.  $\exists K \subset \mathbb{R}$ , compacto, tal que  $\forall n$ , el soporte de  $f_n$  está incluido en  $K$ .
  - ii.  $\forall k \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty = 0$ .
- b. Una distribución  $T$  es *positiva*, y se escribe  $T \geq 0$ , si  $T(f) \geq 0$  para toda función no negativa  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ .
- c. El espacio de todas las distribuciones en  $\mathbb{R}$  se denota por  $D'(\mathbb{R})$  para enfatizar el hecho que  $D'(\mathbb{R})$  es el espacio dual de  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ .
- d.  $D'(\mathbb{R})$  es un espacio vectorial.

El dominio de la medida de Dirac puede ser restringido a  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  y en tal caso se tendría

$$\begin{aligned} \delta : C_c^\infty(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto \delta(f) = f(0). \end{aligned}$$

Es posible verificar que  $\delta$  así definida es una distribución.

También, sea  $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ , es decir  $g$  es localmente integrable, y defínase el funcional

$$\begin{aligned} T_g : C_c^\infty(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto T_g(f), \end{aligned}$$

donde  $T_g$  es definida como

$$\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}), T_g(f) = \int g(t)f(t)dt,$$

es posible verificar que  $T_g \in D'(\mathbb{R})$ .

Sea  $C^1(\mathbb{R})$  el espacio de funciones continuamente diferenciables en  $\mathbb{R}$ . Si  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  y  $g$  es suficientemente suave, es decir, si  $g \in C^1(\mathbb{R})$  o aún si  $g$  es solo un elemento de  $AC_{loc}(\mathbb{R})$  entonces la fórmula de integración por partes da

$$\int g'(t)f(t)dt = - \int g(t)f'(t)dt.$$

que implica  $\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}), g'(f) = -g(f')$ .

Como el lado derecho de esta ecuación está bien definido aún cuando se reemplaza  $g$  por cualquier  $T \in D'(\mathbb{R})$ , esto motiva la siguiente definición.

La *derivada distribucional*  $T'$  de  $T \in D'(\mathbb{R})$  es definida por la siguiente fórmula.

$$\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}), T'(f) = -T(f').$$

Por ejemplo se tiene que la derivada distribucional  $H'$  de  $H = 1_{[0, \infty)}$  es  $\delta$ , porque

$$H'(f) = -H(f') = - \int_0^\infty f'(t)dt = f(0) = \delta(f).$$

También, de acuerdo a la fórmula de Parseval se tiene

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), \int \hat{g}(\gamma) \overline{\hat{f}(\gamma)} d\gamma = \int g(t) \overline{f(t)} dt,$$

pensando en  $f$  como una función test, esto puede reescribirse como  $\hat{g}(\widehat{f}) = g(\overline{f})$  y como  $L^2(\mathbb{R})$  es un espacio de Hilbert, puede utilizarse la notación de producto interno  $\langle g, f \rangle = \int g(t) \overline{f(t)} dt$  y así se tiene

$$\langle \hat{g}, \hat{f} \rangle = \langle g, f \rangle$$

Motivado por esto, la transformada de Fourier  $\hat{T}$  de una distribución  $T$  es formalmente definida por la ecuación

$$\hat{T}(\widehat{f}) = T(\overline{f})$$

o equivalentemente,

$$\langle \hat{T}, \hat{f} \rangle = \langle T, f \rangle$$

para toda función  $f$  en un apropiado espacio de funciones test, como el espacio de Schwartz. Por ejemplo, para la distribución  $\delta_a(x) = \delta(x - a)$  se tiene que  $(\delta_a)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i a \xi}$ .

Las funciones de Schwartz son aquellas funciones definidas en  $\mathbb{R}$  tales que son infinitamente diferenciables y rápidamente convergentes a cero. Más formalmente.

*Definición 1.10.3.* Una función  $f$  se llama función de Schwartz si  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  y además

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + x^2)^k f^{(p)}(x) = 0,$$

para todo par de enteros no negativos  $k$  y  $p$ . En esta notación,  $f^{(0)} = f$ . Equivalentemente,  $f$  es una función de Schwartz si  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x) f^{(n)}(x) = 0$  para todo entero no negativo  $n$  para todo polinomio  $P(x)$ .

El conjunto formado por todas las funciones de Schwartz se denota por  $S(\mathbb{R})$ . Evidentemente  $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Puede probarse que  $S(\mathbb{R})$  es denso en  $L^1(\mathbb{R})$  y en  $L^2(\mathbb{R})$ .

El siguiente teorema resume los resultados más importantes respecto a las transformadas de Fourier en  $S(\mathbb{R})$ . Se omite su demostración.

*Teorema 1.10.1.* Propiedades de la transformada de Fourier en  $S(\mathbb{R})$ .

1. La aplicación  $f \rightarrow \hat{f}$  es lineal y biyectiva de  $S(\mathbb{R})$  en sí mismo.
2.  $\check{\hat{f}} = f$ , para toda  $f \in S(\mathbb{R})$ ,
3.  $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ , para toda  $f \in S(\mathbb{R})$ .

## Capítulo 2

# Introducción a la teoría de wavelets

La transformada wavelet es una herramienta que divide datos, funciones u operadores en diferentes componentes de frecuencia y entonces estudia cada componente con una resolución adecuada a su escala. La transformada wavelet provee una herramienta para localización en tiempo-frecuencia. A continuación se explica lo que significa localización en tiempo-frecuencia y luego se describen algunos tipos de wavelets.

### 2.1. Localización en tiempo y frecuencia

En muchas aplicaciones, dada una señal  $f(t)$ , se está interesado en su contenido de frecuencia *localmente en el tiempo*. Es similar a la notación musical, por ejemplo, en que se le dice al que toca cuáles notas (información de frecuencia) tocar en cualquier momento dado. La transformada de Fourier estandarizada

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} f(t) dt,$$

también da información del contenido de la frecuencia, pero la información concerniente a la localización en el tiempo de, por ejemplo, explosiones de alta frecuencia no puede ser leída fácilmente de  $\hat{f}$ . La localización en el tiempo puede ser archivada ventaneado la señal, ésto es, cortando solo una bien localizada rebanada de  $f$  y tomando entonces su transformada de Fourier:

$$(T^{win} f)(\omega, t) = \int e^{-i\omega s} f(s) g(s - t) ds. \quad (2.1)$$

Ésta es la transformada de Fourier con ventana, la cual es una técnica estandar para la localización en tiempo-frecuencia. Es aún más familiar para el análisis de señales en su versión discreta, donde a  $t$  y  $\omega$  son asignados valores regularmente espaciados:  $t = nt_0$  y  $\omega = m\omega_0$ , donde  $n$  y  $m$  varían sobre  $\mathbb{Z}$  y  $t_0, \omega_0 > 0$  son fijos, entonces (2.1) se convierte en:

$$(T_{m,n}^{win} f) = \int e^{-im\omega_0 s} f(s) g(s - nt_0) ds. \quad (2.2)$$

Este proceso es esquemáticamente representado en la figura 2.1. Para un  $n$  fijo, la  $T_{m,n}^{win} f$  corresponde a los coeficientes de Fourier de  $f(\cdot)g(\cdot - nt_0)$ . Si para instancias  $g(t)$  es de soporte compacto, entonces con una apropiada elección de  $\omega_0$ , los coeficientes de Fourier  $(T_{\cdot,n}^{win} f)$  son suficientes para caracterizar y, si es necesario, reconstruir  $f(\cdot)g(\cdot - nt_0)$ . Cambiar

el valor de  $n$  equivale a desplazar la rebanada en pasos de  $t_0$  y sus múltiplos, permitiendo la recuperación de todo  $f$  a partir de  $T_{m,n}^{win} f$ . Muchas elecciones posibles han sido propuestas para la función ventana  $g$  en análisis de señales, muchas de ellas tienen soporte compacto y razonable regularidad. En todas las aplicaciones se supone que  $g$  es bien concentrada en ambos tiempo y frecuencia, si  $g$  y  $\hat{g}$  son ambas bien concentradas alrededor de cero, entonces  $T_{m,n}^{win} f$  puede interpretarse en términos generales como el contenido de  $f$  en tiempo cercano  $t$  y frecuencia cercana  $\omega$ . Así, la transformada de Fourier con ventana provee una descripción de  $f$  en el plano tiempo-frecuencia.

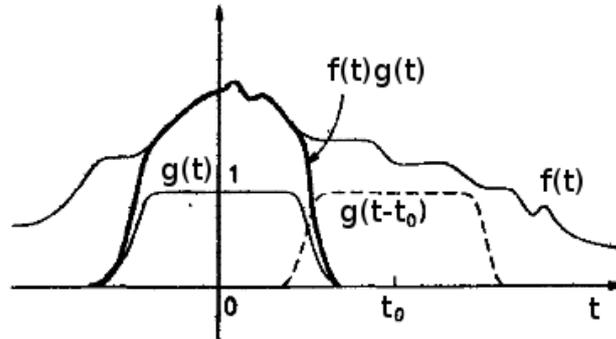


Figura 2.1: La transformada de Fourier con ventana.

## 2.2. Wavelets comparadas con Fourier con ventana

La transformada wavelet provee una similar descripción en tiempo-frecuencia, con algunas importantes diferencias. Las fórmulas análogas a (2.1) y (2.2) de la transformada wavelet son:

$$(T^{wav} f)(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int f(t) \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \quad (2.3)$$

y

$$(T_{m,n}^{wav} f) = a_0^{-\frac{m}{2}} \int f(t) \psi (a_0^{-m} t - nb_0) dt \quad (2.4)$$

En ambos casos se asume que  $\psi$  satisface

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad (2.5)$$

La fórmula (2.4) es también obtenida de (2.3) restringiendo  $a$  y  $b$  a solo valores discretos  $a = a_0^m$  y  $b = nb_0 a_0^m$ , en este caso con  $n, m$  variando en  $\mathbb{Z}$  y con  $a_0 > 1, b_0 > 0$  fijos. Una similitud entre la transformada wavelet y la de Fourier con ventana es clara: ambas (2.1) y (2.3) toman el producto interno de  $f$  con una familia indexada por dos etiquetas:  $g^{\omega,t}(s) = e^{i\omega s} g(s-t)$  en (2.1) y  $\psi^{a,b}(s) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi \left( \frac{s-b}{a} \right)$  en (2.3). Las funciones  $\psi^{a,b}$  son llamadas wavelets y la función  $\psi$  es a veces llamada wavelet madre. (Note que  $\psi$  y  $g$  se han asumido implícitamente a ser reales, si no lo son, entonces conjugados complejos son introducidos en (2.1) y (2.3).) Una típica elección para  $\psi$  es  $\psi(t) = (1-t^2)e^{-t^2/2}$ , la segunda derivada del Gaussiano, a veces llamada función sombrero mejicano por su forma

similar a un corte transversal de un sombrero mejicano. La función sombrero mejicano es bien localizada en ambos tiempo y frecuencia, y satisface (2.5). Cuando  $a$  cambia,  $\psi^{a,0}(s) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{s}{a}\right)$  cubre diferentes rangos de frecuencia (grandes valores del parámetro de escala  $|a|$  corresponden a frecuencias pequeñas, o grandes escalas de  $\psi^{a,0}$ ). Cambiando el parámetro  $b$  se procede a mover el centro de localización en el tiempo: Cada  $\psi^{a,b}(s)$  está localizada alrededor de  $s = b$ . Se sigue que (2.1) y (2.3) brindan una descripción en tiempo-frecuencia de  $f$ . La diferencia entre la transformada wavelet y la de Fourier con ventana está en la forma de las funciones de análisis  $g^{\omega,t}$  y  $\psi^{a,b}$ , como muestra la figura (2.2). Las funciones  $g^{\omega,t}$  consisten todas en la misma función envolvente  $g$ , trasladada a la adecuada localización en el tiempo y “rellenadas” con oscilaciones de alta frecuencia. Todas las funciones  $g^{\omega,t}$  tienen el mismo ancho independientemente del valor de  $\omega$ . En contraste, las  $\psi^{a,b}$  tienen ancho-tiempo adaptado a su frecuencia: Altas frecuencias de  $\psi^{a,b}$  son muy estrechas mientras que bajas frecuencias de  $\psi^{a,b}$  son más amplias.

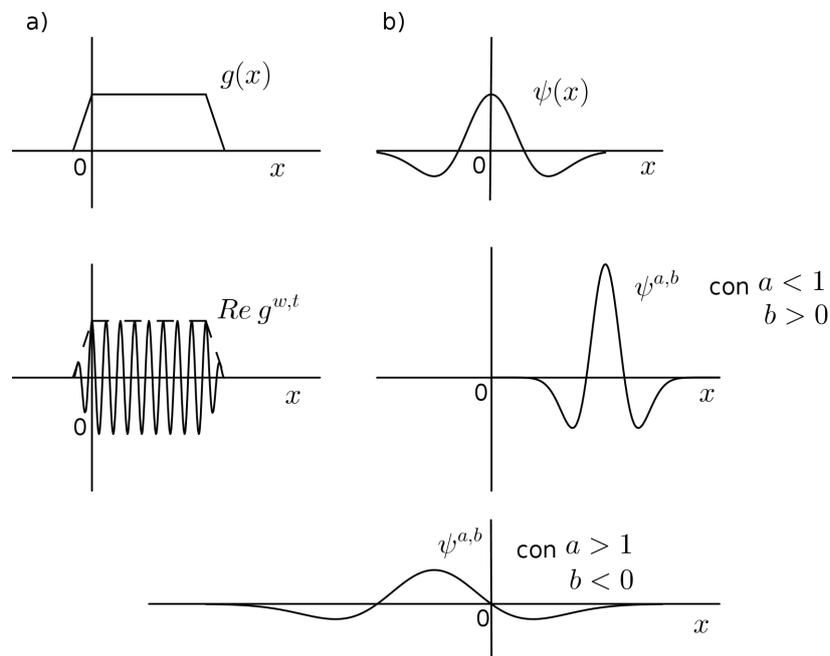


Figura 2.2: Típicas formas de a) función  $g^{\omega,t}$  de transformada de Fourier con ventana y b) wavelets  $\psi^{a,b}$ .

Como consecuencia, la transformada wavelet es más capaz que la de Fourier con ventana para hacer un acercamiento en fenómenos de alta frecuencia de muy corta vida. Esto es ilustrado en la figura (2.3), la cual muestra la transformada de Fourier con ventana y la transformada wavelet de la misma función  $f$  definida por

$$f(t) = \sin(2\pi v_1 t) + \sin(2\pi v_2 t) + \gamma[\delta(t - t_1) + \delta(t - t_2)].$$

En la práctica esta señal no está dada por esta expresión continua, sino por sus muestras, y al agregar una función  $\delta$  (la  $\delta$  de Dirac) es entonces aproximada agregando una constante a una sola muestra. En la versión muestreada, se tiene

$$f(n\tau) = \sin(2\pi v_1 n\tau) + \sin(2\pi v_2 n\tau) + \alpha(\delta_{n,n_1} + \delta_{n,n_2}).$$

Para el ejemplo en la figura (2.3a),  $v_1 = 500$  Hz  $v_2 = 1$  kHz,  $\tau = \frac{1}{8000}$  s (i.e. se tienen 8000 muestras por segundo),  $\alpha = 1,5$  y  $n_2 - n_1 = 32$  (correspondiente a 4 milisegundos entre los dos pulsos). Los tres espectrogramas (gráficos de los módulos de la transformada de Fourier con ventana) de la figura (2.3b) usan la ventana Hamming estándar, con anchos 12.8, 6.4 y 3.2 milisegundos, respectivamente. (Tiempo  $t$  varía horizontalmente, frecuencia  $\omega$  verticalmente y los niveles de gris indican el valor de  $|T^{win}(f)|$  con negro para los valores altos)

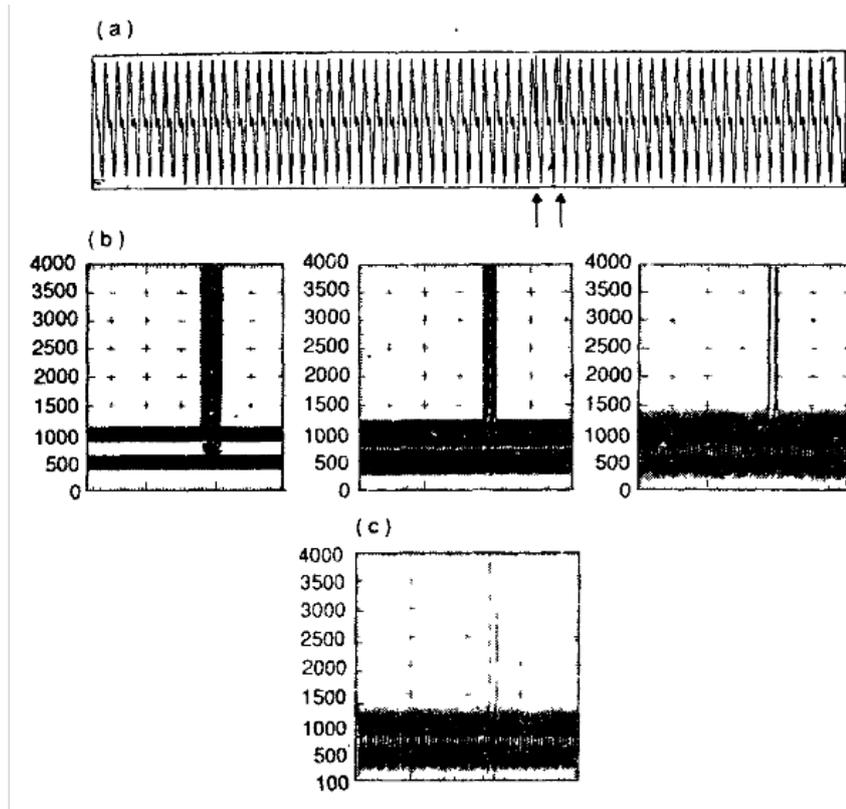


Figura 2.3: a) La señal  $f(t)$ . b) La transformada de Fourier de  $f$  con tres distintos anchos de ventana. c) Transformada wavelet de  $f$ .

Cuando el ancho de la ventana incrementa, la resolución de los dos tonos puros mejora, pero se vuelve difícil o hasta imposible determinar los dos pulsos. La figura (2.3c) muestra el módulo de la transformada wavelet de  $f$  calculado por medio de la wavelet de Morlet (compleja)  $\psi(t) = Ce^{-t^2/\alpha^2}(e^{i\pi t} - e^{-\pi^2\alpha^2/4})$ , con  $\alpha = 4$ . (Para hacer una fácil comparación, un eje de frecuencia lineal ha sido utilizado aquí; para la transformada wavelet, un eje de frecuencia logarítmico es más usual.) Se puede ver, que los dos tonos impulsos son determinados mejor que con la ventana Hamming de 3.2 ms, mientras que la resolución en frecuencia de los dos tonos puros es comparable con la obtenida con la ventana Hamming de 6.4 ms.

### 2.3. Diferentes tipos de transformadas wavelets

Existen muchos tipos de transformadas wavelets, todas originadas a partir de las fórmulas (2.3) y (2.4). En este trabajo se distinguirá entre

- A. La transformada wavelet continua (2.3), y  
 B. La transformada wavelet discreta (2.4).

Dentro de la transformada wavelet discreta se distingue aún entre

- a. Sistemas discretos redundantes (marcos) y  
 b. Ortonormal (y otras) bases de wavelets.

### La transformada wavelet continua

Aquí, los parámetros de traslación y dilatación  $a, b$  varían continuamente sobre  $\mathbb{R}$  (con la restricción  $a \neq 0$ ). La transformada wavelet es dada por la fórmula (2.3); una función puede ser reconstruida a partir de su transformada wavelet por medio de la fórmula de “resolución de identidad”.

$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \psi^{a,b} \rangle \psi^{a,b} \frac{dad b}{a^2}, \quad (2.6)$$

donde  $\psi^{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica el producto interno en  $L^2$ . La constante  $C_\psi$  depende solo de  $\psi$  y está dada por

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi; \quad (2.7)$$

se asume que  $C_\psi < \infty$  (de lo contrario (2.6) no tendría sentido). Si  $\psi$  está en  $L^1(\mathbb{R})$  (éste es el caso en todos los ejemplos de interés práctico), entonces  $\hat{\psi}$  es continua, así que  $C_\psi$  puede ser finita solo si  $\hat{\psi}(0) = 0$ , i.e.  $\int \psi(x) dx = 0$ .

La fórmula (2.6) puede ser vista en dos maneras diferentes: (1) como una manera de reconstruir  $f$  una vez que su transformada  $T^{wav} f$  es conocida, o (2) como una manera de escribir  $f$  como una superposición de wavelets  $\psi^{a,b}$ , los coeficientes en esta superposición son dados exactamente por la transformada wavelet de  $f$ .

### La discreta pero redundante transformada wavelet - marcos

En este caso los parámetros de dilatación y traslación  $a, b$  toman sólo valores discretos. Para  $a$  se eligen las potencias enteras (positivas y negativas) de un parámetro de dilatación fijo  $a_0 > 0$ , i.e.  $a = a_0^m$ . Como se explicó anteriormente, diferentes valores de  $m$  corresponden a wavelet de diferente ancho. Se sigue que la discretización del parámetro de traslación debe depender de  $m$ : estrechas (alta frecuencia) wavelets son trasladadas por pasos pequeños para cubrir todo el rango de tiempo, mientras anchas (baja frecuencia) wavelets son trasladadas por pasos largos. Como la anchura de  $\psi(a_0^m x)$  es proporcional a  $a_0^m$ , se elige entonces discretizar  $b$  por  $b = nb_0 a_0^m$ , donde  $b_0 > 0$  es fijo y  $n \in \mathbb{Z}$ . Las correspondientes wavelets discretamente etiquetadas son:

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{\frac{m}{2}} \psi(a_0^m x - nb_0) \quad (2.8)$$

Para una función  $f$ , el producto interno  $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$  es entonces exactamente la transformada wavelet discreta  $T_{m,n}^{wav}(f)$  como se definió en (2.4) (se asume de nuevo que  $\psi$  es real).

En el caso discreto, no existe, en general, una fórmula de “resolución de la identidad” como en el caso continuo. La reconstrucción de  $f$  a partir de  $T_{m,n}^{wav}(f)$ , si es posible, debe ser realizada de alguna otra manera. Las siguientes preguntas surgen naturalmente:

- ¿Será posible caracterizar completamente a  $f$  conociendo  $T_{m,n}^{wav}(f)$ ?
- ¿Será posible reconstruir  $f$  en una forma numéricamente estable a partir de  $T_{m,n}^{wav}(f)$ ?

Estas preguntas conciernen a la recuperación de  $f$  a partir de su transformada wavelet. Puede considerarse también el problema dual que consiste en la posibilidad de expandir  $f$  en wavelets, el cual lleva a las siguientes preguntas duales:

- ¿Puede cualquier función ser escrita como superposición de  $\psi_{m,n}$ ?
- ¿Existe un algoritmo numéricamente estable para calcular los coeficientes de tal expansión?

En el capítulo 3 de [DAU92] se trabaja en responder estas preguntas y se observa que con la intención de tener un, numéricamente estable, algoritmo de reconstrucción de  $f$  a partir de  $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$ , se requiere que  $\psi_{m,n}$  sea un marco. Ver definición (B.4.1).

Como en el caso continuo, la transformada wavelet discreta a menudo provee una muy redundante descripción de la función original dado que los coeficientes de la expansión no tienen porque ser únicos.

La elección de la función  $\psi$  usada en la transformada wavelet continua o en los marcos de familias de wavelets discretamente etiquetadas es esencialmente solo restringida por la condición de que  $C_\psi$ , como se definió en (2.7), sea finita. Para efectos prácticos se elige  $\psi$  tal que sea bien concentrada en ambos dominios de tiempo y frecuencia, pero ésto aún deja mucha libertad. A continuación se verá como renunciando un poco a esa libertad se pueden construir bases de wavelets ortonormales.

### Bases de wavelets ortonormales

Para algunas muy especiales selecciones de  $\psi$ ,  $a_0$  y  $b_0$ , las  $\psi_{m,n}$  constituyen una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ . En particular, si se elige  $a_0 = 2$  y  $b_0 = 1$ , entonces existe  $\psi$  con buenas propiedades de localización en tiempo-frecuencia, tal que

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - n) \quad (2.9)$$

constituye una base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ . (En lo que sigue, se trabajará solo con  $a_0 = 2$ ). El ejemplo más antiguo de una función  $\psi$  para la cuál  $\psi_{m,n}$  definida como en (2.9) constituye una base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$  es la función de Haar,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La demostración de que éste sistema es en efecto una base ortonormal se retomará más adelante en detalle.

## 2.4. Bases ortonormales y localización tiempo-frecuencia

Una manera de producir una base ortonormal a partir de una sola función involucra traslaciones y modulaciones. Por ejemplo, una base para  $L^2(\mathbb{R})$  es la siguiente: sea  $g = \chi_{[0,1]}$  y

$$g_{m,n}(x) = e^{2\pi imx} g(x - n) \text{ para } m, n \in \mathbb{Z}.$$

No es difícil ver que  $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ . D. Gabor consideró este tipo de sistema en 1946 y propuso su uso para propósitos de comunicación. Para una función general  $g \in L^2(\mathbb{R})$  el siguiente teorema da condiciones que  $g$  debe satisfacer si el sistema  $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal.

**Teorema 2.4.1.** Teorema de Balian-Low

Sea  $g \in L^2(\mathbb{R})$  y

$$g_{m,n}(x) = e^{2\pi imx} g(x - n), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Si  $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ , entonces

$$\text{o bien } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx = \infty \quad \text{ó} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \infty$$

*Demostración.* Se introducirán los operadores  $Q$  y  $P$ , definidos en, puede decirse, el espacio  $S'$  de distribuciones temperadas, dados por

$$(Qf)(x) = xf(x) \quad \text{y} \quad (Pf)(x) = -if'(x).$$

La relevancia de estos operadores en el teorema es que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |Qg(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |xg(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} |Pg(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |-ig'(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|^2 dx \\ &= \|g'\|_2^2 \\ &= \|\hat{g}'\|_2^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |2\pi i\xi \hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Entonces, se necesita mostrar que  $(Qg)$  y  $(Pg)$  no pueden ambas pertenecer a  $L^2(\mathbb{R})$ .

Supóngase que ambas  $(Qg)$  y  $(Pg)$  pertenecen a  $L^2(\mathbb{R})$ . Se mostrará que ésto lleva a una contradicción y así se probará el teorema. Se afirma que

$$\langle Qg, Pg \rangle = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, Pg \rangle, \quad (2.10)$$

$$\langle Qg, g_{m,n} \rangle = \langle g_{-m,-n}, Qg \rangle \text{ para todo } m, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.11)$$

y

$$\langle Pg, g_{m,n} \rangle = \langle g_{-m,-n}, Pg \rangle \text{ para todo } m, n \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12) implican

$$\langle Qg, Pg \rangle = \langle Pg, Qg \rangle \quad (2.13)$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \langle Qg, Pg \rangle &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, Pg \rangle \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle g_{-m,-n}, Qg \rangle \langle Pg, g_{-m,-n} \rangle \\ &= \langle Pg, Qg \rangle \end{aligned}$$

Pero (2.13) no puede cumplirse si  $Pg$  y  $Qg$  pertenecen a  $L^2(\mathbb{R})$ . Si este fuera el caso se podría aplicar la fórmula de integración por partes para obtener

$$\begin{aligned} \langle Qg, Pg \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} xg(x) \overline{(-ig'(x))} dx \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) + xg'(x)) \overline{g(x)} dx \\ &= -i \langle g, g \rangle + \langle Pg, Qg \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\langle g, g \rangle = \|g\|_2^2 = \|g_{0,0}\|_2^2 = 1$  se obtiene

$$\langle Qg, Pg \rangle = -i + \langle Pg, Qg \rangle,$$

lo cual contradice (2.13).

Entonces, el teorema está probado si se establece (2.10), (2.11) y (2.12). Como  $Qg, Pg \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \langle Qg, Pg \rangle &= \left\langle \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{m,n} \rangle g_{m,n}, Pg \right\rangle \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle \langle Qg, g_{m,n} \rangle g_{m,n}, Pg \rangle \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, Pg \rangle \end{aligned}$$

Lo cual prueba (2.10). Para probar (2.11) obsérvese que  $n \langle g, g_{m,n} \rangle = 0, \forall m, n \in \mathbb{Z}$ . Ésto es claro para  $n = 0$  y si  $n \neq 0, g = g_{0,0}$  es ortogonal a  $g_{m,n}$ . Así,

$$\begin{aligned} \langle Qg, g_{m,n} \rangle &= \langle Qg, g_{m,n} \rangle - n \langle g, g_{m,n} \rangle \\ &= \langle Qg - ng, g_{m,n} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(x-n) \overline{g(x-n)} e^{-2\pi imx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y+n) y \overline{g(y)} e^{-2\pi im(y+n)} dy \\ &= \langle g_{-m,-n}, Qg \rangle \end{aligned}$$

lo cual da (2.11). Para probar (2.12) se usa la fórmula de integración por partes para obtener

$$\begin{aligned}
\langle Pg, g_{m,n} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} Pg(x) \overline{g_{m,n}(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -ig'(x) e^{-2\pi imx} \overline{g(x-n)} dx \\
&= -i \int_{-\infty}^{\infty} g'(x) e^{-2\pi imx} \overline{g(x-n)} dx \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left[ -2\pi im \overline{g(x-n)} + \overline{g'(x-n)} \right] e^{-2\pi imx} dx \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -2\pi im g(x) \overline{g(x-n)} e^{-2\pi imx} + g(x) \overline{g'(x-n)} e^{-2\pi imx} \right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi m g(x) \overline{g(x-n)} e^{-2\pi imx} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{g'(x-n)} e^{-2\pi imx} dx \\
&= 2\pi m \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{g(x-n)} e^{-2\pi imx} dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(y+n) \left[ -ig'(y) \right] e^{-2\pi im(y+n)} dy \\
&= 2\pi m \langle g, g_{m,n} \rangle + \langle g_{-m,-n}, Pg \rangle \\
&= 2\pi m \delta_{m,0} \delta_{0,n} + \langle g_{-m,-n}, Pg \rangle \\
&= \langle g_{-m,-n}, Pg \rangle
\end{aligned}$$

□

### Ejemplos:

1. Se sabe que si  $g = \chi_{[0,1]}$ , el sistema generado por las funciones  $g_{m,n} = e^{2\pi imx} \chi_{[n,n+1]}$  es el sistema ortonormal trigonométrico usual extendido a  $\mathbb{R}$ , tomando el recubrimiento de  $\mathbb{R} : \mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$ . Se puede verificar que se cumple el teorema dado que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\chi_{[0,1]}|^2 dx = \frac{1}{3}$$

mientras que

$$\xi^2 |\hat{\chi}_{[0,1]}(\xi)|^2 = \left( \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi} \right)^2,$$

cuya integral es divergente.

2. Sea  $g(x) = e^{-x^2}$ , el sistema generado por  $g$  no es una base ortonormal dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |e^{-x^2}|^2 dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

y también

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{e^{-x^2}}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left| \frac{\sqrt{\pi}}{e^{\pi^2 \xi^2}} \right|^2 d\xi = \frac{1}{4\sqrt{2\pi^3}}.$$

es decir, ambas integrales del enunciado del teorema son convergentes por lo que el sistema generado por la función  $g$  no es una base ortonormal.



## Capítulo 3

# Construcción de wavelets

### 3.1. El sistema de Haar

El ejemplo más antiguo de una función  $\psi$  para la cual  $\psi_{j,k}$  definida por (2.9) constituye una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$  es la función de Haar,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La base de Haar ha sido conocida desde Haar (1910). Nótese que la función de Haar no tiene buena localización en tiempo y frecuencia: su transformada de Fourier  $\hat{\psi}(\xi)$  decae como  $|\xi|^{-1}$  para  $\xi \rightarrow \infty$ . Sin embargo se utilizará para propósitos de ilustración.

*Proposición 3.1.1.* La familia de Haar  $\psi_{j,k}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* Para demostrar que los elementos del sistema  $\{\psi_{j,k} : m, n \in \mathbb{Z}\}$  forman una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ , donde  $\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x - k)$ , se debe verificar que

1. los  $\psi_{j,k}$  son ortonormales;
2. cualquier función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  puede ser aproximada con arbitraria precisión por una combinación lineal finita de los  $\psi_{j,k}$ .

Como el soporte de  $\psi_{j,k}$  es  $[2^j k, 2^j(k+1)]$ , se sigue que dos wavelets de Haar de la misma escala no se sobreponen, así que  $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'}$ . Es posible que los soportes se superpongan si las dos wavelets tienen diferente longitud, como en la figura 3.1. Sin embargo, se tiene que si  $j < j'$  entonces el soporte de  $\psi_{j,k}$  cae completamente en una región donde  $\psi_{j',k'}$  es constante. Se sigue que el producto interno de  $\psi_{j,k}$  y  $\psi_{j',k'}$  es proporcional a la integral misma de  $\psi$ , la cual es cero.

Ahora hay que concentrarse en cómo aproximar una función arbitraria  $f \in L^2(\mathbb{R})$  por combinaciones lineales de wavelets de Haar. Cualquier función  $f$  en  $L^2(\mathbb{R})$  puede ser arbitrariamente aproximada por una función con soporte compacto la cual es constante a trozos en intervalos  $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$  (basta tomar el soporte y  $j$  suficientemente grandes). Es posible entonces restringir el trabajo solo a estas funciones constantes a trozos. Asumiendo que el soporte de  $f$  está contenido en  $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$ , y que es constante a trozos en

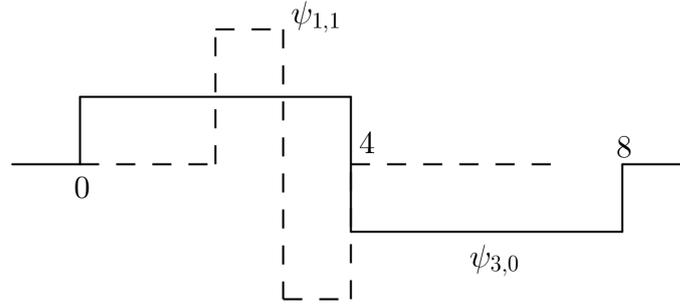


Figura 3.1: Dos wavelets de Haar. El soporte de la wavelet “más estrecha” está contenido completamente en un intervalo donde la wavelet “más ancha” es constante.

$[k2^{-J_0}, (k+1)2^{-J_0})$ , donde  $J_1$  y  $J_0$  pueden ser ambos arbitrariamente grandes. Se denotará el valor constante de  $f^0 = f$  en  $[k2^{-J_0}, (k+1)2^{-J_0})$  por  $f_k^0$ . Ahora, se puede representar  $f^0$  como suma de dos partes,  $f^0 = f^1 + \delta^1$ , donde  $f^1$  es una aproximación a  $f^0$  que es constante a trozos en intervalos dos veces más largos que los originales, idénticamente,  $f^1|_{[K2^{-J_0+1}, (K+1)2^{-J_0+1})} \equiv \text{constante} = f_K^1$ . Los valores de  $f_K^1$  están dados por el promedio de los dos correspondientes valores constantes para  $f^0$ ,  $f_K^1 = \frac{1}{2}(f_{2K}^0 + f_{2K+1}^0)$  (ver Figura 3.2). La función  $\delta^1$  es constante a trozos con igual longitud de paso que  $f^0$ , inmediatamente se tiene

$$\delta_{2k}^1 = f_{2k}^0 - f_k^1 = \frac{1}{2}(f_{2k}^0 - f_{2k+1}^0)$$

y

$$\delta_{2k+1}^1 = f_{2k+1}^0 - f_k^1 = \frac{1}{2}(f_{2k+1}^0 - f_{2k}^0) = -\delta_{2k}^1.$$

Se sigue que  $\delta^1$  es una combinación lineal de funciones de Haar escaladas y trasladadas:

$$\delta^1 = \sum_{k=-2^{J_1+J_0-1}}^{2^{J_1+J_0-1}-1} \delta_{2k}^1 \psi(2^{J_0-1}x - k).$$

Se ha escrito entonces  $f$  como

$$f = f^0 = f^1 + \sum_k c_{-J_0+1,k} \psi_{-J_0+1,k},$$

donde  $f^1$  es del mismo tipo que  $f^0$ , pero con el ancho de paso dos veces más largo, es posible aplicar el mismo truco a  $f^1$ , de manera que

$$f^1 = f^2 + \sum_k c_{-J_0+2,k} \psi_{-J_0+2,k},$$

Con el soporte de  $f^2$  aún contenido en  $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$  pero  $f^2$  es constante a trozos en los incluso más grandes intervalos  $[K2^{-J_0+2}, (K+1)2^{-J_0+2})$ . Se puede continuar de esta manera, hasta tener

$$f = f^{J_0+J_1} + \sum_{m=-J_0+1}^{J_1} \sum_k c_{m,k} \psi_{m,k}.$$

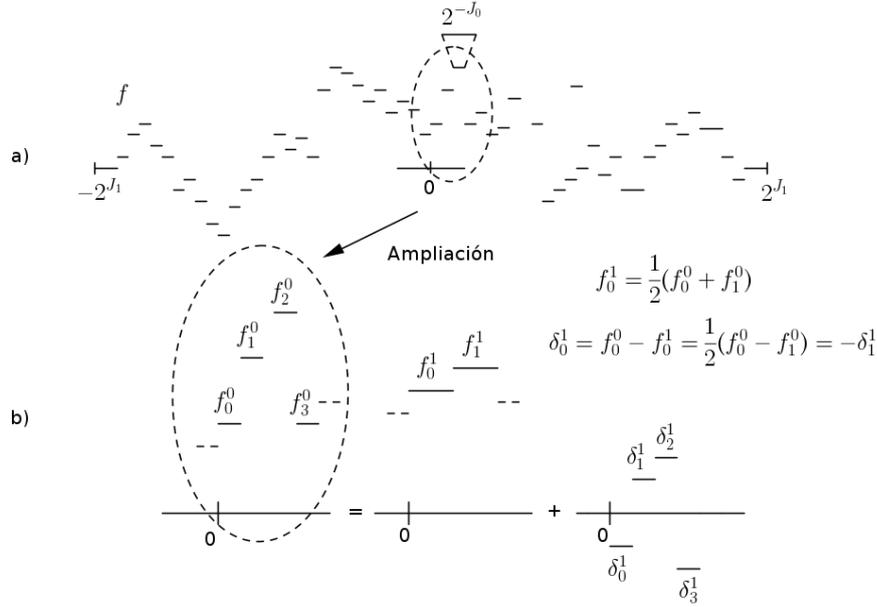


Figura 3.2: a) Una función  $f$  con soporte  $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$ , constante a trozos en  $[k2^{-J_0}, (k+1)2^{-J_0}]$  b) Una ampliación de una porción de  $f$ . En cada par de intervalos, la función  $f$  es reemplazada por su promedio ( $\rightarrow f^1$ ); la diferencia entre  $f$  y  $f^1$  es  $\delta^1$ , una combinación lineal de wavelets de Haar.

Aquí  $f^{J_0+J_1}$  consiste de dos trozos constantes (ver Figura 3.3), con  $f^{J_0+J_1}|_{[0,2^{J_1})} \equiv f_0^{J_0+J_1}$  el promedio de  $f$  sobre  $[0, 2^{J_1})$ , y con  $f^{J_0+J_1}|_{[-2^{J_1},0)} \equiv f_{-1}^{J_0+J_1}$  el promedio de  $f$  sobre  $[-2^{J_1}, 0)$ .

Aunque se ha rellenado por completo el soporte de  $f$ , aún se puede continuar con el truco de promediar: Nada detiene para ampliar el horizonte de  $2^{J_1}$  a  $2^{J_1+1}$ , y escribir  $f^{J_1+J_2} = f^{J_1+J_2+1} + \delta^{J_1+J_2+1}$ , donde

$$f^{J_1+J_2+1}|_{[0,2^{J_1+1})} \equiv \frac{1}{2}f_0^{J_1+J_2}, \quad f^{J_1+J_2+1}|_{[-2^{J_1+1},0)} \equiv \frac{1}{2}f_{-1}^{J_1+J_2}$$

y

$$\delta^{J_1+J_2} = \frac{1}{2}f_0^{J_1+J_2}\psi(2^{-J_1-1}x) - \frac{1}{2}f_{-1}^{J_1+J_2}\psi(2^{-J_1-1}x+1)$$

Ésto puede repetirse nuevamente, llevando a

$$f = f^{J_0+J_1+H} + \sum_{m=-J_0+1}^{J_1+H} \sum_k c_{m,k} \psi_{m,k},$$

con el soporte de  $f^{J_0+J_1+H}$  igual a  $[-2^{J_1+H}, 2^{J_1+H}]$ , y

$$f^{J_0+J_1+H}|_{[0,2^{J_1+H})} = 2^{-H}f_0^{J_0+J_1}, \quad f^{J_0+J_1+H}|_{[-2^{J_1+H},0)} = 2^{-H}f_{-1}^{J_0+J_1}.$$

$$\begin{array}{ccc}
& \overbrace{f_{-1}^{J_0+J_1}} & \overbrace{f_0^{J_0+J_1}} \\
\hline
& \begin{array}{ccc}
& -2^{J_1} & 0 & 2^{J_1} \\
\frac{1}{2}f_{-1}^{J_0+J_1} & & = & \frac{1}{2}f_0^{J_0+J_1} \\
\hline
-2^{J_1+1} & & 0 & 2^{J_1+1} \\
& & + & \\
\hline
-2^{J_1+1} & & 0 & 2^{J_1+1} \\
\hline
\underbrace{\hspace{10em}} & & \underbrace{\hspace{10em}} \\
-\frac{1}{2}f_{-1}^{J_0+J_1}\psi(2^{-J_1-1}x+1) & & \frac{1}{2}f_0^{J_0+J_1}\psi(2^{-J_1-1}x)
\end{array}
\end{array}$$

Figura 3.3: Los promedios de  $f$  en  $[0, 2^{J_1}]$  y  $[-2^{J_1}, 0]$  pueden ser extendidos sobre los intervalos más grandes  $[0, 2^{J_1+1}]$  y  $[-2^{J_1+1}, 0]$ , la diferencia es una combinación lineal de funciones de Haar muy estiradas.

Se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{m=-J_0+1}^{J_1+H} \sum_k c_{m,k} \psi_{m,k} \right\|_{L^2}^2 &= \|f^{J_0+J_1+H}\|_{L^2}^2 \\
&= 2^{-H/2} \cdot 2^{J_1/2} \left[ |f_0^{J_0+J_1}|^2 + |f_{-1}^{J_0+J_1}|^2 \right]^{1/2},
\end{aligned}$$

el cuál puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando  $H$  suficientemente grande. Como se afirmó,  $f$  puede ser aproximada con arbitraria precisión por combinación lineal de wavelets de Haar. □

El argumento visto en la anterior demostración utiliza implícitamente un enfoque de multiresolución: Se han escrito sucesivas aproximaciones cada vez más gruesas de  $f$  (los promedios  $f^j$  sobre intervalos cada vez más grandes) y en cada paso se ha escrito la diferencia entre la aproximación con una resolución  $2^{j-1}$ , y el siguiente nivel más grueso, con resolución  $2^j$ , como una combinación lineal de los  $\psi_{j,k}$ . En efecto se ha introducido una escalera de espacios  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , representando los sucesivos niveles de resolución: en este caso particular,

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}); f \text{ es constante por trozos en los intervalos } [k2^j, (k+1)2^j], k \in \mathbb{Z}\}.$$

Estos espacios tienen las propiedades siguientes:

1.  $\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$ ;
2.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0, \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ;
3.  $f \in V_j \leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0$ ;
4.  $f \in V_0 \rightarrow f(\cdot - n) \in V_0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

La propiedad 3 expresa que todos los espacios son versiones escaladas de un solo espacio (el aspecto de multiresolución). En el ejemplo de Haar se demostró que existe una función  $\psi$  tal que

$$\text{Proy}_{V_{j-1}} f = \text{Proy}_{V_j} f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (3.1)$$

La belleza del enfoque de multiresolución es que siempre que una escalera de subespacios  $V_j$  satisfaga las cuatro propiedades anteriores, junto con

5.  $\exists \varphi \in V_0$  tal que los  $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x - n)$  constituyen una base ortonormal de  $V_0$ ,

entonces existe  $\psi$  tal que (3.1) se cumple. En el ejemplo de Haar anterior puede tomarse  $\varphi(x) = 1$  si  $0 \leq x < 1$ ,  $\varphi(x) = 0$  en otro caso. Las  $\psi_{j,k}$  constituyen automáticamente una base ortonormal. Existe una receta explícita para la construcción de  $\psi$ : como  $\varphi \in V_0 \subset V_{-1}$  y los  $\varphi_{-1,n}(x) = \sqrt{2}\varphi(2x - n)$  constituyen una base ortonormal para  $V_{-1}$  (por 3. y 5. anteriores), existe  $h_n = \sqrt{2}\langle \varphi, \varphi_{-1,n} \rangle$  tal que  $\varphi(x) = \sum_n h_n \varphi(2x - n)$ . Es entonces suficiente tomar  $\psi(x) = \sum_n (-1)^n h_{-n+1} \varphi(2x - n)$  ([DAU92]), como se verá en la sección siguiente, aunque se obtendrá una expresión diferente para  $\psi$  dado que se harán unos cambios respecto del análisis en [DAU92]: Se utilizará  $j$  en lugar de  $-j$  en la definición de  $\psi_{j,k}$  y se trabajará con coeficientes  $\alpha_{-k} = \frac{h_k}{\sqrt{2}}$ . La función  $\varphi$  es llamada *función de escala* del análisis de multiresolución.

## 3.2. Análisis de multiresolución y construcción de wavelets

*Definición 3.2.1.* Un análisis de multiresolución o AMR es una sucesión de subespacios cerrados  $V_j, j \in \mathbb{Z}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  cumpliendo

$$V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2(\cdot)) \in V_{j+1}, \quad (3.3)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad (3.4)$$

$$\text{Propiedad de densidad: } \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad (3.5)$$

$$\exists \varphi \in V_0 \text{ tal que } \{\varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\} \text{ es una base ortonormal de } V_0. \quad (3.6)$$

A la función  $\varphi$  de la propiedad (3.6) se le llamará *función de escala del AMR*.

A veces la condición (3.6) puede ser reemplazada por una condición más débil, para ello se necesita la siguiente definición:

*Definición 3.2.2.*  $\{\varphi(\cdot - n), n \in \mathbb{Z}\}$  es una **base de Riesz** para  $V_0$  si para toda  $f$  de  $V_0$  existe una única sucesión  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  en  $\ell^2(\mathbb{Z})$  tal que

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \varphi(x - n)$$

con convergencia en  $L^2(\mathbb{R})$ , y

$$A \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \varphi(x - n) \right\|_2^2 \leq B \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2$$

con  $0 \leq A \leq B < \infty$  constantes que no dependen de  $f$ .

Cuando se tiene una familia de subespacios cumpliendo las primeras cuatro propiedades de la definición, y esta quinta propiedad más débil se dice que se tiene un AMR con una base de Riesz.

Obsérvese que la propiedad (3.6) de la definición implica que  $\{\varphi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz para  $V_0$  con  $A = B = 1$ . En efecto, basta tomar  $A = B = 1$  y la sucesión  $\alpha_n$  de los coeficientes de Fourier de cualquier función de  $V_0$  respecto del sistema ortonormal  $\{\varphi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ . Por la identidad de Parseval se deduce inmediatamente lo anunciado.

Sea  $\varphi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k)$ . Se observa que  $\varphi_{0,k} = \varphi(x - k)$  pertenece a  $V_0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  por la condición (3.6). Por otra parte, si  $j \in \mathbb{Z}$ , la condición (3.3) implica que  $\{\varphi_{j,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $V_j$ .

*Ejemplo 3.2.1.* El sistema de Haar está relacionado con el siguiente AMR. Sea  $V_j$  el espacio de las funciones en  $L^2(\mathbb{R})$  que son constantes en intervalos de la forma  $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$  es un AMR y se puede tomar como función de escala  $\varphi = \chi_{[-1,0]}$ . Es inmediato comprobar que se cumplen las cinco propiedades de la definición.

Las propiedades de la definición de un AMR no son independientes. Los siguientes dos teoremas contienen formulaciones precisas de esta dependencia.

*Teorema 3.2.1.* Las condiciones (3.2), (3.3) y (3.6) implican (3.4). Este resultado es cierto incluso si en vez de (3.6) solo se asume que  $\{\varphi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz.

*Demostración.* Se demostrará por reducción al absurdo. Supóngase que existe una función  $f$  no nula en  $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ . Sin pérdida de generalidad puede asumirse que  $\|f\|_2 = 1$ . En particular,  $f \in V_{-j}$  para cada  $j \in \mathbb{Z}$ ; entonces utilizando reiteradamente (3.3) se tiene que  $f_j(x) = 2^{\frac{j}{2}} f(2^j x) \in V_0$ . Más aún, un cambio de variables muestra que  $\|f_j\|_2 = \|f\|_2 = 1$ . Como se está asumiendo que  $\{\varphi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $V_0$ , se puede escribir

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j \varphi(x - k),$$

con convergencia en  $L^2(\mathbb{R})$ , de manera que

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k^j|^2 \leq \|f_j\|_2^2 = 1. \quad (3.7)$$

Tomando transformada de Fourier, puede escribirse

$$\begin{aligned}
 2^{-\frac{j}{2}} \hat{f}(2^{-j}\xi) &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i 2^{-j}\xi x} f(2^{-j}x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi y} 2^{\frac{j}{2}} f(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi y} f_j(y) dy \\
 &= \hat{f}_j(\xi),
 \end{aligned}$$

y utilizando el hecho que la transformada de Fourier de la trasladada de  $f$  es la modulación de la transformada de Fourier, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_j(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j (\tau_k \varphi)(\xi) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j e^{-2\pi i \xi k} \hat{\varphi}(\xi) \\
 &= m_j(\xi) \hat{\varphi}(\xi),
 \end{aligned}$$

donde  $m_j(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j e^{-2\pi i \xi k}$ .

$m_j$  es una función 1-periódica y por (3.7) se tiene  $\|m_j\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{A}}$  y por tanto es de  $L^2([a, a+2])$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ .

Así,  $\hat{f}(\xi) = 2^{\frac{j}{2}} m_j(2^j \xi) \hat{\varphi}(2^j \xi)$ , y para todo  $j \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_2^4 |\hat{f}(\xi)| d\xi &\leq 2^{\frac{j}{2}} \left( \int_2^4 |\hat{\varphi}(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_2^4 |m_j(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= 2^{-\frac{j}{2}} \left( \int_{2^{j+1}}^{2^{j+2}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{2^{j+1}}^{2^{j+2}} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left( \int_{2^{j+1}}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2^j} \int_{2^{j+1}}^{2^{j+2}} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left( \int_{2^{j+1}}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2^j} \sum_{l=0}^{2^j-1} \int_{2^{j+1}+2l}^{2^{j+1}+2(l+1)} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left( \int_{2^{j+1}}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{A} \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es consecuencia de la desigualdad de Hölder.

Haciendo  $j \rightarrow \infty$  se obtiene que  $\int_2^4 |\hat{f}(\xi)| d\xi = 0$ , y por tanto  $\hat{f}(\xi) = 0$ , en casi todo punto  $\xi \in [2, 4]$ . Aplicando el mismo argumento a  $2^{\frac{l}{2}} \hat{f}(2^l \xi)$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , se obtiene que  $\hat{f}(\xi) = 0$ , en casi todo punto  $\xi \in 2^l [2, 4]$ , Así,

$$\hat{f}(\xi) = 0, \text{ en casi todo punto } \xi \in (0, \infty).$$

Si se aplica este argumento en  $[-4, -2]$  en lugar de en  $[2, 4]$ , se obtiene que  $\hat{f}(\xi) = 0$  en casi todo punto  $\xi \in (-\infty, 0)$ . Así se llega a una contradicción con el hecho que  $f$  sea no nula.  $\square$

**Teorema 3.2.2.** Sea  $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$  una sucesión de subespacios cerrados de  $L^2(\mathbb{R})$  cumpliendo las condiciones (3.2), (3.3) y (3.6). Suponiendo que la función de escala  $\varphi$  de (3.6) es tal que  $|\hat{\varphi}|$  es continua en cero. Entonces la condición (3.5) es equivalente a que  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ . Además,  $|\hat{\varphi}(0)| = 1$ .

*Demostración.* Asumiendo que  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$  se demostrará que se cumple (3.5). Para ello, se demostrará que el ortogonal de  $W \equiv \overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$  contiene solo al cero.

Se probará primero que  $W$  es invariante bajo traslaciones. Para ello, se verá que  $W$  es invariante bajo traslaciones diádicas  $\tau_{2^{-l}m}$ ,  $l, m \in \mathbb{Z}$ .

Sea  $f \in W$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existen  $j_0 \in \mathbb{Z}$  y  $h \in V_{j_0}$ , tales que  $\|f - h\|_2 < \varepsilon$ . Por (3.2),  $h \in V_j$ ,  $\forall j \geq j_0$ . Por (3.3) y (3.6), es posible escribir,

$$h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \varphi(2^j x - k)$$

con convergencia en  $L^2(\mathbb{R})$ . Así,

$$(\tau_{2^{-l}m} h)(x) = h(x - 2^{-l}m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \varphi(2^j(x - 2^{-l}m) - k).$$

Si  $j \geq l$ , como  $2^{j-l}$  es un entero,  $\varphi(2^j(x - 2^{-l}m) - k) = \varphi(2^j x - 2^{j-l}m - k)$  es un elemento de  $V_j$ . Como  $\|\tau_{2^{-l}m} f - \tau_{2^{-l}m} h\|_2 = \|f - h\|_2 < \varepsilon$  y  $\varepsilon$  es arbitrariamente pequeño, se puede concluir que  $W$  es invariante bajo traslaciones diádicas. Ahora, para un general  $x \in \mathbb{R}$ , es posible encontrar  $m$  y  $l$ , ambos enteros, tales que  $2^{-l}m$  es arbitrariamente cercano a  $x$ ; entonces,  $\|\tau_{2^{-l}m} f - \tau_x f\|_2 < \varepsilon$ , y se sigue que  $W$  es invariante bajo toda las traslaciones  $\tau_x$ .

Como  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$  y  $|\hat{\varphi}|$  es continua en 0,  $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$  en  $(-\mu, \mu)$  para algún  $\mu > 0$ . Supóngase que existe  $g \in W^\perp$ . Se desea mostrar que  $g$  es idénticamente nula.  $g$  es entonces ortonormal a toda función  $f \in W$ , y como  $W$  es invariante bajo traslaciones, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \overline{g(t)} dt = 0$$

para toda  $x \in \mathbb{R}$  y toda  $f \in W$ . Como  $(\tau_{-x} f)^\wedge(\xi) = e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi)$ , y usando el teorema de Plancherel se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = 0$$

para toda  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $\hat{f} \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ , la igualdad anterior implica que  $\hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} = 0$  en casi todo punto  $\xi \in \mathbb{R}$ . En particular, sea  $f(x) = 2^j \varphi(2^j x)$  de manera que  $f \in V_j \subset W$  y  $\hat{f}(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j} \xi)$ . Así,  $\hat{\varphi}(2^{-j} \xi) \overline{\hat{g}(\xi)} = 0$  en casi todo punto  $\xi \in \mathbb{R}$ . Dado que  $\hat{\varphi}(2^{-j} \xi) \neq 0$  si  $\xi \in (-2^j \mu, 2^j \mu)$  puede concluirse que  $\hat{g}(\xi) = 0$  en casi todo punto  $\xi$  tal que  $|\xi| < 2^j \mu$ . Tomando límite cuando  $j \rightarrow \infty$  se tiene que  $\hat{g} = 0$  en casi todo punto y por lo tanto  $g = 0$ . Así, la unión de los subespacios cerrados  $V_j$  es densa en  $L^2(\mathbb{R})$ .

Ahora, asumiendo que  $W = \overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$  se demostrará que  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ .

Sea  $f$  tal que  $\hat{f} = \chi_{[-1,1]}$ . Entonces, por el teorema de Plancherel,

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2 = 2.$$

Sea  $P_j$  la proyección ortogonal sobre  $V_j$ . Entonces, como

$$\left| \|f\|_2 - \|P_j f\|_2 \right| \leq \|f - P_j f\|_2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

y se tiene que  $\|P_j f\|_2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \|f\|_2$ .

Sea  $\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k)$ , entonces se tiene que

$$\|P_j f\|_2^2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \right\|_2^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 2.$$

Por (3.3) y (3.6),  $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $V_j$ . Por el teorema de Plancherel, la identidad de Parseval y teniendo en cuenta que  $\hat{f} = \chi_{[-1,1]}$ , se tiene,

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_{L^2}^2 &= \|\{\langle f, \varphi_{j,k} \rangle\}_k\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{(\varphi_{j,-k})^\wedge(\xi)} d\xi \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i 2^{-j} k \xi} 2^{-\frac{j}{2}} \overline{\hat{\varphi}(2^{-j} \xi)} d\xi \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i 2^{-j} k \xi} 2^{-\frac{j}{2}} \overline{\hat{\varphi}(2^{-j} \xi)} d\xi \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} e^{-2\pi i \mu k} 2^{\frac{j}{2}} \overline{\hat{\varphi}(\mu)} d\mu \right|^2 \\ &= 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} e^{-2\pi i \mu k} \hat{\varphi}(\mu) d\mu \right|^2. \end{aligned}$$

Para  $j$  suficientemente grande se tiene que  $[-2^{-j}, 2^{-j}] \subset [-1, 1]$ , y la última expresión es  $2^j$  veces la suma de los cuadrados de los valores absolutos de los coeficientes de Fourier de la función  $\chi_{[-2^{-j}, 2^{-j}]}$ . Así, por Plancherel,

$$2^j \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)| d\mu \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 2.$$

Pero por la continuidad de  $|\hat{\varphi}|$  en cero,

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \rightarrow |\hat{\varphi}(0)|^2.$$

Tomando  $\varepsilon = 2^{-j}$ , se tiene

$$\frac{1}{2} 2^j \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \rightarrow |\hat{\varphi}(0)|^2.$$

Así,  $|\hat{\varphi}(0)| = 1 \neq 0$ . □

De la demostración del teorema anterior es posible deducir (3.5) si se supone que se cumplen (3.2), (3.3), (3.6) y que existe  $\mu \neq 0$  tal que  $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$  en  $(-\mu, \mu)$ . También, si  $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$  es un AMR, la prueba del teorema anterior muestra que se debe cumplir

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{-j+1}} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu = 1.$$

Ahora, se mostrará que es equivalente suponer (3.6) que solamente suponer que  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $V_0$ . Ya se observó anteriormente que una implicación es evidente, ahora se verá que si  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $V_0$ , entonces existe una función  $\gamma \in V_0$  tal que  $\{\gamma(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $V_0$ . Ésto es una consecuencia del siguiente lema:

*Lema 3.2.1.* Sea  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  tal que el conjunto de traslaciones  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz del subespacio cerrado de  $L^2(\mathbb{R})$  que generan. Es decir,

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(\cdot - k) \right\|_2^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2,$$

donde las constantes  $A$  y  $B$  cumplen que  $0 \leq A \leq B < \infty$  y son independientes de  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ . Sea

$$\sigma_\varphi(\xi) \equiv \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces  $\sqrt{A} \leq \sigma_\varphi(\xi) \leq \sqrt{B}$  para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Antes de presentar la prueba de este lema, se mostrará porque la afirmación hecha es una consecuencia de éste. Definiendo  $\gamma$  por  $\hat{\gamma} = \frac{\hat{\varphi}}{\sigma_\varphi}$ . Como  $\frac{1}{\sigma_\varphi}$  es acotada con

$$0 < \frac{1}{\sqrt{B}} \leq \frac{1}{\sigma_\varphi(\xi)} \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \text{ para casi todo } \xi \in \mathbb{R},$$

$\hat{\gamma}$ , y por tanto  $\gamma$ , pertenecen a  $L^2(\mathbb{R})$ . De hecho, como  $\sigma_\varphi$  es periódica de periodo 1, puede encontrarse dos sucesiones  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  y  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  tales que,

$$\frac{1}{\sigma_\varphi(\xi)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi i k \xi}, \text{ y}$$

$$\sigma_\varphi(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-2\pi i k \xi},$$

con convergencia en  $L^2(\mathbb{T})$ . Así,

$$\hat{\gamma}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi i k \xi}, \text{ y}$$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\gamma}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-2\pi i k \xi}.$$

Tomando transformada de Fourier, estas igualdades se convierten en

$$\gamma(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_{0,k}(x),$$

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \gamma_{0,k}(x),$$

con convergencia en  $L^2(\mathbb{R})$ . Así,  $\gamma \in \overline{\text{span}\{\varphi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$ , y  $\varphi \in \overline{\text{span}\{\gamma_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$ . Por lo tanto,  $\{\gamma(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de  $V_0$ . Además, se sigue de la definición de  $\gamma$  y la periodicidad de  $\sigma_\varphi$  que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\xi + k)|^2 = \frac{1}{\sigma_\varphi^2(\xi)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 = 1 \text{ para casi todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

La afirmación de que  $\{\gamma(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $V_0$  se sigue de una más básica caracterización de tales sistemas ortonormales:

*Proposición 3.2.1.* Si  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , entonces  $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal si y solo si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + k)|^2 = 1 \text{ para casi todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* Se sigue del siguiente argumento de periodicidad y el teorema de Plancherel:

$$\begin{aligned} \delta_{k,0} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{g(x-k)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} e^{-2\pi i \xi k} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{2\pi i \xi k} d\xi \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_l^{l+1} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{2\pi i \xi k} d\xi \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |\hat{g}(\mu + l)|^2 e^{2\pi i \mu k} d\mu \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + l)|^2 \right) e^{2\pi i \mu k} d\mu, \end{aligned}$$

y esto implica que la función 1-periódica  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + k)|^2$  vale 1 en casi todo punto, dado que el coeficiente de Fourier correspondiente a  $k = 0$  vale 1 y el resto de coeficientes vale 0. El recíproco es inmediato.  $\square$

Ahora se presentará una prueba del lema 3.2.1. Sea  $\zeta = \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  una sucesión de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  y  $S_\zeta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{0,k}$ . Entonces

$$\hat{S}_\zeta(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i \xi k} \hat{\varphi}(\xi) = v_\zeta(\xi) \hat{\varphi}(\xi),$$

con  $v_\zeta(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i \xi k} \in L^2([0, 1])$ .

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|\hat{S}_\zeta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |v_\zeta(\xi) \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} |v_\zeta(\xi) \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^1 |v_\zeta(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 d\xi \\ &= \int_0^1 |v_\zeta(\xi) \sigma_\varphi(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Así, por el teorema de Plancherel,

$$\|S_\zeta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_0^1 |v_\zeta(\xi) \sigma_\varphi(\xi)|^2 d\xi.$$

Por tanto, puede reescribirse la propiedad del enunciado de la forma

$$A \|v_\zeta\|_{L^2([0,1])}^2 \leq \|v_\zeta \sigma_\varphi\|_{L^2([0,1])}^2 \leq B \|v_\zeta\|_{L^2([0,1])}^2.$$

Fijando  $\eta \in [0, 1]$  y tomando  $v_\zeta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m-1} e^{2\pi i k(\xi - \eta)}$ , se tendrá que

$$|v_\zeta(\xi)|^2 = \frac{1}{m} \left( \frac{\sin(\pi m(\xi - \eta))}{\sin(\pi(\xi - \eta))} \right)^2 = K_m(\eta - \xi),$$

donde  $K_m$  es el  $m$ -ésimo núcleo de Fejér en  $L^2([0, 1])$ .

Mirando los coeficientes de Fourier de  $v_\zeta$  se deduce que  $\|v_\zeta\|_{L^2([0,1])}^2 = 1$ . Teniendo esto en cuenta, se sustituye en la desigualdad y se obtiene,

$$A \leq \|v_\zeta \sigma_\varphi\|_{L^2([0,1])}^2 \leq B$$

Además,

$$\begin{aligned} \|v_\zeta \sigma_\varphi\|_{L^2([0,1])}^2 &= \int_0^1 |v_\zeta(\xi)|^2 \sigma_\varphi^2(\xi) d\xi \\ &= \int_0^1 K_m(\eta - \xi) \sigma_\varphi^2(\xi) d\xi \\ &= (K_m * \sigma_\varphi^2)(\eta), \text{ en casi todo punto } \eta \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Así, la desigualdad queda

$$A \leq (K_m * \sigma_\varphi^2)(\eta) \leq B, \text{ en casi todo punto } \eta \in [0, 1].$$

Pero, por el teorema de aproximación a la identidad,  $(K_m * \sigma_\varphi^2)(\eta) \rightarrow \sigma_\varphi^2(\eta)$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , y se obtiene así la desigualdad del enunciado.

### Construcción de wavelets desde un AMR

Si  $H$  es un espacio de Hilbert y  $\{H_k : k \in \mathbb{Z}\}$  es una secuencia de subespacios cerrados mutuamente ortogonales, se denotará por

$$V = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} H_k$$

al subespacio cerrado consistiendo de todas las  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k$  con  $f_k \in H_k$  y  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|f_k\|^2 < \infty$ , donde la norma viene dada por el producto interno. Se llamará a  $V$  la **suma directa ortogonal de los espacios  $H_k$** . Si la familia consiste de dos subespacios  $H_1$  y  $H_2$  se escribirá  $H_1 \oplus H_2$ . Suponiendo que se tiene una colección de subespacios cerrados  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  formando un AMR con función de escala  $\varphi$ . Sea  $W_0$  el complemento ortogonal de  $V_0$  en  $V_1$ , es decir.

$$V_1 = V_0 \oplus W_0.$$

Entonces si se dilatan los elementos de  $W_0$  por  $2^j$ , se obtiene un subespacio cerrado  $W_j$  de  $V_{j+1}$  tal que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Como  $V_j \rightarrow \{0\}$  cuando  $j \rightarrow -\infty$ , se tiene que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = \bigoplus_{\ell=-\infty}^j W_\ell \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Como  $V_j \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  cuando  $j \rightarrow \infty$ , se tiene que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j.$$

Así, para encontrar una wavelet ortonormal, solo se necesita encontrar una función  $\psi$  de  $W_0$  tal que  $\{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$  sea una base ortonormal de  $W_0$ , dado que en este caso, por (3.3) y la definición de  $W_j$ , se cumple que  $\{2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $W_j, \forall j \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto,  $\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ , y así  $\psi$  es una wavelet ortonormal de  $\mathbb{R}$ .

Para encontrar esta función  $\psi$  es útil notar la siguiente propiedad de la función  $\varphi$ . Por la propiedad (3.3) de la definición,  $\frac{1}{2} \varphi(\frac{\cdot}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$  y por (3.6) es posible expresar esta función usando la base  $\{\varphi(\cdot + k), k \in \mathbb{Z}\}$  y se obtiene

$$\frac{1}{2} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x + k),$$

con convergencia en  $L^2(\mathbb{R})$ , donde

$$\alpha_k := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \overline{\varphi(x+k)} dx, \text{ y } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < \infty. \quad (3.8)$$

Tomando transformada de fourier se obtiene

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_k \alpha_k e^{2\pi i k \xi} = \hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi), \quad (3.9)$$

donde

$$m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{2\pi i k \xi} \quad (3.10)$$

es una función periódica de periodo 1 en  $L^2([0, 1])$ . A esta función  $m_0$  se la llama *filtro de paso bajo* asociado a la función de escala  $\varphi$ .

Se empezará por derivar un simple pero básico corolario de la proposición 3.2.1:

*Corolario 3.2.1.* Supóngase que  $g$  es una función de  $L^2(\mathbb{R})$  y que  $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal. Entonces  $|\text{sop}(\hat{g})| \geq 1$  y se da la igualdad si y sólo si  $|\hat{g}| = \chi_K$  para algún conjunto  $K \subset \mathbb{R}$  medible con  $|K| = 1$ .

*Demostración.* Como el sistema es ortonormal, se tiene que  $\|g\|_2 = 1$ , y por Plancherel también  $\|\hat{g}\|_2 = 1$ . Por otro lado, por la proposición 3.2.1,  $|\hat{g}(\xi)| \leq 1$ , en casi todo punto  $\xi \in \mathbb{R}$ . Así,

$$|\text{sop}(\hat{g})| = \int_{\text{sop}(\hat{g})} 1 d\xi \geq \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = 1.$$

Si  $|\text{sop}(\hat{g})| = 1$  y  $0 < |\hat{g}(\xi)| < 1$  en un conjunto  $E$  de medida positiva se tiene la contradicción

$$1 = \|\hat{g}\|_2^2 = \int_{\text{sop}(\hat{g})} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < |\text{sop}(\hat{g}) - E| + |E| = |\text{sop}(\hat{g})| = 1;$$

entonces,  $|\hat{g}(\xi)| = 1$  en el soporte de  $\hat{g}$ . Finalmente, si  $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal y  $|\hat{g}| = \chi_K$ , entonces se debe tener

$$|K| = |\text{sop}(\hat{g})| = \|\hat{g}\|_2^2 = 1.$$

□

Se continuará con la construcción de una wavelet ortonormal  $\psi$  asociada con la función de escala  $\varphi$ . Una importante propiedad del filtro pasa bajos es

$$|m_0(\xi)|^2 + \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1 \text{ para casi todo punto } \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Esta condición se conoce como *condición de Smith-Barnwell*. Para probarla se utiliza la proposición 3.2.1, reemplazando  $g$  por  $\varphi$ , se obtiene

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi + k)|^2 = 1 \text{ para casi todo } \xi \in \mathbb{R},$$

pero usando (3.9) se observa que esta igualdad es equivalente a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi} \left( \xi + \frac{k}{2} \right) \right|^2 \left| m_0 \left( \xi + \frac{k}{2} \right) \right|^2 = 1 \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Separando la suma del lado izquierdo de la igualdad anterior, según la paridad de  $k$ , usando la 1-periodicidad de  $m_0$  y la proposición 3.2.1, se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi} \left( \xi + \frac{2\ell}{2} \right) \right|^2 \left| m_0 \left( \xi + \frac{2\ell}{2} \right) \right|^2 + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi} \left( \xi + \frac{2\ell+1}{2} \right) \right|^2 \left| m_0 \left( \xi + \frac{2\ell+1}{2} \right) \right|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + \ell)|^2 + \left| m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi} \left( \xi + \ell + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 \cdot 1 + \left| m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \cdot 1 \end{aligned}$$

Lo cual prueba (3.11).

Para encontrar  $\psi$  se examina  $W_{-1}$ , el cual es el complemento ortogonal de  $V_{-1}$  en  $V_0$ ; ésto se hace en el dominio de la transformada de Fourier.

**Lema 3.2.2.** Si  $\psi$  es una función de escala para un AMR  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , y  $m_0$  es el filtro pasa bajos asociado, entonces:

$$V_{-1} = \{f : \hat{f}(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ para alguna función 1-periódica } m \in L^2([0, 1])\},$$

$$V_0 = \{f : \hat{f}(\xi) = \ell(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ para alguna función 1-periódica } \ell \in L^2([0, 1])\}.$$

*Demostración.* Se probará primero que

$$V_{-1} \subseteq \{f : \hat{f}(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ para alguna función 1-periódica } m \in L^2([0, 1])\}.$$

Si  $f \in V_{-1}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi \left( \frac{1}{2}x - k \right),$$

con  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$ . Así, usando (3.9),

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \hat{\varphi}(2\xi) e^{-4\pi i \xi k} \\ &= \sqrt{2} \hat{\varphi}(2\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-4\pi i \xi k} \\ &= \sqrt{2} \hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-4\pi i \xi k} \\ &= \sqrt{2} \hat{\varphi}(\xi) m(2\xi) m_0(\xi), \end{aligned}$$

con  $m(\xi) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i \xi k}$ , que es una función 1-periódica de  $L^2([0, 1])$ .

Ahora, para la inclusión contraria, sea  $m \in L^2([0, 1])$  una función 1-periódica. Se desea probar que  $f$  pertenece a  $V_{-1}$ , donde  $f$  está definida por

$$\hat{f}(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$

Calculando como en el paso anterior se obtiene que  $f$  es de la forma deseada, pero hace falta que  $m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$  sea de  $L^2(\mathbb{R})$ . Ésto es verdadero para cualquier función de la forma  $h(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$  si  $h$  es 1-periódica y  $h \in L^2([0, 1])$  debido a la ortonormalidad de  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ . En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}} |h(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |h(\mu)|^2 |\hat{\varphi}(\mu + k)|^2 d\mu = \|h\|_{L^2([0,1])}^2$$

por proposición 3.2.1. Como  $m_0$  es acotado por la proposición 3.11 y  $m \in L^2([0, 1])$ , se tiene que  $h(\xi) \in L^2([0, 1])$ . Ésto establece la caracterización de  $V_{-1}$ .

Se verá ahora que

$$V_0 = \{f : \hat{f}(\xi) = \ell(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ para alguna función 1-periódica } \ell \in L^2([0, 1])\}.$$

Si  $f \in V_0$ ,  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x - k)$ , con  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$ . Así,

$$\hat{f}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i \xi k} = \ell(\xi)\hat{\varphi}(\xi),$$

con  $\ell$  función 1-periódica en  $L^2([0, 1])$ . La prueba se termina con un argumento similar al utilizado en la caracterización de  $V_{-1}$ . Sea  $\ell$  una función 1-periódica de  $L^2([0, 1])$ . Así,

$$\int_{\mathbb{R}} |\ell(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\ell(\mu)|^2 |\hat{\varphi}(\mu + k)|^2 d\mu = \|\ell\|_{L^2([0,1])}^2.$$

Por lo tanto,  $\hat{f}(\xi)$  está en  $L^2(\mathbb{R})$  y queda demostrado el lema.  $\square$

Para continuar con la construcción de la wavelet  $\psi$ , se debe caracterizar a los elementos de  $W_{-1}$  y  $W_0$ . Los elementos de  $W_{-1}$  son todas las  $L^2$ -funciones  $f \in V_0$  que son ortogonales a  $V_{-1}$ . Sea

$$\begin{aligned} U : V_0 &\rightarrow L^2([0, 1]) \\ f &\rightarrow U(f) = \ell, \end{aligned}$$

donde la función  $\ell$  es definida como en el lema 3.2.2. Se cumple que  $U$  es lineal y además

$$\|Uf\|_{L^2([0,1])}^2 = \|\ell\|_{L^2([0,1])}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Por la identidad de polarización se obtiene que

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle Uf, Ug \rangle_{L^2([0,1])}, \quad \forall f, g \in V_0.$$

Si  $f$  es ortogonal a  $V_{-1}$ , esta última igualdad y el lema 3.2.2 implican que  $\ell$  debe ser ortogonal a  $m(2\xi)m_0(\xi)$ , para toda función 1-periódica  $m \in L^2([0, 1])$ . Así, se debe cumplir,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \ell(\xi) \overline{m(2\xi)m_0(\xi)} d\xi \\ &= \int_0^{1/2} \overline{m(2\xi)} \left\{ \ell(\xi) \overline{m_0(\xi)} + \ell\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \right\} d\xi, \end{aligned}$$

para toda función 1-periódica  $m \in L^2([0, 1])$ . Así, como la función  $m(2\cdot)$  es periódica de periodo  $\frac{1}{2}$ , la última igualdad indica que la función  $\frac{1}{2}$ -periódica que está entre llaves es ortogonal a toda función  $\frac{1}{2}$ -periódica de cuadrado integrable. Es decir,

$$\ell(\xi) \overline{m_0(\xi)} + \ell\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} = 0,$$

para casi todo  $\xi \in [0, 1]$ .

Así, si se escribe esta relación en forma vectorial, interpretándola como la condición para que dos vectores en el plano sean paralelos, se tiene que,

$$\left( \ell(\xi), \ell\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right) = -\lambda\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \left( \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)}, -\overline{m_0(\xi)} \right), \quad (3.12)$$

casi para todo  $\xi$  y para un  $\lambda(\xi)$  apropiado.

Haciendo el cambio  $\xi = \mu + \frac{1}{2}$  y utilizando que  $m_0$  y  $\ell$  son 1-periódicas se obtiene

$$\left( \ell\left(\mu + \frac{1}{2}\right), \ell(\mu) \right) = -\lambda(\mu + 1) \left( \overline{m_0(\mu)}, -\overline{m_0\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \right).$$

Cambiando el orden de las componentes y acomodando el signo menos se obtiene que la igualdad anterior es equivalente a

$$\left( \ell(\xi), \ell\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right) = \lambda(\xi + 1) \left( \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)}, -\overline{m_0(\xi)} \right), \quad \text{para casi todo } \xi. \quad (3.13)$$

Se sabe que por la proposición 3.11 que el vector

$$\left( \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)}, -\overline{m_0(\xi)} \right)$$

tiene norma 1 para casi todo  $\xi$ . Este hecho, junto con las igualdades (3.12) y (3.13), implica que  $\lambda(\xi + \frac{1}{2}) = -\lambda(\xi + 1)$  para casi todo  $\xi \in [0, 1]$ . Así,  $\lambda$  es una función 1-periódica y además

$$\lambda(\xi) = -\lambda\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \quad \text{para casi todo } \xi \in [0, 1]. \quad (3.14)$$

Ésto significa que  $\lambda(\xi) = e^{2\pi i \xi} s(2\xi)$  donde  $s \in L^2([0, 1])$  y es 1-periódica. Es suficiente definir  $s(\xi) = e^{-\pi i \xi} \lambda(\frac{1}{2}\xi)$ .

De (3.12) y (3.14) se obtiene

$$\ell(\xi) = e^{2\pi i \xi} \overline{s(2\xi) m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right)}, \quad (3.15)$$

con  $s \in L^2([0, 1])$  y 1-periódica. Pero el subespacio de  $L^2(\mathbb{R})$  que contiene todas las funciones  $f$  tales que  $\hat{f}(\xi) = \ell(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$  con  $\ell$  satisfaciendo (3.15) está en el complemento ortogonal de  $V_{-1}$  en  $V_0$ . Esto da la siguiente caracterización de  $W_{-1}$ :

$$W_{-1} = \left\{ f : \hat{f}(\xi) = e^{2\pi i \xi} \overline{s(\xi) m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right)} \hat{\varphi}(\xi), \text{ para } s \in L^2([0, 1]) \text{ función 1-periódica} \right\}.$$

lo cual, permite establecer la siguiente caracterización de  $W_0$ :

**Lema 3.2.3.** Si  $\varphi$  es una función de escala de un AMR  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  y  $m_0$  es su filtro pasa bajos asociado:

$$W_0 = \left\{ f : \hat{f}(2\xi) = e^{2\pi i \xi} \overline{s(2\xi) m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right)} \hat{\varphi}(\xi), \text{ para } s \in L^2([0, 1]) \text{ función 1-periódica} \right\}.$$

Se sigue de este lema que  $W_0$  es invariante por traslaciones enteras aunque  $V_1$  no lo es. De manera similar, se tiene

$$W_j = \left\{ f : \hat{f}(2^{j+1}\xi) = e^{2\pi i \xi} \overline{s(2\xi) m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right)} \hat{\varphi}(\xi), \text{ para } s \in L^2([0, 1]) \text{ función 1-periódica} \right\}.$$

Si se define  $\psi$  por

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{2\pi i \xi} \overline{m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right)} \hat{\varphi}(\xi), \quad (3.16)$$

tomando  $s \equiv 1$  en (3.15). Se puede afirmar que se ha encontrado la wavelet ortonormal que se estaba buscando. De hecho, toda wavelet ortonormal en  $W_0$  puede ser caracterizada como sigue:

**Proposición 3.2.2.** Supóngase que  $\varphi$  es una función de escala de un AMR  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , y sea  $m_0$  el filtro de paso bajo asociado. Una función  $\psi \in W_0 = V_1 \cap V_0^\perp$  es una wavelet ortonormal en  $L^2(\mathbb{R})$  si y solo si,

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{2\pi i \xi} \overline{v(2\xi) m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right)} \hat{\varphi}(\xi) \quad (3.17)$$

para casi todo  $\xi$  de  $\mathbb{R}$  y para alguna función  $v$  1-periódica medible tal que

$$|v(\xi)| = 1, \text{ a.e. } \xi \in L^2([0, 1]).$$

*Demostración.* Primero que todo,  $\psi \in W_0$  por la caracterización de  $W_0$  y por que la última igualdad envuelve que  $v \in L^2([0, 1])$ . Ahora, para cualquier  $g \in W_0$  existe una función 1-periódica  $s \in L^2([0, 1])$  tal que

$$\hat{g}(2\xi) = e^{2\pi i \xi} \overline{s(2\xi) m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right)} \hat{\varphi}(\xi).$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(\xi) &= e^{\pi i \xi} \overline{s(\xi) m_0 \left( \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \right)} \hat{\varphi} \left( \frac{1}{2} \xi \right) \\
 &= \frac{s(\xi)}{v(\xi)} e^{\pi i \xi} \overline{v(\xi) m_0 \left( \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \right)} \hat{\varphi} \left( \frac{1}{2} \xi \right) \\
 &= \frac{s(\xi)}{v(\xi)} \hat{\psi}(\xi) \\
 &= s(\xi) \overline{v(\xi)} \hat{\psi}(\xi).
 \end{aligned}$$

Dado que  $s\bar{v} \in L^2([0, 1])$ , puede escribirse  $s(\xi)\overline{v(\xi)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k \xi}$ , para una sucesión  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , y se obtiene

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(x - k),$$

lo cual prueba que  $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  genera  $W_0$ . La ortonormalidad de este sistema puede ser probado mostrando que  $\hat{\psi}$  satisface la igualdad de la proposición 3.2.1:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(\xi + k) \right|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi} \left( \frac{1}{2} \xi + \frac{k}{2} \right) \right|^2 \left| m_0 \left( \frac{1}{2} \xi + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \\
 &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi} \left( \frac{1}{2} \xi + \ell \right) \right|^2 \left| m_0 \left( \frac{1}{2} \xi + \ell + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \\
 &\quad + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi} \left( \frac{1}{2} \xi + \ell + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \left| m_0 \left( \frac{1}{2} \xi + \ell + 1 \right) \right|^2 \\
 &= \left| m_0 \left( \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \right) \right|^2 + \left| m_0 \left( \frac{1}{2} \xi \right) \right|^2,
 \end{aligned}$$

donde se ha sumado sobre los pares e impares por separado, se ha usado la 1-periodicidad de  $m_0$ , la proposición 3.2.1 para  $\varphi$  y la ecuación (3.11) para  $m_0$ .

Se ha observado antes que si  $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $W_0$ , entonces  $\{2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal para  $V_j$ . Así, como se tiene que  $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$ ,  $\psi$  es de hecho una wavelet ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Ahora, para el recíproco, se debe mostrar que toda wavelet ortonormal  $\psi$  en  $W_0$  es descrita por (3.17). Para cualquier  $\psi \in W_0$ , por el lema 3.2.3, debe haber una función 1-periódica  $v \in L^2([0, 1])$  tal que

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i \xi} \overline{v(\xi) m_0 \left( \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \right)} \hat{\varphi} \left( \frac{1}{2} \xi \right).$$

Si  $\psi$  es una wavelet ortonormal, entonces la ortonormalidad de  $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  da

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(\xi + k) \right|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |v(\xi)|^2 \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \left| \hat{\varphi} \left( \frac{\xi}{2} + \frac{k}{2} \right) \right|^2 \\
&= |v(\xi)|^2 \left( \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \left| \hat{\varphi} \left( \frac{\xi}{2} + \ell \right) \right|^2 + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \left| \hat{\varphi} \left( \frac{\xi}{2} + \ell + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \right) \\
&= |v(\xi)|^2 \left( \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) \right|^2 + \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \right) \\
&= |v(\xi)|^2,
\end{aligned}$$

para casi todo  $\xi \in [0, 1]$ . Lo cual completa la prueba. □

Esta proposición completa la construcción de una wavelet  $\psi$  desde un AMR. La siguiente proposición muestra una manera de expresar  $\psi$  como combinación lineal de traslaciones de la función de escala y con coeficientes relacionados con los coeficientes que determinan el filtro pasa bajos.

*Proposición 3.2.3.* Suponiendo que  $\varphi$  es la función de escala de un AMR y que  $m_0$  es el filtro pasa bajos asociado. Entonces,

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2x - (k - 1)),$$

donde  $m_0(\xi) = \sum_k \alpha_k e^{2\pi i k \xi}$ .

*Demostración.* Como  $(-1)^k = e^{\pi i k}$ , se tiene que  $\overline{m_0(\xi + \frac{1}{2})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha_k} e^{-2\pi i k \xi} (-1)^k$ . Sustituyendo en (3.16) se obtiene

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(2\xi) &= e^{2\pi i \xi} \overline{m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right)} \hat{\varphi}(\xi) \\
&= e^{2\pi i \xi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha_k} e^{-2\pi i k \xi} (-1)^k \hat{\varphi}(\xi) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-2\pi i \xi (k-1)} \hat{\varphi}(\xi).
\end{aligned}$$

Así,

$$\hat{\psi}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-\pi i \xi (k-1)} \hat{\varphi} \left( \frac{\xi}{2} \right).$$

Finalmente, tomando transformada de Fourier inversa,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-\pi i \xi (k-1)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{2\pi i \xi x} d\xi \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \int_{\mathbb{R}} e^{\pi i \xi (2x - (k-1))} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} (2) \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \mu (2x - (k-1))} \hat{\varphi}(\mu) d\mu \\
&= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2x - (k-1)).
\end{aligned}$$

□

Ahora, se muestra una manera de obtener  $|\hat{\varphi}|$  a partir de  $|\hat{\psi}|$ .

*Proposición 3.2.4.* Sea  $\varphi$  la función de escala de un AMR y  $\psi$  una wavelet ortonormal. Entonces,

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2, \text{ para casi todo punto } \xi \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* De la proposición 3.11, de (3.9) y de (3.16) se obtiene

$$\begin{aligned}
|\hat{\varphi}(2\xi)|^2 + \left| \hat{\psi}(2\xi) \right|^2 &= |\hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi)|^2 + \left| e^{2\pi i \xi} \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}(\xi) \right|^2 \\
&= |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \left( |m_0(\xi)|^2 + \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 \right) \\
&= |\hat{\varphi}(\xi)|^2.
\end{aligned}$$

Iterando este proceso se obtiene que

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 + \sum_{j=1}^N \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2, \quad \forall N \geq 1.$$

Como  $|\hat{\varphi}(\xi)|^2 \leq 1$ , la sucesión  $\left\{ \sum_{j=1}^N \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2 : N = 2, 3, \dots \right\}$  es una sucesión creciente de números reales acotada por 1, y su límite existe. Así,  $\lim_{N \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2$  también existe. Además,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2^N} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

y por el lema de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{N \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 d\xi \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 d\xi = 0.$$

Así,  $\lim_{N \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 = 0$  y queda probada la proposición. □

*Ejemplo 3.2.2.* La wavelet de Haar está construida (con una traslación) a partir del AMR generado por la función de escala  $\varphi(x) = \chi_{[-1,0)}(x)$  asociado con el AMR descrito en el ejemplo 3.2.1. Como

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\chi_{[-2,0)}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(x+1),$$

se deduce que los coeficientes del  $m_0$  son  $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  y  $\alpha_k = 0 \forall k \neq 0, 1$ . Así el filtro de paso bajo para la wavelet de Haar es

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{2\pi i\xi}).$$

Usando la proposición 3.2.3 se obtiene que

$$\psi(x) = \varphi(2x+1) - \varphi(2x) = \chi_{[-1, -\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[-\frac{1}{2}, 0)}(x).$$

Este resultado también puede ser obtenido directamente. Calculando la transformada de Fourier de la función de escala:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\xi x} \chi_{[-1,0)}(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 e^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= \frac{1 - e^{2\pi i\xi}}{-2\pi i\xi} \\ &= e^{\pi i\xi} \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} \end{aligned}$$

Así, por (3.16), se tiene

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{2\pi i\xi} m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \hat{\varphi}(\xi) = e^{2\pi i\xi} \frac{(1 - e^{-2\pi i\xi})(e^{2\pi i\xi} - 1)}{4\pi i\xi}.$$

Es decir,

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i\xi} \frac{e^{\pi i\xi} - 2 + e^{-\pi i\xi}}{2\pi i\xi} = ie^{\pi i\xi} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}{\frac{\pi\xi}{2}}.$$

Al calcular la transformada de Fourier de  $\chi_{[-1, -\frac{1}{2})} - \chi_{[-\frac{1}{2}, 0)}$  se observa que coincide con la última expresión. Para obtener la expresión de la wavelet de Haar dada en el ejemplo 3.2.1 se necesita tomar  $v(\xi) = e^{-i\xi}$  en la proposición 3.2.2.

*Ejemplo 3.2.3.* La wavelet de Shannon es la función  $\psi$  cuya transformada de Fourier satisface

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i\xi} \chi_I(\xi),$$

donde  $I = [-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ . Para ver que es una wavelet se usa la proposición 3.2.4, para obtener una función de escala de un AMR que genere esta wavelet. Se tiene

$$\hat{\psi}(2^j\xi) = e^{\pi i2^j\xi} \chi_I(2^j\xi) = e^{\pi i2^j\xi} \chi_{I_j}(\xi)$$

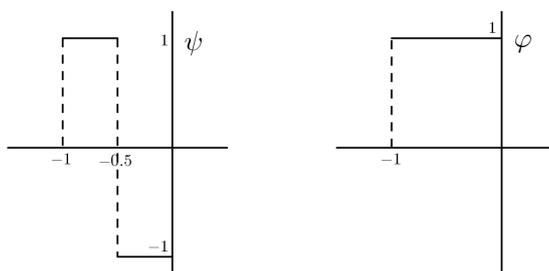


Figura 3.4: La wavelet de Haar  $\psi$  y su función de escala  $\varphi$ .

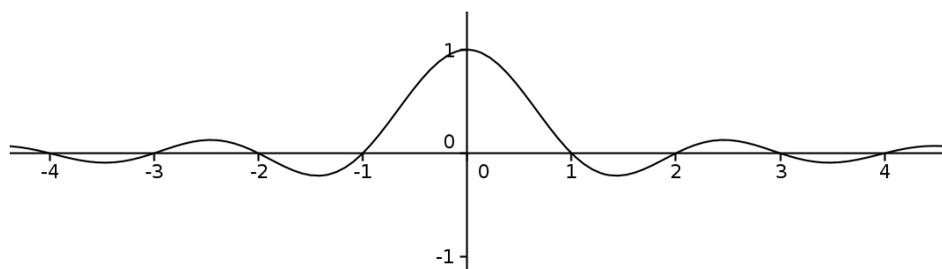


Figura 3.5: Gráfico de  $\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}$ , relativo a la transformada de Fourier de la función de escala  $\varphi$  de la wavelet de Haar.

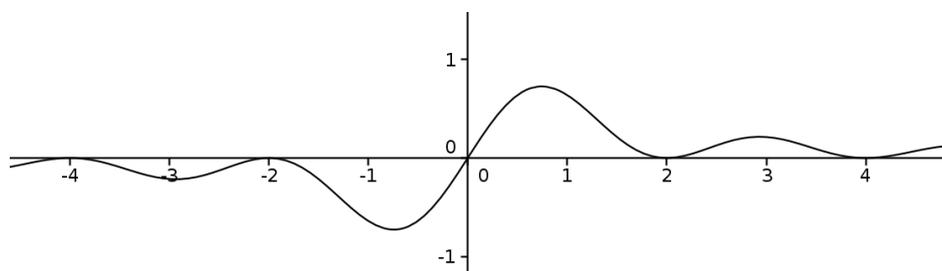


Figura 3.6: Gráfico de  $\frac{\sin^2(\pi \xi / 2)}{\pi \xi / 2}$ , relativo a la transformada de Fourier para la wavelet de Haar  $\psi$ .

donde  $I_j = [-2^{-j}, -2^{-j-1}] \cup (2^{-j-1}, 2^{-j}]$ .

Los intervalos  $I_j$  son disjuntos y su unión para  $j \geq 1$  es  $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$ , así que, utilizando la proposición 3.2.4, se puede tomar

$$\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi).$$

Como

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi + k) \right|^2 = 1, \text{ para casi todo } \xi \in \mathbb{R},$$

por la proposición 3.2.1, se tiene que  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal. Se elige  $V_j$  como el subespacio cerrado generado por  $\{\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$ . Entonces, si se demuestra que  $\frac{1}{2} \varphi(\frac{1}{2}x)$  es un elemento de  $V_0$  se tendrá que  $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$  es un AMR. Esto es equivalente a encontrar el filtro pasa bajos  $m_0$  satisfaciendo (3.9). Como  $m_0$  es una función 1-periódica en  $L^2([0, 1])$  la ecuación (3.9) da

$$\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi)$$

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \chi_{[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}(\xi)$$

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi).$$

Así, para  $\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  se tiene

$$m_0(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}], \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y se extiende periódicamente desde  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  a todo  $\mathbb{R}$ .

Se puede deducir por (3.16) que

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(2\xi) &= \overline{e^{2\pi i \xi} m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}(\xi) \\ &= e^{2\pi i \xi} m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi) \\ &= e^{2\pi i \xi} \chi_{\left([-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\right)}(\xi). \end{aligned}$$

Así

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i \xi} \chi_I(\xi).$$

Se puede comprobar que la función de escala es

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

y la wavelet

$$\psi(x) = -2 \frac{\sin 2\pi x + \cos \pi x}{\pi(2x + 1)}.$$

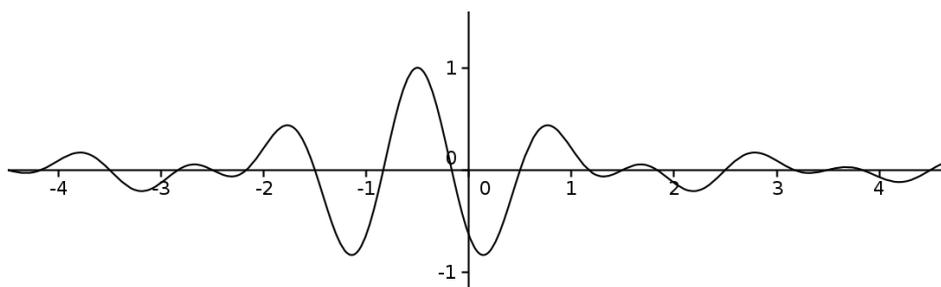


Figura 3.7: La wavelet de Shannon  $\psi(x) = -2 \frac{\sin 2\pi x + \cos \pi x}{\pi(2x+1)}$  para la cual  $\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i \xi} \chi_I(\xi)$ .

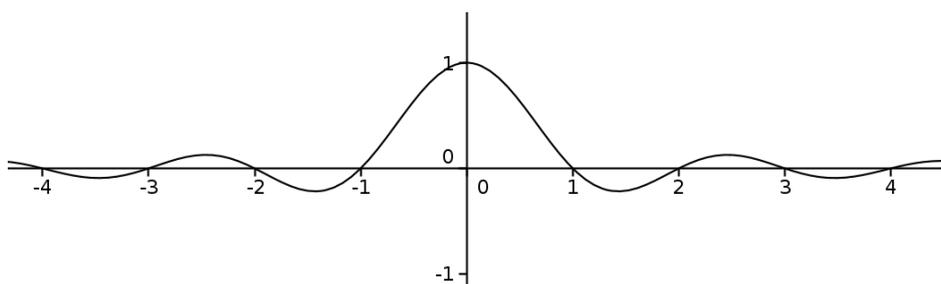


Figura 3.8: La función de escala  $\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$  para la wavelet de Shannon.

### 3.3. Construcción de wavelets de soporte compacto

En esta sección se mostrará que para todo entero no negativo  $n$  existe una wavelet ortonormal  $\psi$  con soporte compacto tal que todas las derivadas de  $\psi$  hasta orden  $n$  existen y son acotadas. La existencia de esta wavelet ortonormal será mostrada utilizando el concepto de análisis multiresolución desarrollado en las secciones anteriores.

La wavelet de Haar  $\psi(x) = \chi_{[-1, -\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[-\frac{1}{2}, 0)}(x)$  es un ejemplo de wavelet ortonormal con soporte compacto. Sin embargo, la wavelet de Shannon tiene como soporte toda la recta real. La wavelet de Haar es discontinua y la de Shannon es  $C^\infty$ , es decir, continua e infinitamente diferenciable con derivadas continuas. Es posible obtener wavelet con soporte compacto como la de Haar pero con más regularidad que ésta.

Se desea construir una función de escala  $\varphi$  a partir de un filtro  $m_0$ . Se asumirá que  $m_0$  cumple con las propiedades vistas en la sección anterior

$$\begin{cases} m_0 \in C^1 \text{ y es 1-periódica,} \\ |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1, \\ m_0(0) = 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Si existiera la función  $\varphi$ , aplicando (3.9) reiteradamente, ésto es  $\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\frac{1}{2}\xi) \hat{\varphi}(\frac{1}{2}\xi)$ , se debería tener

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-N}\xi) \prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi), \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Se denotará por  $\prod_N(\xi)$  al producto  $\prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi)$ . El teorema 3.2.2 lleva a esperar que  $\hat{\varphi}$  sea continua en 0 y, más aún,  $\hat{\varphi}(0) = 1$ . El producto infinito

$$\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$$

es convergente para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ . Se tiene por la segunda condición en (3.18), que  $|m_0(\xi)| \leq 1$ , para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ , y por tanto,  $|\prod_N(\xi)| \leq 1$ . Así

$$\prod_{N+1}(\xi) - \prod_N(\xi) = \prod_{j=1}^{N+1} m_0(2^{-j}\xi) - \prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi) = \prod_N(\xi) (m_0(2^{-N-1}\xi) - 1),$$

y por tanto, usando que  $|m_0(\xi)| \leq 1$ , que  $m_0(0) = 1$  y el Teorema del Valor Medio, se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \prod_{N+1}(\xi) - \prod_N(\xi) \right| &= \left| \prod_N(\xi) (m_0(2^{-N-1}\xi) - 1) \right| \\ &\leq |m_0(2^{-N-1}\xi) - m_0(0)| \\ &\leq \|m'_0\|_{\infty} 2^{-(N+1)} |\xi|. \end{aligned}$$

Así,

$$\left| \prod_{N+M}(\xi) - \prod_N(\xi) \right| \leq \|m'_0\|_{\infty} 2^{-N} |\xi|, \quad \forall N, M \in \mathbb{N},$$

es decir, la sucesión  $\{\prod_N(\xi)\}_{N \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy, y por tanto convergente. Así, es posible definir

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

*Proposición 3.3.1.* Sea  $m_0$  una función definida en  $\mathbb{R}$  satisfaciendo (3.18). Entonces la función  $\varphi$  definida por

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

está en  $L^2(\mathbb{R})$  y además  $\|\varphi\|_2 \leq 1$ .

*Demostración.* Sea  $\prod_N(\xi) = \prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi)$ .  $m_0$  es una función 1-periódica y por tanto

$\prod_N$  es una función  $2^N$ -periódica. Así, por las propiedades del filtro.

$$\begin{aligned}
I_N &:= \int_{-2^{N-1}}^{2^{N-1}} \left| \prod_N(\xi) \right|^2 d\xi \\
&= \int_0^{2^N} \left| \prod_N(\xi) \right|^2 d\xi \\
&= \int_0^{2^{N-1}} \left| \prod_N(\xi) \right|^2 d\xi + \int_{2^{N-1}}^{2^N} \left| \prod_N(\xi) \right|^2 d\xi \\
&= \int_0^{2^{N-1}} \left( \left| \prod_N(\xi) \right|^2 + \left| \prod_N(\xi + 2^{N-1}) \right|^2 \right) d\xi \\
&= \int_0^{2^{N-1}} \left| \prod_{N-1}(\xi) \right|^2 \left( |m_0(2^{-N}\xi)|^2 + \left| m_0\left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 \right) d\xi \\
&= \int_0^{2^{N-1}} \left| \prod_{N-1}(\xi) \right|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Repetiendo el argumento se obtiene que

$$\begin{aligned}
I_N = I_1 &= \int_0^2 \left| m_0\left(\frac{1}{2}\xi\right) \right|^2 d\xi \\
&= 2 \int_0^1 |m_0(\xi)|^2 d\xi \\
&= 2 \left[ \int_0^{1/2} |m_0(\xi)|^2 d\xi + \int_{1/2}^1 |m_0(\xi)|^2 d\xi \right] \\
&= 2 \int_0^{1/2} \left[ |m_0(\xi)|^2 d\xi + \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 \right] d\xi \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como  $|\prod_N(\xi)|^2 \rightarrow |\hat{\varphi}|^2$ , aplicando el lema de Fatou se obtiene queda

$$\int_R |\hat{\varphi}|^2 d\xi \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_{-2^{N-1}}^{2^{N-1}} \left| \prod_N(\xi) \right|^2 d\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N = 1$$

Así  $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\varphi$  está bien definida y  $\|\varphi\|_2^2 = \|\hat{\varphi}\|_2^2 \leq 1$ . □

Ahora se observarán otras propiedades de  $m_0$  que aseguren que  $\varphi$  es una función de escala de una wavelet  $\psi$  de soporte compacto. De (3.9) se tiene que si  $\varphi$  fuese la función de escala deseada, entonces se debe cumplir  $m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{2\pi i k \xi}$ , con  $\alpha_k = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \overline{\varphi(x+k)} dx$ . Es decir, los  $\alpha_k$  tienen que ser los coeficientes de  $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}\cdot\right) \in V_{-1}$  en la base ortonormal  $\{\varphi(\cdot + k) : k \in \mathbb{Z}\}$  de  $V_0$ . Para que la función de escala  $\varphi$  sea de

soporte compacto, sólo un número finito de los  $\alpha_k$  pueden ser distintos de cero. Así se tiene que  $m_0(\xi)$  debe ser un polinomio trigonométrico.

No se puede esperar que una wavelet ortonormal de soporte compacto pertenezca a  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Este hecho será una consecuencia del siguiente resultado:

*Teorema 3.3.1.* Sea  $r$  un entero no negativo. Sea  $\psi$  una función de  $C^r(\mathbb{R})$  tal que

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{r+1+\varepsilon}}, \quad \text{para algún } \varepsilon > 0,$$

y tal que  $\psi^{(m)} \in L^\infty(\mathbb{R})$ , para  $m = 1, 2, \dots, r$ . Si  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ , entonces todos los momentos de  $\psi$  hasta orden  $r$  son cero, es decir

$$\int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x) dx = 0, \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots, r.$$

*Demostración.* La demostración se hará por inducción en  $r$ . Primero, para  $r = 0$ , sea  $a$  un número diádico,  $a = 2^{-j_0} k_0$  para algún  $j_0, k_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $\psi(a) \neq 0$ . Como  $\|\psi\|_2 = 1$  y  $\psi$  es continua, existe un  $a$  como el descrito. Como  $\psi$  es wavelet ortonormal,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \psi(2^j x - k) dx = 0, \quad \text{si } (j, k) \neq (0, 0).$$

Tomando  $k = 2^{j-j_0} k_0$  con  $j > \max\{j_0, 0\}$ , esta igualdad queda

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \psi(2^j(x-a)) dx = 0.$$

Haciendo el cambio de variable  $y = 2^j(x-a)$  se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(a+2^{-j}y)} \psi(y) dy = 0.$$

Pasando al límite cuando  $j$  tiende a  $\infty$  y aplicando el teorema de convergencia dominada (TCD), se tiene

$$\overline{\psi(a)} \int_{\mathbb{R}} \psi(y) dy = 0,$$

y como  $\psi(a) \neq 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(y) dy = 0,$$

con lo cual queda verificado el caso base. Antes de considerar el caso general, se probará el teorema en el caso  $r = 1$  para ilustrar como funciona el método en un contexto más simple. Se define

$$\vartheta(x) := \int_{-\infty}^x \psi(y) dy.$$

Como  $\int_{\mathbb{R}} \psi(y) dy = 0$  por el caso anterior, se observa que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta(x) = 0$ . Además,  $\vartheta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(y) dy = -\int_x^{\infty} \psi(y) dy$ . Como se está suponiendo que

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}, \quad \text{para algún } \varepsilon > 0,$$

entonces se verá que

$$|\vartheta(x)| \leq \frac{C_1}{(1 + |x|)^{1+\varepsilon}}.$$

En efecto, si  $|x| > 1$ ,

$$|\vartheta(x)| \leq \int_x^\infty |\psi(y)| dy \leq C \int_x^\infty \frac{dy}{(1 + |y|)^{2+\varepsilon}} \leq C \frac{1}{(1 + |x|)^{1+\varepsilon}},$$

así que, integrando por partes se obtiene

$$\int_{-\infty}^\infty \vartheta(x) dx = - \int_{-\infty}^\infty x \varphi(x) dx.$$

Entonces, lo que se desea demostrar es que

$$\int_{-\infty}^\infty \vartheta(x) dx = 0.$$

es posible adaptar el argumento que se usó para  $\psi$  en el caso  $r = 0$ . Como  $\psi$  es no constante y  $\psi'$  es continua, existe un  $a = 2^{-j_0} k_0$  tal que  $\psi'(a) \neq 0$ . Escribiendo de nuevo

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \psi(2^j(x - a)) dx = 0.$$

Entonces, integrando por partes, se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi'(x)} \vartheta(2^j(x - a)) dx = 0.$$

Haciendo el cambio de variable  $y = 2^j(x - a)$  se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi'(a + 2^{-j}y)} \vartheta(y) dy = 0.$$

Como antes, haciendo que  $j$  tienda a  $\infty$  se concluye que

$$\overline{\psi'(a)} \int_{\mathbb{R}} \vartheta(y) dy = 0,$$

y como  $\overline{\psi'(a)} \neq 0$  se tiene que  $\int_{\mathbb{R}} \vartheta(y) dy = 0$ .

Ahora se procederá por inducción de  $r - 1$  a  $r$ . Si se supone que es cierto hasta  $r - 1$ , entonces todos los momentos hasta orden  $r - 1$  son cero y es posible integrar  $\psi$  hasta  $r$  veces, obteniendo funciones  $\vartheta_1 = \vartheta, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r$  tales que  $\vartheta'_\ell = \vartheta_{\ell-1}$ , y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \vartheta_\ell = 0$ . Además, puede verse como antes que existen constantes  $C_1, \dots, C_r$  tales que

$$|\vartheta_\ell(x)| \leq \frac{C_\ell}{(1 + |x|)^{r-\ell+1+\varepsilon}}, \quad \ell = 1, 2, \dots, r.$$

Integrando por partes  $r$  veces, como en el caso  $r = 1$ , se observa que

$$\int_{\mathbb{R}} x^r \psi(x) dx = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \int_{\mathbb{R}} \vartheta_r(x) dx = 0.$$

De nuevo, como  $\psi$  no es un polinomio y  $\psi^{(r)}$  es continua, existe un  $a = 2^{-j_0} k_0$  tal que  $\psi^{(r)}(a) \neq 0$ . De

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \psi(2^j(x-a)) dx = 0,$$

integrando por partes  $r$  veces se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi^{(r)}(x)} \vartheta_r(2^j(x-a)) dx = 0.$$

Haciendo el mismo cambio de variable que en los casos anteriores y haciendo tender  $j$  a  $\infty$  se tiene que

$$\overline{\psi^{(r)}(a)} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_r(y) dy = 0,$$

y como  $\overline{\psi^{(r)}(a)} \neq 0$  se tiene que el resultado es cierto hasta orden  $r$ .  $\square$

**Observación:** Como

$$\frac{d^m \hat{\psi}}{d\xi^m}(0) = (-2\pi i)^m \int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x) dx,$$

bajo las hipótesis del teorema 3.3.1 se tiene que

$$\frac{d^m \hat{\psi}}{d\xi^m}(0) = 0 \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots, r.$$

El siguiente teorema es un corolario del teorema 3.3.1.

**Teorema 3.3.2.** Sea  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  una función con soporte compacto tal que  $\psi \in C^\infty$ . Entonces  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  no puede ser un sistema ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ , donde  $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ .

*Demostración.* La demostración se hará por reducción al absurdo. Si  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal en  $L^2(\mathbb{R})$ , entonces, como  $\psi$  es una función de soporte compacto, se cumplen las hipótesis del teorema anterior para todo  $r$  natural, y se tiene que todos los momentos de  $\psi$  son cero. Así, para cualquier polinomio  $p(x)$ , se cumple que  $\int_{\mathbb{R}} p(x) \overline{\psi(x)} dx = 0$ . Como  $\psi$  tiene soporte compacto, por el teorema de aproximación de Weierstrass, es posible encontrar un polinomio  $p(x)$  que la aproxime. Es decir, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $p(x)$  tal que  $\sup_{x \in K} |\psi(x) - p(x)| < \varepsilon$ , donde  $K$  es el soporte de  $\psi$ . Así,

$$\begin{aligned} \|\psi\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi(x)} dx \\ &= \int_K \psi(x) \overline{\psi(x)} dx \\ &= \int_K \psi(x) \overline{\psi(x)} dx - \int_K p(x) \overline{\psi(x)} dx \\ &= \int_K [\psi(x) - p(x)] \overline{\psi(x)} dx &= \leq \varepsilon \int_K \overline{\psi(x)} dx \\ &= \varepsilon \|\psi\|_1. \end{aligned}$$

Como  $\|\psi\|_1 < \infty$  y  $\varepsilon$  es arbitrario, se tiene que  $\|\psi\|_2^2 = 0$ , lo cual contradice la ortonormalidad del sistema.  $\square$

Este teorema muestra que solo se puede esperar que una wavelet ortonormal acotada con soporte compacto sea a lo sumo de clase  $C^n(\mathbb{R})$  para algún finito entero no negativo  $n$ .

*Ejemplo 3.3.1.* Para el caso de la wavelet de Haar dada en el ejemplo 3.2.2, se tiene que  $\varphi(x) = \chi_{[-1,0)}(x)$  así que

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{e^{2\pi i\xi} - 1}{2\pi i\xi}, \quad m_0(\xi) = \frac{1 + e^{2\pi i\xi}}{2}$$

y

$$\hat{\psi}(\xi) = ie^{\pi i\xi} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}{\frac{\pi\xi}{2}}.$$

Se demostrará que, en este caso, la función  $\varphi$  satisface (3.19), es decir, se probará que

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1 + e^{\pi i 2^{-j+1}\xi})}{2} = \frac{e^{2\pi i\xi} - 1}{2\pi i\xi} \quad (3.20)$$

o, equivalentemente,

$$\prod_{j=1}^{\infty} e^{\pi i 2^{-j}\xi} \cos(\pi 2^{-j}\xi) = e^{\pi i\xi} \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Como el producto de las exponenciales en el lado izquierdo es igual a  $e^{\pi i\xi}$ , se debe tener

$$\prod_{j=1}^{\infty} \cos(\pi 2^{-j}\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Utilizando la identidad  $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  se puede escribir

$$\prod_{j=1}^n \cos(\pi 2^{-j}\xi) = \prod_{j=1}^n \frac{\sin(\pi 2^{-j+1}\xi)}{2 \sin(\pi 2^{-j}\xi)} = \frac{\sin(\pi\xi)}{2^n \sin(\pi 2^n \xi)},$$

lo cual tiende a  $\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Con ésto se muestra que, en este caso,  $\varphi$  puede en efecto ser definida por la ecuación (3.19).

*Ejemplo 3.3.2.* Tomando  $m_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{6\pi i\xi})$ , la cual es una función 1-periódica que satisface (3.18). Si se define  $\varphi$  por (3.19) se deduce de (3.20) que

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{e^{6\pi i\xi} - 1}{6\pi i\xi}.$$

Se puede verificar que  $\varphi(x) = \frac{1}{3}\chi_{[-3,0)}(x)$  calculando su transformada de Fourier. Se observa entonces que las traslaciones enteras de  $\varphi$  no forman un sistema ortonormal en  $L^2(\mathbb{R})$ .

El ejemplo anterior muestra que las condiciones dadas en (3.18) no son suficientes para producir una función  $\varphi$  definida por (3.19) tal que las traslaciones enteras de  $\varphi$  formen un sistema ortonormal. Se demostrará que una condición suficiente de  $m_0$  para tener esta propiedad es

$$m_0(\xi) \neq 0 \quad \text{para todo } \xi \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$$

Se sabe por la proposición 3.2.1 que  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal si y solo si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 = 1, \text{ para casi todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Así, si se define  $G(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2$ , se necesita ver que (3.18) y la definición de  $\varphi$  implican que  $G(\xi) \equiv 1$  para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}$ .

A partir de ahora se supondrá que  $m_0$  es un polinomio trigonométrico de la forma  $m_0(\xi) = \sum_{k=-M}^M \alpha_k e^{2\pi i k \xi}$ . Entonces  $\prod_N(\xi)$ , definido en la demostración de la proposición 3.3.1 es una combinación lineal finita de términos de la forma  $e^{2\pi i (\sum_{j=1}^N 2^{-j} \ell_j) \xi}$ , donde  $-M \leq \ell_j \leq M$ . Así la transformada de Fourier inversa de  $\prod_N$  es una combinación lineal finita de funciones  $\delta$  de Dirac de la forma  $\delta_a$ , con  $a = -\sum_{j=1}^N 2^{-j} \ell_j$ , dado que  $(\delta_a)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - a) e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-2\pi i a \xi}$ . Como  $a \in [-M, M]$  la función  $\varphi$  definida en la proposición 3.3.1 es una función de  $L^2(\mathbb{R})$  con soporte contenido en  $[-M, M]$ . Como  $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $G(\xi)$  es una función 1-periódica de  $L^2([0, 1])$ . Además por el teorema de Plancherel,

$$\begin{aligned} c_\ell &:= \int_0^1 G(\xi) e^{-2\pi i \ell \xi} d\xi \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} e^{-2\pi i \ell \xi} \hat{\varphi}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\pi i \ell \xi} \hat{\varphi}(\xi)] \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - \ell) \overline{\varphi(x)} dx. \end{aligned}$$

Pero si  $\varphi$  es de soporte compacto, la última expresión es cero, excepto para un número finito de enteros  $\ell$ . Así, se ha probado el siguiente lema:

**Lema 3.3.1.** Si  $m_0$  un polinomio trigonométrico que satisface (3.18) entonces  $\varphi$  es una función de soporte compacto en  $L^2(\mathbb{R})$  y  $G(\xi) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + \ell)|^2 = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_\ell e^{2\pi i \ell \xi}$  es un polinomio trigonométrico.

**Teorema 3.3.3.** Sea  $m_0$  un polinomio trigonométrico que satisface (3.18) y tal que  $m_0(\xi) \neq 0$  para todo  $\xi \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ . Si  $\varphi$  está definida por

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j} \xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

entonces  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal.

*Demostración.* Se necesita ver que  $G(\xi) \equiv 1$  en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , donde  $G(\xi)$  está definida en el lema anterior.

Observando primero que si  $\ell \in \mathbb{Z}$ ,  $\ell \neq 0$ , entonces  $\hat{\varphi}(\ell) = 0$ . En efecto,  $\ell = 2^p q$  con  $q$  impar, tal que el producto

$$\prod_{j=1}^N m_0(2^{-j} 2^p q)$$

contiene el factor  $m_0(\frac{q}{2})$  si  $N \geq p + 1$  y por (3.18)  $m_0(\frac{q}{2}) = m_0(\frac{1}{2}) = 0$ . Así,  $G(0) = |\hat{\varphi}(0)|^2 = 1$ . Ahora obsérvese que

$$G(2\xi) = |m_0(\xi)|^2 G(\xi) + \left| m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \right|^2 G \left( \xi + \frac{1}{2} \right), \quad (3.21)$$

dado que, al separar los términos pares e impares en la suma que define a  $G(2\xi)$ , se tiene

$$\begin{aligned} G(2\xi) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi} \left( 2 \left( \xi + \frac{\ell}{2} \right) \right) \right|^2 \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left( \xi + \frac{\ell}{2} \right) \right|^2 \left| \hat{\varphi} \left( \xi + \frac{\ell}{2} \right) \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \left| \hat{\varphi} \left( \xi + k + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 G(\xi) + \left| m_0 \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \right|^2 G \left( \xi + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Sea  $m = \min_{\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} G(\xi)$  y escogiendo  $\xi_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  tal que  $G(\xi_0) = m$ , puede verse ahora por reducción al absurdo que se debe cumplir que  $G(\frac{1}{2}\xi_0) = m$ . Suponiendo lo contrario, que  $G(\frac{1}{2}\xi_0) > m$ , entonces usando (3.21) y suponiendo que  $m_0(\frac{1}{2}\xi_0) \neq 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} m = G(\xi_0) &= \left| m_0 \left( \frac{1}{2}\xi_0 \right) \right|^2 G \left( \frac{1}{2}\xi_0 \right) + \left| m_0 \left( \frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{2} \right) \right|^2 G \left( \frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{2} \right) \\ &> m \left| m_0 \left( \frac{1}{2}\xi_0 \right) \right|^2 + m \left| m_0 \left( \frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \\ &= m, \end{aligned}$$

que es una contradicción. Así que  $G(\frac{1}{2}\xi_0) = m$ . Iterando el proceso anterior se obtiene que

$$G(2^{-j}\xi_0) = m,$$

y tomando límite cuando  $j$  tiende a  $\infty$  se tiene que  $1 = G(0) = m$ .

Sea  $M = \sup_{\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} G(\xi)$  y escogiendo  $\xi_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  tal que  $G(\xi_1) = M$ , puede verse como antes que se debe cumplir que  $G(\frac{1}{2}\xi_1) = M$ . Suponiendo lo contrario, que  $G(\frac{1}{2}\xi_1) < M$ . Entonces, usando (3.21) y suponiendo que  $m_0(\frac{1}{2}\xi_1) \neq 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} M = G(\xi_1) &= \left| m_0 \left( \frac{1}{2}\xi_1 \right) \right|^2 G \left( \frac{1}{2}\xi_1 \right) + \left| m_0 \left( \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2} \right) \right|^2 G \left( \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2} \right) \\ &< M \left| m_0 \left( \frac{1}{2}\xi_1 \right) \right|^2 + M \left| m_0 \left( \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \\ &= M, \end{aligned}$$

que es una contradicción. Así que  $G\left(\frac{1}{2}\xi_1\right) < M$ . Iterando el proceso y pasando al límite se tiene que  $G(0) = M$ . En resumen se tiene que  $m = M = G(0) = 1$  y queda probado el teorema.  $\square$

Puede construirse el AMR asociado al filtro  $m_0$  que satisface (3.18) y tal que  $m_0(\xi) \neq 0$  para todo  $\xi \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ . Sea

$$V_0 := \overline{\text{span}\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Si  $(\rho f)(x) := f(2x)$  y se define

$$V_j := \rho^j(V_0),$$

ya se tiene el AMR deseado. Propiedad (3.2) es equivalente a mostrar que  $V_{-1} \subset V_0$ ; la definición de  $\hat{\varphi}$  (ver proposición 3.3.1) da  $\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ , lo cual muestra que  $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right) \in V_0$ ; como  $V_0$  es invariante bajo traslaciones enteras se tiene el resultado deseado. Propiedad (3.3) de la definición de un AMR se sigue de la definición de los espacios  $V_j$ , y propiedad (3.6) es dada en el teorema 3.3.3. Como  $\hat{\varphi}$  es continua en cero, los teoremas 3.2.1 y 3.2.2 dan las propiedades (3.4) y (3.5).

Se observa que  $\varphi$  tiene soporte compacto contenido en  $[-M, M]$ , donde  $M$  es el grado del polinomio trigonométrico  $m_0$  y puede verse también que la wavelet ortonormal

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \bar{\alpha}_k \varphi(2x - (k-1))$$

tiene soporte compacto contenido en  $\left[-M - \frac{1}{2}, M + \frac{1}{2}\right]$  dado que  $-M \leq k \leq M$ , porque se está asumiendo que  $m_0$  es un polinomio trigonométrico de grado  $M$ , y  $-M \leq 2x - (k-1) \leq M$ .

### Construcción de Daubechies

Ingrid Daubechies fue la primera en construir wavelets ortonormales con soporte compacto (ver [DAU92]) con un grado fijo de suavidad. Ella observó que si  $\varphi$  y  $\psi$  pertenecen a  $\mathcal{C}^{N-1}(\mathbb{R})$  entonces el filtro pasa bajos  $m_0$  debe ser de la forma

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2}\right)^N \mathfrak{L}(\xi), \quad (3.22)$$

donde  $\mathfrak{L}$  es un polinomio trigonométrico 1-periódico y  $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^{N-1}(\mathbb{R})$ , como lo muestra el siguiente teorema que es un corolario del teorema 3.3.1.

**Teorema 3.3.4.** Asumiendo que  $\psi_{j,k}$  constituye una base ortonormal de wavelets, asociado con un AMR como se describe en la definición 3.2.1. Si  $|\varphi(x)|, |\psi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-r-1-\varepsilon}$  y  $\psi \in \mathcal{C}^r$  con  $\psi^{(\ell)}$  acotada para  $\ell \leq r$ , entonces  $m_0$  definido por (3.10), (3.8), se factoriza como

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2}\right)^{r+1} \mathfrak{L}(\xi),$$

donde  $\mathfrak{L}$  es 1-periódico y  $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r$ .

*Demostración.* Por el teorema 3.3.1, se tiene que

$$\left. \frac{d^\ell \hat{\psi}}{d\xi^\ell} \right|_{\xi=0} = 0 \text{ para } \ell \leq r.$$

Por otra parte,  $\hat{\psi}(\xi) = e^{-\pi i \xi} \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$ . Como ambas  $\hat{\psi}$  y  $\hat{\varphi}$  están en  $C^r$  y  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ , ésto significa que  $m_0$  es  $r$  veces diferenciable en  $\xi = \frac{1}{2}$  y

$$\left. \frac{d^\ell m_0}{d\xi^\ell} \right|_{\xi=\frac{1}{2}} = 0 \text{ para } \ell \leq r.$$

Ésto implica que  $m_0$  tiene un cero de orden  $r + 1$  en  $\xi = \frac{1}{2}$ , es decir que

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^{r+1} \mathfrak{L}(\xi).$$

Como  $m_0 \in C^r$ , también  $\mathfrak{L} \in C^r$ . □

Para conservar la notación de Daubechies, se expresará el filtro pasa bajos en la forma  $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2\pi i k \xi}$ , es decir,  $\alpha_{-k} = \frac{h_k}{\sqrt{2}}$ .

A un polinomio trigonométrico  $m_0$  con coeficientes reales cumpliendo (3.18) y tal que  $m_0(\xi) \neq 0$  para toda  $\xi \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$  se le llama *filtro de Daubechies*. Ya se ha visto anteriormente que si  $m_0$  es de este tipo entonces la función  $\varphi$  tal que  $\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$  es una función de escala de filtro  $m_0$ .

Para construir  $m_0$  primero debe determinarse un polinomio trigonométrico  $M_0$  tal que  $M_0(\xi) = |m_0(\xi)|^2$ . Como se desea que  $m_0$  sea un filtro de Daubechies cumpliendo con (3.22), se tiene que

$$M_0(\xi) = \left| \frac{e^{\pi i \xi} + e^{-\pi i \xi}}{2} \right|^{2N} L(\xi) = \cos^{2N}(\pi \xi) L(\xi)$$

ha de ser un polinomio trigonométrico 1-periódico tal que

$$M_0(\xi) + M_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$M_0(0) = 1,$$

y donde  $L(\xi) = \mathcal{L}(\xi) \overline{\mathcal{L}(\xi)}$  tiene que ser un polinomio trigonométrico 1-periódico no negativo par, es decir

$$L(\xi) = Q(\cos(2\pi\xi)) = P(\sin^2(\pi\xi)),$$

con  $Q$  y  $P$  polinomios.

*Proposición 3.3.2.* Una condición suficiente para que un polinomio trigonométrico 1-periódico con coeficientes reales del tipo

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^N \mathfrak{L}(\xi)$$

sea filtro de Daubechies es que

$$|\mathfrak{L}(\xi)|^2 = P_N(\sin^2(\pi\xi)),$$

donde

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k. \quad (3.23)$$

*Demostración.* Como  $M_0(\xi) = |m_0(\xi)|^2$ , se tiene que

$$M_0(\xi) = \cos^{2N}(\pi\xi)P(\sin^2(\pi\xi)),$$

y entonces, por (3.18),

$$\cos^{2N}(\pi\xi)P(\sin^2(\pi\xi)) + \cos^{2N}\left(\pi\xi + \frac{\pi}{2}\right)P(\sin^2\left(\pi\xi + \frac{\pi}{2}\right)) = 1.$$

Haciendo el cambio de variable  $y = \sin^2(\pi\xi) \in [0, 1]$ , queda

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1, \quad y \in [0, 1]. \quad (3.24)$$

Los polinomios  $(1-y)^N$  y  $y^N$  son primos entre sí, y por el algoritmo de Euclides se obtienen los dos únicos polinomios  $q_1$  y  $q_2$  de grado menor que  $N$  tales que  $(1-y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1$ . Sustituyendo  $y$  por  $y-1$  se obtiene la igualdad equivalente  $(1-y)^N q_2(1-y) + y^N q_1(1-y) = 1$ , y por la unicidad, se tiene que  $q_2(y) = q_1(1-y)$ . Así,  $(1-y)^N q_1(y) + y^N q_1(1-y) = 1$ . Es decir,  $P_N = q_1$  es el único polinomio de grado menor que  $N$  satisfaciendo (3.24) y se puede escribir como

$$P_N(y) = (1-y)^{-N} (1-y^N P_N(1-y)).$$

El desarrollo de Taylor de grado  $N-1$  del polinomio  $(1-y)^{-N}$  en un entorno de cero es

$$T_{N-1}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

Así, se tiene que

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + \text{términos de grado mayor o igual a } N.$$

Como  $P_N$  tiene grado menor que  $N$ , resulta que

$$P_N(y) = T_{N-1}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k,$$

que es no negativo para  $y \geq 0$ . Como  $\cos^{2N}(\pi\xi) > 0$  para  $|\xi| \leq \frac{1}{4}$ , se obtiene que  $m_0$  es un filtro de Daubechies. □

Así, ya se tiene un método para encontrar polinomios trigonométricos

$$M_0(\xi) = |m_0(\xi)|^2 = \cos^{2N}(\pi\xi)L(\xi),$$

con  $L(\xi) = P_N(\sin^2(\pi\xi))$ .

Lo que interesa ahora es encontrar  $m_0$  tal que

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-2\pi i k \xi} = \left( \frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^N \mathfrak{L}(\xi),$$

con  $\mathfrak{L}$  cumpliendo  $\mathfrak{L}(\xi)\overline{\mathfrak{L}(\xi)} = L(\xi) = P_N(\sin^2(\pi\xi))$ . Existe un método llamado *método de factorización espectral* (ver [HYW96], pag. 83), debido a L. Fejér y a F. Riesz, que proporciona un polinomio de éste tipo

$$\mathfrak{L}(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-2\pi i k \xi}, \quad b_k \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

Se consiguen así las wavelets de Daubechies **D2N** con función de escala  $\varphi$  de soporte  $[0, 2N - 1]$  y wavelet madre  $\psi$ . Sin embargo, aquí se verá únicamente como obtener los coeficientes en el caso particular  $N = 2$  y se utilizarán para graficar la wavelet D4 y su función de escala.

*Ejemplo 3.3.3.* La wavelet D4.

En el caso  $N = 2$ , de (3.23) se tiene

$$P_2(y) = \binom{1}{0} + \binom{2}{1}y = 1 + 2y,$$

y así

$$\mathfrak{L}(\xi)\overline{\mathfrak{L}(\xi)} = 1 + 2\sin^2(\pi\xi) = 2 - \frac{1}{2}e^{2\pi i \xi} - \frac{1}{2}e^{-2\pi i \xi}.$$

Primero, de acuerdo a (3.25), se deben determinar los coeficientes reales  $b_0$  y  $b_1$  de  $\mathfrak{L}$  tales que

$$(b_0 + b_1 e^{-2\pi i \xi})(b_0 + b_1 e^{2\pi i \xi}) = \mathfrak{L}(\xi)\overline{\mathfrak{L}(\xi)} = 2 - \frac{1}{2}e^{2\pi i \xi} - \frac{1}{2}e^{-2\pi i \xi}.$$

Igualando coeficientes y usando que  $b_0 + b_1 = \mathfrak{L}(0) = m_0(0) = 1$ , se obtiene que

$$b_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad b_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Así, el filtro tiene que ser

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= \left( \frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^2 \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-2\pi i \xi} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^3 h_k e^{-2\pi i k \xi}. \end{aligned}$$

Al igualar coeficientes se obtiene que

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \sqrt{3}}{4},$$

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3 + \sqrt{3}}{4},$$

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3 - \sqrt{3}}{4},$$

$$h_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - \sqrt{3}}{4}.$$

Los demás coeficientes son cero. Así, dado que con los coeficientes sin normalizar  $\alpha_k = \frac{h_{-k}}{\sqrt{2}}$  la función de escala  $\varphi$  de un AMR satisface la relación recursiva  $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x+k)$  que es equivalente a  $\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k)$  que para este caso de la wavelet D4 se reduce a

$$\varphi(x) = \sqrt{2}h_0\varphi(2x) + \sqrt{2}h_1\varphi(2x - 1) + \sqrt{2}h_2\varphi(2x - 2) + \sqrt{2}h_3\varphi(2x - 3), \quad (3.26)$$

utilizando un algoritmo recursivo es posible dibujar una aproximación de la función de escala  $\varphi$ , empezando con los valores iniciales

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad \varphi(2) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \quad \varphi(3) = 0$$

que se pueden verificar sustituyendo  $x = 1, 2, 3, 4$  en (3.26), teniendo en cuenta que la función de escala  $\varphi$  tiene soporte contenido en el intervalo  $[0, 3] = [0, 2(2) - 1]$  y se necesita que su norma en  $L^2(\mathbb{R})$  sea 1.

Para ilustrar el proceso, se calcularán ahora los valores de  $\varphi\left(\frac{1}{2}x\right)$ ,  $\varphi\left(\frac{3}{2}x\right)$  y  $\varphi\left(\frac{5}{2}x\right)$ :

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{2}h_0\varphi(1) + \sqrt{2}h_1\varphi(0) + \sqrt{2}h_2\varphi(-1) + \sqrt{2}h_3\varphi(-2) \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}h_1 \cdot 0 + \sqrt{2}h_2 \cdot 0 + \sqrt{2}h_3 \cdot 0 \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{3}{2}\right) &= \sqrt{2}h_0\varphi(3) + \sqrt{2}h_1\varphi(2) + \sqrt{2}h_2\varphi(1) + \sqrt{2}h_3\varphi(0) \\ &= \sqrt{2}h_0 \cdot 0 + \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}h_3 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{5}{2}\right) &= \sqrt{2}h_0\varphi(5) + \sqrt{2}h_1\varphi(4) + \sqrt{2}h_2\varphi(3) + \sqrt{2}h_3\varphi(2) \\
&= \sqrt{2}h_0 \cdot 0 + \sqrt{2}h_1 \cdot 0 + \sqrt{2}h_2 \cdot 0 + \frac{1-\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Una recursión que requiere un mayor trabajo permite encontrar los valores de  $\psi$  para múltiplos de  $\frac{1}{4}$ :

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{5+3\sqrt{3}}{16}, \quad \varphi\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9+5\sqrt{3}}{16}, \quad \varphi\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{8}, \\
\varphi\left(\frac{7}{4}\right) &= \frac{1-\sqrt{3}}{8}, \quad \varphi\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9-5\sqrt{3}}{16}, \quad \varphi\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{5-3\sqrt{3}}{16}.
\end{aligned}$$

La figura 3.9 muestra la aproximación de  $\varphi$  con 13 puntos.

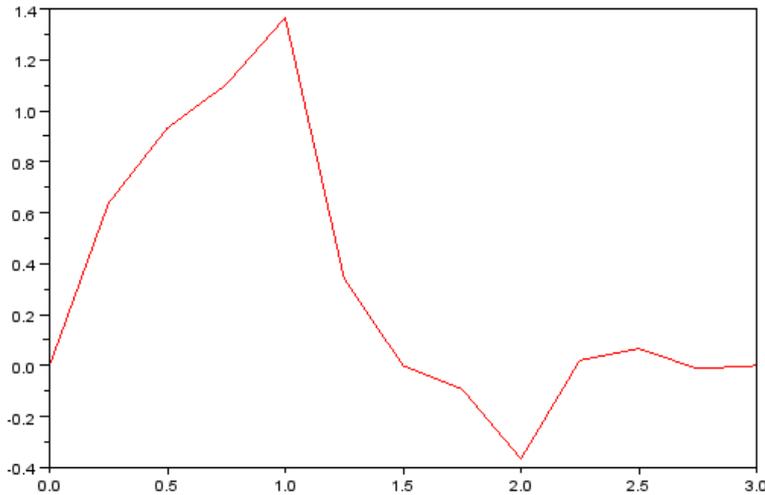


Figura 3.9: Aproximación con 13 puntos de la función de escala  $\varphi(x)$  para la wavelet D4.

Continuando con ese proceso se pueden encontrar los valores de  $\varphi$  para múltiplos de  $\frac{1}{8}$ , luego para múltiplos de  $\frac{1}{16}$  y así sucesivamente. La figura 3.10 muestra una aproximación de  $\varphi$  con 3073 puntos obtenida utilizando un programa en Scilab que se incluye en el Apéndice C:

Utilizando el mismo algoritmo puede dibujarse la wavelet  $\psi$  pero cambiando los puntos que se grafican, dado que  $\psi$  satisface la relación  $\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2x - (k-1))$ , que es equivalente a  $\psi(x-2) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{-k} \overline{h_k} \varphi(2x+k-3)$  y que para la wavelet D4 se reduce a

$$\psi(x-2) = \sqrt{2}h_0\varphi(2x-3) - \sqrt{2}h_1\varphi(2x-2) + \sqrt{2}h_2\varphi(2x-1) - \sqrt{2}h_3\varphi(2x), \quad (3.27)$$

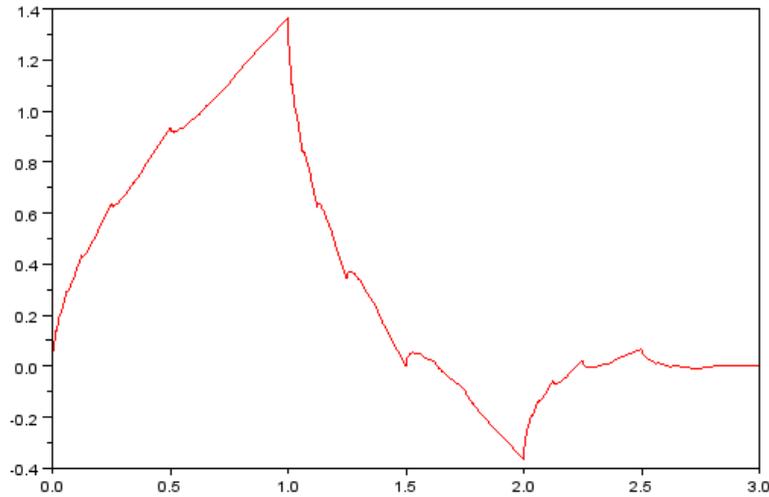


Figura 3.10: Aproximación con 3073 puntos de la función de escala  $\varphi(x)$  para la wavelet D4.

Además, puede observarse que la wavelet  $\psi$  tiene soporte contenido en  $[-2, 1]$  dado que  $0 \leq 2x - (k - 1) \leq 3$  y que  $-3 \leq k \leq 0$ .

Se tiene que

$$\begin{aligned}\psi(-2) &= \sqrt{2}h_0\varphi(-3) - \sqrt{2}h_1\varphi(-2) + \sqrt{2}h_2\varphi(-1) - \sqrt{2}h_3\varphi(0) \\ &= \sqrt{2}h_0 \cdot 0 - \sqrt{2}h_1 \cdot 0 + \sqrt{2}h_2 \cdot 0 - \sqrt{2}h_3 \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(-1) &= \sqrt{2}h_0\varphi(-1) - \sqrt{2}h_1\varphi(0) + \sqrt{2}h_2\varphi(1) - \sqrt{2}h_3\varphi(2) \\ &= \sqrt{2}h_0 \cdot 0 - \sqrt{2}h_1 \cdot 0 + \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(0) &= \sqrt{2}h_0\varphi(1) - \sqrt{2}h_1\varphi(2) + \sqrt{2}h_2\varphi(3) - \sqrt{2}h_3\varphi(4) \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}h_2 \cdot 0 - \sqrt{2}h_3 \cdot 0 \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(1) &= \sqrt{2}h_0\varphi(3) - \sqrt{2}h_1\varphi(4) + \sqrt{2}h_2\varphi(5) - \sqrt{2}h_3\varphi(6) \\ &= \sqrt{2}h_0 \cdot 0 - \sqrt{2}h_1 \cdot 0 + \sqrt{2}h_2 \cdot 0 - \sqrt{2}h_3 \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\psi\left(-\frac{3}{2}\right) &= \sqrt{2}h_0\varphi(-2) - \sqrt{2}h_1\varphi(-1) + \sqrt{2}h_2\varphi(0) - \sqrt{2}h_3\varphi(1) \\ &= \sqrt{2}h_0 \cdot 0 - \sqrt{2}h_1 \cdot 0 + \sqrt{2}h_2 \cdot 0 - \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi\left(-\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{2}h_0\varphi(0) - \sqrt{2}h_1\varphi(1) + \sqrt{2}h_2\varphi(2) - \sqrt{2}h_3\varphi(3) \\ &= \sqrt{2}h_0 \cdot 0 - \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}h_3 \cdot 0 \\ &= -\sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{2}h_0\varphi(2) - \sqrt{2}h_1\varphi(3) + \sqrt{2}h_2\varphi(4) - \sqrt{2}h_3\varphi(5) \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}h_1 \cdot 0 + \sqrt{2}h_2 \cdot 0 - \sqrt{2}h_3 \cdot 0 \\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

La figura 3.11 muestra la aproximación de  $\psi$  con 7 puntos trasladada 2 unidades a la derecha.

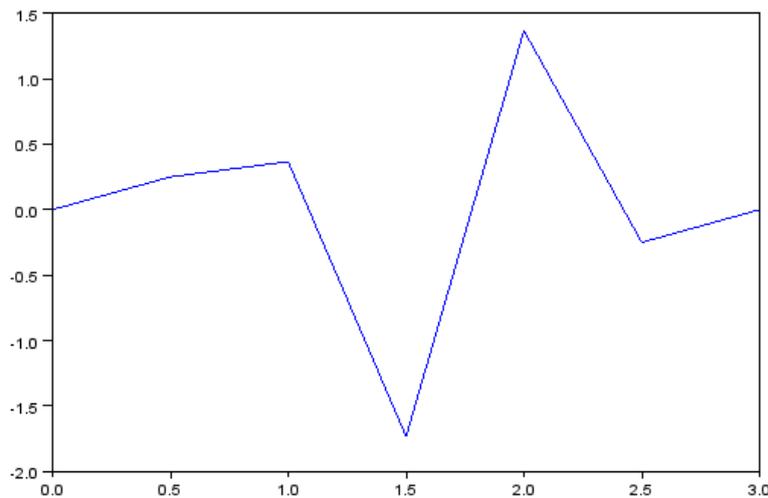


Figura 3.11: Aproximación con 7 puntos de la función wavelet D4  $\psi(x - 2)$ .

Continuando con ese proceso se pueden encontrar los valores de  $\psi$  para múltiplos de  $\frac{1}{4}$ , luego para múltiplos de  $\frac{1}{8}$  y así sucesivamente. La figura 3.12 muestra una aproximación de

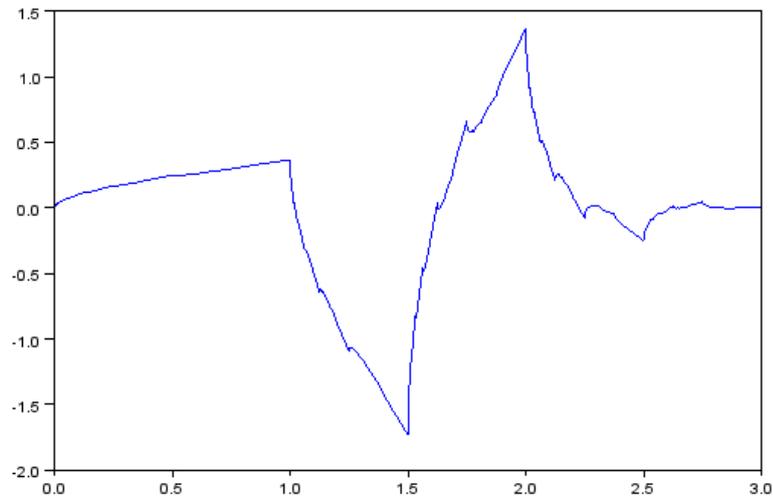


Figura 3.12: Aproximación con 3073 puntos de la función wavelet D4  $\psi(x - 2)$ .

$\psi$  trasladada dos unidades a la derecha con 3073 puntos obtenida utilizando un programa en Scilab:

En realidad aquí se ha obtenido una traslación con una reflexión respecto al eje  $x$  de la wavelet D4 original presentada por Ingrid Daubechies en [DAU92] la cual tiene ecuación

$$\psi(x - 1) = -\sqrt{2}h_0\varphi(2x - 3) + \sqrt{2}h_1\varphi(2x - 2) - \sqrt{2}h_2\varphi(2x - 1) + \sqrt{2}h_3\varphi(2x), \quad (3.28)$$

y su gráfica aproximada con 3073 puntos es:

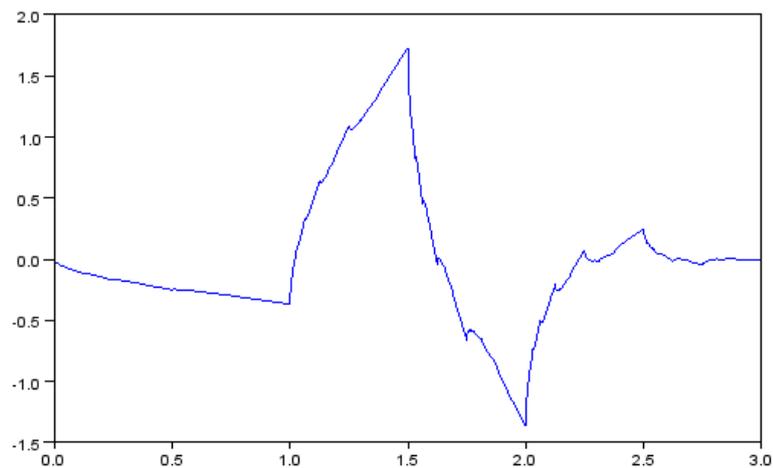


Figura 3.13: Aproximación con 3073 puntos de la función wavelet D4 presentada originalmente por Ingrid Daubechies.

Para obtener tal función debió seleccionarse  $v(\xi) = -e^{-2\pi i 2\xi}$  en lugar de  $v(\xi) = 1$  en la

proposición 3.2.2, dado que al considerar la transformada inversa de Fourier el factor  $-1$  se conserva por la linealidad, aportando la reflexión respecto al eje  $x$ , y el factor exponencial se traduce en una traslación de 2 unidades a la derecha.



## Capítulo 4

### Conclusiones

A lo largo del trabajo realizado durante la investigación, se ha podido apenas entrar en contacto con una pequeña parte de la vasta teoría referente al análisis de señales y las posibilidades de aplicación de las wavelets, que representan el paso siguiente a la transformada de Fourier en la búsqueda de una mejor representación de la información que describe a una señal. Como el análisis con series de Fourier que consiste en descomponer la señal, una función periódica de período  $T$ , en términos de la base trigonométrica del espacio  $L^2([0, T])$  y el análisis con transformada de Fourier que extiende esta idea para funciones no periódicas en el espacio  $L^2(\mathbb{R})$ , el análisis con transformada wavelet consiste en estudiar la señal pero descomponiéndola utilizando otras bases del espacio  $L^2(\mathbb{R})$ , las cuales son de hecho, familias de funciones obtenidas a partir de una sola función llamada wavelet madre, aplicándole dilataciones y traslaciones. Aunque muchas de estas familias de funciones cumplen ser bases ortonormales del espacio  $L^2(\mathbb{R})$ , el análisis wavelet va mucho más allá pudiendo tratarse de objetos aún más generales llamados *marcos*.

Un concepto que tiene un papel importante en el estudio de wavelets es el de análisis multiresolución (AMR) que consiste en una familia de subespacios  $V_j$  del espacio  $L^2(\mathbb{R})$  que debe cumplir con algunas condiciones que fueron abordadas en el capítulo 3 y que incluye los conceptos de función de escala y de filtro pasa bajos. Los trasladados de cada nivel de dilatación de la función de escala forman una base para cada uno de los subespacios del AMR y por otra parte, se tiene una base para todo  $L^2(\mathbb{R})$  generada por la wavelet madre. La relación entre estas bases consiste en que al ser los subespacios que forman el AMR una sucesión de espacios encajados, de manera que  $V_j$  está contenido en  $V_{j+1}$ , entonces  $W_j$ , el complemento ortogonal de  $V_j$  respecto a  $V_{j+1}$ , es generado por wavelets de un mismo nivel de dilatación, obteniéndose así una nueva base para  $V_{j+1}$ . Es decir,  $V_{j+1}$  tiene dos bases, la base generada directamente por la función de escala y la base que se forma agregando algunos de los dilatados y trasladados de la wavelet madre a la base que la función de escala le genera a  $V_j$  por lo que se tiene:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

$$\text{Proy}_{V_{j+1}} f = \text{Proy}_{V_j} f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

Así, para analizar una señal lo que se hace es ir obteniendo de manera sucesiva su proyección ortogonal en cada uno de los subespacios del AMR para lo cual se utiliza otra función llamada *filtro pasa bajos* obteniendo representaciones de la señal que combinan la base generada

por la función de escala para cada subespacio con la base generada por la wavelet madre. Este proceso es la esencia del algoritmo piramidal utilizado en el análisis de señales pero en este trabajo no se ha logrado llegar hasta la implementación computacional de dicho algoritmo, lo cual puede ser abordado en posteriores trabajos de investigación. Además puede estudiarse el paso de la teoría de wavelet a funciones de  $\mathbb{R}^2$  y su aplicación en el tratamiento de imágenes.

A partir de un análisis multiresolución es posible construir wavelets que tengan propiedades especiales imponiendo condiciones al filtro pasa bajos o a la función de escala, en particular, se ha estudiado como construir las wavelets de Daubechies D2N que son muy utilizadas y tienen la propiedad de ser de soporte compacto y con una regularidad que consiste en poseer hasta  $N - 1$  derivadas continuas. La wavelet de Haar que fue el primer ejemplo de wavelet es también la wavelet D0, es decir, la primera de las wavelets de Daubechies, para el resto de funciones D2N solo se dispone de una ecuación de tipo recursiva, pero utilizando programas de computadora es posible conocer su valor en muchos puntos y graficar aproximaciones tanto de las funciones wavelet madre como de sus respectivas funciones de escala como se ha hecho en este trabajo con la wavelet D4 pero ha quedado pendiente el estudio del teorema de factorización espectral y la construcción de las wavelets de Daubechies D2N para valores mayores de N así como el estudio de otras funciones wavelets.

# Apéndice A

## Resultados del análisis real

### Definición A.0.1. Convergencia de secuencias.

- a.  $\mathbb{N}$  es el conjunto de enteros positivos,  $\mathbb{Z}$  es el conjunto de los enteros,  $\mathbb{R}$  es el conjunto de los números reales y  $\mathbb{C}$  es el conjunto de los números complejos.
- b. Una secuencia de  $\{c_n\} \subseteq \mathbb{C}$  converge a  $c \in \mathbb{C}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se escribe  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$  si
- $$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \text{ tal que } \forall n \geq N, |c_n - c| < \epsilon. \quad (\text{A.1})$$
- c. Si  $\{c_n\} \subseteq \mathbb{C}$  es una secuencia y si una subsecuencia  $\{c_{n_k}\} \subseteq \{c_n\}$  converge a  $c \in \mathbb{C}$ , entonces  $c$  es un *punto límite* de  $\{c_n\}$ .

Sea  $\{c_n\} \subseteq \mathbb{R}$  y supongase que existe  $s \in \mathbb{R}$  con las propiedades que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \text{ tal que } \forall n > N, c_n < s + \epsilon$$

y

$$\forall \epsilon > 0 \text{ y } \forall N, \exists n > N \text{ tal que } c_n > s - \epsilon.$$

Entonces  $s$  es el *límite superior* de  $\{c_n\}$ , y se escribe

$$s = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

La definición de límite superior significa que para cada  $\epsilon > 0$ , eventualmente (dependiendo de  $\epsilon$ ) todos los términos de  $\{c_n\}$  son menores que  $s + \epsilon$  e infinidad de términos de  $\{c_n\}$  son más grandes que  $s - \epsilon$ . Intuitivamente,  $s$  es el más “grande” punto límite de  $\{c_n\}$ . El *límite inferior* de  $\{c_n\} \subseteq \mathbb{R}$  se define como

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-c_n).$$

- d. Si  $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$  son secuencias, entonces no es difícil probar que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

### Definición A.0.2. Convergencia de funciones.

Sea  $\{f_n\}$  una secuencia de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ , donde  $X \subseteq \mathbb{R}$ .

a.  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se escribe

$$\forall t \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t),$$

si

$$\forall t \in X, \text{ y } \forall \epsilon > 0, \exists N = N(t, \epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N, |f_n(t) - f(t)| < \epsilon.$$

b.  $\{f_n\}$  converge uniformemente a la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ uniformemente en } X,$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \text{ tal que } \forall t \in X \text{ y } \forall n \geq N, |f_n(t) - f(t)| < \epsilon.$$

En este caso,  $N$  es independiente de la variable  $t$ . Esto a menudo permite intercambiar operaciones legítimamente como se muestra en el resultado siguiente donde las operaciones son integración y toma de límite.

**Teorema A.0.5.** Sea  $\{f_n\}$  una secuencia de funciones continuas  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , la cual converge uniformemente en  $[a, b]$  a una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces  $f$  es continua en  $[a, b]$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt = \int_a^b f(t) dt$$

**Definición A.0.3. Medida de Lebesgue cero.**

La *medida de Lebesgue* de un intervalo con puntos extremos  $a$  y  $b$ ,  $a < b$ , es definida como su longitud  $b - a$ . Si  $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$ , donde  $a_{j+1} \geq b_j$  entonces la *medida de Lebesgue* de  $X$  denotada por  $|X|$ , es definida como  $|X| = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$ . Cuando no haya posible confusión se referirá usualmente a la *medida* de  $X$  en lugar de la *medida de Lebesgue* de  $X$ . Esta noción de medida se extiende naturalmente a otros conjuntos  $X \subseteq \mathbb{R}$  y se escribirá  $|X|$  para denotar su medida.

Un conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}$  es un conjunto de *medida 0* si para cada  $\epsilon > 0$  hay un conjunto contable  $\{(a_j, b_j) \subseteq \mathbb{R} : j = 1, \dots\}$  de intervalos tales que

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \text{ y } \sum (b_j - a_j) < \epsilon.$$

Una propiedad es válida en *casi todo punto*, se escribe a.e., si es verdadera para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus X$ , donde  $X$  es un conjunto de medida 0.

**Definición A.0.4. Funciones integrables.**

Sea

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \forall a < b, \int_a^b |f(t)| dt < \infty \right\}$$

y

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right\}.$$

$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  es el espacio de funciones *localmente integrables* en  $\mathbb{R}$  y  $L^1(\mathbb{R})$  es el espacio de funciones *integrables* en  $\mathbb{R}$ . Técnicamente, un elemento  $f \in L^1(\mathbb{R})$  es un conjunto de funciones  $g$  que son iguales a.e. y para cada una  $\int |g(t)| dt < \infty$ . En este trabajo se pensará en los elementos de  $L^1(\mathbb{R})$  como funciones, lo cual no originará algún problema.

**Teorema A.0.6. Propiedades fundamentales de  $L^1(\mathbb{R})$ .** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y sea  $\epsilon > 0$ .

a. Hay una función  $g_\epsilon = \sum c_j 1_{[a_j, b_j]}$ ,  $b_j \leq a_{j+1}$ , una suma finita, tal que

$$\|f - g_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R})} < \epsilon.$$

b. Hay una función  $g_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , tal que

$$\|f - g_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R})} < \epsilon.$$

donde

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) = \{f : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ y el soporte de } f \text{ es compacto}\}.$$

El soporte de  $f$  es el conjunto cerrado más pequeño fuera del cual  $f$  se anula.

c. Existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que si  $|u| < \delta$ , entonces

$$\|f - \tau_u f\|_{L^1(\mathbb{R})} < \epsilon.$$

Donde  $(\tau_u f)(t) = f(t - u)$  como una función de  $t$ .

d. Si  $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$ , entonces  $f$  es el 0-elemento de  $L^1(\mathbb{R})$ , i.e.,  $f = 0$  a.e.

**Lema A.0.2. Lema de Fatou.**

Sea  $\{f_n\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$  y  $g \in L^1(\mathbb{R})$  una función real que tiene la propiedad que para cada  $n$ ,  $g \leq f_n$  a.e. Si  $f$  es una función para la cual  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  a.e., entonces  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y

$$\int f(t) dt \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int f_n(t) dt.$$

Fatou probó este lema en 1906 y lo usó para probar el teorema de Parseval para  $f \in L^2(\mathbb{T}_{2\Omega})$ . El lema de Fatou puede ser usado para probar el teorema de Beppo Levi, que fue probado originalmente en 1906, así como la forma general del teorema de convergencia dominada, el cual fue publicado por Lebesgue en 1908.

$$\forall t \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t),$$

**Teorema A.0.7. Teorema de Beppo Levi.**

Sea  $\{f_n\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$  y  $g \in L^1(\mathbb{R})$  tiene la propiedad que para cada  $n$ ,  $g \leq f_n$  a.e. Si  $f_n \leq f_{n+1}$  a.e. para cada  $n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(t) dt$  es finita, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \equiv f \in L^1(\mathbb{R})$  y

$$\int f(t) dt \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(t) dt.$$

Se usará la notación CDL en referencia al siguiente resultado.

**Teorema A.0.8. Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.** Sea  $\{f_n\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$ , y sea  $f$  una función para la cual  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  a.e. Si  $g \in L^1(\mathbb{R})$  tiene la propiedad que

$$\forall n, |f_n(t)| \leq g(t) \text{ a.e. en } \mathbb{R},$$

entonces  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

**Definición A.0.5. Funciones medibles y espacios  $L^p$ .**

Una función compleja  $f$  definida a.e. en  $\mathbb{R}$  es *medible* (Lebesgue) si hay una secuencia  $\{f_n\}$  de funciones continuas en  $\mathbb{R}$  para las cuales  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  a.e. Los elementos de  $L^1(\mathbb{R})$  son medibles; sin embargo la función  $f$  definida por  $f(t) = \frac{1}{t}$  a.e. en  $\mathbb{R}$ , es medible pero no está en  $L^1(\mathbb{R})$  e incluso no está en  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Todas las funciones en los enunciados de los teoremas se asumirá que son medibles y aunque en este trabajo no se estará interesado en la medibilidad de las funciones, este concepto es fundamental en cualquier estudio sistemático del análisis real.

Sea  $p \in [1, \infty)$ .  $L^p(\mathbb{R})$  es el espacio de las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , para las cuales la norma  $L^p$  de  $f$ ,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left( \int |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

es finita.

Si  $p = \infty$ , entonces  $L^\infty(\mathbb{R})$  es definido como el espacio de todas las funciones que son acotadas excepto posiblemente en un subconjunto de medida cero. La norma  $L^\infty$   $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  de  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  es intuitivamente el supremo de  $|f|$  en  $\mathbb{R}$ . Técnicamente,

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \inf\{M : |\{t \in \mathbb{R} : |f(t)| > M\}| = 0\}.$$

Este complicado arreglo de símbolos se reduce a

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\}$$

en el caso que  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

Los espacios  $L^p$  pueden ser definidos en subintervalos de  $\mathbb{R}$  así como en otros conjuntos  $X$ . En tal caso, si  $p < \infty$ , entonces la integración sobre  $\mathbb{R}$  en la definición de la norma  $L^p$  es remplazada por la integración sobre  $X$ , con un ajuste similar en la definición de la norma  $L^\infty$ .

### Perspectiva en CDL

A la luz de CDL, es natural preguntarse si la hipótesis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$$

lleva a concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$  a.e., lo cual resulta no ser cierto. Generalmente, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$  a.e.

Hay un razonable especie de recíproco para CDL, el cual se debe a F. Riesz: Si  $\{f_n\}$  es una secuencia de funciones en  $\mathbb{R}$  con la propiedad que

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} |\{t \in \mathbb{R} : |f_n(t)| \geq \epsilon\}| = 0, \quad (\text{A.2})$$

entonces hay una subsecuencia  $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$  para la cual

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = 0, \text{ a.e.}$$

Note que (A.2) se cumple si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$ . Si  $\{f_n\}$  cumple con la propiedad (A.2) se dice que  $\{f_n\}$  converge en medida a 0.

**Teorema A.0.9. Teorema Fubini-Tonelli.**

a. (Tonelli) Si  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  y

$$\int_X \left( \int_Y |f(x, y)| dy \right) dx < \infty, \quad (\text{A.3})$$

entonces  $f$  es integrable, i.e.  $f \in L^1(X \times Y)$ .

b. (Fubini) Sea  $f \in L^1(X \times Y)$ , y se define la función  $f_x : Y \rightarrow \mathbb{C}$ , respectivamente,  $f_y : X \rightarrow \mathbb{C}$ , por

$$f_x(y) = \int_X f(x, y) dx, \text{ respectivamente, } f_y(x) = \int_Y f(x, y) dy.$$

Entonces  $f_x \in L^1(Y)$  a.e. en  $x$ ,  $f_y \in L^1(X)$  a.e. en  $y$ , las funciones definidas a.e. por

$$\int_Y f_x(y) dy \text{ y } \int_X f_y(x) dx$$

están en  $L^1(X)$  y  $L^1(Y)$  respectivamente y

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) dx dy &= \int_Y \int_X f(x, y) dx dy \\ &= \int_X \int_Y f(x, y) dy dx. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

c. Si  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  y (A.3) es válida, entonces cada una de las integrales en (A.4) es finita y (A.4) es válida.

**Teorema A.0.10. Desigualdad de Hölder.** Si  $1 \leq p \leq \infty$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , y si  $f \in L^p(\mathbb{R})$  y  $g \in L^q(\mathbb{R})$  entonces  $fg \in L^1(\mathbb{R})$  y

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}. \quad (\text{A.5})$$

Si  $1 < p < \infty$ , se da la igualdad en (A.5) si y solo si existen constantes  $A, B \geq 0$ , no ambas 0, tales que  $A|f|^p = B|g|^q$  a.e.

**Teorema A.0.11. Desigualdad de Minkowski.** Sea  $p \geq 1$ , y sea  $f$  una función compleja definida en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Entonces

$$\left( \int \left| \int f(t, u) dt \right|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int \left( \int |f(t, u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}}$$

i.e., la norma  $L^p$  de una “suma” es menor que o igual a la “suma” de las normas  $L^p$ .

**Definición A.0.6. Continuidad absoluta.** Una función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es *absolutamente continua* en  $[a, b]$ , se escribirá  $F \in AC[a, b]$ , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) \text{ tal que } \forall \{(x_j, y_j) \subseteq [a, b] : j = 1, 2, \dots, n\},$$

una familia disjunta de intervalos, se puede concluir que

$$\sum_{j=1}^n (y_j - x_j) < \delta \text{ implica } \sum_{j=1}^n |F(y_j) - F(x_j)| < \epsilon.$$

Se define  $AC(\mathbb{R})$  similarmente.

Una función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es *localmente absolutamente continua*, se escribirá  $F \in AC_{loc}(\mathbb{R})$ , si  $F \in AC[a, b]$  para cada intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ .

**Teorema A.0.12. Teorema Fundamental del Cálculo.** Sea  $f \in L^1[a, b]$  y sea  $r \in \mathbb{R}$ . Se define

$$\forall t \in [a, b], F(t) = r + \int_a^t f(u) du$$

de manera que  $F(a) = r$ . Entonces  $F \in AC[a, b]$  y

$$F' = f \text{ a.e.}$$

Una función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es absolutamente continua en  $[a, b]$  si y solo si existe  $f \in L^1[a, b]$  tal que

$$\forall t \in [a, b], F(t) - F(a) = \int_a^t f(u) du.$$

**Teorema A.0.13. Integración por partes.** Sea  $f, g \in L^1[a, b]$ , sean  $r, s \in \mathbb{C}$ , y se definen las (absolutamente continuas) funciones

$$F(t) = r + \int_a^t f(u) du \text{ y } G(t) = s + \int_a^t g(u) du$$

en  $[a, b]$ . Entonces

$$\int_a^b f(t)G(t)dt + \int_a^b g(t)F(t)dt = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

## Apéndice B

### Espacios de Hilbert

A continuación se describen los tipos básicos de espacios, haciendo especial hincapié en los espacios de Hilbert, que son ricos en estructura geométrica. En simples términos, la idea detrás de un espacio de Hilbert es generalizar los familiares espacios  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ , preservando tanto como sea posible los resultados geométricos en estos espacios finito-dimensionales.

#### B.1. Espacios Lineales Normados

Una versión moderna, axiomática, de la definición de los espacios vectoriales se debe al matemático italiano Giuseppe Peano, en 1888. Se asume que el lector está familiarizado con los espacios vectoriales. Para introducir nociones analíticas como la convergencia o la continuidad en un espacio vectorial se le debe dotar con una estructura adicional. Ésto lleva al concepto de un espacio lineal normado, que es un espacio vectorial con una norma.

*Definición B.1.1.* Sea  $X$  un espacio vectorial sobre el campo escalar  $\mathbb{R}$  de los números reales o sobre el campo  $\mathbb{C}$  de los números complejos. Supóngase que se tiene una función  $\| \cdot \|: X \rightarrow [0, \infty)$ , llamada *norma*, tal que

1.  $\| x \| = 0$  si y solo si  $x = 0$
2.  $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$  para todo  $x, y \in X$ , y
3.  $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$  para todo escalar  $\alpha$  y vector  $x$

Se dice que  $(X, \| \cdot \|)$  es un espacio lineal normado. Si solo se cumplen las propiedades (2) y (3) entonces  $\| \cdot \|$  es llamada *seminorma*.

La propiedad (2) es llamada la *desigualdad triangular* y la propiedad (3) es referida como *homogeneidad*. La desigualdad triangular inversa,

$$\| x + y \| \geq \| \| x \| - \| y \| \|$$

se sigue fácilmente de (2).

Se muestran ahora algunos ejemplos de espacios lineales normados. En estos ejemplos no se darán los detalles de la verificación que la norma satisface las propiedades de la definición.

*Ejemplo B.1.1.* Sea  $X = \mathbb{C}^n \equiv \{(z_1, z_2, \dots, z_n) : z_j \in \mathbb{C}\}$  con la norma euclídea

$$\| (z_1, z_2, \dots, z_n) \| = \left( \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

esta es llamada la *norma Euclídea*. El espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^n$  se define de manera similar, en este caso los escalares se restringen a ser números reales.

*Ejemplo B.1.2.* Sea  $X = \mathbb{C}^n$  con la norma

$$\| (z_1, z_2, \dots, z_n) \| = \max\{|z_j| : 1 \leq j \leq n\}$$

*Ejemplo B.1.3.* Sea  $Y = [0, 1]$ , o más generalmente, cualquier espacio Hausdorff compacto, y sea  $C(Y)$  el espacio vectorial de funciones complejas continuas en  $Y$ , bajo adición y multiplicación por escalar puntuales. Se define una norma en  $C(Y)$  por  $\|f\| = \max\{|f(y)| : y \in Y\}$ . Este fue uno de los importantes ejemplos que Fréchet propuso en su disertación en 1906.

*Ejemplo B.1.4.* Seleccionando un valor de  $p \geq 1$  y si  $\ell^p = \ell^p(N)$  denota el conjunto de todas las secuencias  $\{a_n\}_1^\infty$  de números complejos para los cuales  $\sum_1^\infty |a_n|^p < \infty$ . Se define la norma de  $\{a_n\} \in \ell^p$  por

$$\| \{a_n\} \|_p = \left( \sum_1^\infty |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Es posible incluir la elección  $p = \infty$  modificando la definición en la forma siguiente:

$$\ell^\infty = \{ \{a_n\}_1^\infty : \sup_n |a_n| < \infty \}$$

y

$$\| \{a_n\} \|_\infty = \sup_n |a_n|.$$

Para  $p = \infty$  la desigualdad triangular se verifica fácilmente, para  $1 \leq p < \infty$  recibe el nombre de desigualdad de Minkowski, en honor a Hermann Minkowski quién estudio primero el análogo de esta  $\ell^p$ -norma en el espacio  $\mathbb{R}^n$ .

*Ejemplo B.1.5.* Se puede generalizar este último ejemplo como sigue. Considere un espacio de medida positiva  $(Y, \mathfrak{M}, \mu)$ , donde  $Y$  es un conjunto,  $\mathfrak{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $Y$  y  $\mu$  es una medida positiva. Seleccione  $1 \leq p < \infty$ , y denote por  $L^p(Y, \mu)$  a la colección de clases de equivalencia de funciones  $\mathfrak{M}$ -medibles en  $Y$  con

$$\int_Y |f|^p d\mu < \infty,$$

normado por

$$\|f\|_p = \left( \int_Y |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

la integral en esta definición es la integral de Lebesgue. La desigualdad de Minkowski (para integrales) da la prueba que la norma satisface la desigualdad triangular. También se define  $L^\infty(X, \mu)$  para ser todas las clases de equivalencia de las funciones medibles esencialmente acotadas, normadas por  $\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f|$ , el supremo esencial de  $f$ .

**Definición B.1.2.** Un espacio métrico es un conjunto con una función  $d(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  satisfaciendo, para  $x, y$  y  $z$  en  $X$ ,

1.  $d(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$ ,
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ , y
3.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ .

En cualquier espacio métrico  $(X, d)$  hay una topología asociada. Las bolas abiertas son los conjuntos de la forma  $B(a, r) \equiv \{x : d(x, a) < r\}$  donde  $r > 0$ . Todo conjunto abierto es la unión de alguna colección de bolas abiertas. Si  $X$  es un espacio lineal normado, es posible definir una métrica en  $X$  por  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Con la topología métrica en  $X$ , se tiene la continuidad de ciertos mapeos, por ejemplo, se puede verificar que la función  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  es continua.

Cerca de ocho años después del trabajo de Fréchet en 1906, Felix Hausdorff escribió un artículo en el que presentó la moderna definición de espacio métrico y definió la idea fundamental de las secuencias de Cauchy, la cuál se define a continuación:

**Definición B.1.3.** Sea  $X$  un espacio métrico. Una secuencia  $x_n$  en  $X$  se dice que es una secuencia de Cauchy si tiene la siguiente propiedad: Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N$  tal que si  $n, m \geq N$ , entonces  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

**Definición B.1.4.** Un espacio métrico es completo si toda secuencia de Cauchy en  $X$  converge en  $X$ .

**Definición B.1.5.** Sea  $X$  un espacio lineal normado. Si  $X$  es completo en la métrica  $d$  definida por la norma como  $d(x, y) = \|x - y\|$ , es llamado un Espacio de Banach.

Todos los anteriores ejemplos de espacios lineales normados son espacios de Banach. No se hará una demostración pero se hacen las siguientes observaciones. La declaración que el espacio  $L^p(Y, \mu)$  es completo para cualquier  $1 \leq p \leq \infty$  y cualquier espacio de medida positiva  $(Y, \mu)$ , lleva el nombre de Teorema de Riesz-Fischer. En su generalidad es un resultado profundo del análisis real. Este caso incluye a los espacios  $\ell^p$ . Se puede obtener un ejemplo de un espacio lineal normado que no es un espacio de Banach tomando un subespacio no cerrado de un espacio de Banach.

Los espacios de Banach son llamados en honor al matemático polaco Stefan Banach, una figura dominante en el nacimiento del análisis funcional, quién escribió un libro importante y fundamental llamado *Opérations Linéaires* en 1932. En este libro son desarrolladas muchas de las propiedades de los espacios lineales normados completos.

Los espacios de Hilbert, son espacios de Banach con alguna estructura adicional, debida a la existencia de un producto interno.

*Definición B.1.6.* Sea  $X$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . Un producto interno es un mapeo  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  satisfaciendo, para  $x, y$  y  $z$  en  $X$  y escalar  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,

1.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  para todo  $x, y$  en  $X$ ,
2.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , con  $\langle x, y \rangle = 0$  (si y solo si  $x = 0$ ),
3.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ , y
4.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ .

Algunos comentarios sobre esta definición son los que siguen. La barra en (1) denota conjugación compleja. Propiedad (2) es referida como “positiva-definitud”, y el adjetivo “Hermitiano” es utilizado para la propiedad (1). La declaración en paréntesis “si” en (2) no necesita ser incluido en la definición porque se sigue de las otras propiedades dado que  $\langle 0, 0 \rangle = \langle 2(0), 0 \rangle = 2\langle 0, 0 \rangle$ . Un producto interno es lineal en la primer componente y conjugado lineal en la segunda ( $\langle x, \alpha y + z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ ), así que las propiedades en la definición son encapsuladas diciendo que un producto interno es una Hermitiana, positiva-definida, forma sesquilineal (sesquilineal del latín para “ $1\frac{1}{2}$ ” lineal), Aunque algunos autores (en física por ejemplo) definen el producto interno como lineal en la segunda componente y conjugado lineal en la primera.

Un ejemplo estandar es definir un producto interno en  $L^2(X, \mu)$  para un espacio de medida positivo  $(X, \mu)$  por

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu.$$

Este incluye como casos especiales, el ejemplo  $\mathbb{C}^n$  con

$$\langle (z_1, z_2, \dots, z_n), (w_1, w_2, \dots, w_n) \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j,$$

y el ejemplo  $\ell^2$  de todas las secuencias cuadrado sumables con

$$\langle (z_1, z_2, \dots), (w_1, w_2, \dots) \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} z_j \bar{w}_j,$$

los cuales son obtenidos tomando  $X$  a ser  $\{1, 2, \dots, n\}$  o  $\mathbb{N}$ , con  $\mu$  igual a la medida que cuenta.

*Proposición B.1.1.* Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno en un espacio vectorial  $X$ , entonces para todo  $x$  y  $y$  en  $X$  se tiene:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Esta forma general de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se debe a John Von Neumann (1930) quién es acreditado con la axiomatización de los espacios de Hilbert.

Ahora se muestra como cualquier producto interno define una norma.

*Proposición B.1.2.* Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno en un espacio vectorial  $X$ , entonces

$$\|x\| \equiv \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

es una norma en  $X$ .

*Prueba:* Se verificará solo la desigualdad triangular y se deja la verificación de las otras propiedades al lector.

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

donde  $\operatorname{Re}z$  representa la parte real de un número complejo  $z$ , y se ha utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el penúltimo paso.

También se cumple que:

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|$$

dado que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|$  si  $\|y\| = 1$  y la igualdad se obtiene tomando  $y = \frac{x}{\|x\|}$ .

*Definición B.1.7.* Un espacio de Hilbert (Complejo)  $\mathcal{H}$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  con un producto interno tal que  $\mathcal{H}$  es completo en la métrica

$$d(x, y) = \|x - y\| \equiv \langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Cualquier espacio  $L^2(X, \mu)$  descrito anteriormente es un ejemplo de espacio de Hilbert, como se ha observado anteriormente  $L^2(X, \mu)$  es un espacio de Banach con la norma  $\|f\|_2 = (\int_X |f|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}}$  el cual se reconoce como  $\langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$

## B.2. Ortogonalidad

Un espacio de Banach es un espacio lineal normado completo y un espacio de Hilbert es un espacio completo con producto interno. La presencia de un producto interno permite la importante noción geométrica de ortogonalidad, por ello se dice que los espacios de Hilbert se comportan en muchas maneras como generalizaciones de los espacios Euclideos de dimensión finita, donde uno puede hablar de ángulos y proyecciones, por ejemplo.

*Definición B.2.1.* Dados vectores  $f, g$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , se dice que  $f$  es ortogonal a  $g$ , se escribe  $f \perp g$ , si  $\langle f, g \rangle = 0$ . Para conjuntos  $A$  y  $B$  en  $\mathcal{H}$  se escribe  $A \perp B$  si  $\langle f, g \rangle = 0$  para todo  $f \in A$  y  $g \in B$ . Finalmente,  $A^\perp$  es el conjunto de todos los vectores

en  $\mathcal{H}$  tales que  $f \perp g$  para todo  $g \in A$ . Para cualquier  $A$  este es siempre un subespacio de  $\mathcal{H}$ , más aún, como  $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \{a\}^\perp$ ,  $A^\perp$  es un subespacio cerrado por la continuidad del producto interno. Es claro que  $A \cap A^\perp = 0$ .

Un ejemplo de un subespacio que no es cerrado es el conjunto de todas las secuencias en  $\ell^2$  con un número finito de términos distintos de cero.

El siguiente resultado acertadamente llamado el *teorema de Pitágoras*, es fácilmente verificado escribiendo la norma en términos del producto interno y expandiéndolo. Los detalles se dejan al lector.

*Proposición B.2.1.* Si  $f_1, f_2, \dots, f_n$  son vectores ortogonales dos a dos en un espacio de Hilbert, entonces

$$\|f_1 + f_2 + \dots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \dots + \|f_n\|^2.$$

En general, para cualesquiera vectores  $f, g$  en un espacio de Hilbert se tiene

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle f, g \rangle + \|g\|^2$$

y

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle f, g \rangle + \|g\|^2.$$

La *igualdad del paralelogramo* es entonces obtenida:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.$$

En cualquier espacio con producto interno, el producto interno puede ser obtenido a partir de la norma:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2). \quad (\text{B.1})$$

Esta es llamada la *identidad de polarización*, y se verifica con calculos sencillos.

Sorpresivamente, dado un espacio lineal normado en el cual la identidad del paralelogramo se cumple, hay un producto interno que da la norma. Este resultado se debe a P. Jordan y J. von Neumann.

Las secuencias en espacios de Hilbert que tienen la propiedad de que cualesquiera dos elementos distintos son ortogonales tienen un gran número de características atractivas y útiles matemáticamente, que el siguiente resultado describe. El significado preciso de la serie infinita utilizado en la definición (B.2.2) (c) se explica en la definición (B.2.3).

*Definición B.2.2.* Sea  $\{x_n\}$  una secuencia en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

- $\{x_n\}$  es *ortogonal* si  $\langle x_m, x_n \rangle = 0$  siempre que  $n \neq m$ .
- $\{x_n\}$  es *ortonormal* si  $\langle x_m, x_n \rangle = \delta_{m,n}$ , i.e., si  $\{x_n\}$  es ortogonal y  $\|x_n\| = 1$  para todo  $n$ .
- $\{x_n\}$  es una *base* para  $\mathcal{H}$  si todo  $x \in \mathcal{H}$  puede ser escrito como  $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$  para una única elección de los coeficientes  $c_n$ .
- Una secuencia ortonormal  $\{x_n\}$  es una *base ortonormal* para  $\mathcal{H}$  si es ortonormal y una base. En este caso, la representación única de  $x \in \mathcal{H}$  en esta base es  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$ .

*Ejemplo B.2.1.* Aquí se muestran algunos ejemplos de bases ortonormales.

- Considerando  $\mathcal{H} = \ell^2$  y definiendo secuencias  $e_n = (\delta_{m,n})_{m=1}^{\infty} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , donde el 1 aparece en la  $n$ -ésima posición. Entonces  $\{e_n\}$  es una base ortonormal de  $\ell^2$ .
- Considerando  $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$ , el espacio de funciones que son cuadrado integrables en  $[0, 1]$ . Defínanse funciones  $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$  con  $n$  variando en  $\mathbb{Z}$ . Entonces  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal para  $\mathcal{H}$ . Si  $f \in L^2[0, 1]$  entonces la expansión  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n$  es llamada la *serie de Fourier* de  $f$  y  $(\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{Z}}$  es la secuencia de *coeficientes de Fourier* de  $f$ . Nótese que se está garantizando que la serie de Fourier converge solo en la  $L^2$ -norma. No hay garantía de que la convergencia sea puntual.

Una secuencia  $\{x_n\}$  es completa en  $\mathcal{H}$  si su conjunto ortogonal  $\{x_n\}^{\perp}$  es  $\{0\}$ . El siguiente teorema presenta varias condiciones equivalentes que implican que una secuencia ortonormal es completa en  $\mathcal{H}$ .

*Teorema B.2.1.* Sea  $\{x_n\}$  una secuencia ortonormal en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes.

- $\{x_n\}$  es completa en  $\mathcal{H}$ .
- $\{x_n\}$  es una base ortonormal en  $\mathcal{H}$ .
- (Fórmula de Plancherel)  $\sum |\langle x, x_n \rangle|^2 = \|x\|^2$  para todo  $x \in \mathcal{H}$ .
- $x = \sum \langle x, x_n \rangle x_n$  para todo  $x \in \mathcal{H}$ .

Supóngase que  $\mathcal{H}$  tiene una base ortonormal  $\{x_n\}$ . Entonces

$$E = \left\{ \sum_{n=1}^N r_n x_n, N > 0, \operatorname{Re}(r_n), \operatorname{Im}(r_n) \in \mathbb{Q} \right\}$$

es un contable, denso, subconjunto de  $\mathcal{H}$ , así que  $\mathcal{H}$  es separable. El recíproco es también verdadero.

*Teorema B.2.2.* Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert, entonces existe una base ortonormal  $\{x_n\}$  de  $\mathcal{H}$  si y sólo si  $\mathcal{H}$  es separable. Como consecuencia, todos los espacios de Hilbert separables son isométricamente isomorfos, y de hecho son isomorfos a  $\ell^2$ . Esto es, si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert separable, entonces existe un biyectivo, norma-preservante mapeo  $S$  de  $\mathcal{H}$  en  $\ell^2$ .

*Definición B.2.3.* Sea  $\{x_n\}$  una secuencia en un espacio de Banach  $X$ .

a) La serie  $\sum x_n$  es *convergente* e igual a  $x \in X$  si la secuencia de sumas parciales  $S_N = \sum_{n=1}^N x_n$  converge a  $x$  en la norma de  $X$ , i.e., si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 > 0, \text{ tal que } \forall N \geq N_0, \|x - S_N\| < \epsilon.$$

b) La serie  $\sum x_n$  es de Cauchy si la secuencia  $\{S_N\}$  de sumas parciales es una secuencia de Cauchy en  $X$ , i.e. si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 > 0, \text{ tal que } \forall N > M \geq N_0, \|S_N - S_M\| = \left\| \sum_{n=M+1}^N x_n \right\| < \epsilon.$$

Como  $X$  es un espacio de Banach, una serie  $\sum x_n$  converge si y sólo si es una serie de Cauchy.

Aquí algunos adicionales, más restrictivos, tipos de convergencia.

*Definición B.2.4.* Sea  $\{x_n\}$  una secuencia en un espacio de Banach  $X$ .

a) Una serie  $\sum x_n$  es *incondicionalmente convergente* si  $\sum x_{\sigma(n)}$  converge para toda permutación  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$ .

b) Una serie  $\sum x_n$  es *absolutamente convergente* si  $\sum \|x_n\| < \infty$ .

Aunque la definición (B.2.4) no requiere que  $x_{\sigma(n)}$  debe converger en el mismo valor para todas las permutaciones  $\sigma$ , sin embargo en el Corolario 2.9 de [HEI87] se muestra que en verdad éste es el caso.

Si  $(c_n)$  es una secuencia de números reales o complejos, se sigue que  $(c_n)$  converge incondicionalmente si y sólo si converge absolutamente. En un espacio de Banach en general, es cierto que convergencia absoluta implica convergencia incondicional, pero lo contrario no siempre es cierto. De hecho, se puede demostrar que la convergencia incondicional es equivalente a la convergencia absoluta sólo para espacios de Banach finito-dimensionales.

### B.3. Bases en espacios de Banach

Puesto que un espacio de Banach  $X$  es un espacio vectorial, debe poseer una base de Hamel, es decir, un subconjunto  $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  cuya expansión lineal finita es todo  $X$  y que tiene la propiedad de que cada subcolección finita es linealmente independiente. Por lo tanto, cualquier elemento  $x \in X$  se puede escribir como alguna combinación lineal finita de los  $x_\gamma$ . Sin embargo, incluso un espacio de Banach de dimensión infinita separable podría requerir una base de Hamel no contable. Por otra parte, la prueba de la existencia de bases de Hamel para espacios de dimensión infinita arbitrarias requiere el axioma de elección (de hecho, se puede demostrar que la declaración “Cada espacio vectorial tiene una base de Hamel” es equivalente al axioma de elección). Por lo tanto para la mayoría de los espacios de Banach no existe un método constructivo de producir una base de Hamel.

Más útil que una base de Hamel es una secuencia numerable  $\{x_n\}$  tal que cada elemento  $x \in X$  puede ser escrita como una combinación lineal infinita única  $x = \sum c_n x_n$ . Esto conduce a la siguiente definición.

*Definición B.3.1.*

a) Una secuencia  $\{x_n\}$  en un espacio de Banach  $X$  es una base para  $X$  si

$$\forall x \in X, \exists \text{ escalares \u00fanicos } a_n(x) \text{ tales que } x = \sum_n a_n(x)x_n. \quad (\text{B.2})$$

b) Una base  $\{x_n\}$  es una *base incondicional* si la serie en (B.2) converge incondicionalmente para cada  $x \in X$ .

c) Una base  $\{x_n\}$  es una *base absolutamente convergente* si la serie en (B.2) converge absolutamente para cada  $x \in X$ .

d) Una base  $\{x_n\}$  es una *base acotada* si  $\{x_n\}$  esa acotada en norma tanto por arriba como por debajo, es decir, si

$$0 < \inf x_n \leq \sup x_n < \infty.$$

e) Una base  $\{x_n\}$  es una *base normalizada* si  $\{x_n\}$  es normalizado, es decir, si  $\|x_n\| = 1$  para todo  $n$ .

Note que si  $\{x_n\}$  es una base, el hecho de que  $x$  puede ser escrito de manera \u00fanica como  $x = \sum_n a_n(x)x_n$  implica que  $x_n \neq 0$  para todo  $n$ . Como consecuencia,  $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$  es una base normalizada para  $X$ .

Si  $X$  posee una base  $\{x_n\}$  entonces  $X$  debe ser separable, dado que el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas  $\sum_{n=1}^N c_n x_n$  con  $c_n$  racional (o con partes real e imaginaria racionales si los  $c_n$  son complejos) forman un contable y denso subconjunto de  $X$ . La cuesti\u00f3n de si todos los espacios de Banach separables poseen una base fue un problema conocido como el *problema de la base*. Se demostr\u00f3 por P. Enflo (A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, 1973) que s\u00ed existen espacios de Banach reflexivos separables que no poseen bases.

**Notaci\u00f3n.** N\u00f3tese que los coeficientes  $a_n(x)$  definidos en (B.2) son funciones lineales de  $x$ . Por otra parte, est\u00e1n determinados \u00fanicamente por la base, es decir, la base  $\{x_n\}$  determina una colecci\u00f3n \u00fanica de funcionales lineales  $a_n : X \rightarrow F$  ( $F$  es el campo  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Por lo tanto, se le llama a  $\{a_n\}$  la secuencia asociada de funcionales coeficiente. Cuando se necesite hacer referencia expl\u00edcita a tanto la base como a los funcionales coeficiente asociados, se escribir\u00e1 “ $(\{x_n\}, \{a_n\})$  es una base” en el sentido de que  $\{x_n\}$  es una base con los funcionales coeficiente asociados  $\{a_n\}$ .

*Definici\u00f3n B.3.2.* Una base  $(\{x_n\}, \{a_n\})$  es una *base de Schauder* si cada funcional coeficiente  $a_n$  es continuo. En este caso, cada  $a_n$  es un elemento del espacio dual, es decir,  $a_n \in X^*$  para cada  $n$ .

Se demuestra en el teorema 4.11 de [HEI87] que cada base es una base Schauder, es decir, los funcionales de coeficientes  $a_n$  son siempre continuos.

## B.4. Marcos en espacios de Hilbert

Los marcos fueron introducidos por Duffin y Schaeffer en el contexto de las series de Fourier no-armónicas (*A class of nonharmonic Fourier series*, 1952). Fueron pensados como una alternativa a las bases ortonormales o a las bases de Riesz en espacios de Hilbert. Mucha de la teoría abstracta de marcos fue elegantemente establecida en el citado artículo. Marcos para  $L^2(\mathbb{R})$  basados en trasladados en tiempo-frecuencia o en tiempo-escala de funciones fueron construidos más tarde por Daubechies, Grossmann y Meyer en *Painless nonorthogonal expansions*, 1986. Tales marcos juegan un papel importante en Gabor y el análisis wavelet.

**Definición B.4.1.** Dado un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  separable, con producto interno  $\langle f, g \rangle$  y norma  $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ , se dirá que una sucesión  $\{f_k\}_k$  es un marco de  $\mathcal{H}$  si existen constantes  $0 < A \leq B$  tales que para toda  $f \in \mathcal{H}$  se tiene

$$A \|f\|^2 \leq \sum_k |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (\text{B.3})$$

Cuando sea  $A = B$  se dice que el marco es *ajustado* y será *exacto* si  $\{f_k\}_{k \neq l}$  deja de ser un marco para cualquier elección de  $l$ .

**Ejemplo B.4.1.** Cada base ortonormal  $\{e_n\}$  es un marco ajustado con  $A = B = 1$ . Por otra parte,  $\{e_n\}$  es un marco exacto dado que si se elimina cualquier elemento  $e_m$ , entonces  $\sum_{n \neq m} |\langle e_m, e_n \rangle|^2 = 0$ , y por lo tanto,  $\{e_n\}_{n \neq m}$  no puede ser un marco.

El siguiente ejemplo muestra que ajustado y exacto son conceptos distintos.

**Ejemplo B.4.2.** Sea  $\{e_n\}$  una base ortonormal para un espacio de Hilbert separable  $\mathcal{H}$ .

- $\{e_n\}$  es un marco exacto apretado para  $\mathcal{H}$  con constantes  $A = B = 1$ .
- $\{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots\}$  es un marco inexacto ajustado con constantes  $A = B = 2$ , pero no es ortogonal y no es una base, aunque contiene una base ortonormal. Del mismo modo, si  $\{f_n\}$  es otra base ortonormal para  $\mathcal{H}$  entonces  $\{e_n\}$  y  $\{f_n\}$  es un marco inexacto ajustado.
- $\{e_1, \frac{e_2}{2}, \frac{e_3}{3}, \dots\}$  es una secuencia ortogonal completa y es una base para  $\mathcal{H}$ , pero no posee una constante de marco inferior  $A$  y por lo tanto no es un marco.
- $\{e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \dots\}$  es un marco inexacto ajustado con constantes  $A = B = 1$ , y ninguna subsecuencia no redundante es un marco.
- $\{2e_1, e_2, e_3, \dots\}$  Es un marco exacto no ajustado con constantes  $A = 1, B = 2$ .

Se muestra ahora que todos los marcos deben ser completos, aunque la parte (c) del ejemplo anterior muestra que existen secuencias completas que no son marcos.

**Lema B.4.1.** Si  $\{x_n\}$  es un marco para un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , a continuación,  $\{x_n\}$  es completo en  $\mathcal{H}$ .

Prueba. Si  $x \in \mathcal{H}$  satisface  $\langle x, x_n \rangle = 0$  para todo  $n$ , entonces  $\|x\|^2 \leq \sum |\langle x, x_n \rangle|^2 = 0$ .  $\square$

Como consecuencia de este resultado, si  $\mathcal{H}$  posee un marco  $\{x_n\}$ , entonces debe ser separable, porque el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas  $\sum_{n=1}^N c_n x_n$  con  $c_n$  racional (o racional parte real e imaginaria si los  $c_n$  son complejos) formará un contable y denso subconjunto de  $\mathcal{H}$ . Recíprocamente, cada separable espacio de Hilbert sí posee un marco dado que posee una base ortonormal, que es un marco exacto ajustado.



# Apéndice C

## Algoritmo

A continuación se presenta el algoritmo recursivo hecho en Scilab, de la función utilizada para graficar las aproximaciones con  $3(2^n)+1$  puntos de la wavelet D4 y su función de escala, de acuerdo a las ecuaciones recursivas:

$$\varphi(x) = h_0\varphi(2x) + h_1\varphi(2x - 1) + h_2\varphi(2x - 2) + h_3\varphi(2x - 3), \quad (\text{C.1})$$

$$\psi(x - 2) = h_0\varphi(2x - 3) - h_1\varphi(2x - 2) + h_2\varphi(2x - 1) - h_3\varphi(2x), \quad (\text{C.2})$$

donde

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4},$$

$$h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4},$$

$$h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4},$$

$$h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}.$$

Además, se han asignado los valores iniciales

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\varphi(1) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

$$\varphi(2) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2},$$

$$\varphi(3) = 0$$

```

0001 function []=daubechiesD4(n)//n entero mayor o igual a 2
0002     M=1+3*(2^n);
0003     Y=zeros(1,M);
0004     Z=zeros(1,M);
0005     k=2^n;
0006     Y(1,1)=0;
0007     Y(1,1+k)=(1+sqrt(3))/2;
0008     Y(1,1+2*k)=(1-sqrt(3))/2;
0009     Y(1,1+3*k)=0;
0010     Y(1,1+k/2)=(2+sqrt(3))/4;
0011     Y(1,1+3*k/2)=0;
0012     Y(1,1+5*k/2)=(2-sqrt(3))/4;
0013     Z(1,1)=0;
0014     Z(1,1+k)=(sqrt(3)-1)/2;
0015     Z(1,1+2*k)=(sqrt(3)+1)/2;
0016     Z(1,1+3*k)=0;
0017     Z(1,1+k/2)=1/4;
0018     Z(1,1+3*k/2)=-sqrt(3);
0019     Z(1,1+5*k/2)=-1/4;
0020     H=[(1+sqrt(3))/4,(3+sqrt(3))/4,(3-sqrt(3))/4,(1-sqrt(3))/4];
0021     H2=[-H(1,4),H(1,3),-H(1,2),H(1,1)];
0022     k1=2^n;
0023     k2=1;
0024     for i=2:1:n
0025         k1=k/(2^(i-1));
0026         k3=k1/2;
0027         k2=2^(i-1);
0028         for j=0:1:3*k2-1
0029             F=[0,0,0,0];
0030             if ((k1*(2*j+1)+1<M) & (k1*(2*j+1)+1>0)) then
0031                 F(1,1)=Y(1,k1*(2*j+1)+1);
0032             end
0033             if ((k1*(2*j+1)+1-k<M) & (k1*(2*j+1)+1-k>0)) then
0034                 F(1,2)=Y(1,k1*(2*j+1)+1-k);
0035             end
0036             if ((k1*(2*j+1)+1-2*k<M) & (k1*(2*j+1)+1-2*k>0)) then
0037                 F(1,3)=Y(1,k1*(2*j+1)+1-2*k);
0038             end
0039             if ((k1*(2*j+1)+1-3*k<M) & (k1*(2*j+1)+1-3*k>0)) then
0040                 F(1,4)=Y(1,k1*(2*j+1)+1-3*k);
0041             end
0042             r=k3*(2*j+1)+1;
0043             K=H.*F;
0044             T=H2.*F;
0045             s=0;
0046             w=0;
0047             for t=1:1:4
0048                 s=s+K(1,t);
0049                 w=w+T(1,t);
0050             end
0051             Y(1,r)=s;
0052             Z(1,r)=w;
0053         end
0054     end
0055     h=1/(2^n);
0056     X=0:h:3;
0057     plot(X,Y,'r',X,Z,'b')
0058     endfunction

```

## Bibliografía

- [BEN96] John J. Benedetto. *Harmonic Analysis and Applications*. 1996.
- [HYW96] Eugenio Hernández y Guido Weiss. *A First Course on Wavelets*. 1996.
- [DAU92] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- [DAL96] Robert Dalmasso. *Analyse de Fourier et applications: Exercices corrigés*. París : Masson. 1996
- [HEI87] C. Heil, *A basis theory primer*, manuscrito, 93 págs, 1987 revisado 1997.
- [HER08] Francisco Asdrúbal Hernández. *El Rol de los Homeomorfismos en las series de Fourier*. Universidad de El Salvador. 2008.
- [EYP08] C. Henry Edwards, David E. Penney. *Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling*. RENTICE HALL INC. 2008
- [RUD76] Walter Rudin. *Principios de análisis matemático* Tercera Edición. McGraw-Hill. 1976.
- [RIL06] Noelia Rillo Pastor. *Introducción a la teoría de wavelets*. <http://www.maia.ub.edu/soria/TAD-Wavelets.pdf>. 2006.
- [KYM02] Samir Kouro R. y Rodrigo Musalem M. *Tutorial introductorio a la Teoría de Wavelet* <http://www2.elo.utfsm.cl/elo377/documentos/Wavelet.pdf>. 2002.