UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Trabajo final de graduación titulado:
“Clasificación de superficies compactas através de la representación planar y la demostración del teorema de Seifert-Van Kampen. ”

Para optar al grado de:
Licenciado en Matemática

Estudiante
Jorge Balmore Flores Tejada

Carné: FT09006

Asesor
Lic. Ernesto Américo Hidalgo Castellanos.

03 de febrero de 2016

Índice general

1. Introducción

Una delas areas más importantes para todo matemático es la topología, ya que se encuentra presente en casi todas las áreas de las matemática: en el álgebra, la geometría, en análisis, etc. Sus métodos y sus resultados facilitan el tratamiento de numerosos problemas e incluso permiten abordar otros que no tienen un origen estrictamente topológico.

“Uno de los problemas básicos en topología es determinar si dos espacios topológicos dados son homeomorfos. No hay un método para resolver este problema en general, pero existen técnicas que se aplican en casos particulares. Demostrar que dos espacios son homeomorfos consiste en construir una aplicación continua de uno en otro que tenga inversa continua, y para resolver el problema de construcción de aplicaciones continuas, se han desarrollado una serie de técnicas que permiten tales construcciones.

Un problema más complejo es demostrar que dos espacios no son homeomorfos. Para ello debe se debe probar que no existe una aplicación continua con inversa continua. Un metodo usual es establecer que alguna propiedad topológica como la compacidad, conexión, conexión local, metrizabilidad, base númerable, etc, sea cierta para un espacio pero no para el otro. Por ejemplo $[0, 1]$ no puede ser homeomorfo a $(0, 1)$, por que el primero es compacto y el otro no. Tampoco la recta real $\mathbb{R}$ puede ser homeomorfa al plano $\mathbb{R}^2$, quitando un punto de $\mathbb{R}^2$ se mantiene conexo y en cambio quitarlo de $\mathbb{R}$ esto no ocurre. Sin embargo, estas propiedades topológicas no bastan para probar que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$, si revisamos las propiedades topológicas mencionadas no nos distinguen entre ellos.”[Munkres]

En éste trabajo se hará una introducción a la topología algebraica, se presentan algunos invariantes topológicos de naturaleza algebraica, tal como el grupo fundamental, además se desarrollara la clasificacion de superficies compactas utilizando su representación planar.
Esto exige un cierto conocimiento de la teoría de grupos, y especialmente, de la teoría de grupos abelianos o conmutativos. Se trata, en esencia, de asociar ciertas estructuras algebraicas (especialmente ciertos grupos algebraicos y ciertos homomorfismos de grupos) a los espacios topológicos y a las aplicaciones continuas definidas entre estos espacios.

Estas propiedades garantizan que cada estructura algebraica asociada sea una construcción invariante por homeomorfismos. Si pensamos, por ejemplo, en el grupo fundamental, esto significa que si dos espacios topológicos son homeomorfos entonces sus grupos fundamentales de homotopía asociados son grupos isomorfos.

Esto sugiere asímismo, que si nos dan dos espacios topológicos, X e Y, cuyos grupos fundamentales de homotopía no son isomorfos, entonces los espacios X e Y no pueden ser topológicamente equivalentes, es decir, no puede existir un homeomorfismo que aplique uno de ellos sobre el otro.

En muchas ocaciones no es tan sencillo encontrar estos grupos fundamentales, por lo que se hará un estudio del teorema de Seifert-Van Kampen, para tener ua mejor herramienta para los grupos fundamentales de los espacios topologicos. Haremos uso de esté teorema para la clasificacioón de superficies compactas.

Esté trabajo se pretende realizar en 3 capitulos, en el primer capitulo la clasificacion de superficies compactas utilizando su representacioń planar en el segundo capitulo se define el grupo fundamental y sus propiedades y por último se hara la demostración del teorema de Seifert y Van Kampen.

2. Objetivos

2.1. Generales

1. Desarrollarlosconceptos y teoremas fundamentales de la topología algebraica: clasificación desuperficies, grupo fundamental y el teorema de Seifert-Van Kampen.
2. Conocer las aplicaciones que tiene el grupo fundamental y el teorema de Seifert y Van Kampen.

2.2. Específicos

1. Estudiar a detalle el grupo fundamental del circulo y ver la importancia queeste tiene.
2. Analizar los grupos fundamentales delos espacios topológicos y determinar si estos no son homeomorfos.
3. Desarrollar los metodos necesarios para clasificar las superficies compactas y encontrar el grupo fundamental de estas, utilizando el teorema de Seifert y Van Kampen.
4. Generar un documento que sirva de base para quienes quierán adentrarse en el estudio de la Topología algebraica.

3. Preliminares

En este capítulo se estudian algunos conceptos básicos de topología general, asi como algunos conceptos de teoría de grupos, los conceptos que se necesitan de teoria de grupos son: grupo libre, producto libre de grupos y representación de grupos mediante relaciones y generadores.

3.1. Topología General

3.1.1. Espacios topológicos

Definición 3.1. Sea X un conjunto no vacío. Una familia τ de subconjuntos de X es una topología para X si y sólo si τ verifica los axiomas siguientes:

a. X y $\emptyset$ pertenecen a τ.

b. La unión de cualquier subfamilia de τ pertenece a τ.

c. La intersección de cualquier subfamilia finita de τ pertenece a τ.

Los elementos de τ se llaman conjuntos abiertos de X; y X conjuntamente con la clase τ, es decir, el par (X, τ) es un espacio topológico.

$\tau_\infty = \wp(X)$, la clase de todos los subconjuntos de X cumple con a, b y c, por lo cual $\wp(X)$ es una topología para X. Entonces (X, τ_∞) es un espacio topológico, al cual llamaremos espacio topológico discreto.

Por otro lado, $\tau_0 = \{X, \emptyset\}$ es también una topología para X la cual se llama topológia trivial o topológia indiscreta. Al espacio (X, τ_0) se le llama espacio topológico indiscreto.

3.1.2. Subespacios topológicos

Definición 3.2. Sea (X, τ) un espacio topológico, $Y \subseteq X$. Consideremos el subconjunto τ_Y de $wp(Y)$ definido por $\tau_Y = \{U \cap Y / U \in \tau\}$. Es fácil demostrar que (Y, τ_Y) es un espacio topológico. A la topología τ_Y se le conoce como la topología inducida por τ sobre Y, y decimos que (Y, τ_Y) es un subespacio topológico de (X, τ).

Definición 3.3. Sean τ_1, τ_2 topologías definidas sobre un mismo conjunto no vacío X. Si todo subconjunto abierto en τ_1 de X es un subconjunto abierto en τ_2 se dice que τ_1 es menos fina que τ_2 o que τ_2 es más fina que τ_1, lo cual se denota por $\tau_1 \leq \tau_2$ si y sólo si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Es claro que τ_0 es la menos fina de todas las topologías para X, y también τ_∞ es la más fina de todas. En general, si τ es cualquier topología para X, entonces: $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_\infty$.

3.1.3. Espacios de Fréchet y de Hausdorff

El axioma T_2 fue introducido en 1914 por Hausdorff. El axioma T_1 se atribuye a Fréchet. El propósito principal de los axiomas de separación (como T_1 y T_2), es el de hacer los puntos y los conjuntos de un espacio topológicamente distinguibles.

Definición 3.4. Un espacio (X, τ) es de *Fréchet* o T_1, si para cada par de puntos distintos $x \neq y$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Definición 3.5. Un espacio (X, τ) es de Hausdorff o T_2 , si existen dos abiertos disjuntos U y V , tales que $x \in U$ e $y \in V$. Se suele decir que U y V separan x e y.

Lema 3.1. Si (X, τ) es T_2 , entonces es T_1 .

Proposición 3.1. Cualquier topología más fina que una T_1 (respectivamente, T_2), es T_1 (respectivamente, T_2).

3.1.4. Base y subbase de una topología.

Definición 3.6. Sean (X, τ) un espacio topológico. Una clase β de subconjuntos abiertos de X, $\beta \subset \tau$, es una base de la topología τ si y sólo si,

a) Todo conjunto abierto $H \in \tau$ es una unión de elementos de β.
   Equivalentemente, $\beta \subset \tau$ es una base de τ si y sólo si,

b) Para cualquier punto P que pertenece a un conjunto abierto H, existe un elemento $B \in \beta$ tal que $P \in B \subset H$.

Ejemplos

1. Los intervalos abiertos forman una base de la topología usual de la recta $\mathbb{R}$
2. Los discos abiertos forman una base de la topología usual del plano $\mathbb{R}^2$

Acontinuación presentamos dos conceptos topológicos los cuales seran de vital importancia para el desarrollo del trabajo.

1. Un espacio topologíco (X, τ) es $2AN$ o **dos-numerable** si y sólo si existe al menos una base numerable para la topología τ.
2. Un espacio topológico (X, τ) es separable si X contiene un subconjunto D el cual es denso y numerable.

Definición 3.7. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una clase δ de subconjuntos abiertos de X. $\delta \subset \tau$, es una subbase de la topología τ de X, si y sólo si las intersecciones finitas de elementos de δ determinan una base de τ

Ejemplo

La clase δ de todos los intervalos infinitos abiertos es ua subbase de la topología usual de $\mathbb{R}$

3.1.5. Funciones continuas

Se introduce aquí el concepto de igualdad topológica: cuando se define una estructura matemática sobre ciertos conjuntos, la igualdad de esta estructura debe obligar a que los conjuntos subyacentes sean equivalentes, por consiguiente, por lo menos, la igualdad entre las estructuras dadas debe ser realizada a través de una función biyectiva. Además de esta condición, se debe imponer que esta función y su inversa conserven la estructura. Así, la igualdad topológica vendrá dada por lo que se llamará un *homeomorfismo.* En algunas estructuras matemáticas (como los espacios vectoriales), si una función biyectiva f conserva la estructura, automáticamente se deduce que su inversa f^{-1} también lo hace. Sin embargo, esto no ocurre con los espacios topológicos.

Definición 3.8. Sean (X, τ) y (Y, τ^*) espacios topológicos. Una función f de X en Y es continua con respecto a τ y τ^*, si y sólo si, la imagen recíproca $f^{-1}(U)$ de todo subconjunto U abierto en Y es un subconjunto abierto de X, esto es f es continua si y sólo si, para todo $U \in \tau^*$, $f^{-1}(U) \in \tau$.

Ejemplos.

1. Los ejemplos más triviales de funciones continuas son la función identidad $I_X : X \to X$ y la función constante $X \to Y$ la cual envía cualquier punto de X a algun punto fijo en Y.
2. Si X es un espacio con la topología discreta, entonces cualquier función $f : X \to Y$ es continua. Esto es claro, ya que la imagen inversa de cual quier subconjunto abierto en Y es abierto en X.
3. Si Y es un espacio con la topología indiscreta, entonces cualquier función $f : X \to Y$ es continua.

Definición 3.9. Una aplicación $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es un homeomorfismo, si f es biyectiva, continua y de inversa f^{-1} continua. Se dice también que (X, τ_X) es homeomorfo a (Y, τ_Y).

Lema 3.2. $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ y $g : (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_Z)$ son homeomorfismos, entonces

(i) $f^{-1} : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$ es un homeomorfismo;

(ii) $g \circ f : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_Z)$ es un homeomorfismo.

Corolario 3.1. La relación "ser homeomorfos" es una relación de equivalencia sobre la familia de los espacios topológicos.

3.1.6. Topología Producto.

Sea $\{X_i, \tau_i\}_{i \in I}$ una colección de espacios topológicos y sea X el producto de los conjuntos X_i. ($X = \prod_i X_i$). La topología menos fina τ de X, respecto a la cual son continuas todas las proyecciones $\prod_i : X \to X_i$, recibe el nombre de topología producto. El conjunto producto X con la topología producto τ. (X, τ) es el espacio topológico producto. En otras palabras, la topología producto τ del conjunto producto $X = \prod_i X_i$ es la topología generada por las proyecciones.

Proposición 3.2. Dados (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos, el conjunto $\mathbf{B} = \{U \times V / U \in \tau_X, V \in \tau_Y$ es base para una topología en $X \times Y$.

Demostración. Sean B_1, B_2 en $\mathbf{B}$ con $B_1 = U_1 \times V_1$, $B_2 = U_2 \times V_2$. Dado $(m, n) \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ tal que $(m, n) \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$, con $B_3 \in \mathbf{B}$. $\square$

3.1.7. La topología cociente.

Definición 3.10. Sean X e Y espacios topológicos y sea $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se dice que es una **aplicación conciente** siempre que un subconjunto U de Y es abierto en Y si, y sólo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en X.

Esta condición es más fuerte que la continuidad; en ocasiones se le llama "continuidad fuerte". Una condición equivalente ocurre con conjuntos cerrados.
Dos clases especiales de aplicaciones cocientes son las *aplicaciones abiertas* y las *aplicaciones cerradas*. Una aplicación $f : X \to Y$ se dice que es una aplicación abierta si para cada conjunto abierto U de X, el conjunto $f(U)$ es abierto en Y. Se dice que es una aplicación cerrada si para cada conjunto cerrado A de X, el conjunto $f(A)$ es cerrado en Y.

Ahora utilizaremos las aplicaciones cociente para construir una topología sobre un conjunto

Definición 3.11. Si X es un espacio A un conjunto y $p : X \to A$ es una aplicación sobreyectiva, entonces existe exactamente una topología τ sobre A relativa a la cual p es una aplicación cociente; se denomina **topología cociente** inducida por p.

3.1.8. Espacios Conexos.

Definición 3.12. Dado un espacio topológico (X, τ) una separación para X la constituye un par A, B de subconjuntos no vacíos, abierto y tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplo

Sea $X = (0, 2) - \{1\}$ con la topología inducida τ_{us} sobre $\mathbb{R}$ y sean $A = (0, 1)$ y $B = (1, 2)$ intervalos de la recta. Es claro que A y B es una separación para X, pues $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$

Definición 3.13. Un espacio topológico (X, τ) es conexo si y sólo si no existe una separación para X.

Ejemplos.

1. $\mathbb{R}$ con la topología usual es un espacio conexo.
2. Todo espacio no unitario con la topología discreta es no conexo.

Ahora veamos un teorema que caracteriza un espacio conexo y que nos será de mucha utilidad para caracterizar estos espacios.

Teorema 3.1. Un espacio topológico (X, τ) es conexo si y sólo si, no existe una función $f : X \to \{0, 1\}$ que sea continua y sobreyectiva, en donde $\{0, 1\}$ está provisto de la topología discreta.

Demostración. Si X es conexo y existe $f : X \to \{0, 1\}$ continua y sobreyectiva, entonces los conjuntos $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ forman una separación para X, lo cual implica una contradicción.
Por otro lado, si X es no conexo existe una separación A, B para X. Si definimos $f : X \to \{0, 1\}$ como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in A \\ 1 & \text{para } x \in B \end{cases}$$

se tiene que f es continua y sobreyectiva lo cual contradice la hipotesis.

$\square$

Proposición 3.3. Sea (X, τ) un espacio topológico y A, B una separación de X. Si C es un subespacio conexo de X, entonces $C \subset A$ o $C \subset B$.

Demostración. Si se diera simultaneamente que $A \cap C \neq \emptyset$ y $B \cap C \neq \emptyset$, entonces estos dos conjuntos formarían una separación para C lo cual es una contradicción.

$\square$

Teorema 3.2. Sean (X, τ), (Y, τ^*) dos espacios topológicos con X conexo. Si $f : X \to Y$ es continua, entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración. Si $f(X)$ es no conexo, existe $g : f(X) \to \{0, 1\}$ continua y sobreyectiva. Por lo tanto $g \circ f$ es continua y sobreyectiva, lo cual es una contradicción al teorema 3.1 ya que X es conexo.

$\square$

Lema 3.3. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que el producto $f(0)f(1)$ es finito y no positivo, entonces existe un punto $t \in I$ tal que $f(t) = 0$.

Demostración. Supongamos que $f(t) \neq 0$ para todo $t \in I$; en particular $f(0)f(1) < 0$. Sea $g : I \to \{-1, 1\} = S^0$ definida por $g(t) = \dfrac{f(t)}{(|f(t)|)}$. Es claro que g es continua y sobreyectiva. Pero I es conexo mientras que S^0 no. Lo que contradice el hecho que la imagen continua de un espacio conexo es conexo.

$\square$

Teorema 3.3. Si (X, τ), (Y, τ^*) son espacios topológicos conexo, entonces el espacio producto $X \times Y$ con la topología producto es conexo.

Demostración. Si $X \times Y$ no es conexo, existe $f : X \times Y \to \{0, 1\}$ continua y sobreyectiva. Sean $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ tales que $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$.
Definamos $g : X \to \{0, 1\}$, $h : Y \to \{0, 1\}$ como $g(x) = f(x, b_2)$ y $h(y) = f(a_1, y)$ luego g y h son continuas, lo son sus proyecciones, con lo cual $g(X)$ y $h(Y)$ son conjuntos unitarios. Por ser $g(b_1) = f(b_1, b_2) = 1$, ademas $g(a_1) = 1$. Por otra parte como $h(a_2) = f(a_1, a_2) = 0$ y $h(b_2) = 0$, de donde se obtiene $f(a_1, b_2) = g(a_1) = 1 \neq 0 = h(b_2) = f(a_1, b_2)$, lo cual contradice la definición de f como función. Así que $X \times Y$ es conexo.

$\square$

Lema 3.4. Sean (X, τ), un espacio topológico y $\{C_i\}, (i \in I)$ una familia de subconjuntos conexos de X, con la propiedad que existe un índice $j \in I$ tal que para cada $i \in I$ tenemos que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Entonces $C = \bigcup C_i$, $(i \in I)$ es conexo.

Demostración. Si A, B es una separación de C, entonces para cada C_i tenemos que $C_i \subset A$ o $C_i \subset B$.
Si suponemos que $C_j \subset A$ entonces, para ningun índice i, C_i está contenido en B puesto que C_j no es disjunto de algún C_i. Así pues, todos los C_i estarían en A obligando a que B sea el conjunto vacío, lo cual contradice que A, B es una separación de C

$\square$

Teorema 3.4. Sea $X = \prod_{i\in I} X_i$, un espacio producto con la topología producto. Si cada espacio coordenado X_i es conexo, entonces X es conexo.

Demostración. Sea $c = (c_i)$, $(i \in I)$ un elemento arbitrario pero fijo de X. Sea C la unión de todos los conjuntos conexos en X que contienen al punto c. Como $\{c\}$ es conexo por el **lema 3.4** tenemos que C es conexo. Finalmente veamos que C es un subconjunto denso de X, con lo cual probamos que X es conexo por ser la adherencia de un conexo. Dado $J \subset I$, J finito, el conjunto

$$A_j = \prod_{j\in J} X_j \times \prod_{i\in J}\{c_i\}$$

es conexo ya que es homeomorfo a $\prod X_i$, $(i \in J)$ y contiene al punto c; además A_J está contenido en C, para cada J finito. Así pues, dado un abierto básico cualquiera $U = U_{i_1} \times U_{i_2} \times \cdots \times U_{i_n} \times \prod_{i\neq i_k} X_i$ en este caso $J = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ tenemos que $A_J \cap U \neq \emptyset$, esto es $C \cap U \neq \emptyset$, con lo cual C es denso en X.

□

3.1.9. Espacios Compactos

Definición 3.14. Una colección A de subconjuntos del espacio X se dice que **cubre** X o que es un **cubrimiento** de X, si la unión de los elementos de A coincide con X. Se dice que A es un **cubrimiento abierto** de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.

Definición 3.15. Un espacio X se dice que es compacto si de cada cubrimiento abierto A de X podemos extaer una subcolección finita que también cubre X.

Ejemplo 1

La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta, pues el cubrimiento de $\mathbb{R}$ por intervalos abiertos

$$A = \{(n, n+2)|n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ninguna subcolección finita que cubra a $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.

El siguiente subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto:

$$X = \{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Dado un cubrimiento abierto A de X, exite un elemento U de A que contiene al 0. El conjunto U contiene a todos los puntos de la forma $1/n$ execto a un número finito de ellos; elijamos para cada uno de estos puntos que no están en U un elemento de A que los contenga. La colección de estos elementos de A, jontos con el propio U, es una subcolección finita de A que cubre X.

Teorema 3.5. Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado del espacio compacto X. Dado un cubrimiento $\mathfrak{A}$ de Y por conjuntos abiertos en X, podemos considerar el cubrimiento abierto $\mathfrak{B}$ de X uniendo a $\mathfrak{A}$ el conjunto abierto $X - Y$, esto es,

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cup \{X - Y\}$$

Como X es compacto alguna subcolección finita cubre X. Si esta subcolección contiene al conjunto $X - Y$, lo descartamos. Si no es así lo dejamos como está. La colección resultante en cualquier caso es una subcolección finita de $\mathfrak{A}$ que cubre Y. □

Teorema 3.6. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ sobreyectiva y continua. Si X es compacto, entonces Y es compacto.

Demostración. Sea $\mathfrak{A}$ un cubrimiento de Y. Entonces $f^{-1}(\mathfrak{A})$ es un cubrimiento de X. Como X es compacto, existe un subcubrimiento finito digamos $\{f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \cdots, f^{-1}(A_n)$ de $f^{-1}(\mathfrak{A})$, además, como f es sobreyectiva se tiene que $f(f^{-1}(A_k)) = A_k$ para $1 \leq k \leq n$, y así $Y \subset A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup C_n$; luego U admite un subcubrimiento finito, y por tanto Y es compacto.

□

3.1.10. Invariantes topológicos

Definición 3.16. Una propiedad P del espacio (X, τ), se dice que es un invariante topológico si y sólo si, dados (Y, τ^*) y un homeomorfismo $h : (X.\tau) \to (Y, \tau^*)$, entonces (Y, τ^*) también satisface a P. Los invariantes topológicos nos permiten saber cuándo dos espacios son topológicamente equivalentes.

Corolario 3.2. Son topológicas las propiedades T_1 , T_2 , C_I , C_{II}, la separabilidad y la metrizabilidad.

Observación 3.1. Desde el punto de vista de la topología, dos espacios homeomorfos son indistinguibles. La importancia de esta propiedad radica en que, cuando se trabaje con propiedades topológicas, es posible reemplazar espacios complicados por otros homeomorfos a ellos, pero más sencillos de manejar.

3.2. Grupos libres y productos libres de grupos

3.2.1. Producto debil de grupos abelianos

Definición 3.17. Sean G_1 y G_2 grupos. Su producto que designamos por $G_1 \times G_2$, es el conjunto de todos los pares ordenados (g_1, g_2), $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ con la multiplicación definida componente a componente según la siguiente regla:

$$(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2').$$

La comprobación de que $G_1 \times G_2$ es, efectivamente, un grupo, es rutinaria.

De manera análoga podemos definir el producto de n grupos, $G_1, \ldots, G_n$ para todo entero positivo n; se designa por $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ o

$$\prod_{i=1}^{n} G_i.$$

Análogamente se podría definir el producto de una sucesión infinita de grupos $G_1, G_2, G_3, \ldots$,que se designa por

$$\prod_{i=1}^{\infty} G_i.$$

En cada caso la multiplicación está definida componente a componente. En teoría de conjuntos el producto cartesiano de cualquier colección (no vacia)de conjuntos está bien definido; no necesitamos restringirlos al caso de una colección numerable de conjuntos. Así pues, análogamente, podemos definir el producto de cualquier colección (no vacia) de grupos $\{G_i : i \in I\}$, donde I denota un conjunto de índices numerables o no. Formamos primero el producto cartesiano de los conjuntos subyacentes, y entonces definimos una multiplicación componente a componente: para cualquier par de elementos

$$g, g' \in \prod_{i \in I} G_i,$$

y cualquier índice $i \in I$, la i-ésima componente del producto gg' viene dada por

$$(gg')_i = (g_i)(g'_i).$$

Es decir, la i-ésima componente del producto es el producto de las iésimas componentes de los factores.

Sea $\{G_i : i \in I\}$ una colección arbitraria de grupos, y

$$G = \prod_{i \in I} G_i$$

su producto.

Definición 3.18. El producto débil[1] de la colección $\{G_i : i \in I\}$ es el subgrupo de su producto G formado por todos los elementos $g \in G$ tales que g_i es el elemento neutro de G_i salvo para un número finito de índices i.

Evidentemente, si $\{G_i : i \in I\}$ es una colección finita de grupos, su producto y su producto débil coinciden.

Si G designa indistintamente el producto o el producto débil de la colección $\{G_i : i \in I\}$ entonces para cada índice $i \in I$, tenemos un *monomorfismo natural* $\varphi_i : G_i \to G$ definido por la siguiente regla: Para todo $x \in G_i$ y todo índice $j \in I$,

$$(\varphi_i x)_j = \begin{cases} x & \text{si } j = i \\ 1 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

En el caso en que cada G_i sea un grupo abeliano, el siguiente teorema da una caracterización de su producto débil y los monomorfismos φ_i.

Teorema 3.7. Si $\{G_i : i \in I\}$ es una colección de grupos abelianos y G su producto débil, entonces, para cual quier grupo abeliano A y cualquier colección de homomorfismos.

$$\psi_i : G_i \to A, \;\; i \in I$$

existe un unico homomorfismo $f : G \to A$ tal que para todo $i \in I$, el siguiente diagrama es conmutativo :

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "f"] \\ G_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & \\ & A \end{tikzcd}$$

Demostración. Dados los ψ_i definimos f por la siguiente regla: para cada $x \in G$, $f(x)$ será el producto de los elementos $\psi_i(x_i)$ para todo $i \in I$. Puesto que $x_i = 1$ salvo para un número finito de índices i, este producto es finito; y puesto que todos los grupos son abelianos, el orden de multiplicación es indiferente. Así, $f(x)$ está bien definido, y se verifica fácilmente que f es un homomorfismo, que hace conmutativo el diagrama dado. Es fácil ver que f es el único homomorfismo con esta propiedad.

□

[1] Si los grupos G_i son abelianos y la operación en los grupos es aditiva, al producto débil suele llamársele «suma directa». En esta definición, dos grupos de la colección $\{G_i\}$ pueden ser isomorfos. Puede ocurrir incluso que todos los grupos de la colección sean isomorfos a uno dado.

Ahora veremos una proposición que establece que el teorema anterior caracteriza efectivamente el producto débil de grupos abelianos.

Proposición 3.4. Sea $\{G_i\}$, G y $\varphi_i : G_i \to G$ como en el teorema 3.7; sea G' un grupo abeliano **arbitrario** y $\varphi'_i : G_i \to G'$ una colección de homomorfismos tales que el teorema 3.7 sea válido al sustituir G y φ_i respectivamente por G' y φ'_i. Entonces existe un único isomorfismo $h : G \to G'$ tal que, para todo $i \in I$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "h"] & . \\ G_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi'_i"'] & & \\ & G' & \end{tikzcd}$$

Demostración. El teorema 3.7 nos asegura la existencia de un homomorfismo $h : G \to G'$ que hace conmutativo el diagrama requerido. Puesto que el teorema 3.7 también se puede aplicar a G' y φ'_i (por hipótesis) existe un único homomorfismo $k : G' \to G$ tal que, para todo índice $i \in I$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & G' \arrow[dd, "k"] & . \\ G_i \arrow[ur, "\varphi'_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & \\ & G & \end{tikzcd}$$

De esto, concluimos fácilmente que, para todo $i \in I$ son conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "kh"] & . \\ G_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & \\ & G & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & G' \arrow[dd, "hk"] & . \\ G_i \arrow[ur, "\varphi'_i"] \arrow[dr, "\varphi'_i"'] & & \\ & G' & \end{tikzcd}$$

Sin embargo, estos dos diagramas siguen siendo conmutativos si sustituímos kh por la aplicación identidad $G \to G$ en el primero, y hk por la identidad $G' \to G'$ en el segundo. Aplicando ahora la unicidad del homomorfismo f en el teorema 3.7, concluimos que kh y hk son ambos la identidad. Por tanto h y k son isomorfos cada uno inverso del otro.

□

3.2.2. Grupos abelianos libres.

Recordemos que si S es un subconjunto de un grupo G, se dice que S genera a G si todo elemento de G puede escribirse como producto de potencias positivas y negativas de S (La siguiente condición es equivalente: S no esta contenido en ningun subgrupo propio de G). Por ejemplo si G es un grupo cíclico de orden n,

$$G = \{x, x^2, x^3, \dots x^n = 1\},$$

entonces el conjunto $S = x$ genera a G.
Si el conjunto S ciertos productos de elementos de S pueden dar el elemento neutro de G. Por ejemplo,

(a) Si $x \in S$, entonces $xx^{-1} = 1$.

(b) Si G es un grupo cíclico de orden n generado por $\{x\}$, entonces $x^n = 1$.

Un producto de elementos de S que sea igual al elemento neutro se llama a menudo una relación entre los elementos del conjunto generador S. Con lenguaje impreciso pero expresivo, podemos distinguir dos tipos de relaciones entre los generadores: relaiones triviales, como en el ejemplo (a) que son consecuencia directa de los axiomas de grupo y verifican independientemente de la elección de G y S, y relaciones no triviales tales como en el ejemplo (b), que no son consecuencia de los axiomas de grupos, y dependen de la particular elección de G y S. Estas nociones nos llevan de manera natural a la siguiente definición:

Definición 3.19. Sea S un conjunto de generadores de un grupo G. Decimos que G esta libremente generado por S o que es un grupo libre sobre S, si no existen relaciones no triviales entre los elementos de S.

Por ejemplo, si G es un grupo cíclico infinito formado por todas las potencias positivas y negativas de un elemento x, entonces G es un grupo libre sobre el conjunto $S = \{x\}$. Esto nos da la idea que podemos determinar completamente un grupo por los elementos de un conjunto generador S y las relaciones no triviales entre ellos.

Daremos ahora una definición más precisa de grupo abeliano libre sobre un conjunto dado S.

Definición 3.20. Sea S un conjunto arbitrario. Un grupo abeliano libre sobre el conjunto S es un grupo abeliano F junto con una función $\varphi : F \to A$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dd, "f"] \\
S \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\
 & A
\end{tikzcd}.$$

Primero demostramos que esta definición caracteriza efectivamente los grupos abelianos libres sobre un conjunto dado S.

Proposición 3.5. Sean F y F' grupos abelianos libres sobre el conjunto S, respecto a las funciones $\varphi : S \to F$ y $\varphi' : S \to F'$ respectivamente. Entonces, existe un único isomorfismo $h : F \to F'$ que hace commutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dd, "h"] \\
S \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi'_i"'] & \\
 & F'
\end{tikzcd}.$$

Demostración. La demostración es análoga a la de la proposición 3.4 $\square$

Lo que hemos hecho hasta ahora es simplemente dar una definición, dado un conjunto S no está claro que exista un grupo abeliano libre sobre S más aún, incluso si F existe puede presentarse que la aplicación φ no tiene por qué ser inyectiva, o que F no pude estar generado por el conjunto $\varphi(S)$. Probaremos la existencia de F y definiremos por completo su estructura.

Como primer paso consideremos la siguiente situación. Supongamos que $\{S_i : i \in I\}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de S dos a dos disjuntos y tales que

$$S = \bigcup_{i \in I} S_i$$

Para cada índice $i \in I$, sea F_i un grupo abeliano libre sobre el conjunto S_i respecto a una función $\varphi_i : S \to F_i$. Designemos por F el producto débil de los grupos F_i y por $\eta_i : F_i \to F$ el monomorfismo natural. Puesto que los S_i son dos a dos disjuntos, podemos definir una función $\varphi : S \to F$ mediante:

$$\varphi|S_i = \eta_i \varphi_i.$$

Proposición 3.6. Con las hipótesis anteriores, F es un grupo abeliano libre sobre el conjunto S respecto a la función $\varphi : S \to F$.

En otras palabras el producto débil de una colección arbitraria de grupos abelianos libres es un grupo abeliano libre.

Demostración. Sea A un grupo abeliano y $\psi : S \to A$ una función. Tenemos que probar la existencia de un unico homomorfismo $f : F \to A$ tal que $\psi = f\varphi$.
Para cada índice $i \in I$, designemos por $\psi_i : S_i \to A$ la restricción de ψ al subconjunto S_i. Puesto que F_i es un grupo abeliano libre sobre el conjunto S_i, existe un único homomorfismo $f_i : F_i \to A$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & F_i \arrow[dd, "f_i"] \\
S_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & \\
 & A
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Por la propiedad fundamental del producto débil de grupos expresada en el teorema 5.1, existe entonces un único homomorfismo $f : F \to A$ que hace conmutativo el siguiente diagrama, para cada índice i,

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dd, "f"] \\
F_i \arrow[ur, "\eta_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \\
 & A
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Con estos dos diagramas conmutativos podemos formar un solo diagrama

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & F_i \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "f_i"] & F \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Puesto que $\varphi|S_i = \eta_i\varphi_i$, el siguiente diagrama resulta conmutativo para cada índice i,

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[rr, "\varphi_i|S_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & F \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Finalmente, puesto que $\psi_i = \psi|S_i$ para cada i, y $S = \bigcup S_i$, resulta $\psi = f\varphi$.

Para probar la unicidad, sea $f : F \to A$ un homomorfismo arbitrario que verifique la propiedad requerida. Puesto que $\eta_i : F_i \to F$ es un monomorfismo, existe un único homomorfismo arbitrario $f_i : F_i \to A$ que hace commutativo el diagrama 3.2. Por tanto, el diagrama 3.1 es conmutativo para todo i pues

$$f_i\varphi_i = f\eta_i\varphi_i = f(\varphi|S_i) = (\psi|S_i) = \psi_i.$$

Puesto que F_i es un grupo abeliano libre sobre S_i (respecto a φ_i) se sigue que f_i es única. La unicidad de f se deduce de la conmutatividad del diagrama 3.2. Para cada i, y del hecho de que F es el producto débil de los F_i

□

Vamos ahora a aplicar este teorema. Supongamos que

$$S = \{x_i : i \in I\}.$$

Para cada índice i, designamos por S_i el conjunto $\{x_i\}$ que tiene un solo elemento, y por F_i un grupo cíclico infinito formado por tadas las potencias positivas y negativas del elemento x_i:

$$F_i = \{x_i^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

Designemos por $\varphi_i : S_i \to F_i$ la inclusión, esto es, $\varphi_i(x_i) = x_i^i$. Está claro que F_i es un grupo abeliano libre sobre el conjunto S_i. Así pues se verifican todas las hipótesis de la proposición 3.6. Podemos, por tanto, afirmar que un grupo abeliano libre sobre un conjunto S es un producto débil de una colección de grupos cíclicos infinitos, con el cardinal de la colección igual al de S.
Puesto que F es el producto débil de los F_i, todo elemento $g \in F$ es de la forma siguiente: para cada índice i, la $i - sima$ componente g_i de g, es $g_i = x_i^{n_i}$, donde cada n_i es un entero y $n_i = 0$ salvo para un número finito de índices i.
Más aún, la función φ está definida por la siguiente regla: para cada índice $j \in I$,

$$(\varphi_i x)_j = \begin{cases} x_i^1 & \text{si } i = j \\ x_i^0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

A partir de esta fórmula resulta evidente que φ es inyectiva.
Puesto que φ es inyectiva, podemos identificar cada $x_i \in S$ con su imagen $\varphi(x_i) \in F$. Entonces S puede considerarse como un subconjunto de F, y está claro que podemos expresar unívocamente cada elemento $g \neq 1$ de F de la forma

$$g = x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_k}^{n_k} \tag{3.5}$$

donde los indices $i_1, i_2, \dots i_k$ son todos distintos $\dots$ y $n_1, n_2, \dots n_k$ son enteros no nulos. Esta expresión para un elemento g es única salvo el orden de los factores. Más aún cada producto de este tipo de los x_i representa un único elemento $g \neq 1$ de F. Resulta, pues, claramente, que F está generado por el subconjunto $S = \varphi(S)$.
Esta identificación de S y $\varphi(S)$ suele hacerse a menudo en el estudio de grupos abelianos libres. Cuando esto se hace, $\varphi : S \to F$ resulta una inclusión, y a menudo ni tan siquiera se menciona.

Otra manera de abordar el tema de los grupos abelianos libres sería decir que un grupo abeliano F es libre sobre el conjunto $\{x_i : i \in I\} \subset F$ si todo elemento $g \neq 1$ de F admite una expresión de la forma (3.5), unívocamente determinada salvo el orden de los factores. Este procedimiento sería algo más rápido y fácil que el que hemos elegido. Sin embargo, tiene la desventaja de que no puede generalizarse a grupos no abelianos y a otras situaciones que son, de hecho, las que nos interesarán.

La siguiente proposición da la idea de la importancia de los grupos abelianos libres.

Proposición 3.7. Todo grupo abeliano es imagen homomórfica de un grupo abeliano libre; es decir, dado un grupo abeliano cualquiera A, existe siempre un grupo abeliano libre F y un epimorfismo $f : F \to A$.

Demostración. Sea S un conjunto generador de A (podríamos tomar por ejemplo $S = A$) y sea F un grupo abeliano libre sobre S respecto a la función $\varphi : S \to F$ entonces existe un homomorfismo f que hace conutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dd, "f"] \\
S \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "i"'] & \\
 & A
\end{tikzcd}$$

donde i es la función inclusión, probamos que f es sobreyectiva. Sea $a \in A$ entonces existen $x_1, x_2, \dots, x_k \in S$ y $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$ tales que $a = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$ sea $g = \varphi(x_1)^+ m_1 \varphi(x_2) m_2 \dots \varphi(x_k)^{m_k} \in F$ luego

$$\begin{array}{rcl}
f(g) & = & f(\varphi(x_1)^{m_1} \varphi(x_2)^{m_2} \dots \varphi(x_k)^{m_k}) \\
 & = & f(\varphi(x_1))^{m_1} f(\varphi(x_2))^{m_2} \dots f(\varphi(x_k))^{m_k}) \\
 & = & i(x_1)^{m_1} i(x_2)^{m_2} \dots i(x_k)^{m_k} \\
 & = & x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k} \\
 & = & a
\end{array}$$

entonces f es un epimorfismo.

Sea $S \subset A$ un conjunto de generadores de A (por ejemplo podemos tomar $S = A$), y F un grupo abeliano libre sobre S respecto a una función $\varphi : S \to F$. Designemos por $\psi : S \to A$ la inclusión. Por definición, existe un homomorfismo $f : F \to A$ tal que $f\varphi = \psi$. Puesto que S ha sido elegido como un conjunto de generadores de A, f es un epimorfismo. $\square$

Esta proposición da un significado preciso a la noción de $\ll$ relación no trivial entre los generadores S$\gg$ mencionada anteriormente. Supongamos que A, S, F y f tiene el mismo significado que en la proposición anterior; definimos una relación no trivial entre el conjunto de generadores S, como un elemento cualquiera $r \neq 1$ del núcleo de f. Si

$\{r_i : i \in I\}$ es una colección arbitraria de tales relaciones, y r es una *consecuencia* de las relaciones r_i. Esto implica que r puede expresarse como producto de las r_i y sus inversos. Si la colección $\{r_i : i \in I\}$ genera el núcleo de f, entonces el grupo está completamente determinado, salvo un isomorfismo, por el conjunto de generadores de S y el conjunto de relaciones $\{r_i : i \in I\}$, pues A es isomorfo al grupo cociente de F, módulo del subgrupo generado por las r_i.
Está claro que, si S y S' son conjunto con el mismo cardinal, y F y F' grupos abelianos libres sobre S y S' respectivamente, entonces F y F' son isomorfos.
Demostraremos ahora que el recíproco también es cierto, por lo menos para el caso de conjuntos finitos. Para ello necesitamos la siguiente definición: Si G es un grupo y n un entero positivo arbitrario, designamos por G^n el subgrupo de G generado por el conjunto

$$\{g^n : g \in G\}$$

Si el grupo G es abeliano entonces el conjunto $\{g^n : g \in G\}$ es ya un subgrupo.

Lema 3.5. Sea F un grupo abeliano libre sobre un conjunto de k elementos. Entonces el grupo cociente F/F^n es un grupo finito de orden n^k.

Demostración. Si $F = \{x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k} : p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}\}$ entonces $F^n = \{(x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k})^n : p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}\}$

Sea $aF^n \in F/F^n$ entonces $aF^n = (x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k})F^n$; por el algoritmo de la división tenemos que $p_i = q_i n + r_i$ con $0 \leq r_i \leq n$ de aquí

$$\begin{aligned} x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k} &= x_1^{q_1 n + r_1} \dots x_k^{q_k n + r_k} \\ &= (x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k})(x_1^{q_1 n} \dots x_k^{q_k n}) \\ &= (xr_{1 1} \dots x_k^{r_k})(xq_{1 1} \dots xq_r)^n \end{aligned}$$

además $(x_1^{q_1} \dots x_r^{q_r})^n \in F^n$ por lo que $aF^n = (x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k})F^n$. Ahora si probamos que los elementos de $\{(xr_{1 1} \dots x_k^{r_k})F^n : 0 \leq r_i \leq n\}$ son distintos entre sí habremos terminado.

Supongamos que $(xr_{1 1} \dots x_k^{r_k})F^n = (x^{s_1} 1 \dots x_k^{s_k})F^n$ con $0 < r_i$, $s_i < n$ para toda $i = 1, \dots, k$ entonces

$$(x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k})(x_1^{s_1} \dots x_k^{s_k})^{-1} \in F^n$$

luego

$$(x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k})(x_1^{s_1} \dots x_k^{s_k})^{-1} = (x_1^{t_1} \dots x_k^{t_k})^n \in F^n$$

así que $x_1^{r_1 - s_1} \dots x_k^{r_k - s_k} = xnt_{1 1} \dots x_k^{nt_k}$. Como estamos suponiendo que los x_i son distintos, $nt_i = r_i - s_i$. Se sigue de las restricciones de r_i y de s_i que $|r_i - s_i| < n$ pues $0 \leq r_i < n$ implica que $-n < -r_i \leq 0$ y también sabemos que $0 \leq s_i < n$ sumando estas desigualdades tenemos $-n < s_i - r_i < n$ lo que implica que $|r_i - s_i| < n$, además $|r_i - s_i| = |nt_i|$ entonces $|nt_i| < n$ y entonces $t_i = 0$ y se concluye que $r_i = s_i$. □

Corolario 3.3. Sean S y S' conjuntos finitos de distinto cardinal, y F y F' grupos abelianos libres sobre S y S' respectivamente. Entonces F y F' no son isomorfos.

Demostración. La demostración es por contradicción. Todo isomorfismo entre F y F' induciría un isomorfismo entre los grupos cocientes F/F^n y F'/F'^n en contradicción con el lema anterior. □

Sea F un grupo abeliano libre sobre el conjunto S. El cardinal de S se llama el *rango* de F. Hemos probado que dos grupos abelianos libres son isomorfos si y sólo si tienen el mismo rango, por lo menos en el caso en que uno de ellos es de rango finito.

Ahora haremos un breve estudio de la estructura de los grupos abelianos finitamente generados. Sea A unn grupo abeliano; se ve fácilmente que el conjunto de todos los elementos de A que tienen orden finito tienen un subgrupo, llamado *subgrupo de torsión de* A. Si el subgrupo de torsión consta solo del elemento 1, se dice que A es un grupo abeliano *sin torsión*. Por otra parte, si todo elemento de A tiene orden finito, A se llama un grupo de torsión. Si designamos el grupo de torsión por T, entonces es, evidentemente, A/T sin torsión. Está cloro que si A y A' son isomorfos entonces también lo son sus grupos de torsión T y T' y sus grupos cocientes sin torsión A/T y A'/T'. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general: no podemos afirmar que A sea isomorfo a A' si $T \approx T'$ y $A/T \approx A'/T'$. Sin embargo, para grupos abelianos generados por un conjunto finito tenemos el siguiente teorema que nos describe completamente su estructura:

Teorema 3.8. (a) Sea A un grupo abeliano finitamente generado y T su subgrupo de torsión. Entonces T y A/Tson también finitamente generados, y A es isomorfo al producto directo de $T \times A/T$. Por tanto la estructura de A está completamente determinada por su subgrupo de torsión.

(b) Todo grupo abeliano sin torsión y finitamente generado es un grupo abeliano libre y de rango finito.

(c) Todo grupo abeliano de torsión T finitamente generado es isomorfo a un producto $C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$, donde cada C_i es un grupo cíclico finito de orden ϵ_i tal que, para cada $i = 1, 2, \ldots, n-1$, ϵ_i es un divisor de ϵ_{i+1}. Además, los enteros $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ están unívocamente determinados por el grupo de torsión T y determinan completamente su estructura.

Los números $\epsilon_i, \epsilon_2, \ldots \epsilon_n$ se llaman los coeficientes de torsión de T, y más en general, si T es el grupo de torsión de A. Análogamente, el rango del grupo libre A/T se llama el rango de A. Con está terminología podemos resumir el teorema 3.8 diciendo que el rango y los coeficientes de torsión forman un conjunto completo de invariantes para todo grupo abeliano finitamente generado. Además el teorema 3.8 nos asegura que todo grupo abeliano finitamente generado es un producto directo de grupos cíclicos, pero nos dice aún mucho más.

Teorema 3.9. Sea F un grupo abeliano libre sobre el conjunto S y F' un subgrupo de F. Entonces F' es un grupo abeliano libre sobre un cierto conjunto S', y el cardinal de S' es menor o igual que el de S.

3.2.3. Producto libre de grupos.

El producto libre de una colección de grupos es totalmente análogo para grupos arbitrarios (esto es, no necesariamente abelianos) al producto débil para grupos abelianos. (Hay que hacer notar que todos los grupos considerados que los grupos que trataremos pueden ser abelianos o no, salvo cuando exprese lo contrario.)

Definición 3.21. Sea $\{G_i : i \in I$ una colección de grupos y supongamos que, para cada índice i, tenemos un homomorfismo φ_i de $G_i$en un grupo fijo G. Diremos que G es el *producto libre* de los G_i (respecto a los homomorfismos φ_i) si y sólo si se verifica la siguiente condición: Para todo grupo H y homomorfismo

$$\psi_i : G_i \to H, \ i \in I$$

existe un único homomorfismo $f : G \to H$ tal que, para todo $i \in I$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dd, "f"] \\
G_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & \\
 & H
\end{tikzcd}$$

Ahora veremos una proposición de la unicidad sobre los productos libres:

Proposición 3.8. Supongamos que G y G' son productos libres de una colección $\{G_i : i \in I\}$ de grupos (respecto a los homomorfismos $\varphi_i : G_i \to G$ y $\varphi_i' : G_i \to G'$, respecttivamente). Entonces existe un único isomorfismo $h : G \to G'$, tal que, para todo $i \in I$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "h"] \\ G_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i'"'] & \\ & G' \end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración es casi palabra por palabra la proposición 3.4 □

Aunque hemos definido productos libres de grupos y demostrado su unicidad, aún falta probar su existencia. Demostraremos ahora que cada uno de los homomorfismos φ_i que aparecen en la definición, es un monomorfismo, que el producto libre está generado por la unión de las imagenes $\varphi_i(G_i)$, y penetraremos más detalladamente en la estructura algebraica de un producto libre.

Teorema 3.10. Dada una colección arbitraria $\{G_i : i \in I\}$ de grupos existe siempre su producto libre.

Demostración. Definimos como una *palabra* en los G_i a una sucesión finita $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde cada x_k pertenecen a uno de los grupos G_i, dos términos consecutivos en la sucesión *pertenecen a distintos grupos y no hay ningún término que sea el neutro de algún* G_i. El entero n se llama la *longitud* de la palabra. Consideramos también la palabra vaciá, es decir, la única palabra de longitud 0. Designemos por W el conjunto de todas estas palabras.
Para cada índice i, definimos ahora una operación por la izquierda del grupo G_i sobre el conjunto W. Sea $g \in G_i$ y $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$: hemos de definir $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Caso 1: $x_1 \notin G_i$. Entonces, si $g \neq 1$,

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (g, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Podemos también definir la acción de g sobre la palabra vacía por una fórmula similar, es decir, $g() = (g)$. Si $g = 1$, entonces,

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Caso 2: $x_1 \in G_i$. Entonces,

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} (gx_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{si } gx_1 \neq 1, \\ (x_2, \ldots, x_n) & \text{si } gx_1 = 1. \end{cases}$$

[Si $gx_1 = 1$ y $n = 1$, se sobrentiende, desde luego, que $g(x_1)$ es la palabra vacía.]

Debemos ahora comprobar que se cumplen las condiciones para que G_i sea un grupo de operaciones por la izquierda sobre W; es decir, que para toda palabra w,

$$1w = w,$$

$$(gg')w = g(g'w).$$

Está claro que cada uno de los grupos G_i actúa efectivamente. Así, cada elemento g de G_i puede considerarse como una permutación del conjunto W y G_i puede considerarse como un subgrupo del grupo de todas las permutaciones de W. Designemos por G el subgrupo de todas las permutaciones de W generado por la únion de los G_i. Entonces, G contiene a cada G_i como subgrupo; designemos por

$$\varphi_i : G_i \to G$$

la correspondiente inclusión.

Todo elemento de G puede expresarse como un producto finito de elementos de los G_i. En este producto, si dos factores consecutivos pertenecen al mismo G_i, evidentemente puede ser expresado como un solo factor. Así, cada elemento $g \neq 1$ de G puede expresarse como un producto finito de elementos de los G_i en forma reducida, o sea, que no existen dos factores consecutivos que pertenezcan al mismo grupo, y ningún factor es el elemento neutro. Afirmamos ahora que la expresión de todo elemento $g \neq 1$ de G en forma reducida es única: Si

$$g = g_1 g_2 \dots g_m = h_1 h_2 \dots h_n,$$

donde ambos productos tienen la forma reducida, entonces $m = n$ y $g_i = h_i$ para $1 \leq i \leq m$. Para ver esto, consideremos el efecto de las permutaciones $g_1 g_2 \dots g_m$ y $h_1 h_2 \dots h_n$ sobre la palabra vacía; resultan entonces las palabras $(g_1, g_2, \dots, g_m)$ y $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ respectivamente. Puesto que estas dos palabras deben ser iguales las dos expresiones anteriores son idénticas.
Es inmediato cómo se forma el inverso de un elemento de G escrito en forma reducida y cómo se obtiene el producto de dos de tales elementos.
Es ahora fácil comprobar que G es el producto libre de los G_i restecto a los φ_i. En efecto, sea H un grupo arbitrario y $\psi : G_i \to H$, $i \in I$, una colección arbitraria de homomorfismos. Definimos una función $f : G \to H$ de la siguiente manera: sea

$$g = g_1 g_2 \dots g_m,\ g_k \in G_{i_k},\ 1 \leq k \leq m$$

un elemento arbitrario $g \neq 1$ en forma reducida y pongamos entonces

$$f(g) = (\psi_{i_1} g_1)(\psi_{i_2} g_2) \dots (\psi_{i_m} g_m).$$

Desde luego suponemos $f(1) = 1$. Está claro que f es un homomorfismo y que hace conmutativos todos los diagramas requeridos, y también que f es el único homomorfismo que hace conmutativos estos diagramas. $\square$

Puesto que los homomorfismos $\varphi_i : G_i \to G$ son monomorfismos, se suele identificar cada grupo G_i con su imagen φ_i, y considerarlo como un subgrupo del producto libre G. Entonces, φ_i es la inclusión, y normalmente no es necesario mencionarla explicitamente.

Los dos puntos más importantes a recordar de la demostración del teorema precedente son las siguientes:

(a) Todo elemento $g \neq 1$ del producto libre puede expresarse unívocamente como un producto en forma reducida de los elementos de los grupos G_1.

(b) Las reglas para multiplicar dos de tales productos en forma reducida (o para formar sus inversos) son las obvias y naturales.

Ejemplo 3.1. Sean G_1 y G_2 grupos cíclicos de orden 2, $G_1 = \{1, x_1\}$ y $G_2 = \{1, x_2\}$. Entonces todo elemento $g \neq 1$ de su producto libre puede escribirse unívocamente como un producto de x_1 y x_2 con los factores x_1 y x_2 alternados. Por ejemplo,

$$x_1, x_1x_2, x_1x_2x_1, x_1x_2x_1x_2, etc.,$$

$$x_2, x_2x_1, x_2x_1x_2, x_2x_1x_2x_1, etc.$$

Obsérvese que los elementos x_1x_2 y x_2x_1 son ambos de orden infinito, y distintos. Además la gran diferencia entre el producto directo o producto débil de G_1 y G_2 y su producto libre en este caso. El producto directo es un grupo abeliano de orden 4, mientras que el grupo libre es un grupo no abeliano con elementos de orden infinito.

Notación: Al producto libre de los grupos $G_1, G_2, \ldots G_n$ lo designamos por $G_1 * G_2 * \ldots * G_n$ o

$$\prod_{1 \leq i \leq n} *G_i.$$

Al producto libre de una familia $\{G_i : i \in I\}$ de grupos lo designaremos por

$$\prod_{i \in I} *G_i.$$

3.2.4. Grupos libres

La definición de grupos libres es totalmente análoga a la de grupo abeliano libre.

DEFINICIÓN 3.22. Sea S un conjunto arbitrario. Un grupo libre sobre el conjunto S (o grupo libre generado por S) es un grupo F junto con una función $\varphi : S \to F$ que verifica las siguientes condiciones: Para todo grupo H y toda función $\psi : S \to H$, existe un único homomorfismo $f : F \to H$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "f"] \\ S \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & H \end{tikzcd}$$

Exactamente igual que en los casos anteriores, esta definición caracteriza completamente un grupo libre.

PROPOSICIÓN 3.9. Sean F y F' grupos libres sobre el conjunto S respecto a las funciones $\varphi : S \to F$ y $\varphi' : S \to F'$, respectivamente. Entonces existe un único isomorfismo $h : F \to F'$ que hace monmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "h"] \\ S \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & \\ & F' \end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 3.10. Supongamos que $S = \bigcup_{i \in I} S_i$, que los conjuntos S_i son ajenos por pares, no vacíos y para cada $i \in I$, sea F_i un grupo libre sobre S_i con respecto a una función $\varphi_i : S_i \to F_i$. Si F es el producto libre de los grupos F_i con respecto a los monomorfismos $\eta_i : F_i \to F$, $\eta_i(g) = \theta_g$ y si definimos $\varphi : S \to F$ como $\varphi|_{S_i} = \eta_i \circ \varphi_i$. Entonces F es el grupo libre sobre el conjunto S respecto a la función φ.

Demostración. La demostración de esta proposición es idéntica a la proposición 3.6 $\square$

Esta propocisión nos quiere decir que el producto libre de grupos libres es un grupo libre.

Proposición 3.11. Sea $S = \{x_i\}_{i\in I}$ y para cada $i \in I$ sea $S_i = \{x_i\}$ el conjunto que sólo contiene al elemento x_i. Denotemos por F_i al grupo cíclico infinito generado por x_i

$$F_i = \{x_i^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

y sea $\varphi_i : S_i \to F_i$ la inclusión. Entonces F_i es un grupo libre sobre el conjunto S_i respecto a φ_i.

Corolario 3.4. Dado un conjunto S existe su grupo libre.

Demostración. Aplicando las dos proposiciones anteriores obtenemos que F es un grupo libre sobre S con respecto a la función φ $\square$

Ahora estudiaremos la relación entre grupos libres y grupos abelianos libres. Recordemos que si x e y son dos elementos arbitrarios de un grupo G, $[x, y]$ designa el elemento $xyx^{-1}y^{-1} \in G$ y se llama el *conmutador* de x e y (en el orden dado). $[G, G]$ o G' designa el subgrupo de G generado por todos los conmutadores; se denomina subgrupo conmutador (o subgrupo derivado) de G.

Lema 3.6. Sea F un grupo libre sobre S respecto a la función $\varphi : S \to F$ y denotemos por $\pi : F \to F/[F, F]$ la proyección natural de F sobre su grupo cociente. Entonces $F/[F, F]$ es un grupo abeliano libre sobre el conjunto S con respecto a la función $\pi \circ \varphi : S \to F/[F, F]$.

Demostración. Sea A un grupo abeliano y $\psi : S \to A$ una función. Dado que F es un grupo libre sobre S respecto a la función $\varphi : S \to F$ se tiene la existencia de un único homomorfismo $f : F \to A$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dd, "f"] \\
S \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\
& A
\end{tikzcd}$$

ahora definamos $\overline{f} : F/[F, F] \to A$ tal que

$$\overline{f}(a[F, F]) = f(a)$$

veamos primero que está bien definido, supongamos que $a[F, F] = a'[F, F]$, luego $a(a')^{-1} \in [F, F]$, observemos que cualquier elemento de $[F, F]$ es enviado al 1 bajo f, basta probarlo para los generadores de $[F, F]$

$$f(xyx^{-1}y^{-1}) = f(x)f(y)f(x)^{-1}f(y)^{-1} = 1$$

pues A es abeliano. Luego

$$1 = f(a(a')^{-1}) = f(a)f(a')-1$$

y entonces $f(a) = f(a')$, y por lo tanto

$$\overline{f}(a[F, F]) = \overline{f}(a'[F, F])$$

Así que $\overline{f}$ está bien definida.

Probemos que $\overline{f}$ es un homomorfismo. Sean $a[F, F]$, $a'[F, F] \in F/[F, F]$ entonces

$$\begin{aligned}\overline{f}(a[F,F]a'[F,F]) &= \overline{f}(aa'[F,F])\\ &= f(aa')\\ &= f(a)f(a')\\ &= \overline{f}(a[F,F])\overline{f}(a'[F,F])\end{aligned}$$

así que $\overline{f}$ es un homomorfismo; además hace conmutar el diagrama siguiente por su misma definición

$$\begin{tikzcd} & F/[F,F] \arrow[dd, "\overline{f}"] \\ F \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & A \end{tikzcd}$$

y es el único con esa propiedad, pues supongamos que $\widehat{f} : F/[F,F] \to A$ también hace conmutar este diagrama luego para cada $a \in F$ se tiene que

$$\overline{f}(a[F,F]) = f(a) = \widehat{f}(a[F,F])$$

luego $\widehat{f} = \overline{f}$ Los dos diagramas anteriores inducen este diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & F/[F,F] \arrow[dd, "\overline{f}"] \\ S \arrow[ur, "\pi\circ\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & A \end{tikzcd}$$

veamos que es $\overline{f}$ es el único que hace conmutar el diagrama anterior, supongamos que $\widehat{f}$ también lo hace conmutar, entonces para cada $x \in S$, $\widehat{f} \circ \pi(\varphi(x)) = \psi(x) = f(\varphi(x))$, la segunda igualdad es por el diagrama (I) y como $\varphi(S)$ genera a F tenemos que $\widehat{f} \circ \pi = f$ pero por el diagrama (II) $\overline{f}$ es la única tal que $\overline{f} \circ \pi = f$ esto significa que $\widehat{f} = \overline{f}$ por lo tanto, $F/[F,F]$ es un grupo abeliano libre sobre S. $\square$

Corolario 3.5. Si F y F' son grupos libres sobre conjuntos finitos S y S' entonces F y F' son isomorfos si y sólo si tienen el mismo cardinal.

Definición 3.23. Si F es un grupo libre sobre S entonces definimos el rango de F como el número cardinal de S.

3.2.5. Presentación de grupos por generadores y relaciones

Empezamos con un resultado análogo a la proposición 3.7 para grupos arbitrarios.

Proposición 3.12. Todo grupo es imagen homomórfica de un grupo libre. Para ser precisos, si S es un conjunto arbitrario de generadores del grupo G y F un grupo libre sobre S entonces la inclusión $i : S \to G$ determina un epimorfismo de F a G.

Demostración. La prueba de esta proposición es análoga a la proposición 3.7. $\square$

Esta proposición nos permite dar una definición de relación no trivial entre generadores por un método análogo al de los grupos abelianos, la diferencia en es este caso general es que no cualquier subgrupo puede ser el núcleo de un homomorfismo, sólo los grupos normales, así que haremos una modificación en está definición.

Definición 3.24. Sea S un conjunto de generadores del grupo G y F un grupo libre sobre S respecto a la función $\varphi : S \to F$. Sea $\psi : S \to G$ la inclusión y $f : F \to G$ el único homomorfismo tal que $\psi = f \circ \varphi$, definimos una relación entre los generadores de S para el grupo G como un elemento no trivial $r \in ker(f)$.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "f"] \\ S \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

Definición 3.25. Si tenemos $\{r_i\}_{i\in I}$ una familia de relaciones entonces se dice que una relación r es consecuencia de los $\{r_i\}_{i\in I}$ si r pertenece al menor subgrupo normal que contiene a los $\{r_i\}_{i\in I}$. Si cualquier relación es consecuencia de $\{r_i\}_{i\in I}$ se dice que $\{r_i\}_{i\in I}$ es un conjunto completo de relaciones.

En vista de la definición anterior es conveniente denotar por $\overline{\langle\{r_i\}_{i\in I}\rangle}$ al menor subgrupo normal que contiene a $\{r_i\}_{i\in I}$. Si $\{r_i\}_{i\in I}$ es un conjunto completo de relaciones, entonces $ker(f)$ está completamente determinada por $\{r_i\}_{i\in I}$, ya que es la intersección de todos los subgrupos normales que contienen a $\{r_i\}_{i\in I}$. Así que G está completamente determinado, salvo isomorfissmos, por el conjunto generador S y el conjunto $\{r_i\}_{i\in I}$ pues G es isomorfo al cociente $F/\overline{\langle\{r_i\}_{i\in I}\rangle}$.

Definición 3.26. Una presentación de un grupo G es un par $(S, \{r_i\}_{i\in I})$ donde S es un conjunto generador de G y $\{r_i\}_{i\in I}$ es un conjunto completo de relaciones entre los generadores. La presentación se dice finita si tanto S y I son finitos y el grupo G se llama de presentación finita si posee al menos una presentación finita.

Nótese que culaquier grupo admite muchas presentaciones distintas, recíprocamente dadas dos presentaciones es, en general, difícil saber si los grupos que definen son isomorfos.

Ejemplo 3.2. Un grupo cíclico de orden n admite una presentación $(\{x\}, x^n)$.

Demostración. Sea G un grupo cíclico de orden n, digamos

$$G = \{x, x^2, x^3, \ldots, x^n = 1\}$$

entonces por lo sabido de grupos libres tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \langle\varphi(x)\rangle = F \arrow[dd, "f"] \\ S = \{x\} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

donde ψ es la inclusión y f es un epimorfismo por la proposición 3.12 Como $F = \langle\varphi(x)\rangle$ es claro que F es el cíclico infinito; y $f(\varphi(x)^k) = x^k$ Luego

$$\begin{aligned} ker(f) &= \{x^k : f(x^k) = 1\} \\ &= \{\varphi(x)^k : f(\varphi(x)^k) = 1\} \\ &= \{\varphi(x)^k : \exists m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } f(\varphi(x)^k) = x^{mn}\} \\ &= \{\varphi(x)^k : \exists m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x^k = x^{mn}\} \\ &= \{\varphi(x)^k : \exists m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } k = mn\} \\ &= \langle \varphi(x^n) \rangle \end{aligned}$$

así una presentación para G es $(x, \varphi(x)^n)$, o bien, abusando de la notación, como lo haremos de ahora en adelante, aprovechando que φ es inyectiva podemos escribir la presentación de G así (x, x^n)

$\square$

4. Variedades bi-dimensionales

En topología se buscá estudiar las propiedades de los espacios topológicos, es de mucha utilidad clasificar a dichos espacios, en este capítulo estudiaremos un teorema de clasificación de superficies compactas.

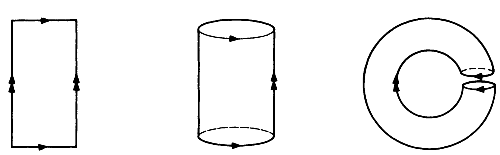
4.1. Definición y ejemplos de n-variedades.

Definición 4.1. Sea n un entero positivo. Una *variedad n-dimensional* es un espacio de Hausdorff (es decir un espacio que satisface el axioma T_2 de separación), tal que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a la bola abierta n-dimensional $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ Por brevedad la llamaremos *n-variedad.*

Una superficie topológica es una variedad de dimensión dos. Los primeros ejemplos de superficies son el plano R^2, la esfera S^2, el toro T^2, y en general, cualquier abierto de una superficie sigue siendo una superficie.

Vamos estudiar las propiedades de las superficies compactas. Para su estudio, es conveniente tener una manera uniforme de representarlas.

Ejemplo 4.1. El toro T^2 se define como el cociente de un cuadrado en R^2, identificando aristas por pares de una determinada manera, como se muestra en la figura.

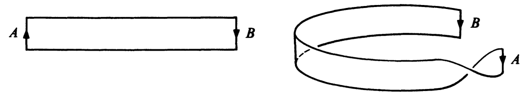


4.2. Variedades orientables y no orientables.

Las variedades conexas de dimensión n, $n > 1$, están divididas en dos clases: orientables y no orientables.

Definición 4.2. Un variedad de dimensión 2 conexa es orientable si todo camino cerrado conserva la orientación; una variedad conexa de dimension 2 es no orientanble si existe un camino que invierte la orientacion

Como un claro ejemplo de una variedad no orientable es la famosa banda se Möbius



4.3. Ejemplos de 2-variedades conexas compactas.

El ejemplo más sencillo de superficie compacta es la esfera S^2; otro ejemplo muy importante es el toro, el toro puede describirse como cualquier superficie homeomorfa a la superficie de una rosquilla o de un anillo sólido.

El toro puede describirse de las siguientes formas:

a) Cualquier espacio topológico homeomorfo al producto de dos circunferencias, $S^1 \times S^1$.

b) Cualquier espacio topológico homeomorfo al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

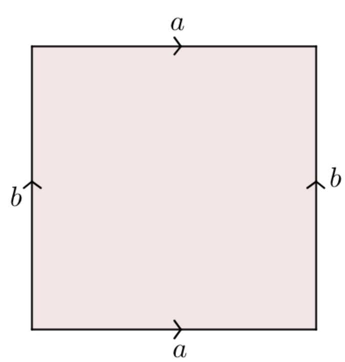
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : [(x^2 + y^2)^{1/2} - 2]^2 + z^2 = 1\}$$

[Este conjunto se obtiene por rotación del círculo $(x-2)^2 + z^2 = 1$ del plano xz, al rededor del eje z].

c) Sea X el cuadrado unidad en el plano $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$$

Entonces el toro es cualquier espacio topológico homeomorfo al espacio cociente de X obtenido por identificación de los lados opuestos del cuadrado X según las siguientes reglas: Se identifican los puntos $(0, y)$ y $(1, y)$ para $0 \leqq y \leqq 1$, y los puntos $(x, 0)$ y $(x, 1)$ para $0 \leqq x \leqq 1$.



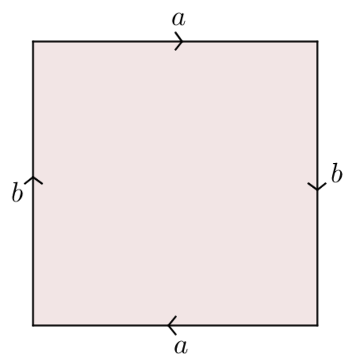
Otro ejemplo de superficie compacta es el *plano proyectivo real* ya que no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^3$ el plano proyectivo es mucho más dificil de visualizar que la esfera S^2 o el toro.

Definición 4.3. Llamaremos plano proyectivo al espacio cociente de la esfera S^2 obtenida por identificación de cada par de puntos diametralmente opuestos. Cual quier espacio homeomorfo a este cociente también lo llamaremos plano proyectivo.

Sea $H = \{(x, y, z) \in S^2 : z \geqq 0\}$ el hemisferio superior cerrado de S^2. Es evidente que cada par de puntos de S^2 diametralmente opuestos almenos uno se encuentra en H. Si los dos puntos se encuentran en H estos dos puntos estan en el borde de H. Entonces podemos definir el plano proyectivo como el espacio cociente de H obtenido por identificación de puntos diametralmente opuestos del borde de H. Como H es homeomorfo al el disco unidad cerrado E^2 del plano,

$$E^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 1\},$$

el espacio cociente de E^2 obtenido por identificación de los puntos diametralmente opuestos del borde es un plano proyectivo. Pero E^2 puede sustituirse por cualquier espacio homeomorfo, en particular por un cuadrado. Así pues, un plano proyectivo se otiene identificando los lados opuesto de un cuadrado tal como se indica en la figura siguiente.



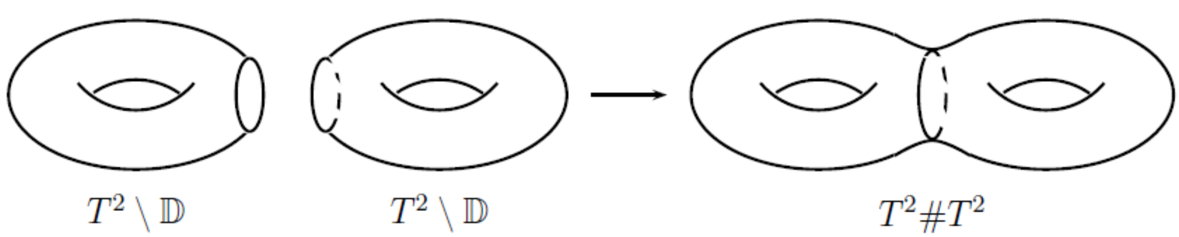
Se puede observar que el plano proyectivo no es orientable ya que tiene un subconjunto homeomorfo a una banda de Möbius.

4.3.1. Suma conexa

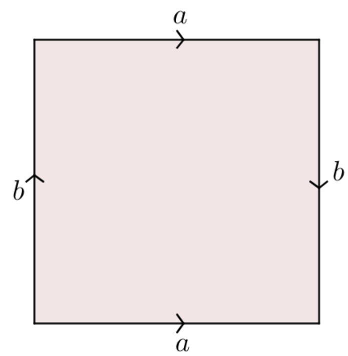
Ahora veamos cómo podemos encontrar más ejemplos de superficies compactas formando lo que se llaman ***sumas conexas*** Sean S_1 y S_2 dos superficies disjuntas. Su suma conexa designada por $S_1\#S_2$ está formada haciendo un pequeño agujero circular en cada superficie y pegando las dos superficies a lo largo del borde de estos agujeros. De una manera más formal escojamos subconjuntos $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$ tales que D_1 y D_2 sean discos cerrados. Sea S_i' el complemento del interior de D_i en S_i, $i = 1, 2$. Escojamos un homeomorfismo h de la frontera de D_1 en la frontera de D_2. Entonces tenemos que $S_1\#S_2$ es el espacio cociente de $S_1' \bigcup S_2'$ obtenido identificando los puntos x y $h(x)$, para todo x del borde de D_1

Ejemplo 4.2. Si S_2 es una $2-esfera$, entonces $S_1\#S_2$ es homeomorfo a S_2.

Ejemplo 4.3. Si S_1 y S_2 son dos toros, entonces $S_1\#S_2$ es homeomorfo a la superficie de un bloque que tenda dos agujeros que lo perforen.



Ejemplo 4.4. Si S_1 y S_2 son dos planos proyectivos, $S_1\#S_2$ es una “botella de Klein”, esto es homeomorfo a la superficie obtenida por identificación de los lados opuestos de un cuadrado como se muestra en la siguiente figura.



Podemos probar esto utilizando la formula de cortar y pegar como sigue. Si S_i es un plano proyectivo , y $D_i \subset S_i$ es un disco cerrado, entonces S_i' el complemento de el interior de D_i es homeomorfo a una banda de Möbius.

Para poder ver esto consideremos S_i como el espacio obtenido por la identificación de los puntos diametralmente opuestos sobre el borde del disco unidad E^2 en $\mathbb{R}^2$ podemos elegir D_i como la imagen del conjunto $\{(x, y) \in E^2 : |y| \geqq \frac{1}{2}\}$ por la identificación tenemos S_i es homeomorfo a una banda de Möbius. De este hecho tenemos que $S_1 \# S_2$ se obtiene pegando dos bandas de Möbius a lo largo de sus bordes.

Veamos algunas propiedades que podemos deducir de la operación suma conexa:

1. En el primer ejemplo tenemos que la esfera es un elemento unidad o neutro de la suma conexa.
2. De la definición de suma conexa tenemos que $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$ es decir, la operación es conmutativa.
3. Además resulta fácil ver que $(S_1 \# S_2) \# S_3 = S_1 \# (S_2 \# S_3)$

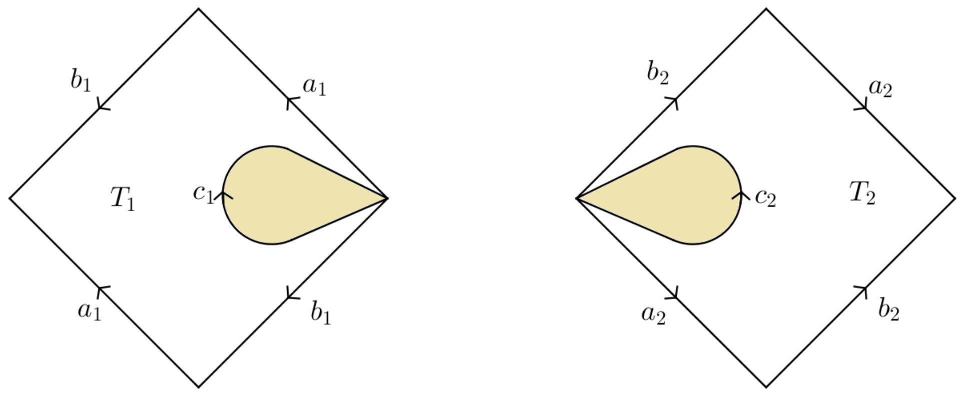
Así pues la suma conexa cumple con tener un elemento neutro, ser conmutativa y asociativa. Pero el conjunto de clases de homeomorfia de superficies compactas no es un grupo con está operación ya que no existe inverso. Por lo que solo forma un semigrupo.

La suma conexa de dos superficies orientables es orientable. Por otra parte, si S_1 ó S_2 no es orientable, tampoco lo es $S_1 \# S_2$.

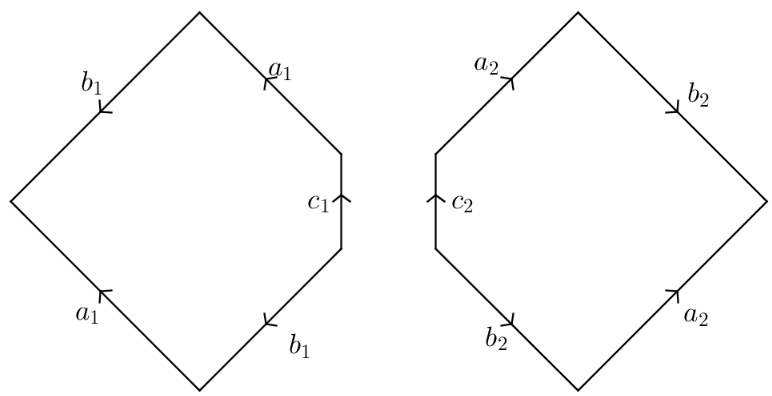
4.4. Representación en el plano de la suma conexa de superficies.

Ya hemos visto como construir más superficies compactas formando sumas conexas de varios toros y/o planos proyectivos. Veamos unos resultados que nos seran de mucha utilidad a lo largo del trabajo.

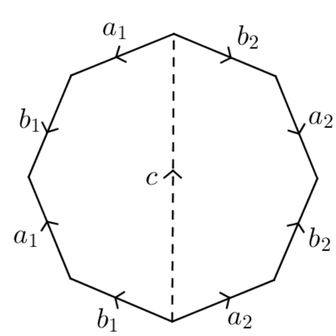
Primero describiremos lo que puede entenderse por "*forma canónica*" de una suma conexa de toros o planos proyectivos. Recordemos que un toro lo podemos representar como un cuadrado con los lados identificados, podemos obtener una representación análoga para la suma conexa de dos toros, de la siguiente manera. Representemos cada uno de los toros T_1, T_2, un cuadrado con los lados opuestos identificados, como se indica en la siguiente figura.



Observese que los cuatro vértices de cada cuadrado estan identificados por un solo punto del toro correspondiente. Para formar la suma conexa de estos debemos primero, recortar un agujero circular en cada toro, lo cual lo haremos de una manera conveniente, recortaremos las regiones sombreadas en los diagramas anteriores, designemos por c_1 y c_2 los bordes de estos agujeros que estan indicados como se indica en las flechas. Además, podemos representar el complemento de cada agujero de los dos toros por los siguientes pentagonos.

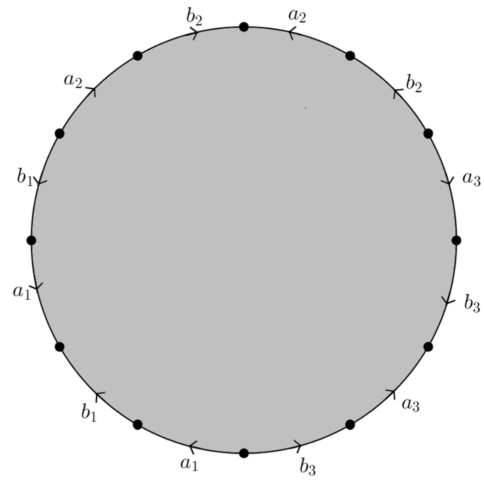


Ya que los vértices de los pentágonos están identificados implica que las aristas c_i, $i = 1, 2$ están identificadas. Pegando dichas aristas para culminar la suma conexa se tiene el siguiente octágono



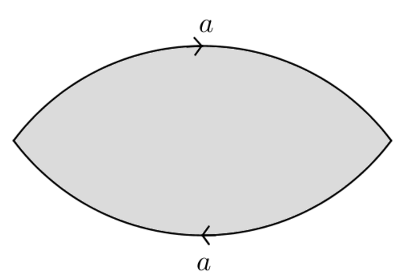
Es de hacer notar que los ocho vértices del octágono están identificados en un solo punto en $T_1 \# T_2$.

Este octágono con las aristas identificadas a pares es nuestra forma canónica de la suma conexa de dos toros. Repitiendo este proceso podemos demostrar que la suma conexa de tres toros es el espacio cociente del dodecágono de la siguiente figura.



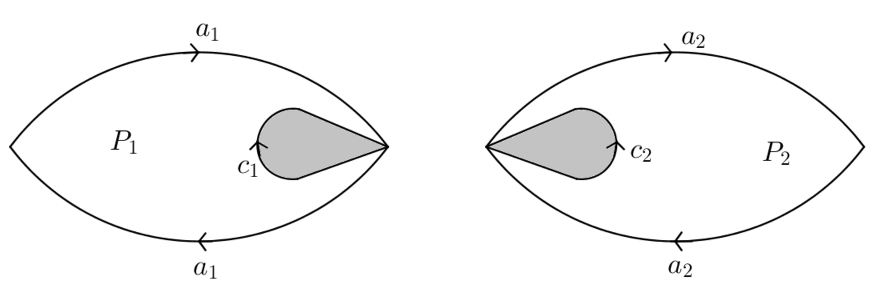
donde las aristas están identificadas a pares como se indica de manera general se puede demostrar por inducción que la suma conexa de n toros es homeomorfa al espacio cociente de un polígono de $4n$ lados cuyas aristas están identificadas a pares de manera análoga a la figura precedente.

Estudiemos ahora el procedimiento que se hace para encontrar la forma canónica de la suma conexa de planos proyectivos. Recordemos que el plano proyectivo lo definimos como el espacio cociente de un disco circular identificando sus puntos diametralmente opuestos de su borde. Eligiendo un par de puntos del borde diametralmente opuestos como vértices, el círculo del disco queda dividido en dos segmentos, así, podemos considerar el plano proyectivo como obtenido a partir de un polígono de dos lados al identificarlos; tal como se muestra en la figura siguiente.

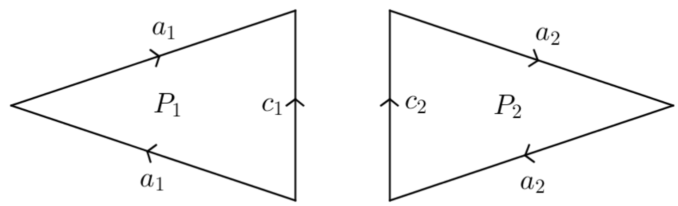


Ahora de forma similar cuando sumabamos dos toros tenemos:

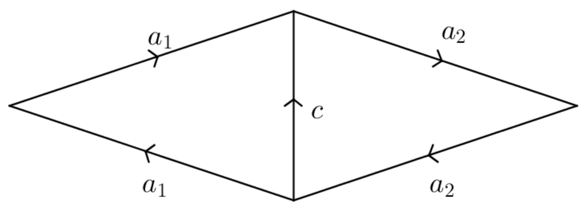
Paso 1: recortamos dos discos a cada plano proyectivo.



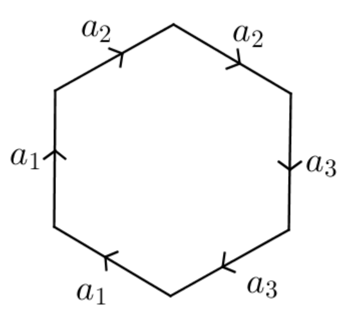
Paso 2: Identificamos las aristas que resultan de los discos retirados.



Paso 3: Pegamos las aristas identificadas en el paso anterior.

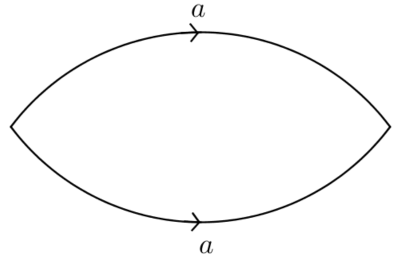


Notese que es el mismo proceso que utilizamos para obtener la suma conexa de 2 toros como el espacio cociente de un octágono. Repitiendo el proceso tenemos que la suma conexa de tres planos proyectivos es el espacio cociente de un exágono con los lados identificados a pares tal como se muestra en la siguiente figura.



Mediante inducción se prueba que para todo entero positivo n, la suma conexa de n planos proyectivos es el espacio cociente de un polígono de $2n$ lados con los lados identificados a pares de forma similar al del exágono anterior y todos los vertices de este polígono están identificados a un punto.

Ahora representemos la esfera de como el espacio cociente de un polígono de dos lados, esto se puede hacer como se muestra en la siguiente figura



Podemos imaginar una esfera como una bolsa que tuviera una cremallera; si la cremallera está abierta la bolsa puede aplastarse.

De esta manera tenemos que cada una de las superficies mencionadas en el teorema puede obtenerce como espacio cociente de un polígono con las aristas identificadas a pares. Es necesario introducir una notacion para identificar estos estos polígonos y los pares de aristas de estos, esto de la siguiente forma. Consideramos el diagrama en el que está indicado cómo se identifican las aristas; partiendo de un vertice determinado, recorramos el borde del polígono, anotando una tras otra las letras asignadas a los diferentes lados. Si la flecha de un lado indica la misma dirección en que recorremos el borde, entonces escribimos la letra de este lado sin exponente (o con exponente $+1$). Por otra parte, si la flecha indica la dirección contraria, entonces escribimos la letra de este lado con exponente -1.

Ejemplo 4.5. La suma conexa de tres toros está identificada por un dodecágono con las aristas identificadas a pares como vimos anteriormente, las identificaciones de dicho dodecágono quedan indicado de manera precisa por

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}a_3b_3a_3^{-1}b_3^{-1}$$

Ejemplo 4.6. La suma conexa de tres planos proyectivos está identificada por un exágono con las aristas identificadas a pares como vimos anteriormente, las identificaciones de dicho exágono quedan indicado de manera precisa por

$$a_1a_1a_2a_2a_3a_3$$

En cada uno de los ejemplos comenzamos en el vértice inferior del diagrama y recorremos su borde el el sentido de las agujas del reloj. Estos símbolos identifican si ambigüedad las identificaciones, sin embargo al escribir las representaciones podemos empezar por cualquier vertice y recorre el borde tanto en el sentido de las agujas del reloj como en sentido contrario.

Resumiendo estos resultados tenemos las siguientes representaciones mediante símbolos:

(a) La esfera : aa^{-1}

(b) La suma conexa de n toros:
$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\ldots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$$

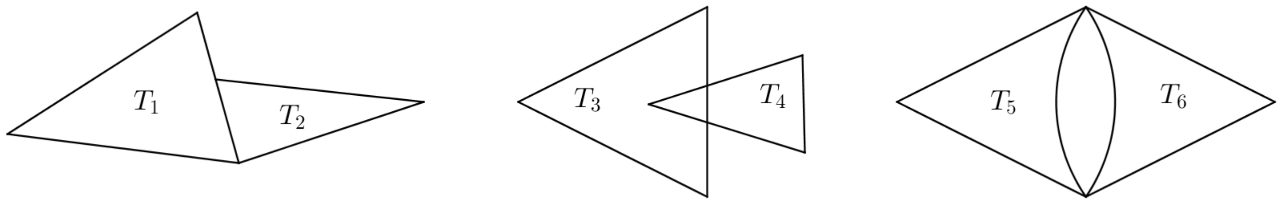
(c) La suma conexa de n planos proyectivos:
$$a_1a_1a_2a_2\ldots a_na_n$$

4.5. Triangulación de superficies compactas.

Para poder demostrar el teorema de clasificación de superficies compactas necesitamos probar que la superficie dada es triangulable, es decir, que se puede dividir en triángulos que encajan satisfactoriamente, es facil imaginarse la superficie de la tierra dividida en regiones triangulares, y veremos que una subdivisión de este tipo es muy útil en el estudio de superficies compactas en general.

Definición 4.4. Una *triangulación* de una superficie compacta S consiste en una familia finita de subconjuntos cerrados $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ que cubren S y una familia de homeomorfismos $\phi_i : T_i' \to T_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, donde T_i' es un triángulo de $\mathbb{R}^2$. Los subconjuntos T_i se llaman "*triángulos*". Los subconjuntos de T_i que son imagen por ϕ_i de vértices y aristas del triángulo T_i' se llaman también "vértices" y "aristas" respectivamente. Finalmente se impone la condición de que dos triángulos distintos t_i y T_j o son disjuntos o tienen un solo vértice en común, o tienen toda una arista en común

Veamos unos ejemplos de triangulaciones no admisibles para una superficie S según la definición

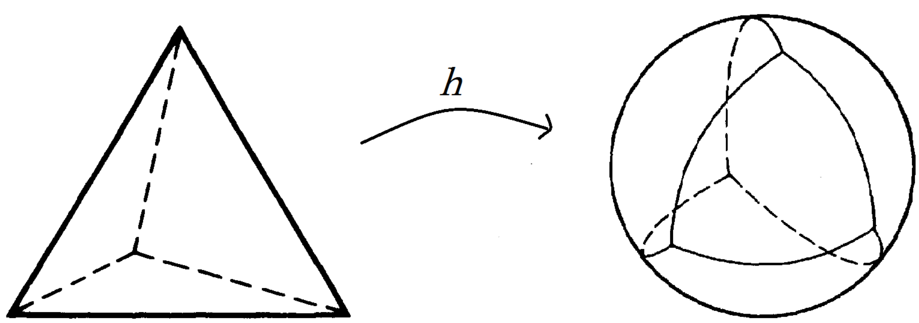


Una superficie triangulada puede considerarse como construida soldando de una cierta forma los distintos triángulos. Ya que dos triángulos distintos no pueden tener los mismos vértices podemos determinar completamente una triangulación de una superficie enumerando los vértices y especificando que ternas de vértices son vértices de un triángulo. Una lista de triángulos determina completamente la superficie junto con la triangulación dada, salvo un homeomorfismo.

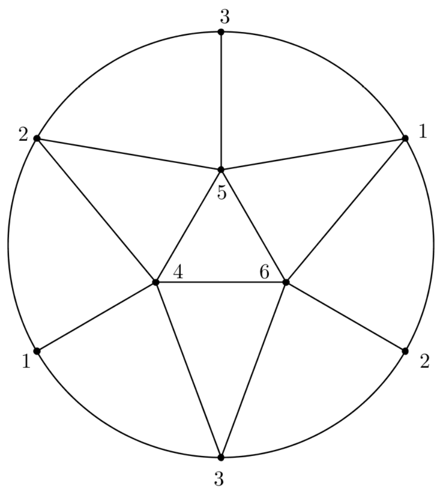
Resultado 1. Toda superficie compacta es triángulable

La demostración de este resultado fue dada por Tibor Radó en 1925, requiere el uso de una forma fuerte del teorema de la curva de Jordan. Esta demostración no se realizará en este trabajo. La demostración de Radó esta dada en el capitulo I del texto Ahlford y Sario.

Ejemplo 4.7. La superficie de un tetraedro ordinario es homeomorfa a la esfera S^2, como es de suponer los cuatro triángulos de esté satisfacen todas las condiciones de una triangulación de S^2. En este caso se tienen cuatro vértices y toda terna de vértices es el conjunto de vértices de un triángulo. Ninguna otra triangulación de una superficie cualquiera puede verificar esta propiedad.



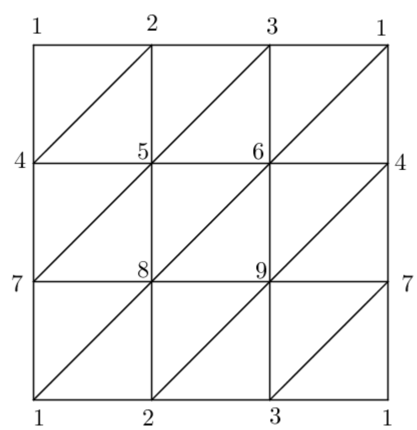
Ejemplo 4.8. Veamos como es la triangulación de un plano proyectivo, recordemos que un plano proyectivo lo podemos representar como un disco identificando los puntos diametralmente de su borde, en la siguiente figura se tiene una triangulación en la cual se tienen 6 vértices los cuales están enumerados.



Ahora identifiquemos cuales son los triángulos:

124	245
235	135
156	126
236	346
134	456

Ejemplo 4.9. Triangulación de un toro, para hacer la triangulación de un toro, consideremos este como un cuadrado con los lados opuestos identificados, tenemos 9 vértices como se muestra en la figura siguiente



Tenemos los siguientes triángulos

124	245	235
356	361	146
457	578	658
689	649	479
187	128	289
239	379	137

Observación 4.1. Observamos de los ejemplos anteriores que toda triangulación de una superficie compacta satisface las dos condiciones siguientes:

- Cada arista lo es exactamente de dos triángulos.
- Sea v un vértice de una triangulación. Entonces podemos ordenar el conjunto de todos los triángulos que tienen el vértice v cíclicamente $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n = T_0$, de manera que, para $0 \leqq i \leqq n-1$, T_i, T_{i+1} tenga una arista común

4.6. Teorema de clasificación para superficies compactas.

Teorema 4.1. Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.

Demostración. Sea S una superficie compacta. Demostraremos este teorema, probando que S es homeomorfa a un polígono con las aristas identificadas a pares, según alguno de los símbolos de la lista obtenida en la suma conexa de superficies.

primer paso. De la sección anterior tenemos que toda superficie compacta es triangulable, por lo cual S es triangulable. Sea n el número de triángulos. Podemos enumerar los triángulos $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de manera que el triángulo T_i tenga una arista e_i común con al menos uno de los triángulos $T_1, \ldots, T_{i-1}$, $2 \leqq i \leqq n$. Veamos esto llamemos T_1 a uno cualquiera de los triángulos; elegimos T_2 cualquier triángulo que tenga una arista en común con T_1. Como T_3 cualquier triángulo que tenga una arista en común con T_1 o con T_2, etc. Si en algún punto no pudiéramos continuar este proceso, entonces tendríamos dos conjuntos de triángulos $\{T_1, \ldots, T_k\}$ y $\{T_{k+1}, \ldots, T_n\}$ tales que ningún triángulo del primer conjunto tredría una arista o vértice común con ningún triángulo del segundo conjunto.Pero esto daria una partición de S en dos conjuntos cerrados disjuntos y no vacíos, contradiciendo la hipótesis de que S es conexa.

Utilizaremos ahora esta ordenación de los triángulos $T_1, T_2, \ldots, T_n$ junto con la elección de las aristas $e_2, e_3, \ldots e_n$, para construir, en el plano euclídeo, un modelo de la superficie S, este modelo sea un polígono cuyos lados estén identificados a pares. Recordemos que, para cada T_i, existe un triángulo euclideo ordinario T_i' en $\mathbb{R}^2$ y un homeomorfismo ϕ_i de T_i' sobre T_i. Podemos suponer que los triángulos $T_1', T_2', \ldots, T_n'$ son disjuntos dos a dos, de no ser así podemos tras la darlos a otras partes del plano.

$$T' = \bigcup_{i=1}^{n} T_i';$$

entonces T' es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$.

Definamos la aplicación

$$\phi : T' \to S$$

por $\phi|_{T_i'}$; la función ϕ asi definida es continua y sobreyectiva. Ya que T' es compacto y S es un espacio de Hausdorff, ϕ es una aplicación cerrada, lo que implica que S tiene la topología cociente inducida por ϕ.

El polígono que buscamos lo construiremos como un espacio cociente de T'. Consideremos una arista cualquiera de las e_i, $2 \leqq i \leqq n$, por hipótesis e_i es es arista del triángulo T_i y de otro triángulo T_j con $1 \leqq j \leqq i$ Por lo tanto $\phi^{-1}(e_i)$ consta de una arista del triángulo T_i' y una arista del triángulo T_j'. Identificamos estas dos aristas en los triángulos T_i' y T_j' identificando aquellos puntos que se aplican por ϕ en un mismo punto de e_i. Intuitivamente hablando pegamos los triángulos T_i' y T_j', hacemos estas identificaciones para cada una de las aristas $e_2, e_3, \ldots, e_n$. Llamemos D el espacio cociente de T'.

La aplicación $\phi : T' \to S$ induce una aplicación ψ de D sobre S, además, S tiene la topología cociente inducida por ψ.

Ahora nos falta probar que D es topológiamente equivalente a un disco cerrado. Para la demostración recordemos dos hechos de topología

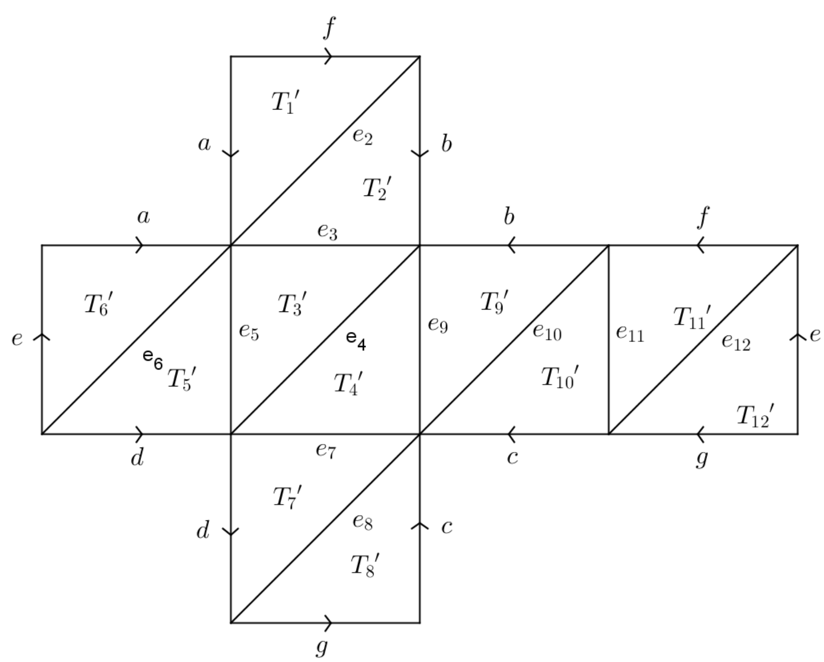
a) Sean E_1 y E_2 espacios disjuntos topológicamente equivalentes al disco cerrado E^2. Sean A_1 y A_2 subconjuntos del borde de E_1 y E_2 respectivamente, que sean homeomorfos al intervalo cerrado $[0,1]$ y $h : A_1 \to A_2$ un homeomorfismo determinado. Formemos un espacio cociente de $E_1 \cup E_2$ identificando los puntos que se corresponden por h, entonces el espacio cociente es también topológicamente equivalente al disco.

b) Al formar el espacio cociente D de T' podemos hacer todas las identificaciones a la vez, o bien hacer primero la identificación corespondiente a e_2, luego la correspondiente a e_3, etc., sucesivamente.

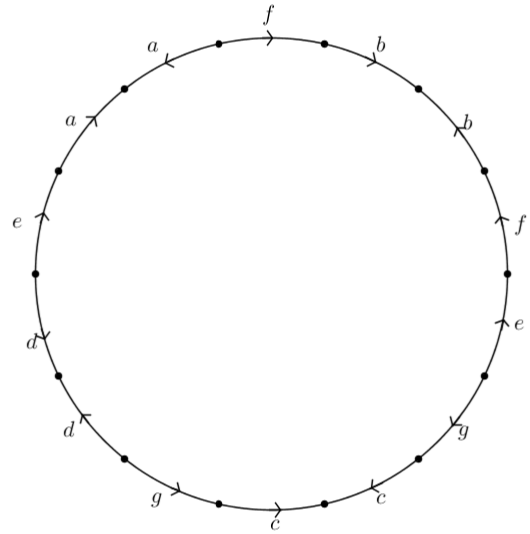
Haremos uso de estas dos consideraciones probamos ahora que D es un disco de la siguiente manera: T_1' y T_2' son topológicamente equivalentes a discos. Por tanto el espacio cociente de $T_1' \cup T_2'$ obtenido al identificar puntos de $\phi^{-1}(e_2)$ es nuevamente un dosco. Ahora hacemos el mismo proceso para esté disco y el triángulo T_3' y así sucesivamente.

S se obtiene a partir de D identificando ciertos pares de aristas del borde de D.

Ejemplo 4.10. Se ha triangulado la superficie de un cubo dividiendo cada cara en dos triángulos mediante una diagonal, identificamos de manera correta las aristas de la triangulación.



Una vez identificadas las aristas de la triangulación nos podemos olvidar de las aristas e_i y trabajar con el siguiente esquema.

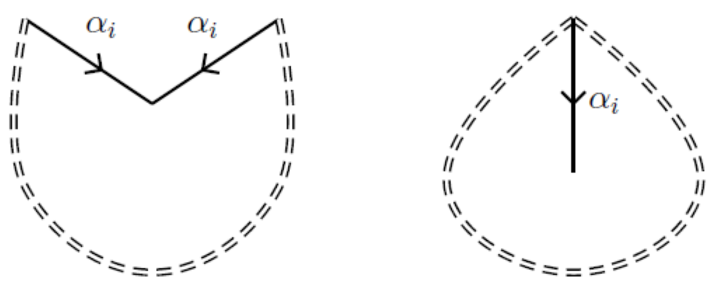


segundo paso. ***Eliminación de aristas adyacentes de primera especie.*** Ya tenemos un polígono D tal que la superficie dada S resulta al identificar a pares las aristas de D. Podemos indicar esta identificación con los símbolos apropiados, por ejemplo en la figura del ejemplo anterior puede identificarse por

$$aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e$$

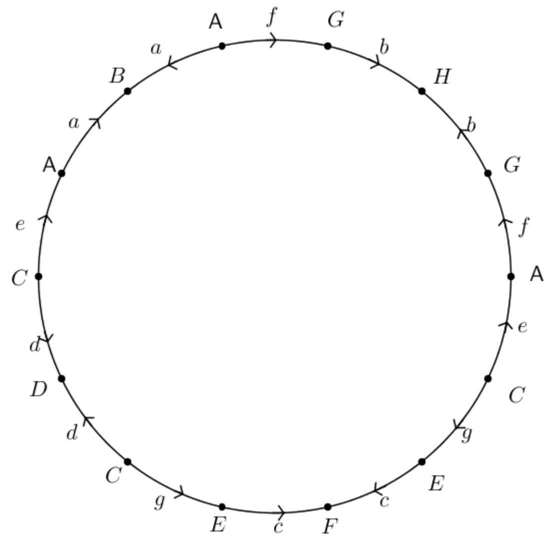
Si la letra que indica un cierto par de aristas aparece en el símbolo con los dos exponentes $+1$ y -1, entonces decimos que este par de aristas son de *primera especie*, de lo contrario el par es de *segunda especie*. En el caso anterior los siete pares son de primera especie.

Vamos a probar que podemos eliminar un par de aristas adyacentes de primera especie, suponiendo que el polígono tenga por lo menos cuatro aristas. El proceso queda perfectamente determinado por la secuencia de la siguiente figura



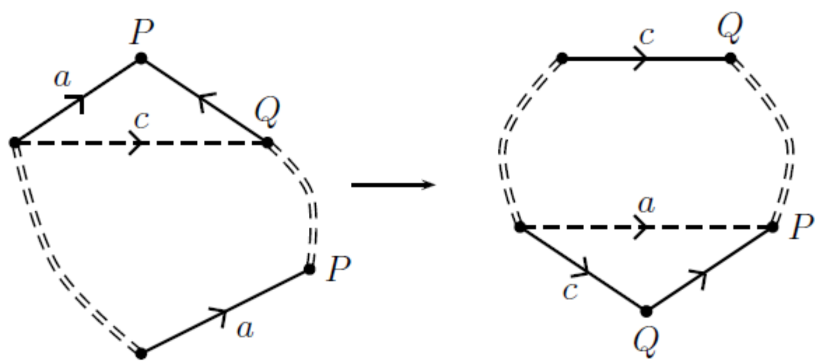
Podemos continuar con este proceso hasta que hayan sido eliminados todos los pares de este tipo o hata que se obtenga un polígono de dos lados, en este último caso la superficie seria una esfera o un plano proyectivo. En caso contrario pasamos al tercer paso.

Tercer paso. ***Transformación en un polígono tal que todos los vértices estén identificados a uno solo.*** En nuestro polígono tenemos las aristas identificadas a pares, esto no ocurre con los vértices, estos pueden estar identificados en conjuntos de uno, dos, tres,... . Diremos que dos vértices del polígono son *equivalentes* si y sólo si estan identificados. Así en el ejemplo 4.10 hay ocho clases de equivalencia de vértices distintas. Identifiquemos estos vértices



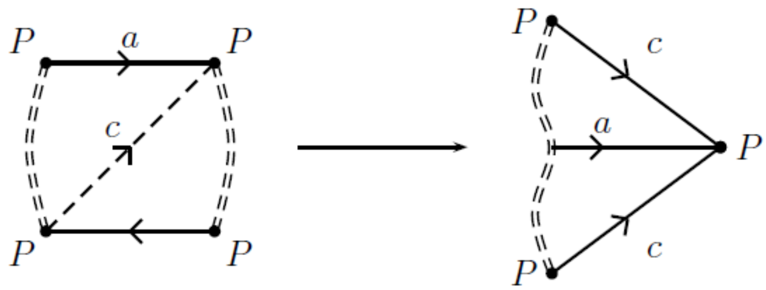
Ahora supongamos que hemos aplicado el segundo paso todas las veces posibles. Ahora queremos probar que podemos trasformar nuestro polígono en uno que todos sus vértices se identifiquen a uno solo.

Supondremos que hay dos clases de equivalencia distintas. Entonces tenemos un par de vértices adyacentes del polígono que no son equivalentes. Designemos estos vértices por P y Q. La siguiente figura nos muestra como proceder para llavarlo a una sola clase de equivalencia.



Analicemos lo que se hace, como P y Q no son equivalentes y ya se ha realizado el segundo paso todas las veces posibles los lados a y b no pueden estar identificados. Cortemos a lo largo de la linea en c desde el vértice Q hasta el otro vértice de la arista a como se ve en la figura. Luego pegamos las dos aristas designadas por a, resultando así un poligono con un vértice menos en la equivalencia de P y uno más en la de Q, luego, si es posible realizamos el segundo paso. Llevamos a cabo, otra vez el tercer paso para seguir reduciendo los vértices de la clase de equivalencia de P y se vuelve a realizar el segundo paso. Vamos alternando el tercer y segundo paso hasta que la clase de equivalencia de P sea totalmente eliminada. Si tuvieramos más clases de equivalencia hacemos este mismo proceso hasta que solo nos quede una clase de equivalencia.

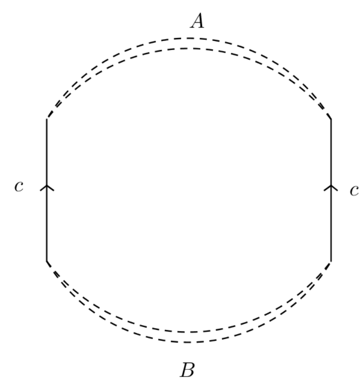
Cuarto paso. ***Comó hacer adyacentes todo par de aristas de segunda especie.*** Veamos como transformar la superficie de tal marena que todo par de aristas de segunda especie sean adyacentes. Supongamos que tenemos dos pares de aristas que son adyacentes. Cortamos a lo largo de la linea en a y luego pegamos en las aristas identificadas en b como se muestra en la siguente figura.



Continuamos con este paso hasta que todos los pares de aristas de segunda especie sean adyacentes. Si no hay pares de primera especie ya hemos terminado nuestra prueba ya que el símbolo del polígono seriá de la forma $a_1a_1a_2a_2\ldots a_na_n$, y por tanto la superficie es la suma conexa de n planos proyectivos.

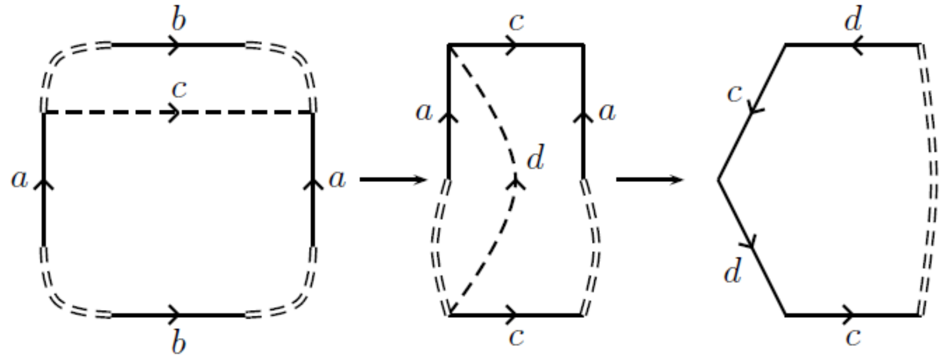
Supongamos por el contrario, hay al menos un par de aristas de primera especie digamos c, afirmamos que hay por lo menos otro par de arista de primera especie tal que estos dos se separan mutuamente, es decir, al recorrer el polígono las aristas de estos dos pares aperecen arternadamente, esto seriá de la forma $c\ldots d\ldots c^{-1}\ldots d^{-1}\ldots$

Supongamos que la arista c no está separada por ningún otro par de aristas de primera especie como lo muesta la figura siguiente.



Notar que ninguna arista de A puede identificarse con una de B y viceversa, ya que estas aristas son de segunda especie y ya estan juntas. Pero esto contradice el hecho de que los vértices de c tienen que estar identificados.

Quinto paso. ***Pares de primera especie.*** Supongamos que tenemos pares de primera especie que se separan uno al otro. Probemos que podemos transformar el polígono de manera que estos cuatro lados aparezcan de forma consecutiva en el polígono. Primero cortamos a lo largo de c y pegamos a lo largo de b como se muestra en la parte a) y b) de la figura siguiente, luego cortamos a lo largo de d y pegamos a lo lago de a y obtenemos lo que queriamos.



Hacemos este proceso hasta que todos los pares de primera especie estén en grupos adyacentes de cuatro aristas, mtal como en el caso anterior tenemos $cdc^{-1}d^{-1}$.

Si no hay pares de segunda especie ya tenemos el resultado que se queria ya que el simbolo de S seriá de la forma

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$$

y la superficie es la suma conexa de n toros.

Falta considerar el caso en que después de estos cinco pasos haya pares de aristas de primera y segunda especie simultaneamente. El siguiente lema nos resuelve la situación.

Lema 4.1. La suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de tres planos proyectivos.

□

4.7. La característica de Euler de una superficie.

Hemos demostrado que toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros, o a una suma de planos proyectivos. Para terminar demostraremos que estos tres tipos de superficies no son homeomorfos entre sí. Ésto es, podría suceder que existieran enteros m y n $m \neq n$, tales que la suma de m toros fuera homeomorfa a la suma de n toros. Para demostrar que esto no es posible utilizamos ***la característica de Euler***, que es un invariante topológico. Sea M una superficie con una triangulación $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$. Sean

$$\begin{aligned} v &= \text{número total de vértices de } M. \\ e &= \text{número total de aristas de } M. \\ t &= \text{número total de triángulos } M. \text{ (en este caso } t = n) \end{aligned}$$

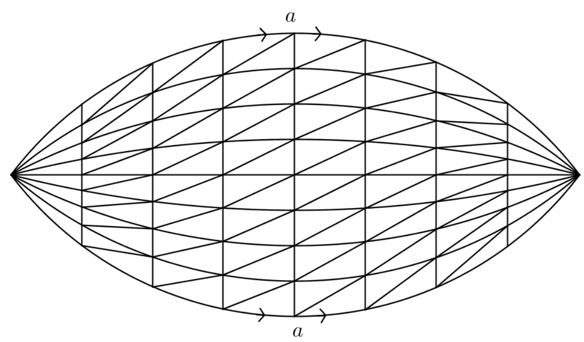
Entonces

$$\chi(M) = v - e + t$$

se llama característica de Euler de M.

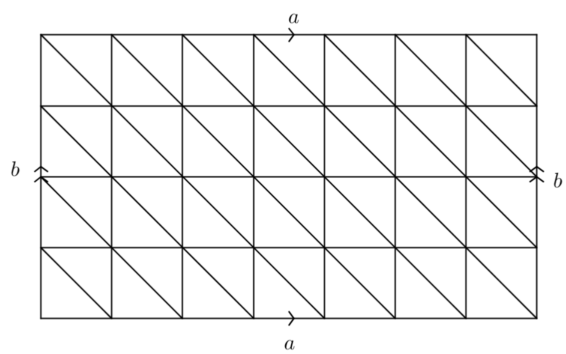
Ejemplo 4.11. Veamos algunas triángulaciones de la esfera, el toro y el plano proyectivo el cual nos brinda un metodo para encontrar triángulaciones de estas superficies con un número de triángulos tan grande como queramos.

- Primero veamos la triangulación de la esfera,



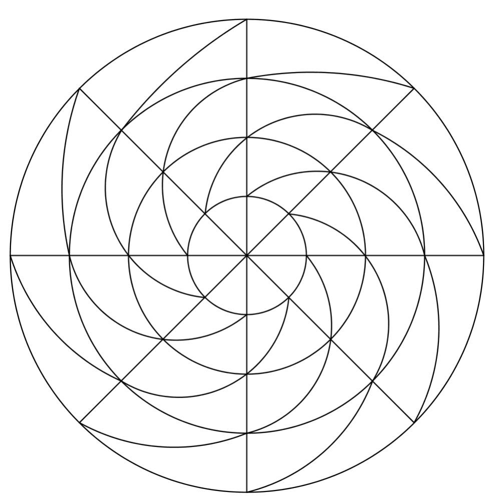
tenemos que $t = 112$ $v = 58$ y $e = 168$ por lo cual $\chi(S^2) = 2$

- Analicemos ahora la triangulación del toro



de la figura se tiene que $t = 56$, $v = 28$ y $e = 84$ y asi $\chi(T) = 0$

- Por último, veamos una triangulación del plano proyectivo.



en el cual tenemos $t = 48$, $v = 37$ y $e = 84$ y asi $\chi(P) = 1$

Observación 4.2. Si recordamos la triangulación de cada una de estas superficies vistas en **??** podemos notar que la característica de Euler no combia, es decir, la característica de Euler $\chi(M)$ solo depende de M y no de la triangulación que escojamos

Proposición 4.1. Dadas dos superficies compactas S_1 y S_2, entonces

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

Demostración. Como S_1 y S_2 son triángulables formamos su suma conexa, quitando el interior de un triángulo de cada una de ellas e identificando las aristas y vértices de los bordes de los triángulos suprimidos y contando vértices, aristas y triángulos antes y después de formar la suma conexa obtenemos la fórmula. □

Mediante este teorema y una inducción se obtiene las características de Euler de:

Superficie	***Característica de Euler***
Esfera	2
Suma conexa de n toros	$2-2n$
Suma conexa de n Planos proyectivos	$2-n$
Suma conexa de un Planos proyectivos y n toros	$1-2n$
Suma conexa de una botella de Klein y n toros	$-2n$

Un polígono representa una superficie no oríentable si su forma canónica contiene un par de aristas de segunda especie. Podemos reformular el teorema reduciendo el problema de la clasificación a determinar la ori-entabilidad y la característica de Euler, problemas ambos fácilmente resolubles.

Resultado 2. Sean S_1 y S_2 superficies compactas. Entonces S_2 y S_2 son homeomorfas si y sólo si sus características de Euler coinciden y las dos superficies son ambas orientables o ambas no orientables.

Definición 4.5. Una superficie que sea la suma conexa de n toros o n planos proyectivos, se dice que es una superfucie de *género* n; una esfera es de género 0, se verifica la siguiente relación entre la característica de Euler χ y el género g de una superficie compacta:

$$g = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(2-\chi) & \text{en el caso orientable,} \\ 2-\chi & \text{en el caso no orientable.} \end{cases}$$

5. El grupo fundamental

En este capítulo se introduce una herramienta muy útil para de terminar cuando dos espacios no son homeomorfos, a cada espacio topológico le asociaremos un grupo de homotopía. Este grupo de homotopía es un invariante topológico de caracter algebraico.

5.1. El Grupo Fundamental

5.1.1. Homotopía de caminos

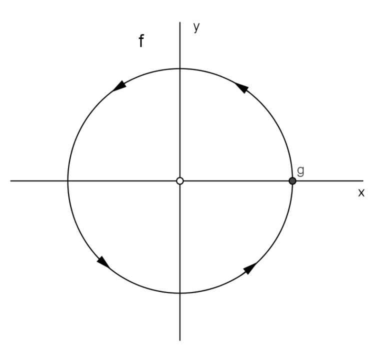
Definición 5.1. Si f y f' son aplicaciones continuas del espacio X al espacio Y, decimos que f es homotopíca a f' si existe una aplicación continua $F : X \times I \to Y$ tal que

$$F(x, 0) = f(x) \qquad \text{y} \qquad F(x, 1) = f'(x)$$

para $x \in X$ (con $I = [0, 1]$). La aplicación F se conoce como **homotopía** entre f y f'. Si f es homotopíca a f', escribimos $f \simeq f'$. Si $f \simeq f'$ y f' es una aplicación constante, decimos que f es **homotópicamente nula**.

Podemos imaginar una homotopía como una familia uniparamétrica continua de aplicaciones de X en Y. Si pensamos en el parámetro t como como representante del tiempo entonces la homotopía F describe una "deformación" continua de la aplicación f en la aplicación f', cuando t se mueve de 0 a 1.

Ejemplo 1. Sea $X = [0, 1]$ y $Y = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Considérese las aplicaciones $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ tal que $f(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$ y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ tal que $g(s) = (1, 0)$ ¿Serán f y g homotópicas?



Consideremos la aplicación H

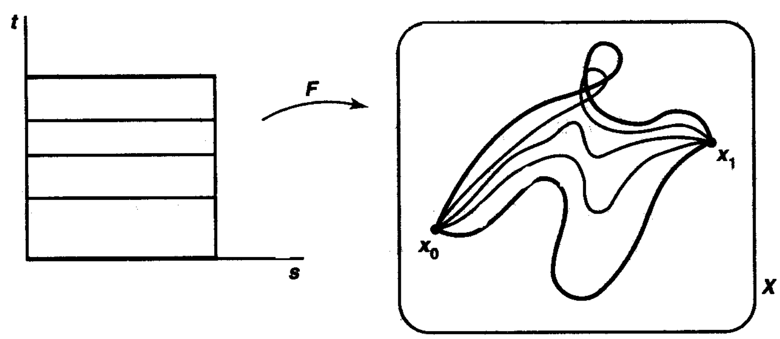
$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$
$$(s,t) \rightsquigarrow (\cos(2\pi s(1-t)), \sin(2\pi s(t-1)))$$

H así definido es una homotopía es continua ya que las funciones seno y coseno lo son además se cumple que $H(s,0) = f(s)$ y $H(s,1) = g(s)$

Consideremos ahora el caso donde f es un camino en X. Recordemos que si $f : [0,1] \to X$ es una aplicación continua tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$ decimos que f es un camino en X desde x_0 hasta x_1. En lo que sigue del tema denotemos el intervalo $I = [0,1]$
Si f y f' son dos caminos en X, existe una relación mas fuerte entre ellos que la de homotopía simplemente. Veamos esta relación.

Definición 5.2. Dos caminos f y f', que aplican el el intervalo I en X se dice que son **homotópicos por caminos** si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1, y si existe una aplicación continua $F : I \times I \to X$ tal que
$$F(s,0) = f(s) \qquad \text{y} \qquad F(s,1) = f'(s)$$
$$F(0,t) = x_0 \qquad \text{y} \qquad F(1,t) = x_1$$

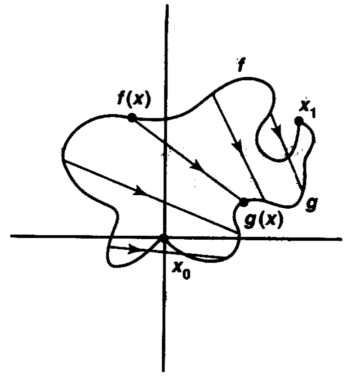
para cada $s \in I$ y cada $t \in I$. La aplicación la aplicación F recibe el nombre de **homotopía de caminos** entre f y f'. Si f es homotópico por caminos a f', lo denotaremos por $f \simeq_p f'$



Notemos que de la definición con la primera condición se tiene que F es una homotopía entre f y f', de la segunda condición se tiene que para cualquier valor de t la aplicación $f_t(s)$ es un camino desde x_0 hasta x_1, es decir, F es una deformación continua de f en f' tal que los extremos no se mueven.

Ejemplo
Sea f y g dos aplicaciones cualesquiera de un espacio X en $\mathbb{R}^2$. Es fácil probar que f y g son homotópicas; la aplicación
$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$
es una homotopía entre ellas. Se conoce como **homotopía por rectas** por que llevan al punto $f(x)$ al punto $g(x)$ a lo largo del segmento de recta que los une.
Si f y g son caminos de x_0 a x_1, entonces F será una homotopía de caminos.

En general, sea A un subespacio *convexo* de $\mathbb{R}^n$ (lo cual significa que para dos puntos cualesquiera a y b de A el segmento de recta que los une está contenido en A). Entonces dos caminos cualesquiera f, g en A de x_0 a x_1 son homotópicos por caminos en A, Ya que la homotopía por rectas F entre ellos mantiene su imagen en A.



Lema 5.1. Las relaciones $\simeq$ y $\simeq_p$ son relaciones de equivalencia. Si f es un camino, denotemos por su clase de equivalencia de homotopía de caminos por $[f]$

Demostración: Comprobemos las propiedades de relación de equivalencia.

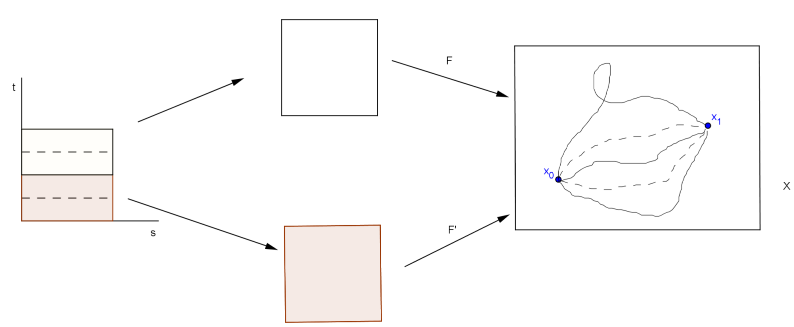
1. Reflexiva.
   Dada la aplicación f. Hay que ver que $f \simeq f$. Basta considerar la aplicación $F(s,t) = f(s)$ que así definida es una homotopía. Si f es un camino, F es una homotopía de caminos.

2. Simétrica.
   Supongamos que $f \simeq f'$ y demostremos que $f' \simeq f$.
   Sea F una homotopía entre f' y f. Entonces $G(s,t) = F(s, 1-t)$ es una homotopía entre f' y f. Si F es una homotopía de caminos también lo es G.

3. Transitiva.
   Supongamos que $f \simeq f'$ y $f' \simeq f''$. Probemos que $f \simeq f''$. Sea F una homotopía entre f y f', y F' una homotopía entre f' y f''. Definamos $G : X \times I \to Y$ por la ecuación

$$G(s,t) = \begin{cases} F(s,2t) & \text{para } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F'(s,2t-1) & \text{para } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

   La aplicación G está bien definida ya que, para $t = \frac{1}{2}$, tenemos $F(s,1) = f'(s) = F'(s,0)$. Además, G es continua en los subconjuntos cerrados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $X \times I$ entonces G es continua en todo $X \times I$, por el lema del pegamiento[1]. Por lo tanto G es la homotopía requerida entre f y f''.
   Además si f, f' y f'' son caminos se tiene que F y F' son homotopías de caminos entonces también G es homotopía de camino.



[1]**Lema del pegamiento** Sea $X = A \cup B$ donde A y B son cerrados en X. Sea $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces f y g se combinan para dar una función continua $h : X \to Y$, definida mediante $h(x) = f(x)$ si $x \in A$, y $h(x) = g(x)$ si $x \in B$.

Introduzcamos una operación sobre las clases de homotopía como sigue:

Definición 5.3. Si f es un camino en X de x_0 a x_1 y g es un camino en X de x_1 a x_2 definamos el **producto** $f * g$ de f y g como el camino h dado por.

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

La aplicación h está bien definida y es continua, por el lema del pegamiento; es un camino en X de x_0 a x_2.

La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por

$$[f] * [g] = [f * g]$$

Para probar esta afirmación, sea F una homotopía de caminos entre f y f' y sea G una homotopía de caminos entre g y g'. Definamos

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,t) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dado que $H(\frac{1}{2}, t) = F(1,t) = x_1 = G(0,t)$, para todo t, la aplicación H está bien definida; es continua por el lema del pegamiento. Además H es la homotopía de caminos requerida entre $f * g$ y $f' * g'$. Verifiquemos esto último.

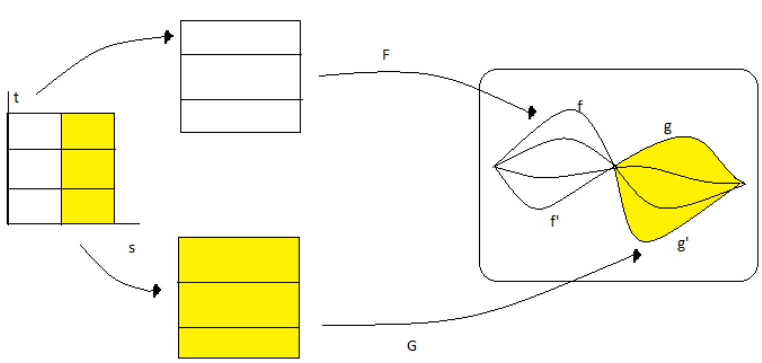
$$H(0,t) = F(0,t) = x_0$$

$$H(1,t) = G(1,t) = x_2$$

Además se tiene también que

$$H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,0) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$H(s,1) = \begin{cases} F(2s,1) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} f'(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g'(2s-1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Teorema 5.1. Sea X un espacio topológico $\forall \alpha, \beta, \gamma$ caminos en X que se pueden multiplicar es decir $\alpha(1) = \beta(0)$ y $\beta(1) = \gamma(0)$ se tiene que la operación $*$ tiene las siguientes propiedades:

1. (Asociatividad). Si $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$ está definida, también lo está $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$, y son iguales.

2. (Neutro a izquierda y derecha).
Dado $x \in X$ denotemos por e_x el camino constante $e_x : I \to X$ que lleva todo I al punto x. Si α es un camino en X desde x_0 hasta x_1, entonces

$$[\alpha] * [e_{x_1}] = [\alpha] \qquad \text{y} \qquad [e_{x_0}] * [\alpha] = [\alpha]$$

3. (Inverso).
Dado el camino α en X desde x_0 hasta x_1, sea $\overline{\alpha}$ el camino definido por $\overline{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$ el cual se conoce como inverso de α. Entonces

$$[\alpha] * [\overline{\alpha}] = [e_{x_0}] \qquad \text{y} \qquad [\overline{\alpha}] * [\alpha] = [e_{x_1}]$$

Demostración.

1. Para demostrar que la multiplicación de las clases de equivalencia es asociativa tomemos los caminos α, β y γ tales que sus productos estén bien definidos entonces

$$([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] \simeq [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$$

$$[(\alpha * \beta) * \gamma] \simeq [\alpha * (\beta * \gamma)]$$

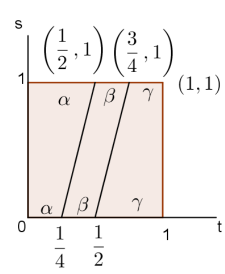
por lo que basta con probar que

$$(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$$

Para probar esto, consideremos la función $F : I \times I \to X$ definida por

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha(\dfrac{4t}{1+s}), & 0 \leq t \leq \dfrac{1+s}{4} \\ \beta(4t-1-s), & \dfrac{1+s}{4} \leq t \leq \dfrac{s+2}{4} \\ \gamma(1 - \dfrac{4(1-t)}{2-s}), & \dfrac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

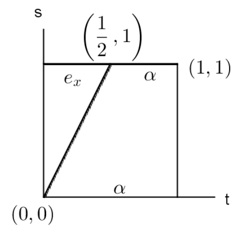
Entonces F así definida es continua por el lema del pegamiento, ademas $F(s,0) = \alpha * (\beta * \gamma)$ y $F(s,1) = (\alpha * \beta) * \gamma$. La figura siguiente motiva la definición de la homotopía F.



2. Sea $\alpha : I \to X$ un representante de las clases de caminos. Para probar la primera relación basta ver que $e_{x_0} * \alpha \simeq \alpha$. Para ello definamos $F : I \times I \to X$ por

$$F(s,t) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}s \\ \alpha(\dfrac{2t-s}{2-s}), & \dfrac{1}{2}s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Con F así definida se tiene que $F(t,0)=\alpha(t)$ y $F(t,1)=(e_{x_0}*\alpha)(t)$ además F es continua por el lema del pegamiento, por lo que es una homotopía de caminos



De forma similar se tiene obtiene la aplicación continua.

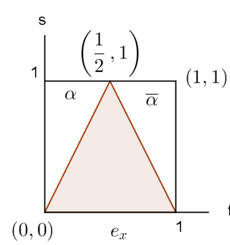
$$H(s,t)=\begin{cases}\alpha(\dfrac{2t-s}{2-s}), & 0\leq t\leq 1-\dfrac{1}{2}s\\ x_1, & 1-\dfrac{1}{2}s\leq t\leq 1\end{cases}$$

La cual es una homotopia entre $\alpha * e_{x_0}\simeq\alpha$

3. Para probar la primera ecuación basta demostrar que $\alpha*\overline{\alpha}\simeq e_{x_0}$ para esto definamos $F: I\times I\to X$ dada por

$$F(s,t)=\begin{cases}\alpha(2t), & 0\leq t\leq \dfrac{1}{2}s\\ \alpha(s), & \dfrac{1}{2}s\leq t\leq 1-\dfrac{1}{2}s\\ \alpha(2-2t), & 1-\dfrac{1}{2}s\leq t\leq 1\end{cases}$$

Con F así definida se tiene que $F(t,0)=\alpha(0)=e_{x_0}$ y $F(t,1)=(\alpha*\overline{\alpha})(t)$ ademas F es continua por el lema del pegamiento, por lo que es una homotopía de caminos



5.1.2. El grupo fundamental

El conjunto de las clases de homotopía de caminos en un espacio X no es un grupo con la operación $*$ por que el producto de dos clases de homotopía de caminos no está siempre definido y cada clase de homotopía tiene dos identidades. Pero supongamos que cogemos un punto x_0 de X que nos sirva como "punto base" y nos restringimos a aquellos caminos que comienzan y acaban en x_0. El conjunto de sus clases de homotoía de clase de caminos sí es un grupo con la operación $*$. Éste será denominado *grupo fundamental* de X.

Definición 5.4. Sea X un espacio topológico y x_0 un punto de X. Un camino en X que comienza y acaba en x_0 se llama ***lazo*** basado en x_0. El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociados a los lazos basados en x_0, con la operación $*$, se denomina ***grupo fundamental*** de X relativo al punto base x_0. Se denota por $\pi_1(X,x_0)$.

Este conjunto con la operación $*$ satisface los axiomas de grupo ya que es asociativo, existe el elemento neutro $[e_{x_0}]$ y éste es único y la existencia de un inverso $[\overline{\alpha}]$ para $[\alpha]$.

Ejemplo.
Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclideo n-dimensional. Veamos que $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ es el grupo trivial (consistente solo en el neutro), ya que si α es un lazo en $\mathbb{R}^n$ basado en x_0, la homotopía por rectas es una homotopía de caminos entre α y el camino constante x_0. En general si X es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial.

5.1.3. El efecto de una aplicación continua sobre el grupo fundamental.

Una pregunta importante de plantease es sobre la dependencia de el grupo fundamental de acuerdo al punto base que se ha seleccionado. Ahora trataremos de responder a esta interrogante.

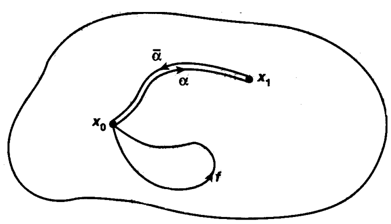
Definición 5.5. Sea α un camino en X de x_0 a x_1. Definamos la aplicación

$$\widehat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

por la ecuación

$$\widehat{\alpha}([f]) = [\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

La aplicación $\widehat{\alpha}$, está bien definida porque la operación $*$ está bien definida. Si f es un lazo basado en x_0, entonces $\overline{\alpha} * (f * \alpha)$ es un lazo basado en x_1.



Teorema 5.2. La aplicación $\widehat{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración.
Primero probemos que $\widehat{\alpha}$ es un homomorfismo, para ello tenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}([f]) * \widehat{\alpha}([g]) &= ([\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\overline{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\overline{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \widehat{\alpha}([f] * [g]).\end{aligned}$$

Para ver que $\widehat{\alpha}$ es isomorfismo, probaremos que si β denota el camino $\overline{\alpha}$ que es el inverso de α entonces $\widehat{\beta}$ es el inverso de $\widehat{\alpha}$ y calculamos $\widehat{\alpha}(\widehat{\beta}([h])$ para cada elemento $[h]$ de $\pi_1(X, x_1)$

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}([h]) &= [\overline{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\overline{\alpha}] \\ \widehat{\alpha}(\widehat{\beta}([h]) &= [\overline{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\overline{\alpha}]) * [\alpha] = [h].\end{aligned}$$

De forma analoga se tiene que $\widehat{\beta}(\widehat{\alpha}([f]) = [f]$ para todo $[f]$ de $\pi_1(X, x_0)$.

Corolario 5.1. Si X es conexo por caminos y x_0 y x_1 son dos puntos de X entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.

Definición 5.6. Un espacio X se dice que es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial para algún x_0 que pertenece a X.

Lema 5.2. En un espacio simplemente conexo X dos caminos cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son homotópicos por caminos.

Demostración. Sean α y β dos caminos de x_0 a x_1. Entonces $\alpha\overline{\beta}$ está definido y es un lazo en X basado en x_0. Dado que X es simplemente conexo este lazo es homotópico por caminos al lazo constante en x_0. Entonces

$$[\alpha * \overline{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta]$$

de donde se tiene que $[\alpha] = [\beta]$

Definición 5.7. Sea $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una aplicación continua. Definamos

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

por la ecuación

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

La aplicación h_* se denomina ***homorfismo inducido por*** h relativo al punto base x_0

La aplicación h_* está bien definida ya que si F es una homotopía de caminos entre f y f', entonces $h \circ F$ es una homotopía de caminos entre los caminos $h \circ f$ y $h \circ f'$. Además, el hecho de que h_* sea homomorfismo se deduce de la ecuación

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g).$$

El homomorfismo h_* no solo depende de h sino también de la elección del punto base x_0 por lo que utilizaremos la notación

$$(h_{x_0})_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

Teorema 5.3. Si $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $k : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ son continuas, entonces $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Si $i : (X, x_0) \to (X, x_0)$ es la aplicación identidad, entonces i_* es el homomorfismo identidad.

Demostración. Por definición de homomorfismo inducido tenemos que

$$\begin{aligned} (k \circ h)_*([f]) &= [k \circ h \circ f], \\ (k_* \circ h_*)([f]) &= k_*(h_*)([f]) = k_*([h \circ f]) = [k \circ h \circ f]. \end{aligned}$$

Análogamente, $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$.

Corolario 5.2. Si $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es un homeomorfismo entre X e Y entonces h_* es un isomorfismo entre $\pi(X, x_0)$ y $\pi(Y, y_0)$

Demostración. Consideremos $k : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ la inversa de h entonces se satisface $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$ donde i es la aplicación identidad de (X, x_0) y $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$ donde j es la aplicación identidad de (Y, y_0) dado que i_* y j_* son los homomorfismos identidad de los grupos $\pi(X, x_0)$ y $\pi(Y, y_0)$ respectivamente, k_* es la inversa de h_*.

Retracciones

Definición 5.8. Sea $A \subset X$, una **retracción** de X en A es una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r\mid_A$ es la aplicación identidad de A. Si existe dicha aplicacion r, decimos que A es un **retracto** de X.

Lema 5.3. Si A es un retracto de X, entonces el homomorfismo de grupos fundamentales inducido por la inclusión $j : A \to X$ es inyectiva.

Demostración.
Sea $r : X \to A$ una retracción entonces la aplicación compuesta $r \circ j$ es la identidad de A ya que como j es la aplicación inclusión de la cual se tiene que $j(a) = a$ para todo $a \in A$, además tenemos que $r\mid_A$ es la identidad en A es decir, $(r \circ j(a)) = a$, $\forall a \in A$, luego por el teorema 3 se tiene que el homomorfismo inducido por esta composición $r_* \circ j_*$ es la aplicación identidad de $\pi_1(A, a)$, por lo que j_* debe ser inyectiva.

Retractos de deformación y tipo de homotopía

En esta seccion estudiaremos un nuevo concepto que es el *tipo de homotopía*. Con el objetivo de reducir el problema de calcular el grupo fundamental de un espacio, esto lo hacemos calculando el grupo fundamental de otro espacio más conocido.

Lema 5.4. Sea $h, k : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ dos aplicaciones continuas. Si h y k son homotópicas y si la imagen del punto base x_0 de X permanece fija en y_0 durante la homotopía entonces los homomorfismos h_* y k_* coinciden.

Demostración.
Por hipótesis existe una homotopía $H : X \times I \to Y$ entre h y k tal que $H(x_0, t) = y_0$, para todo t. Se sigue que si f es un lazo en X basado en x_0, entonces la composición $(f \times I) \circ H$ donde

$$f \times id : I \times I \to X \times I$$

es una homotopía entre $h \circ f$ y $k \circ f$; es una homotopía de caminos por que f es un lazo en x_0 y H aplica $x_0 \times I$ en y_0

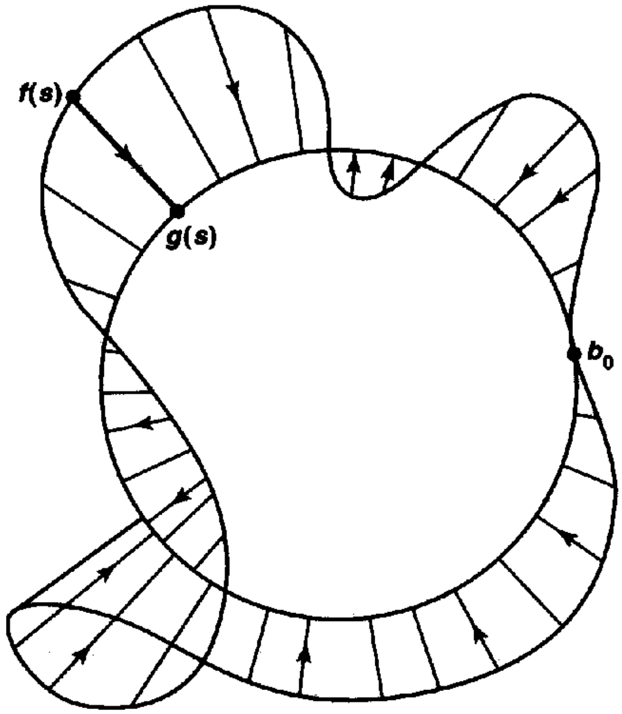
Teorema 5.4. La aplicación inclusión $j : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ induce un isomorfismo de grupos fundamentales.

Demostración.
Sea $X = \mathbb{R}_{n+1} - \{0\}$ y $b_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ sea $r : X \to S^n$ la aplicación $r(x) = \dfrac{x}{\| x \|}$. Entonces $r \circ j$ es la aplicación identidad de S^n, de manera que $r_* \circ j_*$ es el homomorfismo identidad de $\pi_1(S^n, b_0)$.
consideremos ahora la composición $j \circ r$, la cual aplica X en si mismo; ya que $r : X \to S^n$ y $j : S^n \to X$ pero esta aplicación no es la identidad, pero es homotopica a ella. La homotopía por rectas $H : X \times X \to X$ dada por

$$H(x, t) = (1 - x)t + \frac{tx}{\| x \|}$$

es una homotopía entre la identidada de X y la aplicación $j \circ r$, notemos que $H(x, t) = x$ y $H(x, 1) = j \circ r$. Notemos que el punto b_0 permanece fijo durante la homotopía ya que $\| b_0 \| = 1$. Por lo que el homomorfismo $(j \circ r)_* = j_* \circ r_*$ es el homomorfismo identidada en $\pi_1(X, b_0)$.

$\therefore$ j induce un isomorfismo de grupos fundamentales.



DEFINICIÓN 5.9. Sea A un subespacio de X. decimos que A es un **retracto de deformación** de X si la aplicación identidad de X es homotopíca a una aplicación que lleva todo X en A tal que cada punto de A permanece fijo durante la homotopía. Esto significa que existe una aplicación continua $H : X \times I \to X$ tal que $H(x, o) = x$ y $H(x, 1) \in A$ para todo $x \in X$, y $H(a, t) = a$ para todo $a \in A$ la homotopia H se llama **retracción de deformación** de X en A. La aplicación $r : X \to A$ definida por la ecuación $r(x) = H(x, 1)$ es una retracción de X en A y H es una homotopía entre la aplicación identidad de X y la aplicación $j \circ r$, donde $j : A \to X$ es la inclusión.

El resultado anterior podemos generalizarlo en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.5. Sea A un retracto de deformación de X en $x_0 \in A$. Entonces la aplicación inclusión

$$j : (A, x_0) \to (X, x_0)$$

induce un isomorfismo de grupos fundamentales.

DEFINICIÓN 5.10. Sea $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos aplicaciones continuas. Supongamos que la aplicación $g \circ f : X \to X$ es homotópica a la aplicación identidada de X y que la aplicación $f \circ g : Y \to Y$ es homotopica ala aplicación identidada de Y. Entonces las aplicaciones f y g se denominan **equivalencias homotópicas** y cada una de ellas se dice que es una inversa homotópica de la otra.

LEMA 5.5. Sean $h, k : X \to Y$ dos aplicaciones continuas con $h(x_0) = y_0$ y $k(x_0) = y_1$. Si h y k son homotópicas, entonces existe un camino α en Y de y_0 a y_1 tal que $k_* = \widehat{\alpha} \circ h_*$. Ciertamente, si $H : X \times I \to Y$ es una homotopia entre h y k, entonces α es el camino $\alpha(t) = H(x_0, t)$.

```tikzcd
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "h_*"] \arrow[dr, "k_*"'] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "\hat{\alpha}"] \\
 & \pi_1(Y, y_1)
```

Demostración.
Sea $f : I \to X$ un lazo en X basado en x_0. Debemos probar que

$$k_*([f]) = \widehat{\alpha}(h_*([f])).$$

Ahora esta ecuación es equivalente a $[k \circ f] = [\overline{\alpha}] * [h \circ f] * [\alpha]$, esto por definición de $\widehat{\alpha}$ y de h_*, además recordemos que $\overline{\alpha}$ es el camino inverso a α por lo que la ecuación nos queda

$$[\alpha] * [k \circ f] = [h \circ f] * [\alpha]$$

Ahora nos dedicaremos a demostrar esta última igualdad.

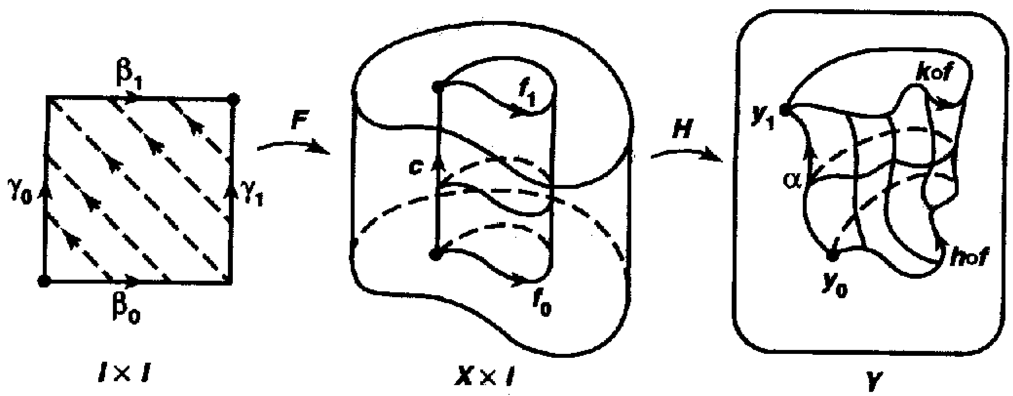
Consideremos los lazos f_0 y f_1 en el espacio $X \times I$ dados por las ecuaciones

$$f_0(s) = (f(s), 0) \qquad \text{y} \qquad f_1(s) = (f(s), 1).$$

Consideremos también el camino c en $X \times I$ dado por

$$c(t) = (x_0, t).$$

Entonces $H \circ f_0 = h \circ f$ y $H \circ f_1 = k \circ f$, mientras que $H \circ c = \alpha$



Sea $F : I \times I \to X \times I$ la aplicación $F(s,t) = (f(s), t)$. Consideremos los siguientes caminos

$$\beta_0(s) = (s, 0) \qquad \text{y} \qquad \beta_1(s) = (s, 1),$$

$$\gamma_0(s) = (0, t) \qquad \text{y} \qquad \gamma_1(s) = (1, t).$$

Entonces $F \circ \beta_0 = f_0$ y $F \circ \beta_1 = f_1$, mientras que $F \circ \gamma_0 = F \circ \gamma_1 = c$.

Los caminos rectos a trozos $\beta_0 * \gamma_1$ y $\gamma_0 * \beta_1$ son caminos en $I \times I$ de $(0,0)$ a $(1,1)$; como $I \times I$ es convexo, existe una homotópia de caminos G entre ellos. Entonces $F \circ G$ es una homotópia de caminos en $X \times I$ entre $f_0 * c$ y $c * f_1$. Y $H \circ (F \circ G)$ es una homotopia de caminos en Y entre

$$(H \circ f_0) * (H \circ c) = (h \circ f) * \alpha$$

y

$$(H \circ c) * (H \circ f_1) = \alpha * (k \circ f)$$

como queríamos.

Corolario 5.3. Sean $k, h : X \to Y$ aplicaciones continuas homotópicas satisfaciendo $h(x_0) = y_0$ y $k(x_0) = y_1$. Si h_* es inyectiva, sobeyectiva o trivial, entonces también lo es k_*.

Corolario 5.4. Sea $h : X \to Y$ una aplicación. Si h es homotopicamente nula, entonces h_* es el homomorfismo trivial.

Teorema 5.6. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua con $f(x_0) = y_0$. Si f es una equivalencia homotópica entonces

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

es un isomorfismo.

Demostración.
Sea $g : Y \to X$ una inversa homotópica para f. Consideremos las aplicaciones

$$(X, x_0) \xrightarrow{\ f\ } (Y, y_0) \xrightarrow{\ g\ } (X, x_1) \xrightarrow{\ f\ } (Y, y_1)$$

donde $x_1 = g(y_0)$ e $y_1 = f(x_1)$. Tenemos los correspondientes homomorfismos inducidos;

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "(f_{x_0})_*"] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[dl, "g_*"'] \\
\pi_1(X, x_1) \arrow[r, "(f_{x1})_*"] & \pi_1(Y, y_1)
\end{tikzcd}$$

Ahora bien

$$g \circ f : (X, x_0) \to (X, x_1)$$

es por hipótesis, homotópica a la aplicación identidad, ya que f es una equivalencia homotópica, de manera que existe un camino α en X tal que

$$(g \circ f)_* = \widehat{\alpha} \circ (i_X)_* = \widehat{\alpha}.$$

Por lo que $(g \circ f)_* = g_* \circ (f_{x_0})_*$ es un isomorfismo.

Análogamente, dado que $f \circ g$ es homotópica a la aplicación identidad i_Y, el homomorfismo $(f \circ g)_* = (f_{x_1}) \circ g - *$ es un isomorfismo.

De lo primero se tiene que g_* es sobreyectiva y lo segundo implica que g_* es inyectiva. Por lo que g_* es un isomorfismo. Además como

$$(f_{x_0})_* = (g_*)^{-1} \circ \widehat{\alpha},$$

entonces $(f_{x_0})_*$ es también un isomorfismo.

Observaciones.

1. La relación de equivalencia homotópica es más general que el concepto retracto de deformación.
2. El espacio figura ocho y el espacio theta son ambos retractos de deformación del plano doblemente agujerado, de manera que son equivalencias homotópicas, pero ninguno es homeomorfo a otro.
3. Si X es homeomorfo a Y entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(Y, y_0)$, el reciproco no se cumple.

4. Si $A \subset X$ y A es un retracto de X entonces tenemos que $\pi_1(A, x_0) \subseteq \pi_1(X, x_0)$.
5. Si $A \subset X$ y A es un retracto de deformación de X entonces tenemos que

$$\pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$$

.

5.2. El grupo fundamental de la circunferencia es cíclico infinito.

Sea S^1 la circunferencia unidad del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1$, (o de igual manera en el plano complejo $\mathbb{C}$). Sea $f : I \to S^1$ el camino cerrado definido por

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \qquad\qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

que recorre el círculo exactamente una vez. Designemos por α la clase de equivalencia de f.

Teorema 5.7. El grupo fundamental $\pi_1(S^1, (0, 1))$ es un grupo cíclico infinito generado por la clase del α.

Demostración. Sea $g : I \to S^1$, tal que $g(0) = g(1) = (0, 1)$ un camino cerrado en S^1. Probaremos que existe un entero m tal que g pertenece a la clase de α^m.

Sean

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1 : y > -\frac{1}{10}\},$$
$$U_2 = \{(x, y) \in S^1 : y < \frac{1}{10}\},$$

Tenemos que U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos conexos de S^1, un poco más grandes que una semicircunferencia, que cumplen que $U_1 \cup U_2 = S^1$. Observese que U_1 y U_2 son homeomorfos a un intervalo abierto en la recta real y portanto cada uno de ellos es contráctil. En el caso que $g(I) \subset U_1$ o $g(I) \subset U_2$, se tiene que g es el camino constante, y por tanto pertenece a la clase de equivalencia de α^0.

Supongamos que $g(I) \not\subset U_1$ y $g(I) \not\subset U_2$ Vamos a ver que podemos dividir el intervalo unidad en subintervalos $[0, t_1], [t_1, t_2], \ldots [t_{n-1}, 1]$ donde $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 0$ tales que

a) $g([t_i, t_{i+1}) \subset U_1$ o $g([t_i, t_{i+1}) \subset U_2$ para $0 \leqq i < n$.

b) $g([t_{i-1}, t_i)$ y $([t_i, t_{i+1})$ no están ambos contenidos en el mismo abierto U_j para $j = 1, 2$

Ya que $\{g^{-1}(U_1), g^{-1}(U_2)\}$ es un cubrimiento abierto de un espacio métrico compacto I; sea ϵ un número de Lebesgue[2] de éste recubrimiento.

Dividimos el intervalo unidad arbitrariamente en subintervalos de longitud $< \epsilon$. Con estas subdiviciones garantizamos la condición $a)$ pero podria fallar la condición $b)$. Si dos subintervalos consecutivos se aplican por g en el mismo conjuno U_i, entonces formamos con ellos un solo intervalo suprimiendo el extremo común. Se hace este

[2]Decimos que ϵ es un número de Lebesgue de un recubrimiento de un espacio métrico X, si todo subconjunto X de díametro $< \epsilon$ está contenido en algún miembro del recubrimiento. Existe un teorema que nos asegura que para todo recubrimiento abierto de un espacio métrico compacto existe un número de Lebesgue.

proceso hasta que cumpla b).

Sea β la clase de equivalencia del camino g y sea β_i la clase de equivalencia de $g|_{[t_{i-1},t_i]}$ para $1 \leqq i \leqq n$ entonces tenemos que

$$\beta = \beta_1 * \beta_2 * \ldots * \beta_n$$

Cada β_i es una clase de caminos de U_1 o U_2. Ya que estos cumplen con b) se tiene que $g(t_i) \in U_1 \cap U_2$ donde $U_1 \cap U_2$ tiene dos componentes una que contiene al punto $(1, 0)$ y otra al punto $(-1, 0)$.

Para cada indice i, $0 < i < n$, elijamos una clase de caminos γ_i en $U_1 \cap U_2$ con origen en $g(t_i)$ y extremo en $(1, 0)$ o $(-1, 0)$ segun la componente de $U_1 \cap U_2$ contenga a $g(t_i)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \beta_1 * \gamma_1, \\ \delta_i &= \gamma_{i-1}^{-1} * \beta_i * \gamma_i \qquad \text{para} \qquad 1 < i < n, \\ \delta_n &= \gamma_{n-1}^{-1} * \beta_n. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\beta = \delta_1 * \delta_2 * \ldots * \delta_n$$

donde cada δ_i es una clase de caminos en U_1 o U_2, que tiene sus origenes y sus extremos en el conjunto $\{(1, 0), (-1, 0)\}$. Dado que U_1 y U_2 son simplemente conexos, si δ_i es na clase de caminos cerrados, entonces $\delta_i = 1$. Supongamos que en la formula anterior ya han sido eliminados estos δ_i, y asi tenemos que $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ no son clases de caminos cerrados.

Puesto que U_1 es simplemente conexo existe una única clase de caminos η_i de U_1 con origen en $(1, 0)$ y extremo en $(-1, 0)$ por tanto η_1^{-1} es la única clase de caminos de U_1 con origen en $(-1, 0)$ y extremo en $(1, 0)$. De forma analoga designemos por η_2 la única clase de caminos de U_2 con origen en $(-1, 0)$ y extremo en $(1, 0)$. Observemos que $\eta_1 * \eta_2 = \alpha$. Así tenemos que para cada indice i

$$\delta_i = \eta_1^{\pm 1} \qquad o \qquad \delta_i = \eta_2^{\pm 1}$$

Teniendo este resultado en la caracterización de β podrian simplificarse algunos terminos, por ejemplo $\delta_i = \eta_1$ y $\delta_2 = \eta_1^{-1}$. Despues de hacer todas las simplificaciones posible sólo pueden presentarse tres posibilidades:

$$\begin{aligned} \beta &= 1, \\ \beta &= \eta_1 * \eta_2 * \eta_1 * \eta_2 * \ldots * \eta_1 * \eta_2, \\ \beta &= \eta_2^{-1} * \eta_1^{-1} * \eta_2^{-1} * \eta_1^{-1} * \ldots * \eta_2^{-1} * \eta_1^{-1} \end{aligned}$$

En el segundo caso existe un $m > 0$ tal que $\beta = \alpha^m$, mientas que en el tercer caso $\beta = \alpha^m$ para un cierto $m < 0$. Asıen cualquier caso tenemos que $\beta = \alpha^m$.

Con esto probamos que $\pi_1(S^1)$ es un grupo cíclico. Solo nos resta determinar el orden de este grupo. Para probar que $\pi_1(S^1)$ no es un grupo finito. Lo que nos garantiza esto es el hecho de que para cada entero m la aplicación

$h_m : I \to S^1$ definida por

$$h_m(t) = cosm\pi t + isenm\pi t$$

tiene grado m, intuitivamente hablando una clase de caminos me da determina el número de vueltas que se están dando en la circunferencia. por lo tanto $\pi_1(S^1)$ es un grupo ciclico infinito. $\square$

5.3. El grupo fundamental de un espacio producto

Consideremos aquí varias superficies, incluyendo el toro y doble toro, para determinar que sus grupos fundamentales no son isomorfos para así concluir que estos espacios no son homeomorfos.

Primero recordemos un poco de teoría de grupos, si A y B son grupos con operación, entonces el producto cartesiano tiene estructura de grupo con la operación

$$(a \times b).(a' \times b') = (a.a') \times (b.b').$$

Además recordemos también que si $h : C \to A$ y $k : C \to B$ son homomorfismos de grupos, entonces la aplicacion $\phi : C \to A \times B$ definida por $\phi(c) = h(c) \times k(c)$ es un homomorfismo de grupos.

Teorema 5.8. $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$

Demostración.
Sean $p : X \times Y \to X$ y $q : X \times Y \to Y$ las aplicaciones proyección. Ahora consideremos los puntos base del enunciado del teorema, ya que estas aplicaciones son homeomorfismos podemos considerar los homo morfismos inducidos por éstas

$$p_* : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \to \pi_1(X, x_0)$$
$$q_* : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

Definamos el homomorfismo

$$\phi : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

por la ecuación

$$\phi([f]) = p_*([f]) \times q_*([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f].$$

Ahora probemos que ϕ es un isomorfismo.

La aplicación ϕ es sobreyectiva. Sea $g : I \to X$ un lazo basado en x_0 y sea $h : I \to Y$ un lazo basado en y_0, Queremos ver que el elemento $[g] \times [h]$ está en la imagen de ϕ. Definamos $f : I \to X \times Y$ por la ecuación

$$f(s) = g(s) \times h(s).$$

Entonces f es un lazo en $X \times Y$ basado en $x_0 \times y_0$ y

$$\phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f] = [g] \times [h]$$

de esta forma se tiene que $[f]$ es la preimagen de $[g] \times [h]$.

Ahora veamos que el homomorfismo ϕ es inyectivo, para esto analicemos el núcleo Supongamos que $f : I \to X \times Y$ es un lazo en $X \times Y$ basado en $x_0 \times y_0$ y tal que $\phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f]$ es el elemento neutro. Es decir, $p \circ f \simeq_p e_{x_0}$ y $q \circ f \simeq_p e_{y_0}$; sean G y H las respectivas homotopías de caminos. Entonces la aplicación $F : I \times I \to X \times Y$ definida por

$$F(s, t) = G(s, t) \times H(s, t)$$

es una homotopía de caminos entre f y el lazo constante $x_0 \times y_0$.
$\therefore$ ϕ es un isomorfismo.

Una consecuencia inmediata de este resultado es el siguiente corolario.

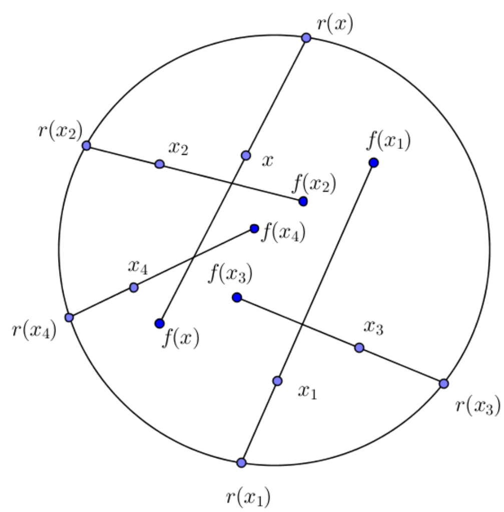
Corolario 5.5. El grupo fundamental del toro $T = S^1 \times S^1$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

5.4. Aplicacion: El teorema del punto fijo de Brouwer

En esta sección estudiaremos una aplicacion del grupo fundamental para la demostración de un teorema importante el cual es **El teorema del punto fijo de Brouwer**.
Teorema del punto fijo de Brouwer
Sea $f : D^2 \to D^2$ es continua entonces existe un punto $x \in D^2$ tal que $f(x) = x$.

Demostración.
La prueba se sigue por reducción al absurdo. Supongamos que $f(x) \neq x$ para todo $x \in D^2$ Ahora como $S^1 \subset D^2$ podemos definir una retacción $r : D^2 \to S^1$ tal que para cada $x \in S^1$ $r(x) = x$.

Describamos lo que hace esta retracción, esta función tomamos un punto x de D^2 y este lo aplica atraves de r a la intersección de S^1 con la semirecta que parte de $f(x)$ hacia x como se muestra en la figura.



Esta función orientada de está forma siempre esta definida ya que $f(x) \neq x$ y siempre puedo trazar estas rectas. Así r es una retracción y S^1 es un retracto de D^2 por lo que

$$\pi_1(S^1, x_0) \subseteq \pi_1(D^2, x_0)$$

lo cual es una contradicción ya que $\pi_1(S^1, x_0) \cong (\mathbb{Z}, +)$ y $\pi_1(D^2, x_0)$ es trivial.

$\therefore \exists x \in D^2$ tal que $f(x) = x$

6. Teorema de Seifert-Van Kampen

En el presente capítulo se hace un estudio del teorema de Seifert-Van Kampen, el cual nos da una herramienta para calcular algunos grupos fundamentales, y se estudiaran algunas aplicaciones de este teorema.

6.1. El teorema de Seifert-Van Kampen.

Teorema 6.1 (Teorema de Seifert-Van Kampen). Sea X un espacio topológico tal que $X = U \cup V$, donde U, V y $U \cap V$ son subconjuntos abiertos, arcoconexos y no vacíos de X. Sea $x_0 \in U \cap V$.

Supongamos que conocemos las presentaciones de los grupos fundamentales de esos subespacios de X:

$$\pi_1(U \cap V, x_0) =< S; R >$$

$$\pi_1(U, x_0) =< S_1; R_1 >$$
$$\pi_1(V, x_0) =< S_2; R_2 >$$

Consideremos las inclusiones $\varphi_1 : U \cap V \to U$, $\varphi_2 : U \cap V \to V$, $\psi_1 : U \to X$ y $\psi_2 : V \to X$, y los correspondientes homomorfismos inducidos $\varphi_{1*} : \pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(U, x_0)$, $\varphi_{2*} : \pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(V, x_0)$, $\psi_{1*} : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ y $\psi_{2*} : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ el siguiente esquema muestra los homomorfismos inducidos por las inclusiones.

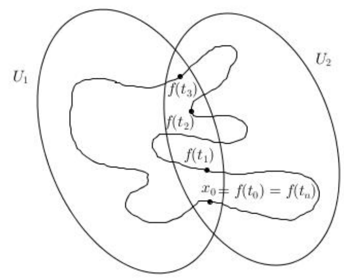
$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(U) \arrow[dr, "\psi_{1*}"] & \\
\pi_1\left(U \bigcap V\right) \arrow[ur, "\varphi_{1*}"] \arrow[dr, "\varphi_{2*}"'] & & \pi_1(X, x_0) \\
& \pi_1(V) \arrow[ur, "\psi_{2*}"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces se verifica que
$$\pi_1(X, x_0) =< \psi_{1*}(S_1) \cup \psi_{2*}(S_2); R_1 \cup R_2 \cup R_s >$$
siendo $R_s = \{$"$\varphi_{*1}(s)''$ = "$\varphi_{2*}(s)''|s \in S\}$ donde "$\varphi_{i*}(s)$" es la expresión de $\varphi_{i*}(s)$ en términos de los generadores S_i .

Demostración. Dividiremos nuestra demostración en dos partes, en la primera de ellas trataremos los generadores y en la segunda las relaciones.

Proposición 6.1. Para todo $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ se tiene que $\alpha = \prod \psi_{\lambda *}(\alpha_k)$ donde $\alpha_k \in \pi_1(U, x_0)$ o $\alpha_k \in \pi_1(V, x_0)$ con $\lambda \in \{1, 2\}$.

Demostración. Sea $\alpha = [f] \in \pi_1(X, x_0)$, donde f es un lazo en X basado en x_0. Consideremos el cubrimiento abierto $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ de I y sea δ un número de Lebesgue asociado a dicho cubrimiento. Consideremos una partición $0 = t_0 < t1 < \ldots < t_n = 1$ de I tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$, entonces $f([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ ó $f([t_{i-1}, t_i]) \subset V$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

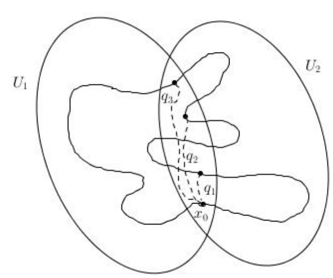


Notemos que podemos suponer que para todo $i = 0, \ldots, n$, $f(t_i) \in U \cap V$.(En efecto, si $f(t_i) \notin U \cap V$, entonces $f([t_{i-1}, t_i])$ y $f([t_i, t_{i+1}])$ están ambos contenidos en U o ambos contenidos en V ; entonces, considerando el intervalo $[t_{i-1}, t_{i+1}]$, éste cumple que está contenido en U o en V . Reiterando este proceso, se obtiene una nueva partición $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ con $m < n$ verificando que $f([s_j, s_{j+1}]) \subset U$ ó $f([s_j, s_{j+1}]) \subset V$ para todo $j = 0, \ldots, m-1$ y $f(s_j) \in U \cap V$).
Consideremos los caminos $f_i : I \to X$ definidos por $f_i(t) = f((1-t)t_{i-1} + tt_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Cada f_i es un camino que está en U ó en V , con origen $f(t_i - 1)$ y extremo $f(t_i)$ ambos en $U \cap V$. Utilizando una reparametrización puede verse que, como caminos en X, se verifica que

$$f \approx f_1 * f_2 * \ldots * f_n$$

.

Elegimos ahora, para $i = 1, \ldots, n$, caminos $q_i : I \to X$ tales que $q_i(0) = x_0$, $q_i(1) = f(t_i)$ y $q_i(t) \in U \cap V$, $\forall t \in I$ (notemos que podemos hacerlo puesto que x_0 y $f(t_i)$ pertenecen a $U \cap V$ que es arcoconexo).



Por las propiedades del producto de caminos, se verifica que

$$(q_0 * f_1 * \overline{q_1}) * (q_1 * f_2 * \overline{q_2}) * \ldots * (q_{n-1} * f_n * \overline{q_n}) \approx f_1 * f_2 * \ldots * f_n \approx f.$$

Por lo tanto, en el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$, tendremos que

$$[q_0 * f_1 * \overline{q_1}] * [q_1 * f_2 * \overline{q}_2] * \ldots * [q_{n-1} * f_n * \overline{q_n}] = [f].$$

Ahora bien, notemos que cada $q_i * f_{i+1} * \overline{q_{i+1}}$ es un lazo en X basado en x_0 y su imagen está contenida enteramente en U ó en V; por tanto, $[q_i * f_{i+1} * \overline{q_{i+1}}]$ es un elemento de $\psi_{1*}(\pi_1(U, x_0))$ o de $\psi_{2*}(\pi_1(V, x_0))$. Luego $\alpha = [f]$ es un producto finito de imágenes de elementos de $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$.

Corolario 6.1. $\pi_1(X, x_0)$ está generado por $\psi_{1*}(S_1) \cup \psi_{2*}(S_2)$.

□

RELACIONES :

Proposición 6.2. (i) Los generadores $\psi_{1*}(S_1) \cup \psi_{2*}(S_2)$ de $\pi_1(X, x_0)$ satisfacen las relaciones $R_1 \cup R_2 \cup R_s$.

(ii) Cualquier relación satisfecha por los elementos de $\psi_{1*}(S_1) \cup \psi_{2*}(S_2)$ en $\pi_1(X, x_0)$ es una consecuencia de las relaciones $R_1 \cup R_2 \cup R_s$.

Demostración. (i) Como $\psi_{1*} : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ y $\psi_{2*} : \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ son homomorfismos, una relación satisfecha por los elementos de S_1 en $\psi_{1*} : \pi_1(U, x_0)$ o S_2 en $\psi_{1*} : \pi_1(V, x_0)$, se satisface también por los elementos de $\psi_{j*}(S_j) \subset \pi_1(X, x_0)$ para $j = 1, 2$, esto significa que los elementos de $\psi_{1*}(S_1) \cup \psi_{2*}(S_2)$ en $\pi_1(X, x_0)$ satisfacen las relaciones $R_1 \cup R_2$.

Por otra parte, puesto que el diagrama de inclusiones es conmutativo ($\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$), se tiene que para todo $s \in S \subset \pi_1(U \cap V, x_0)$, $\psi_{1*} \circ \varphi_{1*}(s) = \psi_{2*} \circ \varphi_{2*}(s)$. Por tanto, para $s \in S$, si una palabra en S_j representa a $\varphi_{j*}(s)$, entonces la misma palabra en S_j representa a $\psi_{j*} \circ \varphi_{j*}(s)$ en $\pi_1(X, x_0)$. Por lo tanto, "$\varphi_{*1}(s)'' =$ "$\varphi_{2*}(s)''$ para todo $s \in S$, luego se satisfacen las relaciones R_s.

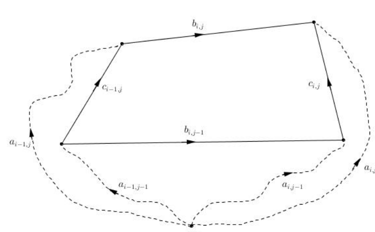
(ii) Supongamos que tenemos una relación $\alpha_1^{\epsilon_1} \alpha_2^{\epsilon_2} \ldots \alpha_k^{\epsilon_k} = 1$ entre los elementos de $\psi_{1*}(S_1) \cup \psi_{2*}(S_2) \subset \pi_1(X, x_0)$, con $\epsilon_i = \pm 1$ y $\alpha_i \in S_\lambda$ para cada $i = 1, \ldots, k$, $\lambda \in \{1, 2\}$

Supongamos que f_i es un lazo en U o en V basado en x_0 que representa a $\alpha_i^{\epsilon_i}$ en $\pi_1(X, x_0)$; es decir, $\alpha_i^{\epsilon_i} = [f_i]$ en $\pi_1(X, x_0)$.

Ahora, consideramos el lazo $f : I \to X$ definido a trozos por $f_i \circ h_i = f|_{[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]} : [\frac{i+1}{k}, \frac{i}{k}] \cong [0, 1] \to X$, donde h_i es el homeomorfismo estándar cuya fórmula es $h_i(t) = kt - i + 1$, luego $f(t) = f_i(kt - i + 1)$ para cada t, donde $\frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{k}{i}$. Entonces se verifica que $f \simeq f_1 * f_2 * \ldots * f_k$ en X; es decir, $[f] = [f_1] * [f_2] * \ldots * [f_k]$ en $\pi_1(X, x_0)$.

Puesto que, por hipótesis, $\alpha_1^{\epsilon_1} \alpha_2^{\epsilon_2} \ldots \alpha_k^{\epsilon_k} = 1$, se tiene que $f \simeq e_{x_0}$ en X, y por tanto, existe una aplicación continua $F : I \times I \to X$ tal que $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = x_0$, $F(0, s) = x_0 = F(1, s)$, $\forall t, s \in I$. Consideremos el cubrimiento abierto $\{F^{-1}(U), F^{-1}(V)\}$ de $I \times I$ y sea δ un número de Lebesgue asociado al cubrimiento. Entonces, existen particiones $0 = t_0 < \ldots < t_m = 1$ y $0 = s_0 < \ldots < s_n = 1$ tales que cada rectángulo $R_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ es de diámetro menor que δ, y por tanto $F(R_{ij}) \subset U$ o $F(R_{ij}) \subset V$.

Áhora, consideremos los siguientes caminos: $b_{ij} : [0, 1] \cong [t_{i-1}, t_j] \times \{s_j\} \to X$, $c_{ij} : [0, 1] \cong \{t_i\} \times [s_{j-1}, s_j] \to X$, donde tanto b_{ij} como c_{ij} son la composición de la restricción de F con el homeomorfismo estándar correspondiente, y $a_{ij} : [0, 1] \to X$ es un camino cualquiera que una x_0 con $F(t_i, s_j)$, de modo que los caminos anteriores están en U, V ó $U \cap V$ según $F(R_{ij})$ esté contenido en U, V ó $U \cap V$.



Notemos que siempre existe el camino a_{ij} porque U , V y $U \cap V$ son arcoconexos, y que se verifica que $f \simeq b_{10} * b_{20} * \ldots * b_{m0}$ y $e_{x_0} \simeq b_{1n} * b_{2n} * \ldots * b_{mn}$. Además, los caminos $b_{i,j-1} * c_{ij}$ y $c_{i-1,j} * b_{ij}$ son equivalentes (intuitivamente basta mover los caminos dentro de la región $F(R_{ij})$). Podemos dar explícitamente la equivalencia de estos caminos mediante la homotopía $H : I \times I \to X$ definida por

$$G(s,t) = \begin{cases} F((1-s)((1-2t)t_{i-1} + 2tt_i) + st_{i-1}, (1-s)s_{j-1} + s((1-2t)s_{j-1} + 2ts_j)) & \text{para } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F((1-s)t_i + s((2-2t)(t_{i-1} + (2t-1)t_i)), (1-s)((2-2t)s_{j-1} + (2t-1)s_j) + ss_j)) & \text{para } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Observemos que $H(I \times I)$ está contenido en U, V ó $U \cap V$ según que $F(R_{ij})$ esté contenido en U, V o $U \cap V$ respectivamente.

Consideremos ahora los siguientes lazos basados en x_0, $f_{ij} = (a_{i-1,j} * b_{ij}) * \overline{a}_{ij}$ y $g_{ij} = (a_{i,j-1} * c_{ij}) * \overline{a}_{ij}$. Puesto que $b_{i,j-1} * c_{ij} \simeq c_{i-1,j} * b_{ij}$, se tiene que $f_{i,j-1} * g_{ij} \simeq g_{i-1,j} * f_{ij}$, en U, V ó $U \cap V$ según que $F(R_{ij})$ esté contenido en U, V o $U \cap V$ respectivamente.

Así, $[f_{i,j-1}] = [g_{i-1,j}] * [f_{ij}] * [\overline{g}_{ij}]$. Si expresamos cada uno de estos elementos como palabras en S_1 o en S_2, se cumple la relación: "$[f_{i,j-1}]$" = "$[g_{i-1,j}]$""$[f_{ij}]$""$[\overline{g}_{ij}]$" en $\pi_1(U, x_0)$ o en $\pi_1(V, x_0)$.

Por tanto, la relación $[f_{i,j-1}] = [g_{i-1,j}] * [f_{ij}] * [\overline{g}_{ij}]$ es consecuencia de R_1 o R_2.

Supongamos ahora que $\dfrac{1}{k} = t_{i(1)}$. Puesto que $f_1 \simeq b_{10} * \ldots * b_{i(1)0}$ y $f_{r0} \simeq a_{r-1,0} * b_{r0} * a_{r0}$, se tiene que

$$f_1 \simeq f_{10} * f_{20} * \ldots * f_{i(1)0}.$$

Como f_1 es un lazo en U o en V basado en x_0 , podemos usar las relaciones R_1 o R_2 al expresar $[f_{10}] * [f_{20}] \ldots * [f_{i(1)0}]$ como palabras en S_1 o S_2. Así, tenemos la relación

$$\alpha_1^{\epsilon_1} = [f_1] = [f_{10}] * [f_{20}] \ldots * [f_{i(1)0}]$$

que será una consecuencia de las relaciones R_1 ó R_2. Si procedemos de modo análogo, en lugar de para $\alpha_1^{\epsilon_1}$, para $\alpha_2^{\epsilon_2}, \ldots, \alpha_k^{\epsilon_k}$, se tiene que $\alpha_1^{\epsilon_1}\alpha_2^{\epsilon_2} \ldots \alpha_k^{\epsilon_k} = [f_{10}] * [f_{20}] * \ldots * [f_{m0}]$ que será una relación consecuencia de las relaciones R_1 y R_2.

Ahora, utilizando que $[f_{i,0}] = [g_{i-1,1}][f_{i1}][\overline{g}_{i1}]$ y que $\alpha_1^{\epsilon_1}\alpha_2^{\epsilon_2} \ldots \alpha_k^{\epsilon_k} = [f_{10}] * [f_{20}] * \ldots * [f_{m0}]$, obtenemos que

$$\alpha_1^{\epsilon_1}\alpha_2^{\epsilon_2} \ldots \alpha_k^{\epsilon_k} = [g_{01}][f_{11}][\overline{g}_{11}][g_{1,1}][f_{21}][\overline{g}_{21}] \ldots [g_{m-1,1}][f_{m1}][\overline{g}_{m1}]$$

que es una relación consecuencia de R_1 y R_2. Notemos que, como $g_{01} = e_{x_0} = g_{m1}$, se tiene que $[g_{01}] = 1$ y $[g_{m1}] = 1$ son relaciones triviales.

Además, la relación $[\overline{g}_{j1}][g_{j1}] = 1$ también es trivial si ambos están expresados como palabras en S_1 o en S_2.

Pero si g_{j1} es un camino en $U \cap V$ es posible que $[\overline{g}_{j1}]$ esté expresado, por ejemplo, como palabra en S_1 y $[g_{j1}]$ esté expresado como palabra en S_2. En este caso, la relación $[\overline{g}_{j1}][g_{j1}] = 1$ es consecuencia de las relaciones R_1 , R_2 y R_s. Aplicando todo esto, tenemos la relación

$$\alpha_1^{\epsilon_1}\alpha_2^{\epsilon_2} \ldots \alpha_k^{\epsilon_k} = [f_{11}][f_{21}] \ldots [f_{m1}]$$

como consecuencia de las relaciones R_1, R_2 y R_s. Repitiendo este proceso, se llega a la relación:

$$\alpha_1^{\epsilon_1}\alpha_2^{\epsilon_2} \ldots \alpha_k^{\epsilon_k} = [f_{1n}][f_{2n}] \ldots [f_{mn}] = [e_{x_0}] \ldots [e_{x_0}] = 1$$

como una consecuencia de las relaciones R_1 , R_2 y R_s.

□

□

Proposición 6.3. $\pi_1(X)$ está caracterizado salvo isomorfismos.

Demostración. Sea G un grupo y ψ_1', ψ_2' y ψ_3' homomorfismos con las siguientes propiedades:

1. El diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U) \arrow[dr, "\psi_1'"] & \\ \pi_1(U \bigcap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\psi_3'"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & G \\ & \pi_1(V) \arrow[ur, "\psi_2'"'] & \end{tikzcd}$$

2. Dado un grupo H arbitrario y una colección de homomorfismos ρ_1, ρ_2 , ρ_3 tales que hagan conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U) \arrow[dr, "\rho_1"] & \\ \pi_1(U \bigcap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\rho_3"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & H \\ & \pi_1(V) \arrow[ur, "\rho_2"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces existe un único homomorfismo $\sigma : G \to H$ tal que los tres siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U) \arrow[r, "\psi_1'"] \arrow[d, "\rho_1"'] & G \arrow[dl, "\sigma'"'] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[r, "\psi_2'"] \arrow[d, "\rho_2"'] & G \arrow[dl, "\sigma'"'] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3'"] \arrow[d, "\rho_3"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma'"'] \\ H & \end{tikzcd}$$

Probemos que $G \cong \pi_1(X)$. Por funtorialidad[1] tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U) \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ \pi_1(U \bigcap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\psi_3"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & G \\ & \pi_1(V) \arrow[ur, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

que es inducido por el siguiente diagrama conmutativo de inclusiones

Por hipótesis tenemos que existe un único homomorfismo $k : G \to \pi_1(X)$ que hace conmutar los diagramas siguientes

[1]Es decir, $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$ y $id_* = id$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U) \arrow[r, "\psi_1'"] \arrow[d, "\psi_1"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "k"'] \\ G & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[r, "\psi_2'"] \arrow[d, "\psi_2"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "k"'] \\ G & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(U\cap V) \arrow[r, "\psi_3'"] \arrow[d, "\psi_3"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "k"'] \\ G & \end{tikzcd}$$

Además por el teorema 6.1 existe un único homomorfismo $h : \pi_1(X) \to G$ tal que los siguientes tres diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_1'"'] & G \arrow[dl, "h"'] \\ \pi_1(X) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\psi_2'"'] & G \arrow[dl, "h"'] \\ \pi_1(X) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(U\cap V) \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\psi_3'"'] & G \arrow[dl, "h"'] \\ \pi_1(X) & \end{tikzcd}$$

Luego juntando los diagramas anteriores tenemos estos diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U) \arrow[r, "\psi_1'"] \arrow[d, "\psi_1'"'] & G \arrow[dl, "hk"'] \\ G & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[r, "\psi_2'"] \arrow[d, "\psi_2'"'] & G \arrow[dl, "hk"'] \\ G & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(U\cap V) \arrow[r, "\psi_3'"] \arrow[d, "\psi_3'"'] & G \arrow[dl, "hk"'] \\ G & \end{tikzcd}$$

dado que la $Id_G : G \to G$ también hace conmutar estos tres diagramas, y por hipótesis, hk es el único que hace conmutar los tres diagramas, entonces tenemos que $hk = Id_G$. De manera análoga, podemos obtener que $kh = Id_{\pi_1(X)}$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_1"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "kh"'] \\ \pi_1(X) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\psi_2"'] & \pi_1(X)kh \arrow[dl, "kh"'] \\ \pi_1(X) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(U\cap V) \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\psi_3"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "kh"'] \\ \pi_1(X) & \end{tikzcd}$$

de ambas tenemos que h y k son biyectivas y por lo tanto isomorfismos que era lo que se quería probar.

$\square$

6.2. Primera aplicacion del teorema.

Supongamos que $X = U \cup V$, $U \cap V \neq \emptyset$ además U, V abiertos y $U \cap V$ es conexo por trayectorias y φ_i , ψ_i con el mismo significado que en el teorema 6.1

Teorema 6.2. Si $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1(X)$ es el producto libre de $\pi_1(U)$ y $\pi_1(V)$ respecto a los homomorfismos $\psi_1 : \pi_1(U) \to \pi_1(X)$, $\psi_2 : \pi_1(V) \to \pi_1(X)$.

Demostración. Sea H un grupo arbitrario y sean $\rho_1 : \pi_1(U) \to H$, $\rho_2 : \pi_1(V) \to H$ homomorfismos arbitrarios, tendremos que demostrar que existe un único homomorfismo $\sigma : \pi_1(X) \to H$ tal que los diagramas siguientes conmuten

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\rho_2"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd}$$

Como por hipótesis $\pi_1(U \cap V) = \{1\}$, sea el homomorfismo $\rho_3 : \pi_1(U \cap V) \to H$ definido por $\rho_3(1) = 1$. Entonces el siguiente diagrama es trivialmente conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U_1) \arrow[dr, "\rho_{1*}"] & \\ \pi_1\left(U_1 \bigcap U_2\right) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\rho_3"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \pi_1(X, x_0) \\ & \pi_1(U_2) \arrow[ur, "\rho_2"'] & \end{tikzcd}$$

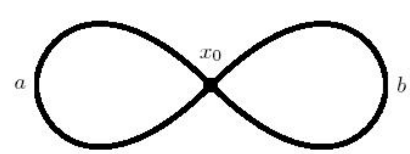
y por el teorema 6.1 existe un único homomorfismo $\sigma : \pi_1(X) \to H$ que hace conmutar los tres diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\rho_2"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\rho_3"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd}$$

como el tercer diagrama conmuta independientemente de cual sea el homomorfismo σ, entonces σ es el único que hace conmutar los dos primeros diagramas, y por lo tanto, $\pi_1(X)$ es el producto libre de $\pi_1(U)$ y de $\pi_1(V)$. $\square$

Calculemos ahora algunos grupos fundamentales usando el teorema 6.2, como el de la figura de ocho y más generalmente, la rosa de n pétalos.

Proposición 6.4. Sea X un espacio topológico tal que $X = A \cup B$, $A \cap B = \{x_0\}$ y A y B son homeomorfos a S^1 entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo libre de dos generadores.

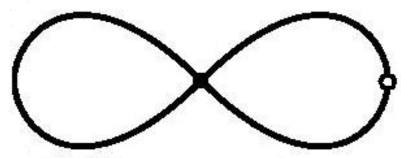


Demostración. Si A y B fueran abiertos podríamos utilizar directamente el teorema 6.2, pero no lo son. Sin embargo haremos unas modificaciones ligeras para obtener conjuntos abiertos. Sea $a \in A - \{x_0\}$ y $b \in B - \{x_0\}$ entonces, definamos

$$U = X - \{a\}$$

$$V = X - \{b\}$$

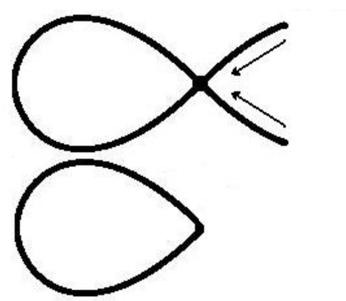
Entonces ambos U, V son abiertos y son homeomorfos a una circunferencia con dos antenas



y además

$$U \cap V = X - \{a, b\}$$

es contraíble. Por otra parte A, B son retractos de deformación de U y V respectivamente, por lo que



$$\pi_1(A, x_0) = \pi_1(U, x_0)$$
$$\pi_1(B, x_0) = \pi_1(V, x_0)$$

Ahora podemos utilizar el teorema 6.2 sobre los conjuntos abiertos U, V para obtener que $\pi_1(X, x_0)$ es el producto libre de $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$, así que

$$\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

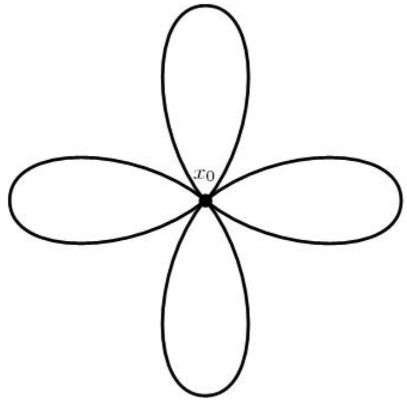
□

Sea E^2 el disco unitario cerrado en $\mathbb{R}^2$, sean a; b puntos distintos en el interior de E^2, sea $Y = E^2 - \{a, b\}$, entonces podemos encontrar $X \subset Y$ tal que X sea la unión de dos círculos y cada círculo rodea a cada punto a; b y X es un retracto de deformación de Y así que $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$ es el grupo libre de dos generadores. Podemos aplicar el mismo razonamiendo si consideramos el disco abierto menos dos puntos, o todo el plano menos dos puntos, etc. o en lugar de quitar un punto, podemos quitar todo un disco pequeño y el resultado es el mismo.

Proposición 6.5. Sea X la unión de n circunferencias con un sólo punto x_0 en común, es decir,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

y cada A_i es homeomorfo a S^1 y $A_i \cap A_j = x_0$ si $i \neq j$. El espacio topológico X puede dibujarse como una rosa de n pétalos. Entonces $\pi_1(X; x_0)$ es el grupo libre de n generadores.



Demostración. Procedamos por inducción respecto a n, ya se mostró que el teorema es válido para $n = 2$: Supongamos que

$$X_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

supongamos que

$$\pi_1(X_n, x_0) = \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}}$$

luego hagamos un razonamiento análogo al de la prueba en la proposición anterior. Sea $a_k \in A_k - \{x_0\}$ para cada $k \leq n+1$ y entonces definamos

$$U = X_{n+1} - \{a_{n+1}\}$$
$$V = X_{n+1} - \{a_k\}_{k=1}^{n}$$

ambos son abiertos en el espacio topológico X_{n+1} y también $U \cap V = X_{n+1} - \{a_k\}_{k=1}^{n+1}$ es contraíble; Además $\pi_1(V; x_0) = \pi_1(S^1)$; pues V es un retracto de deformación de S^1. Ahora podemos usar el teorema 6.2 y obtenemos que $\pi_1(Xn+1; x_0)$ es el producto libre de ß$_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$

$$\begin{aligned} \pi_1(X_{n+1}, x_0) &= \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \\ &= \pi_1(X_n, x_0) * \pi_1(S^1, x_0) \\ &= \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}}_{n+1 \text{ veces}} \end{aligned}$$

lo que prueba esta proposición.

□

6.3. Segunda aplicacion del teorema.

Asumamos nuevamente las hipotesis del teorema 6.1 : U, V, $U \cap V$ subconjuntos abiertos y conexos por trayectorias de un espacio topológico X tales que $X = U \cup V$ y $x_0 \in U \cap V$.

Teorema 6.3. Supongamos que V es simplemente conexo. Entonces $\psi_1 : \pi_(U) \to \pi_1(X)$ es un epimorfismo, y aún más, su núcleo es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U)$ que contiene a la imagen $\varphi_1(\pi_1(U \cap V))$, en otras palabras

$$ker(\psi_1) = \overline{\langle \varphi_1(\pi_1(U \cap V)) \rangle}$$

Note que este teorema determina por completo la estructura de $\pi_1(X)$ pues éste es isomorfo al cociente $\pi_1(U)/\overline{\langle \varphi_1(\pi_1(U \cap V) \rangle}$.

Demostración. Veamos primero que ψ_1 es un epimorfismo. Tenemos que el siguiente diagrama que es conmutativo por functorialidad

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U) \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ \pi_1\left(U \bigcap V\right) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\psi_3"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \pi_1(X, x_0) \\ & \pi_1(V) \arrow[ur, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

notemos que $Im(\varphi_1) \subset ker(\psi_1)$, lo usaremos más adelante en esta prueba. Ahora, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U) \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ \pi_1\left(U \bigcap V\right) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\psi_3 \equiv 1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \psi_1(\pi_1(U)) \\ & \pi_1(V) \arrow[ur, "\psi_2 \equiv 1"'] & \end{tikzcd}$$

así, se cumplen las hipótesis del teorema 6.1 entonces existe un único homomorfismo $\sigma : \pi_1(X) \to \psi_1(\pi_1(U))$ tal que los tres siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\rho_2"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\rho_3"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd}$$

y por otra parte, los tres siguientes diagramas tambien conmutan

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\rho_2"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V) \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\rho_3"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd}$$

entonces los diagramas siguientes conmutan

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\rho_2"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\ H & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U\cap V) \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\rho_3"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\
H &
\end{tikzcd}$$

pero el homomorfismo identidad también hace conmutar estos diagramas así que $i\circ\sigma = Id$ y entonces $i : \psi_1(\pi_1(U)) \to \pi_1(X)$ es sobreyectiva, lo que implica que $\psi_1(\pi_1(U)) = \pi_1(X)$ y entonces ψ_1 es un epimorfismo.

Ahora probemos la segunda parte del teorema, que

$$ker(\psi_1) = \overline{\langle\varphi_1(\pi_1(U\cap V)\rangle}.$$

Ya hemos visto que $Im(\varphi_1) \subset ker(\psi_1)$ denotemos $N = ker(\psi_1) = \overline{\langle\varphi_1(\pi_1(U\cap V)\rangle}$ entonces

como $ker(\psi_1)$ es un subgrupo normal de $\pi_1(U)$ se tiene que

$$N \subset ker\psi_1$$

veamos la otra contención. Sea $\rho_1 : \pi_1(U) \to \pi_1(U)/N$ la proyección natural, $\rho_2 : \pi_1(V) \equiv 1 \to \pi_1(U)/N$, $\rho_3 : \pi_1(U\cap V) \to \pi_1(U)/N$ los únicos homomorfismos, pues $\pi_1(V) = \pi_1(U\cap V) = 1$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U) \arrow[dr, "\rho_1"] & \\
\pi_1\left(U\bigcap V\right) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\rho_3\equiv 1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \pi_1(U)/N \\
 & \pi_1(V)\equiv 1 \arrow[ur, "\rho_2"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema 6.1 que nos asegura la existencia de un homomorfismo $\sigma : \pi_1(X) \to pi_1(U)/N$ que hace conmutar este diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \pi_1(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \\
pi_1(U)/N &
\end{tikzcd}$$

entonces

$$ker(\psi_1) \subset ker\rho_1$$

pues si $a \in ker(\psi_1)$ entonces $\rho_1(a) = \sigma\circ\psi_1(a) = \sigma(1) = 1$ así tenemos que $a \in ker\rho_1$ y además es claro que $ker(\rho_1) = N$ entonces

$$ker(\psi_1) \subset N$$

y probamos el teorema.

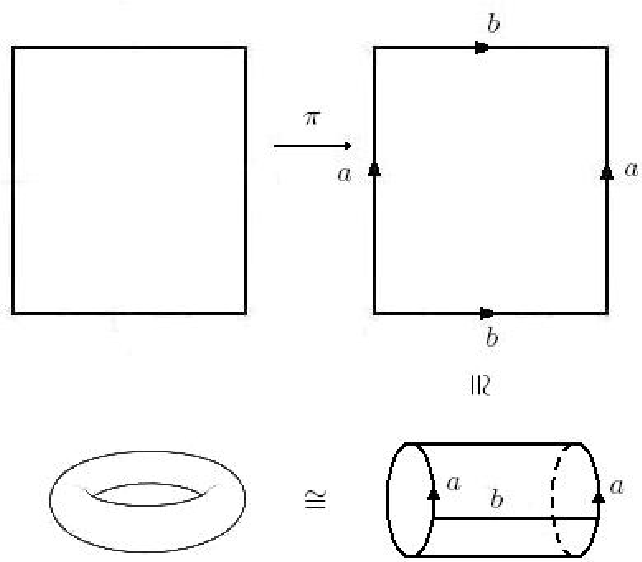
$\square$

6.4. Estructura del grupo fundamental de una superficie compacta.

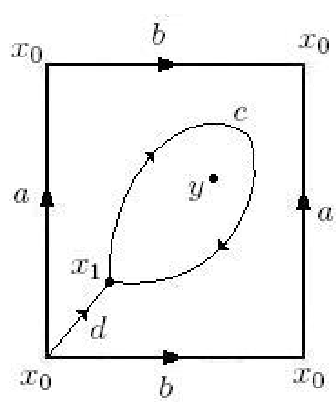
En esta sección usaremos el teorema 6.1 para determinar la estructura del grupo fundamental de una superficie compacta. Por ejemplo el toro, que es el producto $S1 \times S1$. La proposición 2.36 nos garantiza que su grupo fundamental es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pero obtendremos el mismo resultado usando el teorema 4.12 con la ventaja de que este método podrá ser generalizado a cualquier superficie compacta y conexa en $\mathbb{R}^3$.

Proposición 6.6. El grupo fundamental del toro es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Demostración. Representemos al toro T como el espacio obtenido al identicar los lados opuestos de un cuadrado. Los lados a y b se convierten bajo la identificación en circunferencias que se intersectan en el punto x_0



Sea y el centro del cuadrado, $U = T - \{y\}$ y V la imagen del interior del cuadrado bajo la identificación, dado que T es Hausdorff, U es abierto, V también es abierto, pues V es el complemento de la unión de las circunferencias a y b bajo la identificación que es compacta y por lo tanto cerrada. además U; V; $U \cap V$ son conexos por trayectorias, pues son imágenes de aplicaciones sobreyectivas de un espacio topológico conexo por trayectorias; también V es simplemente conexo, pues es homeomorfo a un disco abierto.



Sea $x_1 \in U \cap V$ apliquemos el teorema 6.3 $\psi_1 : \pi_1(U, x_1) \to \pi_1(T, x_1)$ es un epimorfismo y $ker(\psi_1) = \varphi_1(\pi_1(U \cap V))$, donde $\varphi_1 : \pi_1(U \cap V, x_1) \to \pi_1(U, x_1)$. La unión de los círculos a y b es un retracto de deformación de U entonces $\pi_1(U, x_0)$ es un grupo librede dos generadores.Para ser mas precisos $\pi_1(U, x_0)$ es un grupo libre de dosgeneradores α y β, donde α, β son clases de lazos determinados por a y b.

si $d : I \to U$ es una trayectoria de x_0 a x_1 en U y $\delta = [d]$ entonces $\pi_1(U, x_1)$ es un grupo libre de dos generadores α' y β' donde

$$\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$$

y

$$\beta' = \delta^{-1}\beta\delta$$

pues por el teorema 2.8 $d_* : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(U, x_1)$ tal que $d_*[\sigma] = [d^{-1}\sigma d]$ es un isomorfismo.

Por otro lado, una circunferencia es un retracto de deformacion de $U \cap V$ así que $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$ está generado por $\gamma = [c]$ donde c es un lazo que da exactamente una vuelta alrededor del punto y (ver figura anterior). Afirmamos ahora que

$$\varphi_1(\gamma) = \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}$$

pues por asociatividad tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\gamma) &= \varphi_1([c]), [c] \in \pi_1(U \cap V, x_1) \\
&= [c] \in \pi_1(U, x_1) \\
&= d^{-1}aba^{-1}b^{-1}d \\
&= d^{-1}add^{-1}bdd^{-1}a^{-1}dd^{-1}b^{-1}d \\
&= [d^{-1}ad][d^{-1}bd][d^{-1}a^{-1}d][d^{-1}b^{-1}d] \\
&= \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}
\end{aligned}$$

y dado que γ genera a $\pi_1(U \cap V, x_1)$ entonces $[\sigma] \in \pi_1(U \cap V, x_1) \Rightarrow [\sigma] = \gamma^m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\varphi_1([\sigma]) = \varphi_1(\gamma^m) = \varphi_1(\gamma)^m = (\alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1})^m$$

en otras palabras

$$\varphi_1(\pi_1(U \cap V, x_0)) = \langle \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1} \rangle$$

y entonces

$$\overline{\varphi_1(\pi_1(U \cap V, x_0))} = \overline{\alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}}$$

y entonces por el teorema 6.3 $\pi_1(T, x_1)$ es isomorfo al grupo libre de generadores α' y β' modulo el subgrupo normal generado por el elemento $\alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}$. Cambiando al punto base x_0 tenemos que $\pi_1(T, x_0)$ es isomorfo al grupo libre de generadores α y β modulo el subgrupo normal generado por el elemento $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$

Con esto tenemos una representación para el grupo, esta es

$$\pi_1(T, x_0) \cong \langle \{\alpha, \beta\}, \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \rangle$$

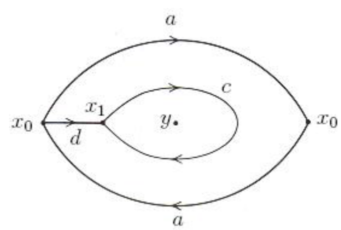
De la relación tenemos que los generadores α y β conmutan, por lo que $\pi_1(T, x_0)$ es isomorfo a un grupo abeliano libre de generadores α y β.

$$\therefore \pi_1(T, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

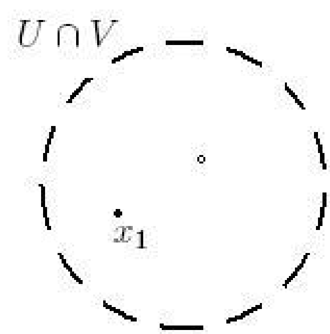
□

PROPOSICIÓN 6.7. El grupo fundamental del plano proyectivo real es el grupo cíclico de orden 2.

Demostración. Consideremos el plano proyectivo real P_2 como la identificación de las antípodas de un polígono de 2 lados como se vio anteriormente. La arista a se convierte bajo la identificación en una circunferencia y x_0 es un punto sobre ella. Sea y el centro del polígono y sean $U = P_2 - \{y\}$ y V la imagen del interior del polígono bajo la identificación.



Dado que P_2 es Hausdorff entonces $\{y\}$ es cerrado en P_2 y por lo tanto U es abierto. Por otra parte, como la circunferencia a es un compacto en P_2 entonces a es cerrado en P_2, así que V es abierto en P_2, y no sólo eso, V es simplemente conexo pues es homeomorfo a un disco abierto y sea $x_1 \in U \cap V$. Entonces se cumplen las hipótesis del teorema 6.3, U, V son abiertos y conexos por trayectorias en P_2, $P_2 = U \cup V$, $x_1 \in U \cap V$ con V simplemente conexo.



La circunferencia a es un retracto de deformación de U, así que $\pi_1(U, x_0)$ es un grupo cíclico infinito generado por $\alpha = [a]$. Sea $d : I \to U$ una trayectoria de x_0 a x_1 y sea $\delta = [d]$ entonces por el corolario 5.1 $d_* : \pi_1(U, x_0) \cong \pi_1(U, x_1)$.

Finalmente, $\pi_1(U \cap V, x_1)$ es un grupo cíclico infinito generado por la clase $\gamma = [c]$ de un lazo c que rodea al punto y exactamente una vez, pues la imagen de c es un retracto de deformación de $U \cap V$. además por la figura tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\gamma) &= \varphi_1([c]), [c] \in \pi_1(U \cap V, x_1) \\
&= [c] \in \pi_1(U, x_1) \\
&= [d^{-1}aad] \\
&= [d^{-1}add^{-1}ad] \\
&= [d^{-1}ad][d^{-1}ad] \\
&= \alpha'^2
\end{aligned}$$

y dado que γ genera a $\pi_1(U \cap V, x_1)$ significa que si $[\sigma] \in \pi_1(U \cap V, x_1)$ es cualquier elemento arbitrario entonces $[\sigma] = \gamma^m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. Así,

$$\varphi_1[\sigma] = \varphi_1(\gamma^m) = \varphi_1(\gamma)^m = (\alpha'^2)^m$$

y entonces

$$\varphi_1(\pi_1(U \cap V, x_1)) = \langle \alpha'^2 \rangle$$

además como $\langle \alpha' \rangle$ es abeliano y $\langle \alpha'^2 \rangle$ es un subgrupo de $\langle \alpha' \rangle = \pi_1(U, x_1)$. Entonces tenemos que el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_1)$ que contiene a $Im(\varphi_1)$ es el subgrupo generado por (α'^2) , es decir,

$$\overline{\langle \varphi_1(\pi_1(U \cap V, x_1)) \rangle} = \overline{\langle \alpha'^2 \rangle}$$

y ahora, por el teorema 6.3,

$$\pi_1(P_2, x_1) = \langle \alpha' \rangle / \langle \alpha'^2 \rangle$$

Haciendo un cambio de punto base como en el caso del toro tenemos que

$$\pi_1(P_2, x_0) \cong \langle \alpha \rangle / \langle \alpha^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$$

□

Teorema 6.4. El grupo fundamental abelianizado de la suma de n toros es isomorfo a $\prod_{i=1}^{2n} \mathbb{Z}$.

Demostración. Calculemos la suma conexa de n toros de la misma forma que a los casos anteriores. Consideremos la suma M de n toros como un polígono de $4n$ lados con las aristas identificandas por pares. Las aristas $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ se convierten, al hacer las identificaciones correspondientes, en circunferencias que se intersectan dos a dos en el punto x_0.

Sean y el centro del polígono, $U = M - \{y\}$ y V la imagen del interior del polígono bajo la identificación, que es homeomorfo a un disco abierto, sea $x_1 \in U \cap V$. Note que $U \cap V$ es homeomorfo a un disco abierto menos el centro del disco. La unión de los $2n$ círculos a_i , b_i es un retracto de deformación de U y podemos llegar de manera análoga al caso de toro (proposición 6.6) a que

$$\pi_1(U, x_0)$$

es un grupo libre de $2n$ genetadores $\{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n\}$. con $\alpha_i = [a_i]$, $\beta_i = [b_i]$. Si $d : I \to U$ es la trayectoria de x_0 a x_1 de la figura anterior y $\delta = [d]$ entonces $\pi_1(U, x_0)$ es isomorfo bajo d_* a $\pi_1(U, x_1)$ entonces $\pi_1(U, x_1)$ es un grupo libre de generadores

$$\alpha'_i = \delta^{-1} \alpha_i \delta,$$

$$\beta'_i = \delta^{-1} \beta_i \delta.$$

Ahora $U \cap V$ es del mismo tipo de homotopá que una circunferecia y como antes, $\pi_1(U \cap V, x_1)$ es el grupo cíclico infinito generado por $\gamma = [c]$, la clase del lazo c que da exactamente una vuelta a y, de donde obtenemos que

$$\begin{array}{rcl}\varphi_1(\gamma) & = & \varphi_1([c]), [c] \in \pi_1(U \cap V, x_1) \\ & = & [c] \in \pi_1(U, x_1) \\ & = & [d^{-1}(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}) d] \\ & = & [d^{-1} a_1 d d^{-1} b_1 d d^{-1} a_1^{-1} d d^{-1} b_1^{-1} d \dots a_n d d^{-1} b_n d d^{-1} a_n^{-1} d d^{-1} b_n^{-1}) d] \\ & = & [d^{-1} a_1 d][d^{-1} b_1 d][d^{-1} a_1^{-1} d][d^{-1} b_1^{-1} d] \dots [d^{-1} a_n d][d^{-1} b_n d][d^{-1} a_n^{-1} d][d^{-1} b_n^{-1}) d] \\ & = & \prod_{i=1}^n [\alpha_i' \beta_i']\end{array}$$

donde $[\alpha_i' \beta_i']$ indica el commutador $\alpha_i' \beta_i' \alpha_i^{'-1} \beta_i^{'-1}$ y dado que γ genera a $\pi_1(U \cap V, x_1)$ entonces para cualquier $[\sigma] \in \pi_1(U \cap V, x_1)$ arbitrario tenemos que $[\sigma] = \gamma^m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$ y entonces

$$\begin{array}{rcl}\varphi_1([\gamma]) & = & \varphi_1(\gamma^m) \\ & = & \varphi_1(\gamma)^m \\ & = & (\prod_{i=1}^n [\alpha_i' \beta_i'])^m\end{array}$$

y entonces por el teorema 6.3 $\pi_1(M, x_1)$ es isomorfo al grupo libre de generadores $\alpha_1', \beta_1' \dots \alpha_n', \beta_n'$ modulo el subgrupo normal generado por el elemento $\prod_{i=1}^n [\alpha_i' \beta_i']$. Cambiando al punto base x_0 tenemos que $\pi_1(M, x_0)$ admite una presentación formada por el conjunto de generadores $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n\}$ y la única relación

$$\prod_{i=1}^n [\alpha_i' \beta_i'].$$

Con esto tenemos una representación para el grupo, esta es

$$\pi_1(M, x_0) \cong \langle \{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n\}, \prod_{i=1}^n [\alpha_i' \beta_i'] = 1 \rangle$$

En el caso $n > 1$ no exste ninguna descripción intríseca sencilla de este grupo. Sin embargo es mucho mas sencillo si $\langle\langle$ abelianizamos$\rangle$ $\rangle$ $\pi_1(M, x_0)$ (es decir si hacemos su cociente modulo el subgrupo commutador), obtenemos un grupo abeliano libre de $2n$ generadores, es decir, el grupo fundamental abelianizado de la suma de n toros es isomorfo a

$$\prod_{i=1}^{2n} \mathbb{Z}.$$

□

Hemos obtenido el grupo fundamental abelianizado de la suma conexa de n toros y esto es suficiente para establecer el siguiente resultado.

Corolario 6.2. Si $m \neq n$ entonces los grupos fundamentales de la suma conexa de m toros y la suma conexa de n toros no son isomorfos.

Teorema 6.5. El grupo fundamental abelianizado de la suma de n planos proyectivos es isomorfo a

$$\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{n-1 veces} \times \mathbb{Z}_2$$

Demostración. De forma analoga a la suma conexa de n toros. □

Bibliografía

[Massey] William S. Massey. *ITRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA*. 1996.

[Munkres] James R. Munkres *Topología*. PEARSON EDUCCION,S.A, Madrid, España, 2002.

[Kosniowski] C.Kosniowski. *Topología Algebraica*, EDITORIAL REVERTÉ S.A.

[Historia] David Garro Moreno. *HISTORIA DE LA TOPOLOGÍA*

[Iborra] Carlos Iborra. *INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA.*

[MartaMacho] Marta Macho Stadler. *TOPOLOGÍA GENERAL*