

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



TRABAJO DE GRADUACIÓN TITULADO:
DIFERENTES DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DEL NUMERO PRIMO

PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

PRESENTADO POR:
BR. SANTOS WILMAR MORALES AREVALO. CARNÉ: MA04062

CIUDAD UNIVERSITARIA, FEBRERO DE 2015

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



TRABAJO DE GRADUACIÓN TITULADO:
DIFERENTES DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DEL NUMERO PRIMO

PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

PRESENTADO POR:
BR. SANTOS WILMAR MORALES AREVALO. CARNÉ: MA04062

DOCENTES ASESORES:

MSC. WALTER OTONIEL CAMPOS GRANADOS

LIC. EDWIN ALEXANDER AGUILAR MARTÍNEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, FEBRERO DE 2015

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS PERIODO 2011-2015

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR: ING. MARIO ROBERTO NIETO LOVO

VICERRECTORA ACADÉMICA: MAESTRA ANA MARÍA GLOWER DE ALVARADO

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO: MAESTRO ÓSCAR NOÉ NAVARRETE

SECRETARIA GENERAL: DRA. ANA LETICIA DE AMAYA

DEFENSORA DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS: LICDA. CLAUDIA MARÍA
MELGAR DE ZAMBRANA

FISCAL GENERAL: LIC. FRANCISCO CRUZ LETONA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO: M.SC. MARTÍN ENRIQUE GUERRA CÁCERES

VICEDECANO: LIC. RAMÓN ARÍSTIDES PAZ SÁNCHEZ

SECRETARIO: LIC. CARLOS ANTONIO QUINTANILLA APARICIO

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR: DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES

SECRETARIA: LICDA. ALBA IDALIA CÓRDOVA CUELLAR

A mis padres Maria Mariana y Santos Arnulfo

A mis hermanas Marina Elisseth y Marielos Yamileth

A mis hermanos Edwin Balmore e Isaac Alexander

A mis tías, primos, amigas, amigos, compañeras y compañeros.

A Dios por haber logrado mi meta con bien.

Wilmar

AGRADECIMIENTOS

A la Escuela de Matemática de la Universidad de El Salvador por haberme formado en sus aulas a través del conocimiento impartido por sus docentes.

A los docentes Msc. Walter Otoniel Campos Granados y el Lic. Edwin Alexander Aguilar Martínez por haberme brindado todo su apoyo en la revisión de principio a fin de este trabajo, dándome correcciones, observaciones y sugerencias. Así mismo agradezco la disponibilidad, la paciencia y el profesionalismo que mostraron siempre en cada una de las reuniones que tuvimos.

Índice general

RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
METODOLOGÍA	3
1. TEORIA PRELIMINAR	4
1.1. FUNCIONES ANALÍTICAS	4
1.1.1. Condiciones necesarias para la analiticidad	4
1.1.2. Condiciones suficientes para la analiticidad	6
1.2. INTEGRALES DE CONTORNO	6
1.3. REPRESENTACION EN SERIE DE FUNCIONES ANALÍTICAS	13
1.3.1. Series convergentes de funciones analíticas	14
1.3.2. Singularidades aisladas: puntos singulares	18
1.3.3. Extensión Analítica	19
1.4. INTEGRACIÓN EN CONTORNOS	23
1.4.1. Teorema del residuo	23
1.5. FUNCIONES ASINTÓTICAS.	25
1.6. LA FUNCIÓN GAMMA	28
1.7. DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE MELLIN	31
1.8. LA FUNCION ZETA DE RIEMANN	33
1.9. PRUEBA DE LA ECUACIÓN FUNCIONAL DE $\zeta(s)$ (METODO DE LA INTEGRAL DE HANKEL)	39
2. DESARROLLO DE LA DEMOSTRACIÓN ANALÍTICA DEL TNP	51
2.1. ESTIMACIÓN DE CHEBYCHEV	51
2.2. FUNCIONES DE CHEBYSHEV ψ y ϑ	58
2.3. PRUEBA DEL TNP VERSIÓN ANALÍTICA	65
3. DESARROLLO DE LA DEMOSTRACION ELEMENTAL DEL TNP	77
3.1. LA IDENTIDAD DE CHEBYCHEF Y SU INVERSIÓN	78
3.2. ALGUNOS RESULTADOS ELEMENTALES	84
3.3. DESIGUALDAD ELEMENTAL DE SELBERG	89

3.4. DEMOSTRACIÓN ELEMENTAL DEL TNP	94
3.5. ALGUNAS APLICACIONES DE TNP PRIMOS EN INTERVALOS	107
CONCLUSIONES	110

RESUMEN

Este trabajo de investigación consiste en estudiar el Teorema del Número Primo (TNP), que se enuncia: “Sea $\pi(x)$ es el número de primos menores o iguales a x , donde $x \in [0, +\infty)$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1”.$$

Queremos demostrar este teorema, que es uno de los más bellos e importantes en la historia de la matemática. Con este fin haremos no solo una demostración de este teorema, sino dos demostraciones. En un principio fue conjeturado por Adrien-Marie Legendre en 1798, y posteriormente a sido refinada por Gauss con la expresión que actualmente se asocia más frecuentemente al teorema. Sin embargo, los primeros matemáticos en demostrar el TNP, lo hicieron en forma independiente, ellos son J. Hadamard y C.J. de la Vallée-Poussin en 1896. A esta demostración le denominamos TNP versión analítica, porque utiliza la teoría de funciones analíticas de una variable compleja definida en cierta parte del plano. A partir de entonces surgen más demostraciones, hasta llegar al año de 1949, donde los matemáticos P. Erdős y A. Selberg encontraron una prueba elemental (pero no sencilla) del TNP, a esta demostración del teorema la denominamos TNP versión elemental, porque utilizaron argumentos de naturaleza elemental. Una simplificación drástica del TNP la dio D.J Newman en 1980, esta demostración es la realizaremos a detalle, la cual es una versión analítica del teorema. También realizaremos la demostración del TNP versión elemental hecha por A. Selberg (la forma simplificada Levinson y Wright). Vamos a comparar y revisar la evolución de estas dos pruebas, inclusive la prueba analítica presentada por Hadamard y C.J de la Vallé-Poussin.

Palabras clave: TNP versión analítica, TNP versión elemental.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de investigación consta de tres capítulos.

En el capítulo 1 titulado **teoría preliminar** se compone de nueve secciones, las primeras cuatro secciones presentamos los teoremas importantes de variable compleja y de análisis los cuales son: el teorema de Cauchy, fórmula integral de Cauchy, extensión analítica, teorema de la convergencia analítica (o teorema de Weierstrass) y el teorema del residuo. Esta teoría de funciones de variable compleja nos sirve de base para el estudio de la función zeta, con el fin de obtener sus propiedades, las cuales son: la función ζ es analítica en todo plano complejo excepto cuando $s = 1$, no se anula en $\Re s > 1$, no posee ceros en $\Re s = 1$, ceros simples y no triviales. Esto se estudia en las últimas cinco secciones.

En el capítulo 2 titulado **desarrollo de la demostración analítica del TNP** se compone de tres secciones. La sección 1 comprende la estimación de Chebyshev que establece que $\pi(x)$ y $\frac{x}{\log x}$ tienen el mismo orden de magnitud, pero lastimosamente esto no demuestra el TNP. Es por ello que necesitamos probarlo no directamente, sino con la versión equivalente del TNP, esto se estudia en la sección 2 y en la última sección se desarrolla el TNP versión analítica, lo primero que vamos a hacer es probar el corolario auxiliar de teorema de Ikehara-Weiner. Una vez probado, usamos el corolario con la función de Chebyshev y nos damos cuenta que cumple con las premisas entonces queda probado el TNP a través de su versión equivalente.

En el capítulo 3 titulado **desarrollo de la demostración elemental del TNP** se compone de cinco secciones. En la sección 1, se estudia la identidad de Chebyshev y su fórmula de inversión. Para obtener una idea global más acertada de la identidad de Chebyshev usamos la fórmula de sumación de Abel en la sección 2. También esta fórmula nos sirve para obtener la fórmula de sumación de Euler. Estos resultados los vamos a utilizar, para establecer la función $J(x)$ que al desarrollarla obtenemos la identidad de Tatzawa-Iseki, que conduce fácilmente a la desigualdad de Selberg en la sección 3. Realizamos una sustitución de la función $R(x)$ definida en el conjunto de los números reales, en la desigualdad de Selberg. Se probará en la sección 4, que $R(x) = o(x)$ esto implica el TNP a través de su versión equivalente. Después de demostrar el TNP uno espera aplicaciones interesantes, vamos a dar algunas en la sección 5.

METODOLOGÍA

Para el desarrollo de esta investigación, seguiremos los siguientes pasos:

1. Tipo de investigación. Este proyecto tiene las siguientes características:

- Revisión bibliográfica: Haremos búsqueda y selección de libros, artículos, revistas, esto para poder construir una base de datos de información teórica adecuada sobre el tema.
- Presentación de resultados básicos ó fundamentales: Daremos los tópicos necesarios para poder realizar las demostraciones de los teoremas fuertes.
- Demostración de los principales teoremas: Haremos detalladas demostraciones de teoremas, Proposiciones, lemas, corolarios, para cumplir nuestro objetivo propuesto.

2. Forma de Trabajo

- Se harán reuniones periódicas, con los asesores para discutir la estructura de los contenidos a presentar que serán indispensables en nuestro trabajo de investigación.
- Presentar los resultados importantes

3. Exposiciones. Se tendrán dos exposiciones

- Primera exposición: presentación del perfil del trabajo de graduación.
- Segunda exposición: presentación final del trabajo de graduación.

Capítulo 1

TEORIA PRELIMINAR

En este primer capítulo cimentamos las bases para nuestro estudio, introduciendo definiciones, proposiciones y teoremas de variable compleja y análisis matemático. Vamos a remitir todas las demostraciones de variable compleja ya que este no es el objetivo de este trabajo realizarlas. Las bondades que nos brindan son de mucha utilidad para establecer una conexión con la más famosa serie de Dirichlet llamada función zeta de Riemann y algunas propiedades que serán de gran utilidad para la demostración del Teorema del Número Primo que denotamos con las siglas TNP en el lapso de todo el documento.

1.1. FUNCIONES ANALÍTICAS

En teoría de funciones de variable compleja se extienden los conceptos del cálculo al plano complejo. Al realizarlo, la derivación y la integración adquieren una nueva profundidad y elegancia, y la naturaleza bidimensional del plano complejo produce muchos resultados que nos serán útiles en nuestra investigación matemática.

1.1.1. Condiciones necesarias para la analiticidad

La derivada de una función compleja de una variable compleja se define, exactamente, de la misma manera que el caso real del cálculo elemental.

Definición 1.1. *La derivada f' de una función compleja de una variable compleja f en un punto a , está dada por $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, cuando dicho límite exista.*

Observaciones.

- En la definición anterior, h es un número complejo, como también lo es el cociente $[f(a+h) - f(a)]/h$. Así, para que exista la derivada, es necesario que ese cociente tienda a un número complejo único: $f'(a)$ independiente de la manera en que h tienda a cero.
- La función f de variable compleja z se dice que es **analítica** (u **holomorfa**) en un conjunto

abierto si tiene derivada en todo punto de ese abierto, y se dice que f es **entera** si es analítica en todo \mathbb{C} .

- Cuando hablemos de una función analítica sobre un conjunto B que no es abierto, quedará sobreentendido que la función es analítica en algún abierto que contiene a B . En particular, f es analítica en un punto z_0 si es analítica en un entorno de z_0 .

Hay una diferencia fundamental entre la derivación para funciones de variables reales y la derivación para funciones de una variable compleja. Sea $z = (x, y)$, suponga que h es real y entonces

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = f_x(z).$$

Pero entonces si $h = ik$ es puramente imaginario, entonces

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{ik} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z) = -if_y(z).$$

Así, la existencia de una derivada compleja obliga a la función a satisfacer la ecuación diferencial parcial

$$f_x = -if_y.$$

Si $f(z) = u(z) + iv(z)$, donde u y v son funciones reales de una variable compleja, y si igualamos las partes reales y las imaginarias de

$$u_x + iv_x = f_x = -if_y = v_y - iv_y,$$

obtenemos la ecuaciones diferenciales de **Cauchy-Riemann**

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y. \tag{1.1}$$

Hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 1.1. Si la función $f(z) = u(z) + iv(z)$ tiene derivada en el punto z , las primeras derivadas parciales de u y v , con respecto a x y y , existen y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Ejemplo 1.1. Sea $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Como f es entera, $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$ deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Observe que

$$u_x = 2x = v_y \quad \text{y} \quad -u_y = 2y = v_x. \tag{1.2}$$

Por otra parte, si: $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, entonces $u = x^2 + y^2$, $v=0$ y $u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = 0 = v_y$, así que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann sólo en 0. Aún más, f tiene derivada cuando $z = 0$ porque

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} = 0.$$

1.1.2. Condiciones suficientes para la analiticidad

Recordar que si $f(z) = u(z) + iv(z)$, donde u y v son funciones reales de una variable compleja, y $z = (x, y)$, se tiene que las ecuaciones de Cauchy-Riemann están dadas por: $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$.

En este punto se podría preguntar si las ecuaciones de Cauchy-Riemann son suficientes para garantizar la existencia de la derivada en un punto dado. El ejemplo siguiente, de D. Menchoff, muestra que no es así. Sea

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\frac{f(z)}{z} = \left(\frac{z}{|z|} \right)^4, \quad z \neq 0,$$

que tiene valor 1 sobre el eje real y valor -1 sobre la línea $y = x$. Así, f no tiene derivada en $z = 0$; pero si se desarrolla la expresión para f se tiene

$$u(x, 0) = x, \quad u(0, y) = 0 = v(x, 0), \quad v(0, y) = y$$

Por lo que

$$u_x(0, 0) = 1 = v_x(0, 0), \quad -u_y(0, 0) = 0 = v_x(0, 0),$$

y se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann. Sin embargo, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.2. *Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, definida en alguna región G que contiene al punto z_0 , y que tiene primeras derivadas parciales continuas, con respecto a x e y , que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z_0 . Entonces $f'(z_0)$ existe*

Demostración. Ver en [31, pág 36]

□

1.2. INTEGRALES DE CONTORNO

Integración es un concepto de gran importancia y utilidad en el cálculo elemental. La naturaleza bidimensional del plano complejo sugiere considerar integrales a lo largo de curvas arbitrarias en \mathbb{C} en lugar de segmentos del eje real únicamente. Estas “integrales de línea” tienen propiedades interesantes y poco comunes cuando la función que se está integrando es analítica. La integración compleja es una de las teorías de las matemáticas en las que se trabaja con sumo entusiasmo, debido a su accesibilidad.

Integrales de Línea

Un *arco* γ en el plano es cualquier conjunto de puntos que pueden describirse en forma paramétrica por

$$\gamma: x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (1.3)$$

con $x(t), y(t)$ funciones continuas de la variable real t en el intervalo real cerrado $[\alpha, \beta]$. En el plano complejo se describe al arco γ por medio de la función compleja continua de una variable real

$$\gamma: z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (1.4)$$

Se dice que el arco γ es suave si la función $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ no se anula y es continua en $\alpha \leq t \leq \beta$. Un arco **spp**¹ consiste en un número finito de arcos suaves unidos por sus extremos. Si γ es un arco spp, entonces $x(t)$ y $y(t)$ son continuas pero sus derivadas $x'(t)$ y $y'(t)$ son continuas por partes. Un arco es **simple**, si $z(t_1) = z(t_2)$ sólo si $t_1 = t_2$, esto es, si no se intersecta a sí mismo, o autointersecta. Un arco es una **curva cerrada** si $z(\alpha) = z(\beta)$ y una **curva de Jordan** si es cerrada y simple excepto en los extremos α y β . La Figura 1.1 ilustra algunos de estos conceptos.

Las curvas de Jordan satisfacen la propiedad siguiente.

Teorema 1.3. *Una curva de Jordan separa el plano extendido en dos regiones simplemente conexas², que tienen a la curva como su frontera.*

Demostración. Ver en [33, pág 443] □

Observación.

- La región que contiene el punto al infinito se llama **exterior** de la curva; y la otra región se llama **interior**.

Una curva de Jordan está parametrizada en un **sentido positivo** si su interior se mantiene siempre a la izquierda cuando se recorre la curva. Por ejemplo, $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, parametriza a la curva $|z| = 1$ en su sentido positivo, mientras que $z(t) = e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, no lo hace.

Sea γ un arco suave \mathbb{C} y sea la función compleja $f(z)$ continua en γ . Se usa la parametrización de γ para definir la *integral de línea* de f sobre γ en términos de dos integrales reales. Si las dos integrales reales pueden evaluarse, se le podrá asignar un valor a la integral de línea.

¹ suave por partes

² Intuitivamente cuando en un conjunto conexo carece de cortes y agujeros

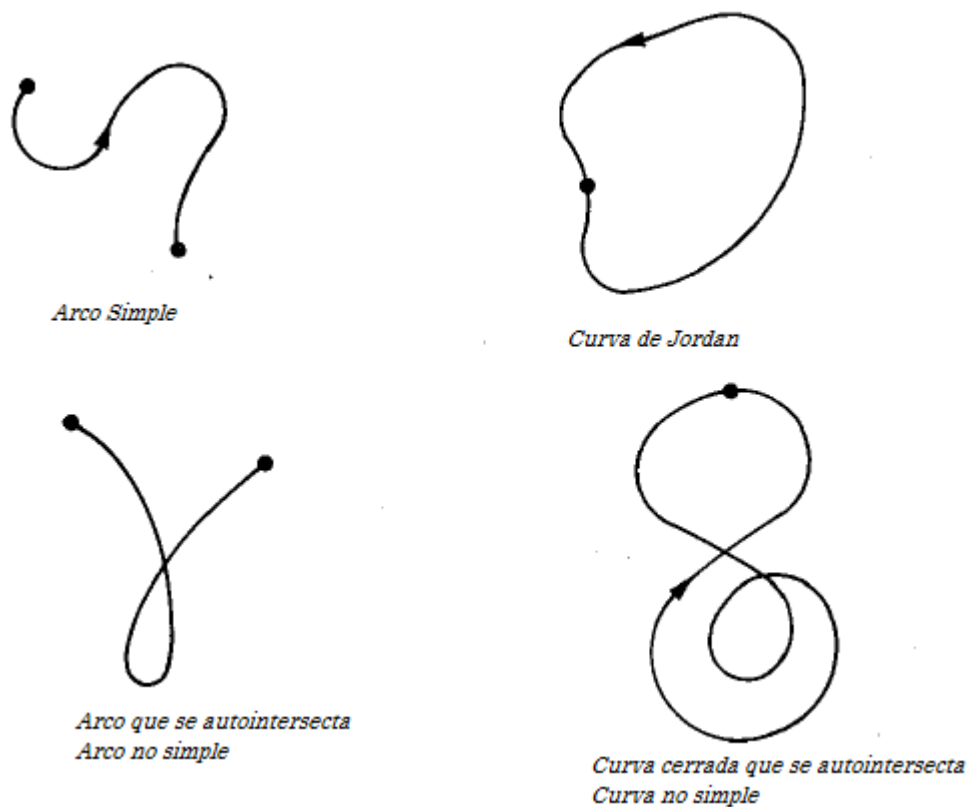


Figura 1.1: Arcos y curvas

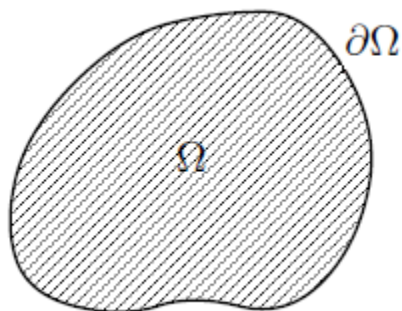


Figura 1.2: $\partial\Omega =$ curva de Jordan, Ω es el interior y la otra región es el exterior

Definición 1.2. Sea $\gamma: z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, un arco suave, y $f(z) = u + iv$ continua en γ . Así, la

integral de línea de f sobre γ estará dada por

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(z(t)) + iv(z(t))] [x'(t) + iy'(t)] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)] dt + i \int_{\alpha}^{\beta} [u(z(t))y'(t) + v(z(t))x'(t)] dt.\end{aligned}$$

La integral de línea sobre un arco γ spp se obtiene al aplicarse la definición anterior a un número finito de intervalos cerrado, en los cuales $z(t)$ es suave, y sumar los resultados.

Ejemplo 1.2. Para evaluar $\int_{\gamma} x dz$ a lo largo del arco spp, mostrado en la Figura 1.3, parametrize γ por

$$\gamma: z(t) = \begin{cases} 1 + it, & 0 \leq t \leq 1, \\ (2-t) + i, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Entonces

$$z'(t) = \begin{cases} i, & 0 \leq t \leq 1, \\ -1, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

con derivadas izquierda y derecha diferentes de $t = 1$. Por definición, al integrar sobre cada uno de los intervalos $0 \leq t \leq 1$ y $1 \leq t \leq 2$, se obtiene

$$\int_{\gamma} x dz = \int_0^1 i dt + \int_1^2 (2-t)(-1) dt = -\frac{1}{2} + i,$$

ya que $x(t) = 1$ en $0 \leq t \leq 1$ y $x(t) = 2 - t$ en $1 \leq t \leq 2$.

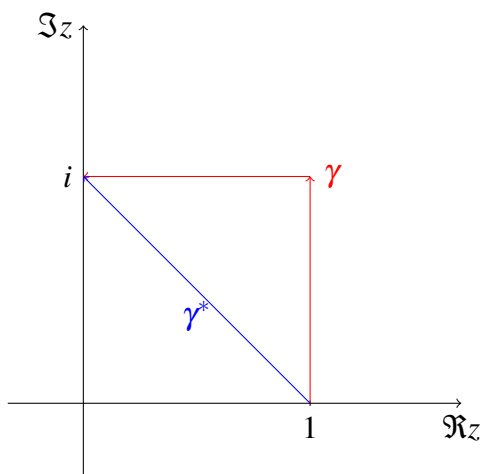


Figura 1.3: Arco γ spp

Al escoger una parametrización diferente para γ , por ejemplo

$$\gamma: z(t) = \begin{cases} 1 + i \log t, & 1 \leq t \leq e, \\ 2 - \frac{t}{e} + i, & e \leq t \leq 2e, \end{cases}$$

se tiene

$$z'(t) = \begin{cases} \frac{i}{t}, & 1 \leq t \leq e, \\ -\frac{1}{e}, & e \leq t \leq 2e, \end{cases}$$

y

$$\int_{\gamma} x \, dz = \int_1^e \frac{i}{t} \, dt + \int_e^{2e} \left(2 - \frac{t}{e}\right) \left(\frac{-1}{e}\right) \, dt = -\frac{1}{2} + i$$

Por lo tanto, la integral de línea es independiente de las dos parametrizaciones de γ . Este caso se dará siempre y cuando el cambio de parámetros sea derivable por partes, como se puede comprobar fácilmente al utilizar la fórmula de cambio de variable del cálculo integral[31].

Se obtiene un valor diferente si se integra sobre el segmento de línea γ^* que une a 1 con i . Así,

$$\gamma^*: z(t) = (1-t) + it, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

así que

$$\int_{\gamma^*} x \, dz = \int_0^1 (1-t)(-1+i) \, dt = \frac{-1+i}{2}$$

Este ejemplo muestra que no se puede obtener un teorema similar al teorema fundamental del cálculo para *todas* las funciones complejas continuas $f(z)$. Suponga, por otra parte, que se consideran únicamente aquellas funciones continuas $f(z)$, que son derivadas de una función analítica $F = U + iV$ en alguna región G que contiene el arco suave γ . Entonces por definición,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) \, dz &= \int_{\gamma} F'(z) \, dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} F'(z(t))z'(t) \, dt. \end{aligned}$$

Con la regla de la cadena del cálculo obtengo

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} F'(z(t))z'(t) \, dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}[F(z(t))] \, dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}[U(z(t))] \, dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}[V(z(t))] \, dt. \end{aligned}$$

Si se aplica el teorema fundamental del cálculo a cada una de estas integrales reales, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= [U(z(\beta)) - U(z(\alpha))] + i[V(z(\beta)) - V(z(\alpha))] \\ &= F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).\end{aligned}$$

Además, se puede extender este resultado a los arcos spp con la suma de los resultado obtenidos de los subarcos suaves. Como el resultado depende únicamente de los puntos extremos de cada subarco suave, se habrá probado el siguiente teorema.

Teorema 1.4. Si $F(z)$ es una función analítica con derivada continua, $f(z) = F'(z)$ en una región G que contiene el arco spp $\gamma: z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

Demostración. Ver en [31, pág 66]. □

Observación.

- Como la *integral* solo depende de los extremos del arco γ , es *independiente de la trayectoria*. De esta forma se obtiene el resultado para *cualquier* arco spp en G con estos extremos. Para curvas γ , spp cerradas, el teorema fundamental establece que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

ya que $F(z(\beta)) = F(z(\alpha))$.

El Teorema de Cauchy

Para demostrar el teorema de Cauchy primero utilicemos el siguiente teorema.

Teorema 1.5. (El Teorema de Green)

Sea G la región interior de una curva de Jordan γ spp y suponga que las funciones reales $p(x,y)$ y $q(x,y)$ son continuas en $G \cup \gamma$ con primeras derivadas parciales continuas en G . Entonces

$$\int \int_G (p_x + q_y) dx dy = \int_{\gamma} p dy - q dx$$

Demostración. Ver [31, pág 273 apéndice]. □

Ahora, si $f = u + iv$ es analítica sobre y en el interior de una curva de Jordan γ spp, reescriba la integral de f a lo largo de γ en la forma

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy.$$

Si f' es continua en G , entonces las primeras derivadas parciales u_x, u_y, v_x, v_y también lo son. Al aplicarse el teorema de Green a las dos integrales de línea de la derecha, se obtiene

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int \int_G (v_x + v_y) dx dy + i \int \int_G (u_x - v_y) dx dy.$$

Las primeras derivadas satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, porque f es analítica. Por tanto, ambos integrandos del lado derecho son cero. Bajo el supuesto de que $f'(z)$ es continua en G se ha probado el teorema siguiente.

Teorema 1.6. (Teorema de Cauchy)

Sea $f(z)$ una función analítica sobre y en el interior de la curva de Jordan γ . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (1.5)$$

Demostración. Ver en [31, pág 72] y [14, pág 128]. □

Observación 1.1. Nótese una vez que el valor de esa integral es cero, la orientación de γ es irrelevante. Esto es, (1.5) es válida también si γ se toma en sentido negativo (el giro de las agujas del reloj), ya que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Goursat fue el primero en demostrar que la condición de continuidad sobre f' se puede omitir.

La Fórmula Integral de Cauchy

En muchas aplicaciones es necesario considerar regiones que no son simplemente conexas. Se generaliza el teorema de Cauchy al caso de una región *múltiplemente conexa*.

Teorema 1.7. Sea γ_0 una curva de Jordan spp tal que su interior contiene las curvas de Jordan spp disjuntas, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, ninguna de las cuales está contenida en el interior de la otra. Suponga que $f(z)$ es analítica en una región G que contiene al conjunto S , el cual consiste en todos los puntos sobre y en el interior de γ_0 pero no en los interiores de γ_k , $k = 1, \dots, n$. Entonces

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

Demostración. Ver en [31, pág 79]. □

A continuación se probará el sorprendente resultado de que los valores de una función analítica, en el interior de una curva de Jordan spp, están completamente determinados por sus valores sobre la curva.

Teorema 1.8. (La Fórmula Integral de Cauchy)

Sea $f(z)$ una función analítica en una región simplemente conexa que contenga la curva de Jordan γ spp. Entonces

$$f(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \eta} dz,$$

para todos los puntos η en el interior de γ .

Demostración. Ver en [31, pág 80]. □

Observación.

- Si la fórmula integral de Cauchy se deriva formalmente respecto a η dentro del signo de integración, se obtiene la expresión para la derivada en todos los puntos del interior de γ :

$$f'(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \eta)^2} dz$$

y generalizando el teorema de Cauchy para las derivadas

$$f^{(n)}(\eta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \eta)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, \dots$$

válido para todos los puntos η del interior de una curva de Jordan γ spp contenida en una región G simplemente conexa, en la cual $f(z)$ es analítica. Esta fórmula implica que $f(z)$ tiene derivadas de todos los órdenes en G . Por ende, la derivada de una función analítica es también analítica.

1.3. REPRESENTACION EN SERIE DE FUNCIONES ANALÍTICAS

Existe una forma alternativa importante para definir una función analítica. En ciertos tratamientos de la teoría de funciones de funciones complejas. Una función f es llamada *analítica* si, localmente, se representa como una serie de potencias. Si esto puede hacerse, esa serie deberá ser la serie de Taylor de f . Esta definición nos sirve para poder extender el dominio de definición de funciones analíticas a regiones mas grandes en el plano complejo. Como el cálculo de variable real, la serie de Taylor de $f(z)$ con centro en a es

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \frac{1}{2}f''(a)(z - a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

Así, una función analítica es aquella que es infinitamente derivable, de modo que se puede escribir su serie de Taylor y la serie resultante converge a la función. Con las variables reales no sucede esto, cada una de estas tareas puede representar un problema puede que la primera deriva exista pero la segunda no existir aun si todas la demás derivada existiesen, la serie de Taylor puede no converger a la función.

Una de las cosas más agradable sobre el análisis complejo es que no surge ninguna de estas dificultades. Asumir que la derivada compleja existe, es mucho mas fuerte que asumir que la derivada real exista. Ya que si la primera derivada compleja existe en una región, todas las derivadas superiores deberán existir también. Si f es analítica en una región A y z_0 está en A , entonces la serie de Taylor de f con centro en z_0 , debe converger a f en el disco abierto más grande centrado en z_0 y contenido en A .

1.3.1. Series convergentes de funciones analíticas

El tipo básico de convergencia que se estudia en esta sección es la convergencia uniforme. El criterio M de Weierstrass es la herramienta básica usada para determinar tal convergencia.

Definición 1.3. Se dice que una sucesión de números complejos z_n converge al número complejo z_0 si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número entero N tal que $n \geq N$ implica que $|z_n - z_0| < \varepsilon$. La convergencia de z_n a z_0 se denota por $z_n \rightarrow z_0$. Se dice que la serie infinita converge a S , y escribimos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$, si la sucesión de sumas parciales definidas como $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ converge a S .

El límite z_0 es único; esto es, una sucesión puede converger a un solo punto z_0 . Una sucesión z_n converge si es una *sucesión de Cauchy*, en otras palabras, si, para toda $\varepsilon > 0$, existe una N tal que $n, m \geq N$ implica que $|z_n - z_m| < \varepsilon$. (Equivalentemente la definición de sucesión de Cauchy puede leerse: Para todo $\varepsilon > 0$, existe una N tal que $n \geq N$ implica que $|z_n - z_{n+p}| < \varepsilon$ para todo entero $p = 0, 1, 2, \dots$). Esta propiedad de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ se sigue de la correspondiente propiedad de \mathbb{R} y aceptaremos esto del cálculo avanzado.

Como en las series reales, se dice que una serie compleja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge. Usando el criterio de Cauchy obtenemos:

Proposición 1.1. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, entonces converge

Esta proposición es importante porque $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es una serie *real* y los criterios usuales para series reales que conocemos del cálculo, pueden ser aplicados. Algunos de esos criterios están incluidos en la siguiente proposición.

Convergencia uniforme

Supóngase que $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ es una sucesión de funciones, todas ellas definidas en el conjunto A . Se dice que la sucesión *converge puntualmente* si, para cada $z \in A$, la sucesión $f_n(z)$ converge. El límite define una nueva función $f(z)$ en A . Una clase más importante de convergencia es la llamada convergencia uniforme y se define como sigue.

Definición 1.4. Una sucesión $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ de funciones definidas en un conjunto A , se dice que *converge uniformemente* a una función f , si para cada $\varepsilon > 0$, existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para cada $z \in A$. Esto se escribe como “ $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A ”.

Se dice que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *converge puntualmente*, si las correspondientes sumas parciales $s_n(z) = \sum_{k=1}^n g_k(z)$ converge puntualmente. Se dice que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *converge uniformemente* si $s_n(z)$ converge uniformemente

Proposición 1.2. Criterio de Cauchy

- Una sucesión $f_n(z)$ converge uniformemente en A , si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una N tal que $n \geq N$ implica que $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon$ para toda $z \in A$ y toda $p = 1, 2, 3, \dots$
- Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en A si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una N tal que $n \geq N$ implica que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| < \varepsilon$$

para toda $z \in A$ y toda $p = 1, 2, \dots$

Demostración. Ver en [14, pág 217]. □

El siguiente resultado establece una propiedad básica de la convergencia uniforme.

Proposición 1.3. Si la sucesión f_n consiste de funciones continuas definidas en A y si $f_n \rightarrow f$ uniformemente, entonces f es continua en A . Similarmente, si las funciones $g_k(z)$ son continuas y $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en A , entonces g es continua en A .

Demostración. Ver en [14, pág 218]. □

En otras palabras, un límite uniforme de funciones continuas es continuo. Si la convergencia no es uniforme, entonces el límite puede ser discontinuo.

El criterio M de Weierstrass

El criterio M de Weierstrass es una de las herramientas teóricas y prácticas más útiles para mostrar que una serie converge uniformemente. Éste no siempre funciona, pero es efectivo en muchos casos.

Proposición 1.4. (El Criterio M de Weierstrass)

Sea g_n una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$. Suponga que existe una sucesión de constantes reales $M_n \geq 0$ tal que

- $|g_n(z)| \leq M_n$ para toda $z \in A$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge absolutamente y uniformemente en A .

Demostración. Ver en [14, pág 209]. □

Proposición 1.5. (Sumación por partes)

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ en \mathbb{C} , $\Delta b_k = b_{k-1} - b_k$ entonces $\sum_{k=p}^q a_k \Delta b_k = a_{q+1} b_{q+1} - a_p b_p - \sum_{k=p}^q b_{k+1} \Delta a_k$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=p}^q a_k \Delta b_k &= \sum_{k=p}^q a_k (b_{k+1} - b_k) \\
 &= a_p (b_{p+1} - b_p) + a_{p+1} (b_{p+2} - b_{p+1}) + \cdots + a_q (b_{q+1} - b_q) \\
 &= a_p b_{p+1} - a_p b_p + a_{p+1} b_{p+2} - a_{p+1} b_{p+1} + \cdots + a_{q-2} b_{q-1} - a_{q-2} b_{q-2} + \cdots + a_q b_{q+1} - a_q b_q \\
 &= -a_p b_p + b_{p+1} (a_p - a_{p+1}) + b_{p+2} (a_{p+1} - a_{p+2}) + \cdots + b_q (a_{q-1} - a_q) + a_q b_{q+1} \\
 &\quad - a_{q+1} b_{q+1} + a_{q+1} b_{q+1}; \text{ sumando y restando el mismo término} \\
 &= -a_p b_p + b_{p+1} (a_p - a_{p+1}) + b_{p+2} (a_{p+1} - a_{p+2}) + \cdots + b_q (a_{q-1} - a_q) \\
 &\quad + b_{q+1} (a_q - a_{q+1}) + a_{q+1} b_{q+1} \\
 &= a_{q+1} b_{q+1} - a_p b_p - b_{p+1} (a_{p+1} - a_p) - \cdots - b_q (a_q - a_{q-1}) - b_{q+1} (a_{q+1} - a_q) \\
 &= a_{q+1} b_{q+1} - a_p b_p - \sum_{k=p}^q b_{k+1} (a_{k+1} - a_k) \\
 &= a_{q+1} b_{q+1} - a_p b_p - \sum_{k=p}^q b_{k+1} \Delta a_k.
 \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado es uno de los principales teoremas concernientes a la convergencia de funciones analíticas. El teorema fue formulado por Karl Weierstrass en 1860, aproximadamente.

Teorema 1.9. (Teorema de Convergencia Analítica)

- Sea A una región en \mathbb{C} y sea f_n una sucesión de funciones analíticas definidas en A . Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en A , entonces f es analítica. Más aún $f'_n \rightarrow f'$ puntualmente en A y uniformemente en cualquier disco cerrado en A .
- Si g_k es una sucesión de funciones analíticas definidas en una región A en \mathbb{C} y $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en cualquier disco cerrado en A , entonces g es analítica en A y $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g'_k(z)$ converge puntualmente en A y también uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en A .

Demostración. Ver en [14, pág 212]. □

Observación.

- Realmente se cumple para toda derivada $g^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(n)}(z)$ con $n = 1, 2, \dots$

Lema 1.1. Supongamos que $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, y sea φ es una función continua de variable compleja en el espacio producto $\Omega \times [a, b]$. Suponga que para cada $t \in [a, b]$, la función $z \rightarrow \varphi(z, t)$ es analítica en Ω . Definamos F en Ω por $F(z) = \int_a^b \varphi(z, t) dt$, $z \in \Omega$. Entonces F es analítica en Ω y

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, t) dt, \quad z \in \Omega.$$

Demostración. Ver en [2, pág 10]. □

Lema 1.2. (Vitali) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones acotadas en $A(\Omega)$ ³ donde Ω es conexo. Suponga que $\{f_n\}$ converge puntualmente en $S \subseteq \Omega$ y S tiene un punto límite en Ω . Entonces $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en subconjuntos compactos de Ω , por tanto, converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω para alguna $f \in A(\Omega)$.

Demostración. Ver en [2, pág 6]. □

³Es el espacio lineal de todas las funciones analíticas en un conjunto abierto Ω .

1.3.2. Singularidades aisladas: puntos singulares

Un punto en el cual $f(z)$ no es analítica es llamado *punto singular o singularidad* de $f(z)$. Existen varios tipos de singularidades.

1. **Singularidad aislada.** El punto $z = z_0$ es llamado *punto singular* de $f(z)$ si encontramos un $\delta > 0$ tal que el círculo $|z - z_0| = \delta$ no encierra otro punto singular que no sea z_0 (i.e, existe un entorno reducido δ de z_0 que no contiene otro punto singular).
2. **Polos.** Si z_0 es una singularidad aislada y podemos encontrar un entero positivo n tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$, entonces $z = z_0$ es llamado *un polo de orden n* . Si $n = 1$, z_0 es llamado *un polo simple*.

Ejemplo 1.3.

(a). Sea $f(z)$ expresado en serie finita de Laurent en un polo de orden n alrededor de z_0 así

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)}; \quad a_{-n} \in \mathbb{C}, \quad a_{-1} = \text{residuo de } f \text{ en } z_0.$$

(b). $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3}$ tiene un polo de orden 3 en $z = 1$.

(c). $f(z) = \frac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$ tiene un polo de orden 2 en $z = 1$ y polos simples en $z = -1$ y $z = 4$.

Si $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, donde $f(z_0) \neq 0$ y n es un entero positivo, entonces $z = z_0$ es llamado *un cero de orden n* de $g(z)$. Si $n = 1$, z_0 es llamado *cero simple*. En tal caso, z_0 es un polo de orden n de la función $\frac{1}{g(z)}$.

3. **Singularidad removible.** Un punto singular aislado z_0 es llamado *punto singular removible* de $f(z)$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.

Ejemplo 1.4. El punto singular $z = 0$ es singular removible de $f(z) = \sin z/z$, dado que $\lim_{z \rightarrow z_0} \sin z/z = 1$.

4. **Singularidad esencial.** Una singularidad aislada que no es un polo o una singularidad removible es llamada una *singularidad esencial*.

Ejemplo 1.5. Si $f(z) = e^{1/(z-3)}$ tiene una singularidad esencial en $z = 3$.

Definición 1.5. Una función analítica en una región G , excepto para los polos en G , se llama *meromorfa* en G .

1.3.3. Extensión Analítica

Sucede a menudo que la expresión $f_0(z)$, como una serie infinita o una integral **que define una función analítica**, sólo tiene significado en alguna región limitada G_0 del plano. Surge entonces la pregunta de si existe o no alguna forma de extender la definición de la función y volverla analítica en una región mayor. En particular, ¿es posible encontrar una expresión $f_1(z)$ analítica en una región G_1 que intersecte a G_0 tal que $f_0(z) = f_1(z)$, para todo $z \in G_0 \cap G_1$? Efectivamente así es, por lo que se puede extender esta función a la región $G_0 \cup G_1$, y se dice que los elementos (f_0, G_0) y (f_1, G_1) forman una **extensión analítica directa** lo cual significa que a partir del elemento (f_0, G_0) podemos extenderme analíticamente al elemento (f_1, G_1) , se dice entonces que (f_1, G_1) es una extensión analíticamente de (f_0, G_0) . Cualquier extensión analítica directa de (f_0, G_0) a G_1 es necesariamente única, porque dos funciones analíticas en G_1 concordantes en $G_0 \cap G_1$ deben coincidir en G_1 .

Un procedimiento para obtener extensiones analíticas empieza por desarrollar la expresión dada en una serie de Taylor

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

que converja en el disco $C_0 = \{z \in \mathbb{R} / |z-z_0| < R_0\}$ centrado en el punto z_0 de G_0 . Esto es cuando no sabemos la forma precisa de una función analítica y sólo sabemos la convergencia en un disco centrado en z_0 de radio R_0 se puede desarrollar la serie de Taylor. Si tomamos un punto interior z_1 en el disco de C_0 , es decir, si satisface $|z_1 - z_0| < R_0$, se puede desarrollar f_0 en la serie de potencias

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_1)^n, \quad b_n = \frac{f_0^{(n)}(z_1)}{n!}$$

que converja en el disco $|z-z_1| < R_1$. Ciertamente, $R_1 \geq R_0 - |z_1 - z_0|$. Si se cumple la igualdad, el punto de contacto de los círculos $|z-z_0| = R_0$ y $|z-z_1| = R_1$ debe ser una singularidad de la función, puesto que el teorema de Taylor implica la existencia de una singularidad en cada círculo de convergencia. De otra manera, una parte de $|z-z_1| < R_1$ se localizará en el exterior de $|z-z_0| < R_0$ y $(f_1, \{|z-z_1| < R_1\})$ sería una extensión analítica de $(f_0, \{|z-z_0| < R_0\})$, ya que ambas coinciden en el traslape.

Ejemplo 1.6. *La serie de potencias*

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z - \frac{1}{2}\right)^n$$

tiene radio de convergencia $R = 1$, así que la región de convergencia G_0 es el disco $|z - \frac{1}{2}| < 1$. Se puede continuar (f_0, G_0) a un disco centrado en 0 calculando

$$f_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad f_0'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots,$$

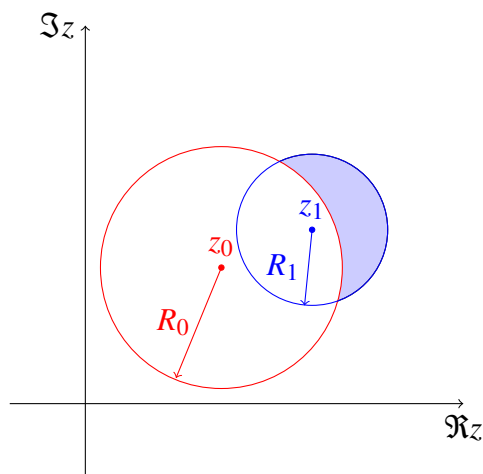


Figura 1.4: Extensión analítica directa.

pero es más fácil de observar que $f_0(z) = \frac{1}{3/2-z}$ en G_0 . Entonces, con el Ejemplo 2, Sección 3.1 de [31], se tiene

$$f_1(z) = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \left(\frac{2z}{3}\right)} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2z}{3}\right)^n, \quad |z| < \frac{3}{2},$$

lo cual implica que G_1 es el disco $|z| < 3/2$, y $z = 3/2$ es una singularidad de la función.

Este proceso puede continuarse, pero debe tener cuidado, porque una sucesión de discos podría volverse a traslaparse con el primero, y es posible que no coincida con el traslape. Esto ocurre cuando la función es multivaluada y los discos llevan alrededor de un punto rama de la función, y sobre una rama diferente de su superficie de Riemann (ver Figura 1.5). Así, aun si (f_2, G_2) es una extensión analítica directa de (f_1, G_1) , no necesariamente lo es de (f_0, G_0) , y sólo una función multivaluada (es decir, con infinitas ramas) servirá para definir la extensión.

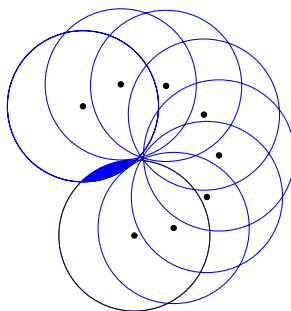


Figura 1.5: Una extensión analítica.

Ejemplo 1.7. Considerese la función $f(z) = 1/\sqrt{z}$ en los puntos $z = e^{\pi i/4}, e^{7\pi i/4}$. Si se utiliza el teorema binomial, se puede obtener el desarrollo en serie de Taylor alrededor de cada uno de esos dos puntos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{z}} &= e^{-\pi i/8} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - ze^{-\pi i/4})}} \\ &= e^{-\pi i/8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (1 - ze^{-\pi i/4})^n, \quad |z - e^{\pi i/4}| < 1,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{z}} &= e^{-7\pi i/8} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - ze^{-7\pi i/4})}} \\ &= e^{-7\pi i/8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (1 - ze^{-7\pi i/4})^n, \quad |z - e^{7\pi i/4}| < 1.\end{aligned}$$

Al evaluar la primera expresión en e^0 y la segunda en $e^{2\pi i}$, se obtiene $e^0 = 1$ y $e^{-\pi i} = -1$, respectivamente. Nótese que en la superficie de Riemann $[\mathbb{C} - \{0\}]^2$, para $f(z) = 1/\sqrt{z}$, el punto e^0 no pertenece en el disco $|z - e^{7\pi i/4}| < 1$.

Cada elemento de una cadena $(f_0, G_0), (f_1, G_1), \dots, (f_n, G_n)$, donde (f_j, G_j) es una extensión analítica directa de (f_{j-1}, G_{j-1}) , se llama *extensión analítica* de los otros. Así, el procedimiento anterior puede utilizarse para construir extensiones analíticas, donde la elección de los centros z_1, z_2, \dots, z_n determine los valores de la función. En particular, si γ es una curva que une a z_0 con un punto z' que no está en el disco $|z - z_0| < R_0$, se puede construir una extensión analítica, que consista de discos $|z - z_j| < R_j$ de convergencia de representaciones por series de la función, de tal forma que z_j siga a z_{j-1} en la parametrización de γ . Al llegar a z' por una cadena finita de tales discos, se dice que ésta es una **extensión analítica de la función a lo largo de la curva γ** (Ver Figura 1.6). Por otra parte se tiene un número infinito de discos, cuyos centros z_j convergen a un punto z^* de γ , y, por tanto, sus radios convergen a cero. Además, debe haber una singularidad de la función en la frontera de cada uno de estos discos, y estas singularidades también tienden a z^* . Puesto que toda ε -vecindad de z^* contiene una singularidad, la función no puede ser analítica en z^* . Así, se ha probado el teorema siguiente.

Teorema 1.10. *La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_n)^n$ puede extenderse analíticamente a lo largo de cualquier curva γ que empiece en su disco de convergencia $|z - z_0| < R_0$ hasta que se encuentre una de sus singularidades.*

Intuitivamente, si γ y γ' son arcos disjuntos, excepto en sus dos extremos z_0 y z' tales que no existen singularidades sobre o en el interior de la curva cerrada $\gamma - \gamma'$, entonces *el resultado de la extensión analítica para cada trayectoria es el mismo*, ya que en el interior podría cubrirse con discos traslapasen a los de la extensión analítica a lo largo de los dos arcos (ver Figura 1.7). Este resultado se llama **teorema de la monodromía**.

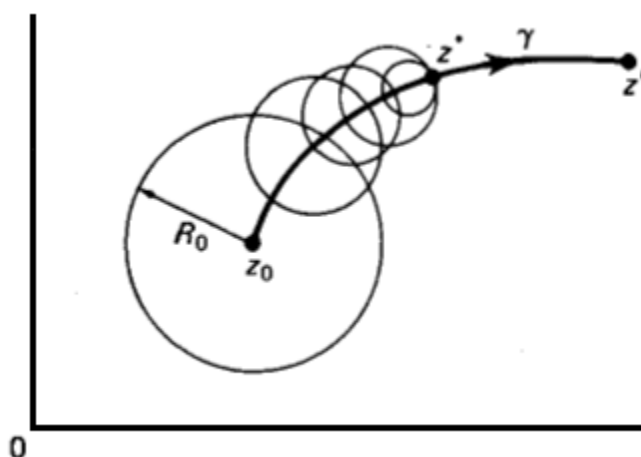


Figura 1.6: Extensión analítica a lo largo de γ .

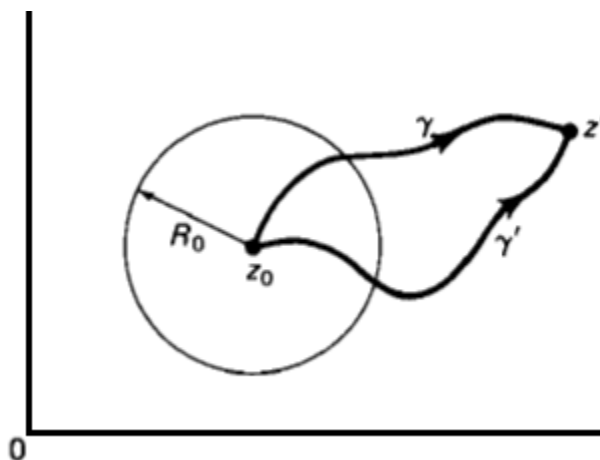


Figura 1.7:

Definición 1.6. Una *función analítica global* es una colección \mathcal{F} de elementos (f, G) , tales que dos cualesquiera de ellos son una extensión analítica del otro, a través de una cadena de elementos de \mathcal{F} .

Ejemplo 1.8. Sea G_k la región que consiste en todos los puntos z que satisfacen $|\arg z - (k\pi/2)| < \pi/2$, para todos los enteros k , y sea $f_k(z) = \log z$, para todo z en G_k . Entonces la colección $(f_0, G_0), (f_1, G_1), \dots, (f_n, G_n), \dots$ es una función analítica global, ya que es la colección de elementos (f_j, G_j) para todo entero j .

Se dice que dos elementos $(f_0, G_0), (f_1, G_1)$ determinan la misma **rama** de una función analítica global en un punto z_0 de $G_0 \cap G_1$ si $f_0(z) = f_1(z)$ en una ε -vecindad de z_0 . Nótese, sin embargo, que no es necesario que los elementos de la función sean extensiones analíticas directas uno del otro.

Ejemplo 1.9. Si G_k consiste en todos los puntos z que satisfacen $|\arg z - (k\pi/2)| < 3\pi/4$, y $f_k(z) = \log z$, para todo $z \in G_k$ y todo entero k , entonces $e^{i\pi/2}$ pertenece a $G_0 \cap G_2$ y $f_0(z) = f_2(z)$, para todo z con $|\arg z - (\pi/2)| < \pi/4$, aunque (f_0, G_0) y (f_2, G_2) no sean extensiones analíticas directas uno del otro (ver Figura 1.9).

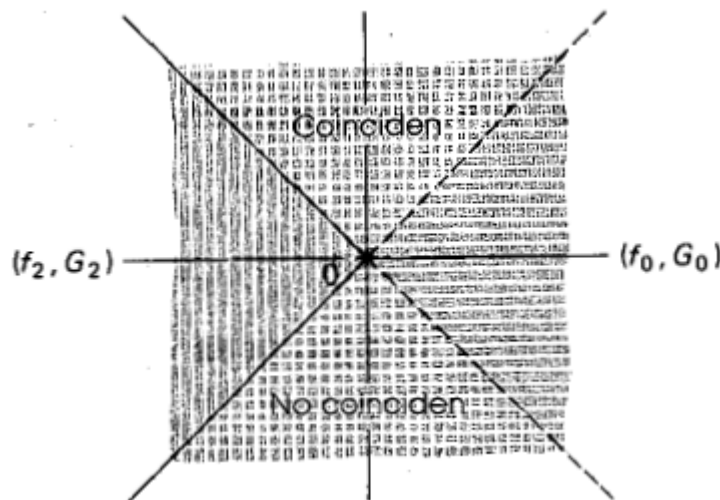


Figura 1.8:

Para extendernos analíticamente en el plano complejo a partir de dos funciones analíticas que cumplen cierta restricción, tenemos el siguiente razonamiento.

Si f y g son funciones analíticas en Ω que son iguales en un disco arbitrariamente pequeño en Ω entonces $f = g$ en todo Ω .

1.4. INTEGRACIÓN EN CONTORNOS

1.4.1. Teorema del residuo

Supongamos que z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$ y que $f(z)$ tiene la *serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < \rho$$

Definimos el residuo de $f(z)$ en z_0 es el coeficiente a_{-1} de $1/(z-z_0)$ en esta expansión de Laurent

$$\text{Res}[f(z), z_0] = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz$$

donde r es cualquier radio fijo que satisface $0 < r < \rho$.

Ejemplo. Utilizando la definición se obtiene inmediatamente

$$\text{Res}\left[\frac{1}{z}, 0\right] = 1, \quad \text{Res}\left[\frac{1}{(z-z_0)^2}, z_0\right] = 0$$

Ejemplo. La descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + i} \right] = \frac{1}{2i} \frac{1}{z - i} + [\text{analítica en } i]$$

obtenemos

$$\text{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 1}, i \right] = \frac{1}{2i}.$$

El siguiente teorema del residuo es una importante herramienta para la evaluación de integrales de línea compleja. Se extiende el teorema de Cauchy por lo que permite un número finito de singularidades dentro del contorno de integración. Cuando no hay singularidades presentes, el teorema del residuo se reduce al teorema de Cauchy.

Teorema 1.11. (Teorema del residuo).

Sea $f(z)$ analítica en una región G , que contiene al conjunto de todos los puntos dentro y sobre una curva de Jordan γ spp excepto por un número finito de singularidades z_1, \dots, z_k en el interior de γ . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res} [f(z), z_n].$$

Demostración. Ver en [31, págs 133 – 134]. □

Damos tres reglas para calcular el residuo.

Regla 1. Si $f(z)$ tiene un polo de orden k , entonces

$$\text{Res} [f(z), z_0] = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]$$

Para el caso $k = 1$ la función $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 , entonces

$$\text{Res} [f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

En este caso la serie de Laurent de $f(z)$ es

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + [\text{analítica en } z_0], \quad (1.6)$$

aplicando la regla se deduce inmediatamente.

Observación 1.2. Notar que una vez que se obtiene una expresión $(z - z_0)f(z)$ como una función analítica, luego se aplica el límite cuando $z \rightarrow z_0$ para obtener el residuo.

Ejemplo. Para la regla 1 tenemos

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 1}, i \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{z + i} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}$$

Este método de obtención del residuo es más rápida que la descomposición de fracciones parciales.

Regla 2. Si $f(z)$ y $g(z)$ son analítica en z_0 , y si $g(z)$ tiene un cero simple en z_0 , entonces

$$\operatorname{Res} \left[\frac{f(z)}{g(z)}, z_0 \right] = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

En este caso $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene a lo sumo un polo simple z_0 . Si usamos la Regla 1 y la definición de la derivada obtenemos el residuo del cociente en z_0

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(g(z) - g(z_0))/(z - z_0)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

Ejemplo. La descomposición en fracciones parciales de la función $z^3/(z^2 + 1)$ es

$$\frac{z^3}{z^2 + 1} = z - \frac{1}{2} \frac{1}{z - i} - \frac{1}{2} \frac{1}{z + i}.$$

De esto se ve que los residuo $\pm i$ ambos son $-\frac{1}{2}$. Los residuos pueden obtenerse usando directamente la Regla 2. El residuo en i está dado por

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z^3}{z^2 + 1}, i \right] = \frac{z^3}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{i^3}{2i} = -\frac{1}{2}.$$

El siguiente caso especial de la Regla 2 es particularmente útil.

Regla 3. Si $g(z)$ tiene un cero simple en z_0 , entonces

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{g(z)}, z_0 \right] = \frac{1}{g'(z_0)}$$

Ejemplo. Aplicando la Regla 3 a $1/(z^2 + 1)$ obtenemos el residuo más rápido que antes.

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 1}, i \right] = \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}.$$

1.5. FUNCIONES ASINTÓTICAS.

Definición 1.7. Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

diremos que $f(x)$ es asintótica a $g(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$, y escribiremos

$$f(x) \sim g(x) \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

Propiedades 1.1. Consideremos estrictamente solo funciones positivas $f(x), f_0(x), g(x), g_0(x)$ y $h(x)$. En cada uno de los numerales consideramos a $x \rightarrow \infty$.

1. Si $f(x) \sim g(x)$ y $g(x) \sim h(x)$ entonces $f(x) \sim h(x)$.
2. Si $f(x) \sim ah(x)$ y $g(x) \sim bh(x)$, donde $a > b > 0$ entonces $f(x) \pm g(x) \sim (a \pm b)h(x)$.
3. Si $f(x) \sim f_0(x)$ y $g(x) \sim g_0(x)$ entonces $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f_0(x)}{g_0(x)}$.

Demostración. 1. Dado que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$, luego multiplicando estos dos límites queda probado que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$, es decir, por definición $f(x) \sim h(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$.

2. Dado que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{ah(x)} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{bh(x)} = 1$, aplicando la propiedad de proporciones, tengo que

$$\begin{aligned} \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} ah(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} bh(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x))}{\lim_{x \rightarrow \infty} (a \pm b)h(x)} \\ &= 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) \pm g(x)}{(a \pm b)h(x)}, \end{aligned}$$

es decir, por definición $f(x) \pm g(x) \sim (a \pm b)h(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$.

3. Dado que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f_0(x)} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{g_0(x)} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{f_0(x)}{g_0(x)}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g_0(x)}{f_0(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f_0(x)} \cdot \frac{g_0(x)}{g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{f_0(x)}}{\frac{g(x)}{g_0(x)}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{f_0(x)}{g_0(x)}} = 1$, es decir, por definición $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f_0(x)}{g_0(x)}$ cuando $x \rightarrow \infty$. □

Definición 1.8. Si $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$, escribiremos

$$f(x) = O(g(x)) \text{ (léase: "f(x) es O mayúscula de g(x)")}$$

para indicar que el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ se halla acotado para $x \geq a$; esto es existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq Mg(x) \text{ para todo } x \geq a.$$

Una ecuación de la forma

$$f(x) = h(x) + O(g(x))$$

significa que $f(x) - h(x) = O(g(x))$. Observemos que $f(t) = O(g(t))$ para $t \geq a$ implica $\int_a^x f(t) dt = O(\int_a^x g(t) dt)$ para $x \geq a$.

Si escribimos $O(g(x))$ sola, representa alguna función $f(x)$ tal que $f(x) = O(g(x))$; por ejemplo, $O(1)$ representa una función que está uniformemente acotada y $\sum_{n \leq x} 1 = O(x)$ si las diferentes funciones $O(1)$ ellas mismas están uniformemente acotadas. Así, por ejemplo, tenemos

$$\sin x = O(1), \quad x^2 \sin x = O(x^2), \quad \frac{\sin x}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right) \text{ para } x > 1.$$

Listamos estas propiedades sencillas

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son $O(x)$ para $x > x_1$, entonces también lo es $f(x) + g(x)$.
- Si $f(x) = O(g(x))$ y $g(x) = O(h(x))$, entonces $f(x) = O(h(x))$.
- Si $f(x) = O(h(x))$ y $g(x) > 0$, entonces $f(x)g(x) = O(h(x)g(x))$.

Lema 1.3. Si $f(x) = O(g(x))$, entonces

$$O(f(x)) + O(g(x)) = O(g(x)).$$

Demostración. Tenemos que probar que si $w_1(x) = O(f(x))$ y $w_2(x) = O(g(x))$ entonces $w_1(x) + w_2(x) = O(g(x))$. Esta afirmación es sencilla, dado que $|w_1(x)| \leq K_1 f(x)$, $|w_2(x)| \leq K_2 g(x)$ y $|f(x)| \leq K_3 g(x)$. Realizamos la mayorización

$$\begin{aligned} |w_1(x) + w_2(x)| &\leq |w_1(x)| + |w_2(x)| \\ &\leq K_1 f(x) + K_2 g(x) \\ &\leq K_1 K_3 g(x) + K_2 g(x) \\ &\leq (K_1 K_3 + K_2) g(x) \\ &\leq K g(x). \end{aligned}$$

□

Introducimos una notación conveniente para describir el *orden de magnitud* de una función. Si $f(x) = O(g(x))$ y $g(x) = O(f(x))$, es decir, existen constantes A_1, A_2 independiente de x y x_0 tal que

$$A_1 g(x) \leq f(x) \leq A_2 g(x) \text{ para todo } x \geq x_0 \tag{1.7}$$

entonces se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son del **mismo orden de magnitud** y escribimos

$$f(x) \cong g(x).$$

Definición 1.9. *La notación*

$$f(x) = o(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow \infty \text{ (léase: "f(x) es o pequeña de g(x)")}$$

significa que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

una ecuación de la forma

$$f(x) = h(x) + o(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

significa que $f(x) - h(x) = o(g(x))$ cuando $x \rightarrow \infty$.

En general, escribimos $o(g(x))$ sola, representa alguna función $f(x)$ tal que $f(x) = o(g(x))$. Por ejemplo, escribimos $f = g + o(x)$ significa que $\frac{f-g}{x} \rightarrow 0$ y decimos que f es $o(1)$ significa que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Esta claro que $o(g(x))$ implica $O(g(x))$ pero no necesariamente seda implicación inversa.

Lema 1.4. $f(x) \sim g(x)$ si y solo si $f(x) = g(x) + o(g(x))$, cuando $x \rightarrow \infty$.

Demostración. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = o(1)$, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

deducimos $f(x) - g(x) = o(g(x))$. A la inversa si $f(x) = g(x) + o(g(x))$ significa que $f(x) - g(x) = o(g(x))$ aplicando la definición se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \Rightarrow f(x) \sim g(x).$$

□

1.6. LA FUNCIÓN GAMMA

La función gamma $\Gamma(z)$ de Euler⁴ es una función meromorfa que se plantea con frecuencia en análisis complejo. Se extiende la función factorial a todo el plano complejo. Se define en el semiplano derecho por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re z^5 > 0. \quad (1.8)$$

⁴En honor a Leonhard Euler quien fué el primero en definirla en 1730. La notación $\Gamma(z)$ es debida a Legendre en 1809, esta función es muy importante en la teoría analítica de número.

⁵La notación $\Re z$ significa que tomamos la parte real del número complejo z .

La integral definida $\Gamma(z)$ es absolutamente convergente, y

$$|\Gamma(x+iy)| \leq \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

Dado que la integral depende analíticamente sobre el parámetro z , la función $\Gamma(z)$ es analítica sobre el semiplano derecho.

Derivamos una ecuación funcional para $\Gamma(z)$, integramos por partes

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = - \int_0^{\infty} t^z d(e^{-t}) = - t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \text{ ya que } d(e^{-t}) = -e^{-t} dt$$

El término $t^z e^{-t}$ se anula en 0 y en ∞ y obtenemos la identidad

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Re z > 0. \quad (1.9)$$

Evaluamos $\Gamma(z)$ en los números enteros positivos, comencemos con $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ y luego usamos la ecuación funcional para obtener sucesivamente $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \cdot 1$, $\Gamma(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1$ por inducción matemática

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \geq 1 \quad (1.10)$$

Definimos que $0! = \Gamma(1) = 1$, y entonces (1.10) también es válido $n = 0$.

La ecuación funcional (1.9) nos permite extender a $\Gamma(z)$ a el semiplano izquierdo, de la siguiente manera. Aplicamos la ecuación funcional m veces para obtener $\Gamma(m+z) = (z+m-1) \cdots (z+1)z\Gamma(z)$ que reescribimos como

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{(z+m-1) \cdots (z+1)z}.$$

El lado derecho está definido y es meromorfa para $\Re(z) > -m$, donde m es un entero no negativo y con polos simples en $z = 0, -1, \dots, -m+1$. Por principio de unicidad⁶, la extensión meromorfa es única y que satisface la ecuación funcional (1.9). Pasando el límite $m \rightarrow +\infty$, obtenemos

Teorema 1.12. . *La función $\Gamma(z)$ se extiende meromórficamente en todo el plano complejo, donde se satisface la ecuación funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Sus polos son polos simples en $z = 0, -1, -2, \dots$.*

Ahora expresamos $\Gamma(z)$ en términos de productos infinitos. Se define

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt, \quad \Re(z) > 0, \quad n \geq 1.$$

Dado que $(1 - \frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{t}{n})^n = e^{-t}$ para $t \geq 0$, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(z) = \Gamma(z).$$

⁶Ver en [23, pág 156]

(La forma más fácil de justificar el paso al límite es recurrir al teorema de Lebesgue de la convergencia dominada). Hacemos la sustitución $s = t/n$ obtenemos

$$\Gamma_n(z) = n^z \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^n ds, \quad \Re(z) > 0, \quad n \geq 1. \quad (1.11)$$

Para $n = 1$

$$\Gamma_1(z) = \int_0^1 s^{z-1} (1-s) ds = \left[\frac{s^z}{z} - \frac{s^{z+1}}{z+1} \right]_0^1 = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(z+1)}.$$

Si integramos por partes (1.11), obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= \frac{n^z}{z} \int_0^1 (1-s)^n d(s^z) = -\frac{n^z}{z} \int_0^1 s^z d(1-s)^n \\ &= \frac{n^{z+1}}{z} \int_0^1 s^z (1-s)^{n-1} ds = \left(\frac{n}{n-1} \right)^{z+1} \frac{\Gamma_{n-1}(z+1)}{z}. \end{aligned}$$

Repetimos este paso $n-1$ veces y usamos la fórmula para $\Gamma_1(z)$, y obtenemos

$$\Gamma_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n-2)} \Gamma_1(z+n-1) = \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

Aplicamos límite a $\Gamma_n(z)$ cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos la **fórmula de Euler**,⁷ para $z \neq 0, -1, \dots$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \quad (1.12)$$

Reescribiendo

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z+1} \right) \left(\frac{2}{z+2} \right) \cdots \left(\frac{n}{z+n} \right) \frac{2^z}{1^z} \cdot \frac{3^z}{2^z} \cdots \frac{(n-1)^z}{(n-2)^z} \cdot \frac{n^z}{(n-1)^z} \\ &= \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^z \left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} \right\} \end{aligned}$$

Este producto es convergente para toda z distinta de $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$. Como resultado inmediato de esta fórmula (basta analizar cada uno de los factores) tenemos que la función Γ no toma el valor de cero para ninguna z .

La función Gamma satisface la siguiente ecuación funcional.

Lema 1.5. (Fórmula de reflexión de Euler). Para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (1.13)$$

⁷Pues es él quien la establece por primera vez en 1729 en una carta a Goldbach.

Demostración. Utilizando la fórmula de Euler realizamos el siguiente producto

$$\begin{aligned}
& \Gamma(z)\Gamma(1-z) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 n^z n^{1-z}}{z(z+1)\cdots(z+n)(1-z)(2-z)\cdots(n+1-z)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \left\{ (1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)(1-z)\left(1-\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{n}\right) \right\}^{-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1-z} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)^{-1} \quad 8 \\
&= \frac{1}{z} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.10. Calcular $\Gamma(1/2)$.

Sol. Utilizando la ecuación funcional (1.13) tengo que

$$\begin{aligned}
\Gamma(1/2)\Gamma(1/2) &= \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} \\
(\Gamma(1/2))^2 &= \pi \\
\Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Observación 1.3. Notamos que $\Gamma(z) > 0$ cuando $z > 0$.

Para un estudio mas exhaustivo de la función Γ citamos a [20].

1.7. DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE MELLIN

Obtenemos la transformada de Mellin y su inversa, de la transformada de fourier compleja y su inversa, la cual se define respectivamente por

$$\mathcal{F}\{g(\xi)\} = G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} g(\xi) d\xi, \quad (1.14)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(k)\} = g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} G(k) dk. \quad (1.15)$$

Haciendo el cambio de variables $\exp(i\xi) = x$ y $ik = c - z$, donde c es una constante, en los resultados (1.14) y (1.15) obtenemos

$$G(iz - ic) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{z-c-1} g(\log x) dx, \quad (1.16)$$

$$g(\log x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{c-z} G(iz-ic) dz. \quad (1.17)$$

Ahora escribimos $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-c} g(\log x) \equiv f(x)$ y $G(iz-ic) \equiv \tilde{f}(z)$ para definir la transformada de Mellin de $f(x)$ y la transformada de Mellin inversa como

$$\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} f(x) dx, \quad (1.18)$$

$$\mathcal{M}^{-1}\{\tilde{f}(z)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z} \tilde{f}(z) dz, \quad (1.19)$$

donde $f(x)$ es una función de valor real definida sobre $(0, \infty)$ y la variable z es un número complejo. A veces, la transformada de Mellin de $f(x)$ es denotada explícitamente por $\tilde{f}(z) = \mathcal{M}[f(x), z]$. Obviamente, \mathcal{M} y \mathcal{M}^{-1} son operadores integrales lineales.

Ejemplo 1.11. Si $f(x) = e^{-nx}$, con $n > 0$, entonces

$$\mathcal{M}\{e^{-nx}\} = \tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-nx} dx,$$

haciendo el cambio de variable $nx = t$,

$$\mathcal{M}\{e^{-nx}\} = \frac{1}{n^z} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(z)}{n^z}. \quad (1.20)$$

Ejemplo 1.12. Si $f(x) = \frac{1}{1+x}$, entonces

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{1+x}\right\} = \tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} \cdot \frac{dx}{1+x},$$

haciendo la sustitución $x = \frac{t}{1-t}$ o $t = \frac{x}{1+x}$,

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{1+x}\right\} = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{(1-z)-1} dt = \Gamma(z)\Gamma(1-z).$$

Por Lema 1.5 tenemos que

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{1+x}\right\} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Para un estudio mas exhaustivo de la tranformada de Mellin citamos a [12].

1.8. LA FUNCION ZETA DE RIEMANN

Una serie de Dirichlet es una serie de la forma

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} = a_1 + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \frac{a_4}{4^s} + \cdots, \quad (1.21)$$

donde s y a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, son números complejos. Si tomamos $a_n = 1$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, la serie resultante la denotamos con la letra griega ζ así

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}, \quad n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{C} \quad (1.22)$$

es llamada **función zeta de Riemann**⁹.

Observación 1.4. *En este contexto la variable definida de manera tradicional como $s = \sigma + it$ compleja a menos que se indique que s pertenezca al conjunto de números reales.*

Ahora queremos saber el dominio analítico de definición de la función ζ . Usamos el teorema de la convergencia analítica. Debemos de tener cuidado de tratar de demostrar la convergencia uniforme únicamente en discos cerrados de el semiplano $\Re s > 1$ y no en todo $\Re s > 1$. En efecto, no tenemos convergencia uniforme en todo $\Re s > 1$.

Sea B un disco cerrado en $\Re s > 1$ y sea δ la distancia de la línea $\Re s = 1$ a B (Ver Figura 1.9). Demostraremos que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge uniformemente en B . Para esto, aplicamos la magnitud y utilizando el logaritmo real base e que denotamos por \log ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n^s} \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|n^s|} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|e^{s \log n}|} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|e^{(\sigma+it) \log n}|} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|e^{\sigma \log n}| |e^{it \log n}|} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{e^{\sigma \log n}} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\Re s}} \end{aligned}$$

⁹Llamada así en honor a Bernhard Riemann, tiene gran importancia en teoría de números, por su relación con la distribución de números.

Pero $\Re s \geq 1 + \delta$ si $s \in B$ y por tanto, $\left| \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$ para toda $s \in B$. Escojamos, por lo tanto, $M_n = \frac{1}{n^{1+\delta}}$. Por el criterio de la r -serie¹⁰, $\sum_{n \geq 1} M_n$ converge. Así, por el criterio M de Weierstrass, nuestra serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge uniformemente en B . Así $\zeta(s)$ representa una función analítica en el semiplano $\Re s > 1$ y uniformemente en $\{s \in \mathbb{C} | \Re s \geq \delta + 1; \forall \delta > 0\}$.

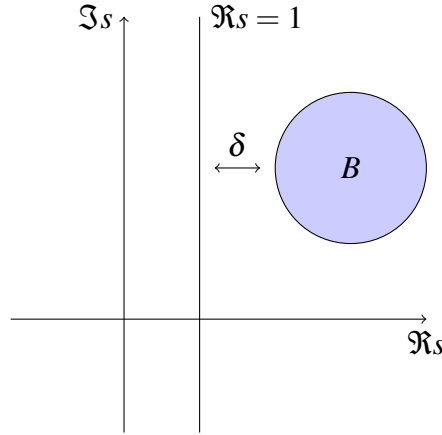


Figura 1.9: Extensión analítica de ζ en $\Re s > 1$.

A continuación presentamos la identidad de Euler que permite relacionar los números enteros positivos con los números primos, denotamos

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \Re s > 1, \quad (1.23)$$

donde $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x \text{ es un número primo}\}$ y el producto se hace sobre todos los números primos. Para demostrar la identidad fundamental (1.23) necesitamos una generalización necesaria en este capítulo.

Definición 1.10. Una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice multiplicativa si $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ siempre que $\text{mcd}(m, n) = 1$; es estrictamente multiplicativa si $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ con $\text{mcd}(m, n)$ cualquiera.

Proposición 1.6. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ multiplicativa y acotada. Entonces

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(\sum_{m \geq 0} f(p^m) p^{-ms} \right)$$

en $\Re s > 1$. En el caso estrictamente multiplicativo tenemos

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s} f(p))^{-1}$$

en el mismo dominio.

¹⁰ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ converge si $r > 1$ y diverge si $r \leq 1$.

Demostración. Como f esta acotada, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ (utilizando el criterio M de Weierstrass) converge uniformemente en $\Re s \geq \delta$ para todo $\delta > 1$. Llamaremos $S = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ y $P(x) = \prod_{p \leq x} (1 + f(p)/p^s + f(p^2)/p^{2s} + \dots)$, extendido sobre todos los primos $p \leq x$, s fijo con $\Re s > 1$.

Como $P(x)$ es el producto finito de series absolutamente convergentes podemos multiplicar y reescribir $P(x) = \sum_{n \in M_x} \frac{f(n)}{n^s}$, donde M_x el conjunto de los enteros cuyos factores primos son menores o iguales a x . Observando por último que los enteros entre 1 y x están en M_x obtenemos

$$S - P(x) = \sum_{n \in N_x} \frac{f(n)}{n^s}$$

donde N_x es el conjunto de n que tiene al menos un factor primo $> x$.

$$|P(x) - S| \leq \sum_{n \in N_x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n > x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|, \quad (1.24)$$

Cuando $x \rightarrow \infty$ la última suma de la desigualdad (1.24) $\rightarrow 0$ dado que $\sum \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|$ es convergente. Por tanto, tenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = S$. Mas precisamente, si $\Re s \geq \delta$ para todo $\delta > 1$ la convergencia uniforme de S implica que $P(x)$ converge uniformemente a S en este dominio.

Siendo f estrictamente multiplicativa tenemos $f(p^m) = (f(p))^m$, tengo

$$\sum_{m \geq 0} f(p^m) p^{-ms} = \sum_{m \geq 0} (f(p) p^{-s})^m = \frac{1}{1 - f(p) p^{-s}}, \quad \left| \frac{f(p)}{p^s} \right| < 1,$$

□

Para demostrar la identidad (1.23) tomamos $f(n) = 1$ en la Proposición 1.6 obteniendo dicha identidad. El siguiente corolario nos permitirá tomar logaritmos de la función zeta en $\Re s > 1$.

Corolario 1.1. *Las siguientes equivalencias ocurren*

(a). (Fórmula de Euler) $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$, en $\Re s > 1$

\Leftrightarrow

(b). $\zeta(s) \neq 0$ en $\Re s > 1$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Muestra inmediatamente que $\zeta(s)$ no tiene ceros en el semiplano $\Re s > 1$ (porque la convergencia del producto infinito puede ser cero si solo uno de sus factores es cero, lo cual no sucede).

(b) \Leftarrow (a) Tenemos que $\Re s \geq \sigma > 1$

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| = \frac{1}{|\zeta(s)|} = \prod_p |1 - p^{-s}| \leq \prod_p \left(1 + \frac{1}{|p^s|} \right) \leq \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^\sigma} \right)$$

Probando que el último producto es convergente y haciendo uso de la desigualdad anterior obtenemos

$$0 < \frac{1}{\prod_p (1 + \frac{1}{p^\sigma})} \leq |\zeta(s)|.$$

Probaremos que si $\sum_{i \geq 1} a_i$ converge con $a_i \geq 0$, entonces $\prod_{i \geq 1} (1 + a_i)$ converge. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_i < 1 - a_i$ entonces $a_i < \frac{1}{2}$ y definimos $P_n = \prod_{i=1}^n (1 + a_i)$.

La serie Taylor alrededor de 0 de la función $\log(1 + x)$ es la siguiente:

$$\log(1 + x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} x^m, \text{ para } |x| < 1. \quad (1.25)$$

Si $x = a_i < \frac{1}{2} < 1$ en (1.25) entonces $\log(1 + a_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} a_i^m$.

La serie geométrica $\sum_{m \geq 1} a_i^m = \frac{1}{1 - a_i}$, con $m \in \mathbb{N}$, y $a_i < 1/2 < 1$.

Luego aplicamos logaritmo a P_n , junto con los resultados expuestos de $\log(1 + a_i)$ y $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, donde $0 \leq a_i < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \log P_n &= \sum_{i=1}^n \log(1 + a_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m+1} a_i^m}{m} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{m \geq 1} a_i^m, \quad m, n \in \mathbb{N} \\ \log P_n &\leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i - a_i^2 + a_i^2}{1 - a_i} = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{1 - a_i} \leq \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_i \\ \log P_n &\leq 2 \sum_{i \geq 1} a_i = 2S, \text{ con } S = \sum_{i \geq 1} a_i < \infty, \text{ por hipótesis.} \end{aligned}$$

De esta forma

$$P_n \leq e^{2S} \text{ para todo } n \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \prod_{i \geq 1} (1 + a_i) \leq e^{2S}$$

Tomando $a_i = \frac{1}{p^\sigma}$ con $a_i \geq 0$ se prueba que el producto $\prod_p (1 + \frac{1}{p^\sigma})$ es convergente. Por el criterio de comparación $\frac{1}{|\zeta(s)|}$ converge absolutamente entonces $\frac{1}{\zeta(s)}$ converge, es decir, $\zeta(s)$ converge. \square

Presentamos la demostración de la existencia de infinitos primos aplicando la identidad de Euler. Pero antes analizamos los siguientes hechos.

Debido que el $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty$, deducimos que

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (\log \zeta(s)) = +\infty. \quad (1.26)$$

Ahora utilizemos el logaritmo en ambos miembros de (1.23) esto se puede realizar en virtud del Corolario (1.1). Para $s > 1$

$$\begin{aligned}
\log\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}\right) &= \log\left(\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{\prod_p (1-p^{-s})}\right) \\
&= -\log \prod_p (1-p^{-s}) \\
&= -\sum_p \log(1-p^{-s})
\end{aligned}$$

y utilizamos la serie $\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \dots$ para $0 < x < 1$. Si $x = p^{-s}$ obtengo $\log(1-p^{-s}) = -p^{-s} - \frac{1}{2}p^{-2s} - \frac{1}{3}p^{-3s} - \dots = -\sum_{m \geq 1} \frac{1}{mp^{ms}}$.

$$\begin{aligned}
\log\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}\right) &= \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{mp^{ms}} \\
&= \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_p \sum_{m \geq 2} \frac{1}{mp^{ms}}.
\end{aligned}$$

Sin embargo

$$\sum_{m \geq 2} \frac{1}{p^m} = \frac{1}{p(p-1)}$$

este resultado lo vamos a utilizar en la siguientes series dominadas.

$$\sum_p \sum_{m \geq 2} \left| \frac{1}{mp^{ms}} \right| < \sum_p \sum_{m \geq 2} \frac{1}{p^m} = \sum_p \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

Como la serie doble de la izquierda converge absolutamente, ya que cumple con las premisas del Teorema 19 de [38, pág 199] entonces la serie doble $\sum_p \sum_{m \geq 2} \frac{1}{mp^{ms}}$ converge y por (1.26) es evidente que

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left(\sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_p \sum_{m \geq 2} \frac{1}{mp^{ms}} \right) = +\infty.$$

Se deduce que

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = +\infty.$$

Lo que quiere decir este último resultado es que la serie de recíprocos de los números primos diverge, lo que implica la existencia de infinitos números primos.

Para extender la función zeta de riemann estudiamos la extensión analítica de la función ζ en el semiplano $\Re s > 0$ con la siguiente proposición.

Proposición 1.7. La función $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ tiene una extensión analítica en el semiplano $\Re s > 0$. Por consiguiente ζ tiene una extensión analítica en $\{s \in \mathbb{C} : \Re s > 0, s \neq 1\}$ y posee un único polo en $\Re s > 0$; este polo es simple, de residuo 1 y localizado en $s = 1$.

Para probar este resultado probemos el siguiente lema:

Lema 1.6. (Lema de representación integral). Sea $f(s)$ una función meromorfa, y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión compleja tal que $f(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge en $\Re s > a$. Siendo $P(x) = \sum_{n \leq x} a_n$, suponga que $\sum_{n \geq 1} \frac{P(n)}{n^s}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{P(n-1)}{n^s}$ converge en $\Re s > b$, y que $\int_1^\infty P(x)x^{-1-s}dx$ representa una función analítica en $\Re s > c$, donde las constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$f(s) = s \int_1^\infty P(x)x^{-1-s}dx \text{ en } \Re s > c.$$

Demostración. Las siguientes igualdades son válidas en $\Re s > \max\{a, b\}$

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{P(n) - P(n-1)}{n^s} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{P(n)}{n^s} - \sum_{n \geq 1} \frac{P(n-1)}{n^s} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{P(n)}{n^s} - \sum_{n \geq 1} \frac{P(n)}{(n+1)^s} \\ &= \sum_{n \geq 1} P(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} sP(n) \int_n^{n+1} x^{-1-s} dx \\ &= s \sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} P(x)x^{-1-s} dx \\ &= s \int_1^\infty P(x)x^{-1-s} dx. \end{aligned}$$

Se sigue el resultado en $\Re s > c$ por la extensión analítica. □

Demostración. De la Proposición (1.7), utilizando el Lema anterior tomando $P(x) = \lfloor x \rfloor$ ¹ tenemos que $\sum_{n \geq 1} \frac{P(n)}{n^s}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{P(n-1)}{n^s}$ converge $\Re s > 2$, y $\int_1^\infty P(x)x^{-1-s}dx$ representan una función analítica en $\Re s > 1$, la formula integral se mantiene através del semiplano.

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-1-s} dx \text{ cuando } \Re s > 1. \quad (1.27)$$

Es razonable comparar la integral con

$$s \int_1^\infty x \cdot x^{-1-s} dx = \frac{s}{s-1} = \frac{s-1+1}{s-1} = 1 + \frac{1}{s-1}. \quad (1.28)$$

¹Es el mayor entero $\leq x$. Para comprender mejor esta definición ver [16, pág 299-312]

Combinando (1.27) y (1.28) tenemos

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + s \int_1^{\infty} ([x] - x)x^{-1-s} dx,$$

Ahora fijamos $k > 1$ y consideramos la integral $\int_1^k ([x] - x)x^{-s-1} dx$. Por Lema 1.1, esta integral es una función entera de s . Además si $\Re s > 0$, entonces

$$\left| \int_1^k ([x] - x)x^{-1-s} dx \right| \leq \int_1^k x^{-\Re(s+1)} dx \leq \int_1^{\infty} x^{-1-\Re s} dx = \frac{1}{\Re s}$$

Esto implica que la sucesión de funciones $f_k(s) = \int_1^k ([x] - x)x^{-s-1} dx$ en $\Re s > 0$ es uniformemente acotada sobre subconjuntos compactos. Por lo tanto por el Lema de Vitali 1.2, el límite

$$f(s) = \int_1^{\infty} ([x] - x)x^{-s-1} dx$$

(como el límite uniforme sobre subconjuntos compactos de $\Re s > 0$) es analítica en $\Re s > 0$, y de este modo la función

$$1 + s \int_1^{\infty} ([x] - x)x^{-s-1} dx$$

es también analítica sobre $\Re s > 0$. Pero esta función es igual $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ para $\Re s > 1$ y en consecuencia proporciona la extensión analítica requerida de ζ a $\Re s > 0$, excepto $s \neq 1$. Procederemos a encontrar el orden del polo ya que tiene una singularidad aislada en $s = 1$,

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) \neq 0$$

como $n = 1$ tiene un polo simple en $s = 1$ y de residuo 1, consiguiendo nuestro resultado. \square

1.9. PRUEBA DE LA ECUACIÓN FUNCIONAL DE $\zeta(s)$ (METODO DE LA INTEGRAL DE HANKEL)

A continuación obtenemos a $\zeta(s)$ como un producto de $\Gamma(1-s)$ por una función entera cuando $\Re s > 1$, donde la función entera se da por una integral de Hankel que utilizó Riemann¹¹, la cual permite la extensión de $\zeta(s)$ como función meromorfa de \mathbb{C} , con un único polo simple en $s = 1$ con residuo igual a 1, consecuentemente obtenemos la ecuación funcional por la aplicación del teorema del residuo. A continuación aplicamos el método haciendo una rama que corta a lo largo del eje real positivo y consideremos la función

$$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty),$$

¹¹Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse y traducido al inglés por H.M Edward con el título On the Number of Primes Less Than a Given Magnituded lo podemos encontrar en el apéndice de [13].

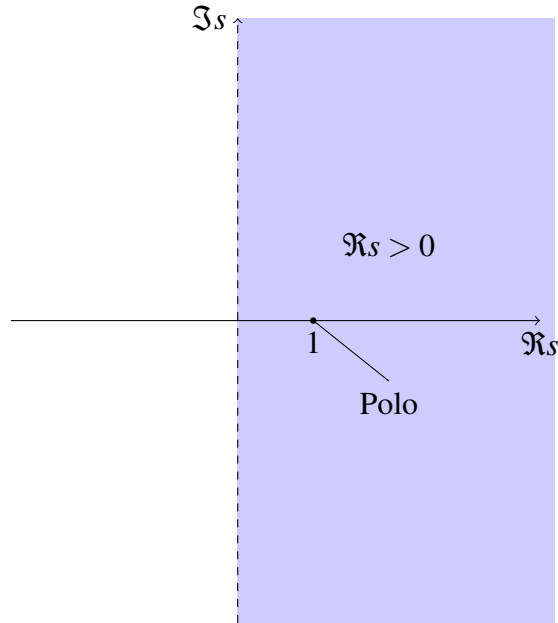


Figura 1.10: Extensión analítica de la función ζ en el semiplano derecho $\Re s > 0$.

la cual depende analíticamente de z y del parametro complejo s . Sea γ es el contorno como se indica en la Figura 1.11, siguiendo el borde superior de la rama corta el plano de $+\infty$ a ε desviándose por una circunferencia de radio ε con centro en $z = 0$ y retorna de ε a $+\infty$ a lo largo del borde inferior de la rama. Consideramos la función

$$\phi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz. \quad (1.29)$$

Probaremos que la integral converge, y representa la función entera de s . Para evaluar, en primer lugar asumimos $\Re s > 1$, y expresamos

$$\begin{aligned} \phi(s) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{e^{(s-1)(\log x - i\pi)}}{e^x - 1} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{(s-1)(\log x + i\pi)}}{e^x - 1} dx \end{aligned} \quad (1.30)$$

Dado $e^z - 1$ que tiene un cero simple en $z = 0$, lo podemos factorizar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots, \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ e^z - 1 &= z \cdot q(z), \quad \text{con } q(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \end{aligned}$$

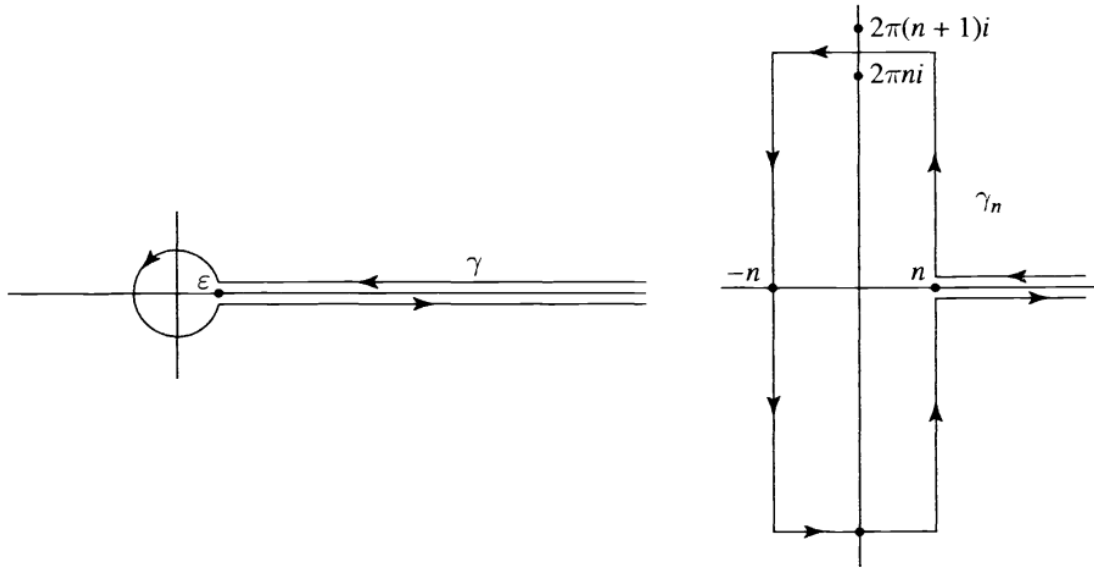


Figura 1.11:

Acotamos el integrando de (1.29) sobre el círculo $|z| = \varepsilon$ así:

Primero parametrizamos el círculo centrado en el origen con radio ε . Sea $z = x + iy$ en \mathbb{C}

$$\begin{aligned} |z| &= \varepsilon \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= \varepsilon \\ x^2 + y^2 &= \varepsilon^2 \\ \frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{y^2}{\varepsilon^2} &= 1 \\ \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Deducimos que $x = \varepsilon \cos \theta$ y $y = \varepsilon \sin \theta$ entonces la parametrización nos queda $\gamma' : z = z(\theta) = \varepsilon \cos \theta + i\varepsilon \sin \theta$, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ahora nos ocupamos en acotar el integrando con la norma usual de \mathbb{C}

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \right| &= \frac{|(-\varepsilon e^{i\theta})^{s-1}|}{|e^z - 1|} = \frac{|(-\varepsilon)^{s-1}| |e^{i\theta(s-1)}|}{|z| |q(z)|} \\ &= \frac{\varepsilon^{\Re s - 1} \cdot 1}{\varepsilon |q(z)|} \\ &= \varepsilon^{\Re s - 2} \cdot \frac{1}{|q(z)|} \\ &\leq \varepsilon^{\Re s - 2} C, \text{ con } C \geq \frac{1}{|q(z)|}. \end{aligned}$$

Ya acotamos el integrando sobre $|z| = \varepsilon$ procedemos a acotar la segunda integral de (1.30) así:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=\varepsilon} \left| \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \right| |dz| \\
 &\leq \frac{C}{2\pi} \varepsilon^{\Re s - 2} \int_{|z|=\varepsilon} |dz| \\
 &\leq \frac{C}{2\pi} \varepsilon^{\Re s - 2} \int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta, \text{ longitud de arco} \\
 &\leq \frac{C}{2\pi} \varepsilon^{\Re s - 1} \cdot 2\pi \\
 &\leq C \varepsilon^{\Re s - 1}.
 \end{aligned}$$

La segunda integral está acotada por $C\varepsilon^{\Re s - 1}$. Tomando la $\Re s > 1$, esta integral tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Pasando por el límite obtenemos

$$\phi(s) = \frac{1}{2\pi i} \left(e^{i\pi(s-1)} - e^{-i\pi(s-1)} \right) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

Desarrollando el término dentro del parentesis es $2i \sin(\pi(s-1)) = -2i \sin(\pi s)$. Por tanto

$$\phi(s) = -\frac{\sin(\pi s)}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx. \quad (1.31)$$

Tratamos esta integral con la expansión $1/(e^x - 1) = e^{-x}/(1 - e^{-x}) = \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}$ que es una serie geométrica,

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} \right) x^{s-1} dx. \quad (1.32)$$

Las sumas parciales de la serie geométrica forma una sucesión creciente de funciones que convergen uniformemente en cada intervalo $[\varepsilon, \infty)$. A partir de esto se hace el intercambio de la suma y la integración.

Dado

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{1}{n^s} \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = \frac{\Gamma(s)}{n^s},$$

se convierte

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s) \zeta(s), \quad \Re s > 1. \quad (1.33)$$

Sustituyendo (1.33) en (1.31) y usando $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin(\pi s)$ de el Lema (1.13) obtenemos

$$\phi(s) = -\frac{\sin(\pi s)}{\pi} \Gamma(s) \zeta(s) = -\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)}.$$

Hemos establecido esta identidad para $\Re s > 1$. Sin embargo, $\phi(s)$ es una función entera, así que podemos utilizar esta identidad para extender $\zeta(s)$ a ser una función meromorfa en todo el plano complejo. La función extendida entonces satisface el siguiente.

Teorema 1.13. *Para la rama de $(-z)^{s-1}$ y el contorno γ descrito anteriormente, tenemos*

$$\zeta(s) = -\Gamma(1-s)\phi(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz. \quad (1.34)$$

Este teorema permite relacionar la función ζ con la función Γ y ϕ , con las propiedades de estas dos funciones se pueden buscar de posibles puntos singulares en todo \mathbb{C} . Sabemos que ζ es analítica en el semiplano $\Re s > 1$ (prescindiendo de la Proposición 1.7 en el análisis de este Teorema 1.13). Analizando el miembro derecho de (1.34), tengo que $\phi(s)$ es una función entera, es decir, no tiene ninguna singularidad en \mathbb{C} , luego buscamos singularidades en $\Gamma(1-s)$ notamos que tiene polos simples en $s = 1, 2, 3, \dots$. Por tanto un posible polo de la función $\zeta(s)$ es cuando $s = 1$, para comprobar esto hacemos el siguiente análisis.

Sabemos que $\Gamma(z)$ tiene un polo simple en $s = 0$, una manera sencilla de calcular el residuo por medio del polo es utilizar la **Regla 1** para el caso $k = 1$ (polo simple)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\Gamma(s), 0] &= \lim_{s \rightarrow 0} s\Gamma(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s+1) \\ &= \Gamma(1) \\ \operatorname{Re} [\Gamma(s), 0] &= 1. \end{aligned}$$

En este caso la serie de Laurent de $\Gamma(s)$ puede ser escrita como

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} + [\text{analítica en } 0]. \quad (1.35)$$

Sustituyendo s por $1-s$ en (1.35) tenemos

$$\Gamma(1-s) = \frac{1}{1-s} + [\text{analítica en } 1]. \quad (1.36)$$

Aplicando el límite al cociente

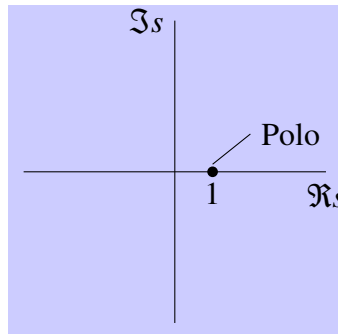
$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\Gamma(1-s)}{\frac{1}{1-s}} = 1,$$

es decir, $\Gamma(1-s) \sim \frac{1}{1-s}$ cuando $s \rightarrow 1$, esto significa que la función $\Gamma(1-s)$ cerca de 1 se comporta como $\frac{1}{1-s}$. Para finalizar sustituimos s por 1 en ϕ y aplicamos el Teorema del residuo así:

$$\begin{aligned}\phi(1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{e^z - 1} \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{e^z - 1}, 0 \right] \\ &= \frac{1}{e^0} = 1, \text{ aplicando **Regla 2**} \\ \phi(1) &= 1.\end{aligned}$$

Concluimos que $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ cuando $s \rightarrow 1$. Este teorema extiende más la analiticidad de ζ que la expresada en la Proposición 1.7, ya que ζ no se limita solamente a la analiticidad de el semiplano $\Re s > 0$, con un único polo simple con residuo 1, sino que extiende analíticamente sobre todo el plano complejo, con un único polo simple en $s = 1$ con residuo 1. Como resultado de estas observaciones presentamos el siguiente teorema.

Teorema 1.14. *La función ζ es una función meromorfa sobre el plano complejo con un único polo simple en $s = 1$ con residuo 1.*



Encontramos la ecuación funcional de $\zeta(s)$.

Teorema 1.15. *Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, se cumple la ecuación funcional*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad (1.37)$$

se llama la ecuación funcional de Riemann.

Para esta prueba, modificamos el contorno de γ para definir $\phi(s)$. Fijamos s real y negativo. Sea γ_n el contorno indicado en la Figura 1.11, obtenido a partir de γ mediante la sustitución del segmento de partida en n en el borde superior de la ranura que describe un rectángulo R_n con vértices en $\pm n \pm (2n + 1/2)\pi i$ alrededor de 0 terminando en el borde inferior de la ranura cerca de n . Definimos

$$\phi_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz.$$

Dado que $|e^z - 1| > \frac{1}{2}$ en los bordes del rectángulo, el integrando está acotado por los bordes $2n^{s-1}$. Por la estimación, la integral sobre estos bordes está acotada por Cn^s . Dado que $s < 0$, esto tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, y en consecuencia, $\phi_n(s) \rightarrow \infty$. Ahora, la diferencia $\int_{\gamma_n} - \int_{\gamma}$ es la integral en todo el contorno cerrado que consiste en el límite del rectángulo R_n con desvío a lo largo de una hendidura alargada que no cruza sobre la rama cortada. El contorno encierra sólo los polos del integrando en los puntos $\pm 2\pi ki$, $0 < k \leq n$. Cada polo es un polo simple, aplicando la Regla 3 para el cálculo del residuo tenemos.

$$\frac{(-z)^{s-1}}{e^z} \Big|_{z=\pm 2\pi ki} = (2\pi)^{s-1} |k|^{s-1} e^{(s-1)\log(\pm i)}.$$

Si combinamos los residuos $\pm k$ y sumamos, obtenemos el teorema del residuo

$$\phi_n(s) - \phi(s) = (2\pi)^{s-1} \left(e^{(s-1)i\pi/2} + e^{-(s-1)i\pi/2} \right) \sum_{k=1}^n k^{s-1}.$$

Desarrollando

$$e^{(s-1)i\pi/2} + e^{-(s-1)i\pi/2} = 2 \cos\left((s-1)\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

Dado que $\phi_n(s) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ se obtenemos el límite

$$-\phi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Si combinamos este resultado con (1.34), obtenemos la ecuación funcional (1.37). Al menos para $s < 0$. Dado que ambos lados de la identidad (1.37) son meromorfas, (1.37) sucede para todo s , por el principio de unicidad.

La ecuación funcional de la función zeta da información sobre sus ceros. La ecuación funcional muestra a continuación que los únicos ceros de $\zeta(s)$ en el semiplano izquierdo $\Re s < 0$ son los ceros de $\sin(\pi s/2)$ que son los ceros simples en $-2, -4, -6, \dots$ como se muestra en la Figura 1.12. Estos ceros son llamados **ceros triviales** de la función zeta. Los ceros no triviales se encuentran en la banda $0 \leq \Re s \leq 1$ que se llama la **banda crítica**. Muchos matemáticos sobresalientes han trabajado sobre la hipótesis de Riemann, que se refiere a los ceros no triviales de la función zeta se encuentran en la línea $\Re s = \frac{1}{2}$. Se sabe que $\zeta(s)$ tiene una infinidad de ceros en la banda crítica. Su distribución asintótica es conocida, y se sabe que al menos un tercio de ellos se encuentra en la línea crítica $\Re s = 1/2$.

Mostremos que la función $\zeta(s)$ no tiene ceros en la línea $\Re s = 1$ este hecho fué el paso fundamental en las pruebas de ambos matemáticos Hadamard y de la Vallée-Poussin del teorema del número primo. Sus pruebas la realizarón de manera independiente y son diferentes pero en esencia prueban lo mismo. Antes de dar la prueba necesitamos los lemas

Lema 1.7. Si $f(s)$ tiene un polo de orden k en $s = \alpha$ entonces el cociente $\frac{f'(s)}{f(s)}$ tiene polo simple en $s = \alpha$ con residuo $-k$.

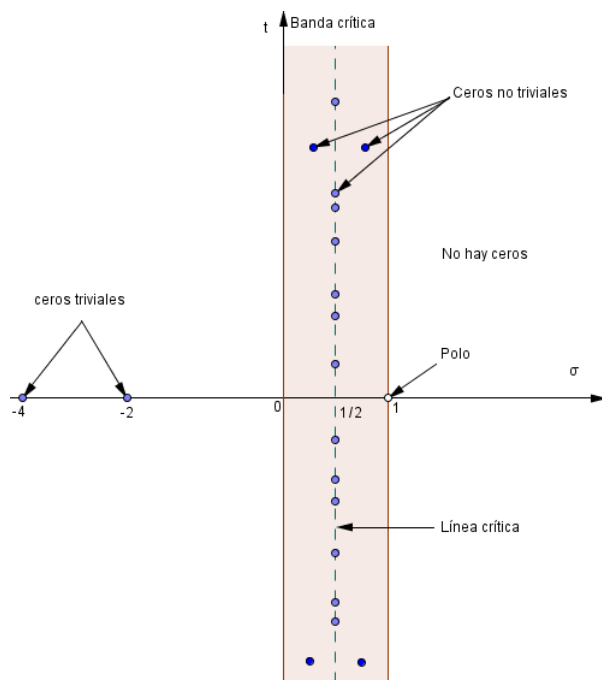


Figura 1.12: Los ceros de la función zeta en el plano \mathbb{C}

Demostración. Tenemos $f(s) = \frac{g(s)}{(s-\alpha)^k}$, donde g es analítica en α y $g(s) \neq 0$. Por tanto para todo s en una vecindad de α tenemos

$$f'(s) = \frac{g'(s)}{(s-\alpha)^k} - \frac{kg(s)}{(s-\alpha)^{k+1}} = \frac{g(s)}{(s-\alpha)^k} \left(\frac{-k}{s-\alpha} + \frac{g'(s)}{g(s)} \right).$$

Por lo tanto

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{-k}{s-\alpha} + \frac{g'(s)}{g(s)}$$

Esto prueba el lema dado $g'(s)/g(s)$ es analítica en α . □

Lema 1.8. Si $\Re s > 1$, entonces

$$\log \zeta(s) = \sum_{p,m} \frac{p^{-ms}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}, \text{ para algún } c_n \geq 0.$$

Demostración. Primero considere el caso cuando $\Im(s)^{12} = 0$. Primero observemos que la expansión de Taylor, $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$ para $0 \leq x \leq 1$. Por el Corolario (1.1) puedo tomar el logaritmo.

¹²Parte imaginaria de s

$$\begin{aligned}\log \zeta(s) &= \log \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \\ \log \zeta(s) &= \sum_p \log \left(\frac{1}{1-p^{-s}} \right) \\ \log \zeta(s) &= \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{p^{-ms}}{m} \\ \log \zeta(s) &= \sum_{p,m} \frac{p^{-ms}}{m}.\end{aligned}$$

Ahora demostraremos que la sumatoria doble converge absolutamente. Necesitamos demostrar que la doble serie iterada $\sum_p \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{p^{-ms}}{m} \right| \right)$ converge.

Comenzamos

$$\begin{aligned}\sum_{m \geq 1} \left| \frac{1}{mp^{ms}} \right| &= \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m |p^{ms}|} \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{1}{mp^{m\sigma}} \leq \sum_{m \geq 1} \frac{1}{p^{m\sigma}} = \frac{1}{p^\sigma - 1}, \text{ con } s = \sigma + it \\ \sum_{m \geq 1} \left| \frac{1}{mp^{ms}} \right| &< \frac{1}{p^\sigma - 1}.\end{aligned}$$

converge absolutamente la serie. Luego acotamos la serie doble

$$\begin{aligned}\sum_p \sum_{m \geq 1} \left| \frac{1}{mp^{ms}} \right| &< \sum_p \frac{1}{p^\sigma - 1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}, \text{ converge con } \sigma > 1 \\ \sum_p \sum_{m \geq 1} \left| \frac{1}{mp^{ms}} \right| &< \infty.\end{aligned}$$

entonces la serie doble converge absolutamente cumple con las premisas del Teorema 19 de [38, pág 199] entonces la serie doble $\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \geq 1} \frac{p^{-ms}}{m}$ converge (donde el orden del sumatorio es irrelevante). La fórmula $\log \zeta(s) = \sum_{p,m} \frac{p^{-ms}}{m}$ sucede para todo $\Re s > 1$ por la extensión analítica. Notemos que por Teorema 6.1 de [26, pág 100], $\log \zeta$ está definida en el semiplano $\Re s > 1$ y es simplemente conexo, dado que ζ no posee ceros en esa región del plano. Finalmente, está claro que

$$\sum_{p,m} \frac{p^{-ms}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}, \quad (1.38)$$

donde

$$c_n = \begin{cases} 1/m, & \text{si } n = p^m, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

□

Proposición 1.8. (Hadamard, de la Vallée-Poussin) La función $\zeta(s)$ no tiene ceros en la línea $\Re s = 1$.

Demostración. Un hecho clave en esta prueba es la desigualdad

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta &= 3 + 4 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 2(\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1) \\ &= 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vamos a suponer que para algún b real no nulo tenemos $\zeta(1 + ib) = 0$, es decir, $\zeta(s + ib) = (s - 1)h(s)$, donde $h(s)$ es analítica en 1 y $h(s) \neq 0$, y definimos la función analítica auxiliar

$$\varphi(s) = \zeta^3(s)\zeta^4(s + ib)\zeta(s + 2ib).^{13}$$

De esta forma $s = 1$ es un cero de φ pues el polo simple de ζ no cancela el cero en $s = 1 + ib$. Detallamos esto de la siguiente forma:

Ya se demostró que $\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$ con residuo 1 entonces por el Lema 1.7 tomamos $\zeta(s) = \frac{g(s)}{s-1}$, donde g es analítica en 1 y $g(s) \neq 0$. Para todo s en una vecindad de 1. Averiguemos el límite de $\varphi(s)$ cuando s se aproxima a 1.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1+0t} \varphi(s) &= \lim_{s \rightarrow 1+0t} \left(\frac{g(s)}{s-1} \right)^3 ((s-1)h(s))^4 \zeta(s+2ib) \\ &= \lim_{s \rightarrow 1+0t} \frac{g^3(s)}{(s-1)^3} (s-1)^4 h^4(s) \zeta(s+2ib) \\ &= \lim_{s \rightarrow 1+0t} g^3(s)(s-1)h^4(s)\zeta(s+2ib) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\lim_{s \rightarrow 1} \log |\varphi(s)| = -\infty.$$

¹³La ingeniosa introducción de la función φ es debido a Mertens(1898).

Ahora tomamos a s real y mayor que 1. Por la identidad de Euler,

$$\begin{aligned}
\log |\zeta(s+it)| &= \Re \log \zeta(s+it) = \Re \log \prod_p (1 - p^{-s-it})^{-1} \\
&= -\Re \sum_p \log(1 - p^{-s-it}) \\
&= \Re \sum_p \left(p^{-s-it} + \frac{1}{2}(p^2)^{-s-it} + \frac{1}{3}(p^3)^{-s-it} + \dots \right) \\
&= \Re \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m(s+it)}}
\end{aligned} \tag{1.39}$$

donde el logaritmo es tomado de acuerdo a la expansión de la serie de Taylor. Podemos escribir (1.39) en virtud del Lema 1.8 como

$$\log |\zeta(s+it)| = \Re \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s-it}, \text{ es una serie de Dirichlet}$$

donde a_n son coeficientes no negativos que resultan ser

$$a_n = \begin{cases} 1/m, & \text{si } n = p^m \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

De ahí obtenemos

$$\begin{aligned}
\log |\varphi(s)| &= 3 \log |\zeta(s)| + 4 \log |\zeta(s+ib)| + \log |\zeta(s+2ib)| \\
&= 3 \Re \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s} + 4 \Re \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s-ib} + \Re \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s-2ib} \\
&= \Re \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s} (3 + 4n^{-ib} + n^{-2ib})
\end{aligned}$$

$$\Re(n^{-ib}) = \Re(e^{-i(b \log n)}) = \cos(b \log n)$$

$$\Re(n^{-2ib}) = \Re(e^{-i(2b \log n)}) = \cos(2b \log n)$$

Finalmente

$$\log |\varphi(s)| = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s} (3 + 4 \cos(b \log n) + \cos(2b \log n)) \geq 0.$$

contrariamente al límite $\lim_{s \rightarrow 1} \log |\varphi(s)| = -\infty$. □

La función $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ es analítica en el semiplano $\Re s > 1$ por el Corolario (1.1). Ahora queremos extender analíticamente la función al semiplano $\Re s \geq 1$ para esto presentamos la siguiente proposición que nos sirve en el próximo capítulo.

Proposición 1.9. La función $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$ posee una extensión analítica sobre el semiplano derecho $\Re s \geq 1$

Demostración. Por la Proposición (1.7) sabemos que $\zeta(s)$ tiene un polo simple entonces por el lema (1.7) la función $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ tiene un polo del tipo $\frac{1}{s-1}$ y analizando el denominador $\zeta(s)$ de la función para buscar posibles polos nos encontramos con la Proposición (1.8) de ahí deducimos que $s = 1$ es el único polo sobre la recta $\Re s = 1$. La analiticidad de $\zeta(s)$ en los puntos de la línea $\Re s = 1$ (excepto de $s = 1$ ya que ahí no es analítica la función) implica que $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ puede extenderse analíticamente en entornos de cada uno de esos puntos. Por consiguiente

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

tiene una extensión analítica sobre entornos cerrados de el semiplano $\Re s \geq 1$. □

Capítulo 2

DESARROLLO DE LA

DEMOSTRACIÓN ANALÍTICA DEL

TNP

En este capítulo comienza con la estimación de Chebyshev, que establece que la magnitud de $\pi(x)$ es $\frac{x}{\log x}$ es un resultado importante, pero no demuestra el TNP. Para demostrar el TNP necesitamos las funciones de Chebyshev, que juegan un papel fundamental en la distribución de los números primos, que conlleva a la realización de equivalencias de suma importancia en la construcción de la demostración del TNP.

A partir de aquí todo nuestro esfuerzo está enfocado en demostrar $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ cuando $x \rightarrow \infty$ vía analítica por medio de la versión equivalente del TNP. Para esto requerimos de los métodos aplicados en el artículo de D.J Newman[30], la cual es posteriormente modificada por J. Korevar[27].

2.1. ESTIMACIÓN DE CHEBYCHEV

El primer avance significativo en el desarrollo de una prueba del TNP lo obtuvo el matemático Chebychev en 1848. Demostró que $\pi(x)$ y $x/\log x$ tienen el mismo orden de magnitud, este concepto se explicará en esta sección, y que si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x}$ existe entonces el límite tendría que ser 1. Con esto parece que estaba bastante cerca de una demostración del TNP. Sin embargo, se necesitarían otros 50 años y el desarrollo de unas ideas completamente nuevas de variable compleja para lograr hacerlo realidad.

Chebychev probó el siguiente resultado, conocido como **estimación de Chebychev**.

Teorema 2.1. *Existen constantes positivas A_1 y A_2 tal que*

$$A_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < A_2 \frac{x}{\log x} \quad (2.1)$$

para todo $x \geq 2$.

La prueba que realizamos es más sencilla que la realizada por Chebychev. Las constantes que encontramos en la prueba son suficientes. Hablaremos mas de esto en la conclusión de la prueba.

La prueba depende de algunas propiedades y desigualdades que involucran el **coeficiente binomial** $\binom{n}{k}$.

Lema 2.1. *(El teorema del binomio). Para cualquier número real a, b y un número natural n , tenemos*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Demostración. Ver en [29, pág 242] □

Si tomamos $a = b = 1$ en el teorema del binomio, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1. $(1 + 1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. En particular, $\binom{n}{k} < 2^n$ para cualquier k en $0 \leq k \leq n$.

Para la estimación de Chebychev necesitamos el siguiente resultado,

Lema 2.2.

$$1. \quad n^{\pi(2n) - \pi(n)} < \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

$$2. \quad 2^n \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}.$$

Demostración. Consideremos un entero n y un primo p . El mayor exponente e_p para el cual $p^{e_p} | n!$ es

$$e_p = \sum_{i=1}^{t_p} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor,$$

se demuestra por inducción y t_p es el primer entero tal que $p^{t_p+1} > n$. Existe claramente una t_p para cada primo p . Ahora consideramos

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n!} = \prod_{j=1}^n \binom{n+j}{j}. \quad (2.2)$$

Sea m_p es el mayor exponente para un primo p dado tal que $p^{m_p} \mid \binom{2n}{n}$. El exponente m_p es el mayor exponente de p que divide a $(2n)!$ menos el mayor exponente de p que divide a $(n!)(n!)$, es decir, el exponente es

$$m_p = \sum_{i=1}^{k_p} \left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2 \sum_{i=1}^{k_p} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k_p} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right),$$

donde k_p es el primer entero tal que $p^{k_p+1} > 2n$.

Si $1 \leq i \leq k_p$, entonces

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor < \frac{2n}{p^i} - 2 \left(\frac{n}{p^i} - 1 \right) = 2$$

Dado que $\left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor$ y $2 \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ son enteros, se deduce que

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \leq 1, \text{ si } 1 \leq i \leq k_p$$

Esto implica que

$$m_p = \sum_{i=1}^{k_p} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right) \leq \sum_{i=1}^{k_p} 1 = k_p,$$

es decir, $p^{m_p} \leq p^{k_p}$.

Por tanto

$$\binom{2n}{n} \mid \prod_{p \leq 2n} p^{k_p}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &\leq \prod_{p \leq 2n} p^{k_p} \leq \prod_{p \leq 2n} (2n) = (2n)^{\pi(2n)} \\ \binom{2n}{n} &\leq (2n)^{\pi(2n)}, \end{aligned}$$

ya probamos la primera desigualdad.

Por otra parte, probemos que el número $\binom{2n}{n}$ es divisible por todos los primos $p \in (n, 2n]$. Para ello necesitamos demostrar que $p \mid n! \binom{2n}{n}$. Si $n!$ lo multiplicamos por (2.2) es divisible por p , es decir,

$$p \mid n! \binom{2n}{n}, \text{ si } n < p \leq 2n,$$

pero p no divide a $n!$, quiere decir que $(p, n!) = 1$ implica que $p \mid \binom{2n}{n}$. Se deduce que

$$\prod_{n < p \leq 2n} p \mid \binom{2n}{n} \Rightarrow \prod_{n < p \leq 2n} p \leq \binom{2n}{n}.$$

Ahora

$$\prod_{n < p \leq 2n} p > \prod_{n < p \leq 2n} n = n^{\pi(2n) - \pi(n)}$$

ya que hay $\pi(2n) - \pi(n)$ primos en el intervalo $p < n \leq 2n$. Por lo tanto

$$n^{\pi(2n) - \pi(n)} < \binom{2n}{n},$$

estableciendo es miembro izquierdo de la primera desigualdad.

Para la segunda desigualdad, tomamos el coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$ y aplicamos el Corolario (2.1) obteniendo

$$\binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n} = 2^{2n},$$

y de (2.2) tenemos

$$\binom{2n}{n} = \prod_{j=1}^n \binom{n+j}{j} \geq \prod_{j=1}^n 2 = 2^n.$$

Por lo tanto

$$2^n \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$$

estableciendo la segunda desigualdad. □

A continuación damos la prueba de la estimación de Chebychev.

Demostración. De el Teorema 2.1. Tenemos que demostrar que existen constantes positivas A_1 y A_2 tal que

$$A_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < A_2 \frac{x}{\log x} \text{ para cualquier } x \geq 2$$

De el Lema (2.2) tenemos las desigualdades

$$\begin{aligned} n^{\pi(2n)-\pi(n)} &< \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)} \\ 2^n &\leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} n^{\pi(2n)-\pi(n)} < 2^{2n} &\Rightarrow (\pi(2n) - \pi(n)) \log n \leq 2n \log 2 \\ &\Rightarrow \pi(2n) - \pi(n) \leq \frac{2n \log 2}{\log n}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$(2n)^{\pi(2n)} \geq 2^n \implies \pi(2n) \geq \frac{n \log 2}{\log(2n)}.$$

Para una variable real $x \geq 2$, sea $2n$ es el entero par mas grande que no excede x , así que $x \geq 2n$, $n \geq 1$, y $x < 2n + 2$. Entonces

$$\pi(x) \geq \pi(2n) \geq \frac{n \log 2}{\log(2n)} \geq \frac{n \log 2}{\log x} \geq \frac{(2n+2) \log 2}{4 \log x} > \frac{\log 2}{4} \frac{x}{\log x}.$$

Por lo tanto

$$\pi(x) \geq A_1 \frac{x}{\log x}$$

para todo $x \geq 2$ con $A_1 = \frac{\log 2}{4}$.

Para establecer la existencia de A_2 , sea $2n = 2^t$ con $t \geq 3$. Entonces

$$\pi(2^t) - \pi(2^{t-1}) \leq \frac{2^t \log 2}{(t-1) \log 2} = \frac{2^t}{t-1}.$$

Considerar la suma telescópica

$$\sum_{t=3}^{2^j} (\pi(2^t) - \pi(2^{t-1})) = \pi(2^{2^j}) - \pi(4).$$

Dado $\pi(4) \leq 4 = \frac{2^2}{2-1}$ y $\pi(2^t) - \pi(2^{t-1}) \leq \frac{2^t}{t-1}$. Luego mayorizamos $\pi(2^{2^j})$ así:

$$\pi(2^{2^j}) < \sum_{t=2}^{2^j} \frac{2^t}{t-1} = \sum_{t=2}^j \frac{2^t}{t-1} + \sum_{t=j+1}^{2^j} \frac{2^t}{t-1}. \quad (2.3)$$

Ahora

$$\sum_{t=2}^j \frac{2^t}{t-1} < \sum_{t=2}^j 2^t = 2^{j+1} \quad (2.4)$$

y

$$\sum_{t=j}^{2j} \frac{2^t}{t-1} < \sum_{t=j}^{2j} \frac{2^t}{j} = \frac{1}{j} 2^{2j+1}. \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.4) y (2.5) en (2.3) tenemos

$$\pi(2^{2j}) < 2^{j+1} + \frac{1}{j} 2^{2j+1}.$$

Ya que $j < 2^j$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} &> \frac{1}{2^j} \\ \frac{1}{2^j} &< \frac{1}{j} \\ \frac{2^{2j+1}}{2^j} &< \frac{2^{2j+1}}{j} \\ 2^{j+1} &< \frac{2^{2j+1}}{j} \end{aligned}$$

y por lo tanto para $j \geq 2$, tenemos que

$$\pi(2^{2j}) < 2 \left(\frac{2^{2j+1}}{j} \right).$$

Esto implica que

$$\frac{\pi(2^{2j})}{2^{2j}} < \frac{4}{j} \text{ para todo } j \geq 2. \quad (2.6)$$

Sea $x \geq 2$ es una variable real. Entonces existe un entero $j \geq 1$ tal que $2^{2j-2} < x \leq 2^{2j}$. Como $\pi(x)$ es una función no decreciente se tiene

$$\begin{aligned} \pi(x) &\leq \pi(2^{2j}) \\ \frac{\pi(x)}{x} &\leq \frac{\pi(2^{2j})}{x} \\ \frac{\pi(x)}{x} &\leq \frac{\pi(2^{2j})}{2^{2j-2}} = \frac{4\pi(2^{2j})}{2^{2j}}, \text{ ya que } 2^{2j-2} < x. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Además,

$$2j \geq \frac{\log x}{\log 2} \Rightarrow \frac{4}{j} \leq \frac{8 \log 2}{\log x} \quad (2.8)$$

esta implicación se obtiene así:

$$\begin{aligned} x &\leq 2^{2j} \\ \log x &\leq 2j \log 2 \\ \frac{\log x}{\log 2} &\leq 2j \\ \frac{\log 2}{\log x} &\geq \frac{1}{2j} \\ \frac{8 \log 2}{\log x} &\geq \frac{8}{2j} \\ \frac{4}{j} &\leq \frac{8 \log 2}{\log x}, \end{aligned}$$

usando las implicaciones (2.6), (2.7) y (2.8) obtenemos la implicación.

$$\begin{aligned} \frac{\pi(2^{2j})}{2^{2j}} < \frac{4}{j} &\Rightarrow \frac{\pi(x)}{x} < \frac{16}{j} \leq \frac{32 \log 2}{\log x} \\ &\Rightarrow \pi(x) \leq (32 \log 2) \frac{x}{\log x} \end{aligned}$$

para todo $x \geq 2$. Por lo tanto

$$\pi(x) \leq A_2 \frac{x}{\log x}$$

para todo $x \geq 2$ con $A_2 = 32 \log 2$, estableciendo la estimación de Chebychev. \square

Obtenemos $A_1 = \frac{\log 2}{4}$ y $A_2 = 32 \log 2$, lo cual fué suficiente para la demostración del Teorema 2.1; sin embargo es un resultado débil. Ya que Chebychev demostró que $A_1 = 0.922$ y $A_2 = 1.105$ pueden ser usadas. Su demostración involucra un análisis cuidadoso de una forma de **aproximación de Stirling**¹. Los valores de las constantes de la desigualdad de Chebychev han mejorado muchas veces. Sylvester en 1881² mejoró los valores de $A_1 = 0,95695$ y $A_2 = 1,04423$ para valores grandes de x . Sea demostrado que para todo $x > 10$, $A_1 = 1$ puede ser utilizado. Un corolario inmediato de la estimación (2.1), independientemente de los valores de A_1 y A_2 es.

Corolario 2.2.

$$\frac{\pi(x)}{x} \longrightarrow 0 \text{ cuando } x \longrightarrow \infty.$$

Demostración. De la estimación de Chebychev tenemos

$$0 < \pi(x) \leq A_2 \frac{x}{\log x} \implies 0 < \frac{\pi(x)}{x} \leq \frac{A_2}{\log x}.$$

Ya que A_2 es una constante, $\frac{A_2}{\log x} \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \infty$, es claro que $\frac{\pi(x)}{x} \longrightarrow 0$ también. \square

¹ $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

²Ver en [28]

Este corolario dice que los primos se vuelven relativamente más escasos a medida que x se hace más grande. En términos probabilísticos se dice que la probabilidad de elegir al azar un número primo menor o igual a x tiende a cero cuando x tiende a infinito. Lo que quizás sea más interesante en este sentido probabilístico es que la probabilidad de elegir al azar un número primo no es relativamente tan pequeño. Para cualquier x la probabilidad de elegir al azar un número primo menor que x es $\frac{\pi(x)}{x}$. Para valores grandes de x esto es aproximadamente igual a $\frac{1}{\log x}$. Incluso para grandes números reales x , esto no es tan pequeño. El número e^{200} tiene 86 dígitos decimales, sin embargo, la probabilidad de elegir al azar un número primo menor que este valor es aproximadamente 0.005. Este argumento demuestra que los números primos, aunque escasos, son todavía bastante denso en los enteros.

2.2. FUNCIONES DE CHEBYSHEV ψ y ϑ

Definición 2.1. Para cada entero $n \geq 1$ definimos

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^m \text{ para un cierto primo } p \text{ y un cierto } m \geq 1, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

El número de primos hasta x , $\pi(x)$ esta estrechamente relacionada con la siguiente función.

Definición 2.2. La función de Chebyshev $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ esta dada por

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

donde $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Para practicar el uso correcto de la definición se da el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. Calcular $\psi(10)$

$$\begin{aligned} \psi(10) &= \Lambda(1) + \Lambda(2) + \cdots + \Lambda(10) \\ &= \Lambda(2) + \Lambda(2^2) + \Lambda(2^3) + \Lambda(3) + \Lambda(3^2) + \Lambda(5) + \Lambda(7) \\ &= \sum_{p^m \leq 10} \Lambda(p^m) = \sum_{p^m \leq 10} \log p, \text{ reescrito en sumatorio} \\ &= \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 3 + \log 3 + \log 5 + \log 7 \\ &= 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5 + \log 7. \end{aligned}$$

Con este ejemplo se obtiene una expresión equivalente para ψ es $\psi(x) = \sum_{p \leq x} m_p(x) \log p$; donde la suma es sobre todos los primos $p \leq x$ y $m_p(x)$ es el entero más grande tal que $p^{m_p(x)} \leq x$.

Notemos que

$$\begin{aligned} p^{m_p(x)} \leq x &\Leftrightarrow m_p(x) \log p \leq \log x \\ &\Leftrightarrow m_p(x) \leq \frac{\log x}{\log p} \end{aligned}$$

implica que $m_p(x) = \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor$. Nuestra definición equivalente queda así:

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p, \text{ con } p \in \mathbb{P}. \quad (2.9)$$

Definición 2.3. La función de Chebyshev $\vartheta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ esta dada

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

donde p recorre todos los números primos $\leq x$.

Con esta última definición podemos expresar $\psi(x)$ en términos de $\vartheta(x)$ esto se puede hacer agrupando términos de ψ en series donde cada suma se hace sobre todos los primos p que son menores o iguales a x con una potencia fija. Por otra parte esta claro que si para algún $m \geq 1$ existe un número primo p tal que $p^m \leq x$, entonces $2^m \leq x$. Con esto podemos encontrar el mayor entero así:

$$\begin{aligned} 2^m \leq x &\Leftrightarrow m \log 2 \leq \log x \\ &\Leftrightarrow m \leq \frac{\log x}{\log 2}. \end{aligned}$$

Si $\alpha = \max \left\{ m \in \mathbb{Z} \mid m \leq \frac{\log x}{\log 2} \right\} \Leftrightarrow \alpha = \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor$, esto sirve para saber hasta donde hay que parar de sumar. De ahí tenemos

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p^2 \leq x} \log p + \sum_{p^3 \leq x} \log p + \dots \\ &= \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p \leq x^{1/2}} \log p + \dots + \sum_{p \leq x^{1/\alpha}} \log p \\ &= \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \dots + \vartheta(x^{1/\alpha}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

La siguiente proposición relaciona los dos cocientes $\psi(x)/x$ y $\vartheta(x)/x$.

Proposición 2.1. Para $x > 0$ tenemos

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\log^2 x}{2\sqrt{x} \log 2}. \quad (2.11)$$

Demostración. De (2.10) encontramos

$$0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{2 \leq m \leq \alpha} \vartheta(x^{1/m}), \text{ con } \alpha = \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor. \quad (2.12)$$

Pero de la definición de $\vartheta(x)$ tenemos la desigualdad trivial

$$\vartheta(x) \leq \sum_{p \leq x} \log x \leq x \log x. \quad (2.13)$$

Note que

$$x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} + \dots \\ x^{\frac{1}{a}} \leq x^{\frac{1}{2}} \text{ para } a \in \{2, 3, \dots\}$$

Mayorizamos (2.12)

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) &\leq \sum_{2 \leq m \leq \alpha} x^{1/m} \log(x^{1/m}) \leq \alpha \sqrt{x} \log \sqrt{x} \\ &= \frac{\log x}{\log 2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} \log x = \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{2 \log 2}. \end{aligned}$$

Por último dividimos por x y con esto se finaliza la prueba. \square

Observación 2.1. *Note. Que la desigualdad (2.11) implica que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \right) = 0$$

Esto es porque aplicamos el límite a la desigualdad cuando $x \rightarrow \infty$ y por último aplicamos el teorema del emparedado. En otras palabras, si uno de los dos cocientes $\psi(x)/x$ o $\vartheta(x)/x$ tienden a un límite entonces también lo hace la otra, y los dos límites son iguales.

Proposición 2.2. *La función $g(s) = s \int_1^\infty \psi(x) x^{-1-s} dx$ es analítica en $\Re s > 1$.*

Demostración. Acotemos $\psi(x)$ utilizando (2.9) así:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \cdot \log p, \text{ ya que } \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \leq \frac{\log x}{\log p} \\ &\leq \log x \sum_{p \leq x} 1 = \log x \cdot \pi(x) \\ &\leq x \log x, \text{ dado que } \pi(x) \leq x, \text{ con } x \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

es decir, por definición $\psi(x) = O(x \log x)$.

Por otro lado tenemos que para $\Re s > 1$

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m p^{ms}}, \quad (2.14)$$

ya demostramos que la convergencia es uniforme para la última serie en $\Re s \geq \delta > 1$ lo cual nos permite derivar dentro del sumatorio. Por consiguiente

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_p \frac{p^{-s}}{1-p^{-s}} \log p = \sum_p (p^{-s} + p^{-2s} + \dots) \log p \\
&= \sum_p \left(\frac{\log p}{p^s} + \frac{\log p}{p^{2s}} + \dots \right) \\
&= \sum_p \left(\frac{\Lambda(p)}{p^s} + \frac{\Lambda(p^2)}{(p^2)^s} + \frac{\Lambda(p^3)}{(p^3)^s} + \dots \right) \\
&= \frac{\Lambda(2)}{2^s} + \frac{\Lambda(2^2)}{(2^2)^s} + \dots + \frac{\Lambda(3)}{3^s} + \frac{\Lambda(3^2)}{(3^2)^s} + \dots + \frac{\Lambda(5)}{5^s} + \frac{\Lambda(5^2)}{(5^2)^s} + \dots \\
&= \frac{\Lambda(2)}{2^s} + \frac{\Lambda(3)}{3^s} + \frac{\Lambda(4)}{4^s} + \frac{\Lambda(5)}{5^s} + \frac{\Lambda(7)}{7^s} + \dots, \text{ reordenando} \\
&= \frac{\Lambda(1)}{1^s} + \frac{\Lambda(2)}{2^s} + \frac{\Lambda(3)}{3^s} + \frac{\Lambda(4)}{4^s} + \frac{\Lambda(5)}{5^s} + \frac{\Lambda(6)}{6^s} + \dots, \text{ agregamos ceros} \\
&= \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-s}. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Si tomamos $g(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ es analítica en $\Re s > 1$ por Corolario (1.1). Como ya se probó en (2.15) que esta función se puede representar como una serie de Dirichlet por ello usamos el Lema de representación integral tomando $a_n = \Lambda(n)$, $P(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \psi(x)$, donde $\psi(x) \leq x^2$, las series $\sum_{n \geq 1} \frac{P(n)}{n^s}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{P(n-1)}{n^s}$ converge en $\Re s > 3$, y que $\int_1^\infty \psi(x) x^{-1-s} dx$ representa una función analítica en $\Re s > 2$ entonces $g(s) = s \int_1^\infty \psi(x) x^{-1-s} dx$ es analítica en el semiplano $\Re s > 1$ por la extensión analítica. \square

Lema 2.3. Sea $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$; $\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p$, y sea $\pi(x)$ es el número de primos menor o igual a x entonces

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq \frac{1}{\log x} + \frac{\psi(x)}{x} \frac{\log x}{\log x - 2 \log(\log x)}. \tag{2.16}$$

Demostración. Notamos la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \cdot \log p \leq \log x \cdot \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \cdot \log x, \quad [x] \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \\
\psi(x) &\leq \pi(x) \cdot \log x \\
\frac{\psi(x)}{x} &\leq \frac{\pi(x)}{x/\log x} \tag{2.17}
\end{aligned}$$

necesitamos una cota superior para el cociente $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$ para ello consideramos el intervalo.
Si $1 < y < x$,

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} 1 \\ &< \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} \frac{\log p}{\log y} \\ &< y + \frac{1}{\log y} \sum_{y < p \leq x} \log p \\ &\leq y + \frac{\psi(x)}{\log y}.\end{aligned}$$

Para valores suficientemente grandes de x tenemos $1 < \frac{x}{\log^2 x} < x$, luego si $y = \frac{x}{\log^2 x}$

$$\begin{aligned}\pi(x) &\leq \frac{x}{\log^2 x} + \frac{\psi(x)}{\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)}, \\ \frac{\pi(x) \log x}{x} &\leq \frac{1}{\log x} + \frac{\psi(x)}{x} \frac{\log x}{\log x - 2 \log(\log x)}\end{aligned}\tag{2.18}$$

por (2.17) y (2.18) obtenemos la desigualda deseada. \square

Teorema 2.2. (*Versión equivalente del Teorema del Número Primo*).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1 \tag{2.19}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \tag{2.20}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1. \tag{2.21}$$

Demostración. Debido al Lema 2.2: $\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq \frac{1}{\log x} + \frac{\psi(x)}{x} \frac{\log x}{\log x - 2 \log(\log x)}$

Aplicando L'Hopital a $\frac{\log x}{\log x - 2 \log(\log x)}$ obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 2 \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{\log x}} = 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\log x - 2 \log(\log x)}.\tag{2.22}$$

Primero demostramos que (2.19) \Leftrightarrow (2.20).

(\Rightarrow) Si $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ cuando $x \rightarrow \infty$, se sigue del Lema

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq 1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} \tag{2.23}$$

se deduce que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$.

(\Leftarrow) Si $\psi(x) \sim x$ cuando $x \rightarrow \infty$, se sigue que

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq 1 \quad (2.24)$$

por consiguiente el $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$, debido al teorema del emparedado.

Para demostrar (2.20) \Leftrightarrow (2.21), utilizamos la Proposición (2.1) que cumple que si uno de los dos cocientes converge a un número cuando $x \rightarrow \infty$ también converge el otro cociente al mismo número cuando $x \rightarrow \infty$ así:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

□

Proposición 2.3. Existe $C > 0$ tal que $\psi(x) \leq Cx$, para todo $x > 0$, es decir, $\psi(x) = O(x)$.

Demostración. El número $\binom{2n}{n}$ es divisible por todos los primos en $(n, 2n]$. Con este resultado podemos realizar la siguiente desigualdad

$$\prod_{n < p \leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} < \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n}$$

$$\sum_{n < p \leq 2n} \log p < 2n \log 2.$$

Si $n = 2^{k-1}$

$$\sum_{2^{k-1} < p \leq 2^k} \log p \leq 2^k \log 2$$

$$\sum_{p \leq 2^k} \log p \leq \sum_{i=0}^k 2^i \cdot \log 2 < 2^{2k+1} \cdot \log 2$$

Si k es un número tal que $2^{k-1} < x \leq 2^k$ tenemos

$$\sum_{p \leq x} \log p \leq \sum_{p \leq 2^k} \log p < 2^{k+1} \log 2 = (4 \log 2) \cdot 2^{k-1} < 4x \log 2.$$

Para $m > 1$ hemos fijado

$$\sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p < 4 \log 2 \cdot x^{1/m},$$

y esta claro que si para algún $m > 1$ existe un número primo p tal que $p^m \leq x$, entonces $2^m \leq x$.

De (2.10) tenemos

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{m \geq 2} \sum_{p^m \leq x} \log p \\ &= \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p \leq x^{1/2}} \log p + \cdots + \sum_{p \leq x^{1/\alpha}} \log p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(x) &\leq 4\log 2 \cdot x + 4\log 2 \cdot \sum_{m=2}^{\alpha} x^{1/2} \\ &\leq 4x\log 2 + 4x^{1/2}\log 2 \cdot \alpha \\ &\leq 4x\log 2 + 4x^{1/2}\log 2 \cdot \left\lceil \frac{\log x}{\log 2} \right\rceil\end{aligned}$$

$$\psi(x) \leq 4x\log 2 + 4x^{1/2}\log x$$

$$\psi(x) < 4x\log 2 + 4x, \text{ ya que } \log x < x^{1/2}$$

$$\psi(x) \leq C'x, \text{ con } C' = 4\log 2 + 4, x > 0$$

$$\psi(x) = O(x)$$

esto completa nuestra demostración.

□

2.3. PRUEBA DEL TNP VERSIÓN ANALÍTICA

En este trabajo, como ya se a dicho antes, se desarrollará el T.N.P siguiendo el método aplicado por D.J Newman en 1980 en [9], el cual es modificado por J. Korevaar 1982 en [27]. En el capítulo anterior demostramos que $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$ posee una extensión analítica sobre la recta $\Re s = 1$ en el semiplano derecho. En $\Re s > 1$ es válida la expresión

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} = 1 + s \int_1^{\infty} (\psi(x) - x)x^{-1-s} dx \quad (2.25)$$

a pesar de la extensión analítica aun no tenemos garantía de que la última integral va a converger en $\Re s = 1$. Sin embargo, en el caso particular que $s = 1$ la integral impropia $\int_1^{\infty} (\psi(x) - x)x^{-2} dx$ converge esto se probará mas adelante, esto implica la existencia de el límite de $\frac{\psi(x)-x}{x}$ cuando x crece, este límite es cero. En esta sección nos dedicamos a demostrar los teoremas del análisis que garantizan la existencia de dicho límite. Primero estudiamos la convergencia de la integral y la demostración que se presenta es debida a Newman, en la forma expuesta por Korevaar.



D. J. Newman

Comencemos con el lema:

Lema 2.4. Si $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada e integrable en cualquier subintervalo finito, entonces la transformada de Laplace de F , definida por

$$G(z) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-zt} dt$$

esta bien definida y es analítica en el semiplano $\Re s > 0$.

Demostración. Sea F es acotada e integrable en cualquier subintevalo finito. Sin perdida de generalidad suponemos que $|F(t)| \leq 1, \forall t > 0$. Sea $G(z) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-zt} dt$, la transformada de Laplace de F . Para $0 < k < \infty$ y definamos la integral

$$G_k(z) = \int_0^k F(t)e^{-zt} dt.$$

Por Lema 1.1, cada G_k es una función entera de z , además si $\Re z > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_0^k F(t) e^{-zt} dt \right| &\leq \int_0^k |F(t) e^{-zt}| dt \\ &\leq \int_0^k e^{-t\Re z} dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-t\Re z} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. -\frac{e^{-t\Re z}}{\Re z} \right|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-b\Re z}}{\Re z} + \frac{1}{\Re z} \right) \\ &\leq \frac{1}{\Re z}. \end{aligned}$$

Así la sucesión $G_k(z)$ de funciones analíticas en $\Re z > 0$ es uniformemente acotada sobre subconjuntos compactos de $\Re z > 0$, luego por Lema de Vitali la función límite

$$G(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k(z) = \int_0^\infty F(t) e^{-zt} dt$$

es analítica en $\Re z > 0$. □

Teorema 2.3. (Tauberiano). Sea $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como en el lema 2.4, G su transformada de Laplace. Si G posee extensión analítica sobre la recta $\Re z = 0$, entonces la integral impropia $\int_0^\infty F(t) dt$ converge y

$$G(0) = \int_0^\infty F(t) dt.$$

Demostración. Llamamos a $G(z)$ una extensión analítica de la transformada de Laplace de F en el semiplano derecho $\Re z \geq 0$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $|F(t)| \leq 1$ y definimos

$$G_\lambda(z) = \int_0^\lambda F(t) e^{-tz} dt,$$

es analítica en \mathbb{C} para todo $\lambda > 0$ finito.

Mostraremos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_\lambda(0) = G(0).$$

Ahora tratemos de estimar $G(0) - G_\lambda(0)$ con la ayuda de la fórmula integral de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$ dado, tomamos $R = \frac{1}{\varepsilon}$ y escogemos el disco de radio R con centro en el origen, es decir, $D_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$. Como G es analítica en una vecindad de $\Re z \leq 0$, existe $\delta = \delta(R) > 0$ suficientemente pequeño para que G sea analítica en $D_R(0) \cap \{\Re z \geq -\delta\}$. La frontera de este conjunto la llamamos W , siendo $W^+ = \{z \in W \mid \Re z > 0\}$ y $W^- = \{z \in W \mid \Re z < 0\}$ orientadas de manera positiva.

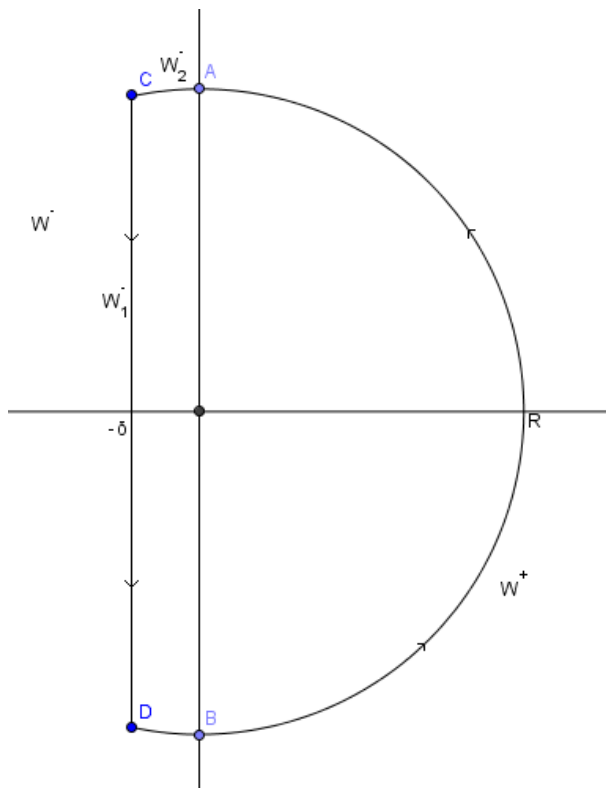


Figura 2.1:

Por la fórmula integral de Cauchy, se tiene

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z} dz. \quad (2.26)$$

Lo que necesitamos es acotar la parte derecha de (2.26), primeramente nos fijamos en el integrando e indagamos si esta acotado en todos los puntos de W , para esto necesitamos hacer las siguientes estimaciones:

- Si $x = \Re z$ y $|z| = R$, entonces

$$\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{\bar{z}}{R^2} + \frac{z}{R^2} = \frac{2x}{R^2}$$

- Para $x > 0$ tenemos

$$|G(z) - G_\lambda(z)| \leq \int_\lambda^\infty |F(t)| e^{-xt} dt \leq \frac{e^{-\lambda x}}{x}$$

- Para $x < 0$ tenemos

$$|G_\lambda(z)| \leq \int_0^\lambda e^{-xt} dt = \frac{e^{-\lambda x}}{|x|} - \frac{1}{|x|} < \frac{e^{-\lambda x}}{|x|},$$

▪ y si $z \in W_1^-$

$$\left| e^{\lambda z} \right| = e^{\lambda x} \leq e^{-\delta_1 \lambda}.$$

El análisis que se le hacen a estos items es cuando los números complejos que estan en W se acercan al eje imaginario los factores $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{|x|}$ no estan acotados, por lo que vemos que es necesario un enfoque más delicado para demostrar que $G(0) - G_\lambda(0) \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$. De hecho, es aquí donde el ingenio de Newman viene a primer plano, y nos provee con una modificación de la representación integral de arriba para $G(0) - G_\lambda(0)$. La idea de Newman es reemplazar el factor $\frac{1}{z}$ por $\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}$ en la integral de contorno (2.26). Dado que $(G(z) - G_\lambda(z)) \frac{z}{R^2}$ es analítico en $D_R(0) \cap \{\Re z \geq -\delta\}$. Resulta conveniente multiplicar por $e^{\lambda z}$ al termino modificado $(1/z + z/R^2)$ no se altera aquí lo explicamos.

Sea

$$\begin{aligned} G^*(z) &= e^{\lambda z} G(z), \text{ y} \\ G_\lambda^*(z) &= e^{\lambda z} G_\lambda(z). \end{aligned}$$

Como $e^{\lambda z}$ es una función entera, tiene valor 1 cuando $z = 0$. Sea $\varphi(z) = G(z) - G_\lambda(z)$ es una función analítica en $D_R(0) \cap \{\Re z \geq -\delta\}$ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= G(0) - G_\lambda(0) \\ \varphi(0) &= G^*(0) - G_\lambda^*(0) \\ \varphi(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{\varphi(z) e^{\lambda z}}{z} dz \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{\varphi(z) e^{\lambda z z}}{R^2} dz. \tag{2.28}$$

Combinando (2.27) y (2.28) obtenemos

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_W \varphi(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz.$$

Siendo $I(z) = (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right)$ obtenemos el siguiente resultado de la fórmula de Cauchy:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_W I(z) dz.$$

Nuestro objetivo es dividir el camino de integración de W por partes, y mejorar la estimación de cada una de las partes. La primera parte es W^+ . Para la segunda parte observe que $G(z) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right)$ es analítica sobre W , por esto existe un B tal que $\left| G(z) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| \leq B$ para todo W^- . Definimos $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, \delta, B) > 0$ de tal forma que $0 < \delta_1 < \delta$, y si $W_2^- = \{z \in W^- \mid -\delta_1 \leq \Re z\}$, entonces

$$\frac{B}{2\pi} \int_{W_2^-} |dz| < \varepsilon.$$

La tercera parte es $W_1^- = \{z \in W^- | \Re z < -\delta_1\} = W^- - W_2^-$. Llamamos también a W_*^- el conjunto $\{z \in \mathbb{C} | \Re z < 0, |z| = R\}$ ver Figura 2.3.

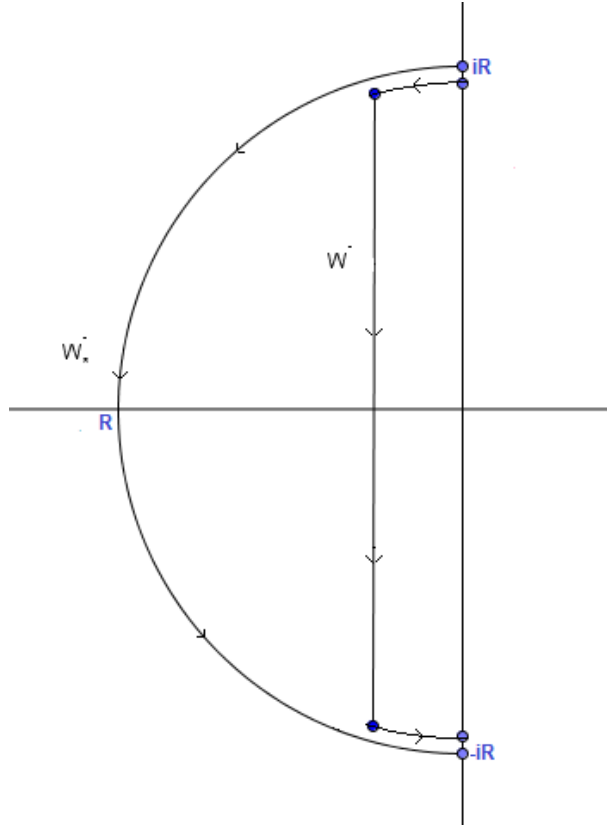


Figura 2.2:

Estamos muy cerca de estimar $G(0) - G_\lambda(0)$

$$2\pi i(G(0) - G_\lambda(0)) = \int_W I(z) dz = \int_{W^+} I(z) dz + \int_{W^-} I(z) dz. \quad (2.29)$$

Aplicando las propiedades de las integrales de contorno a la última integral de línea del lado derecho de (2.29) se tiene

$$\int_{W^-} I(z) dz = \int_{W^-} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz - \int_{W^-} G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz.$$

Efectuamos

$$\int_{W^-} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz = \int_{W_1^-} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz + \int_{W_2^-} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz$$

Como $G_\lambda(z)$ es analítica en \mathbb{C} , tenemos que

$$\int_{W^-} G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz = \int_{W_*^-} G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz,$$

por el teorema de Cauchy.

Nuestra descomposición de (2.29) nos queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 2\pi i(G(0) - G_\lambda(0)) &= \int_{W^+} I(z)dz - \int_{W_*^-} G_\lambda(z)e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \\ &\quad + \int_{W_1^-} G(z)e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \\ &\quad + \int_{W_2^-} G(z)e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz. \end{aligned}$$

Utilizamos la estimaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{W^+} I(z)dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{W^+} e^{\lambda x} \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{x} \cdot \frac{2x}{R^2} |dz| \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{W^+} |dz| = \frac{\pi R}{\pi R^2} = \frac{1}{R} = \varepsilon, \\ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{W_*^-} G_\lambda(z)e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{W_*^-} e^{\lambda x} \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{|x|} \cdot \frac{2|x|}{R^2} |dz| \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{W_*^-} |dz| = \frac{1}{R} = \varepsilon, \\ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{W_1^-} G(z)e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot B \cdot e^{-\lambda \delta_1} \cdot \int_{W_1^-} |dz|, \\ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{W_2^-} G(z)e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{W_2^-} e^{\lambda x} \cdot B \cdot |dz| \leq \frac{B}{2\pi} \int_{W_2^-} |dz| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego

$$|G(0) - G_\lambda(0)| \leq 3 \cdot \varepsilon + \frac{B}{2\pi} \cdot \int_{W_1^-} |dz| \cdot e^{-\lambda \delta_1},$$

tomado λ suficientemente grande obtenemos $|G(0) - G_\lambda(0)| < 4\varepsilon$. □

Pasemos ahora a nuestra version del teorema de Ikehara-Wiener(Ver Korevaar [27]):

Lema 2.5. Si $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en cualquier subintervalo finito, no negativo, no decreciente y $O(x)$, entonces la transformada de Mellin de f , dada por

$$g(s) = s \int_1^\infty f(x)x^{-1-s} dx$$

esta bien definida y es analítica en el semiplano $\Re s > 1$.

Demostración. Como f es $O(x)$, escogemos λ suficientemente grande para que $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < C$ cuando $x > \lambda$. Para $\Re s \geq \sigma > 1$ tenemos

$$\left| \int_{\lambda}^{\infty} f(x)x^{-1-s} dx \right| \leq \int_{\lambda}^{\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| x^{-\sigma} dx \leq \frac{C}{\sigma-1} \lambda^{1-\sigma}.$$

De ahí que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_1^{\lambda} f(x)x^{-1-s} dx = \int_1^{\infty} f(x)x^{-1-s} dx$$

es uniformemente convergente en $\Re s \geq \sigma > 1$, es decir, esto garantiza la analiticidad de $g(s)$. \square


Teorema 2.4. Sea $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como en el Lema 2.5 y $g(s)$ su transformada de Mellin. Si existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(s) - \frac{c}{s-1}$$

posee una extensión analítica sobre la recta $\Re s = 1$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$

Demostración.

 *Primer paso:* Definimos $F(t) = e^{-t} f(e^t) - c$ para todo $t \geq 0$. Se tiene que F es acotada en $(0, \infty)$ ya que

$$\begin{aligned} |F(t)| &= |e^{-t} f(e^t) - c| \\ &\leq |e^{-t} f(e^t)| + |c| \\ &\leq e^{-t} e^t K + |c| \\ &\leq M, \text{ con } M = K + |c| > 0 \end{aligned}$$

pues $f(x) = O(x)$ es integrable sobre intervalos finitos. Su transformada de Laplace G será

$$G(z) = \int_0^{\infty} (e^{-t} f(e^t) - c) e^{-zt} dt$$

Tomando la sustitución $x = e^t$ entonces $t = \log x$ derivando se tiene $dt = \frac{1}{x} dx$

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_1^\infty (x^{-1} f(x) - c) e^{-z \log x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^\infty (x^{-2} f(x) - cx^{-1}) \cdot e^{\log x^{-z}} dx \\ &= \int_1^\infty (x^{-2} f(x) - cx^{-1}) x^{-z} dx = \int_1^\infty (x^{-2-z} f(x) - cx^{-z-1}) dx \\ &= \int_1^\infty x^{-2-z} f(x) dx - c \int_1^\infty x^{-z-1} dx \\ &= \int_1^\infty f(t) x^{-2-z} dx - \frac{c}{z} = \frac{g(z+1)}{z+1} - \frac{c}{z} \\ &= \frac{1}{z+1} (g(z+1) - \frac{c}{z} - c). \end{aligned}$$

Por hipótesis $g(z+1) - \frac{c}{z}$ posee una extensión analítica sobre $\Re(z+1) = 1$, luego G posee una extensión analítica sobre $\Re z = 0$. De el teorema (2.3) concluimos que

$$G(0) = \int_0^\infty (e^{-t} f(e^t) - c) dt = \int_1^\infty \frac{f(x) - cx}{x^2} dx = \int_1^\infty \left(\frac{f(x)}{x} - c \right) \frac{dx}{x}$$

existe. Recordando que f no decreciente, nosotros podemos inferir que

$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow c \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

☞ *Segundo paso:* Falta verificar que la convergencia de la integral implica que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = c$. Por definición, es suficiente demostrar las dos desigualdades

$$c \leq \liminf \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad \limsup \frac{f(x)}{x} \leq c.$$

Probamos el $\limsup \frac{f(x)}{x} \leq c$ por contradicción. En efecto, supongamos que $\limsup \frac{f(x)}{x} > c$, entonces existe $\delta > 0$ con

$$0 < 2\delta < \limsup \frac{f(x)}{x} - c.$$

Definimos $\rho = \frac{c+2\delta}{c+\delta} > 1$ (observe que $c \geq 0$, caso contrario $\int_1^\infty \frac{f(x)-cx}{x^2} dx \geq \int_1^\infty \frac{-xc}{x^2} dx = +\infty$). Como el $\limsup \frac{f(x)}{x} > c$, sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión infinita tal que

$$f(y_n) > (c + 2\delta)y_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para $y_n < x < \rho y_n$ tenemos (pues f es no decreciente)

$$f(x) \geq f(y_n) > (c + 2\delta)y_n > (c + \delta)x.$$

Luego

$$\frac{f(x) - cx}{x} > \delta,$$

y por lo tanto

$$\int_{y_n}^{\rho y_n} \frac{f(x) - cx}{x^2} dx \geq \int_{y_n}^{\rho y_n} \frac{\delta}{x} dx = \delta \log \rho > 0.$$

Como $G(0) = \int_1^\infty \frac{f(x) - cx}{x^2} dx$, dado $\varepsilon > 0$ existe $M > 1$ tal que sea $a \geq M$, entonces

$$\left| \int_a^\infty \frac{f(x) - cx}{x^2} dx \right| < \varepsilon$$

Tomemos $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2} \log \rho$, como $y_n \rightarrow \infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a \geq y_{n_0}$, entonces

$$\left| \int_a^\infty \frac{f(x) - cx}{x^2} dx \right| < \varepsilon.$$

Sin embargo

$$\begin{aligned} \delta \log \rho &< \left| \int_{y_{n_0}}^{\rho y_{n_0}} \frac{f(x) - cx}{x^2} dx \right| \\ &\leq \left| \int_{y_{n_0}}^\infty \frac{f(x) - cx}{x^2} dx \right| + \left| \int_{\rho y_{n_0}}^\infty \frac{f(x) - cx}{x^2} dx \right| < 2\varepsilon < \delta \log \rho \\ \delta \log \rho &< \delta \log \rho \text{ ¡absurdo!} \end{aligned}$$

Concluimos que $\limsup \frac{f(x)}{x} \leq c$.

Con un razonamiento análogo para $\liminf \frac{f(x)}{x} < c$ (en este caso c tendría que ser positivo y consideramos el intervalo $\theta y_n < x < y_n$ con $\theta < 1$ donde $f(x) < (c - \delta)x$). Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = c$.

□

Teorema 2.5. (El Teorema de los Números Primos)

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \sim \frac{x}{\log x}, \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

Demostración. Sea $\psi(x) : \mathbb{R}_1^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p.$$

luego ψ es no negativa, integrable sobre intervalos finitos y no decreciente sobre $\mathbb{R}_1^+ = [1, \infty)$. Utilizando la Proposición (2.3), $\psi(x)$ es $O(x)$ y aplicamos el Teorema (2.4) a $\psi(x)$ vemos que la transformada de Mellin para ψ es

$$g(s) = s \int_1^{\infty} \psi(x)^{-1-s} dx$$

existe y es analítica para $\Re s > 1$. Además por la Proposición 2.2, se tiene

$$g(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \quad \Re s > 1.$$

Por la Proposición 1.9 sabemos que $g(s)$ puede ser extendida analíticamente en entornos de cada uno de los puntos de $\Re s = 1$, excepto cuando $s = 1$. Por lo tanto

$$g(s) - \frac{1}{s-1}$$

tiene una extensión analítica sobre entornos cerrados de el semiplano $\Re s \geq 1$. Se cumplen con las premisas del teorema entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

y esto es equivalente al Teorema de los Números Primos por Teorema 2.2. □

En este trabajo estaba pensado en desarrollar otra demostración analítica del TNP. Se había seleccionado el artículo de D. Zagier llamado Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem una vez estudiándolo se encontró que esta basado en los mismos lineamientos descritos en las tres secciones de este capítulo. Por consiguiente se decidió omitir su demostración.

Una vez demostrado el TNP en este capítulo, queremos compararlo y revisarlo con el primer TNP probado de manera independiente por Hadamard y C. J. de Vallé-Poussin en 1896. Esta primera demostración es otra forma de enunciar el teorema más complicado pero más natural desde el punto de vista histórico y computacional es:

Teorema 2.6. Sea $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$. Entonces $\pi(x) \sim Li(x)$, cuando $x \rightarrow \infty$.

Demostración. Ver [21]. □

Se puede establecer la siguiente equivalencia

Teorema 2.7. En cada caso $x \rightarrow \infty$

$$\pi(x) \sim Li(x) \Leftrightarrow \pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{2.30}$$

Demostración. Es fácil probar que $Li(x) \sim \frac{x}{\log x}$ cuando $x \rightarrow \infty$, esto se hace aplicando la regla de L'Hopital. Por último se utiliza la transitividad de funciones asintóticas (ver Propiedad 1) con esto se finaliza la prueba. \square

La primera prueba del TNP sigue el esquema del trabajo de Riemann, lo que tiene en común con el TNP realizado con detalle en este capítulo, es que las dos pruebas se fundamentan en la no anulación de la función ζ en cierta región del plano.

Comparemos las dos funciones asintóticas $x/\log x$ o $Li(x)$, para saber quien tiene la mejor aproximación a $\pi(x)$. Para esto observemos la Tabla 1 y la Figura 2.3, notamos que la función que tiene mejor aproximación es $Li(x)$ y esto ha sido comprobado por Vallé-Poussin en 1899.

Tabla 1.

x	$\pi(x)$	$x/\log x$	$Li(x)$	$\pi(x) \log x/x$	$\pi(x)/Li(x)$
10^3	168	144.	177.	1.16	0.94
10^4	1 229	1 085.	1 245.	1.132	0.987
10^5	9 592	8 685.	9 629.	1.1043	0.9961
10^6	78 498	72 382.	78 627.	1.08449	0.99835
10^7	664 579	620 420.	664 917.	1.07117	0.99949
10^8	5 761 455	5 428 681.	5 762 208.	1.06130	0.99987
10^9	50 847 534	48 254 942.	50 849 234.	1.05373	0.999966
10^{10}	455 052 511	434 294 481.	455 055 614.	1.04780	0.999993

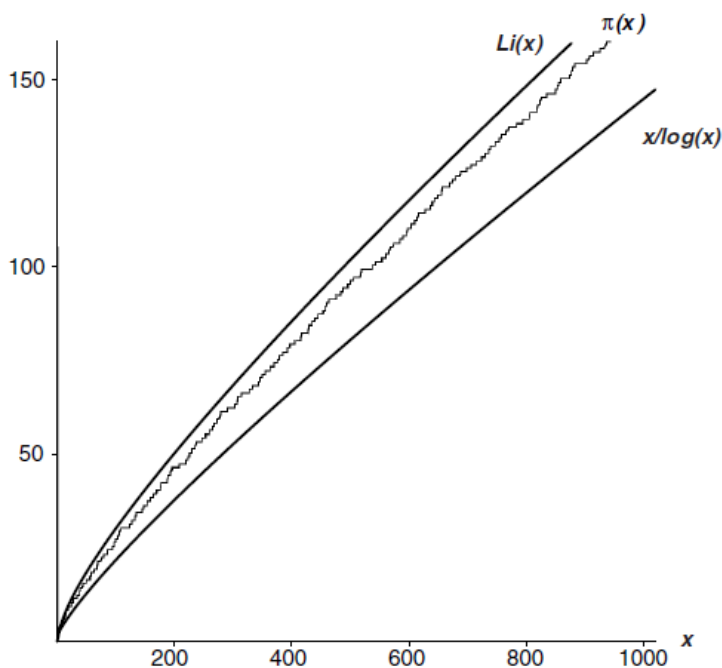


Figura 2.3:

Con respecto a la evolución del teorema existe una demostración breve de H. Iwaniec [22], que tiene la sorprendente novedad de que no emplea la extensión analítica de ζ (sólo utiliza la función ζ en $\Re s > 1$, sin apelar a su extensión ni a propiedades analíticas).

Capítulo 3

DESARROLLO DE LA DEMOSTRACION ELEMENTAL DEL TNP

La demostración elemental del TNP que vamos a realizar es la demostración de Selberg [34] (la forma simplificada Levinson y Wright), la similitud con la demostración de Erdős es que parten de la misma desigualdad, que es la famosa *desigualdad de Selberg*. Comenzó en un comunicado de Erdős a Selberg. Este último expresa que:



Figura 3.1: Atle Selberg

Paul Erdos

La demostración original se basó en el siguiente resultado de Erdős: para todo $\delta > 0$, existe un $K(\delta) > 0$ tal que si x es suficientemente grande, entonces hay más de $K(\delta) \frac{x}{\log x}$ primos en el intervalo $(x, x + \delta x)$.

Este resultado, que Erdős había deducido a partir de la identidad de Selberg, les permitió a ambos y de manera independiente (según afirma Selberg), concluir con la demostración elemental

del TNP.

Siempre ha existido una sombra a tan notable descubrimiento. Si bien la demostración había sido elemental, la colaboración entre ambos no dejó de ser compleja. Entre Erdős y Selberg hubo un intercambio de ideas, y parece que la primera intención era publicar este resultado conjuntamente. No está claro qué ocurrió para que al final publicasen dos artículos por separado, aunque parece que tuvo que ver con ello el hecho de que Selberg consiguiera una demostración que prescindía del paso intermedio dada por Erdős.

Sea como fuere, este desagradable incidente, que les distanció para siempre, no debe empañar la impresionante trayectoria matemática de ambos.

En este capítulo estudiamos más a fondo la función de Chebyshev, su identidad y el análisis de su fórmula de inversión. Podemos relacionar la identidad de Chebyshev con la fórmula de Stirling por medio de la sumación de Abel, esta última fórmula es un elemento en nuestro análisis, que nos servirá para demostrar la famosa desigualdad de Selberg. Cabe destacar el primero que intuyó la probabilidad de demostrar de manera elemental a partir de la desigualdad de Selberg, y dio un paso decisivo en esa dirección fue Paul Erdős, como se ha dicho anteriormente. En este capítulo desarrollamos la demostración elemental del TNP de Selberg, que consiste en sustituir la función $R(x)$ en la desigualdad, después de varios razonamientos concluimos que $R(x) = o(x)$. Para esto, requerimos del cálculo elemental en varias operaciones suaves para tener una desigualdad más manejable. Este último capítulo es basado en el artículo de Norman Levinson[25]

3.1. LA IDENTIDAD DE CHEBYCHEV Y SU INVERSIÓN

Comenzamos con el hecho que todo entero positivo puede ser factorizado como el producto de potencias de distintos primos (Teorema Fundamental de la Aritmética). Así un entero positivo lo podemos expresar de la siguiente manera

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}, \quad (3.1)$$

donde p_j , $1 \leq j \leq m$, son distintos primos y cada k_j es un entero positivo. Aplicamos logaritmo a (3.1) y usamos las propiedades, se obtiene:

$$\log n = k_1 \log p_1 + k_2 \log p_2 + \cdots + k_m \log p_m. \quad (3.2)$$

La utilidad de esta fórmula consiste en reforzarla con la introducción de la función de Mangold Λ , que se definió previamente en el capítulo II.

El simbolo $\sum_{j|n}$ se utiliza para denotar una suma en j , donde j recorre todos los divisores positivos de un entero positivo n . Con esta notación se muestra que (3.2) puede escribirse como

$$\log n = \sum_{j|n} \Lambda(j). \quad (3.3)$$

Para probar (3.3) tomemos en cuenta que debido a (3.1) y la definición de $\Lambda(j)$ los únicos términos distintos de cero que aparecen en el miembro derecho de la ecuación (3.3) son $\log p_1, \log p_2, \dots, \log p_m$. Por otro parte $\log p_1$ aparece para $j = p_1$, para $j = p_1^2, \dots$, y para $j = p_1^{k_1}$. Por lo tanto $\log p_1$ aparece exactamente k_1 veces, de manera similar para $\log p_2$ aparece exactamente k_2 veces, etc., con esto demostramos (3.3). La fórmula (3.3) es una variante muy potente de (3.2) e incorporamos las propiedades de los números primos que son necesarias en este capítulo. La transformación de (3.2) en la forma (3.3) no es obvia e históricamente llegó relativamente tarde.

La fórmula (3.3) puede ser escrita de forma equivalente así:

$$\log n = \sum_{ij=n} \Lambda(j), \quad (3.4)$$

donde i y j son enteros positivos y toman todos los valores posibles que satisfacen $ij = n$, de esta manera j recorre todos los divisores positivos de n (de igual forma para i).

Por la Proposición 2.2, el TNP es equivalente a demostrar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Utilizamos (3.3) para obtener más información acerca de $\psi(x)$, (3.3) es sumada sobre $n \leq x$ para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \log n &= \sum_{n \leq x} \sum_{ij=n} \Lambda(j) \\ &= \sum_{ij=1} \Lambda(j) + \sum_{ij=2} \Lambda(j) + \dots + \sum_{ij=[x]} \Lambda(j) \\ &= \sum_{ij \leq x} \Lambda(j) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si definimos

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n = \sum_{ij \leq x} \Lambda(j) \quad (3.6)$$

Esto se puede realizar ya que el logaritmo es una función suave, $T(x)$ la analizaremos para valores grandes de x en la siguiente sección.

La doble suma en (3.6) es tomada sobre aquellos puntos latices¹ que están en el primer cuadrante de (i, j) y estos están ubicados sobre o debajo de la hipérbola $ij = x$. Si la doble suma (3.6) es tratada como una suma repetida, sumamos primero sobre j .

¹Son puntos cuyas coordenadas son números enteros

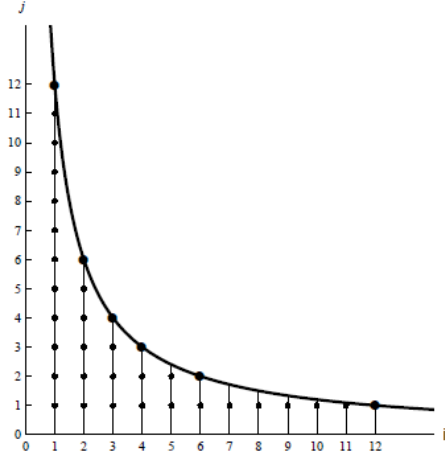


Figura 3.2: Contamos todos los puntos látices $ij \leq 12$ con $i, j \in \mathbb{N}$. Esto se hace contando los puntos látices que se encuentran en las líneas rectas verticales. Para cada $i \leq 12$ fijo podemos contar primero los puntos látices en el segmento de línea vertical $1 \leq j \leq 12/i$, luego la suma se hace sobre todos $i \leq 12$.

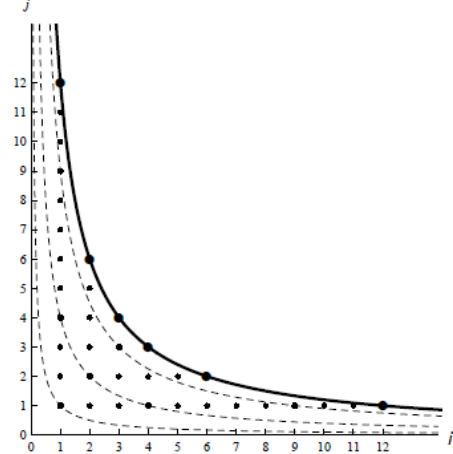


Figura 3.3: Contamos todos los puntos látices $ij \leq 12$ con $i, j \in \mathbb{N}$. Esto se hace contando los puntos látices que se encuentran en las hipebolas $ij = n$, con $n = 1, 2, \dots, 12$. Para cada $j \leq 12$ fijo podemos contar los primeros puntos látices en el segmento de línea horizontal $1 \leq i \leq 12/j$, luego se hace la suma sobre todos $j \leq 12$.

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{i \leq x} \sum_{j \leq x/i} \Lambda(j) = \sum_{\substack{j \leq \frac{x}{1} \\ (i=1)}} \Lambda(j) + \sum_{\substack{j \leq \frac{x}{2} \\ (i=2)}} \Lambda(j) + \dots + \sum_{\substack{j \leq \frac{x}{[x]} \\ (i=[x])}} \Lambda(j) \\ &= \sum_{i \leq x} \psi(x/i). \end{aligned}$$

Esta identidad es descubierta por Chebychev(1850) y reescrita como

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \psi(x/n). \quad (3.7)$$

La *identidad de Chebychev* (3.7) es una relación de transformación. Esto sugiere que dada una función $F(x)$ definida para $x > 1$, uno define la función de relación $G(x)$ para $x > 1$ por

$$G(x) = \sum_{n \leq x} F(x/n) = F(x) + F(x/2) + F(x/3) + \dots + F(x/[x]), \quad (3.8)$$

$G(x)$ puede ser considerada como una transformación de $F(x)$. Las relaciones de transformación son algunas de las herramientas mas poderosa de la matemática y en este caso no es la excepción. Dado que $T(x)$ es una función relativamente simple, es de mucho interés porqué vamos invertir la relación (3.7) para expresar $\psi(x)$ en términos de T , o en la notación más general, para tratar de

invertir (3.8) para encontrar F en términos de G . Para resolver F en términos de G , un primer paso modesto sería eliminar $F(x/2)$ del lado derecho de (3.8). Esto se hace fácilmente reemplazando x por $x/2$ en (3.8), obtenemos

$$G\left(\frac{x}{2}\right) = F\left(\frac{x}{2}\right) + F\left(\frac{x}{4}\right) + F\left(\frac{x}{6}\right) + \dots$$

De (3.8) restamos esta última expresión para eliminar el término $F(x/2)$. Este proceso puede ser extendido reemplazando x por $x/3$ en (3.8) para eliminar el término $F(x/3)$, así sucesivamente se sigue el proceso hasta eliminar todos los términos del miembro derecho de (3.8) excepto $F(x)$, de manera esquemática representamos esto de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcccccccc} G(x) = & F(x) & +F(\frac{x}{2}) & +F(\frac{x}{3}) & +F(\frac{x}{4}) & +F(\frac{x}{5}) & +F(\frac{x}{6}) & +\dots \\ G(\frac{x}{2}) = & & F(\frac{x}{2}) & & +F(\frac{x}{4}) & & +F(\frac{x}{6}) & +\dots \\ G(\frac{x}{3}) = & & & F(\frac{x}{3}) & & & +F(\frac{x}{6}) & +\dots \\ G(\frac{x}{4}) = & & & & F(\frac{x}{4}) & & & +\dots \\ G(\frac{x}{5}) = & & & & & F(\frac{x}{5}) & & +\dots \\ G(\frac{x}{6}) = & & & & & & F(\frac{x}{6}) & +\dots \\ \dots & & & & & & & \dots \end{array} \quad (3.9)$$

Si utilizamos las ecuaciones en la secuencia uno podemos eliminar a $F(x/2)$, $F(x/3)$, etc, del lado derecho de (3.9). Por ejemplo para $G(x/6)$ obtenemos

$$F(x) = G(x) - G\left(\frac{x}{2}\right) - G\left(\frac{x}{3}\right) - G\left(\frac{x}{5}\right) + G\left(\frac{x}{6}\right) + \dots$$

Con esto probamos que (3.8) puede ser invertido por la fórmula del tipo

$$F(x) = \sum_{k \leq x} \mu(k) G\left(\frac{x}{k}\right), \quad (3.10)$$

donde el factor $\mu(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ de $G(\frac{x}{k})$ aun está por determinarse.

Para probar esta fórmula utilizamos los métodos del algebra lineal. Con este fin identificamos cada valor de la función $G(\frac{x}{i})$ con el vector $e_i \in \mathbb{R}^{[x]}$:

$$\begin{aligned} G\left(\frac{x}{1}\right) &\cong (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots)^T = e_1 \\ G\left(\frac{x}{2}\right) &\cong (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots)^T = e_2 \\ G\left(\frac{x}{3}\right) &\cong (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots)^T = e_3 \\ &\vdots \\ G\left(\frac{x}{[x]}\right) &\cong (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)^T = e_{[x]}. \end{aligned}$$

A cada sumando de $F(\frac{x}{i})$ se asocia 1 ó 0 en caso no aparezca. La matriz $A = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{[x]})$ es una matriz triangular inferior que tiene la propiedad que su determinante puede ser calculado

por el producto de sus elementos de la diagonal, es decir, $\det A = 1 \neq 0$, entonces el conjunto de vectores $e_1, \dots, e_{[x]}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^{[x]}$. Por tanto forman una base en $\mathbb{R}^{[x]}$ y existe una combinación lineal

$$\sum_{k \leq x} \mu(k) e_k = (1 \ 0 \ \dots 0).$$

Que es equivalente a

$$\sum_{k \leq x} \mu(k) G\left(\frac{x}{k}\right) = F(x).$$

Si sustituimos a x por x/k en (3.8) obteniendo $G(x/k) = \sum_{j \leq x/k} F(x/jk)$, luego sustituimos en (3.10) tenemos

$$F(x) = \sum_{k \leq x} \mu(k) \sum_{j \leq x/k} F(x/jk) = \sum_{jk \leq x} \mu(k) F(x/jk).$$

Si esta doble suma es sumada en los puntos láticos en las hipérbolas $jk = n$, para $1 \leq n \leq x$,

$$F(x) = \sum_{n \leq x} F(x/n) \sum_{jk=n} \mu(k). \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) se convierte en la identidad si $n = 1$ entonces $\mu(1) = 1$, y reemplazando $jk = n$ por $k|n$, si

$$\sum_{k|n} \mu(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } 2 \leq n \leq x. \end{cases} \quad (3.12)$$

Para encontrar $\mu(k)$ explícitamente tratamos el caso $n = p \in \mathbb{P}$ los únicos divisores son $k = 1$ y $k = p$ realizamos la suma $\mu(1) + \mu(p) = 0$ y por tanto $\mu(p) = -1$. El caso cuando $n = p_1 p_2$ tenemos

$$\mu(1) + \mu(p_1) + \mu(p_2) + \mu(p_1 p_2) = 0$$

y por tanto $\mu(p_1 p_2) = 1$. De manera similar es fácil calcular

$$\mu(p_1 p_2 p_3) = -1, \quad \mu(p^2) = 0, \quad \mu(p^3) = 0, \dots, \mu(p_1^2 p_2) = 0.$$

Esto sugiere que

$$\mu(n) = (-1)^m, \quad n = p_1 p_2 \cdots p_m, \quad (3.13)$$

donde p_1, p_2, \dots, p_m todos primos distintos y

$$\mu(n) = 0 \quad \text{si } p^2 | n, \quad p \in \mathbb{P}. \quad (3.14)$$

La función $\mu(n)$ es conocida como la **función de Möbius**.

Ahora probamos que si $\mu(n)$ es definida como en (3.13) y (3.14) entonces (3.12) es ciertamente válido. Recordemos que la solución de (3.12) es único. Debido a (3.14) para $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$,

$$\sum_{j|n} \mu(j) = \sum_{j|p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}} \mu(j) = \sum_{j|p_1 p_2 \cdots p_m} \mu(j),$$

se simplifican los cálculos por medio de la fórmula (3.12). Si $m = 1$, (3.12) es cierto dado que $\mu(1) + \mu(p_1) = 1 - 1 = 0$. Si $m \geq 2$

$$\sum_{j|p_1 \cdots p_m} \mu(j) = \sum_{k|p_1 \cdots p_{m-1}} (\mu(k) + \mu(kp_m)). \quad (3.15)$$

El sumando adicional $\mu(kp_m)$ se calcula por medio de todas las combinaciones posibles del producto de p_m y $k|p_1 p_2 \cdots p_{m-1}$. Si k tiene $r \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ factores libres de cuadrados. Por (3.13) tenemos que

$$\mu(kp_m) = (-1)^{r+1} = -\mu(k).$$

Por lo tanto cada término del miembro derecho de la ecuación (3.15) es cero y así (3.12) es probado. Además por (3.13) y (3.14) implica que

$$|\mu(n)| \leq 1, \text{ con } n \in \mathbb{N}. \quad (3.16)$$

Aplicando la fórmula de inversión de Möbius (3.10) a la identidad de Chebychev (3.7) nos da la siguiente *fórmula de inversión*

$$\psi(x) = \sum_{k \leq x} \mu(k) T\left(\frac{x}{k}\right). \quad (3.17)$$

Usando la definición de ψ y T esto puede escribirse como

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) &= \sum_{k \leq x} \mu(k) \sum_{j \leq x/k} \log j = \sum_{jk \leq x} \mu(k) \log j = \sum_{n \leq x} \sum_{jk=n} \mu(k) \log j \\ &= \sum_{n \leq x} \sum_{k|n} \mu(k) \log n/k. \end{aligned}$$

Usamos este resultado para $x = 1, 2, 3, \dots$ lo anterior prueba que

$$\Lambda(n) = \sum_{k|n} \mu(k) \log n/k, \quad n \geq 1, \quad (3.18)$$

esta es la fórmula de inversión para (3.3).

3.2. ALGUNOS RESULTADOS ELEMENTALES

Presentamos la fórmula de sumación que es resultado elemental que nos servirá en la próxima sección y que detallamos a continuación.

Lema 3.1. (Sumación de Abel). Sea $f(t)$ con derivada continua, $f'(t)$, para $t \geq 1$. Sean c_n constantes, donde $n \geq 1$ y sea $C(u) = \sum_{n \leq u} c_n$. Entonces

$$\sum_{n \leq x} c_n f(n) = f(x)C(x) - \int_1^x f'(t)C(t)dt \quad (3.19)$$

y

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \int_1^x f(t)dt + \int_1^x (t - [t])f'(t)dt + f(1) - (x - [x])f(x). \quad (3.20)$$

Demostración. Por definición de $C(u)$ tenemos

$$C(n) - C(n-1) = c_n$$

y

$$C(u) = C([u]),$$

Por consiguiente si $[x] = N$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} c_n f(n) &= \sum_{n \leq x} (C(n) - C(n-1))f(n) \\ &= \sum_{n \leq x-1} (C(n) - C(n-1))f(n) + (C([x]) - C([x-1]))f([x]) \\ &= \left\{ \sum_{n \leq x-1} (C(n) - C(n-1))f(n) - C([x-1])f([x]) \right\} + C(x)f([x]) \\ &= \sum_{n \leq x-1} C(n)(f(n) - f(n+1)) + C(x)f(N) \\ &= - \sum_{n \leq x-1} C(n) \int_n^{n+1} f'(t)dt + C(x)f(N) \\ &= - \int_1^N C(t)f'(t)dt + C(x)f(N). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dado que $C(t)$ es una constante en $N \leq t < x$,

$$\int_N^x C(t)f'(t)dt = C(x) \int_N^x f'(t)dt = C(x)(f(x) - f(N)). \quad (3.22)$$

Combinando (3.21) y (3.22) tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} c_n f(n) + \int_N^x C(t) f'(t) dt &= - \int_1^N C(t) f'(t) dt + C(x) f(x) \\ \sum_{n \leq x} c_n f(n) &= - \int_1^N C(t) f'(t) dt - \int_N^x C(t) f'(t) dt + f(x) C(x) \\ \sum_{n \leq x} c_n f(n) &= f(x) C(x) - \int_1^x C(t) f'(t) dt.\end{aligned}$$

En el caso $c_n = 1$, (3.19) se convierte

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} f(n) &= f(x) \sum_{n \leq x} 1 - \int_1^x f'(t) [t] dt \\ &= [x] f(x) - \int_1^x f'(t) [t] dt \\ &= [x] f(x) - \int_1^x f'(t) t dt + \int_1^x f'(t) (t - [t]) dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes la primera integral del miembro derecho de la ecuación así:

$$\begin{aligned}\int_1^x f'(t) t dt &= \int_1^x t d(f(t)) \\ &= t f(t) \Big|_1^x - \int_1^x f(t) dt \\ &= x f(x) - f(1) - \int_1^x f(t) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} f(n) &= [x] f(x) - x f(x) + f(1) + \int_1^x f(t) dt + \int_1^x f'(t) (t - [t]) dt \\ \sum_{n \leq x} f(n) &= \int_1^x f(t) dt + \int_1^x f'(t) (t - [t]) dt + f(1) - f(x) (x - [x]).\end{aligned}$$

está última fórmula también es llamada *sumación de Euler*. Con esto queda demostrado (3.20). \square

Aplicando (3.20) para $f(t) = \log t$ y usando $0 \leq t - [t] < 1$ en la mayorización de la siguiente integral

$$\begin{aligned}\left| \int_1^x \frac{t - [t]}{t} dt \right| &\leq \int_1^x \left| \frac{t - [t]}{t} \right| dt \\ &\leq \int_1^x \frac{1}{t} dt = \log t \Big|_1^x = \log x \\ &\leq \log x, \text{ con } x \geq 1,\end{aligned}$$

es decir, $\int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt = O(\log x)$.

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^x \log t \, dt + \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt + f(1) - (x - \lfloor x \rfloor) \log x \\ &= x \log x - x + 1 + O(\log x) + \log x \\ &= x \log x - x + O(\log x), \end{aligned} \quad (3.24)$$

es la forma débil de la *fórmula de Stirling*.

Lema 3.2. (Chebychev 1850). Para valores grandes de x se cumple que

$$\psi(x) < \frac{3}{2}x. \quad (3.25)$$

Demostración. Usando la identidad de Chebychev (3.7)

$$T(x) - 2T(x/2) = \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) - \psi(x/4) + \dots \geq \psi(x) - \psi(x/2)$$

porque $\psi(x/(2n-1)) - \psi(x/2n) \geq 0$ dado que $\psi(x)$ es monótona no decreciente. Usando (3.24), $\psi(x) - \psi(x/2) \leq x \log 2 + K \log x$, $x \geq 2$ para alguna constante K . Evaluamos en $x/2^j$,

$$\psi(x/2^j) - \psi(x/2^{j+1}) \leq \frac{x}{2^j} \log 2 + K \log x \quad (3.26)$$

siempre que $x/2^j \geq 2$ implica que $j < \log x / \log 2$. Recordemos que $\psi(t) = 0$ si $t < 2$, y la adición (3.26) para $0 \leq j < \log x / \log 2$,

$$\begin{aligned} \psi(x/2^0) - \psi(x/2^1) &\leq x \log 2 + K \log x \\ \psi(x/2^1) - \psi(x/2^2) &\leq \frac{x}{2} \log 2 + K \log x \\ \psi(x/2^2) - \psi(x/2^3) &\leq \frac{x}{2^2} \log 2 + K \log x \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \psi(x/2^{j-1}) - \psi(x/2^j) &\leq \frac{x}{2^{j-1}} \log 2 + K \log x \end{aligned}$$

$$\psi(x) - \psi(x/2^j) \leq x \log 2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^j} \right) + jK \log x$$

Supongamos que llegamos al j que cumple que $\frac{x}{2^j} < 2$ entonces $\psi(x/2^j) = 0$. Encontramos el mayor entero j que cumple con la condición. Procedemos

$$\begin{aligned} j &\leq \frac{\log x}{\log 2} - 1 < \frac{\log x}{\log 2} \\ j &< \frac{\log x}{\log 2} + 1. \end{aligned}$$

Si $j_m = \max \left\{ j \in \mathbb{Z} \mid j < \frac{\log x}{\log 2} + 1 \right\}$ implica que $j_m = \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor + 1$. Entonces

$$\psi\left(\frac{x}{2^{j_m}}\right) = \psi\left(\frac{x}{2^{\lfloor \log x / \log 2 \rfloor + 1}}\right) = 0.$$

De lo anterior se tiene

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq x \log 2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + \cdots \right) + jK \log x \\ &\leq x \log 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) + \frac{\log x}{\log 2} K \log x \\ &\leq 2x \log 2 + K \log^2 x / \log 2 \\ &< 2x \frac{7}{10} + \frac{1}{10}x, \text{ ya que } \log 2 < 0.7 \text{ y } K \log^2 x / \log 2 < \frac{1}{10}x \\ &< \frac{14}{10}x + \frac{1}{10}x \\ &< \frac{3}{2}x. \end{aligned}$$

□

Lema 3.3. (Probado en 1874 por Mertens en una forma ligeramente diferente)

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1). \quad (3.27)$$

Demostración. En la suma doble (3.6), sumamos primero en i y luego en j (lo opuesto de lo que se hizo en la obtención de (3.7)) para obtener

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{j \leq x} \Lambda(j) \sum_{i \leq x/j} 1 = \sum_{j \leq x} \Lambda(j) \left\lfloor \frac{x}{j} \right\rfloor \\ &= \sum_{j \leq x} \left(\frac{x\Lambda(j)}{j} - \frac{x\Lambda(j)}{j} + \Lambda(j) \left\lfloor \frac{x}{j} \right\rfloor \right) \\ &= x \sum_{j \leq x} \frac{\Lambda(j)}{j} - \sum_{j \leq x} \Lambda(j) \left(\frac{x}{j} - \left\lfloor \frac{x}{j} \right\rfloor \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Además

$$0 \leq \sum_{j \leq x} \Lambda(j) \left(\frac{x}{j} - \left\lfloor \frac{x}{j} \right\rfloor \right) \leq \sum_{j \leq x} \Lambda(j) = \psi(x) = O(x) \quad (3.29)$$

por (2.3). Luego sustituimos (3.24) en (3.28) considerando (3.29).

$$\begin{aligned} x \log x - x + O(\log x) &= x \sum_{j \leq x} \frac{\Lambda(j)}{j} + O(x) \\ \log x - 1 + O\left(\frac{\log x}{x}\right) &= \sum_{j \leq x} \frac{\Lambda(j)}{j} + O(1) \\ \sum_{j \leq x} \frac{\Lambda(j)}{j} &= \log x + O(1). \end{aligned}$$

□

En esta oportunidad hacemos uso de la formula de sumación tomando $f(t) = 1/t$ y $c_n = 1$ que nos da como resultado el lema.

Lema 3.4. (Fórmula de sumación de Euler). Si $x \geq 1$ tenemos

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad (3.30)$$

donde γ es la constante de Euler.

Demostración. Si tomamos $f(t) = 1/t$ en la fórmula (3.20) para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{t - [t]}{t^2} dt + 1 - \frac{x - [x]}{x} \\ &= \log x - \int_1^x \frac{t - [t]}{t^2} dt + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \log x + 1 - \int_1^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt + \int_x^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

La integral impropia $\int_1^\infty (t - [t])t^{-2} dt$ existe dado que es dominada por $\int_1^\infty t^{-2} dt$, recordemos que $0 \leq t - [t] < 1$. Para verificar realizamos la siguiente mayorización,

$$0 \leq \int_x^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x}$$

así la última ecuación se convierte

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + 1 - \int_1^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Esto prueba (3.30) con $\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt$.

Cuando $x \rightarrow \infty$ en (3.30) encontramos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right) = 1 - \int_1^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt.$$

□

Observación 3.1. Dado que $\gamma < 1$, porque $0 < \int_1^\infty \frac{t-|t|}{t^2} dt$ y $\gamma > 1 - \int_1^\infty \frac{1}{t^2} = 1 - 1 = 0$. Con esto se deduce que $0 < \gamma < 1$.

3.3. DESIGUALDAD ELEMENTAL DE SELBERG

La desigualdad de Selberg es

$$(\psi(x) - x) \log x + \sum_{n \leq x} \left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right) \Lambda(n) = O(x).$$

esta desigualdad es la vamos demostrar en este apartado. Comenzamos con una discusión sobre la fórmula de inversión de Möbius de ψ y la función simple $x - C$. Sea $F(x)$ la resta de estas dos funciones, estudiando esta función descubrimos que pertenece a $O(x)$, es decir, que esta acotada por un crecimiento lineal, y este resultado no ayuda mucho, porque siempre produce el resultado $\psi(x) = O(x)$ que ya lo probamos en la sección 3.2. Es por eso que en el artículo de Norman Levinson sugiere la función $J(x)$, que al desarrollarla obtenemos la identidad de Tatzawa-Iseki, la cual conduce fácilmente a la desigualdad del Selberg.

La fórmula de inversión de Möbius que expresa a ψ en términos de T ahora se utilizará para encontrar el comportamiento de ψ para valores grandes de x . Los cálculos pueden simplificarse si es posible encontrar una $F(x)$ simple, digamos que es $\tilde{F}(x)$, con una transformación $\tilde{G}(x)$ que está cerca de $T(x)$. En este caso aplicamos la fórmula de inversión de Möbius (3.10) a ψ y $\tilde{F}(x)$, luego restamos

$$\psi(x) - \tilde{F}(x) = \sum_{k \leq x} \mu(k) \left(T\left(\frac{x}{k}\right) - \tilde{G}\left(\frac{x}{k}\right) \right); \quad (3.31)$$

si demostramos que la parte derecha de la ecuación es pequeña, entonces $\psi(x)$ estaría cerca de $\tilde{F}(x)$. Si demostramos que $\psi(x)/x \rightarrow 1$, entonces $\psi(x)$ estaría cerca de x para valores grandes de x . Esto sugiere tomar $\tilde{F}(x) = F_0(x) = x$. Por consiguiente $G_0(x) = \sum_{n \leq x} F_0(x/n) = x \sum_{n \leq x} n^{-1}$ que por (3.30) se convierte en $G_0(x) = x \log x + \gamma x + O(1)$. Esto no está suficientemente cerca de $T(x)$ porque al comparar la representación de $T(x)$ y $G_0(x)$ no están muy cerca uno del otro para valores grandes de x , para ver esto se hace la diferencia $T(x) - G_0(x) = O(x)$. Entonces la diferencia $\psi(x) - \tilde{F}(x) = \psi(x) - F_0(x)$ está acotada por un crecimiento lineal.

Vamos a tratar de obtener una cota superior asintótica de menor crecimiento, restando un constante C modificamos $\tilde{F}(x)$, así $\tilde{F}(x) = F_1(x) = x - C$. Entonces

$$\begin{aligned} G_1(x) &= x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - C \sum_{n \leq x} 1 = x \log x + \gamma x + O(1) - C[x] \\ &= x \log x - (C - \gamma)x + O(1). \end{aligned}$$

Por tanto si tomamos a $C = 1 + \gamma$ y de (3.24) restamos $G_1(x)$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} T(x) - G_1(x) &= x \log x - x + O(\log x) - x \log x + x + O(1) \\ &= O(\log x) + O(1) \\ &= O(\log x), \end{aligned} \tag{3.32}$$

es decir, el crecimiento logarítmico restringe el crecimiento de la diferencia, más que en el caso anterior.

Usando (3.31) con $\tilde{F} = x - C$

$$\psi(x) - x + C = \sum_{k \leq x} \mu(k) \left(T\left(\frac{x}{k}\right) - G_1\left(\frac{x}{k}\right) \right). \tag{3.33}$$

Si el miembro derecho (3.32) se encontrará en su forma más fuerte $O(1)$ (lo cual es falso), y utilizando el hecho de $|\mu(k)| \leq 1$ lo que implicaría que el miembro derecho de (3.33) es $O(x)$. Por tanto la fórmula de inversión (3.33), no es el TNP, pero al menos tenemos un resultado débil

$$\psi(x) = O(x). \tag{3.34}$$

(esto ya lo demostramos en el Lema 3.25). De (3.33) obtenemos (3.34) por medio de los siguientes argumentos.

Dado que el logaritmo es una función que crece muy lento con respecto a cualquier potencia algebraica positiva, por ello tomamos $\log x = O(x^{1/2})$. Aplicando esto en (3.32) implica el siguiente resultado

$$T(x) - G_1(x) = O(x^{1/2}). \tag{3.35}$$

Usando esto y $|\mu(k)| \leq 1$, existe una constante K tal que el miembro derecho de (3.33) es dominado

por

$$\begin{aligned}
|\psi(x) - x + C| &\leq \sum_{k \leq x} |\mu(k)| \left| T\left(\frac{x}{k}\right) - G_1\left(\frac{x}{k}\right) \right| \\
&\leq \sum_{k \leq x} K \left(\frac{x}{k}\right)^{1/2} = Kx^{1/2} \sum_{k \leq x} k^{-1/2} \\
&< Kx^{1/2} \left(1 + \sum_{2 \leq k \leq x} \int_{k-1}^k u^{-1/2} du \right) \\
&< Kx^{1/2} \left(1 + \int_1^x u^{-1/2} du \right) \\
&< Kx^{1/2} \left(1 + \frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1} \Big|_1^x \right) \\
&< Kx^{1/2} (2x^{1/2} - 1) \\
&< Kx^{1/2} (2x^{1/2}) \\
&< 2Kx
\end{aligned} \tag{3.36}$$

entonces $\psi(x) - x + C = O(x)$ y con esto se prueba nuevamente (3.34). La idea de hacer este razonamiento consiste en darse cuenta que la inversión de Möbius de la fórmula de Chebychev produce solo el resultado (3.34) y esta es la razón de la larga demora del descubrimiento de una prueba elemental del teorema del número primo.

Notemos que *el resultado bruto* (3.35) *sirve como una mejor estimación que* (3.32) en la evaluación del miembro derecho de (3.33). Esto sugiere la siguiente idea.

En la fórmula de inversión de Möbius

$$F(x) = \sum_{k \leq x} \mu(k) G\left(\frac{x}{k}\right) \tag{3.37}$$

tomamos $F = \psi - x - C$ y $G = T - G_1$, podemos aumentar los términos del lado derecho sin cambiar la cota superior $O(x)$. Vamos a modificar (3.37), una vez realizado obtenemos una nueva fórmula que debe cumplir con el requisito de que su cota superior sea $O(x)$. Para ello necesitamos una función creciente multiplicada por $\mu(k)G\left(\frac{x}{k}\right)$ en el miembro derecho de (3.37), luego tomamos el sumatorio para los $k \leq x$ y en el miembro izquierdo de (3.37) ya no sería $F(x)$. En el artículo de Norman Levinson sugiere que tal función creciente buscada es el logaritmo. Ahora la nueva fórmula queda así:

$$J(x) = \sum_{k \leq x} \mu(k) \log \frac{x}{k} G\left(\frac{x}{k}\right). \tag{3.38}$$

Con todo el análisis previo vamos a probar que $J(x) = O(x)$ así:

$$\begin{aligned} |J(x)| &\leq \sum_{k \leq x} \log \frac{x}{k} G\left(\frac{x}{k}\right) \\ &\leq \sum_{k \leq x} K \frac{x^{1/2}}{k^{1/2}} = O(x), \text{ debido a (3.36)}. \end{aligned}$$

Desarrollamos $J(x)$ por medio de la definición de G y la propiedad de logaritmo de un producto.

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_{k \leq x} \mu(k) \log \frac{x}{k} \sum_{j \leq x/k} F\left(\frac{x}{jk}\right) \\ &= \sum_{jk \leq x} \mu(k) \log \frac{x}{k} F\left(\frac{x}{jk}\right) = \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{jk=n} \mu(k) \log \frac{x}{k} \\ &= \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{k|n} \mu(k) \log \frac{x}{k}. \end{aligned}$$

Usando $\log \frac{x}{k} = \log \frac{x}{n} + \log \frac{n}{k}$

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{k|n} \mu(k) \log \frac{x}{n} + \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{k|n} \mu(k) \log \frac{n}{k} \\ &= \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \log \frac{x}{n} \sum_{k|n} \mu(k) + \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{k|n} \mu(k) \log \frac{n}{k}. \end{aligned}$$

Por (3.12) y (3.18) esto se convierte en $J(x) = F(x) \log x + \sum_{n \leq x} F(x/n) \Lambda(n)$. Reemplazando en (3.38) tenemos que

$$F(x) \log x + \sum_{n \leq x} F(x/n) \Lambda(n) = \sum_{k \leq x} \mu(k) \log \frac{x}{k} G\left(\frac{x}{k}\right), \quad (3.39)$$

esta es la *identidad de Tatumawa-Iseki* [32], que conduce fácilmente a la desigualdad de Atle Selberg. De hecho por (3.32)

$$\begin{aligned} \log x G(x) &= \log x (T(x) - G_1(x)) \\ &= O(\log^2 x) = O(x^{1/2}), \end{aligned}$$

y por consiguiente utilizamos (3.36) para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq x} \mu(k) \log \frac{x}{k} G\left(\frac{x}{k}\right) &= \sum_{k \leq x} \mu(k) \log \frac{x}{k} \left(T\left(\frac{x}{k}\right) - G_1\left(\frac{x}{k}\right)\right) \\ &= O(x). \end{aligned}$$

Evaluando $F(x) = \psi(x) - x + C$ en (3.39) se convierte

$$(\psi(x) - x + C) \log x + \sum_{n \leq x} \left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + C\right) \Lambda(n) = O(x),$$

donde usamos $\psi(x) = O(x)$ y $C\psi(x)$ junto con $C \log x$ estan en $O(x)^2$ obteniendo la forma de la famosa *desigualdad de Selberg* [34], la cual es:

$$(\psi(x) - x) \log x + \sum_{n \leq x} \left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right) \Lambda(n) = O(x). \quad (3.40)$$

Por el Lema (3.3) lo utilizamos en (3.40)

$$\begin{aligned} \psi(x) \log x - x \log x + \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) - \sum_{n \leq x} \frac{x}{n} \Lambda(n) &= O(x) \\ \psi(x) \log x - x \log x + \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) - x(\log x + O(1)) &= O(x) \\ \psi(x) \log x - x \log x + \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) - x \log x - O(x) &= O(x) \\ \psi(x) \log x + \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \psi(x/n) &= 2x \log x + O(x) + O(x) \\ \psi(x) \log x + \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \psi(x/n) &= 2x \log x + O(x) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Con $c_n = \Lambda(n)$, en (3.19) y (3.25) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log n &= \psi(x) \log x - \int_1^x \frac{\psi(t)}{t} dt = \psi(x) \log x + O(x) \\ \psi(x) \log x &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log n + O(x). \end{aligned} \quad (3.42)$$

También

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq x} \Lambda(j) \psi\left(\frac{x}{j}\right) &= \sum_{j \leq x} \Lambda(j) \sum_{k \leq x/j} \Lambda(k) = \sum_{jk \leq x} \Lambda(j) \Lambda(k) \\ &= \sum_{n \leq x} \sum_{jk=n} \Lambda(j) \Lambda(k). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Sustituyendo (3.42) y (3.43) en (3.41) tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log n + O(x) + \sum_{n \leq x} \sum_{jk=n} \Lambda(j) \Lambda(k) &= 2x \log x + O(x) \\ \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log n + \sum_{n \leq x} \sum_{jk=n} \Lambda(j) \Lambda(k) &= 2x \log x + O(x) \\ \sum_{n \leq x} \left(\Lambda(n) \log n + \sum_{jk=n} \Lambda(j) \Lambda(k) \right) &= 2x \log x + O(x). \end{aligned} \quad (3.44)$$

²Una definición equivalente es $O(g(x)) = \{f(x) : \text{existen constantes positivas } c \text{ y } n_0 \text{ tales que } 0 \leq |f(x)| \leq c|g(x)| \forall x \geq n_0\}$

Si

$$\Lambda_2(n) = \Lambda(n) \log n + \sum_{jk=n} \Lambda(j) \Lambda(k) \quad (3.45)$$

entonces $\sum_{n \leq x} \Lambda_2(n) = 2x \log x + O(x)$ es equivalente a (3.41). Por (3.19) $\sum_{n \leq x} \log n = x \log x + O(x)$. Sea $Q(n)$ la diferencia de $\sum_{n \leq x} \Lambda_2(n)$ menos $2 \sum_{n \leq x} \log n$ así:

$$\begin{aligned} Q(n) &= \sum_{k \leq n} \Lambda_2(k) - 2 \sum_{k \leq n} \log k, \quad n \geq 2, \quad Q(1) = 0. \\ &= 2n \log n + O(n) - 2n \log n + O(n), \end{aligned}$$

es decir,

$$Q(n) = \sum_{k \leq n} (\Lambda_2(k) - 2 \log k) = O(n). \quad (3.46)$$

3.4. DEMOSTRACIÓN ELEMENTAL DEL TNP

Primero definimos el término de error $R(x)$ por la ecuación $\psi(x) = x + R(x)$; entonces el teorema es probado si nosotros probamos que $R(x) = o(x)$ ³, esto implica $\psi(x) \sim x$ cuando $x \rightarrow \infty$ por Lema 1.4. Primero verificamos donde está definida la función $R(x)$, luego hacemos una sustitución en la desigualdad de Selberg y nos queda una nueva desigualdad. Buscamos más información de la función $R(x)$ involucrandola con la función suave $S(y)$, estudiamos las propiedades de $S(y)$ para establecer otra función $W(x)$. Esta última función debe estar en armonía con las demás funciones definidas anteriormente para sacar las propiedades, en cuanto a la acotación, continuidad, discontinuidad y los ceros de la función. Entonces comenzamos con nuestra demostración así:

Si

$$R(x) = \begin{cases} \psi(x) - x, & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases} \quad (3.47)$$

evaluamos en (3.40) entonces tenemos

$$R(x) \log x + \sum_{n \leq x} \Lambda(n) R(x/n) = O(x), \quad (3.48)$$

donde el sumatorio termina cuando $R(x/n) = 0$ para $n > x/2$. El objetivo en esta sección es demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{x} = 0, \quad (3.49)$$

³Es la notación o -pequeña.

es decir, que $R(x) = o(x)$, lo cual implica que $\psi(x) \sim x$ para valores grandes de x , esto es equivalente al TNP por el Teorema (2.2). La obtención de (3.49) a partir de (3.48) es complicado porque el valor de $\Lambda(n)$ en la suma de valores en (3.48) depende de la localización de los números primos que es justo lo que tratamos de encontrar.

La prueba que seguimos usa varias operaciones suaves en (3.48) para obtener una desigualdad manejable. La mayoría de estas operaciones suaves involucran una pérdida de información y el objetivo es suavizar pero sin perder la esencia de (3.48).

Si $R(x)$ la utilizamos en la siguiente función suave (es una función que tiene primera derivada continua)

$$S(y) = \int_2^y \frac{R(x)}{x} dx \quad y \geq 2; \quad (3.50)$$

$S(y) = 0$ cuando $y < 2$. Para demostrar (3.49) bastará demostrar que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{S(y)}{y} = 0. \quad (3.51)$$

Lema 3.5. *Existencia de una constante c tal que*

$$|S(y)| \leq cy, \quad y \geq 2 \quad (3.52)$$

y

$$|S(y_2) - S(y_1)| \leq c|y_1 - y_2|. \quad (3.53)$$

Además una consecuencia de (3.48) es

$$S(y) \log y + \sum_{j \leq y} \Lambda(j) S\left(\frac{y}{j}\right) = O(y). \quad (3.54)$$

Demostración. De (3.25), para valores grandes de x tenemos

$$-x \leq \psi(x) - x \leq \frac{1}{2}x \leq x.$$

Por la compacidad en el intervalo $[-x, x]$ se puede utilizar el supremo así:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{|R(x)|}{x} \leq 1 \quad (3.55)$$

y, dado $|R(x)|$ es acotado para valores finitos de x , existe una constante c tal que

$$|R(x)| \leq cx, \quad x \geq 2. \quad (3.56)$$

Por (3.50) tenemos $S'(y) = R(y)/y$ excepto en $y = p^j$ donde $R(y)$ es discontinua. Por (3.56) entonces

$$|S'(y)| \leq c, \quad y \neq p^j. \quad (3.57)$$

Por consiguiente, primero para el caso donde el intervalo $y_1 < y < y_2$ no contiene a p^j , entonces (3.53) es cierto. Dado $S(y)$ es continua sobre ese intervalo, el hecho que la magnitud de una suma es menor o igual que la suma de las magnitudes, esto permite a (3.53) extenderse para todo y_1 y y_2 . La condición (3.53) es conocida como la condición de Lipschitz. El resultado (3.52) se deduce de (3.53) con $y_1 = 2$.

Dado que $||a| - |b|| \leq |a - b|$, obtenemos (3.53) así

$$\begin{aligned} ||S(y_2)| - |S(y_1)|| &\leq |S(y_2) - S(y_1)| = \left| \int_{y_1}^{y_2} S'(y) dy \right| \\ &\leq \left| \int_{y_1}^{y_2} c dy \right| \\ &\leq c |y_2 - y_1|, \end{aligned}$$

es decir,

$$||S(y_2)| - |S(y_1)|| \leq c |y_2 - y_1|. \quad (3.58)$$

Para probar (3.54) dividimos (3.48) por x e integramos para obtener

$$\int_2^y \frac{R(x)}{x} \log x \, dx + \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \int_2^y R\left(\frac{x}{n}\right) \frac{dx}{x} = O(y). \quad (3.59)$$

Integrando el primer término por partes

$$\int_2^y \frac{R(x)}{x} \log x \, dx = \log y S(y) - \int_2^y \frac{S(x)}{x} dx = \log y S(y) + O(y) \quad (3.60)$$

por (3.52). Realizamos un cambio de variable $\xi = x/n$

$$\int_2^y R\left(\frac{x}{n}\right) \frac{dx}{x} = \int_2^{y/n} \frac{R(\xi)}{\xi} d\xi = S\left(\frac{y}{n}\right). \quad (3.61)$$

Los resultados (3.60) y (3.61) los sustituimos en (3.59), con esto se finaliza. \square

Lema 3.6. Con $\Lambda_2(n) = \Lambda(n) + \sum_{i+j=n} \Lambda(i)\Lambda(j)$ como en (3.45) y K_1 una constante positiva, se tiene que

$$\log^2 y |S(y)| \leq \sum_{m \leq y} \Lambda_2(m) |S(y/m)| + K_1 y \log y. \quad (3.62)$$

Demostración. Reemplazando y en (3.54) por y/k , multiplicamos por $\Lambda(n)$ y sumamos para $k \leq y$ obtenemos

$$\sum_{k \leq y} \Lambda(k) S\left(\frac{y}{k}\right) \log \frac{y}{k} + \sum_{k \leq y} \sum_{j \leq y/k} \Lambda(k) \Lambda(j) S\left(\frac{y}{jk}\right) = O(y) \sum_{k \leq y} \frac{\Lambda(k)}{k}. \quad (3.63)$$

Tomando $jk = m$ en la segunda suma tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq y} \sum_{j \leq y/k} \Lambda(k)\Lambda(j)S\left(\frac{y}{jk}\right) &= \sum_{kj \leq y} \Lambda(k)\Lambda(j)S\left(\frac{y}{jk}\right) \\ &= \sum_{m \leq y} \sum_{kj=m} \Lambda(k)\Lambda(j)S\left(\frac{y}{m}\right) \\ &= \sum_{m \leq y} S\left(\frac{y}{m}\right) \sum_{kj=m} \Lambda(k)\Lambda(j). \end{aligned}$$

El miembro derecho de la desigualdad (3.63) lo calculamos por medio del Lema (3.3)

$$\begin{aligned} O(y) \sum_{k \leq y} \frac{\Lambda(k)}{k} &= O(y) (\log y + O(1)) \\ &= O(y) \log y + O(y)O(1) \\ &= O(y \log y) + O(y) \\ &= O(y \log y). \end{aligned}$$

Por la propiedad del logaritmo $\log(y/k) = \log y - \log k$ en la primera suma (3.63) y más tarde esto lo reemplazamos k por m , y por último sumamos en m

$$\sum_{k \leq y} \Lambda(k)S\left(\frac{y}{k}\right) \log y - \sum_{m \leq y} \Lambda(m)S\left(\frac{y}{m}\right) \log m + \sum_{m \leq y} S\left(\frac{y}{m}\right) \sum_{kj=m} \Lambda(k)\Lambda(j) = O(y \log y)$$

$$\log y \sum_{k \leq y} \Lambda(k)S\left(\frac{y}{k}\right) - \sum_{m \leq y} S\left(\frac{y}{m}\right) \left\{ \Lambda(m) \log m - \sum_{jk=m} \Lambda(j)\Lambda(k) \right\} = O(y \log y). \quad (3.64)$$

La primera suma de la desigualdad (3.64) es ahora reemplazada usando (3.54) así:

$$\log y (O(y) - S(y) \log y) - \sum_{m \leq y} S\left(\frac{y}{m}\right) \left\{ \Lambda(m) \log m - \sum_{jk=m} \Lambda(j)\Lambda(k) \right\} = O(y \log y)$$

$$O(y) \log y - S(y) \log^2 y - \sum_{m \leq y} S\left(\frac{y}{m}\right) \left\{ \Lambda(m) \log m - \sum_{jk=m} \Lambda(j)\Lambda(k) \right\} = O(y \log y)$$

$$S(y) \log^2 y = - \sum_{m \leq y} S\left(\frac{y}{m}\right) \left\{ \Lambda(m) \log m - \sum_{jk=m} \Lambda(j)\Lambda(k) \right\} + O(y \log y).$$

Aplicando la función valor absoluto y la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$\begin{aligned} |S(y) \log^2 y| &\leq \sum_{m \leq y} \left| S\left(\frac{y}{m}\right) \right| \left| \Lambda(m) \log m - \sum_{jk=m} \Lambda(j) \Lambda(k) \right| + K_1 y \log y \\ \log^2 y |S(y)| &\leq \sum_{m \leq y} \left| S\left(\frac{y}{m}\right) \right| \left| \Lambda(m) \log m + \sum_{jk=m} \Lambda(j) \Lambda(k) \right| + K_1 y \log y \\ &\leq \sum_{m \leq y} \Lambda_2(m) |S(y/m)| + K_1 y \log y. \end{aligned}$$

□

Lema 3.7. *Existe una constante K_2 tal que*

$$\log^2 y |S(y)| \leq 2 \sum |S(y/m)| \log m + K_2 y \log y. \quad (3.65)$$

Demostración. Definimos

$$J(y) = \sum_{m \leq y} (\Lambda_2(m) - 2 \log m) \left| S\left(\frac{y}{m}\right) \right| \quad (3.66)$$

De (3.46), tenemos que $\Lambda_2(m) - 2 \log m = Q(m) - Q(m-1)$, y $J(y)$ es una función que solo necesitamos saber que se encuentra acotada.

$$\begin{aligned} J(y) &= \sum_{m \leq y} (Q(m) - Q(m-1)) |S(y/m)| \\ &= \sum_{m \leq y} Q(m) |S(y/m)| - \sum_{m \leq y} Q(m) |S(y/(m+1))| \\ &= \sum_{2 \leq m \leq y} Q(m) (|S(y/m)| - |S(y/(m+1))|) \end{aligned}$$

dado que $S(y) = 0$, $y < 2$. Usando (3.46) y (3.58) existe una constante K_3 tal que

$$\begin{aligned} J(y) &\leq K_3 \sum_{2 \leq m \leq y} m \left(\frac{y}{m} - \frac{y}{m+1} \right) \\ &= K_3 y \sum_{2 \leq m \leq y} \frac{1}{m+1} < K_3 y \int_1^y \frac{dv}{v} = K_3 y \log y. \end{aligned}$$

Esta mayorización de $J(y)$ la utilizamos en (3.66) para obtener

$$\sum_{m \leq y} |S(y/m)| \Lambda_2(m) \leq 2 \sum_{m \leq y} |S(y/m)| \log m + K_3 y \log y \quad (3.67)$$

esta desigualdad (3.67) la sustituimos en la desigualdad (3.62) así:

$$\begin{aligned}
\log^2 y |S(y)| &\leq \sum_{m \leq y} \Lambda_2(m) |S(y/m)| + K_1 y \log y \\
&\leq 2 \sum_{m \leq y} |S(y/m)| \log m + K_3 y \log y + K_1 y \log y \\
&\leq 2 \sum_{m \leq y} |S(y/m)| \log m + (K_3 + K_1) y \log y \\
&\leq 2 \sum_{m \leq y} |S(y/m)| \log m + K_2 y \log y, \text{ con } K_2 = K_1 + K_3.
\end{aligned}$$

Observamos que este lema es una consecuencia de (3.62). \square

En nuestro afán de encontrar una mayor simplificación reemplazamos la suma en (3.62) por una integral.

Lema 3.8. *Existe una constante K_4 tal que*

$$\log^2 y |S(y)| \leq 2 \int_2^y |S(y/u)| \log u \, du + K_4 y \log y. \quad (3.68)$$

Demostración. Dado que la función $\log u$ es creciente

$$\log m |S(y/m)| \leq \int_m^{m+1} \log u |S(y/m)| \, du.$$

En el miembro derecho de la desigualdad lo podemos mayorizar utilizando la desigualdad triangular $|a+b| \leq |a|+|b|$. Si tomamos $a = x - y$, $b = y$, sustituyendo se tiene $|x| \leq |y| + |x - y|$.

$|S(y/m)| \leq |S(y/u)| + |S(y/m) - S(y/u)|$ para obtener

$$\log m |S(y/m)| \leq \int_m^{m+1} \log u |S(y/u)| \, du + J_m \quad (3.69)$$

$$\text{donde } J_m = \int_m^{m+1} \log u |S(y/m) - S(y/u)| \, du. \quad (3.70)$$

Usando (3.53)

$$J_m \leq c \left(\frac{y}{m} - \frac{y}{m+1} \right) \int_m^{m+1} \log u \, du \leq \frac{cy \log(m+1)}{m(m+1)}.$$

Dado $\log(m+1) \leq m$, estos resultados los utilizamos en (3.70), obtenemos

$$\log m \left| S\left(\frac{y}{m}\right) \right| \leq \int_m^{m+1} \log u \left| S\left(\frac{y}{u}\right) \right| \, du + \frac{cy}{m+1}. \quad (3.71)$$

Aplicando el sumatorio a (3.71) para los $m \leq y$ y usando este resultado en (3.65) así:

$$\begin{aligned}
\log^2 y |S(y)| &\leq 2 \sum_{2 \leq m \leq y} \left| S\left(\frac{y}{m}\right) \right| \log m + K_2 y \log y \\
&\leq 2 \sum_{2 \leq m \leq y} \int_m^{m+1} \log u \left| S\left(\frac{y}{u}\right) \right| du + 2cy \sum_{2 \leq m \leq y} \frac{1}{m+1} + K_2 y \log y \\
&\leq 2 \int_2^y \log u \left| S\left(\frac{y}{u}\right) \right| du + 2cy \int_1^y \frac{dv}{v} + K_2 y \log y \\
&\leq 2 \int_2^y |S(y/u)| \log u du + 2cy \log y + K_2 y \log y \\
&\leq 2 \int_2^y |S(y/u)| \log u du + (2c + K_2) y \log y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\log^2 y |S(y)| \leq 2 \int_2^y |S(y/u)| \log u du + K_4 y \log y, \text{ con } K_4 = K_2 + 2c.$$

□

Si realizamos un cambio de variable exponencial en la desigualdad (3.68) obtenemos una expresión más simple. Reemplazamos u por $v = \log(y/u)$. También sea $x = \log y$. Entonces (3.68) se puede escribir así:

$$x^2 |S(e^x)| \leq 2 \int_0^{x-\log 2} |S(e^v)| (x-v) e^{x-v} dv + K_4 x e^x. \quad (3.72)$$

Si

$$W(x) = \frac{S(e^x)}{e^x} \quad (3.73)$$

entonces (3.72) se convierte en

$$|W(x)| \leq \frac{2}{x^2} \int_0^x (x-v) |W(v)| dv + \frac{K_4}{x}. \quad (3.74)$$

Esta desigualdad contiene información valiosa ya que en efecto $|W(x)|$ es acotada. Es decir que podemos hablar de la existencia del supremo de $|W(x)|$ en el siguiente lema (Notar que γ definida a continuación no es la constante de Euler).

Lema 3.9. Sea

$$\alpha = \limsup_{x \rightarrow \infty} |W(x)|, \quad \gamma = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x |W(\xi)| d\xi; \quad (3.75)$$

entonces $\alpha \leq 1$ y

$$\alpha \leq \gamma. \quad (3.76)$$

Observación 3.2. Recordando (3.51) y (3.73) nuestro objetivo es demostrar que $\alpha = 0$.

Demostración. Para $\alpha \leq 1$ se sigue de (3.73) y del hecho (3.55) y (3.50) implica que

$$\begin{aligned} \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{|S(y)|}{y} &\leq \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\left| \int_2^y \frac{R(x)}{x} dx \right|}{y} \\ &\leq \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y \sup_{x \in [2, y]} \left| \frac{R(x)}{x} \right|}{y} \\ &= \sup_{x \in [2, y]} \left| \frac{R(x)}{x} \right| \leq 1. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{|S(y)|}{y} \leq 1. \quad (3.77)$$

El resultado clave para demostrar $\gamma \geq \alpha$ usamos (3.74), y este es el único uso que le daremos a los Lemas 3.6, 3.7 y 3.8.

Utilizando la Proposición 3.6.2⁴

$$\begin{aligned} \int_0^x |W(v)| \int_v^x 1 \, dudv &= \int_0^x 1 \int_0^u |W(v)| \, dvdu \\ &= \int_0^x u \left(\frac{1}{u} \int_0^u |W(v)| \, dv \right) du. \end{aligned}$$

Notemos que (3.74) puede escribirse como

$$|W(x)| \leq \frac{2}{x^2} \int_0^x u \, du \left(\frac{1}{u} \int_0^u |W(v)| \, dv \right) + \frac{K_4}{x}. \quad (3.78)$$

Cáculamos la siguiente integral

$$\frac{2}{x^2} \int_0^x u \, du = 1$$

y por consiguiente la integral del miembro derecho (3.78) lo podemos acotar de la siguiente manera

$$(1/u) \int_0^u |W(v)| \, dv = (1/u) \int_0^u e^{-v} |S(e^v)| \, dv \leq c \text{ por (3.52).}$$

De ahí que para cualquier x_1 fijo y $x > x_1$. Sea

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{2}{x^2} \int_0^x u \, du \left(\frac{1}{u} \int_0^u |W(v)| \, dv \right) \\ &\leq \frac{2c}{x^2} \int_0^{x_1} u \, du + \frac{2}{x^2} \int_{x_1}^x u \, du \left(\frac{1}{u} \int_0^u |W(v)| \, dv \right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

⁴Ver demostración en [4].

Dado $\varepsilon > 0$, para x_1 suficientemente grande,

$$\frac{1}{u} \int_0^u |W(v)| dv < \gamma + \varepsilon \quad u \geq x_1$$

de la definición de γ . Por (3.79) obtenemos

$$I(x) \leq \frac{cx_1^2}{x^2} + (\gamma + \varepsilon) \left(1 - \frac{x_1^2}{x^2}\right).$$

Por lo tanto para valores grandes de x , (3.78) se convierte en

$$|W(x)| \leq \gamma + \varepsilon + \frac{cx_1^2}{x^2} + \frac{K_4}{x}.$$

Cuando $x \rightarrow \infty$, tenemos que $\alpha \leq \gamma + \varepsilon$, dado que esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$ esto implica (3.76). \square

Dos hechos más son requeridos acerca de W para probar que $\alpha = 0$.

Lema 3.10. Si $k = 2c$ entonces

$$|W(x_2) - W(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|, \quad (3.80)$$

y por consiguiente

$$||W(x_2)| - |W(x_1)|| \leq k|x_2 - x_1|. \quad (3.81)$$

Demostración. Dado $W(x) = e^{-x}S(e^x)$,

$$\begin{aligned} W'(x) &= (e^{-x})'S(e^x) + e^{-x}(S(e^x))' \\ &= -e^{-x}S(e^x) + \frac{S'(e^x)}{e^x} \cdot e^x \\ &= -e^{-x}S(e^x) + S'(e^x). \end{aligned}$$

Aplicamos la magnitud

$$\begin{aligned} |W'(x)| &\leq e^{-x}|S(e^x)| + |S'(e^x)| \quad x \neq j \log p. \\ &\leq e^{-x}ce^x + c = 2c = k. \end{aligned}$$

Esto es debido a (3.52) y (3.57), que obtenemos la mayorización anterior, donde k es la constante que buscábamos. Esto conduce a (3.80) al igual como (3.57) llevaron a (3.53). \square

Lema 3.11. Si $W(v) \neq 0$ para $v_1 < v < v_2$, entonces existe un número M tal que

$$\int_{v_1}^{v_2} |W(v)| dv \leq M, \quad W(v) \neq 0, \quad v_1 < v < v_2. \quad (3.82)$$

Demostración. Utilizamos la fórmula de sumación (3.19) siendo $c_n = \Lambda(n)$ y $f(n) = \frac{1}{n}$, donde

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{n \leq t} \Lambda(n) = \psi(t) \\ \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} &= \frac{\psi(x)}{x} + \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2} \\ \log x + O(1) &= O(1) + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t^2} \\ \log x + O(1) + O(1) &= \int_2^x \frac{\psi(t)}{t^2} \\ \int_2^x \frac{\psi(t)}{t^2} &= \log x + O(1), \end{aligned}$$

dado que $R(t) = \psi(t) - t$,

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{R(t)}{t^2} &= \int_2^x \frac{\psi(t) - t}{t^2} \\ &= \int_2^x \frac{\psi(t)}{t^2} - \int_2^x \frac{1}{t} \\ &= \log x + O(1) - \log x + \log 2 \\ &= O(1) + \log 2 \\ &= O(1). \end{aligned} \tag{3.83}$$

Encontremos la cota superior asintótica de la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{S(y)}{y^2} dy &= \int_2^x \frac{dy}{y^2} \int_2^y \frac{R(t)}{t} dt = \int_2^x \frac{R(t)}{t} \left(\int_t^x \frac{dy}{y^2} \right) dt \\ &= \int_2^x \frac{R(t)}{t} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x} \right) dt \\ &= \int_2^x \frac{R(t)}{t^2} dt - \frac{1}{x} \int_2^x \frac{R(t)}{t} dt \\ &= O(1) - \frac{S(x)}{x} \\ &= O(1) + O(1), \text{ debido a } |S(x)| \leq cx, \quad x > 2 \\ &= O(1). \end{aligned}$$

Realizando un cambio de variable exponencial tomando a $y = e^u \leftrightarrow u = \log y$, $dy = e^u du$ y $x = e^v \leftrightarrow v = \log x$,

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{S(y)}{y^2} dy &= \int_{\log 2}^v \frac{S(e^u)}{e^{2u}} e^u du \\ &= \int_{\log 2}^v W(u) du = O(1). \end{aligned}$$

Escribiendo esto para $v = v_1$ y $v = v_2$

$$\begin{aligned} \left| \int_{v_1}^{v_2} W(u) du \right| &= \left| \int_{\log 2}^{v_2} W(u) - \int_{\log 2}^{v_1} W(u) du \right| \\ &\leq \left| \int_{\log 2}^{v_2} W(u) du \right| + \left| \int_{\log 2}^{v_1} W(u) du \right| \\ &\leq M_1 + M_2 = M; \text{ por el resultado anterior.} \end{aligned}$$

Si $W(u) \neq 0$, $v_1 < u < v_2$, también esta última acotación de la integral se puede escribir así:

$$\int_{v_1}^{v_2} |W(u)| du \leq M.$$

□

Dado que M puede incrementarse es conveniente asumir que $Mk > 1$.

Lema 3.12. Una función $W(x)$ sujeta a las tres condiciones (3.76), (3.81) y (3.82) implica que $\alpha = 0$.

Demostración. Escogemos $\beta > \alpha$. Entonces de la definición de α existe un x_β tal que

$$|W(x)| \leq \beta, \quad x \geq x_\beta \quad (3.84)$$

Si $W(x) \neq 0$ para todos valores grandes de x , deducimos de (3.82) que $\gamma = 0$ y por consiguiente $\alpha = 0$. Supongamos entonces que $W(x)$ tiene ceros para valores arbitrariamente grandes de x . Sean a y b dos ceros consecutivos⁵ de $W(x)$ para $x > x_\beta$.

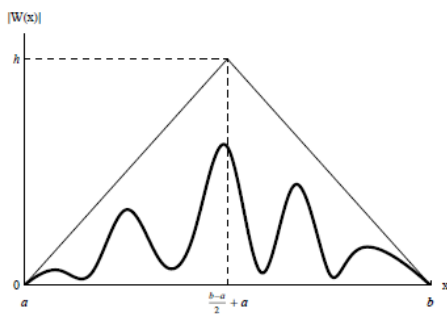


Figura 3.4: La acotación de la integral de $|W(x)|$ sobre el intervalo $[a, b]$ a través de la superficie de un triángulo.

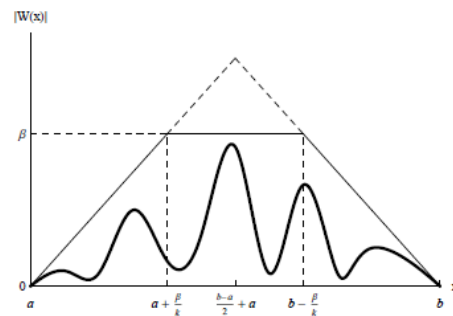


Figura 3.5: La acotación de la integral de $|W(x)|$ sobre el intervalo $[a, b]$ a través de la superficie de un trapecio.

⁵Es decir que el intervalo abierto (a, b) no existen ceros en W .

Caso 1. $b - a \geq 2M/\beta$. Por (3.82), dado que $W(x) \neq 0$, en $a < x < b$,

$$\int_a^b |W(x)| \leq M \leq \frac{1}{2}(b-a)\beta$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |W(x)| \leq \frac{1}{2}\beta$$

(Por lo tanto el valor medio de $|W(x)|$ sobre (a, b) es menor o igual a $\frac{1}{2}\beta$.)

Caso 2. $b - a \leq 2\beta/k$. Sustituyendo en a o b en (3.80) podemos acotar $|W(x)|$ por medio de las dos líneas rectas que forman un triángulo (ver Figura 3.4) para comprobar esto realizamos los siguientes cálculos:

$$||W(x)| - |W(a)|| \leq k(x-a)$$

$$|W(x)| \leq k(x-a); \text{ ya que } W(a) = 0.$$

y

$$||W(x)| - |W(b)|| \leq k(-x+b)$$

$$|W(x)| \leq k(-x+b); \text{ ya que } W(b) = 0.$$

La dos líneas rectas se intersectan cuando $x = a + \frac{b-a}{2} = b - \frac{b-a}{2}$. Por tanto la trayectoria de $|W(x)|$ sobre el intervalo $[a, b]$ está limitada por el triángulo isósceles con altura $h = k\frac{b-a}{2}$. Por lo tanto obtenemos

$$\int_b^a |W(x)| dx \leq \frac{1}{2}(b-a)\beta.$$

Caso 3. $2\beta/k < b - a < 2M/\beta$. Razonando como en el Caso 2 para la distancia $\frac{\beta}{k}$. Puesto que $|W(a + \beta/k)| \leq \beta$ y $|W(b - \beta/k)| \leq \beta$, usamos la forma del triángulo sólo en los intervalos de la forma $[a, a + \beta/k]$ y $[b - \beta/k, b]$ para acotar y se aplica en el intervalo $[a + \beta/k, b - \beta/k]$, la desigualdad (3.84), que es equivalente a cortar el vértice al triángulo isósceles por medio de la línea recta horizontal $y = \beta$ para obtener un resultado más preciso. La integral de $|W(x)|$ en el intervalo $[a, b]$ entonces esta acotada por el área de la superficie del trapecio (ver Figura 3.5) así:

$$\begin{aligned} \int_a^b |W(x)| dx &\leq \frac{1}{2} \frac{\beta}{k} \cdot \beta + \left(b - a - \frac{2\beta}{k} \right) \beta + \frac{1}{2} \frac{\beta}{k} \cdot \beta \\ &\leq \frac{\beta^2}{k} + \left(b - a - \frac{2\beta}{k} \right) \beta \\ &= (b-a)\beta \left(1 - \frac{\beta}{k(b-a)} \right) \leq (b-a)\beta \left(1 - \frac{\beta^2}{2Mk} \right) \\ &< (b-a)\beta \left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk} \right). \end{aligned} \tag{3.85}$$

Dado que $Mk > 1$ y $\alpha \leq 1$,

$$\begin{aligned}\alpha^2 &\leq 1 \\ \frac{\alpha^2}{2Mk} &\leq \frac{1}{2Mk} < \frac{1}{2} \\ -\frac{\alpha^2}{2Mk} &> -\frac{1}{2} \\ \left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk}\right) &> \frac{1}{2},\end{aligned}$$

es decir, (3.85) es válido en Caso 1 y 2.

Si x_1 es el primer cero de $W(x)$ a la derecha de x_β y \tilde{x} es el cero mas grande a la izquierda de y , entonces (3.85) y (3.82) implica que

$$\begin{aligned}\int_0^y |W(x)| dx &= \int_0^{x_1} |W(x)| dx + \int_{x_1}^{\tilde{x}} |W(x)| dx + \int_{\tilde{x}}^y |W(x)| dx \\ &\leq \int_0^{x_1} |W(x)| dx + (\tilde{x} - x_1)\beta \left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk}\right) + M.\end{aligned}$$

Dividiendo por y , y teniendo en cuenta que $\tilde{x} \leq y$; $\tilde{x} - x_1 \leq y$

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} \int_0^y |W(x)| dx &\leq \frac{1}{y} \int_0^{x_1} |W(x)| dx + \frac{(\tilde{x} - x_1)}{y} \beta \left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk}\right) + \frac{M}{y} \\ &\leq \frac{1}{y} \int_0^{x_1} |W(x)| dx + \beta \left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk}\right) + \frac{M}{y}.\end{aligned}$$

Cuando $y \rightarrow \infty$, tenemos $\gamma \leq \beta \left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk}\right)$, y dado que $\gamma \geq \alpha$ obtenemos

$$\alpha \leq \beta \left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk}\right).$$

Dado que esto sucede para todo $\beta > \alpha$ debe cumplirse para $\beta = \alpha$. Por consiguiente $\alpha^3 \leq 0$, y dado $\alpha \geq 0$, esto implica que $\alpha = 0$. Dado que $W(x) = \frac{S(e^x)}{e^x}$, esto implica que $|S(y)|/y \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow \infty$.

Por tanto para $\varepsilon > 0$, si y toma valores suficientemente grandes,

$$|S(y)| \leq \frac{1}{3} \varepsilon^2 y.$$

Así que $S(y(1 + \varepsilon)) - S(y) \leq \frac{1}{3} \varepsilon^2 (y(1 + \varepsilon) + y) < \varepsilon^2 y$, o

$$\int_y^{y(1+\varepsilon)} \frac{R(u)}{u} du \leq \varepsilon^2 y.$$

Dado que $R(u) = \psi(u) - u$ y ψ es no decreciente,

$$\begin{aligned} \frac{\psi(y)}{y(1+\varepsilon)} \int_y^{y(1+\varepsilon)} du - \int_y^{y(1+\varepsilon)} du &\leq \varepsilon^2 y \\ \frac{\psi(y)\varepsilon}{(1+\varepsilon)} - y\varepsilon &\leq \varepsilon^2 y \\ \frac{\psi(y)\varepsilon}{y(1+\varepsilon)} &\leq \varepsilon^2 + \varepsilon \\ \frac{\psi(y)}{y} &\leq (\varepsilon + 1)^2. \end{aligned}$$

Similarmente para $S(y) - S(y(1 - \varepsilon)) \geq -\varepsilon^2 y$ para valores de y suficientemente grandes encontramos que $\psi(y)/y \geq (1 - \varepsilon)^2$. Dado que ε es arbitrario nosotros concluimos que $\psi(x)/x \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$ esto es equivalente al TNP por Teorema 2.2.

□

A pesar de las décadas transcurridas y de que varios autores han dado versiones más precisas de demostraciones elementales ([5], [10] y [37]), hasta ahora todas ellas son menos poderosas que la obtenida con variable compleja y conceptualmente más ingeniosas. Una razón más que ha hecho perder fuerza a las pruebas elementales es la simplificación técnica que han conseguido algunos autores en la exposición de la demostración natural con variable compleja.

3.5. ALGUNAS APLICACIONES DE TNP PRIMOS EN INTERVALOS

Después de haber trabajado tan duro para establecer el TNP, uno esperaría ver aplicaciones interesantes. Comencemos con una aplicación fácil con la cantidad de números primos en el intervalo $(x, cx]$, donde $c > 1$. Por supuesto, este número es $\pi(cx) - \pi(x)$.

Utilizando el TNP, se deduce:

Proposición 3.1. *Sea $c > 1$. Cuando $x \rightarrow \infty$, tenemos*

$$\pi(cx) \sim c\pi(x),$$

$$\pi(cx) - \pi(x) \sim (c - 1) \frac{x}{\log x}.$$

Demostración. Es claro

$$\begin{aligned}\log(cx) &= \log c + \log x, \text{ propiedades del logaritmo} \\ \frac{\log(cx)}{\log x} &= \frac{\log c}{\log x} + 1, \text{ dividiendo entre } \log x \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(cx)}{\log x} &= 1, \text{ aplicando el límite,}\end{aligned}$$

es decir, por definición esto se escribe así:

$$\log(cx) \sim \log x, \text{ cuando } x \rightarrow \infty. \quad (3.86)$$

Utilizamos el TNP y (3.86). Luego aplicamos la Propiedad 1.1 literal (3) tenemos

$$\pi(cx) \sim \frac{cx}{\log cx} \sim c \frac{x}{\log x}, \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

y usamos el literal (1). Por tanto

$$\pi(cx) \sim c \frac{x}{\log x}, \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

este resultado que obtuvimos lo combinamos con el TNP obtenemos

$$\pi(cx) - \pi(x) \sim (c-1) \frac{x}{\log x}, \text{ cuando } x \rightarrow \infty; \text{ por Propiedad 1.1 literal (2)}$$

□

Corolario 3.1. Sea $c > 1$. Entonces, para todo x suficientemente grande, existen primos en el intervalo $(x, cx]$.

Demostración. Por Proposición (3.1),

$$(\pi(cx) - \pi(x)) \frac{\log x}{x}$$

tiende al límite $c - 1$ cuando $x \rightarrow \infty$; por lo tanto, la diferencia es distinta de zero para x suficientemente grande. □

En el sentido de proporciones, en la Proposición 3.1 tomando a $c = 2$ se dice que hay tantos números primos en $[x, 2x]$ como hay en $[1, x]$. Esto parece contradecir nuestra impresión (de lo correcto) que los números primos se disipan cuando x aumenta. Esto no es una contradicción, ya que estamos hablando de la razón de dos números que tienden a infinito. Los primos se disipan muy lentamente de la misma manera que la función $\log x$ crece muy lentamente: aumenta, pero $\log 2x / \log x$ tiende a 1. Ya conociendo el TNP con una estimación de error, somos capaces de

demostrar que la diferencia $2\pi(x) - \pi(2x)$, tiende a infinito cuando $x \rightarrow \infty$.

Una mejor aproximación a $\pi(x)$ es $Li(x)$ y en consecuencia una mejor aproximación a $\pi(cx) - \pi(x)$ es

$$\int_x^{cx} \frac{1}{\log t} dt.$$

Damos una tabla numérica comparando el número de primos en intervalos de longitud 100,000 con el número predicho por $Li(x)$. Los intervalos se describen en miles

intervalo	primos	estimación	intervalo	primos	estimación
0 – 100	9,592	9,630	500 – 600	7,560	7,566
100 – 200	8,392	8,407	600 – 700	7,445	7,472
200 – 300	8,013	8,051	700 – 800	7,408	7,393
300 – 400	7,863	7,836	800 – 900	7,323	7,325
400 – 500	7,678	7,684	900 – 1000	7,224	7,265

El n-ésimo número primo

Proposición 3.2. Sea p_n el n-ésimo número primo. Entonces $p_n \sim n \log n$ cuando $n \rightarrow \infty$

Demostración. Dado que $\pi(x) \frac{\log x}{x} \sim 1$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $\pi(p_n) = n$, tenemos

$$n \frac{\log p_n}{p_n} \rightarrow 1 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.87)$$

Por tanto

$$\log n + \log(\log p_n) - \log p_n \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.88)$$

Dividiendo por $\log p_n$ vemos que

$$\frac{\log n}{\log p_n} \rightarrow 1 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.89)$$

Al multiplicar (3.87) y (3.89), obtenemos

$$\frac{n \log n}{p_n} \rightarrow 1 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

□

Observación 3.3. Una mejor estimación es $\pi(x) \sim x/(\log x - 1)$, esto modifica (3.87) a $p_n \sim n(\log p_n - 1)$. Aplicando el logaritmo a (3.89), obtenemos $\log(\log n) - \log(\log p_n) \rightarrow 0$. Usando (3.88), deducimos que $\log p_n - (\log n + \log(\log n)) \rightarrow 0$ y por tanto la mejor aproximación a p_n es $q(n)$, donde

$$q(n) = n(\log n + \log(\log n) - 1).$$

Para una ilustración numérica, usamos el hecho que $\pi(100,000) = 9592$. En efecto, si $n = 9592$ entonces $p_n = 99,991$. En contramos que $n \log n = 87,949$, mientras que $q(n) = 99,613$.

CONCLUSIONES

La evolución en la historia del TNP a partir de la primera demostración formal realizada de manera independiente por J. Hadamard y C.J de la Vallé-Poussin en 1896. Esta prueba fue muy larga y elaborada, ha tenido una simplificación importante en el transcurso del siglo XX. Un ejemplo de esa simplificación drástica a partir del esquema clásico, esto fue lo que hizo el matemático estadounidense D. Newman en 1980, posteriormente modificada por J. Korevaar, esta es una demostración del TNP versión analítica, que hacemos de manera muy detallada en el capítulo II.

La primera prueba elemental del TNP fue hecha por Atle Selberg y Paul Erdős en 1949, después de esta prueba surgen más pruebas diferentes de la misma naturaleza. Nosotros estudiamos una versión simplificada de la prueba de Atle Selberg, basada en el artículo de Norman Levinson en el capítulo III.

La demostración del TNP versión analítica y la elemental se basan en demostrar la versión equivalente del TNP. La diferencia que hay en las dos demostraciones es que una utiliza la teoría de funciones analíticas y la otra se realiza con argumentos de naturaleza elemental, esto no quiere decir que sea sencillo de realizarla. Las demostraciones elementales van perdiendo terreno con respecto a las demostraciones analíticas, ya que revelan menos información, sobre los ceros de la función ζ .

En lo que respecta a los objetivos propuesto para esta investigación, señalar que realizamos dos demostraciones, una analítica basada en D. Newman y una elemental basada en A. Selberg. El otro objetivo era estudiar la demostración D. Zagier no se realizó porque tiene la misma estructura que la prueba analítica que realizamos en el capítulo II.

Uno de los puntos sobresalientes en esta investigación es que la mejor aproximación a $\pi(x)$ es $Li(x)$ para valores grandes de x , esta es otra forma de escribir el TNP.

Índice alfabético

- Aproximación de Stirling, 57
- Arco, 7
- Arco suave por partes, 7
- Banda crítica, 45
- Coefficiente binomial, 52
- Condición de Lipschitz, 96
- Constante de Euler, 88
- Convergencia
 - absoluta, 14
 - uniforme, 15
- Criterio
 - M de Weierstrass, 16
 - de Cauchy, 15
 - de la r -serie, 34
- Curva
 - de Jordan, 7
- Desigualdad
 - de Selberg, 93
- Ecuación
 - funcional de zeta, 44
- Ecuaciones
 - de Cauchy-Riemann, 5
- Estimación de Chebychev, 51
- Extensión
 - directa, 19
 - analítica, 19
- Fórmula
 - de Euler, 30
 - de inversión, 83
 - de reflexión de Euler, 30
 - de Stirling, 86
 - de sumación, 84
 - de sumación de Euler, 88
 - integral de cauchy, 13
- Función
 - analítica, 4
 - analítica global, 22
 - de Möbius, 83
 - gamma, 28
 - meromorfa, 18
 - zeta de Riemann, 33
- Identidad
 - de Chebychev, 80
 - de Euler, 34
 - de Tatzuza-Iseki, 92
- Integral
 - de Hankel, 39
- Integral de línea, 7
- O mayúscula, 26
- o pequeña, 28
- Orden de magnitud, 27
- Polos, 18
- Punto singular, 18
- sentido positivo, 7
- Serie

de Laurent, 23

de Taylor, 13

Serie convergente, 14

Sucesión

convergente, 14

de Cauchy, 14

Sumación

de Abel, 84

por partes, 16

Teorema

de Cauchy, 12

de Green, 11

de la monodromía, 21

del binomio, 52

Bibliografía

- [1] APOSTOL, TOM M (1976). “*Introduction to Analytic Number Theory*”. New York. U.S.A. Editorial Springer-Verlag.
- [2] ASH, R. B. AND NOVINGER, W.P(2004). “*Complex Variables*”. Florida State University.
- [3] B. CONWAY, JOHN (1973). “*Functions of One Complex Variable*”. New York, Berlin, Heidelberg y Tokyo. Editorial Springer-Verlag, Department of Mathematics, Indiana University, USA.
- [4] BALTZERSEN, JERÔME (2007). “*Hardy’s theorem and prime number theorem*”. Thesis for Bachelor of Science in Mathematics. Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen.
- [5] BOMBIERI, ENRICO (1962). “*Sulle formule di A. Selberg generalizzate per classi di funzioni aritmetiche e le applicazioni al problema del resto nel Primzahlsatz*”. Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3, 393-440
- [6] CHURCHILL, RUEL V. “*Variable Compleja y Aplicaciones*”.
- [7] CHAMIZO LORENTE, FERNANDO (2008). “*Atle Selberg: 1917-2007*”. La Gaceta de la RSME, Vol. 11 , Núm. 1, Págs. 101-116.
- [8] COPPEL, W.A. (2009). “*NUMBER THEORY: AN INTRODUCTION TO MATHEMATICS*”. Australia, Springer Science+ Business Media.
- [9] D. J., NEWMAN (1980). “*Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem.*” American Mathematical Monthly 87 págs, 693-696
- [10] DIAMOND, H.G. y STEINIG, J (1970). “*An elementary proof of the prime number theorem with a remainder term*”. Invent. Math. 11, 199-258.
- [11] GOLDFELD, DORIAN (2004). “*The Elementary Proof of the Prime Number Theorem An Historical Perspective*”. Editorial Springer.

-
- [12] DEBNATH, LOKENATH; BHATTA DAMBARU (2007). “*Integral Transforms and Their Applications*”. Boca Raton, London, New York, Segunda Edición, Editorial Taylor & Francis Group, LLC
- [13] EDWARDS, H.M (1974). “*Riemann’s Zeta Function*”. New York. U.S.A. Editorial Press.
- [14] E.MARSDEN JERROLD, J. HOFFMAN, MICHAEL (1996). “*Análisis Básico de Variable Compleja.*”. México: Trillas. Traducción de: Basic complex analysis.
- [15] MARTINEZ, FABIO BROCHERO; MOREIRA, CARLOS GUSTAVO; SALDANHA, NICOLAU; TENGAN,EDUARDO (2011). “*teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro* ”. Rio de Janeiro:IMPA, Brasil. Projeto Euclides.
- [16] FIGUEROA G., RICARDO (2006). “*Matemática Básica I*”. Lima-Perú, Editorial América.
- [17] G. J. O. JAMESON (2003). “*The Prime Number Theorem*”. Publicado por Cambridge University Press.
- [18] GAMELIN,THEODORE W.(2001). “*COMPLEX ANALYSIS*”. New York, Editorial Springer-Verlag.
- [19] GOLDSTEIN, L.J (1973). “*A History of the Prime Number Theorem*”. Editorial The American Mathematical Mounthy, Vol. 80, N 6 (Jun-Jul), páginas 599-615.
- [20] HAVIL, JULIAN. (2003). “*GAMMA: EXPLORING EULER’S CONSTANT*”. Publicado por Princeton University Press, 41 William Street. Impreso en Estados Unidos de América.
- [21] HADAMARD, J. (1893). “*Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d’une fonction considérée par Riemann*”. Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 9, p. 171-216. “*Sur la distribution des zéros de la fonction ζ et ses conséquences arithmétiques*”. ues, Bull. Soc. Math. France 24 (1896), 199-220; reprinted in Oeuvres, vol. 1, pp. 189-210.
- [22] H. Iwaniec and E. Kowalski (2004). “*Analytic number theory*”. Publicado por American Mathematical Society, Providence.
- [23] INGHAM, A.E (1964). “*THE DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS*”. New York and London. Printed and Published by Stechert-Hafner Service Agency, Inc.
- [24] LANDAU, E. “*Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*”. Leipzig, en dois volumenes Teubner.

-
- [25] LEVINSON, NORMAN(1969). “A *MOTIVATED ACCOUNT OF AN ELEMENTARY PROOF OF THE PRIME NUMBER THEOREM*”The American Mathematical Monthly, vol. 76 (1969), pp. 225-245, Massachusetts Institute of Technology.
- [26] M. STEIN, ELIAS Y RAMI SHAKARCHI (2007).“*Complex Analysis*”. Princeton, New Yersy, USA,Princeton University Prees.
- [27] KOREVAAR, J (1982). “*On Newman’s Quick Way to the Prime Number Theorem*”. The Mathematical Intelligencer, páginas 108-115
- [28] J. J. SYLVESTER (1881).“*On Tchebycheff’s theory of the totality of prime numbers comprised within given limits*”. The Johns Hopkins University Press, American Journal of Mathematics, Vol. 4, No. 1 , pp. 230-247
- [29] JOHNSONBAUGH, RICHARD (1999). “*MATEMÁTICAS DISCRETAS*”. Chicago, USA, DePaul University, Cuarta Edición, Editorial PRENTICE HALL.
- [30] NEWMAN, D.J (1980). “*Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem*”. American Mathematical Monthly 87, páginas 693-696
- [31] R. DERRICK (1987). “*Variable Compleja con Aplicaciones*”. Versión Español de la obra Complex Analysis and Applications- Second Edition. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A de C.V.
- [32] TIKAO TATAZAWA AND KANESIROO ISEKI (1951). “*On Selberg’s Elementary Proof of the Prime-Number Theorem*
- [33] MUNKRES, JAMES R. “*Topología*”. España, Versión Español por Universidad de Murcia, Massachusetts Institute of Technology, 2da edición, editorial Prentice Hall.
- [34] SELBERG, ATLE (1948). “*An Elementary Proof of the Prime Number Theorem*”. Annals of Mathematics, Vol.50 (1949), N 2, páginas 305-313
- [35] SERRE, J.-P (1973). “*A course in arithmetic*”. New York U.S.A. Editorial Springer-Verlag
- [36] WIDDER, D.V (1946). “*The Laplace Transform*”. Princeton, Princeton University Press.
- [37] WIRSING, E. (1964). “*Elementare Beweise des Primzahlsatzes mit Restglied. II*”. J. Reine Angew. Math. 214/215, 1-18.
- [38] YU TAKUCHI (1976). “*Sucesiones y Series*”. Mexico, Editorial Limusa.
- [39] ZAGIER, D. (1997). “*Newman’s Short Proof of the Prime Number Theorem*”. The American Mathematical Monthly, Vol. 104, N₀. 8, pp. 705-708.