UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE GRADO TITULADO:

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA

Estudiantes:

Julissa Guadalupe Moreno Ruano. *Carné:* MR10012

Esmeralda Beatríz Ramírez Rodas. *Carné:* RR10007

Asesor: MSc. Carlos Ernesto Gámez Rodríguez.

Ciudad Universitaria, Junio de 2015.

Dedicatoria

A nuestros padres, Celina, María , Luciano y Juan

por su incondicional apoyo, amor y comprensión.

Agradecimientos

A Dios, por darnos la vida, sabiduría y las fuerzas necesarias para completar nuestros estudios superiores.

A nuestra Buena Madre, por interceder ante su hijo por cada una de nuestras plegarias.

A nuestros padres, por ser nuestro ejemplo de esfuerzo y dedicación y por animarnos a conseguir nuestras metas.

A nuestros hermanos, Lili, Yancy y Juan; por su alegría, ayuda y palabras de aliento.

A nuestros amigos, Wilner, Willians, Jacky, Jorge, Wendy, Cecy, Ulises, Glenda, Marleny, Oscar, Sandra, Andrés, Angela , Javi, Carlos, Henry y Andrés P, por su alegría, amistad sincera, trabajo en equipo y apoyo incondicional.

A nuestro asesor, MSc. Carlos Gámez, por su disponibilidad de tiempo, dedicación, esfuerzo y apoyo en cada aspecto de este trabajo.

A nuestro jurado, Dr. Simón Peña y Lic. Willian Armando Miranda, por su dedicación, revisiones y correcciones de este trabajo.

Índice

Resumen

Para hablar de matemática financiera es necesario e importante conocer de que trata la matemática financiera y tener una base estadística, por lo cual se realizará un breve repaso de probabilidad donde se recuerda el tema de variables aleatorias continuas, así como también algunas definiciones básicas.

También se menciona el concepto de martingala que es conocido como un juego justo ya que en una martingala el valor esperado en el siguiente juego es igual al valor esperado en el juego anterior.

Además se habla de como varía el dinero en el tiempo, de la capitalización periódica, de las corrientes de pago, del compuesto continuo y como compararlos, del mercado de dinero, de los bonos cupón cero, de los bonos cupón y de las cuentas de mercado monetaria.

Seguido de todo ello, se tratan los temas de de movimiento browniano, opciones, modelo binomial de valoración de un solo paso y de varios pasos, procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales estocásticas y cálculo de Ito.

1. Introducción

En el trabajo que a continuación se presenta se hará una investigación sobre la Matemática Financiera. La Matemática Financiera es una rama de la Matemática que estudia las variaciones cuantitativas que se producen en los capitales financieros en el transcurso del tiempo. Matemática Financiera no trata sobre la predicción del precio de una acción. De lo que trata es de averiguar el precio de las opciones y derivados. Una opción es el derecho de vender o comprar algo en un futuro a un precio previamente pactado y donde un derivado es un producto financiero cuyo valor se basa en el precio de otro activo.

Para iniciar la investigación se da un breve repaso de probabilidad el cual es necesario para la comprensión del tema, entre algunas definiciones que se mostrarán se encuentran el concepto de σ-álgebra, de probabilidad, de variable aleatoria, de media o valor esperado, de varianza, de independencia, entre otros. También se presentan algunos ejemplos para el mejor entendimiento de dichos conceptos. Luego se mostrarán algunos teoremas básicos con sus respectivas demostraciones. Finalmente se hablará de las variables aleatorias continuas donde se definirán los conceptos de media, entre otros.

Luego en el transcurso de la investigación se estudiará el proceso estocástico de martingalas. También se describirá el modelo binomial de precios de activos de un paso donde el modelo binomial es un modelo discreto que nos permite observar el comportamiento de las acciones a través del tiempo y en el modelo binomial de precios de activos de un paso las opciones son utilizadas en el ámbito financiero como una protección para los compradores de acciones. Además se analizará el modelo binomial de precios de varios pasos.

A continuación se mostrarán los diferentes tipos de opciones entre las que se pueden mencionar la Opción Americana que es la que se puede ejercer desde el momento de su contratación hasta su fecha de vencimiento, la Opción Europea que sólo se puede ejercer en su fecha de vencimiento, entre otras. También se explicarán los procesos estocásticos, un proceso estocástico es una colección o familia de variables aleatorias $\{X_t;\, t \in T\}$, ordenadas según el subíndice t que en general se suele identificar con el tiempo.

El movimiento browniano es el fenómeno físico llamado así por el botánico inglés Robert Brown, quien lo descubrió en 1827. El movimiento browniano es el movimiento de zig-zag exhibido por una pequeña partícula, tal como una grano de polen, inmerso en un líquido o un gas. Albert Einstein dio la primera explicación de este fenómeno en 1905. Desde entonces, el abstraído proceso se ha utilizado para modelar el mercado de valores y en mecánica cuántica.

Además se estudiarán las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDEs) donde una de estas es una ecuación diferencial en la que uno o más de los términos es un proceso estocástico, dando como resultado una solución que es en sí misma un proceso estocástico. SDEs se utilizan para modelar diversos fenómenos tales como las fluctuaciones de precios de las acciones o sistemas físicos sujetos a las fluctuaciones térmicas. Típicamente, SDEs incorporan ruido blanco aleatorio que puede ser pensado como la derivada del movimiento browniano (o el proceso de Wiener); sin embargo, se debe mencionar que son posibles otros tipos de fluctuaciones aleatorias, tales como los procesos de salto. Una ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{dx}{dt} = a\left(t, x\right),$$

puede entenderse como la forma degenerada de una ecuación diferencial estocástica en ausencia de aleatoriedad.

Finalmente se verá el cálculo estocástico de Ito que es una de las herramientas más útiles en las Matemáticas Financieras modernas, sobre el cual descansa prácticamente toda la teoría económica y el análisis financiero en tiempo continuo y en ambientes estocásticos.

2. Sobre el Trabajo de Investigación

2.1. Bosquejo histórico

Las matemáticas han sido aplicadas a muchas áreas de las finanzas a través de los años. Las Matemáticas Financieras surgieron como necesidad de facilitar la realización de algunas transacciones comerciales o determinados pagos, por ejemplo los que habían de realizar los aldeanos a sus señores feudales en la época del feudalismo en Europa. Las Matemáticas Financieras aparecieron inicialmente con los intereses, el ser humano se dio cuenta que si otro le debía dinero o algún otro bien, él debía recibir una compensación por el tiempo que esta persona tardara en cancelar la deuda.

En la segunda mitad del siglo XX se notó una importante evolución de la economía financiera, que sólo fue posible mediante la aplicación sistemática y con intensidad creciente del pensamiento matemático. Una vez más, las Matemáticas han permitido formular con rigor los principios de otra ciencia, y han proporcionado un método de análisis que conduce al establecimiento de propiedades y relaciones que, lejos de ser triviales, incorporan un alto nivel de complejidad y tienen una aplicación práctica inmediata.

La prueba más clara de lo anterior se encuentra en la teoría de los mercados financieros, los planteamientos de Markowitz, Bachelier, Black, Scholes y Merton, entre otros muchos, cambiaron radicalmente los análisis que se hacían hasta entonces.

En 1900 Louis Bachelier, matemático francés, fue el primero en modelar el movimiento browniano en su tesis "La Teoría de la Especulación", en ella se discute el uso del movimiento browniano para evaluar las Opciones financieras. Este es el primer escrito histórico en el que se utilizan las matemáticas para el estudio de la economía. Bachelier está considerado como un pionero en el estudio de las Matemáticas Financieras y del proceso estocástico. Bachelier fue un pionero en el modelo y el análisis de los mercados financieros. El primer trabajo sobre SDEs se hizo para describir el movimiento browniano en el famoso artículo de Einstein. Este trabajo fue seguido sobre todo por Langevin. Más tarde Itō y Stratonovich ponen SDEs en una base matemática más sólida.

En 1973 Fischer Black y Myron Scholes publicaron su trabajo "The pricing of options and corporate liabilities". En este se especifica la primera fórmula exitosa de fijación de precios de opciones y se describe un marco general para la fijación de precios de derivados.

Robert C. Merton, economista estadounidense recibió en 1977 el Premio Nobel de Economía que compartió con Myron Scholes, por sus trabajos para calcular el precio de las Opciones financieras. Junto a Fisher Black y Scholes desarrolló el modelo de Black-Scholes, que permitió la utilización de estos instrumentos financieros. Merton ayudó a introducir el cálculo estocástico en la economía financiera, lo que permitió que el comportamiento de los precios fuese descrito con el lenguaje preciso de la probabilidad.

En 1980 Harrison y Kreps introdujeron el enfoque martingala en matemática financiera. En 1989 Ross afirmó que el elemento clave de la economía es la igualdad entre oferta y demanda, mientras que el elemento clave del campo financiero es la ausencia de oportunidades de arbitraje.

Finalmente en la actualidad el mundo financiero, en constante crecimiento y evolución, está generando problemas que tienen cada vez mayor complejidad. Hoy nos encontramos ante cuestiones que tienen un gran contenido matemático y del máximo interés para las instituciones financieras, quienes se encuentran ante una competitividad muy intensa, un mercado con márgenes cada vez menores y un mundo sin fronteras. Temas como la gestión y medición de riesgos, el riesgo de crédito, la valoración de nuevos activos o la valoración de nuevos derivados con subyacente no negociable (temperaturas, catástrofes naturales, sequías), presentan cada vez más dificultades matemáticas. Finalmente, la teoría de mercados financieros está motivando el desarrollo de otras partes de la economía financiera (finanzas empresariales, gestión de tesorería, mercados emergentes, etc) en las que también hay un alto contenido en formulación y razonamiento matemático. Por consiguiente, desde el análisis funcional hasta el cálculo de probabilidades, todas las ramas que constituyen la matemática han jugado un papel esencial en el proceso de desarrollo de la economía financiera.

2.2. Justificación

La importancia de estudiar la Matemática Financiera.

La Matemática Financiera es el campo de la matemática aplicada, que analiza, valora y calcula materias relacionadas con los mercados financieros, y especialmente, el valor del dinero en el tiempo. Así, las matemáticas financieras se ocupan del cálculo del valor, tipo de interés o rentabilidad de los distintos productos que existen en los mercados financieros (depósitos, bonos, préstamos, descuento de papel, valoración de acciones, cálculos sobre seguros, etc).

Además las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas son de mucha importancia en las Matemáticas Financieras ya que se utilizan para modelar y estudiar diversas dinámicas gobernadas por fenómenos aleatorios como los precios de las acciones y opciones.

La importancia de matemáticas financieras también radica en el hecho de poder dar precios justos a una serie de productos financieros. Además se pueden crear nuevos instrumentos y productos financieros que sean de beneficio para las distintas partes en situaciones complicadas donde se pueden ocupar los recursos de manera más óptima, eficiente e inteligente. De igual manera hay interés por instituciones financieras por tener profesionales expertos en matemáticas financieras para sus trabajos internos y externos.

Y es debido a la falta de estudio sobre Matemática Financiera que ha surgido la necesidad de realizar un trabajo en el que se investiguen los diferentes contenidos concernientes a dicho tema para que los estudiantes de la Escuela de Matemática conozcan sobre este y sepan otras áreas donde la matemática puede ser utilizada.

2.3. Antecedentes

En la Universidad de El Salvador se han estudiado algunas áreas de Matemática Financiera. En la biblioteca de la Facultad de Ciencias Económicas puede encontrarse una tesis titulada "Enfoque de Opciones Reales" en la cual se tratan distintos temas entre los cuales están Opciones Reales y Financieras, Aspectos Comparativos de las Opciones, La Clasificación de las Opciones, el Método de Black-Scholes y Métodos de Cálculos Alternativos como árboles binomiales y Simulación de Monte Carlo.

El área de Matemáticas Financieras ha sido una de las áreas de menos estudio en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. En la malla curricular de la carrera de Licenciatura en Matemática no se encuentra ninguna asignatura en la que se imparta el tema de Matemática Financiera, sin embargo en el plan de estudio de la carrera de Profesorado en Matemática existe una asignatura llamada Matemática Discreta en la cual se imparten conceptos básicos como interés simple y compuesto, anualidades, fondos de amortización, entre otros. En dicha asignatura no se profundiza en Matemática Financiera debido a que el nivel de los estudiantes de ésta no tienen la base teórica necesaria para la comprensión total del tema.

En los cursos de la maestría en estadística que se han ofertado en la Escuela han habido temas en Matemática Financiera pero ninguno lidia con la modelación estocástica, específicamente la profesora Begoña Vitoriano dio una sección en el curso de Matemática Financiera de la maestría en el año 2014. En el curso se desarrollaron métodos de simulación de variables aleatorias con ciertas distribuciones y se dieron algunas aplicaciones en Matemática Financiera pero esto no está cerca de llegar a ser un trabajo de tesis.

Finalmente en diciembre del año 2014 se realizó un seminario en métodos específicos de Matemática Financiera. En dicho curso se abordaron temas como matemáticas actuariales, ecuaciones Backward, Forward y otros temas que son disjuntos al trabajo de esta tesis.

2.4. Objetivo general

Hacer un estudio introductorio sobre las matemáticas financieras, sus procesos estocásticos, martingalas, procesos brownianos y Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

2.5. Objetivos específicos

- Conocer los modelos de dinero en el tiempo.
- Estudiar los diferentes tipos de Opciones.
- Estudiar el proceso de Martingalas.
- Aprender el Modelo Binomial de Valoración de precios de un activo.
- Conocer la base necesaria para poder entender las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.
- Trabajar las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

2.6. Planteamiento del problema

Son varias preguntas que abordaremos en este trabajo de investigación:

¿Cómo varía el valor del dinero en el tiempo? y ¿Cómo calcular el interés compuesto?

Si vas a una mueblería y quieres adquirir un sillón para tu casa es seguro que te pregunten por la forma en que deseas liquidar el artículo, con el fin de definir el precio a pagar. De esta manera el vendedor te dará varias opciones.

1. Si lo pagas de contado, el precio sería de $\$2,000$.

2. Si lo pagas en abonos, te pedirían un adelanto de $\$200$ además de 18 abonos de $\$150$ cada uno. Al sumar las cantidades te darás cuenta que pagarías un total de $\$2,900$.

Después de analizar esta situación seguramente te preguntarás ¿Por qué cuesta $\$900$ más el sillón si decides pagarlo en abonos? Para dar respuesta a esta interrogante debes recurrir al concepto de valor del dinero en el tiempo, pero antes revisa estas otras dos posibilidades para que compres ese sillón que deseas.

Supón que para aprovechar el precio de contado vas al banco y solicitas un préstamo personal por $\$2,000$, el banco te da un plazo de 24 meses para pagarlo, pero además te informan que debes efectuar pagos mensuales de $\$125$ con el fin de liquidar la deuda. De esta manera la tercera opción que tienes es:

3. Si solicitas un préstamo al banco terminarás pagando $\$3,000$ de los cuales $\$2,000$ cubren el préstamo y $\$1,000$ los intereses que te cobrará el banco.

Por último, piensa que tienes los $\$2,000$ invertidos en una cuenta de ahorros, si efectúas algunos cálculos te darás cuenta que al mantener esa cantidad durante tres años podrás acumular al final de los mismos $\$3,100$.

4. Si retiras de tu cuenta de ahorros los $\$3,100$ para aprovechar la compra de contado del sillón dejarás de ganar $\$1,100$ de intereses.

Con este ejemplo llegarás a la conclusión que si no tienes los $\$2,000$ para comprar el sillón de contado tendrás que pagar más por su adquisición, ya sea que lo liquides en abonos en la misma mueblería o que obtengas el financiamiento de un banco.

Por otra parte, si tienes el dinero y lo retiras para comprar el sillón de contado dejarás de recibir $\$1,100$ de intereses.

La razón de ello es que el dinero tiene diferente valor en el tiempo debido a que tiene un costo. A este costo se le conoce comúnmente como tasa de interés y es precisamente esta tasa de interés la que hace que el dinero cambie su valor en el tiempo.

En las opciones 2, 3 y 4 está implícita una tasa de interés la cual puede ser determinada. En el caso del crédito otorgado por la mueblería la tasa es del 4.67 % mensual, en el caso del préstamo bancario es del 3.53 % mensual y en la última situación, inversión en una cuenta de ahorros, es del 1.22 % mensual. Obviamente si pensaste que el mejor camino para adquirir el sillón es retirar los $2,000 de tu cuenta de ahorros por tener el costo de interés más bajo ¡Estás en lo correcto!

Pero, ¿cómo se obtuvieron las tasas de interés?, ¿Por qué es mejor la opción 3 si es la que mayor diferencia presenta con la compra de contado? ¿Cómo influye el plazo en el valor del dinero? Las respuestas a estas y otras preguntas es lo que se busca a lo largo de esta investigación.

¿Cómo empezar a abordar el precio de los derivados?

Los derivados financieros, como la totalidad de los activos financieros, cambian de precio todos los días, eso hace que sus poseedores todos los días vean variaciones (ganancias o pérdidas) en estas operaciones. Pero ¿cómo se calcula el valor de la operación?

Un ejemplo es el precio de mercado, si tenemos algo por lo que ayer pagamos siete y hoy se vende a ocho hemos ganado uno, pero habrá perdido el que lo compró por nueve. De todos modos la fijación del valor de la operación no se hace sólo mediante la fijación del valor de mercado, sino que existen más métodos.

Empecemos partiendo del punto siguiente, supongamos que tenemos un derivado financiero que nos va a pagar $100 dentro de seis meses. ¿Vale este derivado $100 hoy? Pensemos si vale la pena pagar $100 por el mismo, si tuviéramos $100 los podríamos emplear en comprar el derivado hoy y recuperar la inversión dentro de seis meses o podríamos ponerlos a plazo y dentro de seis meses tener $100 más los intereses. El producto solo vale la pena si costara lo mismo (o menos) de lo que tendríamos que poner a plazo para que dentro de seis meses tuviéramos $100.

En general esto lo hacemos para valorar cualquier activo financiero, no sólo los derivados. Por ejemplo la deuda se valora según los tipos de interés de la misma y los del mercado vigente en ese momento. Si no hay riesgo de impago, el valor sólo depende de la rentabilidad.

¿Cómo resolver Ecuaciones Diferenciales Estocásticas?

Usaremos el Teorema del Límite Central para obtener el límite cuando $N \to \infty$ del paso aleatorio $w_N(t)$. Para ello ponemos

$$x(n) = \frac{k(n) - m\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$ que es una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, cada una con expectativa 0 y varianza 1. El Teorema del Límite Central implica que

$$\frac{x(1) + x(2) + \ldots + x(n)}{\sqrt{n}} \to X$$

en distribución a medida que $n \to \infty$, donde X es una variable aleatoria con distribución normal estándar (media 0 y varianza 1).

Fijemos cualquier $t > 0$. Debido a que el paso aleatorio sólo se define en tiempos discretos siendo todos múltiplos enteros del paso $\tau = \frac{1}{N}$, consideramos $w_N(t_N)$, donde t_N es todo el múltiplo de $\frac{1}{N}$ más cercano a t. Entonces, claramente, $N\,t_N$ es un número entero para cada N, y podemos escribir

$$w_N(t_N) = \sqrt{t_N}\frac{x(1) + x(2) + \ldots + x(Nt_N)}{\sqrt{Nt_N}}.$$

Como $N \to \infty$, tenemos que $t_N \to t$ y $N\,t_N \to \infty$, así que

$$w_N(t_N) \to W(t)$$

en distribución, donde $W(t) = \sqrt{t}X$. La última igualdad significa que $W(t)$ es normalmente distribuida con media 0 y varianza t. Este argumento, basado en el Teorema del Límite Central, funciona para cualquier tiempo fijo $t > 0$. Es posible extender el resultado para obtener un límite para la totalidad de tiempos $t \geq 0$ simultáneamente. El límite $W(t)$ se denomina el proceso de Wiener (o movimiento browniano). Hereda muchas de las propiedades de la caminata aleatoria, por ejemplo:

1. $W(0) = 0$ que corresponde a $w_N(0) = 0$.
2. $\mathbb{E}(W(t)) = 0$ que corresponde a $\mathbb{E}(w_N(t)) = 0$.
3. $\operatorname{Var}(W(t)) = t$ con la contraparte discreta $\operatorname{Var}(w_N(t)) = t$.
4. Los incrementos $W(t_3) - W(t_2)$ y $W(t_2) - W(t_1)$ son independientes para $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$; al igual que $w_N(t_3) - w_N(t_2)$ y $w_N(t_2) - w_N(t_1)$.
5. $W(t)$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza t, es decir, con densidad $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$. Esto se relaciona con la distribución de $w_N(t)$. Este último no es normal, pero se aproxima a la distribución normal en el límite de acuerdo al Teorema del Límite Central.

Una diferencia importante entre $W(t)$ y $w_N(t)$ es que $W(t)$ se define para todo $t \geq 0$, mientras que el tiempo en $w_N(t)$ es discreto, $t = \frac{n}{N}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

El proceso de precio obtenido en el límite de $S_N(t)$ cuando $N \to \infty$ será denotado por $S(t)$. Mientras $S_N(t)$ satisface la ecuación aproximada

$$S(t+\tau) - S(t) \approx \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(t)\,\tau + \sigma S(t)\left(w(t+\tau) - w(t)\right),$$

con las sustituciones apropiadas, se tiene

$$S_N\left(t + \frac{1}{N}\right) - S_N(t) \approx \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_N(t)\,\frac{1}{N} + \sigma S_N(t)\left(w_N\left(t + \frac{1}{N}\right) - w_N(t)\right).$$

Los precios de acciones $S(t)$ en tiempo continuo satisfacen una ecuación de la forma

$$dS(t) = \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t),$$

donde $dS(t) = S(t+dt) - S(t)$ y $dW(t) = W(t+dt) - W(t)$ son los incrementos de $S(t)$ y $W(t)$ durante un intervalo de tiempo dt infinitesimal. Las fórmulas explícitas para las soluciones son también similares,

$$S_N(t) = S_N(0)\exp\left(mt + \sigma w_N(t)\right),$$

en el caso discreto, mientras

$$S(t) = S(0)\exp\left(mt + \sigma W(t)\right),$$

en el caso continuo.

Ya que $W(t)$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza t, se sigue que $\ln S(t)$ tiene una distribución normal con media $\ln\left(S(0) + mt\right)$ y varianza $\sigma^2 t$.

Debido a esto, se dice que el proceso de precios $S(t)$ de tiempo continuo tiene la distribución log-normal.

El número σ se llama la volatilidad del precio de $S(t)$.

2.7. Metodología

Se describe aquí los aspectos importantes de la metodología del presente trabajo de investigación:

1. Tipo de investigación.

Este proyecto de investigación tiene las característica siguientes: Bibliográfico, porque se ha hecho una extensa recopilación de libros impresos y de libros obtenidos por Internet para contar con el suficiente material que cubra las necesidades del estudio. El objetivo es compilar coherentemente la información más útil y destacada del tema. Descriptivo, ya que se pretende estudiar a detalle la teoría preliminar y del tema en sí.

2. Forma de Trabajo.

Revisión de la bibliografía a utilizar.

Se tendrán reuniones periódicas con el asesor del trabajo para tratar los diferentes aspectos de la investigación como estudiar y discutir la teoría y tratar los diferentes aspectos del trabajo escrito.

Presentar mediante exposiciones los resultados.

3. Exposiciones.

Se tendrán dos exposiciones:

- Primera exposición: presentación del perfil del trabajo de investigación.
- Segunda exposición: presentación final del trabajo de investigación.

2.8. Propuesta de contenido

---

1. Preliminares

Capítulo 1:

Repaso de Probabilidad.

Martingalas.

¿De qué trata la Matemática Financiera?

Conceptos introductorios en Matemática Financiera.

Activos Libres de Riesgo.

Capítulo 2:

Modelo Binomial para la Asignación de Precios a un Paso.

Capítulo 3:

Modelo Binomial multipasos para la Asignación de Precios.

Capítulo 4:

Opciones Americanas.

Capítulo 5:

Procesos Estocásticos.

Capítulo 6:

Movimiento Browniano.

Capítulo 7:

Introducción Pragmática a las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Capítulo 8:

Cálculo de Ito y Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

3. Contenido del Marco Teórico

3.1. Repaso de probabilidad

Definición 1. Una colección F de subconjuntos de Ω se llama $\sigma - campo$ si:

1. $\emptyset \in F$
2. $\Omega \in F$
3. Si $A \in F$ entonces $A^c \in F$
4. Si $A_1,\ A_2,\ ... \in F$ entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ y $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

Ejemplo 1. Lanzamiento de una moneda dos veces

- Ω=$\{CC,\ CX,\ XC,\ XX\}$
- F=$\{$Colección de todos los subconjuntos de $\Omega\}$
- $G = \{\emptyset, \Omega, \{CC, CX\}, \{XC, XX\}\}$

Nuevamente es trivial ver que F es un σ-campo ya que F está constituido por todos los subconjuntos de Ω. Ahora veamos que G también es un σ-campo. Nótese que $\emptyset \in G$, $\Omega \in G$, el complemento de cada elemento de G está en G, por ejemplo, el complemento de $\{CC, CX\}$ es $\{XC, XX\}$ que está en G. Además las uniones e intersecciones de elementos de G están en G.

Definición 2. Una función $\mathbb{P}$ en F es una probabilidad si satisface:

1. Si $A \in F$ entonces $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
4. Si $A_1,\ A_2,\ ... \in F$ y son disjuntos dos a dos entonces $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

De esta definición se obtienen las siguientes propiedades:

1. Si $A \subset B$ entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Definición 3. Una variable aleatoria (v.a.) es una función X de Ω a $\mathbb{R}$. La variable aleatoria X es medible si $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\} \in F$ para todo real a.

Ejemplo 2. Sea X el número de caras en dos lanzamientos de una moneda. X es medible en F pero no es medible en G. Para ver esto, consideremos:

$$A_a = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\}. \text{ Este evento es igual:} \begin{cases} \Omega & a \leq 0 \\ \{CC, CX, XC\} & 0 < a \leq 1 \\ \{CC\} & 1 < a \leq 2 \\ \emptyset & a > 2 \end{cases}$$

Para ver que X es medible en F se debe mostrar que $A_a \in F$ para todo real a. Pero eso es fácil de ver ya que F es el σ-campo generado por todos los subconjuntos de Ω y por tanto $A_a \in F$ para todo real a.
Ahora, se verá que X no es medible en G, para ello basta tomar a $a = \frac{3}{2}$ y se tiene que $A_a = \{CC\} \notin G$, por tanto existe un real a tal que $A_a \notin G$ y así X no es medible en G.

Definición 4. Una variable aleatoria discreta es una donde $\mathbb{P}(\omega : X(\omega) = a) = 0$ excepto para un número finito de valores. X es medible en el σ-campo F si $(X = a) \in F$ para todo real a.

Definición 5. La media de una variable aleatoria X está dada por: $\mathbb{E}[X] = \sum_x x\mathbb{P}(X = x)$.
Una definición alternativa de la media está dada por: $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$
De esta definición se sigue la siguiente propiedad:
$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Definición 6. Dos eventos A y B son independientes si: $\mathbb{P}(A \bigcap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$. Dos variables X e Y son independientes si: $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(X \in B)$ para todo A y B subconjuntos de los reales. La ampliación de la definición de independencia para el caso de más de dos eventos $A_1, \dots, A_n$ está dada por: $\mathbb{P}(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \dots \bigcap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2) \dots \mathbb{P}(A_n)$.

Si un evento es independiente de si mismo se tiene:
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \bigcap A) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(A) = (\mathbb{P}(A))^2$
Si llamamos a $x = \mathbb{P}(A)$entonces se tendría: $x = x^2$, esto solo se da si $x = 0$ ó $x = 1$.
Por tanto si un evento es independiente de si mismo su probabilidad tiene que ser 0 ó 1.

Teorema 1. Si dos variables aleatorias X e Y son independientes entonces $\mathbb{E}(X\,Y) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

Definición 7. La varianza de una variable aleatoria es: $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\,X)^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}(X)^2$.
De esta definición se tiene que:
$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$ si X e Y son variables independientes.

Definición 8. La probabilidad de A dado B está dada por $P(A \mid B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$ donde $P(B) \neq 0$. La media condicional de X dado B está dada por $\mathbb{E}[X \mid B] = \frac{\mathbb{E}[X;B]}{P(B)}$.

La notación de $\mathbb{E}[X;B]$ significa $\mathbb{E}[X\,1_B]$ donde $1_B(\omega)$ es 1 si $\omega \in B$ y 0 en otro caso.
Otra forma de representar a $\mathbb{E}[X;B]$ es

$$\mathbb{E}[X;B] = \sum_{\omega \in B} X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Definición 9. Supongamos que existe un número finito (o numerable) de conjuntos $B_1, B_2, \dots$ Todos con probabilidad positiva, de tal manera que son disjuntos dos a dos, Ω es igual a la unión de los B_i, y G es el σ-campo que se obtiene al tomar todas las uniones finitas o numerables de los B_i. Entonces la probabilidad condicional de A dado G es:

$$\mathbb{P}(A \mid G) = \sum_i \frac{\mathbb{P}(A \bigcap B_i)}{\mathbb{P}(B_i)} 1_{B_i}(\omega).$$

Definición 10. Dada una variable aleatoria X se define

$$\mathbb{E}[X \mid G] = \sum_i \frac{\mathbb{E}[X; B_i]}{\mathbb{P}(B_i)} 1_{B_i}.$$

Proposición 1. Se tiene que

1. Si $X_1 \geq X_2$ entonces $\mathbb{E}[X_1 \mid G] \geq \mathbb{E}[X_2 \mid G]$.
2. $\mathbb{E}[aX_1 + bX_2 \mid G] = a\,\mathbb{E}[X_1 \mid G] + b\,\mathbb{E}[X_2 \mid G]$.
3. Si X es medible en G entonces $\mathbb{E}[X \mid G] = X$.
4. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid G]] = \mathbb{E}X$.
5. Si X es independiente de G entonces $\mathbb{E}[X \mid G] = \mathbb{E}X$.

3.1.1. Variables Aleatorias Continuas

Dada cualquier variable aleatoria $X \geq 0$, podemos aproximar ésta por variables aleatorias X_n que son discretas. Se tiene

$$X_n = \sum_{i=0}^{n2^n} \frac{i}{2^n} 1_{i/2^n \leq X < (i+1)/2^n}.$$

En palabras, si $X(\omega)$ se encuentra entre 0 y n, dejamos que $X_n(\omega)$ sea el valor más cercano a $i/2^n$ que es menor o igual a $X(\omega)$. Para ω donde $X(\omega) > n + 2^{-n}$ se establece $X_n(\omega) = 0$. Ciertamente los X_n son discretos y aproximados a X. De hecho, en el conjunto donde $X \leq n$, se tiene que $|X(\omega) - X_n(\omega)| \leq 2^{-n}$.

Para X razonable se definirá $\mathbb{E}X = \text{lím}\,\mathbb{E}X_n$. Dado que el X_n aumenta con n, el límite debe existir, aunque podría ser $+\infty$. Si X no es necesariamente no negativa se define $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-$, siempre que al menos una de $\mathbb{E}X^+$ y $\mathbb{E}X^-$ sea finita. Aquí $X^+ = \text{máx}(X, 0)$ y $X^- = \text{máx}(-X, 0)$.

Recordemos que X tiene una densidad f_X si

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx,$$

para todo a y b. En este caso

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx,$$

siempre que $\mathbb{E}X = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x)\,dx < \infty$. Con la definición dada de X_n se tiene

$$\mathbb{P}(X_n = {}^{i}\!/_{2^n}) = \mathbb{P}\left(X \in \left[{}^{i}\!/_{2^n}, {}^{(i+1)}\!/_{2^n}\right]\right) = \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} f_X(x)\,dx.$$

Entonces

$$\mathbb{E}X_n = \sum_i \frac{i}{2^n}\mathbb{P}(X_n = {}^{i}\!/_{2^n}) = \sum_i \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} \frac{i}{2^n} f_X(x)\,dx.$$

Ya que x difiere de $\frac{i}{2^n}$ a lo sumo en $\frac{1}{2^n}$ con $x \in \left[{}^{i}\!/_{2^n}, {}^{(i+1)}\!/_{2^n}\right]$, esto tiende a $\int x f_X(x)\,dx$, al menos que el aporte a la integral para $|x| \geq n$ no va a 0 cuando $n \to \infty$.

Siempre que $\int x\,|x|\,f(x)\,dx < \infty$, se puede demostrar que esta contribución en efecto va a 0.

Supongamos que para cada n el $\sigma -$ campo G_n es finitamente generado. Esto significa que G_n es generado por un número finito de conjuntos disjuntos $B_{n1}, ..., B_{nm_n}$. Entonces para cualquier n, el número de B_{ni} es finito pero arbitrario, los B_{ni} son disjuntos y su unión es Ω. Supongamos también que $G_1 \subset G_2 \subset ....$ Ahora la $\displaystyle\bigcup_n G_n$ no será generada por un σ-campo, pero se supondrá que G es el σ-campo mas pequeño que contiene a todos los G_n. Finalmente se define $\mathbb{P}(A \mid G) = \lim \mathbb{P}(A \mid G_n)$.

Una vez que se tiene una definición de probabilidad condicional, se define la media condicional por lo que se espera. Si X es discreta, puede escribirse a X como $\displaystyle\sum_j a_j 1_{A_j}$ y se define

$$\mathbb{E}[X \mid G] = \sum_j a_j \mathbb{P}(A_j \mid G).$$

3.2. Martingalas

Para introducir este tema veamos lo siguiente.

Pedro y Pablo juegan un juego llamado “caras o coronas”. En este juego, consideremos que una moneda justa es lanzada una secuencia de veces, supongamos que es lanzada 40 veces. Si al lanzar la moneda se obtiene una cara entonces Pedro obtiene un centavo de Pablo y si se obtiene una corona Pedro le da un centavo a Pablo.

Sean S_1, $S_2, ..., S_n$ la fortuna de Pedro acumulada en el juego de "caras o coronas". Entonces

$$\mathbb{E}\left(S_n \mid S_{n-1}=a, ..., S_1=r\right)=\frac{1}{2}(a+1)+\frac{1}{2}(a-1)=a.$$

Notemos que la fortuna esperada por Pedro después del siguiente juego es equivalente a su presente fortuna. Cuando esto ocurre, se tiene que el juego es justo. Un juego justo es también llamado una martingala. Si la moneda no es justa y se obtienen caras con probabilidad p y coronas con probabilidad $q=1-p$, entonces

$$\mathbb{E}\left(S_n \mid S_{n-1}=a, ..., S_1=r\right)=p(a+1)+q(a-1)=a+p-q.$$

Entonces, si $p<q$ el juego no es favorable y si $p>q$ este juego es favorable.

Ahora suponga que tenemos una secuencia de $\sigma-$campos $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset ...$ Un ejemplo sería lanzar repetidamente una moneda y que F_k sea el conjunto determinado por los primeros k lanzamientos. Otro ejemplo es que sean $X_1, X_2, ...$ una secuencia de variables aleatorias y F_k el σ-campo generado por $X_1, ..., X_k$, el más pequeño σ-campo con respecto al cual $X_1, ..., X_k$ son medibles.

Definición 11. Sea A una variable aleatoria entonces X es integrable si $\mathbb{E}|X|<\infty$. Sea F_n una sucesión de σ-campos entonces una sucesión de variables aleatorias X_n es adaptable si X_n es medible en F_n para todo n.

Definición 12. Una martingala M_n es una sucesión de variables aleatorias tales que:

1. M_n es integrable para todo n.
2. M_n es adaptable a F_n.
3. Para todo n se tiene que:
$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid F_n\right]=M_n$$

Usualmente 1) y 2) son fáciles de probar y 3) es la propiedad de mayor importancia. Si se tienen las propiedades 1) y 2) pero en lugar de la propiedad 3) tenemos:

3') Para todo n

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid F_n\right] \geq M_n$$

Entonces se dice que M_n es una submartingala . Y si se cumplen las propiedades 1) y 2) pero en lugar de la propiedad 3) se tiene:

3") Para todo n

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid F_n\right] \leq M_n$$

Entonces se dice que M_n es una supermartingala.

Las submartingalas tienden a aumentar mientras que las supermartingalas tienden a disminuir. La nomenclatura puede parecer que va por el camino equivocado. Doob define estos terminos por analogía con las nociones de funciones subarmónicas y superarmónicas en análisis.

Se debe tener en cuenta que la definición de martingala depende de los σ-campos. Cuando sea necesario para aclarar se puede decir que (M_n, F_n) es una martingala. Para definir la media condicional, se necesita de una probabilidad, por lo que una martingala depende también de la probabilidad.

Cuando se necesite se dirá que M_n es una martingala con respecto a la probabilidad $\mathbb{P}$.

Se verá que las martingalas son muy importantes en Matemática Financiera. Por ejemplo, la seguridad de precios y la riqueza de alguien resultan ser martingalas.

Ejemplo 3. Sean X_1, $X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con media igual cero. (Decir que $\mathbb{E}X_i = 0$ presupone que $\mathbb{E}\left|X_i\right|$ es finita). Consideremos $F_n = \sigma\left(X_1, \ldots, X_n\right)$ el σ-campo generado por $X_1, \ldots, X_n$. Sea $M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ una martingala.

La propiedad 2) de la definición (12) es fácil de probar y también la propiedad 1) ya que se sabe que $\mathbb{E}\left|M_n\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_i\right|$ entonces

$$\mathbb{E}\left|M_n\right| = \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_i\right|,$$

donde cada $\mathbb{E}\left|X_i\right|$ es finita. Como la suma finita de valores finitos es finita entonces $\mathbb{E}\left|M_n\right| < \infty$.

Ahora se probará la propiedad 3).

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid F_n\right] = X_1 + ... + X_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid F_n\right] = M_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = M_n.$$

Usando la independencia.

Ejemplo 4. Supongamos que en el ejemplo anterior los X_k tienen varianza uno y sea $M_n = S_n^2 - n$, donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Nuevamente 2) de la definición (12) es fácil de probar.

Se probará la propiedad 1):

Como $M_n = S_n^2 - n$ entonces $\mathbb{E}M_n = \mathbb{E}S_n^2 - \mathbb{E}n$. Primero se calculará $\mathbb{E}S_n^2$.

$$\mathbb{E}S_n^2 = \mathbb{E}\left[\left(X_1 + ... + X_n\right)^2\right],$$

$$\mathbb{E}S_n^2 \leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \left|X_i^2\right| + \sum_{i \neq j}^{n} \left|X_i X_j\right|\right],$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \left|X_i^2\right| + \sum_{i \neq j}^{n} \left|X_i X_j\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} 1\right] + \sum_{i \neq j}^{n} \mathbb{E}\left|X_i X_j\right|,$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} 1\right] + \sum_{i \neq j}^{n} \mathbb{E}\left|X_i X_j\right| \leq n + \sum_{i \neq j}^{n} \mathbb{E}\left|X_i\right| \mathbb{E}\left|X_j\right|,$$

pero sabemos que $\mathbb{E}\left|X_i\right|$ y $\mathbb{E}\left|X_j\right|$ son iguales a 0 entonces se tiene

$$\mathbb{E}S_n^2 \leq n,$$

entonces

$$\mathbb{E}M_n \leq n - n = 0,$$

entonces $\mathbb{E}M_n < \infty$.

Por la tanto M_n es integrable.

Ahora se probará 3).

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid F_n\right] = \mathbb{E}\left[S_n^2 + 2X_{n+1}S_n + X_{n+1}^2 \mid F_n\right] - (n+1).$$

Se tiene que $\mathbb{E}\left[S_n^2 \mid F_n\right] = S_n^2$ ya que S_n es medible en F_n.

Ahora

$$\mathbb{E}\left[2X_{n+1}S_n \mid F_n\right] = 2S_n\,\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid F_n\right] = 2S_n\,\mathbb{E}X_{n+1} = 0$$

y $\mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \mid F_n\right] = \mathbb{E}X_{n+1}^2 = 1$. Sustituyendo se tiene $\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid F_n\right] = M_n$. Por lo que M_n así definida es una martingala.

Ejemplo 5. Supongamos que Pedro comienza con un dolar y está lanzando una moneda al aire de forma independiente. Si cae cara obtiene el doble de su fortuna y si cae corona va a la quiebra. Esto es doble o nada. Sea M_n su fortuna en el tiempo n. Sean X_1, X_2, ... una sucesión de variables aleatorias independientes tales que son iguales a dos con probabilidad 1/2 y 0 con la misma probabilidad. Entonces $M_n = X_1 ... X_n$. Sea $F_n = \sigma\left(X_1, ..., X_n\right)$ el σ-campo generado por $X_1, ..., X_n$. Notar que $0 \leq M_n \leq 2^n$.

Veamos que M_n es una martingala.

La propiedad 2) de la definición (12) se prueba fácilmente y la primera propiedad se prueba a continuación.

$$\mathbb{E}\left|M_n\right| = \mathbb{E}\left|X_1 ... X_n\right|$$

$$\mathbb{E}\left|X_1 ... X_n\right| = \mathbb{E}\left|X_1\right|\mathbb{E}\left|X_2\right| ... \mathbb{E}\left|X_n\right|.$$

Pero sabemos que $\mathbb{E}\left|X_i\right| < \infty$ para todo $i = 1, ..., n$ entonces

$$\mathbb{E}\,|M_n| < \infty.$$

Por tanto M_n es integrable.

La tercera propiedad se cumple ya que $\mathbb{E}\,[M_{n+1} \mid F_n] = M_n\,\mathbb{E}\,[X_{n+1} \mid F_n] = M_n\,\mathbb{E}X_{n+1} = M_n$ pues los X_i son independientes. Por tanto se tiene que M_n es una martingala.

Ahora hay que notar que $|\mathbb{E}\,[X \mid F]| \leq \mathbb{E}\,[|X| \mid F]$. Para ver esto hay que notar que $-|X| \leq X \leq |X|$, de donde se obtiene que $-\mathbb{E}\,[|X| \mid F] \leq \mathbb{E}\,[X \mid F] \leq \mathbb{E}\,[|X| \mid F]$ con $\mathbb{E}\,[|X| \mid F]$ no negativa y por tanto se obtiene lo deseado.

El cuarto y último ejemplo sobre martingala es utilizado muy a menudo por lo que se declara como una proposición.

Proposición 2. Sean $F_1, F_2, ...$ y sea X una variable aleatoria con $\mathbb{E}\,|X| < \infty$. Consideremos $M_n = \mathbb{E}\,[X \mid F_n]$ entonces M_n es una martingala.

Demostración. Veamos que M_n es una martingala.
La primera propiedad de la definición de martingala se cumple ya que $\mathbb{E}\,|M_n| = \mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,[|X| \mid F_n]] = \mathbb{E}\,|X| < \infty$. La segunda propiedad se cumple trivialmente y finalmente la tercera propiedad se cumple ya que $\mathbb{E}\,[M_{n+1} \mid F_n] = \mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,[X \mid F_{n+1}] \mid F_n] = \mathbb{E}\,[X \mid F_n] = M_n$.

□

3.3. ¿De qué trata la Matemática Financiera?

Matemática financiera, también conocida como las finanzas cuantitativas, es un campo de las matemáticas aplicadas, preocupado por los mercados financieros. Generalmente, matemática financiera derivará y extenderá los modelos matemáticos o numéricos sin establecer necesariamente un vínculo con la teoría financiera, tomando los precios de mercado observados como entrada. Se requiere coherencia matemática, no compatibilidad con la teoría económica. Así, por ejemplo, mientras que un economista financiero podría estudiar las razones estructurales por las que una empresa puede tener un cierto valor de la acción, un matemático financiero pondrá el precio de la acción como algo dado, y el intento de utilizar el cálculo estocástico para obtener el valor correspondiente de los derivados de la acción. El teorema fundamental del precio libre de arbitraje es uno de los teoremas fundamentales de matemática financiera, mientras que la ecuación de Black-Scholes y la fórmula se encuentran entre los principales resultados.

Matemática financiera también se superpone en gran medida con los campos de las finanzas computacionales e ingeniería financiera. Este último se centra en las aplicaciones y el modelado, a menudo con la ayuda de modelos estocásticos de activos, mientras que el primero se centra, además de análisis, en la construcción de herramientas de aplicación de los modelos. En general, existen dos ramas separadas de financiación que requieren avanzadas técnicas cuantitativas: derivados de fijación de precios, por una parte, y de riesgos y gestión de la cartera por otra.

3.4. Conceptos Básicos y Suposiciones

A manera de introducción restringimos la escala de tiempo de sólo dos instantes: hoy, $t = 0$, y en algún momento futuro, dentro de un año, $t = 1$.

El precio de una acción en el tiempo t se denotará por $S(t)$. El precio actual de $S(0)$ es conocido por todos los inversionistas, pero el futuro precio $S(1)$ sigue siendo incierto: puede subir y bajar. La diferencia $S(1) - S(0)$ como una fracción del valor inicial representa la denominada tasa de subir o bajar

$$K_S = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)},$$

que también es incierto.

La posición libre de riesgo puede describirse como la cantidad que tuvo lugar en un banco. Como alternativa a mantener el dinero en un banco, los inversores pueden optar por invertir en bonos. El precio de un bono en el tiempo t se denota por $A(t)$. El rendimiento de los bonos se define de forma similar que en la acción,

$$K_A = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)}.$$

A continuación se especifican una serie de supuestos, el propósito de los cuales es encontrar un compromiso entre la complejidad del mundo real y las limitaciones y simplificaciones de un modelo matemático, impuesta con el fin de hacer que sea manejable. Los supuestos reflejan nuestra actual posición en este compromiso y se modificará en el futuro.

Supuesto 1 (Aleatoriedad)

El precio futuro de las acciones $S\left(1\right)$ es una variable aleatoria con al menos dos diferentes valores. El precio futuro $A\left(1\right)$ de la seguridad libre de riesgos es un número conocido.

Supuesto 2 (Positividad de precios)

Todos los precios de las acciones y los bonos son estrictamente positivos,

$$A\left(t\right) > 0 \;\; y \;\; S\left(t\right) > 0$$

para $t = 0, 1$.

La riqueza total de un inversionista en el instante de tiempo $t = 0, 1$ es

$$V\left(t\right) = xS\left(t\right) + yA\left(t\right).$$

El par $\left(x, y\right)$ es llamado portafolio o cartera , $V\left(t\right)$ es el valor de esta cartera, es decir, la riqueza del inversionista en el tiempo t.

Los saltos de precios de los activos entre los tiempos 0 y aumento de 1 dan un cambio de el valor de la cartera:

$$V\left(1\right) - V\left(0\right) = x\left(S\left(1\right) - S\left(0\right)\right) + y\left(A\left(1\right) - A\left(0\right)\right).$$

Esta diferencia (que puede ser positiva, cero o negativa) como una fracción del valor inicial representa el rendimiento de la cartera,

$$K_V = \frac{V\left(1\right) - V\left(0\right)}{V\left(0\right)}.$$

3.4.1. Un modelo de mercado simple

Los rendimientos de los bonos o acciones son casos particulares de la rentabilidad de una cartera (con $x = 0$ o $y = 0$, respectivamente).

Ejemplo 6. Sea $A(0) = 100$ y $A(1) = 110$ dólares.

A continuación, el rendimiento de una inversión en bonos será

$$K_A = 0.10,$$

es decir, 10 %. También, sea $S(0) = 50$ dólares y supongamos que la variable aleatoria $S(1)$ puede tomar dos valores,

- $S(1) = 52$ con probabilidad p.
- $S(1) = 48$ con probabilidad $1 - p$.

para un determinado $0 < p < 1$. El rendimiento de las acciones será entonces

$$K_S = \begin{cases} 0.04 \text{ si la acción sube,} \\ -0.04 \text{ si la acción baja,} \end{cases}$$

esto es $4\,\%$ ó $-4\,\%$.

Es matemáticamente conveniente y no demasiado lejos de la realidad permitir arbitraje de números reales, incluidos los negativos y fracciones, para representar las posiciones x e y en una cartera. Esto se refleja en la siguiente suposición, que no impone ninguna restricción en cuanto a las posiciones de negociación con que se trate.

Supuesto 3 (Divisibilidad, liquidez y las ventas cortas)

Un inversionista puede tener cualquier número x e y de acciones y bonos, ya sea número entero o fraccionario, negativo, positivo o cero. En general,

$$x, y \in \mathbb{R}.$$

El hecho de que uno puede tener una fracción de una acción o bono se conoce como la divisibilidad. Divisibilidad casi perfecta se logra en las relaciones del mundo real siempre que el volumen de transacciones es grande en comparación con los precios unitarios.

Si el número de valores de un tipo particular que tuvo lugar en una cartera es positivo, decimos que el inversionista tiene una posición larga. De lo contrario, decimos que una posición corta o que el activo está en corto. Una posición corta en el libre-riesgo de valores puede implicar la emisión y venta de bonos, pero en la práctica el mismo efecto financiero se consigue más fácilmente por los préstamos en efectivo, siendo la tasa de interés determinada por los precios de los bonos. Pagar el préstamo con interés se conoce como cerrar la posición corta. Una posición corta en la acción puede ser realizada por venta corta. Esto significa que el inversionista toma prestadas las acciones, las vende, y utiliza el procedente para hacer alguna otra inversión. El propietario de las acciones mantiene todos los derechos de la misma.

Supuesto 4 (Solvencia)

La riqueza de un inversor debe ser no negativa en todo momento,

$$V(t) \geq 0 \text{ para } t = 0, 1$$

es decir, en Matemática Financiera todo se vale menos perder dinero.

Una cartera o portafolio que satisface esta condición se llama admisible.

En el mundo real el número de posibles precios diferentes es finito porque se expresen en un número determinado de decimales y porque sólo hay una cierta cantidad final de dinero en todo el mundo, que suministra un límite superior para todos los precios.

Supuesto 5

El precio futuro $S(1)$ de una parte de la acción es una variable aleatoria tomando sólo un número finito de valores.

3.4.2. Principio de No-Arbitraje

Ahora vamos a declarar la suposición más fundamental acerca del mercado. En breve, vamos a suponer que el mercado no permite beneficios libres de riesgo sin inversión inicial. Por ejemplo, una posibilidad de ganancias sin riesgo, sin inversión inicial puede surgir cuando los participantes del mercado se equivocan. Supongamos que un comerciante en Nueva York ofrece comprar libras esterlinas a una tasa $d_A = 1.62$ dólares por libra, mientras el distribuidor B en Londres los vende a un tasa $d_B = 1.60$ dólares a una libra. Si este fuera el caso, en efecto, se tendría entrega de dinero gratis. Un inversor sin capital inicial podría lograr un beneficio de $d_A - d_B = 0.02$ dólares por cada libra cotizada tomando simultáneamente una posición corta con el distribuidor B y una posición larga con el comerciante A.

La demanda por su generoso servicio obligaría rápidamente a los distribuidores a ajustar el tipo de cambio por lo que esta oportunidad rentable desaparecería.

Supuesto 6 (Principio de no arbitraje)

No hay portafolio admisible con el valor inicial $V(0) = 0$ tal que $V(1) > 0$ con una probabilidad distinta de cero.

En otras palabras, si el valor inicial de una cartera admisible es cero, $V(0) = 0$, entonces $V(1) = 0$ con probabilidad 1.

Esto significa que ningún inversor puede obtener un beneficio sin riesgo y sin dotación inicial. Si una cartera viola este principio, diríamos que una oportunidad de arbitraje estaba disponible.

Rara vez existen oportunidades de arbitraje en la práctica, y cuando lo hacen, la ganancias son típicamente extremadamente pequeñas en comparación con el volumen de las transacciones, haciéndolas más allá del alcance de los pequeños inversores.

La supresión del arbitraje en el modelo matemático está lo suficientemente cerca de la realidad y resulta ser el supuesto más importante y fructífero. Argumentos basados en el principio de no-arbitraje son las principales herramientas de las matemáticas financieras.

3.4.3. Contratos Forward

Un contrato Forward (plazo) es un acuerdo para comprar o vender un activo con riesgo en un determinado momento en el futuro, conocida como la fecha de entrega, por un precio fijo F fijado en el momento presente, llamado el precio Forward. Si un inversionista se compromete a vender el activo, se habla de un contrato a plazo corto.

Ejemplo 7. Supongamos que el precio a plazo de un activo es de 80 dólares. Si el precio de mercado del bien resulta siendo 84 dólares en la fecha de entrega, el titular del contrato forward puede comprar el activo por 80 dólares y lo puede vender de inmediato por 84 dólares y cobrar la diferencia de 4 dólares.

En general, la parte que tiene un contrato a plazo con fecha de entrega 1 se beneficiará si el precio futuro de los activos $S(1)$ se eleva por encima del precio a plazo F. Si el precio de activos $S(1)$ cae por debajo del precio a plazo F, entonces el titular del contrato a plazo sufrirá una pérdida.

3.4.4. Opciones de Compra y Venta

Sea $A(0) = 100$, $A(1) = 110$, $S(0) = 100$ dólares y

$$S(1) = \begin{cases} 120 \text{ con probabilidad } p \\ 80 \text{ con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

donde $0 < p < 1$.

Una opción de compra con precio de ejercicio \$100 y el tiempo de ejercicio 1 es un contrato que da al que la posee el derecho (pero no la obligación) de comprar una participación de acciones por \$100 en el tiempo 1.

Si el precio de la acción cae por debajo del precio de ejercicio, la opción no tendrá ningún valor. No tendría mucho sentido la compra de una participación por \$100 si su precio de mercado es \$80 y nadie querría ejercer el derecho. De lo contrario, si el precio de la acción se eleva a \$120, que está por encima del precio de ejercicio, la opción traerá un beneficio de \$20 a su titular, que tiene derecho a comprar una acción por \$100 en el tiempo 1 y puede venderla inmediatamente en el precio de mercado de \$120. Esto se conoce como el ejercicio de la opción. La opción sólo puede ejercerse, así simplemente recogiendo la diferencia de \$20 entre el precio de mercado de las acciones y el precio de ejercicio. En la práctica, este último es a menudo el método preferido porque la acción no necesita cambiar de manos.

Como resultado, la recompensa de la opción de compra, es decir, su valor en el momento 1 es una variable aleatoria

$$C\left(1\right)=\begin{cases} 20 \text{ si la acción sube} \\ 0 \text{ si la acción baja} \end{cases}$$

Mientras tanto, $C\left(0\right)$ denotará el valor de la opción en el tiempo 0, es decir, el precio a los que la opción puede ser comprada o vendida en la actualidad.

3.5. Activos libres de riesgo

3.5.1. Valor temporal del dinero y el interés simple

Es un hecho de la vida que de \$100 a ser recibidos después de un año valen menos que la misma cantidad hoy en día. La razón principal es que el dinero debido en el futuro o encerrado en una cuenta a plazo fijo no se puede gastar de inmediato. Por ello era de esperar a ser compensado por el consumo postergado. Además, los precios podrían subir en el ínterin y la cantidad no tendrá el mismo poder adquisitivo que tendría en la actualidad. Finalmente, siempre existe un riesgo, incluso uno insignificante, que nunca se recibirá el dinero. Siempre que un pago futuro es incierto, hasta cierto punto, su valor actual se reducirá para compensar el riesgo.

Supongamos ahora que una cantidad se abonará en una cuenta bancaria, donde se va a ganar interés. El valor futuro de esta inversión consiste en el depósito inicial, llamado principal y denotado por P, más todos los intereses devengados ya que el dinero era depositado en la cuenta. Para empezar, vamos a considerar el caso en que el interés es atraído sólo por el principal, que se mantiene sin cambios durante el período de inversión. Después de un año el interés ganado será rP, donde $r > 0$ es la tasa de interés. El valor de la inversión se convertirá así en $V(1) = P + rP = (1 + r)P$. Después de dos años, la inversión crecerá a $V(2) = (1 + 2r)P$. Considere una fracción de un año. El interés se calcula normalmente a diario: el interés ganado en un día será $\frac{1}{365}rP$. Después de n días el interés será $\frac{n}{365}rP$ y el valor total de la inversión se convertirá en $V\left(\frac{n}{365}\right) = (1 + \frac{n}{365}r)P$. Esto motiva la siguiente regla de interés simple : El valor de la inversión en tiempo t , denotada por $V(t)$ viene dada por

$$V(t) = (1 + tr)P,$$

donde el tiempo t, expresado en años, puede ser un número real no negativo arbitrario. En particular, tenemos la igualdad obvia $V(0) = P$. El número $1 + rt$ se llama el factor de crecimiento . Aquí asumimos que la tasa de interés r es constante. Si el principal P se invierte en el momento s, en lugar de en el tiempo 0, entonces el valor en el tiempo $t \geq s$ será

$$V(t) = (1 + (t - s)\, r)P \tag{3.1}$$

Ejemplo 8. Considere la posibilidad de un depósito de \$150, invertido durante 20 días y atrayendo el interés simple a una tasa del 8 %. Esto le da a $t = \frac{20}{365}$ y $r = 0.08$. Después de 20 días, el depósito crecerá a $V\left(\frac{20}{365}\right) = \left(1 + \frac{20}{365}0.08\right) 150 \approx 150.66$.

El retorno de una inversión que comienza en el momento s y que termina en el tiempo t se denota por $K(s, t)$. Está dado por

$$K(s, t) = \frac{V(t) - V(s)}{V(s)}. \tag{3.2}$$

En el caso de interés simple

$$K(s, t) = (t - s)\, r,$$

que sigue claramente a partir de (3.1). En particular, la tasa de interés es igual a la rentabilidad en un año, $K(0, 1) = r$.

3.5.2. La capitalización periódica

Una vez más, supongamos que una cantidad P se deposita en una cuenta bancaria, atrayendo interés a una constantrate $r > 0$. Sin embargo, en contraste con el caso de interés simple, se supone que los intereses devengados ahora se añadirán a el principal periódicamente, por ejemplo, anualmente, semestralmente, trimestral, mensual, o incluso sobre una base diaria. Posteriormente, el interés será atraído no sólo por el depósito original, sino también por todos los intereses devengados hasta la fecha. En esta situación, consideramos hablar de la capitalización discreta o periódica.

Ejemplo 9. En el caso de capitalización mensual el primer pago de intereses de $\frac{r}{12}P$ será debido después de un mes, lo que aumenta el principal para $\left(1+\frac{r}{12}\right)P$, todo lo cual atraerá el interés en el futuro. El próximo pago de intereses, debido a los dos meses, por lo tanto será $\frac{r}{12}\left(1+\frac{r}{12}\right)P$ y el capital se convertirá en $\left(1+\frac{r}{12}\right)^2 P$. Después de un año se convertirá en $\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} P$, después de n meses será $\left(1+\frac{r}{12}\right)^n P$ y después de t años $\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t} P$. La última fórmula admite t igual a un número entero de meses, es decir, un múltiplo de $\frac{1}{12}$.

En general, si los pagos de interés anual m se hacen por año, el tiempo entre dos pagos consecutivos medidos en años será de $\frac{1}{m}$, el primer pago será de interés debido al tiempo de $\frac{1}{m}$. Cada pago de interés aumentará el principal en un factor de $1+\frac{r}{m}$. Teniendo en cuenta que la tasa de interés r se mantiene sin cambios, después de t años el valor futuro de un principal P inicial se convertirá en

$$V(t) = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm} P, \tag{3.3}$$

ya que habrá tm pagos de intereses durante este periodo. En esta fórmula t debe ser un múltiplo entero del período de $\frac{1}{m}$. El número $\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}$ es el factor de crecimiento.

Proposición 3. El valor futuro $V(t)$ aumenta si uno cualquiera de los parámetros m, t, R o P aumenta, las otras permanecen inalteradas.

3.5.3. Corrientes de pago

Una anualidad es una secuencia de un número finito de pagos de una cantidad fija debida a intervalos iguales de tiempo. Supongamos que los pagos de una cantidad C se efectuarán una vez al año durante n años. Suponiendo que se aplica interés compuesto anual, encontraremos el valor presente de un flujo de tales pagos. Calculamos los valores actuales de todos los pagos y sumando después obtenemos

$$\frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^n}.$$

A veces es conveniente introducir el siguiente fragmento aparentemente complicado de notación:

$$PA\left(r,n\right)=\frac{1}{1+r}+\frac{1}{\left(1+r\right)^{2}}+\frac{1}{\left(1+r\right)^{3}}+\cdots+\frac{1}{\left(1+r\right)^{n}}.$$

Este número se llama el factor del valor presente de una anualidad. Nos permite expresar el valor presente de una anualidad de una forma concisa:

$$PA\left(r,n\right)\times C.$$

La expresión $PA\left(r,n\right)$ puede ser simplificada utilizando la fórmula
$a+qa+q^{2}a+\cdots+q^{n-1}a=a\frac{1-q^{n}}{1-q}$.
En nuestro caso $a=\frac{1}{1+r}$ y $q=\frac{1}{1+r}$, entonces

$$PA\left(r,n\right)=\frac{1-\left(1+r\right)^{-n}}{r}.$$

Observación. Tenga en cuenta que en un depósito bancario inicial de

$$P=PA\left(r,n\right)\times C=\frac{C}{1+r}+\frac{C}{\left(1+r\right)^{2}}+\frac{C}{\left(1+r\right)^{3}}+\cdots+\frac{C}{\left(1+r\right)^{n}},$$

la atracción de intereses compuestos a una tasa r anual produciría un flujo de n pagos anuales de C cada uno. Un depósito de $C\left(1+r\right)^{-1}$ crecería a C después de un año, que es justo lo que se necesita para cubrir el primer pago de la anualidad. Un depósito de $C\left(1+r\right)^{-2}$ se convertiría en C después de dos años para cubrir el segundo pago, y así sucesivamente. Por último, un depósito de $C\left(1+r\right)^{-n}$ entregaría el último pago de C debido después de n años.

Ejemplo 10. Considere la posibilidad de un préstamo de $\$1,000$ para ser pagado en 5 cuotas iguales debida en intervalos anuales. Las cuotas incluyen tanto los intereses a pagar cada año calculado en el 15 % del saldo pendiente actual y el pago de una fracción del préstamo. Un préstamo de este tipo se llama un préstamo amortizado. El monto de cada plazo se puede calcular como

$$\frac{1000}{PA\left(15\,\%,5\right)}\cong 298.32.$$

Esto es debido a que el préstamo es equivalente a una anualidad desde el punto de vista del prestamista.

3.5.4. Compuesto continuo

La fórmula (3.3) para el valor futuro al tiempo t de un director P atrayendo el interés a una tasa $r > 0$ compuestas m veces de un año se puede escribir como

$$V(t) = \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{tr} P.$$

En el límite cuando $m \to \infty$, se obtiene

$$V(t) = e^{tr} P,$$

donde

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x},$$

es la base de los logaritmos naturales. Esto se conoce como la composición continua. El factor de crecimiento correspondiente es e^{tr}.

Proposición 4. Capitalización continua produce un mayor valor futuro de capitalización periódica con cualquier frecuencia m, dado el mismo principal inicial P y tasa de interés r.

El valor presente bajo capitalización continua está, obviamente, dada por

$$V(0) = V(t)\, e^{-tr}.$$

En este caso el factor de descuento es e^{-tr}. Dado el valor terminal $V(T)$, tenemos claramente

$$V(t) = e^{-r(T-t)} V(T).$$

Se define el retorno logarítmico como

$$k(s,t) = \ln \frac{V(t)}{V(s)}.$$

Proposición 5. El retorno logarítmico es aditivo,

$$k(s,t) + k(t,u) = k(s,u).$$

Demostración. Esto es fácil de demostrar

$$k(s,t) + k(t,u) = \ln \frac{V(t)}{V(s)} + \ln \frac{V(u)}{V(t)},$$

$$k(s,t) + k(t,u) = \ln \frac{V(t)}{V(s)} \frac{V(u)}{V(t)},$$

$$k(s,t) + k(t,u) = \ln \frac{V(u)}{V(s)} = k(s,u).$$

□

3.5.5. ¿Cómo comparar métodos Compuestos?

Supongamos que los certificados que prometen pagar 120 dólares después de un año se pueden comprar o vender ahora, o en cualquier momento durante este año, por $100. Esto es consistente con una tasa de interés constante de 20 % bajo interés compuesto anual. Si un inversionista decidió vender un certificado de medio año después de la compra, ¿qué precio tendría que ir a buscar?

Supongamos que es de $110, una primera aproximación frecuente en base a reducir a la mitad el beneficio anual de $20. Sin embargo, esto resulta ser un precio demasiado alto, lo que lleva a la siguiente estrategia de arbitraje:

- Obtención de préstamos de $1000 para comprar 10 certificados por $100 cada uno.
- Después de seis meses venden los 10 certificados por $110 cada uno y se compran 11 nuevos certificados por $100 cada uno. El saldo de estas operaciones es nulo.
- Después de seis meses más venden los 11 certificados de $110 cada uno, cambiando $1210 en total, y pagando $1200 para borrar el préstamo con intereses. El saldo de $10 sería el beneficio del arbitraje.

Definición 13. Decimos que dos métodos de composición son equivalentes si los factores de crecimiento correspondientes durante un período de un año son los mismos. Si uno de los factores de crecimiento supera la otra, entonces el método de composición correspondiente se dice que es preferible.

Definición 14. Para un método de composición dada con tasa de interés r la tasa eficaz r_e es la que da el mismo factor de crecimiento durante un período de un año bajo la capitalización anual.

En particular, en el caso de la composición periódica con frecuencia m y la tasa r, la tasa efectiva r_e satisface

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = 1 + r_e.$$

En el caso de la composición continua con tasa r

$$e^r = 1 + r_e.$$

3.5.6. Mercado de Dinero

El mercado de dinero consiste en valores libres de riesgo. Un ejemplo es un bono, que es una seguridad financiera prometiendo al titular una serie de pagos futuros garantizados. Libre de riesgo significa aquí que estos pagos se entregan con certeza. (Sin embargo, incluso en este caso el riesgo no puede evitarse por completo, ya que los precios de mercado de dichos valores pueden fluctuar de manera impredecible). Hay muchos tipos de bonos como las letras del tesoro, tesorería, hipoteca y títulos de crédito, papeles comerciales y otros con diversas disposiciones particulares relativas a la institución, duración, número de pagos, incrustado derechos y garantías que emiten.

3.5.7. Bonos Cupón Cero

El caso más simple de un bono es un bono cupón cero, lo que implica un pago único. La institución emisora (por ejemplo, un gobierno, un banco o una empresa) se compromete a intercambiar el bono por una cierta cantidad de dinero F, llamado el valor nominal, en un día dado T, llamado la fecha de vencimiento. Por lo general, la duración de la vida de un bono cupón cero es de hasta un año. En efecto, la persona o institución que compra el bono está prestando dinero a la escritora de bonos.

3.5.8. Bonos de Cupón

Bonos que prometen una secuencia de pagos se denominan bonos de cupón. Estos pagos consisten en el valor nominal debido a su vencimiento y los cupones pagados, por lo general, anualmente, semestralmente o trimestralmente, el último cupón pagadero al vencimiento. La asunción de los tipos de interés constantes nos permite calcular el precio de un bono cupón descontando todos los pagos futuros.

Ejemplo 11. Considere la posibilidad de un bono con valor nominal $F = 100$ dólares con vencimiento en cinco años, $T = 5$, con cupones de $C = 10$ dólares pagados anualmente, el último en la madurez. Esto significa un flujo de pagos de $10, 10, 10, 10, 110$ dólares al final de cada año consecutivo. Dada la tasa de capitalización continua r, digamos $112\,\%$, podemos encontrar el precio del bono:

$$V(0) = 10e^{-r} + 10e^{-2r} + 10e^{-3r} + 10e^{-4r} + 10e^{-5r} \cong 90.27$$

dólares.

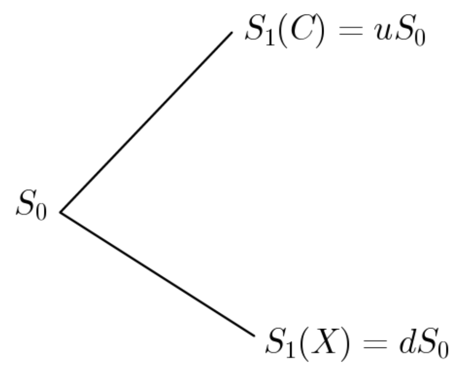
3.5.9. Cuenta de Mercado Monetario

Una inversión en el mercado de dinero se puede realizar por medio de una financiera intermediaria, por lo general un banco de inversión, que compra y vende bonos en nombre de sus clientes (lo que reduce los costos de transacción). La posición libre de riesgo de un inversionista se da por el nivel de su cuenta en el banco. Es conveniente pensar en esta cuenta como un activo negociable, que es de hecho el caso, ya que los propios bonos son negociables. Una posición larga en el mercado de dinero consiste en la compra de los activos, es decir, la inversión de dinero. Una posición corta equivale a pedir dinero prestado.

4. Modelo Binomial para la Asignación de Precios a un Paso

Se comenzará por dar el modelo más simple posible de una acción y ver como una opción Europea de compra debe valorarse en este contexto.

Para el modelo general de un período de la figura siguiente. Suponga que se tiene una única acción cuyo precio es S_0 en el tiempo cero, en el tiempo uno el precio de la acción es $S_1\left(C\right)$ o $S_1\left(X\right)$, donde C y X denotan cara y cruz respectivamente. No se puede asumir que la moneda es justa por lo que p y $q = 1 - p$ serán las probabilidades de que se obtenga cara o cruz respectivamente.



Introducimos dos números positivos

$$u = \frac{S_1\left(C\right)}{S_0}, \qquad d = \frac{S_1\left(X\right)}{S_0}. \tag{4.1}$$

Con d y u dos números tales que $0 < d < 1 + r < u$. Donde d es una regla mnemotécnica para "abajo" (down en inglés) y u para "arriba" (up en inglés). Después de una unidad de tiempo el precio de la acción será uS_0 con probabilidad P o bien dS_0 con probabilidad Q, donde $P + Q = 1$. Se asumirá que $0 < P$ y $Q < 1$. En lugar de comprar acciones en la bolsa se puede depositar el dinero en un banco donde se pueden ganar intereses a una tasa r. Un dólar invertido en el mercado en el tiempo cero será $1 + r$ dólares en el tiempo uno. Alternativas al banco son los fondos del mercado monetario y los bonos; el punto clave es que estas alternativas son consideradas libres de riesgo.

Una opción de compra europea en este contexto es la opción de comprar una acción en el momento 1 al precio K. K es llamado precio de ejercicio. Si S_1 es menor que K entonces la opción es sin valor en el tiempo 1. Si S_1 es mayor que K se puede usar la opción en el tiempo 1 para comprar la acción al precio K e inmediatamente a su vez vender la acción al precio S_1 y obtener la ganancia de $S_1 - K$. Entonces el valor de la opción en el tiempo 1 es

$$V_1 = (S_1 - K)^+ ,$$

donde x^+ es $\max(x, 0)$. La pregunta principal a responder es: ¿Cuál es el valor de V_0 de la opción en el tiempo 0? En otras palabras, ¿cuánto se debe pagar por una opción de compra europea con el precio de ejercicio K?

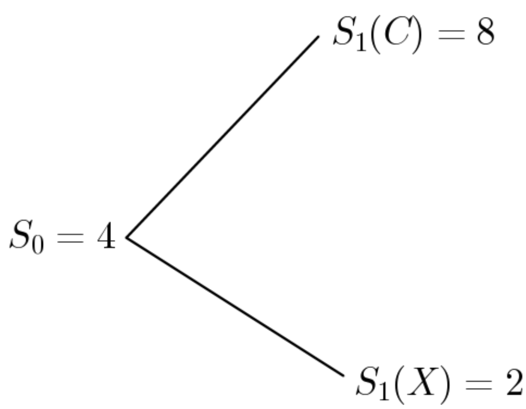
Es posible comprar un número negativo de acciones. Esto es equivalente a la venta de acciones que no se tienen y se llama venta corta. Si se vende una acción de venta corta, entonces en el tiempo 1 se debe comprar un porcentaje en cualquiera que sea el precio de mercado. Del mismo modo, también se puede comprar un número negativo de opciones, es decir, venta corta de una opción.

También se puede depositar una cantidad negativa de dinero en el banco, que es lo mismo que el endeudamiento. Supongamos que usted puede pedir prestado a la misma tasa de interés r, no es exactamente una suposición totalmente realista. Una manera de que parezca más realista es suponer que se tiene una gran cantidad de dinero en depósito y así cuando se pide prestado simplemente se retira el dinero de esa cuenta.

Estamos ante el modelo más simple posible, por lo que sólo vamos a permitir un paso a la vez: se hace una inversión y se mira de nuevo al siguiente día.

La característica esencial de un mercado eficiente es que las estrategias de comercio se pueden volver nada en algo y también esto debe tener un riesgo de pérdida. De otra forma habría arbitraje. Más específicamente se define arbitraje como la estrategia de comercio que empieza sin dinero y tiene probabilidad cero de perder dinero y tiene probabilidad positiva de hacer dinero. Un modelo matemático que permite arbitraje no puede ser utilizado para los análisis. La riqueza puede ser generada de la nada en tal modelo. Los mercados reales a veces exigen arbitraje pero esto necesariamente se escapa; tan pronto como alguien lo descubre el comercio que se da lo remueve.

Ejemplo 12. Para un caso particular del modelo binomial para la asignación de precios a un paso de la figura siguiente. Sea $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{4}$. Entonces $S_1(C) = 8$ y $S_1(X) = 2$. Suponga que el precio de ejercicio de la opción de compra europea es $K = 5$. Suponga además que se tiene una riqueza inicial $X_0 = 1.20$ y se compran $\triangle_0 = \frac{1}{2}$ acciones en el tiempo cero. Ya que la acción cuesta 4 en el tiempo cero, nosotros debemos usar una riqueza inicial $X_0 = 1.20$ y liquidar 0.80 al hacer esto. Entonces tenemos en nuestra posesión $X_0 - \triangle_0 S_0 = -0.80$ (es decir, una deuda de 0.80 de dinero). En el tiempo 1 nuestro dinero será $(1+r)(X_0 - \triangle_0 S_0) = -1$ (es decir tendremos una deuda de 1).



Por otra parte, en el tiempo uno tenemos una acción que está valorada en ya sea $\frac{1}{2}S_1(C) = 4$ ó $\frac{1}{2}S_1(X) = 1$. En particular, si los lanzamientos de la moneda resultan ser caras, el valor de nuestro portafolio de acción y el dinero en la cuenta del banco en el tiempo uno será

$$X_1(C) = \frac{1}{2}S_1(C) + (1+r)(X_0 - \triangle_0 S_0) = 3.$$

Si el lanzamiento resulta ser cruz, el valor de nuestro portafolio de acción y el dinero en la cuenta del banco en el tiempo uno será

$$X_1(X) = \frac{1}{2}S_1(X) + (1+r)(X_0 - \triangle_0 S_0) = 0.$$

En cualquier caso, el valor del portafolio es el mismo que el valor de la opción en el tiempo uno, el cual es ya sea $(S_1(C) - 5)^+ = 3$ o $(S_1(X) - 5)^+ = 0$. Nosotros hemos replicado la opción.

La riqueza inicial de 1.20 se necesitaría para poder replicar el portafolio descrito arriba. Si uno pudiera vender la opción por más de 1.20, digamos, por 1.21, el vendedor podría invertir el exceso de 0.01 en el banco y utilizar lo que falta del 1.20 para replicar la opción. En el tiempo uno, el vendedor podría pagar la opción, sin importar cuales son los resultados de los lanzamientos de la moneda y todavía tendríamos 0.0125 que resulta de la inversión de 0.01 en el banco. Esto es arbitraje porque el vendedor de la opción no necesita dinero inicialmente y sin riesgo de pérdida ha obtenido 0.0125 en el tiempo uno. Por otro lado, si uno pudiera comprar la opción arriba mencionada por menos de 1.20, digamos, por 1.19, uno podría comprar la opción y hacer el reverso de la estrategia de comercio descrita arriba. En particular, hacer la venta corta de la mitad de la acción, lo cual nos genera una ganancia de dos. Utilizar 1.19 para comprar la opción, poner 0.80 de dinero en el banco y poner en una cuenta separada 0.01. En el tiempo uno, si sale cara, se necesitaría 4 para reemplazar la mitad de la acción. La opción que se compró en el tiempo cero vale 3, y el 0.80 invertido en el banco en el tiempo cero ha subido a 1. En el tiempo uno, si cae cruz, necesitamos 1 para reemplazar la mitad de la acción. La opción no tiene valor, pero el 0.80 invertido en el banco en el tiempo cero ha crecido a 1. En cualquier caso, el comprador de la opción tiene una posición neta cero en el tiempo uno, mas el dinero en el banco por separado de un centavo que fue invertido en el tiempo cero. Una vez más, hay arbitraje.

Nosotros hemos mostrado que en el mercado con la acción, el banco y la opción hay un arbitraje a menos que en el tiempo cero el precio de la opción sea 1.20. Si en el tiempo cero el precio de la opción es 1.20, entonces no hay arbitraje.

Supongamos que el precio de una opción de compra europea es V_0 y veamos que condiciones se pueden poner sobre V_0. Se supondrá que usted comienza con V_0 dólares. Una cosa que se podría hacer es comprar una opción. Lo otro que se puede hacer es utilizar el dinero para comprar $\triangle_0$ acciones. Si $V_0 > \triangle_0 S_0$ entonces se tendrá un poco de dinero de ganancia y se puede poner en el banco. Si $V_0 < \triangle_0 S_0$ entonces no se tendrá el dinero suficiente para comprar las acciones y para compensar el déficit se debe pedir prestado dinero al banco. En cualquier caso, en este punto se tiene $V_0 - \triangle_0 S_0$ en el banco y $\triangle_0$ acciones.

Si la acción sube, en el tiempo 1 se tendrá

$$\Delta_0 u S_0 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$$

y si se cae

$$\Delta_0 d S_0 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0).$$

Aún no se ha dicho que debe ser Δ_0. Se hará eso ahora. Sea $V_1^u = (uS_0 - K)^+$ y $V_1^d =$

$(dS_0 - K)^+$. Se debe tener en cuenta que estas cantidades son deterministas, es decir, no al azar. Sea

$$\Delta_0 = \frac{V_1^u - V_1^d}{uS_0 - dS_0}$$

y también se necesitará

$$W_0 = \frac{1}{1+r}\left[\frac{1+r-d}{u-d}V_1^u + \frac{u-(1+r)}{u-d}V_1^d\right].$$

Veremos que si la acción sube y usted había comprado una acción en lugar de una opción se tendrá

$$V_1^u + (1+r)(V_0 - W_0),$$

mientras que si la acción bajó entonces se tendrá

$$V_1^d + (1+r)(V_0 - W_0).$$

Vamos a ver el primero de ellos. El segundo el similar. Tenemos que mostrar

$$\Delta_0 uS_0 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) = V_1^u + (1+r)(V_0 - W_0). \tag{4.2}$$

El lado izquierdo de (4.2) es igual a

$$\Delta_0 S_0 (u - (1+r)) + (1+r) V_0 = \frac{V_1^u - V_1^d}{u-d}(u - (1+r)) + (1+r) V_0. \tag{4.3}$$

El lado derecho de (4.2) es igual a

$$V_1^u - \left[\frac{1+r-d}{u-d}V_1^u + \frac{u-(1+r)}{u-d}V_1^d\right] + (1+r) V_0. \tag{4.4}$$

Ahora se debe comprobar que los coeficientes de V_0, V_1^u y V_1^d están bien de acuerdo con (4.3) y (4.4).

Supongamos que $V_0 > W_0$. Lo que se quiere hacer es vender una opción por V_0 dólares o usar el dinero para comprar Δ_0 acciones y poner el resto en el banco (o pedir prestado si es necesario). Si el comprador de la opción quiere ejercer la opción, se le da una acción y vendes el resto. Si él no quiere ejercer la opción, usted vende sus acciones y puede embolsarse el dinero. Recuerde que es posible tener un número negativo de las acciones. Se le han liquidado $(1+r)(V_0 - W_0)$, ya sea que la acción subió o bajó, sin ningún riesgo.

Si $V_0 < W_0$, usted simplemente hace lo contrario: vende $\triangle_0$ acciones de la venta corta, compra una opción y deposita o compensa el déficit del banco. En este momento, usted liquida $(1+r)(W_0 - V_0)$ ya sea que se tenga que la acción sube o baja.

La única manera de evitar arbitraje es si $V_0 = W_0$. En otras palabras, se ha demostrado que el precio razonable de la opción de compra europea es W_0.

Vamos a examinar este problema de precios de opciones en los contextos más complicados, y al hacerlo, se harán evidentes las fórmulas para $\triangle_0$ y W_0. Ahora se harán algunas observaciones.

Observación 1.

En un modelo binomial de un período quitamos el arbitraje ya que debemos asumir que $0 < d < 1 + r < u$.

La desigualdad $0 < d$ sigue del hecho que los precios de la acción son positivos y esto ya fue asumido. Las otras dos desigualdades se siguen de la ausencia de arbitraje y ahora lo explicamos. Si $d \geq 1 + r$, uno empezaría con una riqueza de 0 y en tiempo cero prestaría el dinero del banco para poder comprar acciones. Incluso en el peor de los casos que salga cruz en los lanzamientos la acción en el tiempo uno valdría suficiente para poder pagar el dinero que se debe al banco y con probabilidad positiva de que sea valorado estrictamente ya que $u > d \geq 1 + r$. Esto provee un arbitraje. Por otro lado si $u \leq 1 + r$ uno podría hacer una venta corta de la acción e invertir lo que resta del dinero en el mercado. Incluso en el mejor de los casos para la acción el costo de reemplazarlo en el tiempo uno será menor o igual que el valor del dinero invertido en el mercado ya que $d < u \leq 1 + r$ habría una probabilidad positiva de que el costo de reemplazar la acción sería estrictamente menor que el valor del dinero invertido en el mercado. Esto de nuevo provee arbitraje.

Así que podemos suponer que $1 + r < u$. Siempre se tiene $1 + r \geq 1 > d$. Si se establece

$$\bar{p} = \frac{1 + r - d}{u - d}$$

y

$$\bar{q} = \frac{u - (1 + r)}{u - d},$$

entonces $\bar{p}, \bar{q} \geq 0$ y $\bar{p} + \bar{q} = 1$. Por tanto, $\bar{p}$ y $\bar{q}$ actúan como probabilidades, pero ellas no tienen nada que ver con P y Q. Se tiene que tener en cuenta también que el precio $V_0 = W_0$ no depende de P o Q. Entonces depende de $\bar{p}$ y $\bar{q}$, lo que sugiere que hay una probabilidad resultante que controla el precio de la opción y no es el que gobierna el precio de las acciones.

Observación 2. No hay nada especial acerca de las opciones europeas de compra en el argumento anterior. Se podría permitir que V_1^u y V_1^d sean cualquiera dos valores de cualquier opción que se paga si la acción sube o baja respectivamente. El análisis anterior muestra que se puede duplicar exactamente el resultado al comprar cualquier opción V en lugar de comprar algunas acciones. Si en algún modelo se puede hacer esto para cualquier opción, el mercado es llamado completo en dicho modelo.

Observación 3. Si se tiene que $\bar{\mathbb{P}}$ es la probabilidad de modo que $S_1 = uS_0$ con probabilidad $\bar{p}$ y $S_1 = dS_0$ con probabilidad $\bar{q}$ y se toma a $\bar{\mathbb{E}}$ como la media correspondiente, entonces con el uso de álgebra se demuestra que

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\bar{\mathbb{E}}V_1.$$

Observación 4. Si uno compra acciones en el tiempo 0, entonces se espera que en el tiempo 1 se tenga $(Pu + Qd)\, S_0$. Entonces se divide por $1 + r$ para obtener el valor de la acción de hoy en dolares. (r, la taza de interés libre de riesgo, puede también considerarse la taza de inflación. Un dolar mañana es equivalente a $1/(1+r)$ dolares de hoy).

Supongamos que en lugar de P y Q se tienen las probabilidades de subir y bajar, que eran de hecho $\bar{p}$ y $\bar{q}$. Entonces se podría esperar tener $(\bar{p}u + \bar{q}d)\, S_0$ y luego dividir por $1 + r$. Sustituyendo los valores para $\bar{p}$ y $\bar{q}$, esto se reduce a S_0. En otras palabras si $\bar{p}$ y $\bar{q}$ eran las probabilidades correctas se esperaría tener la misma cantidad de dinero con que se inició.

Cuando se llegue al modelo de valoración de activos binomial con más de un paso, se verá que la generalización de este hecho es que el precio de las acciones en el tiempo n es una martingala, aún con lo supuesto de que $\bar{p}$ y $\bar{q}$ son las probabilidades correctas. Este es un caso especial del teorema fundamental de las finanzas: siempre existe una probabilidad en virtud del cual el precio de las acciones es una martingala.

Observación 5. Nuestro modelo permite después de un paso de tiempo la probabilidad de que la acción suba o baje, pero solo estas dos opciones. Veamos que pasa si en lugar hay tres o más posibilidades. Supongamos por ejemplo, que la acción sube un factor u con probabilidad P, baja un factor d con probabilidad Q y que se mantiene constante con probabilidad R, donde $P + Q + R = 1$. El precio correspondiente de una opción de compra europea sería $(uS_0 - K)^+$, $(dS_0 - K)^+$ o $(S_0 - K)^+$. Si uno pudiera replicar este resultado, mediante la compra y venta de acciones, entonces la regla de "no arbitraje" daría el valor exacto de la opción de compra en este modelo. Pero salvo en circunstancias muy especiales no se puede hacer eso y la teoría se desmorona. Se tienen tres ecuaciones que se quieren satisfacer, en términos de V_1^u, V_1^d y V_1^c, la c denota una constante. Sin embargo hay sólo dos variables $\triangle_0$ y V_0, y se tiene que la mayoría de las veces tres ecuaciones con dos incógnitas no se pueden resolver.

Observación 6. En nuestro modelo descartamos los casos en que P o Q eran cero. Si $Q = 0$, es decir, estamos seguros de que la acción va a subir, entonces nosotros siempre invertiríamos en la acción si $u > 1 + r$ ya que nos estaría yendo mejor y siempre pondríamos el dinero en el banco si $u \leq 1 + r$. Consideraciones similares se aplican cuando $P = 0$. Es interesante observar que los casos en que $P = 0$ o $Q = 0$ son los únicos en los que nuestra derivación no es válida. Resulta que en los modelos más generales las verdaderas probabilidades entran sólo para determinar que eventos tienen probabilidad 0 ó 1 y de ninguna otra manera.

5. El modelo de valoración de activos binomial de varios pasos

---

En esta sección se obtendrá la fórmula para el precio de opciones cuando hay n pasos de tiempo, pero cada vez la acción sólo puede subir por un factor u o bajar por un factor d.

La fórmula “Black-Scholes” que se obtendrá es ya un resultado no trivial que es muy útil.

Se asumirá lo siguiente:

1. Se pueden hacer un número ilimitado de ventas cortas.
2. Se puede pedir prestado ilimitadamente.
3. No hay costos de transacción.
4. La venta y compra es a una escala pequeña suficiente para no afectar el mercado.

Primero se necesita establecer el modelo de probabilidad. Ω estará formado por todas las sucesiones de longitud n de C y de X. S_0 será un número fijo y se define $S_k(\omega) = u^j d^{k-j} S_0$ si los primeros k elementos de un determinado $\omega \in \Omega$ ocurre j de C y $k-j$ sucesos de X. (Lo que se está diciendo es que si el elemento j-ésimo de la sucesión que compone ω está en C entonces el precio de las acciones sube un factor u y si está en X, entonces baja un factor d). F_k será el σ-campo generado por $S_0, \ldots, S_k$.

Sea

$$\overline{p} = \frac{(1+r)-d}{u-d}, \qquad \overline{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

y se define $\overline{\mathbb{P}}(\omega) = \overline{p}^j \overline{q}^{n-j}$ si ω tiene j apariciones de C y $n-j$ apariciones de X. Se observa que bajo $\overline{\mathbb{P}}$ las variables aleatorias ${}^{S_{k+1}}/_{S_k}$ son independientes e iguales a u con probabilidad $\overline{p}$ y d con probabilidad $\overline{q}$. Para ver esto, sea $Y_k = {}^{S_k}/_{S_{k-1}}$. Donde Y_k es el factor del precio de la acción que sube o baja en el tiempo k. Entonces $\mathbb{P}(Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) = \overline{p}^j \overline{q}^{n-j}$ donde j es el número de y_k que son iguales a u. Por otra parte es igual a $\mathbb{P}(Y_1 = y_1) \ldots \mathbb{P}(Y_n = y_n)$. Sea $\overline{\mathbb{E}}$ que denote la media que corresponde a $\overline{\mathbb{P}}$.

El $\overline{\mathbb{P}}$ que se construyó puede no ser la verdadera probabilidad de ir hacia arriba o hacia abajo. Pero eso no importa, es decir que resultará que el uso del principio de "no arbitraje" es que $\overline{\mathbb{P}}$ gobierna el precio.

El primer resultado es el teorema fundamental de las Finanzas en el actual contexto.

Teorema 2. Bajo $\overline{\mathbb{P}}$ el precio descontado de la acción $(1+r)^{-k} S_k$ es una martingala.

Demostración. Dado que la variable aleatoria ${}^{S_{k+1}}/_{S_k}$ es independiente de F_k se tiene:

$$\overline{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-(k+1)} S_{k+1} \mid F_k\right] = (1+r)^{-k} S_k (1+r)^{-1} \overline{\mathbb{E}}\left[{}^{S_{k+1}}/_{S_k} \mid F_k\right].$$

Usando la independencia de la media condicional, el valor esperado de la derecha es igual a

$$\overline{\mathbb{E}}\left[{}^{S_{k+1}}/_{S_k}\right] = \overline{p}u + \overline{q}d = 1 + r.$$

Sustituyendo eso se obtiene la proposición.

□

Sea $\triangle_k$ el número de acciones que se tienen entre los tiempos k y $k+1$. Se requiere que $\triangle_k$ sea medible en F_k. $\triangle_0, \triangle_1, \ldots$ es llamado el proceso de portafolio. Sea W_0 la cantidad de dinero con que se empieza y W_k denotará la cantidad que se tiene en el tiempo k. W_k es el proceso de riqueza. Si se tienen $\triangle_k$ acciones entre los tiempos k y $k+1$, entonces en el tiempo $k+1$ esas acciones tendrán un valor de $\triangle_k S_{k+1}$. La cantidad de dinero que posee entre el tiempo k y $k+1$ es W_k menos la cantidad que se tenía en la acción, esto es, $W_k - \triangle_k S_k$. En el tiempo $k+1$ esto tiene el valor de $(1+r)\left[W_k - \triangle_k S_k\right]$. Por lo tanto

$$W_{k+1} = \triangle_k S_{k+1} + (1+r)\left[W_k - \triangle_k S_k\right].$$

Hay que notar que en el caso donde $r = 0$ se tiene

$$W_{k+1} - W_k = \triangle_k \left(S_{k+1} - S_k\right)$$

o

$$W_{k+1} = W_0 + \sum_{i=0}^{k} \triangle_i \left(S_{i+1} - S_i\right).$$

Esta es una versión discreta de una integral estocástica. Dado que

$$\overline{\mathbb{E}}\left[W_{k+1} - W_k \mid F_k\right] = \triangle_k \overline{\mathbb{E}}\left[S_{k+1} - S_k \mid F_k\right] = 0,$$

se deduce que en el caso $r = 0$ se tiene que W_k es una martingala. Más generalmente se tiene la siguiente proposición.

Proposición 6. Bajo $\overline{\mathbb{P}}$ el proceso de riqueza descontada $(1+r)^{-k} W_k$ es una martingala.

Demostración. Se tiene

$$(1+r)^{-(k+1)}\,W_{k+1} =$$

$$(1+r)^{-k}\,W_k + \triangle_k\left[(1+r)^{-(k+1)}\,S_{k+1} - (1+r)^{-k}\,W_k\right].$$

Hay que observar que

$$\overline{\mathbb{E}}\left[\triangle_k\left[(1+r)^{-(k+1)}\,S_{k+1} - (1+r)^{-k}\,S_k\right] \mid F_k\right] =$$

$$\triangle_k\overline{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-(k+1)}\,S_{k+1} - (1+r)^{-k}\,S_k \mid F_k\right] = 0.$$

De donde se sigue el resultado.

□

El siguiente resultado es que el modelo binomial es completo. Es fácil perder la idea en álgebra, así que primero se tratará de ver porque el teorema es verdadero.

Para simplificar, se considerará primero el caso $r = 0$. Sea $V_k = \mathbb{E}\left[V \mid F_k\right]$. Por la proposición (2) se observa que V_k es una martingala. Se quiere construir un proceso de portafolio, es decir, elegir los $\triangle_k$ tal que $W_n = V$. Esto se hará por inducción para arreglarlo de tal manera que $W_k = V_k$ para todo k. Hay que recordar que W_k es también una martingala.

Supongamos que tenemos $W_k = V_k$ en el tiempo k y se quiere encontrar $\triangle_k$ tal que $W_{k+1} = V_{k+1}$.

En el $k+1$ paso sólo hay dos posibles cambios en el precio de la acción y como V_{k+1} es medible en F_{k+1}, sólo hay dos posibles valores para V_{k+1}. Se necesita elegir $\triangle_k$ tal que $W_{k+1} = V_{k+1}$ para cada una de esas dos posibilidades. Sólo se tiene un parámetro, $\triangle_k$, a jugar con hacer coincidir dos números, que puede parecer un sistema sobre restringido de ecuaciones. Pero tanto V y W son martingalas, por lo que el sistema puede ser resuelto.

Ahora pasemos a los detalles. En la siguiente prueba se permite $r \geq 0$.

Teorema 3. El modelo binomial de precios de activos es completo.

El significado preciso de esto es lo siguiente. Si V es una variable aleatoria medible en F_n, entonces existe una constante W_0 y un proceso de portafolio $\triangle_k$ tal que el proceso de riqueza W_k satisface $W_n = V$. En otras palabras, comenzando con W_0 dólares, podemos comerciar acciones para replicar exactamente el resultado de cualquier opción V.

Demostración. Sea

$$V_k = (1+r)^k \, \overline{\mathbb{E}} \left[(1+r)^{-n} V \mid F_k \right].$$

Por la Proposición (2), $(1+r)^{-k} V_k$ es una martingala. Si $\omega = (t_1, \ldots, t_n)$, donde cualquier t_i está en C o en X, sea

$$\triangle_k(\omega) = \frac{V_{k+1}(t_1, \ldots, t_k, C, t_{k+2}, \ldots, t_n) - V_{k+1}(t_1, \ldots, t_k, X, t_{k+2}, \ldots, t_n)}{S_{k+1}(t_1, \ldots, t_k, C, t_{k+2}, \ldots, t_n) - S_{k+1}(t_1, \ldots, t_k, X, t_{k+2}, \ldots, t_n)}.$$

Sea $W_0 = V_0$ y se puede demostrar por inducción que el proceso de riqueza en el tiempo k es igual a V_k.

La primera cosa a mostrar es que $\triangle_k$ es medible en F_k. Ningún S_{k+1} ni V_{k+1} depende de $t_{k+2}, \ldots, t_n$. Por lo tanto $\triangle_k$ depende sólo de las variables $t_1, \ldots, t_k$, entonces es medible en F_k.

Ahora $t_{k+2}, \ldots, t_n$ no jugarán un papel importante durante el resto de la prueba y $t_1, \ldots, t_k$ estarán fijos, entonces se borran los t de la notación. Si se escribe $V_{k+1}(C)$, esta es una abreviación para $V_{k+1}(t_1, \ldots, t_k, C, t_{k+2}, \ldots, t_n)$.

Se sabe que $(1+r)^{-k} V_k$ es una martingala sobre $\overline{\mathbb{P}}$ ya que

$$V_k = \overline{\mathbb{E}} \left[(1+r)^{-1} V_{k+1} \mid F_k \right],$$

$$V_k = \frac{1}{1+r} \left[\overline{p} V_{k+1}(C) + \overline{q} V_{k+1}(X) \right].$$

Podemos suponer que $W_k = V_k$ y demostrar que $W_{k+1}(C) = V_{k+1}(C)$ y $W_{k+1}(X) = V_{k+1}(X)$. Entonces usando inducción se obtiene que $W_n = V_n = V$, lo requerido. Se demostrará la primera igualdad y la segunda se obtiene de forma similar.

$$W_{k+1}(C) = \triangle_k S_{k+1}(C) + (1+r)\left[W_k - \triangle_k S_k \right],$$

$$W_{k+1}(C) = \triangle_k \left[u S_k - (1+r) S_k \right] + (1+r) V_k,$$

$$W_{k+1}(C) = \frac{V_{k+1}(C) - V_{k+1}(X)}{(u-d) S_k} S_k \left[u - (1+r) \right] + \overline{p} V_{k+1}(C) + \overline{q} V_{k+1}(X),$$

$$W_{k+1}(C) = V_{k+1}(C).$$

Lo que se deseaba.

$\square$

Finalmente, se obtiene la fórmula Black-Scholes en este contexto. Sea V cualquier opción tal que es medible en F_n. La que se tiene en cuenta es la opción de compra Europea, para la cual $V = (S_n - K)^+$, pero el argumento es el mismo para cualquier opción que sea.

Teorema 4. El valor de la opción V en el tiempo cero es $V_0 = (1+r)^{-n}\,\bar{\mathbb{E}}V$.

Demostración. Podemos construir un proceso de portafolio $\triangle_k$ de modo que si empezamos con $W_0 = (1+r)^{-n}\,\bar{\mathbb{E}}V$, entonces la riqueza en el tiempo n será igual a V, sin importar el mercado en el que estemos. Si pudiéramos vender o comprar la opción V a un precio que no sea W_0 entonces obtendríamos una ganancia sin riesgo. Es decir, si la opción V pudiese ser vendida a un precio c_0 mayor que W_0 entonces podríamos vender la opción por c_0 dólares, usar W_0 para comprar y vender acciones de acuerdo con el proceso de portafolio $\triangle_k$, tener un valor neto de $V + (1+r)^n (c_0 - W_0)$ en el tiempo n, cumplir con nuestra obligación con el comprador de la opción usando V dólares y tener una ganancia neta sin ningún riesgo de $(1+r)^n (c_0 - W_0)$.

Si c_0 fuera menor que W_0 haríamos lo mismo, excepto comprar una opción, mantener $-\triangle_k$ acciones en el tiempo k y de nuevo obtener una ganancia sin riesgo. Por la regla de "no arbitraje", eso no puede pasar por lo que el precio de la opción V debe ser W_0.

$\square$

Observación 7. Notar que la prueba del teorema anterior dice exactamente la estrategia (es decir, que proceso de portafolio) a usar.

En el modelo binomial para la asignación de precios, no hay dificultad para calcular el precio de una opción de compra europea. Nosotros tenemos

$$\bar{\mathbb{E}}\,(S_n - K)^+ = \sum_x (x-K)^+\,\bar{\mathbb{P}}\,(S_n = x)$$

y

$$\bar{\mathbb{P}}\,(S_n = x) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \bar{p}^k \bar{q}^{n-k},$$

si $x = u^k d^{m-k} S_0$. Por tanto el precio de la opción de compra europea es

$$(1+r)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left(u^k d^{m-k} S_0 - K\right)^+ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \bar{p}^k \bar{q}^{n-k}.$$

La fórmula del Teorema (4) es válida también para opciones exóticas. Supongamos

$$V = \max_{i=1,\ldots,n} S_i - \min_{j=1,\ldots,n} S_j.$$

En otras palabras, usted vende la acción por el máximo valor que toma en los primeros n pasos y compra por el mínimo valor que la opción toma; se le permite esperar hasta el tiempo n y mirar hacia atrás para ver cuales eran los máximos y los mínimos. Usted puede hacer esto incluso si el máximo viene antes que el mínimo. V es todavía F_n medible, entonces la teoría aplica. Naturalmente, "comprar barato, vender caro" tal opción es muy conveniente y el precio de V será bastante alto. Es interesante que, incluso sin el uso de opciones, usted puede duplicar la operación de comprar barato y vender caro manteniendo un número apropiado de acciones $\triangle_k$ en el tiempo k, donde usted no puede mirar al futuro para determinar $\triangle_k$.

Veamos un ejemplo de una opción de compra europea para que sea claro cómo hacer los cálculos. Considere el modelo binomial para la asignación de precios con $n = 3,\ u = 2,\ d = 1/2,\ r = 0.1,\ S_0 = 10$ y $K = 15$. Si V es una opción de compra europea con precio de ejercicio K y fecha de ejercicio n, debemos calcular explícitamente las variables aleatorias V_1 y V_2 y calcular el valor V_0. También calcular las estrategias de cobertura $\triangle_0,\ \triangle_1$ y $\triangle_2$.

Sean

$$\bar{p} = \frac{(1+r)-d}{u-d} = 0.4 \qquad \bar{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d} = 0.6$$

La siguiente tabla describe los valores de la acción, la rentabilidad V y las probabilidades para cada posible resultado ω.

ω	S_1	S_2	S_3	V	Probabilidad
CCC	$10u$	$10u^2$	$10u^3$	65	$\bar{p}^3$
CCX	$10u$	$10u^2$	$10u^2d$	5	$\bar{p}^2\bar{q}$
CXC	$10u$	$10ud$	$10u^2d$	5	$\bar{p}^2\bar{q}$
CXX	$10u$	$10ud$	$10ud^2$	0	$\overline{pq}^2$
XCC	$10d$	$10ud$	$10u^2d$	5	$\bar{p}^2\bar{q}$
XCX	$10d$	$10ud$	$10ud^2$	0	$\overline{pq}^2$
XXC	$10d$	$10d^2$	$10ud^2$	0	$\overline{pq}^2$
XXX	$10d$	$10d^2$	$10d^3$	0	$\bar{q}^3$

Entonces calculamos

$$V_0 = (1+r)^{-3}\,\overline{\mathbb{E}}V = (1+r)^{-3}\left(65\overline{p}^3 + 15\overline{p}^2\overline{q}\right) = 4.2074,$$

$V_1 = (1+r)^{-2}\,\overline{\mathbb{E}}\left[V \mid F_1\right]$, entonces tenemos

$$V_1(C) = (1+r)^{-2}\left(65\overline{p}^2 + 10\overline{pq}\right) = 10.5785, \quad V_1(X) = (1+r)^{-2}\,5\overline{pq} = 0.9917.$$

$V_2 = (1+r)^{-1}\,\overline{\mathbb{E}}\left[V \mid F_2\right]$, entonces tenemos

$$V_2(CC) = (1+r)^{-1}\left(65\overline{p} + 5\overline{q}\right) = 24.5454, \quad V_2(CX) = (1+r)^{-1}\,5\overline{p} = 1.8182,$$

$$V_2(XC) = (1+r)^{-1}\,5\overline{p} = 1.8182, \qquad V_2(XX) = 0.$$

La fórmula para $\triangle_k$ está dada por

$$\triangle_k = \frac{V_{k+1}(C) - V_{k+1}(X)}{S_{k+1}(C) - S_{k+1}(X)},$$

entonces

$$\triangle_0 = \frac{V_1(C) - V_1(X)}{S_1(C) - S_1(X)} = 0.6391,$$

donde V_1 y S_1 son como anteriormente.

$$\triangle_1(C) = \frac{V_2(CC) - V_2(CX)}{S_2(CC) - S_2(CX)} = 0.7576, \qquad \triangle_1(X) = \frac{V_2(XC) - V_2(XX)}{S_2(XC) - S_2(XX)} = 0.2424.$$

$$\triangle_2(CC) = \frac{V_3(CCC) - V_3(CCX)}{S_3(CCC) - S_3(CCX)} = 1.0,$$

$$\triangle_2(CX) = \frac{V_3(CXC) - V_3(CXX)}{S_3(CXC) - S_3(CXX)} = 0.3333,$$

$$\triangle_2(XC) = \frac{V_3(XCC) - V_3(XCX)}{S_3(XCC) - S_3(XCX)} = 0.3333,$$

$$\triangle_2(XX) = \frac{V_3(XXC) - V_3(XXX)}{S_3(XXC) - S_3(XXX)} = 0.0.$$

6. Opciones Americanas

Cuando se trata de discutir las opciones americanas, necesitaremos el concepto de tiempo de parada, concepto que se muestra a continuación.

Definición 15. Un mapeo τ de Ω a los enteros no negativos es un tiempo de parada si $(\tau = k) \in F_k$ para todo k. τ puede tomar el valor de ∞.

Ejemplo 13. Sea $\tau = min\,\{k : S \geq A\}$ este es un tiempo de parada ya que

$$(\tau = k) = (S_0, S_1, ..., S_{k-1} < A,\ S_k \geq A) \in F_k.$$

Ahora veamos la descripción intuitiva de lo que es un tiempo de parada: si le decimos a una persona que vaya en un automóvil a los límites de la ciudad y luego continúe manejando hasta llegar al segundo semáforo, dicha persona sabrá cuando haya llegado a su destino, no es necesario que haya estado ahí antes o que continúe manejando. Mientras que si le decimos a la persona que maneje hasta el segundo semáforo antes de los límites de la ciudad, se tendrá o que la persona ya ha estado ahí antes para saber donde parar o de lo contrario tiene que ir más allá de donde se supone debe parar, continuar hacia los límites de la ciudad, y luego dar la vuelta y volver dos semáforos. Por tanto se tiene que el primer conjunto forma un tiempo de parada mientras que el segundo conjunto no.

Hay que notar que $(\tau \leq k) = \bigcup\limits_{j=0}^{k} (\tau = j)$. Además $(\tau = j) \in F_j \subset F_k$ entonces el evento $(\tau \leq k) \in F_k$ para todo k. Si τ es una v.a con $(\tau \leq k) \in F_k$ para todo k entonces $(\tau = k) = (\tau \leq k) - (\tau \leq k-1)$.
Además $(\tau \leq k) \in F_k$ y $(\tau \leq k-1) \in F_{k-1} \subset F_k$ entonces $(\tau = k) \in F_k$ y por tanto τ es un tiempo de parada.

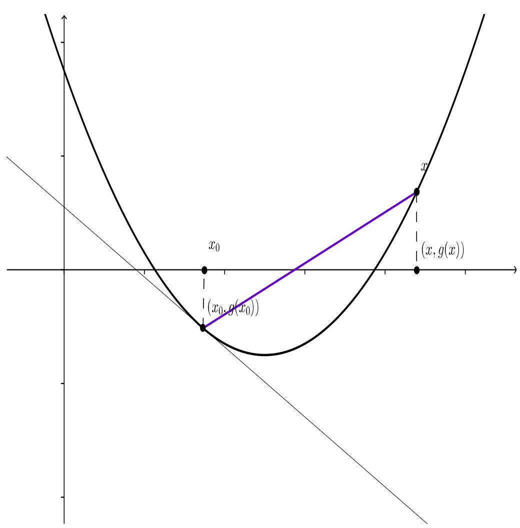
Observación 8. Una función real f definida en un intervalo (o en cualquier subconjunto convexo) se llama función convexa si está definida sobre un conjunto convexo C y para cualesquiera dos puntos x, y miembros de C y para cada t que pertenece a $[0, 1]$ se cumple que

$$f\left(tx+(1-t)\,y\right)\leq tf\left(x\right)+(1-t)\,f\left(y\right).$$

Un resultado muy importante es el que se muestra a continuación que es conocido como la desigualdad de Jensen.

Proposición 7. Si g es convexa entonces $g\left(\mathbb{E}\left[X\mid G\right]\right)\leq\mathbb{E}\left[g\left(X\right)\mid G\right]$ siempre que las medias existan.

Demostración. Si g es convexa, entonces la gráfica de g se encuentra por encima de todas las rectas tangentes. Incluso si g no tiene una derivada en x_0, hay una linea que pasa a través de x_0 que se encuentra debajo de la gráfica de g.



Así para cada x_0 existe $c(x_o)$ tal que

$$g\left(x\right)\geq g\left(x_0\right)+c\left(x_0\right)\left(x-x_0\right).$$

Tomando $x=X\left(\omega\right)$ y $x_0=\mathbb{E}\left[X\mid G\right]\left(\omega\right)$. Entonces tenemos

$$g\left(X\right)\geq g\left(\mathbb{E}\left[X\mid G\right]\right)+c\left(\mathbb{E}\left[X\mid G\right]\right)\left(X-\mathbb{E}\left[X\mid G\right]\right).$$

Si g es diferenciable, tomamos a $c(x_0) = g'(x_0)$. En el caso en que g no es diferenciable, entonces tomamos c como la derivada superior por la izquierda. Se puede comprobar que si se encuentra c entonces $c(\mathbb{E}[X \mid G])$ es medible en G.
Ahora tomamos la media condicional con respecto a G.

$$\mathbb{E}[g(X) \mid G] \geq \mathbb{E}[g(\mathbb{E}[X \mid G]) \mid G] + \mathbb{E}[c(\mathbb{E}[X \mid G])(X - \mathbb{E}[X \mid G]) \mid G].$$

El primer término de la derecha es medible en G por lo tanto sigue siendo el mismo. El segundo término de la derecha es igual a

$$c(\mathbb{E}[X \mid G])\,\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X \mid G]) \mid G] = 0.$$

$\square$

Una opción americana es una donde se puede ejercer la opción en cualquier momento antes del tiempo fijado T. Por ejemplo, la opción de compra europea, sólo se puede utilizar para comprar una acción en el momento de expiración T, mientras que para la opción de compra americana, se puede ejercer en cualquier momento antes de la hora T, se puede decidir pagar K dólares y obtener una acción.

Se dará una discusión informal sobre como fijar el precio de una opción de compra americana, dando luego un argumento más riguroso. Se puede esperar siempre hasta el tiempo T para ejercer una opción de compra americana, por lo que el valor debe ser al menos tan grande como el de la opción de compra europea. Por otra parte, supongamos que se decide ejercer temprano. Se paga K dólares, se recibe una porción de acción y la riqueza que se tiene es $S_t - K$. Se puede aferrar a la acción y en el tiempo T se tendrá una porción de acción con valor S_T y para la cual se pagó K dólares. Por lo que la riqueza es ahora $S_T - K \leq (S_T - K)^+$. De hecho se tiene una desigualdad estricta porque se perdió el interés en el dinero K que hubiera recibido si hubiera esperado el tiempo T. Por lo tanto una opción de compra americana no vale más que una opción de compra europea y por tanto su valor debe ser el mismo que el de la opción de compra europea.

Nota: Este argumento no funciona para ventas, ya que la venta de acciones da algo de dinero sobre el cual se recibirá interés, por lo que puede ser ventajoso para ejercer temprano la opción. (Una opción de venta es la opción de vender una acción a un precio K en el tiempo T).
Aquí está el argumento más riguroso. Suponga que si se ejerce la opción en el momento k su pago será $g(S_k)$. En dólares actuales, es decir, después de corregir la inflación se tiene

$(1+r)^{-k} g(S_k)$. Se debe tomar una decisión sobre el momento de ejercer la opción y dicha decisión sólo puede basarse en lo que ya ha decidido y no en lo que va a pasar en el futuro. En otras palabras, se tiene que elegir un tiempo de parada τ y ejercer la opción en el tiempo $\tau(\omega)$. Así la ganancia es $(1+r)^{-\tau} g(S_\tau)$. Esta es una cantidad aleatoria. Lo que se quiere hacer es encontrar el tiempo de parada que maximiza el valor esperado de esta variable al azar. Como siempre se trabaja con $\overline{\mathbb{P}}$, y por tanto se está buscando el tiempo de parada τ tal que $\tau \leq n$ y

$$\overline{\mathbb{E}}\,(1+r)^{-\tau} g(S_\tau),$$

es tan grande como sea posible. El problema de encontrar un tal τ se llama problema de parada óptima.

Supongamos que $g(x)$ es convexa con $g(0)=0$. Ciertamente $g(x)=(x-K)^+$ es una función de este tipo. Demostraremos que $\tau \equiv n$ es una solución para el problema de parada óptima de arriba: el mejor tiempo de ejercicio es lo más tarde que sea posible.

Tenemos

$$g(\lambda x) = g(\lambda x + (1-\lambda).0) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(0) = \lambda g(x), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{6.1}$$

Por la desigualdad de Jensen

$$\overline{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-(k+1)} g(S_{k+1}) \mid F_k\right] = (1+r)^{-k}\,\overline{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{1+r} g(S_{k+1}) \mid F_k\right],$$

$$(1+r)^{-k}\,\overline{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{1+r} g(S_{k+1}) \mid F_k\right] \geq (1+r)^{-k}\,\overline{\mathbb{E}}\left[g\left(\frac{1}{1+r} S_{k+1}\right) \mid F_k\right],$$

$$(1+r)^{-k}\,\overline{\mathbb{E}}\left[g\left(\frac{1}{1+r} S_{k+1}\right) \mid F_k\right] \geq (1+r)^{-k} g\left(\overline{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{1+r} S_{k+1} \mid F_k\right]\right),$$

$$(1+r)^{-k} g\left(\overline{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{1+r} S_{k+1} \mid F_k\right]\right) = (1+r)^{-k} g(S_k).$$

Para la primera desigualdad hemos usado (6.1). Así que $(1+r)^{-k} g(S_k)$ es una submartingala. Por la parada opcional

$$\overline{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau} g(S_\tau)\right] \leq (1+r)^{-n} g(S_n),$$

así $\tau \equiv n$ es la mejor opción.

Para opciones de venta, la rentabilidad es $g(S_k)$, donde $g(x) = (K - x)^+$, esta es también una función convexa, pero esta vez $g(0) \neq 0$ y el argumento anterior falla.

Aunque se conocen buenas aproximaciones, una solución exacta al problema de la valoración de una opción de venta americana no se conoce y es uno de los grandes problemas sin resolver en las matemáticas financieras.

7. Procesos estocásticos

7.1. Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es una secuencia de variables aleatorias, en cada momento del tiempo la variable aleatoria correspondiente da el estado del sistema, también la distribución condicional de estados futuros está dada por estados pasados y el estado presente depende solamente del estado presente.

Ejemplo 14. Líneas de teléfonos ocupadas.

Supongamos que en las oficinas de un cierto negocio hay cinco líneas telefónicas y que cualquiera de estas líneas puede ser utilizada en cualquier momento. Durante cada período de tiempo las líneas de teléfono se observan en períodos regulares de dos minutos y el número de líneas que están siendo utilizadas en cada momento se escriben.

Sea X_1 el número de líneas que se están utilizando cuando se hace la primera observación al inicio del período, sea X_2 el número de líneas que se utilizan cuando se hace la segunda observación dos minutos más tarde y en general para $n = 1, 2, \ldots$ sea X_n el número de líneas que se observan en el n-ésimo tiempo.

Definición 16. Procesos estocásticos. Una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ es llamada proceso estocástico o proceso aleatorio con parámetro de tiempo discreto. La primera variable aleatoria X_1 es llamada el estado inicial del proceso y para $n = 2, 3, \ldots$ la variable aleatoria X_n es llamada el estado de el proceso en el tiempo n.

En el ejemplo anterior el estado del proceso en cualquier momento es el número de líneas que se utilizan en ese momento. Entonces cada estado debe ser un entero entre 0 y 5. Cada variable aleatoria en un proceso estocástico tiene una distribución marginal y el proceso entero tiene una distribución en conjunto. Por conveniencia se discutirán solo distribuciones que tienen un número finito de $X_i's$ en un momento. El significado de la frase "parámetro de tiempo discreto" es que el proceso, tal que el número de líneas de teléfono ocupadas, es observado solamente en tiempos discretos o puntos separados en el tiempo.

En procesos estocásticos con tiempos discretos los estados de los procesos varían de una manera aleatoria de tiempo a tiempo. Para describir un modelo completo de probabilidad es necesario especificar la distribución para el estado inicial X_1 y también especificarlo para cada $n = 2, 3, \ldots$ La distribución condicional de los estados subsiguientes X_{n+1} está dada por los anteriores $X_1, \ldots, X_n$. Esta distribución condicional es equivalente a la colección de distribución de función acumulada de la siguiente forma

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} \leq b \mid X_1 = x_1,\ X_2 = x_2, ..., X_n = x_n\right).$$

Definición 17. Una cadena de Markov es un tipo de proceso estocástico con parámetro de tiempo discreto que cumple que para cada n la distribución condicional de todo X_{n+j} para $j \geq 1$ dado $X_1, \ldots, X_n$ depende solamente de X_n y no de estados anteriores $X_1, ..., X_{n-1}$. En símbolos para $n = 1, 2, \ldots$ y para cada b y para cada secuencia de estados $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} \leq b \mid X_1 = x_1,\ X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} \leq b \mid X_n = x_n\right).$$

Una cadena de Markov se llama finita si solamente hay un número finito de estados posibles.

Teorema 5. Para una cadena de Markov finita la probabilidad conjunta de los primeros n estados es igual a

$$\mathbb{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X_1 = x_1\right)\mathbb{P}\left(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1\right)\mathbb{P}\left(X_3 = x_3 \mid X_2 = x_2\right)\ldots\mathbb{P}\left(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}\right).$$

Además para cada n y para cada m mayor que cero

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, X_{n+m} = x_{n+m} \mid X_n = x_n\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n\right)\ldots\mathbb{P}\left(X_{n+m} = x_{n+m} \mid X_{n+m-1} = x_{n+m-1}\right).$$

Ejemplo 15. Comprar pasta dental. Consideramos un comprador que escoge entre dos marcas de pasta de diente en varias ocasiones. Sea $X_i = 1$ si el comprador escoge la marca A en la i-ésima compra y $X_i = 2$ si el comprador escoge la marca B en la i-ésima compra. Entonces la secuencia de estados $X_1, X_2, \ldots$ es un proceso estocástico con dos posibles estados en cada momento. Las probabilidades de comprar fueron especificadas al decir que el comprador escogerá la misma marca que en la compra previa con probabilidad $\frac{1}{3}$ y que cambiará con probabilidad $\frac{2}{3}$. Se puede observar que esto es un proceso estocástico que es una cadena de Markov con

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1 \mid X_n=1\right)=\frac{1}{3}, \mathbb{P}\left(X_{n+1}=2 \mid X_n=1\right)=\frac{2}{3},$$

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1 \mid X_n=2\right)=\frac{2}{3}, \mathbb{P}\left(X_{n+1}=2 \mid X_n=2\right)=\frac{1}{3}.$$

Definición 18. Distribución de transición o distribución de transición estacionaria. Considere una cadena de Markov finita con k posibles estados. La distribución condicional del estado en el tiempo $n+1$ está dado por el estado en el tiempo n, que es, $\mathbb{P}\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i\right)$ para $i,j=1,\ldots,k$ y $n=1,2,\ldots,$ son llamados distribución de transición de la cadena de Markov. Si la distribución de transición es la misma para cada tiempo n entonces la cadena de Markov tiene distribuciones de transición estacionaria.

La cadena de Markov en el ejemplo anterior es estacionaria porque por ejemplo $p_{11}=\frac{1}{3}$ significa que es 1 en el estado anterior y 1 en el estado nuevo.

Ejemplo 16. Líneas de teléfonos ocupadas. Para ilustrar la aplicación de este concepto, consideraremos de nuevo el ejemplo de la oficina con 5 líneas telefónicas. Para que el proceso estocástico sea una cadena de Markov debemos especificar la distribución para el número de líneas que podrían ser utilizadas en cada tiempo y debe depender solamente del número de líneas que fueron ocupadas en la última observación. Por ejemplo si tres líneas fueron utilizadas en el tiempo n entonces la distribución para el tiempo $n+1$ debe ser la misma sin importar si $0,1,2,\ldots,5$ líneas fueron ocupadas en el tiempo $n-1$. Se supondrá que este proceso es una cadena de Markov. Si esta cadena de Markov tiene una distribución de transición estacionaria entonces debe ser cierto que las tasas en las cuales las llamadas que entran y las que salen se hacen y el promedio de estas llamadas telefónicas no cambia.

8. Movimiento Browniano

Anteriormente se ha considerado un proceso aleatorio de tiempo discreto. Es decir, en tiempos discretos $n = 1, 2, 3, \ldots$ correspondientes a los lanzamientos de una moneda, donde consideramos una secuencia de variables aleatorias. Ahora se considerará un proceso de tiempo aleatorio continuo, que es una función $W(t)$, que es una variable aleatoria para cada tiempo $t \geq 0$. Decir que $W(t)$ es una variable aleatoria en cada momento es demasiado general por lo que debemos poner algunas restricciones adicionales en el proceso para tener algo interesante que estudiar.

Definición 19. El Proceso Estándar de Wiener es un proceso estocástico $W(t)$, para $t \geq 0$, con las siguientes propiedades:

1. Cada incremento $W(t) - W(s)$ en un intervalo de longitud $t - s$ es normalmente distribuido con media 0 y varianza $t - s$, es decir

$$W(t) - W(s) \sim N(0, t - s).$$

2. Para cada par de intervalos de tiempo disjuntos $[t_1, t_2]$ y $[t_3, t_4]$, con $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, los incrementos $W(t_4) - W(t_3)$ y $W(t_2) - W(t_1)$ son variables aleatorias independientes con distribuciones dadas como en la parte 1, y de manera similar para n intervalos de tiempo disjuntos donde n es un número entero arbitrario positivo.

3. $W(0) = 0$.

4. $W(t)$ es continua para todo t.

Más formalmente la propiedad 2 dice que si $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t$, entonces

$$\mathbb{P}[W(t) \geq x \mid W(t_0) = x_0, W(t_1) = x_1, \ldots, W(t_n) = x_n]$$

$$= \mathbb{P}[W(t) \geq x \mid W(t_n) = x_n].$$

Esta es una declaración de la propiedad de Markov del proceso de Wiener.

Recordemos que la suma de variables aleatorias independientes que son normalmente distribuidas con media μ_1 y μ_2 y varianzas σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente, es una variable aleatoria normalmente distribuida con media $\mu_1 + \mu_2$ y varianza $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Por lo tanto para los incrementos de $W(t_3) - W(t_2)$ y $W(t_2) - W(t_1)$ la suma $W(t_3) - W(t_2) + W(t_2) - W(t_1) = W(t_3) - W(t_1)$

es normalmente distribuida con media 0 y varianza $t_3 - t_1$ como esperamos. La propiedad 2 de la definición es consistente con las propiedades de las variables aleatorias normales.

Sea

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left({}^{-x^2}/_{(2t)} \right),$$

la probabilidad de densidad para una variable aleatoria $N(0,t)$. Entonces, para derivar la densidad conjunta del evento

$$W(t_1) = x_1,\, W(t_2) = x_2, \ldots, W(t_n) = x_n,$$

con $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, esto es equivalente a conocer la densidad de probabilidad conjunta del evento equivalente

$$W(t_1) - W(0) = x_1,\, W(t_2) - W(t_1) = x_2 - x_1, \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}.$$

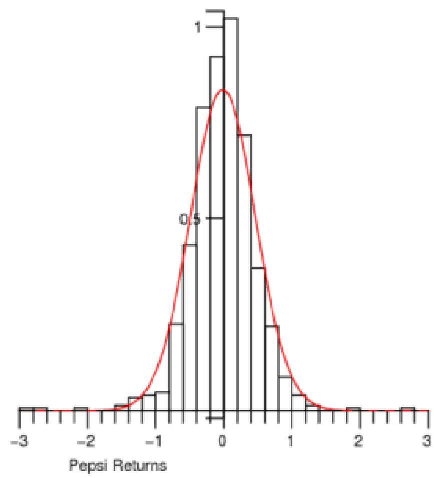
Por la propiedad 2 de la definición (19) se obtiene la expresión para la función de densidad de probabilidad conjunta:

$$f(x_1, t_1;\, x_2, t_2; \ldots;\, x_n, t_n) = p(x_1, t_1)\, p(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \ldots p(x_n - x_{n-1}, t_n - t_{n-1}).$$

Comentarios sobre precios de seguridad modelado con el Proceso de Wiener

Si tuviéramos que utilizar el movimiento Browniano para modelar el precio de los valores se tendría que verificar que los precios de los valores cumplen las 4 propiedades de definición de el Movimiento Browniano:

1. El supuesto de distribución normal de los cambios en los precios de valores parece ser una primera suposición razonable. La figura siguiente muestra esto razonablemente. El Teorema del Límite Central ofrece una razón para creerlo, asumiendo que los requisitos del Teorema del Límite Central se cumplen, incluida la independencia. (Por desgracia, aunque la figura muestra lo que parece ser un acuerdo razonable, un análisis estadístico más riguroso muestra que la distribución de los datos no coincide con la normalidad).



Otra buena razón para seguir utilizando el supuesto de normalidad para el incrementos es que la distribución normal es fácil de trabajar. La densidad de probabilidad normal utiliza funciones simples familiares de cálculo, se tabula la distribución de probabilidad acumulativa normal, la función generadora de momentos de la distribución normal es fácil de usar y la suma de las distribuciones normales independientes es de nuevo normal. La sustitución de otra distribución es posible, pero hace que los modelos resultantes de procesos estocásticos sean muy difíciles de trabajar.

Sin embargo, la suposición de una distribución normal ignora la pequeña posibilidad de que los precios de las acciones negativas podrían ser el resultado de un gran cambio negativo. Esto no es razonable.

Por otra parte, la asunción de una varianza constante en diferentes intervalos de la misma longitud no es una buena suposición ya que la volatilidad de sí mismo parece ser volátil. Es decir, la varianza de un precio de la acción cambia y no necesita ser proporcional a la longitud del intervalo de tiempo.

2. La suposición de incrementos independientes parece ser un supuesto razonable, al menos en un plazo lo suficientemente largo. De un segundo a otro, los incrementos de los precios probablemente estén correlacionados. Día a día, los incrementos de precios son probablemente independientes. Por supuesto, el supuesto de independencia de incrementos en precios de las acciones es la esencia de lo que los economistas llaman la Hipótesis del Mercado Eficiente, que tomamos como un hecho con el fin de aplicar la teoría de probabilidad elemental.

3. La suposición de $W(0) = 0$ es simplemente una hipótesis para normalizar y no necesita discusión.

4. El supuesto de continuidad es una abstracción matemática de la colaboración seleccionada de datos, pero tiene sentido. Los valores se negocian segundo a segundo o minuto a minuto donde los precios saltan discretamente por pequeñas cantidades. Examinando en una escala de día a día o semana a semana, entonces en tiempos cortos los cambios son pequeños y los precios parecen cambiar continuamente.

Por tanto el modelo de movimiento browniano de precios de las acciones es moderadamente utilizado.

9. Introducción Pragmática a las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

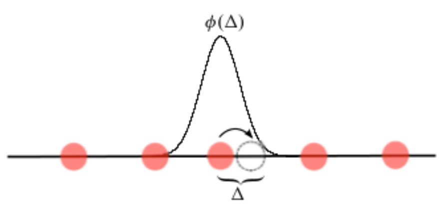
9.1. Los procesos estocásticos de la física, la ingeniería y otros campos

La historia de las ecuaciones diferenciales estocásticas (SDEs) se puede ver que se han comenzado a formar en el clásico artículo de Einstein (1905), donde presentó una conexión matemática entre el movimiento aleatorio de las partículas microscópicas y macroscópicas de la ecuación de fusión. Este es uno de los resultados que demostraron la existencia del átomo. El razonamiento de Einstein era más o menos el siguiente.

Ejemplo 17. (Movimiento Browniano de partículas microscópicas). Sea τ un pequeño intervalo de tiempo y considere n partículas suspendidas en un líquido. Durante el intervalo de tiempo las coordenadas x de partículas cambiarán por el desplazamiento Δ. El número de partículas con desplazamiento entre Δ y $\Delta + \mathrm{d}\Delta$ es entonces

$$\mathrm{d}n = n\phi\left(\Delta\right)\mathrm{d}\Delta, \tag{9.1}$$

donde $\phi\left(\Delta\right)$ es la probabilidad de densidad de Δ, que puede ser asumida simétrica, es decir, $\phi\left(\Delta\right) = \phi\left(-\Delta\right)$ y difiere de cero sólo para valores muy pequeños de Δ.



Sea $u\left(x,t\right)$ el número de partículas por unidad de volumen. Entonces el número de partículas en el tiempo $t+\tau$ situado en $x + \mathrm{d}x$ está dado por

$$u\left(x, t+\tau\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} u\left(x+\Delta, t\right)\phi\left(\Delta\right)\mathrm{d}\Delta\mathrm{d}x. \tag{9.2}$$

Ya que τ es muy pequeño, se puede escribir

$$u\left(x, t+\tau\right) = u\left(x,t\right) + \tau\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}. \tag{9.3}$$

Se puede ampliar $u\left(x+\Delta, t\right)$ en potencias de Δ:

$$u\left(x+\Delta, t\right) = u\left(x,t\right) + \Delta\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2} + \ldots \tag{9.4}$$

Sustituyendo (9.3) y (9.4) en (9.2) se obtiene

$$u(x,t)+\tau\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=u(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\phi(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta$$
$$+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta^2}{2}\phi(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta+\ldots \tag{9.5}$$

donde todos los términos de orden impar se desvanecen. Si recordamos que $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta=1$ se puede escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta^2}{2}\phi(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta=D, \tag{9.6}$$

y se obtiene la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \tag{9.7}$$

Esta conexión fue significativa durante el tiempo, porque la ecuación de difusión era sólo conocida como una ecuación macroscópica. Einstein también fue capaz de obtener una fórmula para D en términos de cantidades microscópicas. De esto, Einstein era capaz de calcular la predicción para el desplazamiento cuadrático medio de las partículas en función del tiempo:

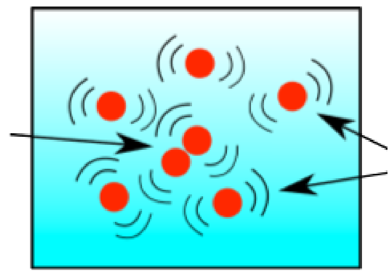
$$z(t)=\frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi\eta r}t, \tag{9.8}$$

donde η es la viscosidad del líquido, r es el diámetro de las partículas, T es la temperatura, R es la constante de los gases, y N es la constante de Avogadro.

En términos modernos, el movimiento browniano es una abstracción de un proceso al azar que tiene la propiedad de que cada incremento de este es independiente. Es decir, la dirección y la magnitud de cada cambio del proceso es completamente al azar e independiente de los cambios previos. Una manera de pensar sobre el movimiento browniano es que es la solución a la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\frac{\mathrm{d}\beta(t)}{\mathrm{d}t}=\omega(t), \tag{9.9}$$

donde $\omega(t)$ es un proceso aleatorio blanco. El término blanco aquí significa que cada uno de los valores $\omega(t)$ y $\omega(t')$ son independientes cuando $t\neq t'$. Más adelante veremos que la densidad de probabilidad de la solución de esta ecuación va a resolver la ecuación de difusión. Sin embargo, en la época de Einstein la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas no existía y por lo tanto el razonamiento era completamente diferente.



Ejemplo 18. (Modelo de Black-Scholes). En el modelo de activos de Black-Scholes (por ejemplo, precio de las acciones) x se supone que sigue el movimiento browniano geométrico

$$\mathrm{d}x = \mu x \,\mathrm{d}t + \sigma x \,\mathrm{d}\beta, \tag{9.10}$$

donde $\mathrm{d}\beta$ es el incremento del movimiento browniano, μ es una constante deriva y σ es una constante de volatilidad. Si dividimos formalmente por $\mathrm{d}t$, esta ecuación se puede interpretar heurísticamente como una ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mu x + \sigma x \omega, \tag{9.11}$$

donde $\omega(t)$ es un proceso aleatorio blanco. Esta ecuación es ahora un ejemplo de más modelos de ruido multiplicativo general de la forma

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}(\mathbf{x})\,\mathbf{w}. \tag{9.12}$$

9.2. Ecuaciones diferenciales con la conducción de ruido blanco

Como se discutió en la sección anterior, muchos fenómenos variables en el tiempo en varios campos de la ciencia y la ingeniería se pueden modelar como ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{L}(\mathbf{x}, t)\,\mathbf{w}(t). \tag{9.13}$$

donde $w(t)$ es la función de fuerza.

Podemos pensar en una ecuación diferencial estocástica (SDE) como una ecuación de la forma de (9.13) en que la función de fuerza es un proceso estocástico. Una motivación para el estudio de dichas ecuaciones es que varios fenómenos físicos pueden ser modelados por procesos aleatorios (por ejemplo, movimiento térmico) y cuando tal fenómeno entra en un sistema físico, obtenemos un modelo de la forma SDE de arriba. Otra motivación es que en el modelado estadístico Bayesiano desconocidas fuerzas se modelan de forma natural como fuerzas aleatorias que a su vez conducen a los tipos de modelos de SDEs. Debido a que la función de fuerza es aleatoria, la solución de la ecuación diferencial estocástica es también un proceso aleatorio.

En el contexto de SDEs, el término $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ en la ecuación (9.13) se llama la función deriva que determina la dinámica nominal del sistema y $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ es la matriz de dispersión que determina cómo el ruido $\mathbf{w}(t)$ entra en el sistema. Esto de hecho, es la forma más general de SDEs que se discuten en el documento. Aunque sería tentador generalizar estas ecuaciones a $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)$, esto no es posible en la teoría actual.

La función desconocida generalmente modelada como Gauss y "blanco" en el sentido que $\mathbf{w}(t)$ y $\mathbf{w}(\tau)$ son no correlacionadas (e independientes) para todo $t \neq s$. El término blanco surge de la propiedad de que el espectro de potencia (o en realidad, la densidad espectral) de ruido blanco es constante (plana) sobre todas las frecuencias. La luz blanca es otro fenómeno que tiene esta misma propiedad y de ahí el nombre. En sentido matemático proceso de ruido blanco se puede definir de la siguiente manera:

Definición 20. (Ruido Blanco). Proceso de ruido blanco $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^s$ es una función aleatoria con las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{w}(t_1)$ y $\mathbf{w}(t_2)$ son independientes si $t_1 \neq t_2$.
2. $t \mapsto \mathbf{w}(t)$ es un proceso Gaussiano con media cero y correlación Dirac-delta:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_\omega(t) &= \mathbb{E}[\mathbf{w}(t)] = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_\omega(t, s) &= \mathbb{E}\left[\mathbf{w}(t)\,\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(s)\right] = \delta(t - s)\,\mathbf{Q}, \end{aligned} \tag{9.14}$$

donde $\mathbf{Q}$ es la densidad espectral del proceso.

De las propiedades anteriores también podemos deducir lo siguiente acerca del ruido blanco:

- La muestra de $t \mapsto \mathbf{w}(t)$ es discontinua en casi todas partes.

- El ruido blanco es ilimitado y toma arbitrariamente valores grandes positivos y negativos en cualquier intervalo finito.

10. Cálculo de Ito y Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Como se discutió en la sección anterior, una ecuación diferencial estocástica puede ser considerada heurísticamente como una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, t\right) + \mathbf{L}\left(\mathbf{x}, t\right)\mathbf{w}\left(t\right) \tag{10.1}$$

donde $\mathbf{w}\left(t\right)$ es un proceso Gausiano. Sin embargo a veces esto no es completamente cierto. El objetivo de esta sección es clarificar que va realmente con SDEs y como las debemos tratar.

El problema de la ecuación de arriba es que no puede ser una ecuación diferencial en el sentido tradicional porque la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias no permite funciones discontinuas como $\mathbf{w}\left(t\right)$ en una ecuación diferencial. Y el problema no es puramente teórico, porque la solución en realidad depende de pequeñas diferencias infinitesimales en la definición matemática de ruido y así sin restricciones la solución podría no ser única si se da una realización de ruido blanco $\mathbf{w}\left(t\right)$.

Afortunadamente, hay solución a este problema, pero para poder encontrarla se necesita reducir el problema a un nuevo tipo de integral, la cual es una integral con respecto al proceso estocástico. Para hacer eso, primero formalmente integramos la ecuación diferencial desde un tiempo inicial t_0 a un tiempo t:

$$\mathbf{x}\left(t\right) - \mathbf{x}\left(t_0\right) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\left(t\right), t\right)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t} \mathbf{L}\left(\mathbf{x}\left(t\right), t\right)\mathbf{w}\left(t\right)\mathrm{d}t. \tag{10.2}$$

La primera integral en la parte derecha es una integral normal con respecto al tiempo y puede ser definida por una integral de Riemann de $t \mapsto \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\left(t\right), t\right)$ o como integral de Lebesgue con respecto a la medida de Lebesgue, sin mayor generalización requerida.

La segunda integral es el problema. Primero no se puede definir como una integral de Riemann ya que no está acotado y es discontunua. Recordar que la integral de Riemann puede ser definida con el siguiente límite:

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{L}\left(\mathbf{x}\left(t\right), t\right)\mathbf{w}\left(t\right)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\sum_k \mathbf{L}\left(\mathbf{x}\left(t_k^*\right), t_k^*\right)\mathbf{w}\left(t_k^*\right)\left(t_{k+1} - t_k\right), \tag{10.3}$$

donde $t_0\, t_1 \ldots t_n = t$ y $t_k^* \in [t_k,\, t_{k+1}]$. En el contexto de Riemann también se llaman sumas superiores e inferiores que son definidas como la selección de t_k^* tal que integrando $\mathbf{L}\left(\mathbf{x}\left(t_k^*\right), t_k^*\right)\mathbf{w}\left(t_k^*\right)$ tiene máximos y mínimos valores respectivamente. La integral de Riemann está definida si las sumas superiores e inferiores convergen al mismo valor, el cual está definido como el valor de la integral. En el caso de ruido blanco sucede que $\mathbf{w}\left(t_k^*\right)$ no está acotado y toma valores arbitrariamente pequeños y grandes sobre un tintervalo finito y así la integral de Riemann no converge.

También podemos intentar definir la integral de Stieltjes la cual es más general que la integral de Riemann. Para esta definición necesitamos interpretar el incremento $\mathbf{w}(t)\,\mathrm{d}t$ como el incremento de otro proceso $\beta(t)$ tal que la integral se convierte en

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{L}(\mathbf{x}(t), t)\, \mathbf{w}(t)\, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \mathbf{L}(\mathbf{x}(t), t)\, \mathrm{d}\beta(t). \tag{10.4}$$

Sucede que hay un proceso hábil para este propósito y es el Movimiento Browniano.

Desafortunadamente, la definición de la última integral de la ecuación (10.2) en términos de incrementos de Movimiento Browniano como la ecuación (10.4) no resuelve nuestro problema de existencia. El problema de que la derivada sea discontinua en todos los puntos de $\beta(t)$ el cual lo hace demasiado irregular para definir la suma de la integral de Stieltjes para converger. Desafortunadamente lo mismo pasa con la integral de Lebesgue.

Vamos a discutir la integral estocástica especial $\int B\,\mathrm{d}B$, donde $B \equiv \{B(t) : t \geq 0\}$ es el Movimiento browniano (MB) estándar y su valor

$$\int_{0}^{t} B(s)\, \mathrm{d}B(s) = \frac{B(t)^2}{2} - \frac{t}{2}, \quad t \geq 0. \tag{10.5}$$

Se asumirá que B es el mismo MB en ambos lugares, como integrando e integrador.

10.1. La regla de la cadena de Cálculo

Supongamos que u es una función real diferenciable de una variable real, que es la composición de otras dos funciones: $u = f \circ g$, es decir, $u(t) = f(g(t))$, $t \geq 0$, donde f y g son funciones diferenciables. La regla de la cadena nos da la derivada de u en términos de las derivadas de las componente de las funciones f y g:

$$u'(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f'(g(t))\, g'(t), \quad t \geq 0.$$

La regla de la cadena conduce a una fórmula asociada para integrales:

$$\int_{0}^{t} b\, \mathrm{d}b = \int_{0}^{t} b(s)\ b'(s)\, \mathrm{d}s = \frac{b(t)^2}{2}, \tag{10.6}$$

siempre y cuando b sea una función diferenciable, pues, podemos aplicar la regla de la cadena al supuesto valor de la integral. Aquí $u = f \circ g$, donde $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y $g = b$. Aplicando la regla de la cadena con $u(t) = \frac{b(t)^2}{2}$, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(b(t)^2/2\right)}{\mathrm{d}t} = b(t)\, b'(t).$$

Por lo tanto hemos verificado la fórmula para la integral.

10.2. Una Integral estocástica general

El lado izquierdo de la ecuación (10.5) es un caso especial de la integral estocástica

$$\int_0^t X(s)\,\mathrm{d}M(s), \quad t \geq 0, \tag{10.7}$$

donde $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ y $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ donde ambos pueden ser procesos estocásticos. La ecuación (10.5) es el caso especial en el que ambos de estos procesos estocásticos son movimientos brownianos estándar.

Nuestro objetivo es dar una breve explicación de la expresión (10.7). No vamos a tratar de ser excesivamente generales. Se supondrá que X y M son procesos estocásticos con trayectorias muestrales continuas. Ese es el caso de varias funciones lisas del MB. Tomamos nota de que esta condición de suavidad se puede generalizar. Vamos a suponer que M es una martingala (MG) con respecto a alguna familia, llamada filtración $\{F_t : t \geq 0\}$. Si M se define para ser una martingala con respecto a algún otro proceso estocástico $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$, para el que la condición crítica es

$$\mathbb{E}\left[M(t) \mid Y(u),\ 0 \leq u \leq s\right] = M(s) \quad \forall s,\ \ 0 \leq s < t,$$

entonces $\mathcal{F}$ es la recopilación de eventos generados por $\{Y(u), 0 \leq u \leq s\}$ y que a menudo reescribiremos la condición MG como

$$\mathbb{E}\left[M(t) \mid \mathcal{F}_s\right] = M(s) \quad \forall s,\ \ 0 \leq s < t.$$

Junto con la propiedad MG para M, también suponemos que $X(t)$ se determina por la filtración hasta el momento t para cada $t \geq 0$. Decimos que X se adapta a la filtración $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$, escrito sencillamente como $X(t) \in \mathcal{F}_t$. En otras palabras, $X(t)$ es considerada como una función de $\{Y(u), 0 \leq u \leq t\}$ para cada $t \geq 0$. Estos supuestos sobre el par (X, M) hacen incrementos $M(t+u) - M(t)$ que tienen espectativa condicional 0 dada la historia de ambos, X y M hasta el momento t, en todo caso, es una filtración $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$.

Estas propiedades de MG de M y X pueden generalizarse también, pero no pueden ser removidas enteramente. Muchas generalizaciones se han desarrollado en los últimos 50 años.

10.3. Sumas aproximadas

Definimos a (10.7) esencialmente de la misma manera que definimos la integral de Riemann en cálculo: Se define como el límite de aproximar sumas sobre una rejilla de tiempo discreto, ya que la rejilla discreta se hace más fina y más fina. La dificultad es que uno tiene que tener cuidado de tomar este límite porque los supuestos habituales para la integral de Riemann no están satisfechos aquí.

Siguiendo el procedimiento para la integral de Riemann, recogemos $n+1$ puntos t_i en el intervalo $[0,t]$ que satisface $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ y sea la suma de aproximada

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} X\left(s_i\right)\left(M\left(t_{i+1}\right) - M\left(t_i\right)\right), \tag{10.8}$$

donde s_i es un cierto punto en el intervalo $[t_i,\, t_{i+1}]$, es decir, donde $t_i \leq s_i \leq t_{i+1}$. Queremos definir el integral como el límite cuando se toman más y más puntos, dejando que el máximo intervalo de $t_{i+1} - t_i$ vaya a 0 cuando $n \to \infty$.

Hay dos problemas:

1. Tenemos que tener cuidado de cómo se define el límite. No queremos tratar de tener la convergencia con probabilidad uno para cada punto de muestra. (En su lugar tendremos convergencia cuadrada, pero no vamos a entrar en detalles).
2. Tenemos que tener cuidado de cómo seleccionamos el punto s_i dentro del intervalo $[t_i,\, t_{i+1}]$. Se prestará especial atención a este detalle porque esa elección puede afectar a la respuesta. De hecho, podemos obtener diferentes respuestas si dejamos $s_i = t_i$ o si $s_i = t_{i+1}$. De hecho, si dejamos $s_i = \alpha t_i + (1-\alpha)\, t_{i+1}$, a continuación, en general, tenemos diferentes respuestas para cada valor de α con $0 \leq \alpha \leq 1$. Vamos a utilizar la integral de Ito, que permite $s_i = t_i$. El caso $\alpha = 1/2$ conduce a lo que se llama la integral Fisk-Stratonovich. Veremos que esta elección hace la diferencia en el ajuste relativamente elemental de 1.

10.4. La Integral de Ito para nuestro ejemplo de MB

Después de haber hecho la elección $s_i = t_i$, tenemos la siguiente aproximación de sumas para nuestra integral estocástica inicial en (10.5):

$$\int_0^t B(s)\,\mathrm{d}B(s) \approx \sum_{i=0}^{n-1} B(t_i)\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right). \tag{10.9}$$

Para ver lo que sucede, es conveniente volver a escribir cada sumando como

$$B(t_i)\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right) = \frac{1}{2}\left(B(t_{i+1})^2 - B(t_i)^2\right) - \frac{1}{2}\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right)^2. \tag{10.10}$$

Esto nos lleva a la suma única en (10.9) siendo reemplazado por dos sumas, pero ahora la primera suma es telescópica, es decir, hay cancelación masiva cuando sumamos, produciendo

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(B(t_{i+1})^2 - B(t_i)^2\right) = B(t_n)^2 - B(0)^2 = B(t)^2 - 0 = B(t)^2. \tag{10.11}$$

Cuando ponemos todo junto, obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} B(t_i)\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right) = \frac{B(t)^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right)^2. \tag{10.12}$$

Ahora tenemos que saber lo que le pasa a la suma final de los cuadrados de los incrementos del MB. El límite se denomina la variación cuadrática del MB. Resulta que, con probabilidad 1,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right)^2 \to t \quad \text{con } n \to \infty \text{ con } \max\left\{t_{i+1} - t_i\right\} \to 0. \tag{10.13}$$

Mostramos una forma más débil de la convergencia (Convergencia en media cuadrática). Para ver rápidamente por qué el límite debería ser válido, se calcula la media y la varianza, primero para un sólo sumando y después para cada término:

$$\mathbb{E}\left[\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(B(t_{i+1} - t_i)\right)^2\right] = t_{i+1} - t_i,$$

de modo que, por otro argumento telescópico,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1}\left(t_{i+1} - t_i\right) = t_n - t_0 = t, \tag{10.14}$$

para todas las particiones.

Vamos a demostrar que la varianza se logra insignificante:

$$\operatorname{Var}\left[\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right)^2\right] = \operatorname{Var}\left[\left(B(t_{i+1} - t_i)\right)^2\right]$$

$$\mathrm{Var}\left[(B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right]=\mathrm{Var}\left(N(0\,,\,t_{i+1}-t_i)^2\right)$$

$$\mathrm{Var}\left[(B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right]=\mathrm{Var}\left(\left(\sqrt{t_{i+1}-t_i}\right)^2 N(0,1)^2\right)$$

$$\mathrm{Var}\left[(B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right]=\mathrm{Var}\left((t_{i+1}-t_i)\,N(0,1)^2\right)$$

$$\mathrm{Var}\left[(B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right]=(t_{i+1}-t_i)^2\,\mathrm{Var}\left(N(0,1)^2\right)$$

$$\mathrm{Var}\left[(B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right]=(t_{i+1}-t_i)^2\,\mathrm{E}\left[\left(N(0,1)^2-1\right)^2\right]$$

$$\mathrm{Var}\left[(B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right]=2\,(t_{i+1}-t_i)^2\,.$$

Sin embargo,

$$(t_{i+1}-t_i)^2\leq(t_{i+1}-t_i)\,\text{máx}\,\{t_{i+1}-t_i\}\,,$$

donde $\text{máx}\,\{t_{i+1}-t_i\}\to 0$ cuando $n\to\infty$, como parte de nuestras condiciones. Por lo tanto

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left((B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right)\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{Var}\left((B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right),$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left((B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right)\right)=2\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)^2\,,$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left((B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right)\right)\leq 2\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\,\text{máx}\,\{t_{i+1}-t_i\}\,,$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left((B(t_{i+1})-B(t_i))^2\right)\right)\leq 2t\;\text{máx}\,\{t_{i+1}-t_i\}\to 0\quad\text{cuando}\quad n\to\infty,\qquad(10.15)$$

De ahí que la media de la segunda suma tiende a t y la varianza va a 0. Eso muestra directamente convergencia de las sumas de aproximación en el sentido de media cuadrática (es decir, $Z_n\to Z$ en la media cuadrática si $\mathbb{E}\left[|Z_n-Z|^2\right]\to 0$), lo que implica la convergencia en probabilidad y convergencia en distribución ($Z_n\to Z$).

10.5. SDE's y el lema de Ito

En primer lugar, se especifica lo que entendemos por un proceso estocástico que satisface una ecuación diferencial estocástica. Entonces se plantea el lema de Ito, que proporciona la SDE de una función suave de un proceso que satisface la SDE.

10.5.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Supongamos que X es un proceso estocástico que satisface la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}X = a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}B, \tag{10.16}$$

donde B es MB, por lo que entendemos

$$\mathrm{d}X(t) = a(X(t), t)\,\mathrm{d}t + b(X(t), t)\,\mathrm{d}B(t), \tag{10.17}$$

donde a y b son funciones reales en $\mathbb{R}^2$, por lo que X satisface la ecuación integral

$$X(t) = \int_0^t a(X(s), s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t b(X(s), s)\,\mathrm{d}B(s), \tag{10.18}$$

donde la última integral se define como una integral de Ito. Tal proceso X es llamado a menudo proceso de Ito. Se debe tener en cuenta que el proceso X aparece en ambos lados de la ecuación, pero el valor en t determinado de la izquierda sólo depende de los valores en el tiempo s para $s \leq t$. Suponiendo que X tiene trayectorias continuas, basta conocer $X(s)$ para todo $s < t$ de la derecha. Sin embargo, hay una necesidad de apoyar la teoría sobre la existencia y singularidad de una solución a la ecuación integral (o equivalentemente a la SDE).

Un ejemplo elemental surge cuando $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$, donde μ y σ son constantes. Entonces tenemos (10.16) con $a(x,t) = \mu$ y $b(x,t) = \sigma$, independientes de x y t. Luego se puede directamente integrar la SDE para ver que el proceso es MB con derivada μ y coeficiente de difusión σ^2.

Otro ejemplo importante es el movimiento browniano geométrico estándar (MBG). Entonces tenemos (10.16) con $a(x,t) = \mu x$ y $b(x,t) = \sigma x$. Sea $S(t)$ el precio de las acciones en el tiempo t, se puede escribir la clásica SDE de MBG como

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}B, \tag{10.19}$$

donde μ y σ son constantes. Se debe tener en cuenta que S aparece en los dos términos de la derecha.

10.5.2. Lema de Ito

Ahora se verá lo que sucede cuando consideramos una función suave de un proceso de Ito. Se asumirá el proceso de Ito X dado en (10.16)-(10.18). Ahora supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función suave, con segundas derivadas continuas. El lema de Ito concluye que $Y(t) = f(X(t), t)$ tiene una SDE con representación

$$\mathrm{d}Y = \left(f_t + af_x + \frac{1}{2}b^2 f_{x,x}\right)\mathrm{d}t + bf_x \mathrm{d}B, \tag{10.20}$$

o con más detalle,

$$\mathrm{d}Y(t) = \mathrm{d}f(X(t), t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a(X(t), t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b(X(t), t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t + b(X(t), t)\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}B(t); \tag{10.21}$$

o, aún con más detalle,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y(t) = \mathrm{d}f(X(t), t) = &\left(\tfrac{\partial f}{\partial t}(X(t), t) + a(X(t), t)\tfrac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) + \tfrac{1}{2}b(X(t), t)^2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t), t)\right)\mathrm{d}t \\ &+ b(X(t), t)\tfrac{\partial f}{\partial x}(X(t), t)\,\mathrm{d}B(t).\end{aligned} \tag{10.22}$$

En otras palabras, Y satisface la SDE asociada con coeficientes de a_Y y b_Y que son funciones de $(X(t), t)$ y la función f. En particular,

$$\mathrm{d}Y = a_Y \mathrm{d}t + b_Y \mathrm{d}B,$$

donde

$$a_Y(X(t), t, f) = \frac{\partial f}{\partial t}(X(t), t) + a(X(t), t)\frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) + \frac{1}{2}b(X(t), t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t), t)$$

y

$$b_Y(X(t), t, f) = b(X(t), t)\frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t).$$

La parte sorprendente es el término

$$\frac{1}{2}b(X, t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t), t),$$

que aparece en a_Y. Eso no estaría allí si B tuviera trayectorias muestrales diferenciables. Una prueba intuitiva del lema de Ito se sigue aplicando el desarrollo en serie de Taylor de segundo orden.

Ejemplo 19. (Logaritmo de MBG). En (10.19) tenemos la representación estándar de una SDE de MBG. Supongamos que consideramos ahora el logaritmo: $\ln {}^{S(t)}/_{S(0)} = \ln(S(t)) - \ln(S(0))$. Podemos aplicar la función $f(x,t) = \ln(x)$, para el que $f_x = \frac{1}{x}$, $f_{x,x} = \frac{-1}{x^2}$ y $f_t = 0$. De aquí obtenemos

$$\mathrm{d}\ln\left({}^{S(t)}/_{S(0)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B, \tag{10.23}$$

de la que inmediatamente vemos que

$$\ln\left({}^{S(t)}/_{S(0)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t), \quad t \geq 0, \tag{10.24}$$

Se debe tener en cuenta que la derivada de este movimiento browniano no es μ. Los términos de la derivada en las dos especificaciones no están de acuerdo. Dado que

$$\ln\left({}^{S(t)}/_{S(0)}\right) = \nu t + \sigma B(t), \quad t \geq 0, \tag{10.25}$$

obtenemos

$$\mathbb{E}[S(t)] = S(0)\, e^{\left(\nu + \sigma^2/2\right)t}, \quad t \geq 0, \tag{10.26}$$

mientras que desde la SDE sería $\mathbb{E}[S(t)] = S(0)\, e^{\mu t}$. Los parámetros μ y ν en estas dos representaciones deben estar relacionados por

$$\mu = \nu + \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{o} \quad \nu = \mu - \frac{\sigma^2}{2}. \tag{10.27}$$

Ejemplo 20. Supongamos que aplicamos el lema de Ito al MB ordinario con $f(x) = x^2$. Comenzamos con la SDE en (10.16) (con $a = 0$ y $b = 1$).

Cuando aplicamos el lema de Ito con $f(x) = x^2$, obtenemos

$$\mathrm{d}B(t)^2 = \mathrm{d}t + 2B(t)\,\mathrm{d}B(t), \tag{10.28}$$

o

$$B(t)^2 = t + 2\int_0^t B(s)\,\mathrm{d}B(s)\,, \tag{10.29}$$

al igual que en nuestra integral estocástica inicial de MB.

10.6. La Ecuación de Black-Scholes

La ecuación de Black-Scholes es una ecuación diferencial parcial (EDP) que satisface la derivada (financiera) de un proceso de precio de las acciones que sigue un MBG, bajo la condición de no arbitraje. Se comenzará con MBG representado como una SDE. A continuación, aplicamos el lema de Ito para describir la derivada como una SDE. Sin embargo, la condición de libre arbitraje sirve para eliminar la componente de MB estocástico, dejando sólo una EDP determinista para el precio dependiente del tiempo y dependiente del estado de la seguridad.

En más detalle, comenzamos con el proceso de cotización que satisface MBG SDE en (10.19). Se representará el precio del derivado del proceso de precio de las acciones como $f(S(t), t)$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función suave. A continuación, aplicamos el lema de Ito y se consideran las consecuencias de la condición de libre arbitrage. Eso obliga la ecuación Black-Scholes.

Antes aplicamos el argumento de libre arbitraje, simplemente aplicamos el Lema de Ito para obtener una SDE para la derivada de valores. Dado que S sigue la SDE MBG en (10.19), podemos aplicar (10.21) para ver que la derivada de, digamos $Y(t) = f(S(t), t)$, satisface la SDE asociada

$$\mathrm{d}Y(t) = \mathrm{d}f(S(t), t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S(t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}B(t)\,. \tag{10.30}$$

Se necesita un argumento de financiación adicional para pasar de esta SDE para la EDP Black-Scholes. Supongamos que la tasa de interés es r. La neutralidad de riesgos se logra mediante el establecimiento de $\mu = r$, usando la SDE de representación en (23). La EDP Black-Scholes resultante es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}. \tag{10.31}$$

En más detalle, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t}\left(S\left(t\right),\,t\right)+\frac{\partial f}{\partial S}\left(S\left(t\right),\,t\right)rS\left(t\right)+\frac{1}{2}\sigma^{2}S\left(t\right)^{2}\frac{\partial^{2}f}{\partial S^{2}}\left(S\left(t\right),\,t\right)=rf\left(S\left(t\right),\,t\right). \qquad (10.32)$$

11. Conclusiones

Después de haber realizado esta investigación se llegan a las conclusiones siguientes:

1. Se tiene que el valor del dinero cambia en el tiempo, por lo que si sólo guardamos el dinero estamos teniendo pérdidas. Por ello lo mejor es invertir el dinero o ponerlo en el Banco para poder obtener ganancias.
2. Es interesante poder aplicar el Movimiento Browniano a procesos económicos como la bolsa de valores.
3. Es muy importante tener simulaciones para ver como se comportan nuestros modelos teóricos y así poder compararlas con modelos reales.
4. Es importante iniciar un entendimiento de SDEs y ver cómo estas se aplican a la economía.
5. Es de mucha importancia estudiar Teoría de la Medida, ya que la aplicamos en probabilidad y en todo el transcurso del trabajo.
6. El principio de no arbitraje es de gran importancia pues con base en el se puede determinar el precio de un derivado.
7. Es importante analizar el riesgo que se tiene al hacer alguna inversión.
8. Hemos logrado conocer distintos elementos financieros como los bonos cupón, opciones, etc.

12. Bibliografía

Referencias

- F.Bass, Richard (2003). *The Basics of Financial Mathematics*. Departamento de Matemáticas, University of Connecticut.
- Morris H. DeGroot, Mark J. Shervish. *Probability and Statistics.* Editorial Pearson. Cuarta edición.
- Marek Capinski, Tomasz Zastawniak. Mathematics for Finance: *An Introduction to Financial Engineering.* Editorial Springer.
- Simo Särkkä. *Applied Stochastic Differential Equations.*
- Lawrence C. Evans. *An Introduction to stochastic Differential Equations*. Departamento de Matemáticas, UC Berkeley. Versión 1.2.
- R. Dunbar, Steven. *Stochastic Processes and Advanced Mathematical Finance*. Departamento de Matemáticas, University of Nebraska-Lincoln.

13. Anexos

A continuación se muestra una simulación del movimento Browniano en el que se puede apreciar que este sigue una distribución normal.

```
function x = brownian_motion_simulation ( m, n, d, t )

%*****************************************************************************80
%
%% BROWNIAN_MOTION_SIMULATION simulates Brownian motion.
%
%  Licensing:
%
%    This code is distributed under the GNU LGPL license.
%
%  Modified:
%
%    05 February 2012
%
%  Author:
%
%    John Burkardt
%
%  Parameters:
%
%    Input, integer M, the spatial dimension.
%    This defaults to 2.
%
%    Input, integer N, the number of time steps to take, plus 1.
%    This defaults to 1001.
%
%    Input, real D, the diffusion coefficient.
%    This defaults to 10.0.
%
%   Input, real T, the total time.
%   This defaults to 1.0;
%
%   Output, real X(M,N), the initial position at time 0.0, and
%   the N-1 successive locations of the particle.
%

%
%  Supply default values if necessary.
%
%   Example, with m=1
%   >>brownian_motion_simulation(1)
```

```
  if ( nargin < 4 )
    t = 1.0;
    fprintf ( 1, '\n' );
    fprintf ( 1, '  Using default total time T = %g\n', t );
  end

  if ( nargin < 3 )
    d = 10.0;
    fprintf ( 1, '\n' );
    fprintf ( 1, '  Using default diffusion coefficient D = %g\n', d );
  end

  if ( nargin < 2 )
    n = 1001;
    fprintf ( 1, '\n' );
    fprintf ( 1, '  Using default number of steps N = %g\n', n );
  end

  if ( nargin < 1 )
    m = 2;
    fprintf ( 1, '\n' );
    fprintf ( 1, '  Using default spatial dimension M = %g\n', m );
  end

%
%  Set the time step.
%
 dt = t / ( n - 1 );
%
%  Compute the individual steps.
%   x = zeros ( m, n );
%
%  Stepsize is normal.
%   s = sqrt ( d * dt ) * randn ( 1, n - 1 );
%
%  Direction is random.
%
   if ( m == 1 )
    dx(1:m,1:n-1) = s(1:n-1);
  else
    a = randn ( m, n - 1 );
    v = s ./ sqrt ( sum ( a.^2 ) );
   b = spdiags ( v', 0, n-1, n-1 );
    dx(1:m,1:n-1) = a * b;
  end
%
%  Each position is the sum of the previous steps.
```

```
%    x(1:m,2:n) = cumsum ( dx(1:m,1:n-1), 2 );
      %plot if m==1
  if m==1
    plot(0:t/(n-1):1,x)
  end
      return
 end
```

Al ejecutar el algoritmo anterior se obtienen los siguientes resultados: