

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Escuela de Matemática



Universidad de El Salvador

Hacia la libertad por la cultura

Trabajo de Grado Titulado:

EL TEOREMA LOCAL DE GAUSS-BONNET

PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA.

PRESENTADA POR: WENDY STEFANÍA RODRÍGUEZ ARGUETA RA10003 Y

ERICK ULISES VELÁSQUEZ ORELLANA VO10001

DOCENTES ASESORES:

Msc. WALTER OTONIEL Y LIC. EDWIN ALEXANDER
CAMPOS GRANADOS AGUILAR MARTÍNEZ

2015

**AUTORIDADES UNIVERSITARIAS
PERIODO 2011-2015**

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Rector:

Ing. Mario Roberto Nieto Lovo.

Vicerrectora Académica:

Maestra Ana María Glower de Alvarado.

Vicerrector Administrativo:

Maestro Oscar Noé Navarrete.

Secretaria General:

Dra. Ana Leticia de Amaya.

Defensora de los Derechos Universitarios:

Licda. Claudia María Melgar de Zambrana.

Fiscal:

Lic. Francisco Cruz Letona.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Decano:

Msc. Martín Enrique Guerra Cáceres.

Vicedecano:

Lic. Ramón Arístides Paz Sánchez.

Secretario:

Lic. Carlos Antonio Quintanilla Aparicio.

ESCUELA DE MATEMÁTICA

Director:

Dr. José Nerys Funes Torres.

Secretaria:

Licda. Alba Idalia Córdova Cuellar.

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Le doy gracias a mi madre por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.

Le agradezco la confianza, apoyo y dedicación de tiempo a mis asesores: Lic. Edwin Aguilar y Mcs. Walter Otoniel Campos. Por haber compartido conmigo sus conocimientos y sobre todo su amistad.

A Erick por haber sido mi compañero de tesis y amigo, por haberme tenido la paciencia necesaria y por motivarme a seguir adelante en los momentos de desesperación y sobre todo por hacer de su familia, una familia para mí.

A mis amigos por confiar y creer en mí y haber hecho de mi etapa universitaria un trayecto de vivencias que nunca olvidaré, especialmente a Cecy por ayudarme cuando no comprendía algo y por ser una gran amiga, a Julissa y Esmeralda por estar conmigo en este largo proceso por ser profesionales desde un principio, compartiendo los buenos y difíciles momentos.

A mi Mamá Tere que siempre estuvo presente en mi corazón aun cuando se encontraba lejos, por haber creído en mí siempre y por estar pendiente de mí, por sus cuidados

para cuando me operaron y por todo su amor y dedicación. A mi mamá tía por por todo su amor y respaldo que siempre tuvo conmigo. Y a mi padre Rene Rodríguez, ya que por él yo aprendí a valora lo que tenia y a esforzarme por lograr lo que quería.

Wendy.

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Le doy gracias a mi madre por apoyarme en todo momento, por los valores que me ha inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.

A Wendy por haber sido mi compañera de tesis y amiga, por haberme tenido la paciencia necesaria y por ser mi apoyo en los momentos más difíciles.

A mis hermanos por apoyarme en aquellos momentos de necesidad por ayudar a la unión familiar.

Le agradezco la confianza, apoyo y dedicación de tiempo a mis asesores: Lic. Edwin Aguilar y Mcs. Walter Otoniel Campos. Por haber compartido conmigo sus conocimientos.

A mis amigos por todos los momentos que pasamos juntos. Por las tareas que juntos realizamos y por todas las veces que a mí me explicaron gracias. Por la confianza que en mí depositaron.

Erick.

Dedicatoria

Dedico esta tesis a Dios por estar siempre conmigo. A mis padres quienes me apoyaron y motivaron todo el tiempo en mi educación, a mi hermano Manuel por ser él mi motivación para ser alguien mejor y ser un buen ejemplo para él.

A Erick quien me apoyo y alentó para continuar, cuando parecía que me iba a rendir. A mis compañeros y amigos de estudio, quienes fueron un gran apoyo emocional durante toda la carrera. A mis asesores, quienes sin su ayuda nunca hubiera podido hacer esta tesis.

Y por último a mis mascotas Faly, Joss y Nino, que ya no están conmigo. A todos ellos se los agradezco desde el fondo de mi corazón.

Wendy.

Dedico esta tesis a Dios y a la Virgen María, quienes inspiraron mi espíritu para la conclusión de esta tesis. A mi madre quien me dio la vida, educación, apoyo y consejos.

A Wendy por ser mi apoyo incondicional en todo momento. A mis hermanos, A mis compañeros de estudio, a mis maestros y amigos, quienes sin su ayuda nunca hubiera podido hacer esta tesis. A todos ellos se los agradezco desde el fondo de mi alma. Para todos ellos hago esta dedicatoria.

Erick.

Índice general

Agradecimientos	3
Dedicatoria	5
Resumen	8
Introducción	9
1. Preliminares	11
1.1. Funciones diferenciales en el espacio euclídeo	11
1.2. Superficies regulares	18
1.3. Superficies en implícitas	23
1.4. Funciones diferenciables sobre superficies	29
1.5. Plano tangente	34
1.5.1. Aplicación tangente.	36
1.5.2. Orientabilidad	38
1.6. La primera forma fundamental	40
1.6.1. Cálculo de longitudes y ángulos	44
1.6.2. Cálculo de áreas	44
2. Geometría Local de las Superficies	50
2.1. Aplicación de Gauss	50
2.2. Segunda forma fundamental.	55
2.3. Condiciones de compatibilidad.	59
2.4. Curvatura	63

2.4.1. Curvatura Normal	63
2.4.2. Curvaturas principales	69
2.4.3. Curvatura gaussiana y curvatura media	70
2.4.4. Curvatura geodésica	78
2.5. Clasificación de los puntos de una superficie	80
2.6. Curvas especiales sobre superficies	84
2.6.1. Líneas de curvatura	84
2.6.2. Líneas asintóticas	88
2.6.3. Geodésicas	91
3. Teorema Local de Gauss-Bonnet	100
3.1. Fórmula de Liouville y teorema de Green	101
3.2. Teorema Local de Gauss-Bonnet	103
3.3. Fórmula general del teorema local de Gauss-Bonnet	112
3.4. Aplicaciones	115
Conclusiones	117

Resumen

En el presente trabajo de graduación está organizado esencialmente en tres capítulos. En el primero de ellos se presentan los fundamentos teóricos que sustentan nuestra investigación, definiendo lo que es superficie regular, que es sobre lo que estaremos trabajando, así como también, el plano tangente en un punto p de dicha superficie y la primera forma fundamental con la que podemos tratar cuestiones métricas sobre una superficie regular. El objetivo del Capítulo Dos es estudiar la geometría local de la superficie como la clasificación de puntos que nos dará la forma de la superficie en el entorno de un punto, además presentar las diferentes tipos de curvas que pasan por un punto p de la superficie regular. Y nuestro último capítulo contiene la versión local del Teorema de Gauss-Bonnet y una fórmula general de mismo, para luego ilustrar sobre algunas aplicaciones del teorema en su evolución global en la física teórica.

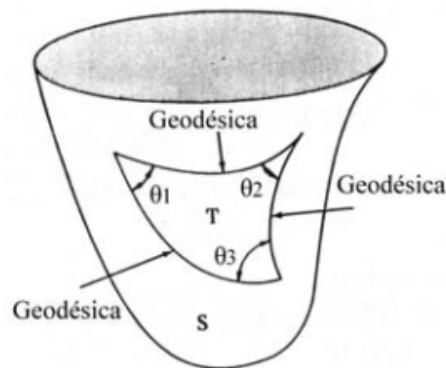
Introducción

En el presente trabajo se dará a conocer el Teorema Local de Gauss-Bonnet que pone en evidencia una relación notable entre la topología de una superficie y la integral de su curvatura, quedando íntimamente ligadas la Topología y la Geometría (en el sentido de curvatura).

Una primera versión del teorema fue dada por Gauss en su famoso artículo “Disquisitiones generales circa superficies curvas” 1827; Ges. Werke 4, donde trabaja con triángulos geodésicos sobre superficies (esto es, triángulos cuyos lados son arcos de geodésicas).

A grosso modo, afirma que el exceso sobre π de la suma de los ángulos interiores α , β , γ de un triángulo geodésico T es igual a la integral de la curvatura de Gauss K sobre T ; esto es

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_T K dA$$



Por ejemplo, si $K = 0$, obtenemos $\alpha + \beta + \gamma = \pi$; se trata de una extensión del teorema de Thales para la geometría de las superficies de curvatura nula.

Cuando $K = 1$, obtenemos

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \text{área}(T) > 0$$

Así, sobre la esfera unidad, la suma de los ángulos intersección de un triángulo geodésico es mayor que π , y el exceso sobre π es exactamente el área de T .

Similarmente, sobre la pseudoesfera, superficie de curvatura de Gauss constante negativa, la suma de los ángulos interiores de todo triángulo geodésico es menor que π .

La generalización de este resultado fue publicada por Bonnet en 1848 referido a una región acotada por una polígono geodésico.

El rasgo trascendente es la evolución del teorema de Thales para superficies de curvatura cero al caso especial publicado por Gauss para triángulos geodésicos, y de este último al Teorema Local de Gauss-Bonnet, y hoy en día podemos decir que, además de la elegancia del teorema, este es la piedra angular para la demostración de la consistencia relativa de las geometrías no euclideas y otras muchas aplicaciones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se hará un recorrido por las definiciones y propiedades que sustentan nuestro tema de investigación.

En este apartado introduciremos el concepto de superficie regular, la primera forma fundamental y su utilidad para la medición sobre la superficie (longitudes de curvas, ángulos de vectores tangentes, áreas de regiones).

1.1. Funciones diferenciales en el espacio euclídeo

Decimos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en x_0 si existe una transformación lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Definición 1 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, diremos que f es **diferenciable** si:

1. es diferenciable en cada punto de su dominio.
2. la matriz $Df_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)$ varía continuamente con x .

Proposición 1 (Regla de la cadena para aplicaciones). Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ aplicaciones diferenciables, donde U y V son conjuntos abiertos

tales que $f(U) \subset V$. Entonces $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una aplicación diferenciable, y

$$D(g \circ f)_p = Dg_{f(p)} \circ Df_p, \quad p \in U$$

Demostración. Ver [[4],pág 137] □

Lema 1 (Aplicación contractiva). Sea A un conjunto abierto en \mathbb{R}^n ; sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Si $Df(a)$ es no singular, existe $\alpha > 0$ tal que la desigualdad

$$|f(x_0) - f(x_1)| \geq \alpha|x_0 - x_1|$$

para todo x_0, x_1 en alguna bola abierta $B_\epsilon(a)$ centrado en a . Se sigue que f es inyectiva en esta bola abierta.

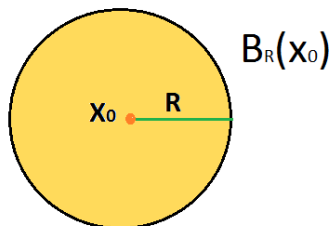
Demostración. Ver [[7],pág 64] □

Teorema 1 (Teorema de la función inversa). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $|Df_{x_0}| \neq 0$, entonces f es invertible y cuya inversa es diferenciable en un entorno de x_0 .

Demostración. Sea $x_0 = f(x_0) = 0$ y $Df_{x_0} = I$, la matriz identidad. Y sea $g(x) = f(x) - x$, entonces $g(0) = 0$ y $Dg_0 = 0$ es la matriz cero.

Como $|Dg_0| = 0$, por continuidad sabemos que hay una bola de radio R y centro en x_0 , $B_R(x_0)$, tal que:

$$|Dg_x| < \frac{1}{4}, \quad \forall x \in B_R(x_0)$$



Ahora bien, para cada par $x, y \in B_R(x_0)$ podemos escribir:

$$g(x) - g(y) = Dg_x(x - y) + h(x, y)$$

Y tenemos que:

a) $\lim_{y \rightarrow x} \frac{h(x, y)}{|x - y|} = 0$ y por consiguiente si R es suficientemente pequeño

$$|h(x, y)| < \frac{1}{4}|x - y|$$

b)

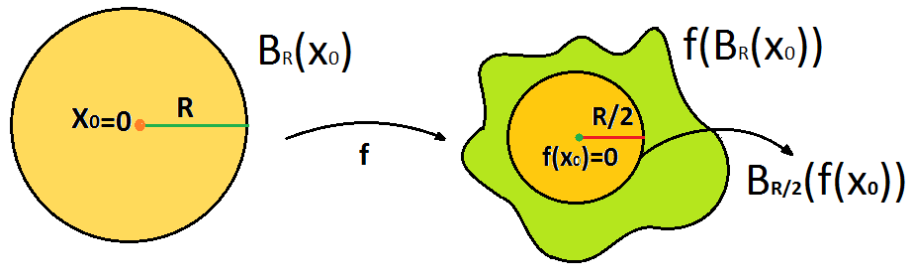
$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq |Dg(x)||x - y| + |h(x, y)| \\ &\leq \frac{1}{4}|x - y| + \frac{1}{4}|x - y| = \frac{1}{2}|x - y| \end{aligned}$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |g(x) - g(y) - (x - y)| \\ &\geq |x - y| - |g(x) - g(y)| \geq |x - y| - \frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2}|x - y| \end{aligned}$$

del Lema 1 se sigue que f es inyectiva en $B_R(x_0)$.

Ahora veremos que $f(B_R(x_0))$ cubre el entorno de radio $R/2$ de $f(x_0) = 0$.



Para cada $y \in B_{R/2}(f(x_0))$ consideremos la siguiente sucesión

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= y \\ x_2 &= y - g(x_1) \\ &\dots \\ x_n &= y - g(x_{n-1}) \\ &\dots \end{aligned}$$

Esta sucesión está en $B_R(x_0)$ y converge a una preimagen de y . Esto se sigue fácilmente de que:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_0| &= |y| < R/2 \\ |x_n - x_{n-1}| &\leq |g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})| \leq R/2^n \end{aligned}$$

Así pues f tiene una inversa

$$f^{-1} : B_{R/2}(f(x_0)) \rightarrow B_R(x_0)$$

esta construcción de la sucesión x_n , se puede llevar a nivel de funciones simplemente definiendo

$$g_n : B_{R/2}(f(x_0)) \rightarrow B_R(x_0)$$

como:

$$\begin{aligned} g_0(y) &= 0 \\ g_n(y) &= y - g(g_{n-1}(y)) \end{aligned}$$

de esta manera resulta inmediato que:

1. g_n es diferenciable en la $B_{R/2}(f(x_0))$.
2. g_n converge a f^{-1} uniformemente en $B_{R/2}(f(x_0))$.
3. g_n' converge uniformemente en $B_{R/2}(f(x_0))$.

Luego del teorema que literalmente dice:

“Sea g_n una sucesión de funciones diferenciables que convergen uniformemente a g . Supóngase también que la sucesión de derivadas g_n' converge uniformemente a G . Entonces g es diferenciable y su derivada g' es igual a G .” Ver [[8],pág 157]

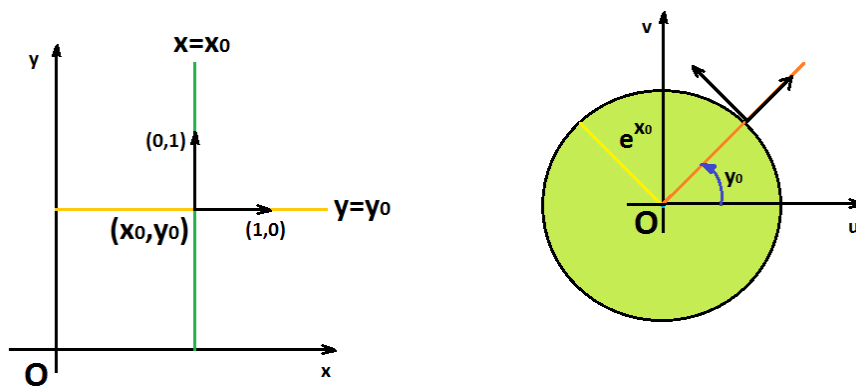
Por consiguiente f^{-1} es diferenciable. □

Observación. Utilizando la regla de la cadena y siendo f^{-1} diferenciable, se tiene que, la diferencial de la inversa es la inversa de la diferencial, es decir:

$$Df^{-1}_{y_0} = [Df_{f^{-1}(y_0)}]^{-1}$$

Ejemplo 1 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$



Las funciones componentes de f , donde $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$, tienen derivadas parciales continuas de todas las órdenes. Luego f es diferenciable.

Observemos, como la aplicación f transforma curvas del plano xy . Por ejemplo la recta vertical $x = x_0$ se aplica sobre el círculo $u = e^{x_0} \cos y$, $v = e^{x_0} \sin y$ de radio e^{x_0} , y la recta horizontal $y = y_0$ se aplica sobre la semirecta $u = e^x \cos y_0$, $v = e^x \sin y_0$ de pendiente $\tan y_0$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} &= \left. \frac{d}{dx} (e^x \cos y_0, e^x \sin y_0) \right|_{x=x_0} \\ &= (e^{x_0} \cos y_0, e^{x_0} \sin y_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} &= \left. \frac{d}{dy} (e^{x_0} \cos y, e^{x_0} \sin y) \right|_{y=y_0} \\ &= (-e^{x_0} \sin y_0, e^{x_0} \cos y_0) \end{aligned}$$

Esto se puede comprobar más fácilmente calculando la matriz jacobiana de f :

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

y aplicando dicha matriz a los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en (x_0, y_0) .

Notemos que el determinante jacobiano $\det(Df_{(x,y)}) = e^{2x} \neq 0$ y así, el diferencial de f en p es no singular para todo $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por tanto, podemos aplicar el teorema de la función inversa para concluir que f es un difeomorfismo¹ local.

Ahora comprobaremos para este caso que la diferencial de la función inversa es la inversa de la diferencial de la función.

¹Por un difeomorfismo, se entenderá una función diferenciable, invertible y con inversa diferenciable.

Sea:

$$\begin{cases} y_1 = e^x \cos y \\ y_2 = e^x \sin y \end{cases}$$

despejando x e y arriba, tenemos:

$$\begin{cases} y = \tan^{-1} \frac{y_2}{y_1} \\ x = \ln \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \right) \end{cases}$$

entonces:

$$f^{-1}(y_1, y_2) = \left(\ln \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \right), \tan^{-1} \frac{y_2}{y_1} \right)$$

Así:

$$Df_{(f(x,y))}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2} & \frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2} \\ -\frac{y_2}{y_1^2 \left(1 + \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 \right)} & \frac{1}{y_1 \left(1 + \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 \right)} \end{pmatrix}$$

y ya se había calculado:

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene que:

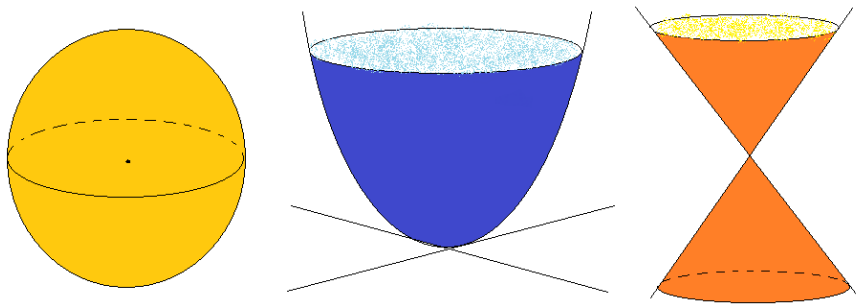
$$\begin{aligned} Df_{(f(x_0,y_0))}^{-1} Df_{(x_0,y_0)} &= \begin{pmatrix} \frac{\cos y_0}{e^{x_0}} & \frac{\sin y_0}{e^{x_0}} \\ -\frac{\sin y_0}{e^{x_0}} & \frac{1}{e^{x_0} \left(\cos y_0 + \frac{\sin^2 y_0}{\cos y_0} \right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x_0} \cos y_0 & -e^{x_0} \sin y_0 \\ e^{x_0} \sin y_0 & e^{x_0} \cos y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple que la diferencial de la función inversa es la inversa de la diferencial de la función.

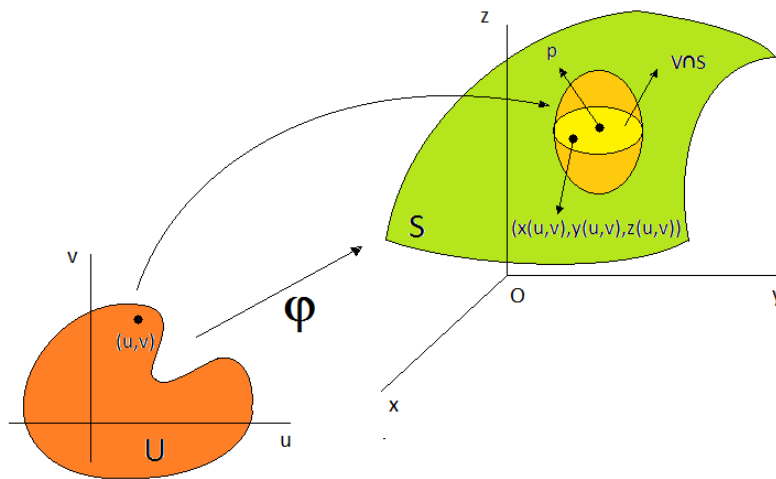
1.2. Superficies regulares

Intuitivamente consideremos una superficie como un conjunto de puntos del espacio que asemeja una porción del plano en un entorno de cada uno de ellos; otra forma de verlo es que en cada punto tiene uno y solo un plano tangente bien definido.

¿Son superficies? ¿Por qué si? ¿Por qué no?.



Definición 2 Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$, existe un entorno V en \mathbb{R}^3 y una aplicación $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ de un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:



1. φ es diferenciable. Esto significa que si escribimos:

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

las funciones $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en U .

2. φ es un homeomorfismo. Como φ es continua por la condición 1, esto significa que φ admite inversa $\varphi^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que es continua; es decir, φ^{-1} es la restricción de una función continua $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida sobre un conjunto abierto W que contiene a $V \cap S$.
3. Condición de regularidad. Para cada $q \in U$, la diferencial $D\varphi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

Observación.

1. La aplicación φ se denomina una **parametrización** o un sistema(local) de “coordenadas” en (un entorno de) p . El entorno $V \cap S$ se denomina un **entorno coordinado**.
2. La condición 1 y 3 implican la condición 2, esto es de gran utilidad en la práctica.

Si S es superficie regular, $U \subset S$, $\varphi : U_0 \rightarrow U = \varphi(U_0)$, con $U_0 \subset \mathbb{R}^2$, abierto, y de clase C^∞ tal que:

- i. $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq \vec{0}$.
 ii. φ es inyectiva.

Entonces φ es un homeomorfismo de U_0 sobre $U = \varphi(U_0)$ y U es abierto.

Demostración.

Ver [[4],pág 66]

□

Ejemplo 2 Demostrar que la esfera unidad

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una superficie regular.

Primero verifiquemos que la aplicación $\varphi_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi_1(U) \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi_1(x, y) = \left(x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right) \quad (x, y) \in U$$

donde $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ y $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ es una parametrización de S^2 . Obsérvese que $\varphi_1(U)$ es la parte (abierto) de S^2 por encima del plano xy .

Ya que $(x, y) \in U$, se tiene que $x^2 + y^2 < 1$ y por consiguiente la función $+\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Por tanto, φ_1 es diferenciable y se da la condición 1.

La condición 3 se verifica inmediatamente puesto que:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1.$$

Para comprobar la condición 2, observamos que φ_1 es inyectiva y que φ_1^{-1} es la restricción de la proyección (continua) $\pi(x, y, z) = (x, y)$ sobre el conjunto $\varphi_1(U)$. Por tanto, φ_1^{-1} es continua en $\varphi_1(U)$.

Ahora recubriremos totalmente la esfera con parametrizaciones similares, de la manera siguiente. Definimos $\varphi_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante

$$\varphi_2(x, y) = \left(x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right)$$

compruébese que φ_2 es una parametrización y obsérvese que $\varphi_1(U) \cup \varphi_2(U)$ recubre S^2 excepto el ecuador

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

Entonces, utilizando los planos xz y zy , definimos las parametrizaciones

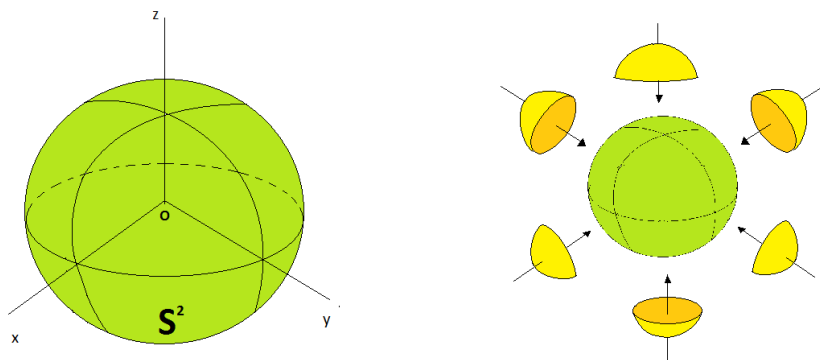
$$\varphi_3(x, z) = \left(x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right),$$

$$\varphi_4(x, z) = \left(x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right),$$

$$\varphi_5(y, z) = \left(+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right),$$

$$\varphi_6(y, z) = \left(-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right),$$

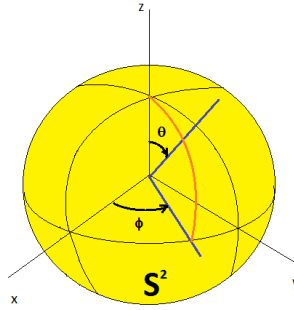
las cuales, junto con φ_1 y φ_2 , recubren a S^2 completamente, demostrando que S^2 es una superficie regular.



Para la mayoría de las aplicaciones, es conveniente relacionar las parametrizaciones con las coordenadas geográficas en S^2 . Sea $V = \{(\theta, \phi); 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ y sea $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Claramente, $\varphi(V) \subset S^2$. Se demostrará que φ es una parametrización de S^2 . Habitualmente θ se denomina la colatitud (el complementario de la latitud) y ϕ la longitud.



Es claro que las funciones $\sin \theta \cos \phi$, $\sin \theta \sin \phi$, $\cos \theta$ admiten derivadas parciales continuas de todos los órdenes; de donde, φ es diferenciable. Además, para que los determinantes jacobianos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} &= \cos \theta \sin \phi, \\ \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} &= \sin^2 \theta \cos \phi, \\ \frac{\partial(x, z)}{\partial(\theta, \phi)} &= \sin^2 \theta \sin \phi, \end{aligned}$$

se anulen simultáneamente, es necesario que

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \cos^2 \phi + \sin^4 \theta \sin^2 \phi = \sin^2 \theta = 0$$

Esto no tiene lugar en V , por tanto se satisfacen las condiciones 1 y 3 de la definición 2.

A continuación, observamos que dado un $(x, y, z) \in S^2 - C$, donde C es el semicírculo

$$C = \{(x, y, z) \in S^2; y = 0, x \geq 0\},$$

θ está unívocamente determinado por $\theta = \cos^{-1} z$, pues $0 < \theta < \pi$. Conociendo θ , hallamos $\sin \theta$ y $\cos \theta$ a partir de $x = \sin \theta \cos \phi$, $y = \sin \theta \sin \phi$, y esto determina ϕ con unicidad ($0 < \phi < 2\pi$). De ahí se sigue que φ admite una inversa φ^{-1} . Para completar la verificación de la condición 2, deberíamos probar que φ^{-1} es continua.

1.3. Superficies en implícitas

Definición 3 Dada una aplicación diferenciable $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre un conjunto abierto U de \mathbb{R}^3 decimos que $p \in U$ es un **punto crítico de F** si:

$$\nabla F(p) = 0$$

Y se dice que $F(p) \in \mathbb{R}$ es un **valor crítico de F** .

Un número real $a \in \mathbb{R}$ se denomina **valor regular de F** cuando:

1. $\exists p \in U$ tal que $F(p) = a$
2. $\nabla F(p) \neq 0$

Proposición 2 Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $a \in f(U)$ es un valor regular de f , entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular de \mathbb{R}^3 .

Demostración. Sea $p = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de $f^{-1}(a)$. Como a es un valor regular de f , luego por definición $\nabla f_p \neq \vec{0}$ así es posible suponer $\frac{\partial f}{\partial z}(p) = f_z(p) \neq 0$. Definimos la aplicación $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)),$$

y denotamos por (u, v, t) a las coordenadas de un punto de \mathbb{R}^3 de donde F toma sus valores. La diferencial de F en p viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

de donde

$$\det(dF_p) = f_z \neq 0$$

Por esta razón podemos aplicar el teorema de la función inversa, que garantiza la existencia de entornos V de p y W de $F(p)$ tales que $F : V \rightarrow W$ es invertible y la inversa $F^{-1} : W \rightarrow V$ es diferenciable.

Se deduce entonces que las funciones componentes de F^{-1} , es decir, las funciones.

$$x = u \quad y = v \quad z = g(u, v, t) \quad (u, v, t) \in W$$

son diferenciables.

Como

$$\begin{aligned} F(f^{-1}(a) \cap V) &= F(f^{-1}(a)) \cap F(V) \\ &= F(f^{-1}(a)) \cap W \\ &= \{(u, v, t); t = f(x, y, z) = a\} \cap W \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(a) \cap V &= F^{-1}(F(f^{-1}(a) \cap V)) \\ &= F^{-1}(\{(u, v, w) : w = a\} \cap W) \\ &= F^{-1}(\{(u, v, w) : w = a\}) \cap F^{-1}(W) \\ &= F^{-1}(\{(u, v, w) : w = a\}) \cap V \\ &= \{(u, v, w) \in V : w = g(u, v, a)\} \end{aligned}$$

y definiendo la proyección:

$$\begin{aligned} \psi : \Pi_3(V) &\longrightarrow R \\ (u, v) &\mapsto \psi(u, v) = g(u, v, a) \end{aligned}$$

Tomando la parametrización

$$\begin{aligned} \varphi : \Pi_3(V) &\longrightarrow R^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (u, v, \psi(u, v)) \end{aligned}$$

concluimos que la gráfica de φ es $f^{-1}(a) \cap V$. Luego se tiene que $f^{-1}(a) \cap V$ es un entorno ordenado de p . Por tanto, para cada $p \in f^{-1}(a)$ se puede recubrir con un entorno coordinado, y de ahí, $f^{-1}(a)$ es una superficie regular. \square

Ejemplo 3 Las llamadas superficies cuadráticas o simplemente cuádricas, se definen mediante las ecuaciones de la forma

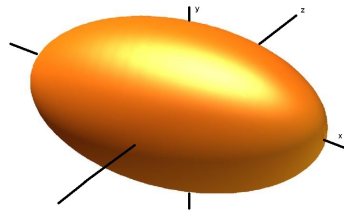
$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Exy + Fxz + Gyz + Hx + Iy + Jz + K = 0$$

con base en rotaciones y traslaciones de los ejes coordenados, se puede llevar a $f(x, y, z)$ a uno de los siguientes casos canónicos. ¿Cuáles son superficies regulares?

Tenemos los seis casos siguientes:

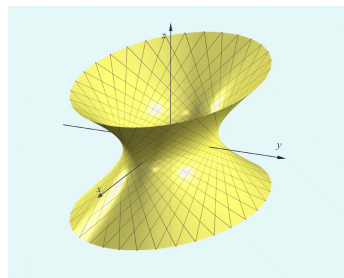
1. Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



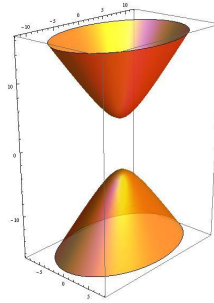
2. Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



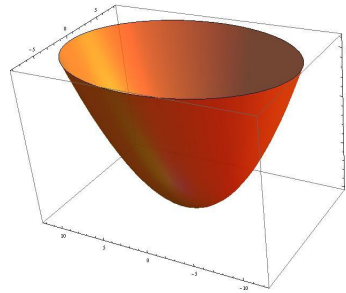
3. Hiperboloide de dos hojas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



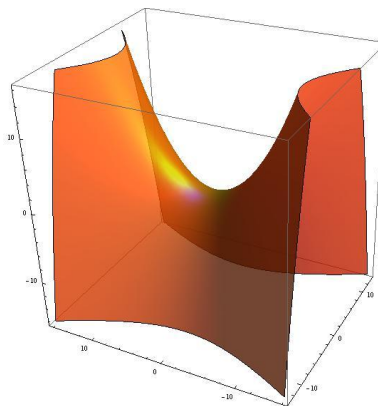
4. Paraboloido elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$



5. Paraboloido hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$



6. Cono cuádrico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Utilizando la proposición anterior, definimos para el caso (1), (2) y (3) la función

$$\begin{aligned} f : \quad R^3 &\longrightarrow R \\ (x, y, z) &\mapsto \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} - 1 \end{aligned}$$

y cuyo gradiente es

$$\nabla f = \left(\pm \frac{2x}{a^2}, \pm \frac{2y}{b^2}, \pm \frac{2z}{c^2} \right)$$

y este se anula cuando $x = y = z = 0$.

Así

$$\nabla f|_p = \vec{0} \Leftrightarrow p = (0, 0, 0)$$

Pero

$$(0, 0, 0) \notin f^{-1}(0)$$

entonces 0 es un valor regular de f y $f^{-1}(0)$ que es superficie regular.

Para los conjuntos (4) y (5), definimos a f como

$$\begin{aligned} f : \quad R^3 &\longrightarrow R \\ (x, y, z) &\mapsto \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - z \end{aligned}$$

y cuyo gradiente es

$$\nabla f = \left(\pm \frac{2x}{a^2}, \pm \frac{2y}{b^2}, -1 \right)$$

y como $-1 \neq 0$

$$\nabla f|_p \neq \vec{0}$$

para todo p . Donde 0 es un valor regular de f y $f^{-1}(0)$ que es superficie regular.

Para el caso (6) este se analizara en un ejemplo más adelante.

Proposición 3 (Resultado útil para saber que algo no es superficie).

Sea p un punto de la superficie S . Entonces existe un subconjunto abierto U en \mathbb{R}^2 , una función de clase C^∞ $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, y un entorno abierto V de p en \mathbb{R}^3 tales que se cumple una de las tres igualdades siguientes:

$$S \cap V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in U; x = f(y, z)\};$$

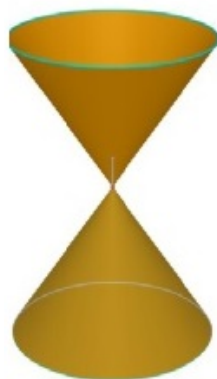
$$S \cap V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in U; y = f(x, z)\};$$

$$S \cap V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U; z = f(x, y)\};$$

Demostración. Ver [[6], pág 124-125]

□

Ejemplo 4 El cono $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$ no es una superficie.



En efecto, si lo fuera, existiría un entorno abierto V de origen 0 de \mathbb{R}^3 de modo que la intersección $S \cap V$ sería el grafo de una función de clase infinito definida en un subconjunto abierto del plano \mathbb{R}^2 .

Esto implica, en particular, que alguna de las tres proyecciones lineales de direcciones paralelas a los ejes coordenados,

$$\begin{aligned} \pi_i : S \cap V &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_j, x_k) \end{aligned}$$

donde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, ha de ser inyectiva. Pero esto es falso porque para valores suficientemente pequeños de x_1, x_2, x_3 , y para cada punto $(x_1, x_2, x_3) \in S \cap V$, los puntos $(\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3)$ pertenecen a $S \cap V$.

1.4. Funciones diferenciables sobre superficies

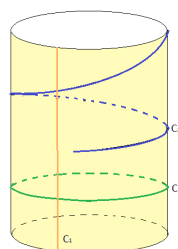
Definición 4 (Curvas en una superficie). Sea S una superficie y C una curva o un arco de curva del espacio \mathbb{R}^3 . Diremos que C es una curva o arco de curva de S si C está contenida en S .

Ejemplo 5 Si a, b, c y d son número reales tales que $ac \neq 0$.

Las hélices circulares parametrizadas por:

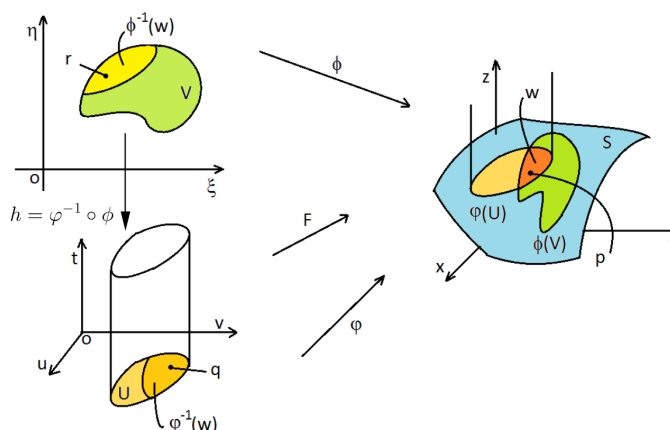
$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\cos(at + b), \sin(at + b), ct + d) \end{aligned}$$

son curvas del cilindro $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.



Así lo es la curva C_3 de la figura. También la recta C_1 y la circunferencia C_2 que se obtiene para los valores $a = 0$ y $c = 0$, respectivamente son curvas de S .

Proposición 4 Sea p un punto de una superficie regular S , y sean $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $\phi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dos parametrizaciones de S tal que $p \in \varphi(U) \cap \phi(V) = W$. Entonces el cambio de coordenadas $h = \varphi^{-1} \circ \phi : \phi^{-1}(W) \rightarrow \varphi^{-1}(W)$ es un difeomorfismo; es decir, h es diferenciable y tiene inversa h^{-1} diferenciable.



Demostración. $h = \varphi^{-1} \circ \phi$ es un homeomorfismo, ya que es la composición de homeomorfismos. No es posible concluir, por un argumento análogo, que h es diferenciable, ya que φ^{-1} está definida en un conjunto abierto de S y todavía no sabemos lo que significa la diferenciable de una función sobre S .

Procederemos de la siguiente manera. Sea $r \in \phi^{-1}(W)$ y pongamos $q = h(r)$. Como $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ es una parametrización, podemos admitir que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Ahora extenderemos φ a una aplicación $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, t \in \mathbb{R}$$

Geoméricamente, F aplica un cilindro vertical C , sobre U , en un “cilindro vertical”

sobre $\varphi(U)$, aplicando cada sección de C con altura t en la superficie $\varphi(u, v) + t e_3$, donde e_3 es el vector unitario del eje z .

Es claro que F es diferenciable y que la restricción $F|_{U \times \{0\}} = \varphi$. Calculando el determinante Jacobiano en q , obtenemos:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)}(q) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0 \end{aligned}$$

Por esta razón es posible aplicar el teorema de la función inversa, que garantiza la existencia de un entorno M de $\varphi(p)$ en \mathbb{R}^3 tal que F^{-1} existe y es diferenciable en M .

Por la continuidad de ϕ y para el entorno W de p , existe un entorno N de r en V tal que $\varphi(N) \subset M$, obteniéndose

$$h|_N = F^{-1} \circ \phi|_N$$

es la composición de aplicaciones diferenciables, por consiguiente h es diferenciable en r . Como r es arbitrario, h es arbitrario en $\phi^{-1}(W)$.

Puede aplicarse exactamente el mismo argumento para demostrar que la aplicación h^{-1} es diferenciable, y, por tanto, h es un difeomorfismo. \square

Observación. En otras palabras, si φ y ϕ vienen dadas por

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in U \\ \phi(\xi, \eta) &= (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) \quad (\xi, \eta) \in V \end{aligned}$$

entonces el cambio de coordenadas h , dado por,

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \phi^{-1}(W)$$

tiene la propiedad de que las funciones u y v admiten derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Como

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = 1$$

esto implica que los determinantes jacobianos de h y h^{-1} son no nulos en todos los puntos. Ahora se dará a conocer una definición explícita de los que se entiende por función diferenciable sobre una superficie regular.

Definición 5 Sea $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto abierto V de una superficie regular S . Se dice que f es **diferenciable en** $p \in V$ si, para alguna parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ con $p \in \varphi(U) \subset V$, la composición $f \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$. Y se dirá que f es diferenciable en V si es diferenciable en todos los puntos de V .

La definición de diferenciability se puede extender fácilmente al caso de aplicaciones entre superficies.

Definición 6 Una aplicación continua $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ de un conjunto abierto V_1 de una superficie regular S_1 en una superficie regular S_2 se dice diferenciable en $p \in V_1$ si, dada las parametrizaciones

$$\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1 \quad \varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$$

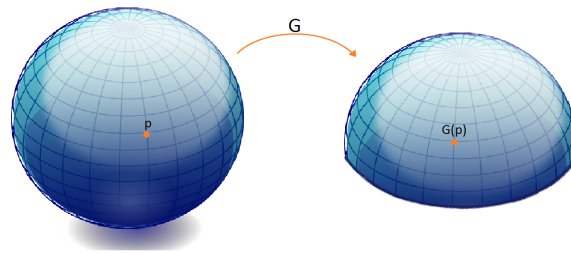
con $p \in \varphi_1(U_1)$ y $\varphi(\varphi_1(U_1)) \subset \varphi_2(U_2)$, la aplicación

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

es diferenciable en $q = \varphi_1^{-1}(p)$.

Observación. Nótese que si S_1, S_2 son superficies y $F : S_1 \rightarrow S_2$ es una aplicación diferenciable, se dirá: F es un difeomorfismo si es diferenciable con inversa diferenciable y se dice que S_1 es difeomorfo a S_2 .

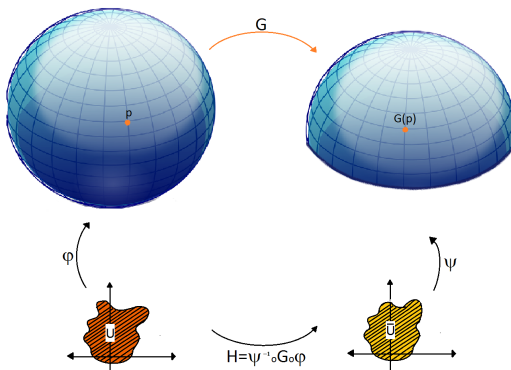
Ejemplo 6 Sea S^2 la esfera cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y sea $G(x, y, z) = (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$ (una aplicación definida de la esfera al hemisferio superior). Demostrar que G es diferenciable.



$$G : S^2 \longrightarrow S^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$$

Se verá que G es diferenciable.



Donde:

$$\varphi(u, v) = (u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$$

$$\psi(u, v) = (u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$$

$$\phi^{-1}(u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) = (u, v)$$

Así:

$$\begin{aligned}
 h &= \phi^{-1} \circ G \circ \varphi(u, v) \\
 &= \phi^{-1} \circ G(u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) \\
 &= \phi^{-1}(u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) \\
 &= (u, v)
 \end{aligned}$$

es diferenciable.

Además es diferenciable ya que existen las derivadas parciales

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v} \right) = (1, 1)$$

Por lo tanto, G es diferenciable en el punto p .

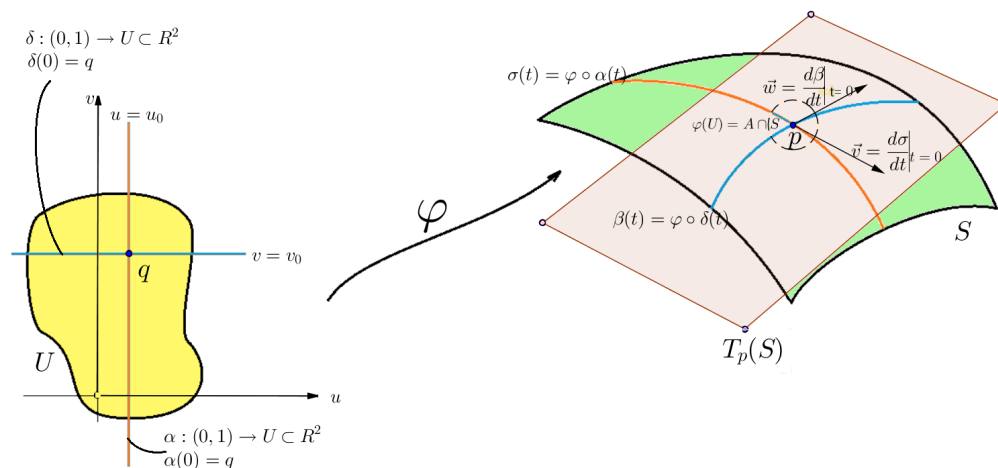
1.5. Plano tangente

Definición 7 (Plano tangente).

Fijado un punto p en la superficie S denotemos mediante $\Gamma(p; S)$ al conjunto de todas las parametrizaciones regulares (I, α) tales que $0 \in I$, $\alpha(0) = p$ y $\alpha(I)$ está contenido en S . Nótese que no estamos sino coleccionando los arcos de curvas regulares de S que pasan por p . Por comodidad coleccionamos sus parametrizaciones, a las que pedimos que pasen por p en el instante $t = 0$. Por supuesto, todo arco de curva regular de S que pasa por p admite una parametrización de este tipo.

Se llama **plano vectorial tangente** a la superficie S en el punto p al conjunto

$$\begin{aligned}
 T_p(S) &= \{\alpha'(0) \in \mathbb{R}^3 : (I, \alpha) \in \Gamma(p; S)\} \\
 &= \{\alpha'(0) \mid \alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S; \text{diferenciable}, \alpha(0) = p\}
 \end{aligned}$$



En consecuencia, $T_p(S)$ es el conjunto de los vectores tangentes asociados a los arcos de curvas regulares de S que pasan por p en el tiempo $t = 0$.

Proposición 5 Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de una superficie regular S y sea $q \in U$. El subespacio vectorial de dimensión 2,

$$d\varphi_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide con el conjunto de los vectores tangentes a S en $\varphi(q)$.

Demostración. Sea w un vector tangente en $\varphi(q)$, es decir, $w = \alpha'(0)$, donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ es diferenciable y $\alpha(0) = \varphi(q)$. La curva $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ es diferenciable. Por la definición de diferencial, tenemos $d\varphi_q(\beta'(0)) = w$. De donde, $w \in d\varphi_q(\mathbb{R}^2)$.

Por otra parte, sea $w = d\varphi_q(v)$, donde $v \in \mathbb{R}^2$. Es claro que v es el vector velocidad de la curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ dada por

$$\gamma(t) = tv + q, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

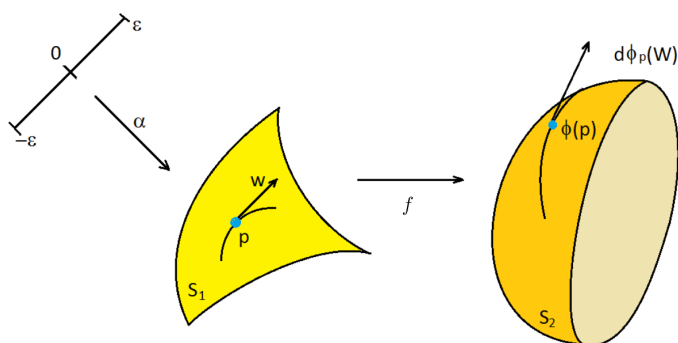
Por la definición de diferencial, $w = \alpha'(0)$, de donde $\alpha = \varphi \circ \gamma$. Esto demuestra que w es un vector tangente. □

Observación. Esta proposición nos dice:

1. $T_p(S) = \text{Img}(d\varphi_q)$, es el plano vectorial tangente a S en p .
2. Una base para $T_p(S)$ viene dado por $B_c = \{\frac{\partial\varphi}{\partial u}|_q, \frac{\partial\varphi}{\partial v}|_q\}$.
3. $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_pS$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.
4. El plano $T_p(S) + p$ que pasa por $p = \varphi(q)$ se llama plano tangente afín a S en p .

1.5.1. Aplicación tangente.

Con la noción de plano tangente, podemos hablar de la diferencial de una aplicación entre superficies. Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares y sea $f : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable de un conjunto abierto V de S_1 en S_2 . Si $p \in V$, sabemos que cada vector tangente $w \in T_p(S_1)$ es el vector velocidad $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ con $\alpha'(0) = p$. La curva $\beta = f \circ \alpha$ es tal que $\beta(0) = f(p)$, y por tanto $\beta'(0)$ es un vector de $T_{f(p)}(S_2)$.



Proposición 6 Dado w , el vector $\beta'(0)$ no depende de la elección de α . La aplicación tangente o diferencial de f en p , $d_p f : T_p(S_1) \rightarrow T_{f(p)}(S_2)$ definida por $d_p f(w) = \beta'(0)$ es lineal.

Demostración. Ver [[4],pág 95]

□

Ejemplo 7 Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unidad.

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Sea $R_{z,\theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la rotación de ángulo θ alrededor del eje z . Entonces $R_{z,\theta}$ restringida a S^2 es una aplicación diferenciable de S^2 .

Calculemos $(dR_{z,\theta})_p(w)$, $p \in S^2$, $w \in T_p(S^2)$. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Entonces, como $R_{z,\theta}$ es lineal,

$$\begin{aligned} (dR_{z,\theta})(w) &= \frac{d}{dt}(R_{z,\theta} \circ \alpha(t))|_{t=0} \\ &= R_{z,\theta}(\alpha'(0)) = R_{z,\theta}(w) \end{aligned}$$

Obsérvese que $R_{z,\theta}$ deja fijo el polo norte $N = (0, 0, 1)$ y que $(dR_{z,\theta})_N : T_N(S^2) \rightarrow T_N(S^2)$ es precisamente la rotación del ángulo θ en el plano $T_N(S^2)$.

Retrospectivamente, lo que hemos hecho hasta ahora es extender las nociones del cálculo diferencial en \mathbb{R}^2 a superficies regulares. Habida cuenta de que el cálculo diferencial es una teoría esencialmente local, hemos definido una entidad (la superficie regular) que era localmente como un plano, salvo difeomorfismos, y entonces esta extensión se volvió natural. Debería esperarse por tanto que el teorema básico de la función inversa se extienda a aplicaciones diferenciables entre superficies.

Diremos que una aplicación $\varphi : U \subset S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo local en $p \in U$ si existe un entorno $V \subset U$ de p tal que φ restringida a V es un difeomorfismo sobre un conjunto abierto $\varphi(V) \subset S_2$. Así el teorema de la función inversa para superficies se expresa:

Proposición 7 Si S_1 y S_2 son superficies regulares y $\varphi : U \subset S_1 \rightarrow S_2$ es una aplicación diferenciable de un conjunto abierto $U \subset S_1$ tal que la diferencial $D\varphi_p$ de φ en $p \in U$ es un isomorfismo, entonces φ es un difeomorfismo local en p .

Demostración. Ver [[4],pág 96]

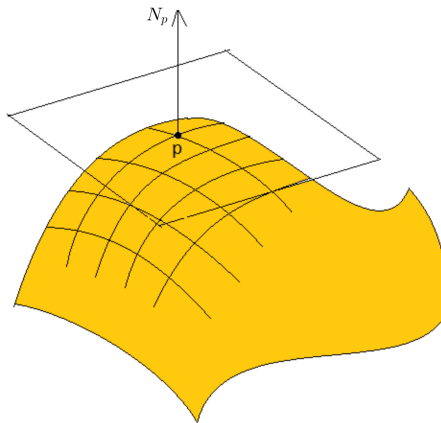
□

Ejemplo 8 *Considérese la gráfica de la función $z = \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$, generada al rotar la curva $z = x^{4/3}$ alrededor del eje z .*

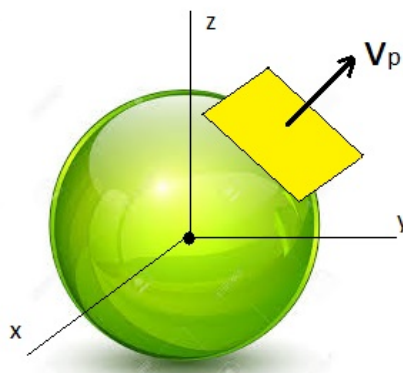
Como la curva es simétrica con respecto al eje z y admite una derivada continua que se anula en el origen, es claro que la gráfica de $z = \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$ tiene al plano xy como plano tangente en el origen. Sin embargo, la derivada parcial z_{xx} no existe en el origen y la gráfica considerada no es una superficie regular según se definió anteriormente.

1.5.2. Orientabilidad

Definición 8 (Vector normal). *Sea p un punto de la superficie S . Se denomina **vector normal** a S en p y se designa por N_p a cualquiera de los dos vectores unitarios que son ortogonales al plano T_pS .*



Ejemplo 9 *Si S es la esfera de centro en el origen y radio 1 y $p = (1, 0, 0)$, y además tenemos que $T_pS = \{x = 0\}$, luego tenemos que el vector normal $N_p = \pm(1, 0, 1)$.*



Proposición 8 Sea V un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 , $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase infinito y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular de F . Sea p un punto de la superficie $S = \{(x, y, z) \in V : F(x, y, z) = c\}$. Entonces:

$$T_p(S) = \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X, \nabla F|_p \rangle = 0\} = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(p) & \frac{\partial F}{\partial y}(p) & \frac{\partial F}{\partial z}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

y $N_p = \frac{\nabla F(p)}{\|\nabla F(p)\|}$ es un vector normal a S en p .

Demostración. La segunda igualdad es consecuencia inmediata de la primera. Para ésta, obsérvese que los dos miembros de la igualdad son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^3 de dimensión dos pues, al ser c valor regular de F , el gradiente $\nabla F(p) \neq 0$.

En consecuencia, es suficiente demostrar que para cada vector $v \in T_p S$, su producto escalar por $\nabla F(p)$ es nulo.

Sea $(I, \alpha) \in \Gamma(p; S)$ tal que $v = \alpha'(0)$. Como cada $\alpha(t) \in S$ resulta que la función $f(t) = F(\alpha(t))$ es constante, luego su derivada es idénticamente nula, y en particular, como queríamos demostrar,

$$0 = f'(0) = DF(\alpha(0))(\alpha'(0)) = \langle \nabla F(p), v \rangle$$

□

Al medir la variación del vector normal a una superficie da lugar a la siguiente definición de orientabilidad.

Definición 9 Una superficie S se dice **orientable** si existe una aplicación continua $N_S : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para todo punto $p \in S$, el vector $N_S(p)$ es un vector normal unitario a S en p . Diremos que N_S es un **campo continuo de vectores unitarios normales** a S . Una superficie orientada es el par (S, N_S) .

Observación . Sea $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase infinito cuyo dominio es el subconjunto abierto V de \mathbb{R}^3 , y c un valor regular de F , así se tiene que

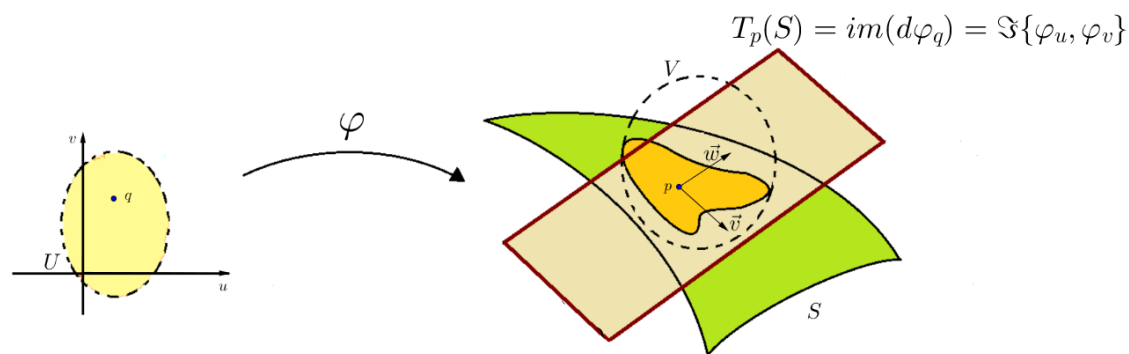
$$S = \{(x, y, z) \in V : F(x, y, z) = c\} \text{ es orientable.}$$

Nótese que, de hecho, $N_S : S \rightarrow S^2$ es una aplicación que toma valores en la esfera S^2 de centro en el origen y de radio uno, pues $\|N_S(p)\| = 1$ para cada punto $p \in S$.

1.6. La primera forma fundamental

Hasta aquí nos hemos fijado en las superficies desde el punto de vista de la diferenciabilidad. Empezaremos con el estudio de más estructuras geométricas transportadas por la superficie. La más importante de éstas es la primera forma fundamental.

El producto interior natural de $S \subset \mathbb{R}^3$ induce en cada plano tangente $T_p(S)$ de una superficie regular S un producto interior, que se denotará por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.



Sea $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ definimos el producto punto en \mathbb{R}^3 como $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_1^3 v_i w_i$
 Definamos la función

$$I_p : T_p(S) \times T_p(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_p$$

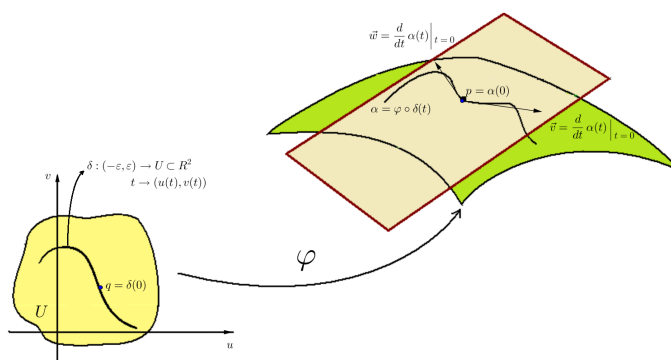
Definición 10 La primera forma fundamental I_p en $T_p(S)$, es definida por

$$I_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_p$$

en la superficie regular S en el punto p .

La primera forma fundamental nos permite hacer mediciones sobre la superficie (longitudes de curvas, ángulos de vectores tangentes, áreas de regiones) sin referirnos al espacio ambiente \mathbb{R}^3 .

Ahora expresaremos la primera forma fundamental en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ asociada a la parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ en p . Como un vector tangente $w \in T_p(S)$ es el vector tangente de una curva parametrizada $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, con $p = \alpha(0) = \varphi(u_0, v_0)$, geoméricamente lo podemos ver de la siguiente figura:



Tenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \varphi \circ \delta \\ &= \varphi(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

Como \vec{v} y \vec{w} son vectores tangentes a la curva parametrizada tenemos: $\vec{v} = u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ y $\vec{w} = u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial v}$

$$\begin{aligned}
 I_p(\vec{v}, \vec{w}) &= \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\
 &= \left\langle u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial v}, u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle \\
 &= \left\langle u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial v}, u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + \left\langle u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial v}, v' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle \\
 &= \left\langle u' \frac{\partial \varphi}{\partial u}, u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial \varphi}{\partial v}, u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + \left\langle u' \frac{\partial \varphi}{\partial u}, v' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial \varphi}{\partial v}, v' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle \\
 &= (u')^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + 2u'v' \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + (v')^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Así la primera forma fundamental es:

$$I_p(\vec{v}, \vec{w}) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$$

en donde los valores de las funciones involucradas se evalúan en $t = 0$, y $q = (u_0, v_0)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 E(u_0, v_0) &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p = \|\varphi_u\|^2 \\
 F(u_0, v_0) &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p \\
 G(u_0, v_0) &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p = \|\varphi_v\|^2
 \end{aligned}$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de $T_p(S)$.

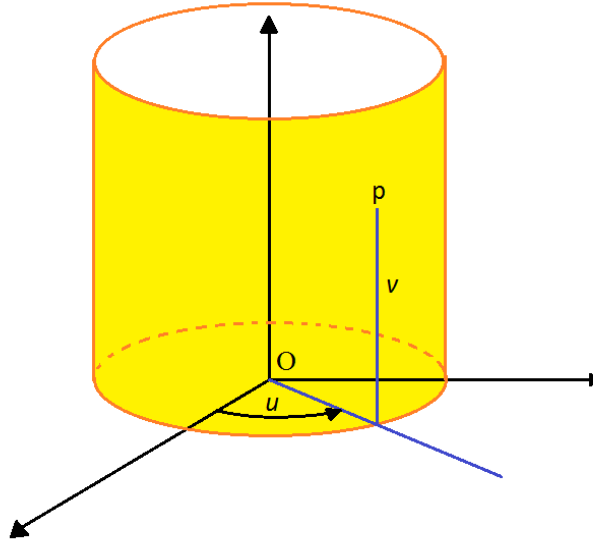
Observación

1. La matriz de la primera forma fundamental I_p de S en el punto p respecto de la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ del plano tangente $T_p(S)$ asociado a la parametrización φ es:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

2. Los números reales E, G y $EG - F^2$ son positivos.

Ejemplo 10 El cilindro recto apoyado sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ admite la parametrización $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde



$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$$

Para calcular la primera forma fundamental, observemos

$$\varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\varphi_v = (0, 0, 1)$$

y por consiguiente,

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p = 0$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p = 1$$

1.6.1. Cálculo de longitudes y ángulos

Como mencionamos antes, la importancia de la primera forma fundamental I procede del hecho de que conociendo I podemos tratar cuestiones métricas sobre una superficie regular sin otras referencias al espacio ambiente \mathbb{R}^3 . Así, la longitud de arco s de una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ viene dada por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt$$

En particular, si $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ está contenida en un entorno coordinado correspondiente a la parametrización $\varphi(u, v)$, podemos calcular la longitud de arco de α entre, pongamos por caso, 0 y t mediante

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt$$

También el ángulo θ bajo el que se cortan dos curvas parametrizadas $\alpha : I \rightarrow S$, $\beta : I \rightarrow S$ en $t = t_0$ viene dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle_{\alpha(t_0)}}{|\alpha'(t_0)|_{\alpha(t_0)} |\beta'(t_0)|_{\alpha(t_0)}}$$

En particular, al ángulo φ entre las curvas coordenadas de una parametrización $\varphi(u, v)$ que se intersepan en p , es

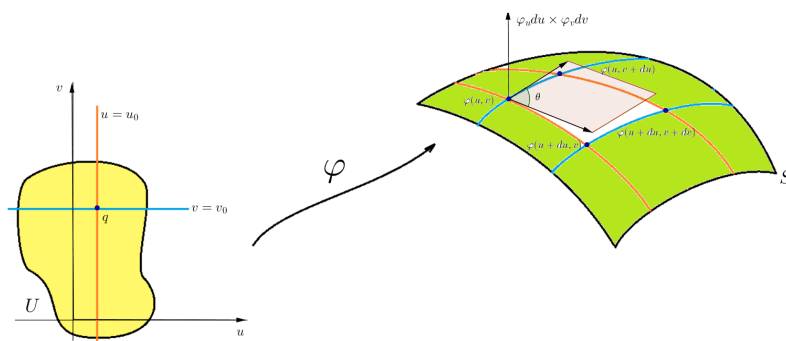
$$\cos \varphi = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p}{|\varphi_u|_p |\varphi_v|_p} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

1.6.2. Cálculo de áreas

Otra cuestión métrica que puede tratarse con la primera forma fundamental es el cálculo (o la definición) del área de una región acotada de una superficie regular S . Un dominio regular de S es un subconjunto abierto y conexo de S tal que su frontera es la imagen de un círculo mediante un homeomorfismo diferenciable que es regular (es decir, su diferencial es no nula) excepto en un número finito de puntos. Una región de S es la unión de un dominio con su frontera. Una región de $S \subset \mathbb{R}^3$

está **acotada** si está contenida en alguna bola de \mathbb{R}^3 .

Consideremos regiones acotadas R que estén contenidas en un entorno $\varphi(U)$ de una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. En otras palabras, R es la imagen mediante φ de una región acotada $Q \subset U$.



Intuitivamente la función $|\varphi_u \times \varphi_v|$, definida en U , representa el área del paralelogramo generado por los vectores φ_u y φ_v .

Definición 11 Sea $R \subset S$ una región acotada de una superficie regular contenida en el entorno coordenado de una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. El número positivo

$$\int \int_Q |\varphi_u \times \varphi_v| du dv = A(R), \quad Q = \varphi^{-1}(R),$$

Se denomina el área de R . Donde la integral no depende de la parametrización de φ .

Observación. Del álgebra lineal tenemos la identidad:

$$|\varphi_u \times \varphi_v|^2 + \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = |\varphi_u|^2 \cdot |\varphi_v|^2$$

así

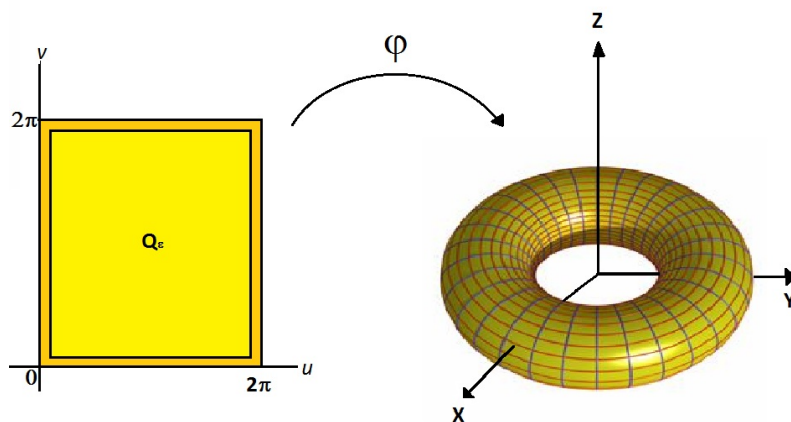
$$\begin{aligned} |\varphi_u \times \varphi_v|^2 &= |\varphi_u|^2 \cdot |\varphi_v|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2 \end{aligned}$$

de donde el integrando de $A(R)$ se puede escribir como

$$|\varphi_u \times \varphi_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

Observación. En un gran número de superficies, la restricción que fijamos de la región Q debe estar contenida en un entorno coordenado no es muy grave, pues existen entornos que cubren la superficie excepto algunas curvas que no contribuyen para el área.

Ejemplo 11 Calculemos el área del toro. Para ello, consideramos el entorno coordenado correspondiente a la parametrización.



$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi$$

que recubre el toro, exceptuando un meridiano y un paralelo.

Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (r \cos u + a)^2$$

luego

$$\sqrt{EG - F^2} = r(r \cos u + a)$$

Ahora, consideremos la región R_ε obtenida como la imagen mediante φ de la región Q_ε dada por ($\varepsilon > 0$ y pequeño),

$$Q_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 + \varepsilon \leq u \leq 2\pi - \varepsilon, 0 + \varepsilon \leq v \leq 2\pi - \varepsilon\}$$

Utilizando la definición anterior obtenemos

$$\begin{aligned} A(R_\varepsilon) &= \int \int_{Q_\varepsilon} r(r \cos u + a) du dv \\ &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (r^2 \cos u + ra) du \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} dv \\ &= r^2(2\pi - 2\varepsilon)(\text{sen}(2\pi - \varepsilon) - \text{sen } \varepsilon) + ra(2\pi - 2\varepsilon)^2 \end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ en las expresiones de arriba, obtenemos

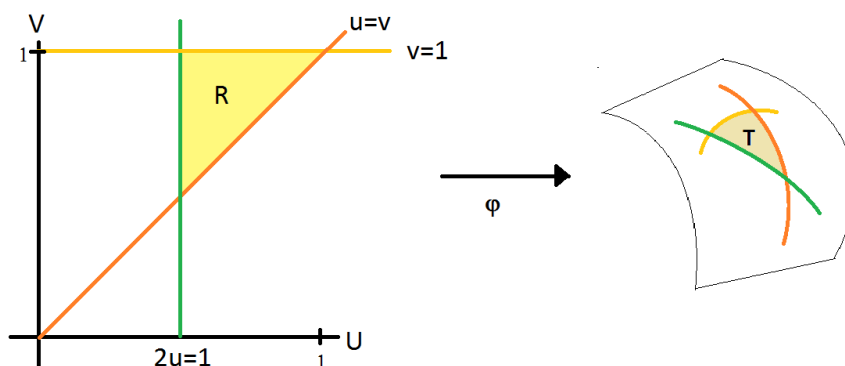
$$A(T) = \lim A(R_\varepsilon) = 4\pi^2 ra$$

Continuaremos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 12 *Los primeros coeficientes fundamentales de la superficie S son:*

$$E(u, v) = \cotg^2 u, \quad F(u, v) = 0 \quad \text{y} \quad G(u, v) = \sin^2 u.$$

Calcular el área encerrada por el triángulo curvilíneo T , imagen por φ del triángulo de \mathbb{R}^2 limitado por las rectas $\{2u = 1\}$, $\{u = v\}$ y $\{v = 1\}$.



El determinante de la matriz de la primera forma fundamental en el punto (u, v) , respecto de la base del plano tangente $T_{\varphi(u,v)}S$ es:

$$E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) = \cos^2 u$$

El triángulo curvilíneo² $R = \varphi^{-1}(T)$ de la figura anterior es el limitado por las rectas del enunciado, con vértices:

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad p_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad p_3 = (1, 1)$$

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \leq v \leq 1; \frac{1}{2} \leq u \leq 1\}$$

En particular, $\cos u > 0$ en R , luego $\sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} = \cos u$, por lo que el área encerrada por T vale

$$\begin{aligned} \text{Area}(T) &= \int_R \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \, du \, dv \\ &= \int_R \cos u \, du \, dv \\ &= \int_{1/2}^1 \cos u \left(\int_u^1 dv \right) du \\ &= \int_{1/2}^1 (1 - u) \cos u \, du \end{aligned}$$

²Un triángulo curvilíneo en la superficie S es un subconjunto P de S que es imagen por una parametrización α de un triángulo P' de un abierto $U \in \mathbb{R}^2$.

Integrando por partes, y llamando $w = \sin u$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int u \cos u \, du &= \int u \, dw \\ &= uw - \int w \, du \\ &= u \sin u - \int \sin u \, du \\ &= u \sin u + \cos u\end{aligned}$$

Luego la primitiva de $(1 - u) \cos u$ es la función:

$$F(u) = \sin u - u \sin u - \cos u = (1 - u) \sin u - \cos u$$

y por tanto,

$$Area(T) = F(1) - F(1/2) = \cos \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} - \cos 1$$

Capítulo 2

Geometría Local de las Superficies

En este capítulo estudiaremos la forma de la superficie en un entorno de un punto, para ello introduciremos las definiciones: aplicación de Gauss, curvaturas principales y direcciones principales, curvatura gaussiana, curvatura media y curvatura geodésica, además, clasificaremos los puntos de una superficie y estudiaremos las curvas especiales sobre las superficies.

2.1. Aplicación de Gauss

Iniciemos recordando, que dada una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de una superficie regular S en un punto $p \in S$, podemos elegir un vector unitario normal en cada punto de $\varphi(U)$ mediante la expresión.

$$\vec{N}(q) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}(q), \quad q \in \varphi(U)$$

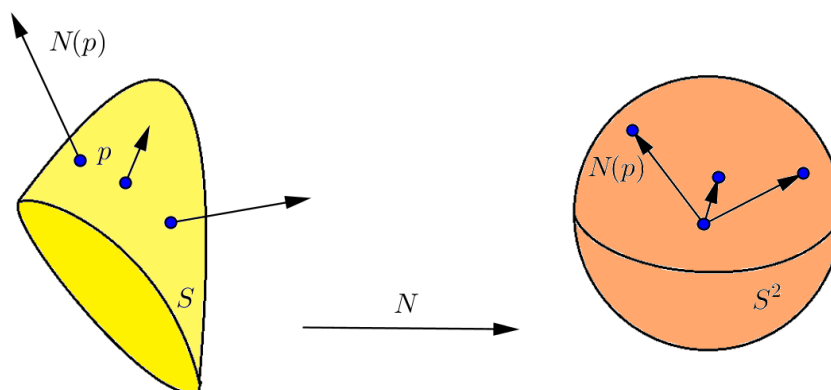
Así, tenemos una aplicación $N : \varphi(U) \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $q \in \varphi(U)$ un vector unitario normal $\vec{N}(q)$.

Más generalmente, si $V \subset S$ es un subconjunto abierto en S y $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable que asocia a cada $q \in V$ un vector unitario normal en q , decimos que N es un campo diferenciable de vectores unitarios normales en V .

Una orientación N en S induce una orientación sobre cada espacio tangente $T_p(S)$, $p \in S$, como sigue. Defínase una base $\{v, w\} \in T_p(S)$ como positiva si $\langle v \times w, N \rangle$ es positivo. El conjunto de todas las bases positivas de $T_p(S)$ es una orientación para $T_p(S)$.

De aquí en adelante se va a denotar a S como una superficie regular orientable en la que ha sido elegida una orientación (es decir, un campo diferenciable de vectores unitarios normales a N); nos referimos a esto diciendo simplemente que S es una superficie con orientación N .

Definición 12 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con una orientación N . La aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma valores en la esfera unidad $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. La aplicación $N : S \rightarrow S^2$ así definida, se denomina la **Aplicación de Gauss** de S .



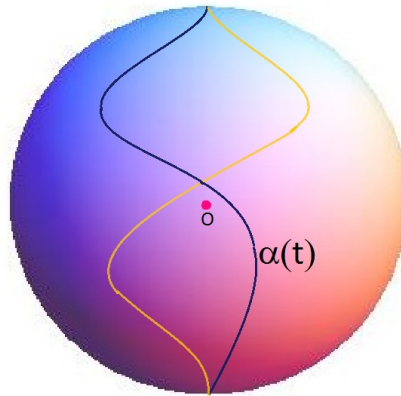
Observación. Es inmediato verificar que la aplicación de Gauss es diferenciable. La diferencial $d_p N$ de N en $p \in S$ es una aplicación lineal de $T_p(S)$ en $T_{N(p)}(S^2)$. Como $T_p(S)$ y $T_{N(p)}(S^2)$ son planos paralelos, $d_p N$ puede observarse como una aplicación lineal en $T_p(S)$.

La aplicación lineal $d_p N : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ opera como sigue. Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ en S con $\alpha(0) = p$, consideremos la curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(\alpha(t))$ en la esfera S^2 ; esto equivale a restringir al vector normal N a la curva $\alpha(t)$. El vector tangente $N'(0) = d_p N(\alpha'(0)) = (N \circ \alpha)'(0)$ es un vector de $T_p(S)$.

Así, $d_p N$ mide cómo N se aleja de N_p en un entorno de p .

Ejemplo 13 *Considérese la esfera unidad*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$



Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva parametrizada en S^2 , entonces

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0$$

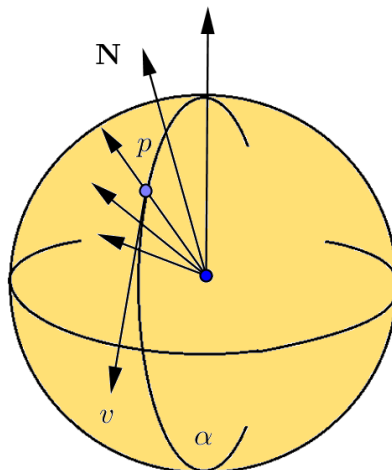
lo cual demuestra que el vector (x, y, z) es normal a la esfera en el punto (x, y, z) . Así $N = (x, y, z)$ y $\mathbf{N} = (-x, -y, -z)$ son campos vectoriales unitarios normales en S^2 .

Fijamos una orientación en S^2 eligiendo $\mathbf{N} = (-x, -y, -z)$ como campo normal. Nótese que \mathbf{N} apunta hacia el centro de la esfera.

Restringido a la curva $\alpha(t)$, el vector normal

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = \mathbf{N}'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t));$$

es decir, $d_p N(v) = v$ para todo $p \in S^2$ y todo $v \in T_p(S^2)$. Nótese que con la elección de N como campo normal (es decir, con la orientación opuesta) habríamos obtenido $d_N(v) = v$



La siguiente proposición contiene un hecho importante concerniente a $d_p N$.

Proposición 9 *La diferencial $d_p N : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal autoadjunta, es decir, $\langle d_p N(v), w \rangle = \langle v, d_p N(w) \rangle$, $\forall v, w \in T_p(S)$.*

Demostración. Como $d_p N$ es lineal, basta con verificar que $\langle d_p N(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, d_p N(w_2) \rangle$ para una base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p(S)$. Sea $\varphi(u, v)$ una parametrización de S en p y $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ la base asociada de $T_p(S)$. Si $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ es una curva parametrizada en S , con $\alpha(0) = p$, tenemos

$$\begin{aligned} d_p N(\alpha'(0)) &= d_p N(\varphi_u u'(0) + \varphi_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0) \end{aligned}$$

en particular, $d_p N(\varphi_u) = N_u$ y $d_p N(\varphi_v) = N_v$. Por lo tanto, para probar que $d_p N$ es autoadjunta, basta demostrar que

$$\langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, N_v \rangle$$

Para ver esto, tomemos las derivadas de $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ y $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$, con respecto a v y u , respectivamente, y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \langle N, \varphi_u \rangle &= 0 \\ \langle \frac{\partial N}{\partial v}, \varphi_u \rangle + \langle N, \frac{\partial \varphi_u}{\partial v} \rangle &= 0 \\ \langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uv} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \langle N, \varphi_u \rangle &= 0 \\ \langle \frac{\partial N}{\partial u}, \varphi_v \rangle + \langle N, \frac{\partial \varphi_v}{\partial u} \rangle &= 0 \\ \langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \varphi_{vu} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} \langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uv} \rangle &= 0 \\ \langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \varphi_{vu} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$\langle N_u, \varphi_v \rangle = - \langle N, \varphi_{uv} \rangle = \langle N_v, \varphi_u \rangle$$

□

Observación.

1. El operador lineal autoadjunto, llamado el operador de forma de la superficie S en p , se definirá por:

$$\begin{aligned} s_p = -d_p N : T_p(S) &\rightarrow T_p(S) \\ \alpha'(0) &\mapsto -d_p N(\alpha'(0)) = -(N \circ \alpha)'(0) \end{aligned}$$

y se denominará Operador de Weingarten.

2.2. Segunda forma fundamental.

El hecho de que $s_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ es una aplicación lineal autoadjunta nos permite asociar a s_p una forma cuadrática Q en $T_p(S)$, dada por $Q(v) = \langle s_p(v), v \rangle$, $v \in T_p(S)$.

Se llama segunda forma fundamental de la superficie orientable (S, N_S) en el punto $p \in S$ a la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} II_p : T_p(S) \times T_p(S) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (w_1, w_2) &\mapsto \langle s_p(w_1), w_2 \rangle = - \langle d_p N(w_1), w_2 \rangle \end{aligned}$$

Vamos a expresar ahora el operador de Weingarten y la segunda forma fundamental usando coordenadas locales.

Para ello supongamos que $\varphi(u, v)$ es una parametrización de la superficie S . Sea $p \in S$ y $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una curva parametrizada en S , con $\alpha(0) = p$. El vector tangente a $\alpha(t)$ en p es :

$$\alpha' = u' \varphi_u + v' \varphi_v$$

por lo que al aplicar la diferencial de la aplicación de Gauss a este vector se tiene:

$$d_p N(\alpha') = \frac{dN}{dt}(u(t), v(t)) = u' N_u + v' N_v \quad (2.1)$$

donde $N_u = \frac{\partial N}{\partial u}$ y $N_v = \frac{\partial N}{\partial v}$. Además N_u y N_v pertenecen a $T_p(S)$ ya que ambos son ortogonales a N , lo cual se sigue de derivar la relación $\langle N, N \rangle = 1$, con respecto a las variables u y v , respectivamente. En consecuencia N_u y N_v se expresan como una combinación lineal de los vectores φ_u, φ_v por

$$N_u = a_{11} \varphi_u + a_{21} \varphi_v \quad (2.2)$$

$$N_v = a_{12} \varphi_u + a_{22} \varphi_v \quad (2.3)$$

Sustituyendo (2,2), (2,3) en (2,1) obtenemos

$$d_p N(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')\varphi_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\varphi_v$$

que en forma matricial expresamos como

$$d_p N(u', v') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

más adelante obtendremos fórmulas explícitas para los coeficientes a_{ij} que aparece en (2,4).

Por otro lado la expresión de la segunda forma fundamental en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ está dada por:

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= \langle s_p(\alpha'), \alpha' \rangle_p \\ &= - \langle d_p N(\alpha'), \alpha' \rangle_p \\ &= - \langle u'N_u + v'N_v, u'\varphi_u + v'\varphi_v \rangle_p \\ &= - \langle u'N_u + v'N_v, u'\varphi_u \rangle_p - \langle u'N_u + v'N_v, v'\varphi_v \rangle_p \\ &= - \langle u'N_u, u'\varphi_u \rangle_p - \langle v'N_v, u'\varphi_u \rangle_p - \langle u'N_u, v'\varphi_v \rangle_p - \langle v'N_v, v'\varphi_v \rangle_p \\ &= -u'u' \langle N_u, \varphi_u \rangle_p - v'u' \langle N_v, \varphi_u \rangle_p - u'v' \langle N_u, \varphi_v \rangle_p - v'v' \langle N_v, \varphi_v \rangle_p \\ &= (u')^2(- \langle N_u, \varphi_u \rangle_p) + 2u'v'(- \langle N_v, \varphi_u \rangle_p) + (v')^2(- \langle N_v, \varphi_v \rangle_p) \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 \end{aligned}$$

donde los coeficientes de II_p están dados por:

$$\begin{aligned} e &= L_{11} = - \langle N_u, \varphi_u \rangle_p = \langle N, \varphi_{uu} \rangle_p \\ f &= L_{12} = - \langle N_v, \varphi_u \rangle_p = \langle N, \varphi_{uv} \rangle_p = \langle N, \varphi_{vu} \rangle_p = - \langle N_u, \varphi_v \rangle_p \\ g &= L_{22} = - \langle N_v, \varphi_v \rangle_p = \langle N, \varphi_{vv} \rangle_p \end{aligned}$$

Por tanto, fijando una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de S en el punto p , la

matriz de la segunda forma fundamental II_p en el punto $p = \varphi(q)$, respecto a la base canónica de $T_p(S)$ asociada a la parametrización $\varphi(u, v)$ (haciendo $u = u_1, v = v_2$). Como

$$B_c = \left\{ w_1(q) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(q), w_2(q) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(q) \right\}$$

se han calculado los productos reales $\langle s_p(w_i(q)), w_j(q) \rangle$. Según ya hemos visto la función de clase C^∞

$$\begin{aligned} L_{ij} : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \langle s_p(w_i(q)), w_j(p) \rangle \end{aligned}$$

Por tanto la matriz de II_p respecto de la base B_c es

$$[II_p] = \begin{pmatrix} L_{11}(q) & L_{12}(q) \\ L_{21}(q) & L_{22}(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Las funciones L_{ij} se llaman coeficientes de la segunda forma fundamental, o segundos coeficientes fundamentales de la superficie orientable (S, N_S) respecto a la parametrización φ .

Los coeficientes de la primera forma fundamental y los de la segunda forma fundamental estan relacionados por,

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Para encontrar la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Recordemos que dada una matriz A su inversa viene dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj}(A)$. Por lo que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\ &= - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ &= - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & -eF + fE \\ fG - gF & -fF + gE \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} fF - eG & eF - fE \\ gF - fG & fF - gE \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde se deducen las siguientes expresiones para los coeficientes (a_{ij}) de la matriz de $d_p N$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

estos coeficientes se conocen como las **ecuaciones de Weingarten**. Por otro lado la expresión matricial del operador de Weingarten en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ está dada por:

$$\begin{aligned} [s_p] &= -[d_p N] = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \\ &= [II_p][I_p]^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

2.3. Condiciones de compatibilidad.

El papel desempeñado por la curvatura y la torsión en las curvas planas lo juegan en las superficies las formas fundamentales, de manera análoga que con las curvas, vamos a asignar un triedro a cada punto de una superficie (lo análogo al triedro de Frenet) y a estudiar las derivadas de sus vectores. A cada punto de $\varphi(U)$ le podemos asignar un triedro natural definido por los vectores φ_u , φ_v y N .

Al expresar las derivadas de los vectores φ_u , φ_v y N con respecto a la base $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + \alpha_{11}N \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + \alpha_{12}N \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v + \alpha_{22}N \\ N_u &= \beta_1^1\varphi_u + \beta_1^2\varphi_v + \gamma_1N \\ N_v &= \beta_2^1\varphi_u + \beta_2^2\varphi_v + \gamma_2N\end{aligned}$$

Donde las tres primeras ecuaciones son llamadas las **Ecuaciones de Gauss**.

Y vamos a determinar los coeficientes Γ_{ij}^k , α_{ij} , β_i^j y γ_i , para $i, j, k = 1, 2$.

Como N es de longitud 1, entonces N_u y N_v como son ortogonales a N . Por tanto,

$$\begin{aligned}0 = \langle N_u, N \rangle &= \langle \beta_1^1\varphi_u, N \rangle + \langle \beta_1^2\varphi_v, N \rangle + \langle \gamma_1N, N \rangle \\ 0 = \langle N_v, N \rangle &= \langle \beta_2^1\varphi_u, N \rangle + \langle \beta_2^2\varphi_v, N \rangle + \langle \gamma_2N, N \rangle\end{aligned}$$

Pero, $\langle \varphi_u, N \rangle = \langle \varphi_v, N \rangle = 0$ y $\langle N, N \rangle = 1$. De esta forma, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Por otra parte, de lo anterior se desprende que

$$\begin{aligned}-e = \langle \varphi_u, N_u \rangle &= \langle \beta_1^1\varphi_u, \varphi_u \rangle + \langle \beta_1^2\varphi_u, \varphi_v \rangle = \beta_1^1E + \beta_1^2F \\ -f = \langle \varphi_v, N_u \rangle &= \langle \beta_1^1\varphi_v, \varphi_u \rangle + \langle \beta_1^2\varphi_v, \varphi_v \rangle = \beta_1^1F + \beta_1^2G \\ -f = \langle \varphi_u, N_v \rangle &= \langle \beta_2^1\varphi_u, \varphi_u \rangle + \langle \beta_2^2\varphi_u, \varphi_v \rangle = \beta_2^1E + \beta_2^2F \\ -g = \langle \varphi_v, N_v \rangle &= \langle \beta_2^1\varphi_v, \varphi_u \rangle + \langle \beta_2^2\varphi_v, \varphi_v \rangle = \beta_2^1F + \beta_2^2G\end{aligned}$$

Si se resuelven las dos primeras ecuaciones para β_1^1 y β_1^2 y las otras dos para β_2^1 y

β_2^2 , se tiene

$$\begin{aligned}\beta_1^1 &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ \beta_1^2 &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ \beta_2^1 &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \beta_2^2 &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}\end{aligned}$$

Prosiguiendo en esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \langle \Gamma_{11}^1 \varphi_u, N \rangle + \langle \Gamma_{11}^2 \varphi_v, N \rangle + \langle \alpha_{11} N, N \rangle = \alpha_{11} \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \langle \Gamma_{12}^1 \varphi_u, N \rangle + \langle \Gamma_{12}^2 \varphi_v, N \rangle + \langle \alpha_{12} N, N \rangle = \alpha_{12} \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \langle \Gamma_{22}^1 \varphi_u, N \rangle + \langle \Gamma_{22}^2 \varphi_v, N \rangle + \langle \alpha_{22} N, N \rangle = \alpha_{22}\end{aligned}$$

de esta manera

$$\alpha_{11} = e, \quad \alpha_{12} = f, \quad \alpha_{22} = g$$

Para determinar Γ_{ij}^k , obsérvese que

$$\begin{aligned}\langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle &= \frac{1}{2} (\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle)_u = \frac{1}{2} E_u \\ \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle &= \frac{1}{2} (\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle)_v = \frac{1}{2} E_v \\ \langle \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle &= \frac{1}{2} (\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle)_v = \frac{1}{2} G_v \\ \langle \varphi_v, \varphi_{uv} \rangle &= \frac{1}{2} (\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle)_u = \frac{1}{2} G_u\end{aligned}$$

Además, utilizando lo anterior

$$F_u = (\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle)_u = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \frac{1}{2}E_v$$

$$F_v = (\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle)_v = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle = \frac{1}{2}G_u + \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle$$

de donde

$$\langle \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_u &= \langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v &= \langle \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \\ \frac{1}{2}E_v &= \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = \Gamma_{12}^1 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F \\ \frac{1}{2}G_u &= \langle \varphi_v, \varphi_{uv} \rangle = \Gamma_{12}^1 \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G \\ F_v - \frac{1}{2}G_u &= \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle = \Gamma_{22}^1 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F \\ \frac{1}{2}G_v &= \langle \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle = \Gamma_{22}^1 \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G \end{aligned}$$

Al resolver las dos primeras ecuaciones para Γ_{11}^1 y Γ_{11}^2 , las dos siguientes para Γ_{12}^1 y Γ_{12}^2 , y las dos últimas para Γ_{22}^1 y Γ_{22}^2 , se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

estas últimas ecuaciones son conocidas como los **símbolos de Christoffel de segunda especie**.

Proposición 10 (Fórmulas de Gauss). *Sea φ una parametrización de la superficie S , y $E, F, G; e, f, g$ y Γ_{ij}^k los coeficientes de la primera, segunda forma fundamental y los símbolos de Christoffel de segunda especie de S respecto a φ , respectivamente. Se cumplen las siguientes igualdades*

$$E \left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) = \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2$$

$$G \left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial v} + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1$$

Demostración. Ver [[6],pág 356-361] □

Obsérvese que dadas las funciones E, F, G, e, f, g de u y v , es necesario averiguar si existe o no una superficie cuyos primeros y segundos coeficientes fundamentales sean E, F, G, e, f, g .

En general, la respuesta es negativa, a no ser que se cumplan ciertas condiciones de compatibilidad. Tales condiciones resultan del hecho de que si la parametrización $\varphi(u, v)$ es una función de clase C^3 , entonces las derivadas parciales mixtas de tercer orden de φ son independientes del orden en que se realice la derivación.

Observación. Las derivadas mixtas de tercer orden de φ existen y cumplen ser independientes del orden de derivación si sus primeros y segundos coeficientes fundamentales cumplen las **ecuaciones de compatibilidad** llamadas ecuaciones de *Codazzi – Mainardi*.

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2$$

Tenemos el siguiente teorema

Teorema 2 (Teorema fundamental de las superficies). *Supongamos que E, F y G son funciones de u y v de clase C^2 , y e, f y g funciones de u y v de clase C^1 , todas ellas definidas en un conjunto abierto que contiene a (u_0, v_0) y tales que, para todo (u, v) , se cumpla que*

1. $EG - F^2 > 0, E > 0, G > 0$
2. E, F, G, e, f, g satisfacen las ecuaciones de compatibilidad.

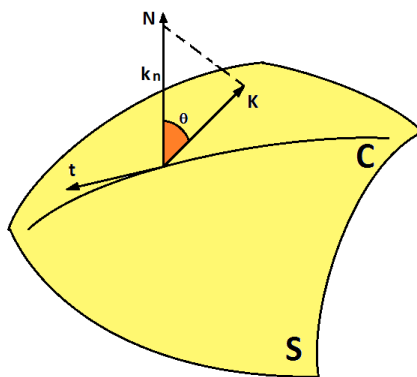
Demostración. Ver [[5],pág 216-217] □

2.4. Curvatura

El propósito de la presente sección es medir el comportamiento del plano tangente en el punto $p \in S$, cuando este varía sobre un conjunto abierto de la superficie S . Esto equivale a medir como cambia el vector normal unitario N en un punto p , al variar éste sobre una vecindad que lo contenga.

2.4.1. Curvatura Normal

Definición 13 *Sea C una curva regular en S que pasa por $p \in S$, k la curvatura de C en p , y $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, donde n es el vector normal a C y N es el vector normal unitario a S en p . El número $k_n = k \cos \theta$ se denomina la curvatura normal de $C \subset S$ en p .*



Observación .

La curvatura normal de C no depende de la orientación C sino que cambia de signo con un cambio de orientación de la superficie.

Dado un punto p de la superficie y $\alpha = \varphi(u(t), v(t))$ una curva regular C que pasa por p , la componente de k_n en la dirección de N se denomina curvatura normal de C en p , y tenemos

$$k_n = \langle K, N \rangle = k \langle n, N \rangle = k \cos \theta$$

donde K es el vector curvatura de C en p .

Recordemos que la tangente unitaria a C en p es el vector $\mathbf{t} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} / \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\|$, y el vector curvatura es $k = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\|$. De esta manera, utilizando el hecho de que \mathbf{t} es perpendicular a N a todo lo largo de la curva, de tal modo que $0 = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{t}, N \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{t}}{dt}, N \right\rangle + \langle \mathbf{t}, \frac{dN}{dt} \rangle$, tendremos

$$\begin{aligned} k_n &= \langle K, N \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{t}}{dt}, N \right\rangle / \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| = \left\langle -\mathbf{t}, \frac{dN}{dt} \right\rangle / \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| \\ &= -\frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dN}{dt} / \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\|^2 = -\frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dN}{dt} / \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \\ &= -\left(\varphi_u \frac{du}{dt} + \varphi_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(N_u \frac{du}{dt} + N_v \frac{dv}{dt} \right) / \left(\varphi_u \frac{du}{dt} + \varphi_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(\varphi_u \frac{du}{dt} + \varphi_v \frac{dv}{dt} \right) \end{aligned}$$

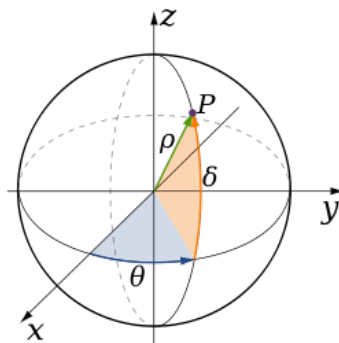
Por tanto

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{e(du/dt)^2 + 2f(du/dt)(dv/dt) + g(dv/dt)^2}{E(du/dt)^2 + 2F(du/dt)(dv/dt) + G(dv/dt)^2} \\ &= \frac{II}{I} \end{aligned}$$

Ejemplo 14 Consideremos la esfera de radio a dada por

$$\varphi = (a \cos \theta \sin \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \phi) \quad 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi$$

calcular la curvatura normal.



En este caso

$$\begin{aligned} \varphi_\theta &= (-a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta \sin \phi, 0) \\ \varphi_\phi &= (a \cos \theta \cos \phi, a \sin \theta \cos \phi, -a \sin \phi) \\ \varphi_{\theta\theta} &= (-a \cos \theta \sin \phi, -a \sin \theta \sin \phi, 0) \\ \varphi_{\theta\phi} &= (-a \sin \theta \cos \phi, a \cos \theta \cos \phi, 0) \\ \varphi_{\phi\phi} &= (-a \cos \theta \sin \phi, -a \sin \theta \sin \phi, -a \cos \phi) \end{aligned}$$

y

$$\vec{N} = (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \phi)$$

Y los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental son

$$\begin{aligned} E = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle &= a^2 \sin^2 \phi & F = \langle \varphi_\theta, \varphi_\phi \rangle &= 0 & G = \langle \varphi_\phi, \varphi_\phi \rangle &= a^2 \\ e = \langle \varphi_{\theta\theta}, N \rangle &= a \sin^2 \phi & f = \langle \varphi_{\theta\phi}, N \rangle &= 0 & g = \langle \varphi_{\phi\phi}, N \rangle &= a \end{aligned}$$

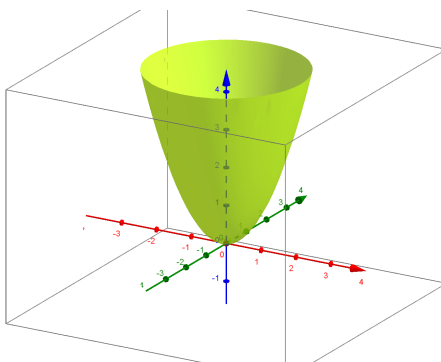
Por lo que

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{ed\theta^2 + 2fd\theta d\phi + gd\phi^2}{Ed\theta^2 + 2Fd\theta d\phi + Gd\phi^2} \\ &= \frac{a \sin^2 \phi d\theta^2 + a d\phi^2}{a^2 \sin^2 \phi d\theta^2 + a^2 d\phi^2} \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

en este caso k_n es constante e igual a $1/a$ en todos los puntos y en todas las direcciones.

Ejemplo 15 Hallar el vector curvatura normal, k_n , de la curva $u = t^2$, $v = t$, de la superficie $\varphi = (u, v, u^2 + v^2)$ en el punto $t = 1$.

En $t = 1$, tenemos que $u = 1$ y $v = 1$, así que al calcular los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental y evaluar en $(u, v) = (1, 1)$ tenemos:



Primero encontremos:

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (1, 0, 2u) \\ \varphi_v &= (0, 1, 2v) \\ \varphi_{uu} &= (0, 0, 2) \\ \varphi_{uv} &= (0, 0, 0) \\ \varphi_{vv} &= (0, 0, 2)\end{aligned}$$

Y

$$\vec{N} = (4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(-2u, -2v, 1)$$

Por lo que los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental son:

$$\begin{aligned}E(1, 1) &= 1 + 4u^2|_{(1,1)} = 4 \\ F(1, 1) &= 4uv|_{(1,1)} = 4 \\ G(1, 1) &= 1 + 4v^2|_{(1,1)} = 5 \\ e(1, 1) &= 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}|_{(1,1)} = 2/3 \\ f(1, 1) &= 0|_{(1,1)} = 0 \\ g(1, 1) &= 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}|_{(1,1)} = 2/3\end{aligned}$$

Y

$$\vec{N}(1, 1) = (4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(-2u, -2v, 1)|_{(1,1)} = -1/3(2, 2, -1)$$

Además

$$\frac{du}{dt}(1) = 2t|_{t=1} = 2, \quad \frac{dv}{dt}(1) = 1$$

Y en consecuencia

$$k_n = \frac{e(du/dt)^2 + 2f(du/dt)(dv/dt) + g(dv/dt)^2}{E(du/dt)^2 + 2F(du/dt)(dv/dt) + G(dv/dt)^2} = \frac{10}{123}$$

Por ello

$$\mathbf{k}_n = k_n \vec{N} = -\frac{10}{369}(2, 2, -1)$$

que es el resultado deseado.

Para dar una interpretación geométrica de la segunda forma fundamental II_p en términos de la curvatura normal, consideremos un curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, donde s es la longitud de arco de C , y con $\alpha(0) = p$. Si denotamos por $N(s)$ la restricción del vector normal N a la curva $\alpha(s)$, tenemos $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. De donde,

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = - \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle$$

Por lo tanto,

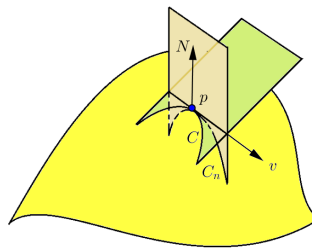
$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= \langle s_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= - \langle d_p N(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= - \langle N'(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(\alpha'(0)), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle(p) = k_n(p) \end{aligned}$$

en otros términos, el valor de la segunda forma fundamental II_p para un vector unitario $v \in T_p(S)$ es igual a la curvatura normal de una curva regular que pasa por p y es tangente a v . En particular, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 11 *Todas las curvas contenidas en S que tienen en un punto dado $p \in S$ la misma recta tangente, tienen en ese punto la misma curvatura normal.*

La proposición anterior, nos permite hablar de curvatura normal a lo largo de una dirección en p . Es conveniente el uso de la terminología siguiente:

Definición 14 *Dado un vector unitario $v \in T_p(S)$, la intersección de S con el plano que contienen a v y a N_p se denomina la sección normal de S en p a lo largo de v .*

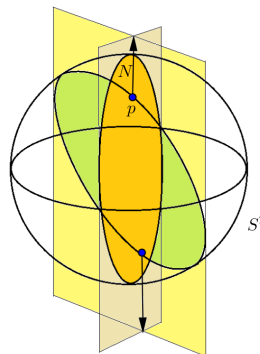


En un entorno de p una sección normal de S en p es una curva regular plana sobre S , cuyo vector normal n en p es $\pm N(p)$ o cero; su curvatura es, por esta razón, igual al valor absoluto de la curvatura normal a lo largo de v en p .

Según la definición, la proposición de arriba dice que el valor absoluto de la curvatura normal en p de una curva $\alpha(s)$ es igual a la curvatura de la sección normal de S en p a lo largo de $\alpha'(0)$.

Ejemplo 16 *En la esfera unitaria, identificar las secciones normales.*

De la esfera unitaria con orientación N , las secciones normales en un punto $p \in S^2$ son círculos de radio 1.



2.4.2. Curvaturas principales

Dado el teorema que literalmente dice: Dado $A : V \rightarrow V$ una aplicación lineal autoadjunta, entonces existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que $A(e_1) = \lambda_1 e_1$, $A(e_2) = \lambda_2 e_2$, es decir, e_1 y e_2 son autovectores y λ_1, λ_2 son autovalores de A ; tenemos que para cada $p \in S$ existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(S)$ tal que el $d_p N(e_1) = -k_1 e_1$, $d_p N(e_2) = -k_2 e_2$. Además k_1 y k_2 ($k_1 \geq k_2$) son el máximo y el mínimo de la segunda forma fundamental II_p restringida al círculo unidad de $T_p(S)$; es decir, son los valores extremos de la curvatura normal en p .

Definición 15 *La curvatura normal máxima k_1 y la curvatura normal mínima k_2 se denominan las curvaturas principales en p ; las direcciones correspondientes, es decir, las direcciones dadas por los autovectores e_1, e_2 , se denominan las direcciones principales en p .*

Nota. Las direcciones principales de S en $p \in S$ son aquellas en la que ocurren los valores extremos.

El conocimiento de las curvaturas principales en p , nos permite calcular fácilmente la curvatura normal a lo largo de una dirección dada de $T_p(S)$. De hecho, sea $v \in T_p(S)$ con $|v| = 1$. Como e_1 y e_2 forman una base ortonormal de $T_p(S)$ tenemos

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta,$$

donde θ es el ángulo de e_1 a v en la orientación de $T_p(S)$. La curvatura normal k_n a lo largo de v viene dada por

$$\begin{aligned} k_n &= II_p(v) = \langle s_p(v), v \rangle = - \langle d_p N(v), v \rangle \\ &= - \langle d_p N(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= \langle e_1 k_1 \cos \theta + e_2 k_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Esta última expresión es la de la segunda forma fundamental en la base $\{e_1, e_2\}$, conocida como la fórmula de Euler.

2.4.3. Curvatura gaussiana y curvatura media

Vamos expresar la curvatura de Gauss y la curvatura media en función de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de una superficie S .

Definición 16 Sea $p \in S$ y sea $s_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ el operador de Weingarten. El determinante de s_p es la curvatura gaussiana K_G de S en p . La mitad de la traza de s_p se denomina la curvatura media H de S en p .

Observación. Matemáticamente tenemos:

1. La curvatura de Gauss de S en p es

$$K_G = \det(s_p)$$

2. La curvatura media de S en p es

$$H_p = \frac{1}{2} \text{traza}(s_p)$$

Así la curvatura de Gauss y curvatura media se relacionan con las curvaturas principales por

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Pero a partir de las ecuaciones de Weingarten, se obtiene que:

$$\begin{aligned} K &= \det(a_{ij}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \frac{fF - gE}{EG - F^2} - \frac{gF - fG}{EG - F^2} \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ &= \frac{f^2F^2 - fFgE - eGfF + eGgE}{(EG - F^2)^2} - \frac{gF^2e - gFfE - fGeF + f^2GE}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{f^2F^2 + eGgE - geF^2 - f^2GE}{(EG - F^2)^2} = \frac{-F^2(ge - f^2) + GE(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{(GE - F^2)(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det(II)}{\det(I)} \end{aligned}$$

La fórmula

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right]$$

nos da la curvatura gaussiana cuando $F = 0$, es decir, cuando las curvas de parámetros de una parametrización son ortogonales.

Las curvaturas principales son por definición las raíces del polinomio característico del operador de Weingarten.

En efecto, sea

$$[s_p] = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

la matriz del operador de Weingarten en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Luego el polinomio característico tiene entonces la forma

$$\begin{aligned} \chi_{s_p}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} s_{11} - \lambda & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - (s_{11} + s_{22})\lambda + s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \\ &= \lambda^2 - \text{traza}(s_p)\lambda + \det(s_p) \end{aligned}$$

Por otro lado, el polinomio característico se representa, usando sus raíces, como:

$$\begin{aligned} \chi_{s_p}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\ &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + (\lambda_1\lambda_2) \end{aligned}$$

Al comparar estas dos últimas expresiones de $\chi_{s_p}(\lambda)$ con el mismo polinomio verificamos que

$$K_G = \det(s_p), \quad H_p = \frac{1}{2}\text{traza}(s_p)$$

Ahora la curvatura media también la podemos expresar por:

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

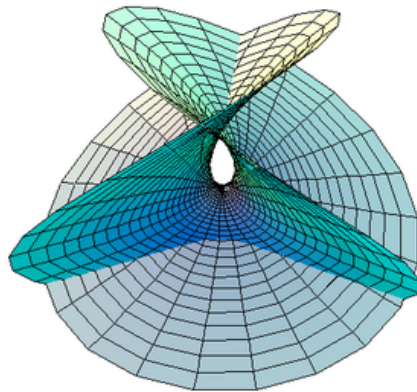
En efecto

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ &= -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{fF - eG + fF - gE}{EG - F^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 17 Al tomar la superficie de Enneper, parametrizada por

$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

encontremos las curvaturas principales



Lo primero es calcular:

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u) \\ \varphi_v &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \\ \varphi_{uu} &= (-2u, 2v, 2) \\ \varphi_{uv} &= (2v, 2u, 0) \\ \varphi_{vv} &= (2u, -2v, -2)\end{aligned}$$

y el vector normal es

$$\vec{N} = \frac{(1)}{(1 + u^2 + v^2)}(-2u, 2v, 1 - u^2 - v^2)$$

Así los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \quad F = 0$$

Y los de la segunda forma fundamental vienen dados por

$$e = 2, \quad f = 0, \quad g = -2$$

Encontremos las ecuaciones de Weingarten

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} = -\frac{2(1 + u^2 + v^2)^2}{(1 + u^2 + v^2)^4} = -\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} = 0 \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} = 0 \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} = \frac{2(1 + u^2 + v^2)^2}{(1 + u^2 + v^2)^4} = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}\end{aligned}$$

Por lo que la matriz de la aplicación de Weingarten es:

$$s_p = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene que las curvaturas principales son

$$k_1 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

$$k_2 = -\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

y la curvatura gaussiana y media son:

$$K_G = k_1 k_2 = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4}$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} - \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \right)$$

$$= 0$$

Ejemplo 18 *¿Existe una superficie orientada S y un punto $p \in S$ tales que la matriz del operador de Weingarten de S en p respecto a cierta base sea:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}?$$

El polinomio característico de la matriz del enunciado es:

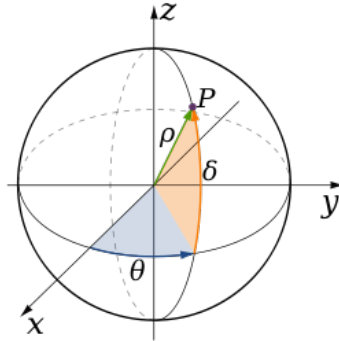
$$k^2 + k(1 + 2) + 2 - (-1) = 0$$

$$k^2 + 3k + 3 = 0$$

y cuyo determinante es $\delta = -3$, el cual es negativo, por lo que ninguna de las raíces del polinomio es real.

Por ello, la matriz dada no es matriz del operador de Weingarten de una superficie en ninguno de sus puntos.

Ejemplo 19 Calcular la curvatura gaussiana y curvatura media de la esfera de radio a .



Con ayuda de una de los ejemplo anteriores tenemos los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental

$$E = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle = a^2 \sin^2 \phi \quad F = \langle \varphi_\theta, \varphi_\phi \rangle = 0 \quad G = \langle \varphi_\phi, \varphi_\phi \rangle = a^2$$

$$e = \langle \varphi_{\theta\theta}, \vec{N} \rangle = a \sin^2 \phi \quad f = \langle \varphi_{\theta\phi}, \vec{N} \rangle = 0 \quad g = \langle \varphi_{\phi\phi}, \vec{N} \rangle = a$$

Por lo que la curvatura gaussiana viene dada por

$$K_G = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$= \frac{a \sin^2 \phi * a}{a^2 \sin^2 \phi * a^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}$$

Y la curvatura media es

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

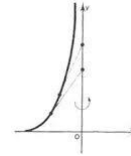
$$= \frac{1}{2} \frac{a \sin^2 \phi * a^2 + a * a^2 \sin^2 \phi}{a^2 \sin^2 \phi * a^2}$$

$$= \frac{1}{a}$$

Ejemplo 20 Calculemos la curvatura gaussiana de la seudoesfera de radio a .

Se llama seudoesfera de radio a a la superficie de revolución que genera la curva C llamada tractriz que viene dada por la solución de la siguiente ecuación diferencial.

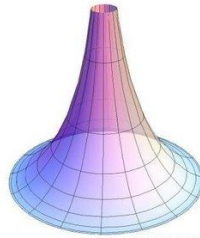
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$



Y la seudoesfera está representada por la función

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, f(r)), \quad 0 < r < a, \quad -\infty < \theta < \infty$$

siendo $f'(r) = -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}$.



Calculemos

$$\varphi_r = \left(\cos \theta, \sin \theta, -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \right)$$

$$\varphi_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

$$\varphi_{rr} = \left(0, 0, \frac{a^2}{r^2 \sqrt{a^2 - r^2}} \right)$$

$$\varphi_{\theta r} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$\varphi_{\theta\theta} = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, 0)$$

Y el vector normal viene dado por

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{\varphi_r \times \varphi_\theta}{|\varphi_r \times \varphi_\theta|} \\ &= \frac{1}{a} (\cos \theta \sqrt{a^2 - r^2}, \sin \theta \sqrt{a^2 - r^2}, r) \end{aligned}$$

Por lo que los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental son:

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \varphi_r, \varphi_r \rangle = \frac{a^2}{r^2}, & F &= \langle \varphi_r, \varphi_\theta \rangle = 0, & G &= \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle = r^2 \\
 e &= \langle \varphi_{rr}, \vec{N} \rangle = \frac{a}{r\sqrt{a^2 - r^2}}, & f &= \langle \varphi_{\theta r}, \vec{N} \rangle = 0, & g &= \langle \varphi_{\theta\theta}, \vec{N} \rangle = -\frac{r\sqrt{a^2 - r^2}}{a}
 \end{aligned}$$

Por lo que la curvatura gaussiana de la pseudoesfera de radio a es:

$$\begin{aligned}
 K_G &= \frac{\det(II)}{\det(I)} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
 &= \frac{\frac{a}{r\sqrt{a^2 - r^2}} \left(\frac{-r\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \right)}{\frac{a^2}{r^2}(r^2)} \\
 &= -\frac{1}{a^2}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 21 Calcular la curvatura gaussiana de los puntos del toro recubierto por la parametrización:

$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

Primero calculemos

$$\begin{aligned}
 \varphi_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u) \\
 \varphi_v &= (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0) \\
 \varphi_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u) \\
 \varphi_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0) \\
 \varphi_{vv} &= (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0)
 \end{aligned}$$

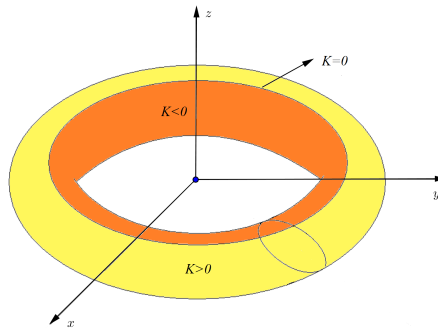
Por lo que los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental vienen dados por:

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = r^2 & F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 & G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (a + r \cos u)^2 \\
 e &= \langle \varphi_{uu}, \vec{N} \rangle = r & f &= \langle \varphi_{uv}, \vec{N} \rangle = 0 & g &= \langle \varphi_{vv}, \vec{N} \rangle = \cos u(a + r \cos u)
 \end{aligned}$$

Dado que

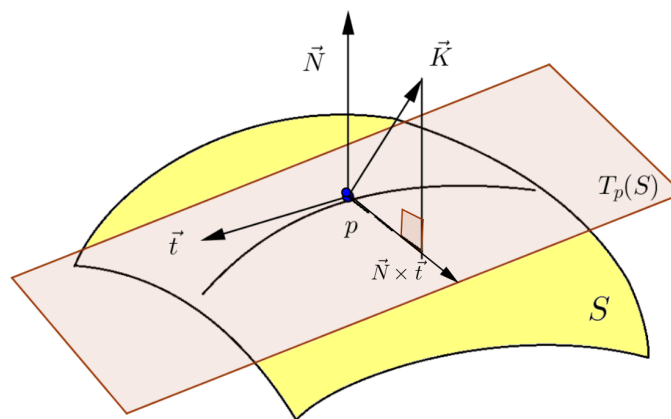
$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}$$

de esta expresión se deduce que $K = 0$ a lo largo de los paralelos $u = \pi/2$ y $u = 3\pi/2$. En la región del toro definida por $\pi/2 < u < 3\pi/2$, K es negativa. Y en la región dada por $0 < u < \pi/2$ ó $3\pi/2 < u < 2\pi$, la curvatura es positiva.



2.4.4. Curvatura geodésica

Definición 17 La curvatura geodésica k_g de una curva C en p es la proyección vectorial del vector curvatura \vec{K} de C en p , sobre el plano tangente en ese punto.



$$k_g = \langle \vec{K}, \vec{N} \times \vec{t} \rangle$$

Observación.

1. Sea α una parametrización por longitud de arco de C , luego $\|\alpha'\| = 1$ y $\vec{K} = \alpha''$, así con el vector normal unitario N de α , se tiene $\{\alpha', N, N \times \alpha'\}$ es un triedro móvil, y

$$k_g = \langle \alpha'', \vec{N} \times \alpha' \rangle$$

2. Al contrario de k_n , que depende tanto de los primeros y segundos coeficientes fundamentales, la curvatura geodésica k_g , solo depende de los primeros coeficientes fundamentales y de sus derivadas. Y viene dada por

$$k_g = \left[\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \frac{dv}{ds} + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \frac{du}{ds} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 - \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^3 + \frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right] \sqrt{EG - F^2}$$

Observese que a todo lo largo de las curvas $v = \text{constante}$, de parámetro u , $dv/ds = 0$ y $du/ds = 1/\sqrt{E}$; y a todo lo largo de las curvas $u = \text{constante}$, de parámetro v , $du/ds = 0$ y $dv/ds = 1/\sqrt{G}$. Para el caso de la curvatura geodésica de las curvas de parámetros, tenemos

$$(k_g)_{v=cte} = \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^3 \sqrt{EG - F^2} = \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E\sqrt{E}}$$

$$(k_g)_{u=cte} = -\Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^3 \sqrt{EG - F^2} = -\Gamma_{22}^1 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}}$$

Observación. Si las curvas de parámetros son ortogonales entonces $F = 0$ y $\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}$ y $\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E}$, así que

1. $(k_g)_{v=cte} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}$,

2. $(k_g)_{u=cte} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}$

2.5. Clasificación de los puntos de una superficie

Ahora veremos la naturaleza de la superficie en un entorno de un punto p de la superficie, para obtener una aproximación local, para ello, usaremos la siguiente terminología.

Definición 18 *Un punto p de una superficie S se denomina*

1. *Elíptico si $\det(s_p) > 0$.*
2. *Hiperbólico si $\det(s_p) < 0$.*
3. *Parabólico si $\det(s_p) = 0$, con $s_p \neq 0$.*
4. *Plano si $s_p = 0$.*

Observación

1. Ya que $K_G = \det(s_p) = \det(-d_p N) = \det(d_p N) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, se tiene:
 - i. p es elíptico si $K_G(p) > 0$.
 - ii. p es hiperbólico si $K_G(p) < 0$.
 - iii. p es parabólico si $K_G(p) = 0$.
2. Dada la función

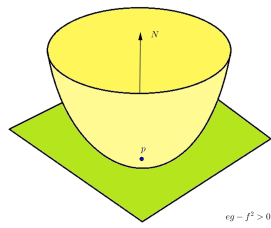
$$\delta = \frac{1}{2}II = \frac{1}{2}(edu^2 + 2fdudv + gdv^2)$$

Se denomina paraboloides osculador en p .

La naturaleza de tal paraboloides determina cualitativamente la naturaleza de la superficie en el entorno de p . Distinguiremos cuatro casos que dependen del discriminante $eg - f^2$ que es el determinante de la segunda forma fundamental.

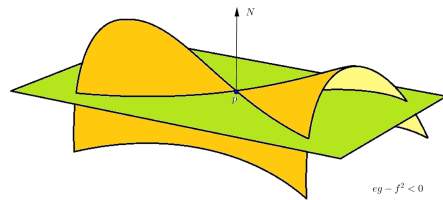
1. Caso elíptico:

Se dice que un punto es elíptico si $eg - f^2 > 0$. En este caso, δ será un paraboloides elíptico, por ser función de du y dv . Obsérvese que δ conserva el mismo signo para cualquier (du, dv) . En las vecindades de un punto elíptico la superficie está en un solo lado del plano tangente en el punto y tiene la forma que se muestra.

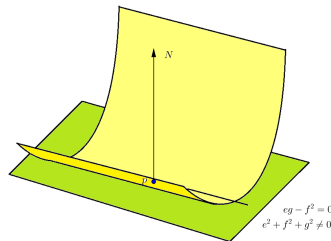


2. Caso hiperbólico:

Se dice que un punto es hiperbólico si $eg - f^2 < 0$. En este caso δ será un paraboloides hiperbólico, como se ve en la figura, por ser función de (du, dv) . En este caso, existen en el plano tangente en p , dos rectas distintas que dividen al plano tangente en cuatro regiones en las cuales δ es alternativamente positivo y negativo. Sobre las dos rectas es $\delta = 0$. En las proximidades de un punto hiperbólico, la superficie se halla a ambos lados del plano tangente, como en la figura.



3. Caso parabólico: Se dice que un punto es parabólico si $eg - f^2 = 0$ y $e^2 + f^2 + g^2 \neq 0$, es decir, si $eg - f^2 = 0$ y los coeficientes e , f y g no son todos iguales a cero. En este caso, δ será un cilindro parabólico, como se observa, por ser función de (du, dv) . En este caso, sólo hay, en el plano tangente en p , una recta a lo largo de la cual es $\delta = 0$, en cualquier otro caso, δ conserva el mismo signo.



4. Caso plano:

Se dice que un punto es plano si $e = f = g = 0$. En este caso es $\delta = 0$, para cualquier (du, dv) . Y el orden del contacto de la superficie con el plano tangente es mayor que en los casos precedentes.

De acuerdo con el anterior análisis geométrico, es de esperar que las propiedades de un punto de una superficie, bien sea elíptico, hiperbólico, parabólico o plano, no dependan de la elección de la parametrización de la superficie y de su orientación.

Ejemplo 22 *Demostrar que la siguiente superficie*

$$\varphi = (u, v, u^2 + v^3)$$

es elíptica si $v > 0$, hiperbólica si $v < 0$ y parabólica si $v = 0$.

Primero calcúlelos las parciales de φ con respecto a las variables u y v , así

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (1, 0, 2u) \\ \varphi_v &= (0, 1, 3v^2)\end{aligned}$$

Obtengamos:

$$\vec{N} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} = (4u^2 + 9v^4 + 1)^{-\frac{1}{2}}(-2u, -3v^2, 1)$$

Y las derivadas parciales de segundo orden son:

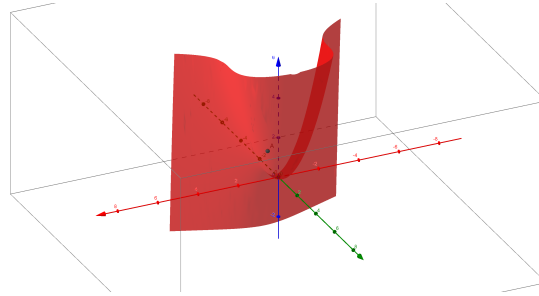
$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= (0, 0, 2) \\ \varphi_{uv} &= (0, 0, 0) \\ \varphi_{vv} &= (0, 0, 6v)\end{aligned}$$

Por lo que los coeficientes de la segunda forma fundamental son:

$$\begin{aligned}e &= \langle \vec{N}, \varphi_{uu} \rangle = 2(4u^2 + 9v^4 + 1)^{-\frac{1}{2}} \\ f &= \langle \vec{N}, \varphi_{uv} \rangle = 0 \\ g &= \langle \vec{N}, \varphi_{vv} \rangle = 6v(4u^2 + 9v^4 + 1)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

así

$$eg - f^2 = \frac{12v}{(4u^2 + v^4 + 1)}$$



Donde $(4u^2 + v^4 + 1) > 0$ para todo (u, v) , y tenemos que $eg - f^2 > 0$ si $v > 0$, $eg - f^2 < 0$ si $v < 0$ y $eg - f^2 = 0$ si $v = 0$. De esta manera, la superficie es elíptica para valores de $v > 0$, hiperbólica para $v < 0$ y parabólica si $v = 0$, porque $e \neq 0$ para cualquier (u, v) .

Ejemplo 23 Tomando el toro

$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

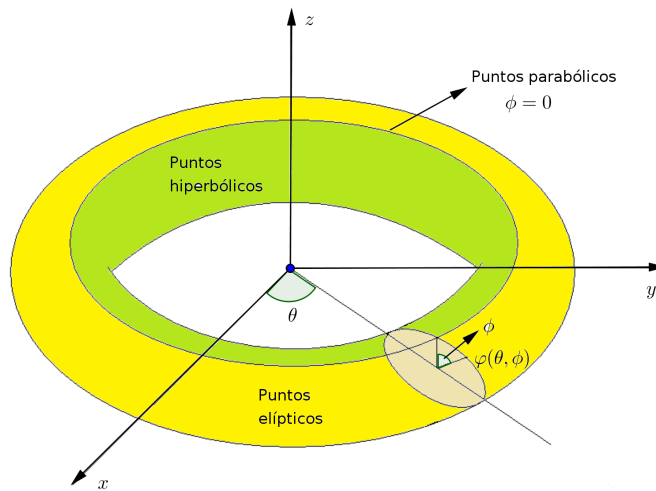
de un ejemplo anterior se tiene que los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental vienen dados por:

$$E = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle = r^2 \quad F = \langle \varphi_\theta, \varphi_\phi \rangle = 0 \quad G = \langle \varphi_\phi, \varphi_\phi \rangle = (a + r \cos u)^2$$

$$e = \langle \varphi_{\theta\theta}, \vec{N} \rangle = r \quad f = \langle \varphi_{\theta\phi}, \vec{N} \rangle = 0 \quad g = \langle \varphi_{\phi\phi}, \vec{N} \rangle = \cos u(a + r \cos u)$$

y obtenemos

$$eg - f^2 = r(a + r \cos u) \cos u$$



Obsérvese que los segundos coeficientes fundamentales sólo dependen de u . Así que $eg - f^2 = 0$ a lo largo de los paralelos $u = \pi/2$ y $3\pi/2$, por esta razón, los puntos de estos paralelos son puntos parabólicos. De igual manera, $eg - f^2 > 0$, para la región dada por $0 < u < \pi/2$ ó $3\pi/2 < u < 2\pi$, recordemos que $r > 0$ y $a > r$, por ello los puntos en estas regiones son puntos elípticos. Para la región del toro definida por $\pi/2 < u < 3\pi/2$, se tiene que $eg - f^2 < 0$, por tanto los puntos de esta región son puntos hiperbólicos.

2.6. Curvas especiales sobre superficies

2.6.1. Líneas de curvatura

Llamamos líneas de curvatura a toda curva C contenida en la superficie S si la dirección del vector tangente en cada uno de sus puntos coincide con la dirección principal en ese punto.

Definición 19 Si una curva regular conexa C en S es tal que para todo $p \in C$ la recta tangente de C es una dirección principal en p , entonces se dice que C es una línea de curvatura de S .

Proposición 12 Una condición necesaria y suficiente para que una curva regular conexa C en S sea una línea de curvatura de S es que

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

para cualquier parametrización $\alpha(t)$ de C , donde $N(t) = N \circ \alpha(t)$ y $\lambda(t)$ es una función diferenciable de t . En este caso, $-\lambda(t)$ es la curvatura (principal) a lo largo de $\alpha'(t)$

Demostración. Basta con observar que si $\alpha'(t)$ está contenida en una dirección principal, entonces $\alpha'(t)$ es un autovector de dN y

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

El recíproco se obtiene a partir de la igualdad: $N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$, de la cual se depende que

$$(N'(t) - \lambda(t)\alpha'(t)) \cdot \varphi_u = 0$$

y

$$(N'(t) - \lambda(t)\alpha'(t)) \cdot \varphi_v = 0$$

o sea que

$$[(N_u du + N_v dv) - \lambda(\varphi_u du + \varphi_v dv)] \cdot \varphi_u = 0$$

$$[(N_u du + N_v dv) - \lambda(\varphi_u du + \varphi_v dv)] \cdot \varphi_v = 0$$

es decir,

$$(-N_u \cdot \varphi_u + \lambda \varphi_u \cdot \varphi_u) du + (-N_v \cdot \varphi_u + \lambda \varphi_v \cdot \varphi_u) dv = 0$$

$$(-N_u \cdot \varphi_v + \lambda \varphi_u \cdot \varphi_v) du + (-N_v \cdot \varphi_v + \lambda \varphi_v \cdot \varphi_v) dv$$

o también

$$(e + \lambda E) du + (f + \lambda F) dv = 0$$

$$(f + \lambda F) du + (g + \lambda G) dv = 0$$

Por lo anterior, se desprende que $-\lambda$ es una curvatura principal y por ello se verifica que C es línea de curvatura. \square

Ahora, consideremos las direcciones principales. Una curva regular conexa C parametrizada por φ es una línea de curvatura si y solamente si para cualquier parametrización de C , $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $t \in I$, tenemos

$$dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

se deduce entonces que las funciones $u'(t)$ y $v'(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' = \lambda u'$$

$$\frac{eF - fE}{EG - F^2}u' + \frac{fF - gE}{EG - F^2}v' = \lambda v'$$

eliminando λ en el sistema anterior obtenemos la ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0 \quad (2.5)$$

que puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Por lo que una curva es una línea de curvatura si y sólo si satisface la ecuación anterior.

Ejemplo 24 Consideremos la siguiente superficie

$$\varphi = (u, v, u^2 + v^2)$$

Encontrar las líneas de curvatura.

Al calcular los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental, tenemos:

$$\begin{aligned} E &= 1 + 4u^2 \\ F &= 4uv \\ G &= 1 + 4v^2 \\ e &= 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \\ f &= 0 \\ g &= 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

sustituyendo estos valores en la ecuación 2.5

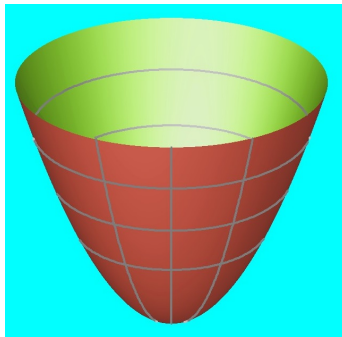
$$\begin{aligned} & -8uv(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} du^2 + \\ & \left(2(1 + 4u^2)(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} - 2(1 + 4v^2)(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right) du dv + \\ & 8uv(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dv^2 = 0 \end{aligned}$$

al dividir la anterior ecuación por $-8(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$, tendremos:

$$(u du + v dv)(v du - u dv) = 0$$

$$u du + v dv = 0, \quad v du - u dv = 0$$

La solución de la primera ecuación es la familia de circunferencias $u^2 + v^2 = r^2$ y la solución de la segunda es la familia de rectas, $u = bv$, que pasan por el origen.



2.6.2. Líneas asintóticas

Definición 20 Sea p un punto de S . Una dirección asintótica de S en p es una dirección de $T_p(S)$ para la cual la curvatura normal es cero. Por ello una curva asintótica de S es una curva regular conexa $C \subset S$ tal que para cada $p \in C$ la recta tangente de C en p es una dirección asintótica.

Una curva regular conexa C de la parametrización φ de la superficie, es una curva asintótica si y sólo si para cualquier parametrización de la curva C por $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $t \in I$, de C tenemos $II(\alpha'(t)) = 0$, $t \in I$, ya que $k_n = \frac{II}{I} = 0$, es decir, si y sólo si

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \quad t \in I$$

Ejemplo 25 Se considera la superficie

$$\varphi = (u, v, u^2 - v^2)$$

Calcular las líneas asintóticas.

Tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (1, 0, 2u) \\ \varphi_v &= (0, 1, -2v) \\ \varphi_{uu} &= (0, 0, 2) \\ \varphi_{uv} &= (0, 0, 0) \\ \varphi_{vv} &= (0, 0, -2) \\ \vec{N} &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}(-2u, 2v, 1) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} E &= \varphi_u \cdot \varphi_u = 1 + 4u^2 \\ F &= \varphi_u \cdot \varphi_v = -4uv \\ G &= \varphi_v \cdot \varphi_v = 1 + 4v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= \varphi_{uu} \cdot \vec{N} = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \\ f &= \varphi_{uv} \cdot \vec{N} = 0 \\ g &= \varphi_{vv} \cdot \vec{N} = \frac{-2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \end{aligned}$$

La ecuación diferencial de las líneas asintóticas es:

$$\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}(u')^2 + 2(0)u'v' + \frac{-2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}(v')^2 = 0$$

entonces

$$2(u')^2 - 2(v')^2 = 0$$

que es

$$(u')^2 - (v')^2 = (u' + v')(u' - v') = 0$$

así que

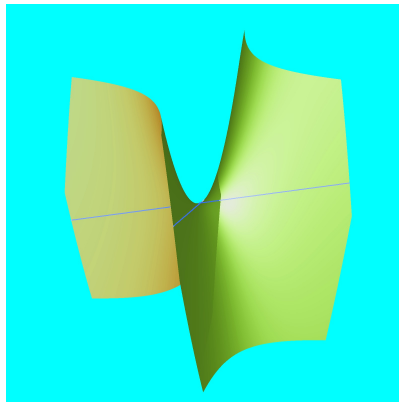
$$u' + v' = 0 \quad \text{o} \quad u' - v' = 0$$

integrando obtenemos:

$$u(t) = \pm v(t)$$

Por tanto, las líneas asintóticas son:

$$\begin{aligned} \varphi(u, u) &= (u, u, 0) \\ \varphi(u, -u) &= (u, -u, 0) \end{aligned}$$



En un punto hiperbólico, la siguiente proposición nos dice, en particular, que las direcciones asintóticas determinan las direcciones principales.

Proposición 13 Sean w_1 y w_2 vectores unitarios de las direcciones asintóticas en el punto hiperbólico p de la superficie orientada S . entonces, las bisectrices interior y exterior del ángulo que forman w_1 y w_2 son las direcciones principales de S en p .

Demostración. Como las curvaturas principales k_1 y k_2 del punto p tienen signos opuestos son, en particular, distintas. Por tanto p no es umbílico y existen exactamente dos direcciones principales en p , que además son ortogonales. Como también lo son las dos bisectrices de un ángulo, es suficiente probar que la bisectriz interior del que forman w_1 y w_2 es dirección principal.

Como w_1 y w_2 tienen el mismo módulo, un vector director de la bisectriz es $e = w_1 + w_2$.

Para probar que es dirección principal hemos de demostrar que es vector propio del operador de Weingarten s_p , esto es, que los vectores $s_p(e)$ y e son proporcionales. Para ello es suficiente comprobar que $s_p(e)$ es ortogonal a la otra bisectriz, que tiene por vector director a $w_1 - w_2$. Pero, como w_1 y w_2 son direcciones asintóticas, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle s_p(e), w_1 \rangle &= \langle s_p(w_1), w_1 \rangle + \langle s_p(w_2), w_1 \rangle = \langle s_p(w_2), w_1 \rangle \\ \langle s_p(e), w_2 \rangle &= \langle s_p(w_1), w_2 \rangle + \langle s_p(w_2), w_2 \rangle = \langle s_p(w_1), w_2 \rangle \end{aligned}$$

luego restando, y puesto que s_p , es autoadjunto,

$$\langle s_p(e), w_1 - w_2 \rangle = \langle s_p(w_2), w_1 \rangle - \langle s_p(w_1), w_2 \rangle$$

□

Dado que no necesariamente todos los puntos de una superficie son hiperbólicos, tenemos el siguiente resultado de direcciones asintóticas

Proposición 14 *Sea p un punto de la superficie orientada S .*

1. *Si p es elíptico, ninguna dirección de T_pS es asintótica.*
2. *Si p es hiperbólico, existen exactamente dos direcciones asintóticas en T_pS .*
3. *Si p es parabólico, existe una única dirección asintótica en T_pS .*
4. *Si p es plano, todas las direcciones de T_pS son asintóticas.*

Demostración. Ver [[6],pág 332]

□

2.6.3. Geodésicas

En esta sección vamos a estudiar aquellas curvas, llamadas geodésicas, que desempeñan en la superficie el papel que juegan las rectas en la geometría euclidea de R^2 .

Definición 21 *Sea C un arco de curva de la superficie S . Decimos que C es geodésica de S si admite una parametrización $\alpha(t)$ tal que, $\alpha'(t) \neq 0$ y $\alpha''(t)$ es ortogonal al plano tangente $T_p(S)$ a S en el punto p .*

Observación.

1. Decimos que una curva regular C es geodésica de S si lo son todos sus arcos de curva.
2. Las curvas C a lo largo de las cuales $k_g = 0$ son geodésicas.
3. Dada una parametrización α que cumple la definición anterior, para cada $t \in I$, el vector tangente $\alpha'(t) \in T_pS$, por lo que $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$. Así que, $|\alpha'(t)|$ es constante.

Para decidir si C (arco de geodésica) es geodésica de S empleando cualquier parametrización, o incluso sin más que visualizar un dibujo suyo y de S , se expresa la siguiente proposición.

Proposición 15 *Un arco de curva $C \subset S$, es geodésica de la superficie S si y solo si en cada punto de C el plano osculador a C es ortogonal al plano tangente a S .*

Demostración Supongamos que C es geodésica de S y sea α una parametrización geodésica suya. Así, para cada $t \in I$ tal que $\alpha(t)$ no es punto de inflexión de C se tiene

$$T_p(S) = L[\alpha'(t), w(t) = \alpha'(t) \times \alpha''(t)]$$

mientras que el subespacio de dirección del plano osculador π_t a C en el punto $\alpha(t)$ está formado por los vectores ortogonales a $w(t)$, de lo que se deduce que π_t y $T_p(S)$ son ortogonales.

Recíprocamente, supongamos que el arco C cumple que en cada uno de sus puntos que no son de inflexión el plano osculador a C es ortogonal al plano tangente a S . Elegimos una parametrización α de velocidad unitaria de C .

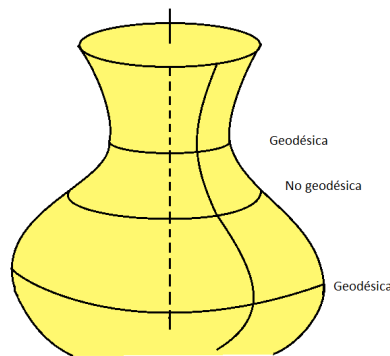
Entonces, si $t \in I$ y $\alpha(t)$ no es un punto de inflexión de C , el vector $w(t)$, por ser ortogonal a todos los vectores del plano osculador a C en $\alpha(t)$, pertenece a $T_p(S)$. Así, $T_p(S) = L[\alpha'(t), w(t)]$ y $\alpha''(t)$, que desde luego es ortogonal a $w(t)$, lo es también a $\alpha'(t)$, pues α es de velocidad unitaria. Por lo tanto, $\alpha''(t)$ es ortogonal al plano tangente $T_p(S)$ a S en el punto $\alpha(t)$.

Por otro lado, si $\alpha(t)$ es un punto de inflexión de C , los vectores $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$ son linealmente dependientes, pero también ortogonales entre sí, luego $\alpha''(t)$ es el vector nulo, y en particular es ortogonal al plano tangente $T_p(S)$ a S en p .

Así la parametrización α es geodésica y por ello también al arco C lo es. □

Observación. Dada una parametrización α de una curva C , esta será geodésica si:

1. $\alpha''(t)=0$ ó
2. $\alpha''(t)$ es perpendicular a la superficie en el punto $\alpha(t)$, es decir, paralelo al vector unitario N , para todo t .
3. Una curva C es geodésica de una superficie S que la contiene si y solo si el plano tangente a S en cada punto de C es ortogonal al plano que contiene C .



Ejemplo 26 *Los segmentos de recta de una superficie son geodésicas.*

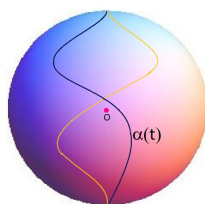
En efecto, si C es un segmento de la recta que pasa por el punto p y tiene al vector w por vector director, C admite la parametrización α , donde $\alpha(t) = p + tw$. En particular, si $\alpha''(t) = 0$, se tiene que es ortogonal al plano tangente en $\alpha(t)$ para cualquier superficie que contenga a C .

Ejemplo 27 *Las geodésicas de un plano son los segmentos de recta.*

Ya sabemos que los segmentos de rectas son geodésicas de cualquier superficie que los contenga, y en particular de un plano. Para probar el recíproco basta aplicar la definición, pues si $T_p(S)$ es el plano que pasa por el punto p y cuya recta normal tiene al vector v por vector director, y α es una parametrización geodésica, el vector $\alpha''(t)$ es proporcional a v para cada $t \in I$, pues $\langle \alpha(t) - p, v \rangle = 0$, al derivar dos veces se tiene $\langle \alpha''(t), v \rangle = 0$.

Por tanto, $\alpha''(t) = 0$ y así $\alpha'(t) = w \in \mathbb{R}^3$ es constante, o sea, existe $q \in \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) = q + tw$, por lo que $\alpha(I)$ es un segmento de recta.

Ejemplo 28 Sea α una curva parametrizada por la longitud de arco, sobre la esfera S^2 . Calcular la curvatura geodésica.



Los vectores normales unitarios en la esfera S^2 , vienen dados por:

$$\vec{N} = \frac{\alpha(t) - \vec{0}}{r} = \alpha(t)$$

Entonces,

$$\|\alpha(t)\|^2 = \|\vec{N}\|^2 = 1$$

$$\iff \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = 1$$

$$\iff \frac{d}{dt} \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = 2 \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$$

$$\implies \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$$

$$\iff \frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = \langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$$

$$\implies \langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle = - \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = -\|\alpha'(t)\|^2 = -1$$

Sabemos que:

$$\alpha''(t) = k_n(\vec{N}) + k_g(\vec{N} \times \alpha'(t))$$

Veamos:

$$k_n = \langle \alpha''(t), \vec{N} \rangle = \langle \alpha''(t), \alpha \rangle = -1$$

por una de las ecuaciones anteriores

$$k_g = \langle \alpha''(t), \vec{N} \times \alpha'(t) \rangle = \langle \alpha''(t), \alpha \times \alpha' \rangle$$

Así las curvas geodésicas son las que cumplen:

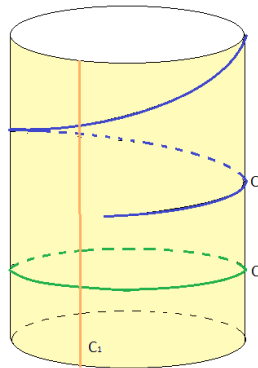
$$k_g = \langle \alpha''(t), \alpha \times \alpha' \rangle = 0$$

es decir, $\alpha'' \perp \alpha \times \alpha'$. Así que los círculos máximos de la esfera son geodésicas. Los círculos máximos C se obtienen al intersectar la esfera con el plano que pase por el centro O de la esfera.

Ejemplo 29 Consideremos el cilindro

$$\varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Para cada punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ de S la recta $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_0; y = y_0\}$ y la circunferencia $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; z = z_0\}$ son geodésicas que pasan por p .



Ya que para el segmento de recta que pasa por el punto p admite una parametrización $\alpha(t) = (x_0, y_0, t)$ y dado que $\alpha''(t) = 0$.

Para la curva C_2 , es de notar que el plano tangente a la superficie S en cada punto de la curva es ortogonal al plano que contiene a la curva.

Sea C_3 , cuya parametrización es

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\cos(at + b), \sin(at + b), ct + d)\end{aligned}$$

Derivemos

$$\alpha''(t) = -a^2(\cos(at + b), \sin(at + b), 0)$$

mientras que el plano tangente $T_{\alpha(t)}S$ tiene por vector ortogonal al gradiente en $\alpha(t)$ de la función $x^2 + y^2$, o sea,

$$2(\cos(at + b), \sin(at + b), 0)$$

que es proporcional a $\alpha''(t)$. Así pues, la hélice C_3 es también geodésica de S .

Tenemos el siguiente resultado sobre existencia y unicidad de geodésicas.

Proposición 16 *Sea S una superficie, un punto $p \in S$ y un vector tangente no nulo $\xi \in T_p S$. Entonces:*

1. *Existe una parametrización geodésica α de una geodésica de S tal que $0 \in I$*

$$\alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = \xi$$

2. *Si α_1 y α_2 son dos parametrizaciones geodésica de S tales que*

$$0 \in I_1 \cap I_2, \quad \alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p \text{ y } \alpha_1'(0) = \alpha_2'(0) = \xi$$

se cumple que $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$, para cada $t \in I_1 \cap I_2$

Demostración. Ver [[6],pág 228]

□

Un resultado más general para decidir si una curva es geodésica es el siguiente.

Teorema 3 Una representación natural de una curva, $\varphi(t) = \varphi(u(t), v(t))$ de clase C^2 de una parametrización φ de clase C^2 , es geodésica si y solo si $u(t)$ y $v(t)$ satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \Gamma_{12}^1 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2v}{dt^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \Gamma_{12}^2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Demostración. Ver [[5],pág 267-268]

□

Ejemplo 30 Calcular las geodésicas de la superficie parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), \quad u > 0, \quad 0 < v < 2\pi$$

Utilizaremos las ecuaciones del teorema anterior, por ello necesitamos los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas para el calculo de los símbolos de Christoffel.

Calculemos:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (\cos v, \sin v, 1) \\ \varphi_v &= (-u \sin v, u \cos v, 0) \end{aligned}$$

Así, los primeros coeficiente de la primera fundamental son:

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 2 \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = u^2 \end{aligned}$$

Por lo que los símbolos de Christoffel, son:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 &= \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{u} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{u}{2}\end{aligned}$$

Y las ecuaciones diferenciales del teorema son:

$$\begin{aligned}u''(t) - \frac{u(t)}{2}(v'(t))^2 &= 0 \\ v''(t) + \frac{2}{u(t)}u'(t)v'(t) &= 0\end{aligned}$$

en la segunda ecuación si hacemos $f(t) = v'(t)$, esta se transforma en

$$f'(t) + \frac{2}{u(t)}u'(t)f(t) = 0$$

o sea,

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -2\frac{u'(t)}{u(t)}$$

integrando, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\log f(t) = \log \frac{c}{(u(t))^2}$$

por lo que

$$f(t) = \frac{c}{(u(t))^2}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la curva C parametrizada por $\alpha(t)$, es una parametrización de velocidad unitaria. Es decir

$$|\alpha'(t)| = 2(u'(t))^2 + (u(t))^2(v'(t))^2$$

Al sustituir $f(t) = v'(t)$, resulta

$$2(u'(t))^2 + (u(t))^2(f(t))^2 = 1$$

y sustituyendo el valor obtenido para $f(t)$, resulta

$$1 = 2(u'(t))^2 + \frac{c^2(u(t))^2}{(u(t))^4} = 2(u'(t))^2 + \frac{c^2}{(u(t))^2}$$

o sea

$$\sqrt{2}u'(t) = \frac{\sqrt{(u(t))^2 - c^2}}{u(t)}$$

Además

$$\frac{dv}{dt} = v'(t) = f(t) = \frac{c}{(u(t))^2}$$

dividiendo entre sí estas dos últimas ecuaciones, obtenemos

$$\sqrt{2}\frac{du}{dv} = \frac{u(t)}{c}\sqrt{(u'(t))^2 - c^2}$$

Introduciremos la función auxiliar $w = w(t)$, de modo que $u = c \sec w$, y así $(u(t))^2 - c^2 = c^2 \tan^2 w$, y en consecuencia

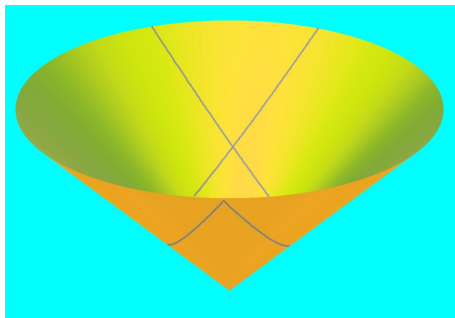
$$\sqrt{2}\frac{du}{dv} = c \sec w \tan w = \frac{d(c \sec w)}{dw} = \frac{du}{dw}$$

De aquí se sigue que $dv = \sqrt{2}dw$, luego existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $v = \sqrt{2}w - a$

Y obtenemos

$$\varphi(c \sec w, \sqrt{2}w - a) = c \sec w (\cos(\sqrt{2}w - a), \sin(\sqrt{2}w - a), 1)$$

que es una parametrización de una geodésica de la superficie S , dando valores a las constantes a y c .



Capítulo 3

Teorema Local de Gauss-Bonnet

El Teorema Local de Gauss-Bonnet es para muchos el teorema más hermoso y profundo de la geometría diferencial de superficies, el cual fue publicado por Bonnet¹ en 1848 referido a una región acotada por una curva simple no geodésica.

El nombre de Gauss ha quedado asociado al teorema porque fue él quien publicó en 1827 un caso especial para triángulos geodésicos (triángulos cuyos lados son arcos de geodésicas de una superficie).

Y donde el quinto postulado de los Elementos de Euclides dio lugar a uno de los problemas más famosos y estudiados en la historia de la Geometría: tratar de decidir si el quinto postulado es o no consecuencia de los otros cuatro.

Por tal razón, el caso especial publicado por Gauss para triángulos geodésicos, el cual muestra la relación existente entre la curvatura de Gauss de una superficie y los defectos de π de los triángulos geodésicos, es decir, la diferencia entre π y la suma de los ángulos de los triángulos geodésicos, describe geometrías que pueden ser no euclídeas pero que al estudiarse localmente, preservan una geometría que se aproxima a la euclídea.

¹Pierre Ossian Bonnet (22 Diciembre 1819, Montpellier–22 Junio 1892, Paris) fue un matemático francés. Él hizo algunas contribuciones importantes a la geometría diferencial de superficies, incluyendo el teorema de Gauss-Bonnet.

3.1. Fórmula de Liouville y Teorema de Green

Lema 2 (Fórmula de Liouville). Sea $\varphi = \varphi(u, v)$ una parametrización de una superficie regular, tal que las curvas de parámetros u y v sean ortogonales y sea, además, $\varphi = \varphi(s) = \varphi(u(s), v(s))$ una curva C representada en forma natural, en la parametrización de clase C^2 .

Supongamos por otra parte que $g_1 = \frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|}$ y $g_2 = \frac{\varphi_v}{\|\varphi_v\|}$ son los vectores unitarios en la dirección de las curvas de parámetros y que $\theta = \theta(s)$ es la función, a lo largo de C , descrita por $t = (\cos \theta)g_1 + (\sin \theta)g_2$, siendo t la tangente unitaria a lo largo de C . Entonces la curvatura geodésica de C viene dada por:

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + k_{g_v=cte} \cos \theta + k_{g_u=cte} \sin \theta$$

Sabiendo que $k_{g_v=cte}$ es la curvatura geodésica de la curva de parámetro u y $k_{g_u=cte}$ la curvatura geodésica de la curva de parámetro v .

Demostración. Calculando la derivada de g_1 a lo largo de C , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{ds} &= \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial g_1}{\partial v} \frac{dv}{ds} = \frac{dg_1}{ds_1} \frac{ds_1}{du} \frac{du}{ds} + \frac{dg_1}{ds_2} \frac{ds_2}{dv} \frac{dv}{ds} \\ &= \frac{dg_1}{ds_1} |\varphi_u| \frac{du}{ds} + \frac{dg_1}{ds_2} |\varphi_v| \frac{dv}{ds} = \frac{dg_1}{ds_1} \cos \theta + \frac{dg_1}{ds_2} \sin \theta \end{aligned}$$

siendo s_1 la longitud de arco a lo largo de las curvas de parámetros u y s_2 es la longitud de arco a lo largo de las curvas de parámetros v . Análogamente, $\frac{dg_2}{ds} = \frac{dg_2}{ds_1} \cos \theta + \frac{dg_2}{ds_2} \sin \theta$. Derivando t a lo largo C y utilizando lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} k = t' &= \frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds} (g_1 \cos \theta + g_2 \sin \theta); \quad \theta = \theta(s) \\ &= (\cos \theta) \frac{dg_1}{ds} - (\sin \theta) g_1 \frac{d\theta}{ds} + (\sin \theta) \frac{dg_2}{ds} + (\cos \theta) g_2 \frac{d\theta}{ds} \\ &= \frac{dg_1}{ds_1} \cos^2 \theta + \left(\frac{dg_1}{ds_2} + \frac{dg_2}{ds_1} \right) \cos \theta \sin \theta + \frac{dg_2}{ds_2} \sin^2 \theta + (-g_1 \sin \theta + g_2 \cos \theta) \frac{d\theta}{ds} \end{aligned}$$

Luego como $U = N \times t = -g_1 \sin \theta + g_2 \cos \theta$. Y que la curvatura geodésica se obtiene a partir del producto escalar $\langle k, U \rangle$ se obtiene:

$$\begin{aligned} k_g &= \langle k, U \rangle \\ &= k \cdot (-g_1 \sin \theta + g_2 \cos \theta) \\ &= -\cos^2 \theta \sin \theta g_1 \frac{dg_1}{ds_1} + \cos^3 \theta g_2 \frac{dg_1}{ds_1} - \left(\frac{dg_2}{ds_1} + \frac{dg_1}{ds_2} \right) \cos \theta \sin^2 \theta g_1 \\ &\quad + \left(\frac{dg_2}{ds_1} + \frac{dg_1}{ds_2} \right) \cos^2 \theta \sin \theta g_2 - \sin^3 \theta g_1 \frac{dg_2}{ds_2} + \cos \theta \sin^2 \theta g_2 \frac{dg_2}{ds_2} + \frac{d\theta}{ds} \end{aligned}$$

por ser ortogonales un vector unitario y su derivada se tendrá que $g_1 \cdot \frac{dg_1}{ds_1} = g_1 \cdot \frac{dg_1}{ds_2} = g_2 \cdot \frac{dg_2}{ds_1} = g_2 \cdot \frac{dg_2}{ds_2} = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} k_g &= \left(g_2 \cdot \frac{dg_1}{ds_1} \right) \cos^3 \theta + \left(g_2 \cdot \frac{dg_1}{ds_2} \right) \cos^2 \theta \sin \theta \\ &\quad - \left(g_1 \cdot \frac{dg_2}{ds_1} \right) \sin^2 \cos \theta - \left(g_1 \cdot \frac{dg_2}{ds_2} \right) \sin^3 \theta + \frac{d\theta}{ds} \end{aligned}$$

Por último, observemos que la curvatura geodésica a lo largo de las curvas de parámetro u está dada por $k_1 = g_2 \cdot \frac{dg_1}{ds_1}$ y la curvatura a lo largo de la curva de parámetro v es $k_2 = -g_1 \cdot \frac{dg_2}{ds_2}$ y como $g_1 \cdot g_2 = 0$, también $k_1 = -g_1 \cdot \frac{dg_2}{ds_1}$ y $k_2 = g_2 \cdot \frac{dg_1}{ds_2}$. Así, pues,

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + k_1 \cos^2 \theta + k_2 \cos^2 \theta \sin \theta + k_1 \sin^2 \cos \theta + k_2 \sin^3 \theta$$

lo cual proporciona el resultado esperado. \square

Teorema 4 (Teorema de Green). *Sea C una curva cerrada cualquiera de una superficie dada por $\varphi = (u(t), v(t))$, R la región interior y P y Q funciones de los parámetros de la superficie. Entonces:*

$$\int_C \left(P \frac{du}{dt} + Q \frac{dv}{dt} \right) dt = \int \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv$$

Demostración. Ver [[2],pág 356-361] \square

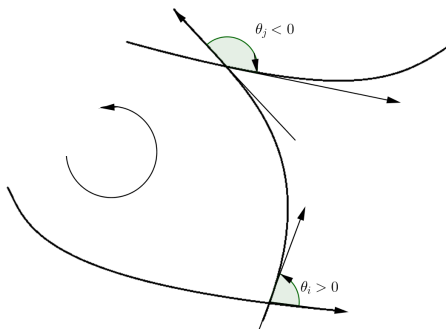
3.2. Teorema Local de Gauss-Bonnet

Definición 22 Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una aplicación continua de un intervalo cerrado $I = [0, b]$ en una superficie S . Decimos que α es una curva regular a trozos cerrada y simple si:

1. Existe una subdivisión $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, de I tal que α es diferenciable y regular en cada $[t_i, t_{i+1}]$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$).
2. $\alpha(0) = \alpha(b)$.
3. Si $t, t' \in I$, $t \neq t'$, entonces $\alpha(t) \neq \alpha(t')$.

Definición 23 Los puntos $\alpha(t_i)$, ($i = 0, 1, \dots, n$) se llaman vértices de α .

Supongamos que S esta orientada positivamente y sea θ_i , $-\pi < \theta_i < \pi$ el ángulo que forman $\alpha'(t_i - 0)$ y $\alpha'(t_i + 0)$; el signo de θ_i está dado por el determinante $[\alpha'(t_i - 0), \alpha'(t_i + 0), \vec{N}]$.



Definición 24 El ángulo θ_i , $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$, se denomina el ángulo exterior en el vértice $\alpha(t_i)$.

Definición 25 Un dominio sobre una superficie se dice que es simplemente conexo si toda curva cerrada o curva que une dos puntos de su borde divide al dominio en dos o en más partes disjuntas.

Definición 26 Se denomina dominio con borde regular sobre S a un dominio $D \subset S$ tal que el borde ∂D es igual a $\bar{D} - \text{int}(D)$ es la imagen de una curva $\alpha : I \rightarrow S$ regular a trozos, cerrada y simple.

Definición 27 Decimos que el borde ∂D de un dominio D en una superficie orientada S está positivamente orientado si la base ortogonal positiva $\{\alpha'(t), \alpha(t)\}$ satisface la condición de que $\alpha(t)$ apunta hacia el interior de D .

Definición 28 Un polígono en la superficie S es un subconjunto P de S que es imagen por una parametrización α de un polígono P' de un abierto $U \in \mathbb{R}^2$.

Teorema 5 (Teorema Local de Gauss-Bonnet para polígonos curvilíneos). Sea C polígono curvilíneo de clase C^2 en una parametrización de una superficie regular. Supongamos, que C está orientado positivamente y que su interior, en la parametrización, es simplemente conexo. Entonces

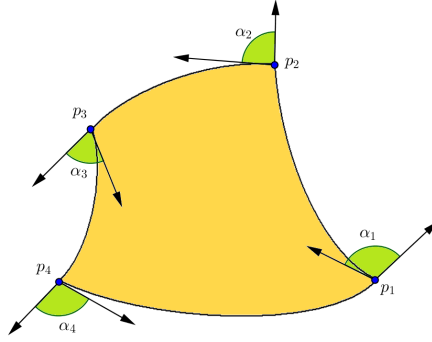
$$\int_C k_g ds + \int \int_R K_G dS + \sum_i \alpha_i = 2\pi$$

siendo k_g la curvatura geodésica a lo largo de C , R la unión de C y de su interior, K_G la curvatura gaussiana y α_i los ángulos externos de C .

Demostración Supongamos, que $\varphi = \varphi(u, v)$ es una parametrización de una superficie regular tal que las curvas de parámetros sean ortogonales; supongamos, además que $\varphi = \varphi(s) = \varphi(u(s), v(s))$ es una representación natural del polígono curvilíneo C de clase C^2 en $\varphi = \varphi(u, v)$, orientado positivamente y cuyo interior es simplemente conexo; convengamos que

$$g_1 = \frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|} = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}} \quad \text{y} \quad g_2 = \frac{\varphi_v}{\|\varphi_v\|} = \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}$$

son los vectores unitarios a lo largo de C en la dirección y sentido de las curvas de parámetros u y v , respectivamente, $\theta(s)$ la función, derivable a trozos, descrita por $t = (\cos \theta)g_1 + (\sin \theta)g_2$ siendo t la tangente unidad a todo lo largo de C , como se muestra en la figura.



Obsérvese que $\theta(s)$ presenta un salto en cada vértice P_i de C igual a un ángulo α_i , donde $-\pi < \alpha_i < \pi$. El ángulo α_i se llama ángulo externo de C en P .

Ahora, bien: por la fórmula de Liouville, se tiene que la curvatura geodésica es:

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + k_{g_{v=cte}} \cos \theta + k_{g_{u=cte}} \sin \theta$$

siendo $k_{g_{v=cte}}$ y $k_{g_{u=cte}}$ las curvaturas geodésicas de las curvas de parámetros, $v = \text{constante}$ y $u = \text{constante}$, respectivamente. De modo que

$$\int_C k_g ds = \int_C \frac{d\theta}{ds} + \int_C (k_{g_{v=cte}} \cos \theta + k_{g_{u=cte}} \sin \theta) ds$$

Ahora, bien,

$$\cos \theta = \frac{\langle t, \varphi_u \rangle}{\|t\| \|\varphi_u\|} = \frac{\langle (\varphi_u \frac{du}{ds} + \varphi_v \frac{dv}{ds}), \varphi_u \rangle}{\|\varphi_u\|} = \frac{\frac{du}{ds} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle}{\|\varphi_u\|} = \frac{du}{ds} \frac{\|\varphi_u\|^2}{\|\varphi_u\|} = \frac{du}{ds} \|\varphi_u\| = \sqrt{E} \frac{du}{ds}$$

y de manera análoga se obtiene

$$\sin \theta = \sqrt{G} \frac{dv}{ds}$$

en donde hemos utilizado el hecho de que las curvas de parámetros son ortogonales y, por ello, $\varphi_u \varphi_v = 0$. De este modo, al sustituir en la integral anterior, se tiene que:

$$\int_C k_g ds = \int_C d\theta + \int_C \left(k_{g_{v=cte}} \sqrt{E} \frac{du}{ds} + k_{g_{u=cte}} \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \right) ds$$

Del Teorema de Green se tiene que

$$\int_C k_g ds = \int_C d\theta + \int \int_{R'} \left[\frac{\partial}{\partial u} (k_{g_{u=cte}} \sqrt{G}) - \frac{\partial}{\partial v} (k_{g_{v=cte}} \sqrt{E}) \right] du dv$$

siendo R' el interior y el contorno de $u = u(s)$, $v = v(s)$ en el plano. De las ecuaciones para v , u constantes, que son

$$(k_g)_{v=cte} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}, \quad (k_g)_{u=cte} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}$$

resulta que

$$\begin{aligned} \int_C k_g ds &= \int_C d\theta + \int \int_{R'} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right] du dv \\ &= \int_C d\theta + \int \int_{R'} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right] \sqrt{EG} du dv \end{aligned}$$

y en consecuencia, de acuerdo con la fórmula de la curvatura gaussiana para cuando $F = 0$, se tiene que

$$K_G = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right]$$

se obtiene

$$\int_C k_g ds = \int_C d\theta - \int \int_{R'} K_G \sqrt{EG} du dv$$

Así se llega a la fórmula:

$$\int_C k_g ds = \int_C d\theta - \int \int_R K_G ds$$

En donde R es la unión de C con su interior en S . Sólo hace falta calcular la $\int_C d\theta$. Como C es una curva simple, se puede demostrar que el cambio total de θ al recorrerse C completamente, es igual a 2π . En cualquier texto de topología se puede

encontrar una demostración de este hecho. Como la $\int_C d\theta$ mide el cambio de los θ a todo lo largo de los lados tenemos que $\int_C d\theta + \sum_i \alpha_i = 2\pi$.

Por lo tanto

$$\int_C k_g ds + \int \int_R K_G ds = 2\pi - \sum_i \alpha_i$$

□

Teorema 6 (Teorema Local de Gauss-Bonnet para polígonos geodésicos).

Sean S una superficie regular orientable y Γ un polígono de lados geodésicos en S de ángulos exteriores α_i . Entonces:

$$\int \int_R K d\Gamma = 2\pi - \sum_i \alpha_i$$

Donde K es la curvatura gaussiana y R es la región que encierra el polígono Γ .

Demostración. Como el polígono geodésico esta constituido por lados que son arcos de geodésicas, entonces $k_g = 0$ en Γ . Así el Teorema Local de Gauss-Bonnet viene a ser:

$$\int \int_R K ds + \sum_i \alpha_i = 2\pi$$

se tiene

$$\int \int_R K d\Gamma = 2\pi - \sum_i \alpha_i$$

□

Teorema 7 (Teorema Local de Gauss para triángulos geodésicos).

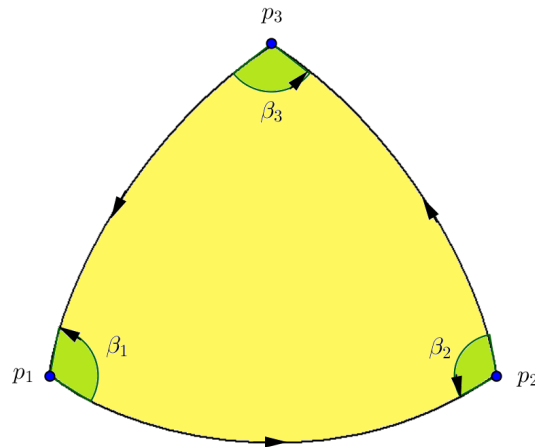
Sea S una superficie regular orientable y C un triángulo geodésico contenido en S cuyos ángulos valen β_1 , β_2 y β_3 , entonces:

$$\int_C K_G dA = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi$$

Demostración. Ya que C está construido por tres geodésicas que forman un triángulo geodésico. Como $k_g = 0$ en C , por el Teorema Local de Gauss-Bonnet, tenemos

$$\int \int_R K ds = 2\pi - \sum_i \alpha_i, \quad \text{si } \beta_i = \pi - \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

representa los ángulos internos del triángulo, como se ve en la figura, entonces



$$\int \int_R K ds = \sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi$$

□

Observación.

1. Al considerar la esfera de radio a , la curvatura gaussiana es $K = 1/a^2$, y la última fórmula se convierte en

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = \pi + A/a^2$$

en donde A es el área del triángulo geodésico.

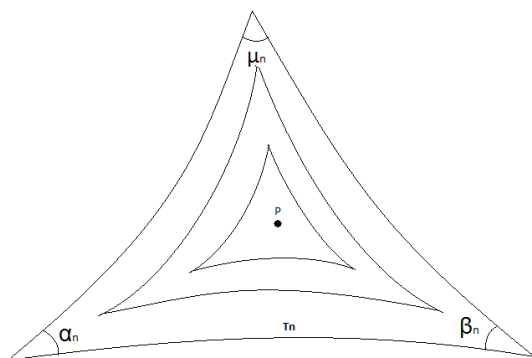
2. Si la curvatura gaussiana fuese negativa, es decir, si se trata de una seudoesfera, entonces

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = \pi - A/a^2$$

3. De modo que la suma de los ángulos internos de un triángulo geodésico es mayor que, menor que o igual a π , según que la curvatura gaussiana sea positiva, negativa o nula.

Corolario 1 Sea $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de triángulos geodésicos en la superficie S , esto es, cuyos lados son geodésicos de S y que convergen a un punto dado p , esto es, todos encierran a p y la sucesión de áreas de $\{T_n\}$ convergen a cero. Entonces, si α_n, β_n y γ_n son los ángulos de $\{T_n\}$ la curvatura de Gauss de S en el punto p es el límite siguiente:

$$K_G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n - \pi}{\text{Area}(T_n)}$$



Demostración Ver [[6],pág 380]

□

Ejemplo 31 Sea S una superficie con curvatura gaussiana $K_G \leq 0$, si $\gamma \subset S$ es una geodésica cerrada suave, demuestre que γ no puede encerrar una región simple en S .

Por el Teorema Local de Gauss-Bonnet, tendríamos

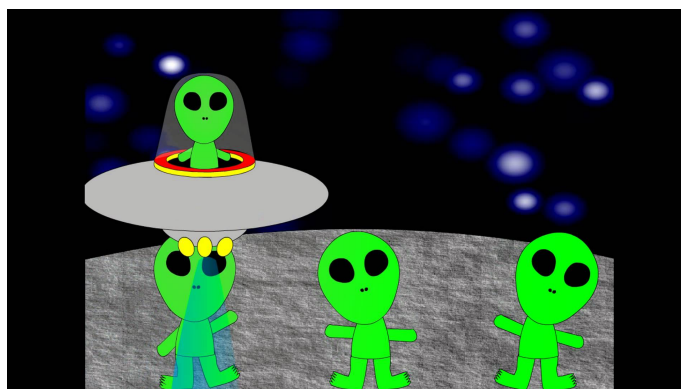
$$\int_{\gamma} k_g(s) ds + \int \int_R K_G dS + \sum \alpha_{\gamma} = 2\pi$$

Como γ es una geodésica, entonces su curvatura geodésica $k_g = 0$, se tiene:

$$\int \int_R K_G dS + \sum \alpha_{\gamma} = 2\pi$$

Que es una contradicción, ya que $\int \int_R K_G dS \leq 0$ y además $\sum \alpha_{\gamma} = 0$.

Ejemplo 32 *Los habitantes de un planeta cuya curvatura de Gauss es constante, miden los ángulos de un triángulo y obtienen 34° , 62° y 83° . Sabiendo que el área de dicho triángulo mide $2,81 \text{ km}^2$, calcular la curvatura del planeta. ¿Es éste esférico?*



Los habitantes del planeta verán como rectas los lados del triángulo considerado, pero serán geodésicas de dicho planeta. Por tanto, podemos aplicar el Teorema Local de Gauss-Bonnet, y llamando K al valor constante de la curvatura de Gauss de dicho planeta y ε_1 , ε_2 y ε_3 a los ángulos internos de triángulo T en cuestión, resulta que:

$$K_G \text{Área}(T) = \int_T K_G dA = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \pi$$

Expresando los ángulos en radianes,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{2\pi(34 + 62 + 83)}{360} = \frac{179}{180}\pi$$

luego despejando,

$$K_G = \left(\frac{-\pi}{2,81} \right) \frac{1}{180}$$

Como la curvatura es negativa el planeta no es esférico.

Ejemplo 33 Determinar todos los términos del Teorema Local de Gauss-Bonnet, para la imagen, sobre la esfera unitaria, descrita por:

$$\varphi = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$$

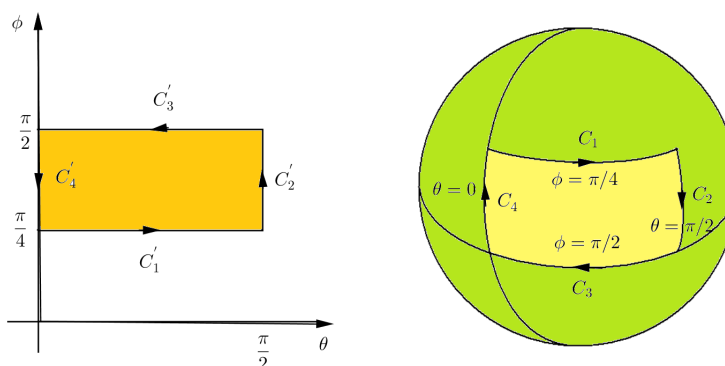
del polígono que tiene los siguientes lados

$$C_1 : \theta = t, \phi = \pi/4, \quad 0 \leq t \leq \pi/2;$$

$$C_2 : \theta = \pi/2, \phi = t, \quad \pi/4 \leq t \leq \pi/2;$$

$$C_3 : \theta = \pi/2 - t, \phi = \pi/2, \quad 0 \leq t \leq \pi/2;$$

$$C_4 : \theta = 0, \phi = \pi/2 - t, \quad 0 \leq t \leq \pi/4$$



En este caso, $E = \sin^2 \phi$, $F = 0$ y $G = 1$ y la curvatura gaussiana es $K = 1$. Por tanto,

$$\int \int_R K_G dS = \int \int_{R'} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi = \int_0^{\pi/2} \left[\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \phi d\phi \right] d\theta = \pi \sqrt{2}/4$$

Además $(k_g)_{\phi=\text{constante}} = -\frac{E_\phi}{2E\sqrt{G}} = -\cot \phi$ y en esta forma,

$$\int_{C_1} k_g dS = - \int_0^{\pi/2} \cot(\pi/4) \sqrt{E \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2} dt = - \int_0^{\pi/2} \cos(\pi/4) dt = -\pi\sqrt{2}/4$$

Como C_2 , C_3 y C_4 son geodésicas, entonces

$$\int_{C_2} k_g dS = \int_{C_3} k_g dS = \int_{C_4} k_g dS = 0$$

En esta forma, se tiene que

$$\int_C k_g dS = \int_{C_1} k_g dS = -\pi\sqrt{2}/4$$

Por último, como las curvas de parámetros son ortogonales, entonces

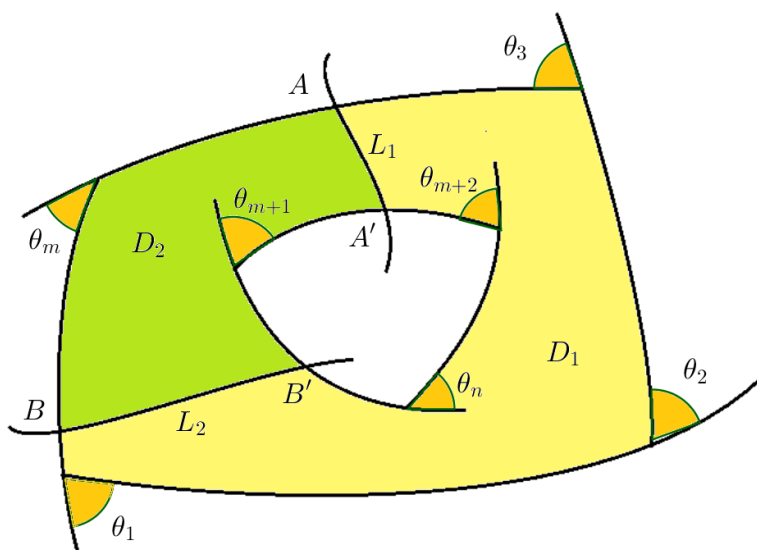
$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 4(\pi/2) = 2\pi$$

3.3. Fórmula general del teorema local de Gauss-Bonnet

A pesar que hemos probado el Teorema Local de Gauss-Bonnet bajo una hipótesis restrictiva sobre el dominio D .

Si el dominio D no es simplemente conexo la frontera del dominio no es una curva cerrada, sino que consta de varias curvas cerradas. La orientación del dominio induce una orientación sobre cada una de esas curvas componentes de la frontera.

Consideremos en primer lugar un dominio D en forma de anillo cuya frontera consta de las curvas C y C' (diferenciables a trozos). Mediante dos curvas L_1 y L_2 conectamos un punto sobre C (A y B , respectivamente) con puntos en C' (A' y B' , respectivamente) y así dividimos el anillo en dos dominios simplemente conexos que no se superponen D_1 y D_2 .



Denotemos a la parte de C que pertenece a la frontera de D_1 por C_1 y sea C_2 la parte de C de la frontera del dominio D_2 , y análogamente para C' sería C'_1 y C'_2 .

Así el borde de D_1 consta de las curvas C_1, L_1, C'_1, L_2 y la de D_2 de $C_2, -L_2, C'_2, -L_1$, donde el signo negativo quiere decir con orientación opuesta.

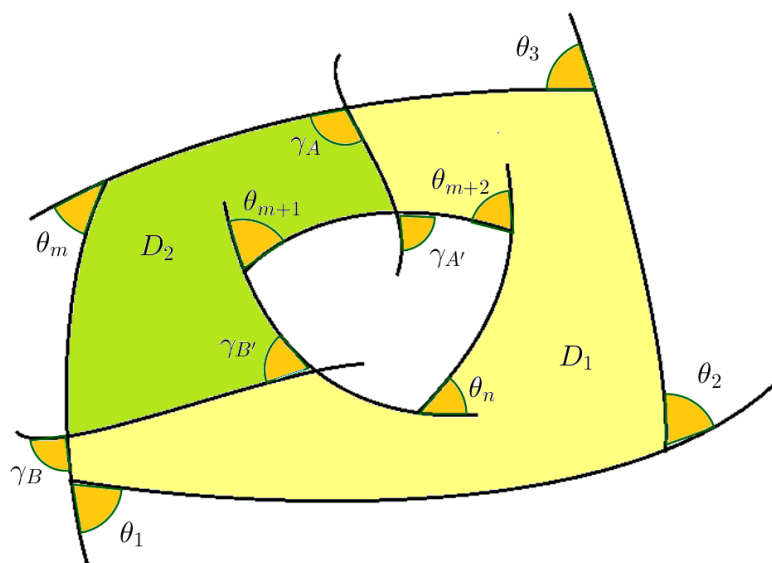
Representemos por $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, los ángulos orientados en los vértices de C_1 y C'_1 ; y por $\theta_{m+1}, \theta_{m+2}, \dots, \theta_n$ en los vértices de C_2 y C'_2 .

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que los puntos A, A', B y B' son puntos de C o C' en los cuales la curva es regular, estos puntos son, sin embargo, vértices de los bordes de D_1 y D_2 . Los ángulos en los vértices del borde de D_1 serán:

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m, \gamma_A, \gamma_{A'}, \gamma_B \text{ y } \gamma_{B'}$$

y los de D_2 son

$$\theta_{m+1}, \theta_{m+2}, \dots, \theta_n, \delta_A, \delta_{A'}, \delta_B \text{ y } \delta_{B'}$$



Observemos que

$$\gamma_A + \delta_A = \gamma_{A'} + \delta_{A'} = \gamma_B + \delta_B = \gamma_{B'} + \delta_{B'} = \pi$$

Si aplicamos ahora el Teorema Local de Gauss-Bonnet a cada dominio simplemente conexo, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{D_1} \int K_G dA + \int_{C_1} k_g ds + \int_{L_1} k_g ds + \int_{C'_1} k_g ds + \int_{L_2} k_g ds \\ + \sum_{i=1}^m \theta_i + \gamma_A + \gamma_{A'} + \gamma_B + \gamma_{B'} = 2\pi \\ \int_{D_2} \int K_G dA + \int_{C_2} k_g ds - \int_{L_1} k_g ds + \int_{C'_2} k_g ds - \int_{L_2} k_g ds \\ + \sum_{i=m+1}^n \theta_i + \delta_A + \delta_{A'} + \delta_B + \delta_{B'} = 2\pi \end{aligned}$$

Sumando, miembro a miembro, se tiene

$$\int_D \int K_G dA + \int_C k_g ds + \int_{C'} k_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i + 4\pi = 4\pi$$

O lo que es lo mismo

$$\int_D \int K_G dA + \int_C k_g ds + \int_{C'} k_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 0$$

Si D tiene p agujeros, su frontera ∂D con $p + 1$ componentes, se tiene la fórmula de Gauss-Bonnet generalizada:

$$\int_D \int K_G dA + \int_C k_g ds + \int_{C'} k_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi(1 - p)$$

□

El Teorema Local de Gauss-Bonnet motiva a hacer un estudio más amplio, extendiendo el teorema a regiones más generales; en particular, a superficies geométricas enteras dirigida a demostrar el Teorema Global de Gauss-Bonnet.

3.4. Aplicaciones

El Teorema Local de Gauss-Bonnet y en su versión global² se encuentran diversas aplicaciones del Teorema de Gauss-Bonnet en la demostración de resultados físicos se encuentran una serie de teoremas acerca de singularidades y agujeros negros en el espacio – tiempo curvo de la Teoría de la Relatividad de Einstein, en el libro de Hawking-Ellis: “The large scale structure of space-time”, se utiliza el Teorema de Gauss-Bonnet para demostrar la Proposición 9.3.2 de dicha obra.

²Sea S una superficie regular y compacta. Entonces $\int_S K_G dA = 2\pi\chi(S)$, donde $\chi(S)$ es la característica de Euler-Poincaré de la superficie con $\chi(S) = 2 - 2g(S)$, y el número $g(S)$ se llama el género de S .

También, en el libro editado por A. Held: “General Relativity and Gravitation” puede verse el artículo “The Positive Mass Conjeture” de Dieter R. Brill - Pong Soo Jang donde se aplica el Teorema de Gauss-Bonnet.

Así como en la publicación electrónica del artículo de “Integral Geometry and the Gauss-Bonnet Theorem in Constant Curvature Spaces”, en la demostración del Teorema 1 de dicho artículo que es el Volumen 358, número 3, Pag. 1105–1115 de Transactions of the American Mathematical Society.

Conclusiones

En conclusión de nuestro trabajo se profundizó sobre el estudio de que es superficie regular, así como sus propiedades como: las curvaturas Gaussiana, curvatura normal, curvatura media y curvatura geodésica que es de mucha importancia para el estudio y desarrollo de Teorema Local de Gauss-Bonnet.

Poder construir un conocimiento desde la definición de superficie regular hasta la demostración del Teorema Local de Gauss-Bonnet, fue muy interesante y se obtuvieron resultados tales como:

1. La seudoesfera de radio a tiene curvatura gaussiana negativa $-\frac{1}{a^2}$ en todo punto de la superficie, al contrario, de la esfera de radio a que tiene curvatura gaussiana positiva $\frac{1}{a^2}$ en cada uno de sus puntos.
2. Para establecer la naturaleza de un punto, es decir, para determinar si un punto es elíptico, hiperbólico o parabólico el signo del determinante de la segunda forma fundamental debe ser mayor que, menor que o igual a cero, respectivamente.
3. Al considerar la esfera de radio a , la curvatura gaussiana es $K_G = 1/a^2$, y para una triángulo geodésico en la esfera se tiene:

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = \pi + A/a^2$$

en donde A es el área del triángulo geodésico y los β son los ángulos interiores del triángulo geodésico .

4. Si la curvatura gaussiana fuese negativa, es decir, si se trata de una pseudoesfera, entonces

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = \pi - A/a^2$$

5. De modo que la suma de los ángulos internos de un triángulo geodésico es mayor que, menor que o igual a π , según que la curvatura gaussiana sea positiva, negativa o nula.

Estudiar geometría diferencial fue una gran desafío, ya que la carrera de licenciatura en matemática no cursamos una materia donde abordáramos a profundidad esta temática. Mientras tanto, fue muy interesante poder estudiar conceptos nunca vistos y usar los conocimientos de calculo, análisis vectorial y álgebra lineal estudiados durante la carrera, consiguiendo obtener un buen aprendizaje.

Por fin esperamos que el estudio abordado en nuestro trabajo pueda ser útil a otras personas que deseen estudiar geometría diferencial.

Bibliografía

- [1] Antonio F. Costa J. M. Gamboa Ana M. Porto. “*Notas de geometría Diferencial de Curvas y Superficies*”. Sanz y Torres, S. L.
- [2] Murray, R. Spiegel. “*Análisis Vectorial*”. McGraw-Hill, 1996.
- [3] G. Feeman. & N. Grabois. “*Linear Algebra y Multivariable Calculus*”. McGraw-Hill, 1970.
- [4] Manfredo P. Do Carmo. “*Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*”. McGraw-Hill, 1970.
- [5] Czes Kosniowski. “*Topología Algebraica*”. Reverté S.A, 1986.
- [6] James R. Munkres. “*Topología*”. Pearson Educación, S.A. Madrid, 2002.
- [7] James R. Munkres. “*Analysis on manifolds*”. Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- [8] Elon Lages Lima. “*Análisis Real Funciones de una variable*”. Colección Textos del IMCA, 1997.
- [9] Angel Montesdeoca. “*Apuntes de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*”.
- [10] María Belén Celis y José Abel Semitiel. “*El Teorema de Gauus-Bonnet*”. Universidad Nacional de Rosario, 2002.