

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



Universidad de El Salvador
Hacia la libertad por la cultura

PROYECTO DE GRADO TITULADO:

**TEORÍA DE ESTABILIDAD
DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS**

PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE:
LICENCIADA EN MATEMÁTICA

Estudiante: Mayra Yamileth Morales Peña. *Carné:* MP08012
Asesor: MSc. Carlos Ernesto Gámez Rodríguez.
Co-asesor: Dr. Simón Alfredo Peña Aguilar.

Ciudad Universitaria, viernes 22 de noviembre de 2013

Dedicatoria

A mis padres, Ricardo e Isabel por su incondicional

apoyo, amor y comprensión.

Agradecimientos

A Dios, por darme esperanza y las fuerzas para seguir adelante.

A mis padres, por ser mi ejemplo de esfuerzo y dedicación.

A mis hermanas, Ingrid y Brenda, y mi hermano Josué; por su alegría y sus palabras de aliento.

A mi asesor, MSc. Carlos Gámez, por su disposición y por colaborar en cada aspecto de este trabajo.

A mi co-asesor, Dr. Simón Peña, por sus oportunas apreciaciones, revisiones y evaluaciones.

Al MSc. Dimas Tejada, por revisar el perfil de este proyecto y hacer las correcciones pertinentes.

Resumen

Este trabajo consiste en el estudio de un tema que tiene fundamental importancia en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales ordinarias, vistas como modelos de la realidad; el cuál es la estabilidad. Se presenta de manera intuitiva y formal los conceptos de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad; y la importancia que tiene que una ecuación/sistema diferencial ordinario sea estable.

Se estudia la estabilidad de sistemas lineales y la relación estrecha que existe entre la estabilidad de un sistema no homogéneo con la estabilidad de la solución nula del sistema homogéneo asociado. También se estudia la teoría en el caso de coeficientes constantes, que es mucho más completa y un criterio que permite decidir dicha estabilidad.

Se estudia también la estabilidad de sistemas ordinarios no lineales, basada en los métodos directo e indirecto del matemático ruso Aleksandr Liapunov, que consiste en un análisis global y local respectivamente, de la estabilidad del sistema en sus puntos críticos.

Índice

1. Introducción	8
2. Planteamiento del Problema	9
3. Justificación	11
4. Objetivos	12
5. Metodología	13
6. Capítulo 1: Teoría de Estabilidad según Liapunov	15
6.1. Dependencia Continua de las Soluciones respecto a los Datos Iniciales . . .	15
6.2. Estabilidad, Estabilidad Asintótica e Inestabilidad. Idea Intuitiva	21
6.3. Definiciones Formales	22
6.4. Estabilidad de la Solución Trivial	23
6.5. Ejemplos	26
7. Capítulo 2: Estabilidad de Sistemas Lineales Ordinarios de Primer Orden	32
7.1. Estabilidad de la Solución Trivial de Sistemas Homogéneos	32
7.2. Acotación y Estabilidad	34
7.3. Estabilidad Asintótica Global	35
7.4. Sistemas Lineales con Coeficientes Constantes	38
8. Capítulo 3: Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz	48
8.1. Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz	48
9. Capítulo 4: Sistemas Lineales Semi-Autónomos y Sistemas Semi-Lineales	60
9.1. Sistemas Lineales Semi-autónomos	60
9.2. Estabilidad de Sistemas Semi-Lineales	61
10. Capítulo 5: Los Métodos de Liapunov	68
10.1. Estabilidad de Sistemas No Lineales	68
10.2. Linealización. Método Indirecto.	73
10.3. Funciones de Liapunov. Método Directo.	74

10.3.1. Interpretación Física	81
10.3.2. Interpretación Geométrica en \mathbb{R}^2	82
10.3.3. Ejemplos	84
10.4. Aplicación a un Sistema Físico	87
11. Conclusiones	97
12. Recomendaciones	98
13. Apéndice	99
13.1. Teorema de Punto Fijo de Banach	99
13.2. Teorema de Existencia y Unicidad Local	99
13.3. Teorema de la Contracción Uniforme	101
13.4. Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones no Prolongables	102
13.5. Relaciones de Cardano Viète	102
13.6. Lema de Lebesgue	103
13.7. Desigualdad de Gronwall	103
13.8. Teorema de Hartman-Grobman	104
14. Bibliografía	105

Índice de figuras

6.1. Soluciones de $x' = x$ con $x(t_0) = x_0$	16
6.2. Existencia de una Solución no Prolongable	19
6.3. Movimiento de una cáñica sobre diferentes superficies	21
6.4. Ilustración del concepto de Estabilidad	23
6.5. Ilustración del concepto de Estabilidad Asintótica	23
6.6. Estabilidad de la Solución Trivial	24
6.7. Inestabilidad de la Solución Trivial	24
6.8. Soluciones de la Ecuación Logística	27
7.1. Soluciones de $x' = \sin^2(x)$ con $x(0) = x_0$	35
10.1. Estabilidad de Liapunov de un punto de equilibrio	71
10.2. Estabilidad Asintótica de un punto de equilibrio	72
10.3. Ilustración gráfica de (E), (EA) e (I)	72
10.4. Interpretación Geométrica de las Superficies de Liapunov para el caso \mathbb{R}^2	83
10.5. Gráfica de la función $-F(x_1)$ con $x_1 F(x_1) < 0$	86
10.6. Sistema Hidráulico de Dos Tanques en Cascada	87
10.7. Retrato de Fases del Sistema 10.5	91
10.8. Retrato de Fases para Diferentes Condiciones Iniciales	92
10.9. Retrato de Fases para el Sistema de Dos Tanques con $f_e = 0.5$	94
10.10 Gráfico de $\dot{V}(\mathbf{h})$ en $\mathcal{B}(\mathbf{0}, \frac{1}{4})$ con $f_e = 0.5$	96

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales constituyen la parte central de una de las ramas más importantes de la Matemática: el Análisis.

Las ecuaciones diferenciales sirven como modelo matemático para el estudio de problemas que surgen en disciplinas muy diversas. Desde sus comienzos han contribuido de manera muy notable a solucionar muchas cuestiones y a interpretar numerosos fenómenos de la naturaleza. Su origen histórico es inseparable de sus aplicaciones a las ciencias físicas, químicas e ingeniería, ya que para resolver muchos problemas significativos se requiere la determinación de una función que debe satisfacer una ecuación en la que aparece su derivada. Las ecuaciones diferenciales son la expresión matemática de las leyes naturales.

Uno de los aspectos más importantes en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales es la estabilidad. El concepto de estabilidad así como el de inestabilidad están presentes en la vida cotidiana. Es de uso común decir: el estado de salud de una persona es estable, cierta moneda es inestable, etcétera; incluso en muchas áreas del conocimiento, se maneja dicho concepto de manera intuitiva. Es común oír a un ingeniero decir que una estructura es estable o no lo es, un químico dice que una reacción se ha estabilizado, un economista suele decir que el precio de determinado producto es estable, un físico diría que el movimiento de una partícula es estable, etc. Así que un concepto que aparece frecuentemente en todas las ciencias, merece ser definido en términos precisos.

El presente trabajo pretende ser una introducción al extenso tema de la teoría de estabilidad, de gran actualidad e importancia hoy en día, a pesar de haber transcurrido un poco más de un siglo en que fuera presentado en términos precisos por el matemático ruso A. M. Lyapunov (1857-1918) en su tesis doctoral “El problema general de la estabilidad del movimiento” publicada por primera vez en 1892, la cual no recibió la atención debida alrededor de 25 años.

2. Planteamiento del Problema

Suponga que se está analizando un fenómeno físico, biológico, etc. que evoluciona con el paso del tiempo, y cuyo comportamiento se rige por una e.d.o. de primer orden, junto con unas determinadas condiciones iniciales .

De este modo, la posición que ocupa en el instante t la partícula que partió del punto x_0 en el instante t_0 vendrá dada por el valor de la solución $x(t; t_0, x_0)$ del problema de valor inicial $\begin{cases} x' = f(t, x), & x(t_0) = x_0. \end{cases}$

Ahora bien, dado que se suelen cometer errores al estimar la posición inicial (errores humanos, de los aparatos de medida, etc), lo que en realidad se conoce no es la posición exacta de partida x_0 sino un valor aproximado \bar{x}_0 .

De este modo, lo que verdaderamente se toma como posición real de la partícula es $x(t; t_0, \bar{x}_0)$ en lugar del verdadero valor $x(t; t_0, x_0)$. Resulta fundamental conocer si cuando se comete un error pequeño al aproximar x_0 por \bar{x}_0 las correspondientes soluciones $x(t; t_0, x_0)$ y $x(t; t_0, \bar{x}_0)$ se mantienen próximas.

Cuando el tiempo t recorre un intervalo acotado, el resultado queda garantizado por el Teorema de Dependencia Continua de las Soluciones respecto de los Datos Iniciales. Este teorema afirma que al menos en intervalos acotados de tiempo, las soluciones $x(t; t_0, x_0)$ y $x(t; t_0, \bar{x}_0)$ serán próximas cuando x_0 y \bar{x}_0 sean próximos.

En general, pues, se tiene solamente dependencia continua en intervalos cerrados y acotados de tiempo. Tanto ó más importante que ésta, es la dependencia continua de los datos iniciales en intervalos no acotados de tiempo. Surge así el concepto de *Estabilidad*.

Una solución $x(t)$ es *estable* si toda solución que comienza cerca de $x(t)$ permanece próxima a ella para todo instante posterior. Si, además, todas las soluciones que comienzan cerca de $x(t)$ convergen a $x(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, se dice que $x(t)$ es *asintóticamente estable*.

Planteamiento del Problema

Entonces el problema al cual se dedica la atención es el siguiente:

Estudiar la dependencia de las soluciones de una ecuación/sistema diferencial ordinaria respecto de los datos iniciales sobre intervalos no acotados de tiempo. Así, se busca determinar cuando una solución será estable (asintóticamente estable) o no, según esta dependencia. Además estudiar la estabilidad de sistemas del tipo $x = f(t, x)$ no lineales donde no se requieren expresiones explícitas para las soluciones del sistema en cuestión.

3. Justificación

La importancia de estudiar la estabilidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias se debe a que generalmente representan modelos de la realidad. Entonces interesa que la ecuación diferencial represente confiablemente los datos en estudio, teniendo presente que tales datos son obtenidos por medios que de una u otra forma conllevan errores de medición. Por lo que interesa estudiar como varían las soluciones cuando se hacen pequeños cambios en las condiciones iniciales del problema.

Se esperaría que a condiciones iniciales próximas correspondan soluciones próximas, pues, en otro caso, la fiabilidad de la ecuación diferencial como modelo de la realidad dejaría mucho que desear; hay que tener presente que el dato que refleja el estado inicial que determinará unívocamente la evolución del sistema, nunca se conocerá con exactitud, pues cualquier método o instrumento que se utilice para su medida estará inevitablemente afectado de error. Es indispensable, por ello, tener la garantía de que las soluciones serán próximas cuando sus datos iniciales sean próximos, a fin de que la solución obtenida difiera poco de la que sería la solución “verdadera”.

Este trabajo trata de resaltar la importancia de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias por las diversas aplicaciones que tienen como modelos de la realidad observable. Además de que presenta la oportunidad de poner en práctica los conocimientos y experiencia adquiridos en la carrera de licenciatura en matemática en un tema que aún no se estudia mucho en la escuela de matemática

4. Objetivos

Objetivo General

Estudiar la dependencia de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria y de sistemas con respecto a las condiciones iniciales en intervalos no acotados de tiempo.

Objetivos Específicos

- Comprender la importancia de la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias como modelos de la realidad observable.
- Estudiar la estabilidad de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria y de sistemas de primer orden lineales, semi-lineales y autónomos.
- Estudiar el método directo e indirecto de estabilidad de Lyapunov.
- Analizar la estabilidad de un modelo específico.

5. Metodología

A continuación se describen los aspectos importantes de la metodología de trabajo:

1. Tipo de investigación.

Este proyecto de investigación es de carácter bibliográfico-descriptivo.

1.1 Bibliográfico:

Se ha hecho una extensa recopilación de libros impresos y de libros obtenidos por Internet para contar con el suficiente material que cubra las necesidades del estudio y de las que puedan surgir más adelante. El objetivo es compilar coherentemente la información más útil y destacada del tema.

1.2 Descriptivo:

Ya que se pretende estudiar a detalle las demostraciones de los diversos teoremas.

2. Forma de Trabajo

Se tendrán reuniones periódicas con el asesor y co-asesor del trabajo para tratar los diferentes aspectos de la investigación como estudiar y discutir la teoría, tratar los diferentes aspectos del trabajo escrito y de las presentaciones.

3. Exposiciones

Se tendrán tres exposiciones:

Primera Exposición (Pública) : Presentación del Perfil del Proyecto de Investigación.

Segunda Exposición (Pública) : Presentación del primer avance en el Trabajo de Investigación.

Tercera Exposición (Pública) : Presentación Final del Trabajo de Investigación: último capítulo, resumen de resultados y aplicaciones.

CAPÍTULO UNO

Teoría de Estabilidad según Liapunov

6. Capítulo 1: Teoría de Estabilidad según Liapunov

6.1. Dependencia Continua de las Soluciones respecto a los Datos Iniciales

Consideremos la ecuación

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}(t)) \quad \text{con} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.1)$$

donde $f \in C[J \times \mathbf{D}, \mathbb{R}^n]$ con $J = (a, b)$ y $-\infty \leq a < b \leq +\infty$; \mathbf{D} es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n y $(t_0, \mathbf{x}_0) \in J \times \mathbf{D}$. La solución de (6.1) con la condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $t_0 \geq \tau$; se denotará como $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$. Generalmente, se fija un punto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in J \times \mathbf{D}$ y se busca luego la solución de (6.1). El objetivo ahora consiste en estudiar el comportamiento de las soluciones de la E.D.O. (6.1) en relación con la variación de los datos iniciales. Si variamos “poco” los valores iniciales, cabe preguntarse:

- ¿Cómo se comportarán las soluciones que corresponden a datos iniciales “cercaños” a (t_0, \mathbf{x}_0) ?
- ¿Se mantendrán cercanas entre sí dichas soluciones?
- Si esto sucede, ¿sobre qué tipo de *sub-intervalo del dominio de definición de la solución* se mantendrá la cercanía?

Antes de precisar qué es dependencia continua de las soluciones respecto a los datos iniciales, se verá un ejemplo:

Ejemplo 1 Sea $x' = x$ con $x(t_0) = x_0$. Se denota con $x(t; t_0, x_0)$ a su solución. En este caso $x(t; t_0, x_0) = x_0 \exp(t - t_0)$ con $t \in \mathbb{R}$.

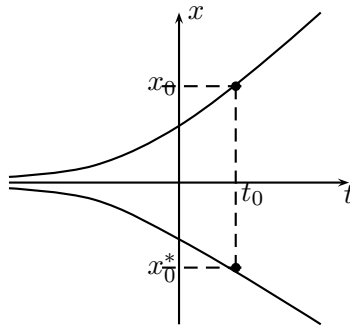


Figura 6.1: Soluciones de $x' = x$ con $x(t_0) = x_0$.

Se observa que x_0 y x_0^* pueden estar tan cercanos como se desee, sin embargo

$$|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_0^*)| = \exp(t - t_0) |x_0 - x_0^*| \rightarrow +\infty$$

Sea $J^* = [t_0 - T_1, t_0 + T_2]$, el cual está contenido en el dominio de $x(\cdot; t_0, x_0)$, para todo $T_1 > 0$, $T_2 > 0$. Entonces, siendo $\varepsilon > 0$ un número dado, si $|x_0 - x_0^*| < \exp(-T_2)$, entonces $|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_0^*)| < \varepsilon$, $\forall t \in J^*$.

Definición 1. Diremos que la solución $x(t; t_0, x_0)$ del P.V.I. (6.1) depende continuamente de los datos iniciales (t_0, \mathbf{x}_0) , si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo intervalo compacto J^* contenido en el dominio de $\mathbf{x}(\cdot; t_0, \mathbf{x}_0)$, existe un entorno V del punto (t_0, \mathbf{x}_0) tal que para todo $(t_0^*, \mathbf{x}_0^*) \in V$, la solución $\mathbf{x}(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*)$ está definida para todo $t \in J^*$ y además

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J^*$$

En lo que sigue, procederemos a mostrar que bajo las hipótesis del Teorema de Existencia y Unicidad Local las soluciones de (6.1) dependen continuamente de los datos iniciales.

Probemos en primer lugar el siguiente lema auxiliar.

Lema 1. Sea U un conjunto compacto contenido en $J \times \mathbf{D}$. Entonces existen constantes $a^* > 0$ y $b^* > 0$ tales que el conjunto

$$A = \cup_{(t_0, \mathbf{x}_0) \in U} B(t_0, \mathbf{x}_0)$$

es un subconjunto compacto de $J \times \mathbf{D}$, donde

$$B(t_0, \mathbf{x}_0) = \{(t, \mathbf{x}) : |t - t_0| \leq a^*, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b^*\}$$

Demostración. Como $J \times \mathbf{D}$ es abierto, para cada $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U$, existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, tales que el conjunto $\{(t, \mathbf{x}) : |t - t_0| \leq \alpha, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \beta\}$, está contenido en $J \times \mathbf{D}$. Por lo tanto la unión de todos estos conjuntos forman un cubrimiento abierto de U . Teniendo en cuenta la compacidad del conjunto U y el Lema del número Lebesgue (ver apéndice), se obtiene que existen constantes $a^* > 0$ y $b^* > 0$, tales que $A \subset J \times \mathbf{D}$.

Probemos que A es un conjunto compacto. Sea $(t, \mathbf{x}) \in A$, entonces existe un punto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U$ tal que $|t - t_0| \leq a^*$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b^*$. Esto implica que

$$|t| \leq |t - t_0| + |t_0| \leq a^* + |t_0| \quad , \quad \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0\| \leq b^* + \|\mathbf{x}_0\| \quad ,$$

Teniendo en cuenta la compacidad del conjunto U , se sigue que A es un conjunto acotado.

Para concluir la prueba de nuestra afirmación mostremos que A es un conjunto cerrado.

Sea $\{(t_k, \mathbf{x}_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, \mathbf{x}_k) = (t^*, \mathbf{x}^*)$.

Por la construcción del conjunto A , se sigue para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un punto $(t_0^k, \mathbf{x}_0^k) \in U$ tal que $|t_k - t_0^k| \leq a^*$ y $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0^k\| \leq b^*$. Como la sucesión $\{(t_0^k, \mathbf{x}_0^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ está contenida en U , ella posee una subsucesión convergente en U . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ella misma es convergente; es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_0^k, \mathbf{x}_0^k) = (\tilde{t}_0, \tilde{\mathbf{x}}_0) \in U$. Tiene lugar

$$|t^* - \tilde{t}_0| \leq |t^* - t_k| + |t_k - t_0^k| + |t_0^k - \tilde{t}_0| \quad ,$$

$$\|\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}_0\| \leq \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0^k\| + \|\mathbf{x}_0^k - \tilde{\mathbf{x}}_0\|.$$

Haciendo tender $k \rightarrow \infty$, obtenemos que $|t^* - \tilde{t}_0| \leq a^*$ y $\|\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}_0\| \leq b^*$. Lo cual prueba que $(t^*, \mathbf{x}^*) \in A$.

□

Teorema 1. Dependencia Continua de los Datos Iniciales

Bajo las hipótesis del Teorema de existencia y unicidad, las soluciones de (6.1) dependen continuamente de los datos iniciales.

Demostración. Consideremos un conjunto compacto $U \subseteq J \times \mathbf{D}$. Sea A el conjunto compacto dado por el Lema 1. Denotemos por $M = \max \{\|f(t, \mathbf{x})\| : (t, \mathbf{x}) \in A\}$ y sea $K > 0$ la constante de Lipschitz de $f|_A$. Escojamos una constante $\delta > 0$ de manera que $\delta < \min \{a^*, b^*/M, 1/K\}$, con $a^* > 0$ y $b^* > 0$ las constantes dadas por el Lema 1.

Consideremos el subconjunto C^* de $C[-\delta, \delta], \mathbb{R}^n$ formado por las funciones φ tales que:

- a) $\varphi(0) = \mathbf{0}$,
- b) $\|\varphi(t)\| \leq b^*, \forall t \in [-\delta, \delta]$.

Para cada $y = (t_0, \mathbf{x}_0) \in U$, definamos sobre C^* un operador T_y de la manera siguiente:

$$T_y \varphi(t) := \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \varphi(s-t_0) + \mathbf{x}_0) ds, \quad t \in [-\delta, \delta].$$

Se observa que si φ es un punto fijo de T_y , entonces

$$\varphi'(t) = f(t+t_0, \varphi(t) + \mathbf{x}_0),$$

de donde se sigue que $\mathbf{x}(t) = \varphi(t-t_0) + \mathbf{x}_0$ es solución del P.V.I. (6.1), para todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Utilizando razonamientos análogos a los de la prueba del Teorema de Existencia y Unicidad Local, se obtiene que $T_y : C^* \rightarrow C^*$ es una contracción uniforme respecto a y , con $y \in U$. Además, no es difícil probar que T_y es continuo en y . Por lo tanto, en virtud del Teorema

de la Contracción Uniforme (ver Apéndice) se sigue que $\varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ es continua en (t_0, \mathbf{x}_0) sobre U , uniformemente en t con $t \in [-\delta, \delta]$. De donde a su vez concluimos que la función $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \varphi(t - t_0; t_0, \mathbf{x}_0)$ es continua en (t_0, \mathbf{x}_0) sobre U , uniformemente en t , con $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Sea ahora (t_0, \mathbf{x}_0) un punto cualquiera en $J \times D$. Según el Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones no Prolongables (ver Apéndice), existe una única solución $x(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ no prolongable del P.V.I. (6.1), definida sobre un intervalo (α, β) .

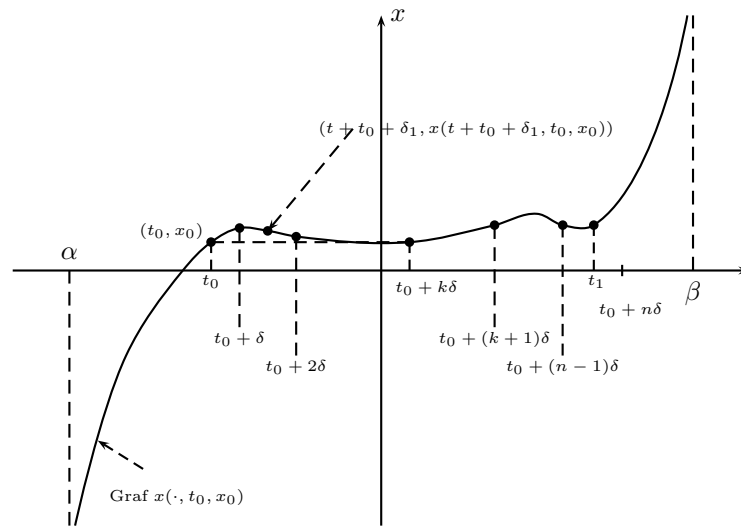


Figura 6.2: Existencia de una Solución no Prolongable

Sea $\tau \in (\alpha, \beta)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\tau > t_0$, el caso $\tau < t_0$ se analiza de manera análoga. Pongamos $U = \{(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) : t \in [t_0, \tau]\}$, el cuál es un subconjunto compacto de $J \times D$. Por lo demostrado previamente, $\mathbf{x}(t; \xi, \eta)$ es continua en (ξ, η) sobre U , uniformemente en t , con $t \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$.

Para probar que $\mathbf{x}(t; \xi, \eta)$ es continua en (ξ, η) uniformemente sobre $[t_0, \tau]$ particionemos el intervalo $[t_0, \tau]$ como sigue:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = t_0 + k\delta < t_{k+1} < \dots < t_{n-1} \leq \tau$$

donde n es el menor entero positivo tal que $t_0 + (n - 1)\delta \leq \tau < t_0 + n\delta$.

Teniendo en cuenta la unicidad de las soluciones de (6.1), se sigue que:

$$\mathbf{x}(t + t_1; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t + t_1; t_1, \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0)).$$

Lo cual implica que la continuidad de $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ en (t_0, \mathbf{x}_0) es uniforme sobre el intervalo $[t_0, t_0 + 2\delta]$. Por lo tanto, $\mathbf{x}(s; \xi, \eta)$ es continua en (ξ, η) sobre U , uniformemente en s , con $s \in [\xi - 2\delta, \xi + 2\delta] \cap [t_0, \tau]$.

Supongamos ahora que $x(s; \xi, \eta)$ es continua en (ξ, η) sobre U , uniformemente sobre $[\xi - k\delta, \xi + k\delta] \cap [t_0, \tau]$.

Nuevamente, por la unicidad, tenemos que

$$\mathbf{x}(t + t_k; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t + t_k; t_k, \mathbf{x}(t_k; t_0, \mathbf{x}_0)),$$

lo cual implica la continuidad de $\mathbf{x}(s; \xi, \eta)$ respecto de $(\xi, \eta) \in U$, uniformemente sobre el intervalo $[\xi - (k + 1)\delta, \xi + (k + 1)\delta] \cap [t_0, \tau]$. Esto concluye la prueba del Teorema.

□

Supongamos que el campo vectorial f satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad. Sea (t_0, \mathbf{x}_0) en $J \times \mathbf{D}$ y denotemos por $(\alpha(t_0, \mathbf{x}_0), \beta(t_0, \mathbf{x}_0))$ al intervalo maximal de existencia y unicidad de $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$. Definamos el siguiente conjunto:

$$\Omega(f) = \{(t; t_0, \mathbf{x}_0) : \alpha(t_0, \mathbf{x}_0) < t < \beta(t_0, \mathbf{x}_0), (t_0, \mathbf{x}_0) \in J \times \mathbf{D}\}.$$

Al conjunto $\Omega(f)$ se le llama dominio de definición de $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$.

A partir del Teorema de Existencia y Unicidad y el Teorema sobre la Dependencia Continua de las Soluciones respecto a los Datos Iniciales, se sigue que $\Omega(f)$ es un conjunto abierto.

6.2. Estabilidad, Estabilidad Asintótica e Inestabilidad. Idea Intuitiva

A manera de ejemplo, consideremos el movimiento de una cánica que se mueve bajo la acción de la gravedad sobre diferentes superficies como las mostradas en la Figura 7.3.

En los cuatro casos, la canica se encuentra en una posición de equilibrio, pero ¿cuál será el movimiento que ejecuta la cánica si la sacamos “un poco” de su estado de equilibrio y la soltamos?

En los casos (a) y (b), la cánica se mantendrá cerca de su posición de equilibrio oscilando alrededor de ésta, pero además, debido a la fricción, la canica tenderá a ocupar dicha posición de equilibrio. En ambos casos, el equilibrio se dice ser asintóticamente estable, la única diferencia que existe en estos dos casos, es que la “perturbación” que le hagamos a la cánica para sacarla de su estado de equilibrio debe ser mucho menor para el caso (b).

Si ahora nos fijamos en la cánica del inciso (c), cualquier “perturbación” por pequeña que ésta sea, hará que la cánica se aleje de su posición de equilibrio; en este caso el equilibrio es inestable.

Finalmente, en (d), para cualquier “perturbación” pequeña de la canica, ésta permanecerá “cerca” de la posición de equilibrio pero no tenderá a acercarse a dicha posición de equilibrio y estaremos en presencia de estabilidad (no asintótica).

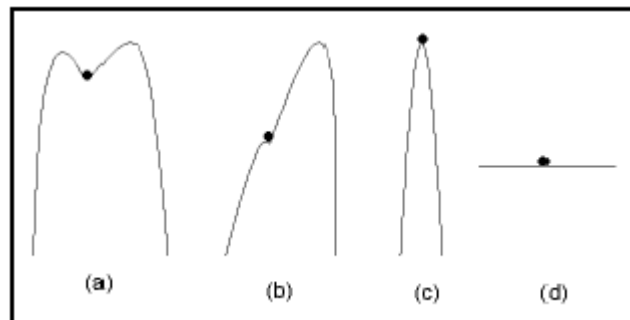


Figura 6.3: Movimiento de una cánica sobre diferentes superficies

6.3. Definiciones Formales

Consideremos el sistema

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \quad (6.2)$$

para simplificar la exposición supondremos que $f \in C^1[J \times \mathbf{D}, \mathbb{R}^n]$, $J = (\tau, +\infty)$, $\tau \geq -\infty$ y \mathbf{D} es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n .

Definición 2. Diremos que la solución $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ del sistema (6.2) es estable en el instante $t_0 \in J$, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, tal que se verifica que

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_1)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \text{ y } \mathbf{x}_1 \in \mathbb{B}_\delta(\mathbf{x}_0),$$

donde $\mathbb{B}_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta\}$

Si la solución no es estable en el instante t_0 , se dice que $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ es inestable en t_0 .

Definición 3. La solución $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ del sistema (6.2) es asintóticamente estable, si además de ser estable existe $\rho > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_1)\| = 0, \quad \forall \mathbf{x}_1 \in \mathbb{B}_\rho(\mathbf{x}_0).$$

Observación 1. En las definiciones 2 y 3 cuando δ y ρ sean independientes de t_0 , diremos que la solución $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ es uniformemente estable y uniforme asintóticamente estable, respectivamente.

Las figuras 2.3 y 2.4 ilustran los conceptos de Estabilidad y Estabilidad Asintótica.

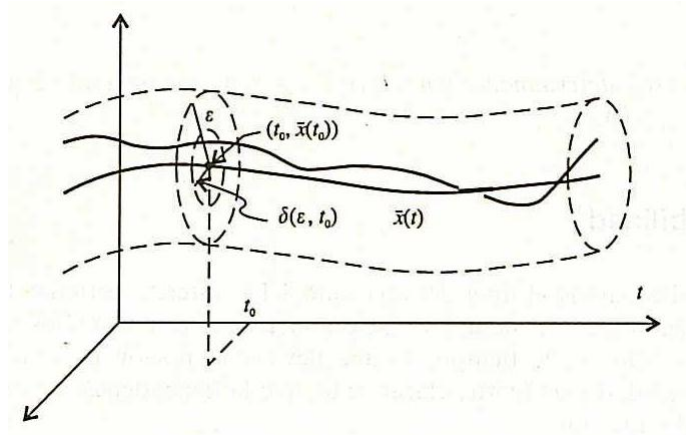


Figura 6.4: Ilustración del concepto de Estabilidad

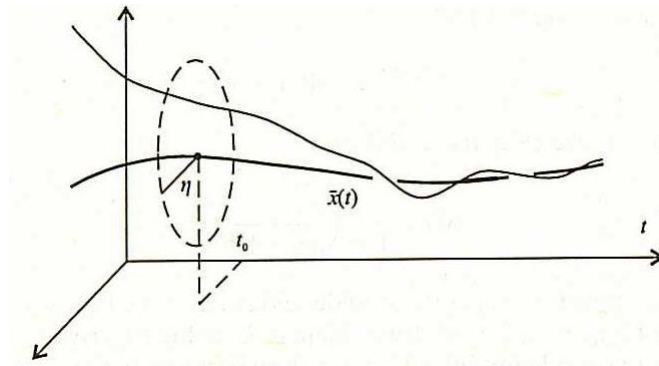


Figura 6.5: Ilustración del concepto de Estabilidad Asintótica

6.4. Estabilidad de la Solución Trivial

El estudio de la estabilidad de una solución $\varphi(t)$ de (6.2) siempre se puede reducir al estudio de la estabilidad de la solución trivial de un sistema equivalente a (6.2). En efecto, pongamos $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \varphi(t)$, donde $\mathbf{x}(t)$ es una solución arbitraria de (6.2). Entonces

$$\mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t)) - f(t, \varphi(t)) = f(t, \mathbf{y}(t) + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$$

Definiendo

$$g(t, \mathbf{y}) = f(t, \mathbf{y}(t) + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$$

y considerando el sistema $\mathbf{y}' = g(t, \mathbf{y})$, obtenemos lo deseado. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad de aquí en adelante supondremos que $f(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ para todo $t > \tau$.

Supongamos que $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Geométricamente la estabilidad dice que las soluciones de (6.2), para $t \geq t_0$, permanecen en un tubo de radio $\varepsilon > 0$ para datos iniciales suficientemente pequeños. (Ver Figura 2.5)

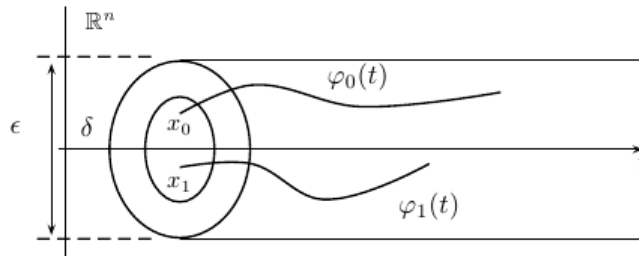


Figura 6.6: Estabilidad de la Solución Trivial

La inestabilidad dice que existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para cualquier $\delta > 0$ es posible escoger $T > t_0$ y un vector \mathbf{x}_1 con $\|\mathbf{x}_1\| < \delta$ para los cuales se satisface que: $\|\mathbf{x}(T; t_0, \mathbf{x}_0)\| \geq \varepsilon_0$. (Ver figura 2.6)

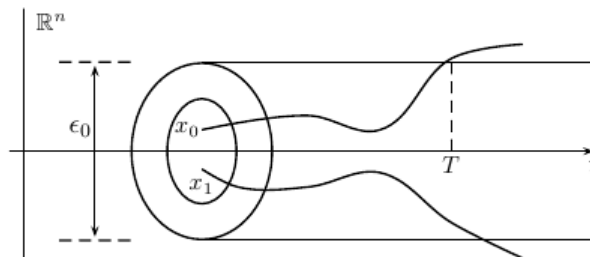


Figura 6.7: Inestabilidad de la Solución Trivial

Definición 4. Diremos que una solución es estable, si ella es estable para todo $t_0 > \tau$.

Proposición 1. Sea $t_0 > \tau$. Si la solución trivial $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ de (6.2) es estable (asintóticamente estable) en t_0 , entonces $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es estable (asintóticamente estable) en cualquier otro instante $t_1 > \tau$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es estable en t_0 y que $t_1 \in (\tau, t_0)$.

En virtud de la dependencia continua de los datos iniciales, se tiene que para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1, t_0, t_1) > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}(t; t_1, \mathbf{x}_1)\| < \varepsilon_1, \quad \forall t \in [t_1, t_0] \quad y \quad \mathbf{x}_1 \in \mathbb{B}_{\delta_1}(\mathbf{0}).$$

Por otra parte, como $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es estable en t_0 , se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que: si $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, entonces

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Por lo tanto, si $0 < \varepsilon_1 < \delta$, entonces

$$\|\mathbf{x}(t_0; t_1, \mathbf{x}_1)\| < \varepsilon_1 < \delta < \varepsilon.$$

De donde se sigue que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1^* = \delta_1^*(\varepsilon, t_0, t_1, \delta) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t; t_1, \mathbf{x}_1)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_1 \quad y \quad \mathbf{x}_1 \in \mathbb{B}_{\delta_1^*}(\mathbf{0}).$$

Supongamos ahora que $t_1 > t_0$. Definamos

$$V(t_1, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x} = \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0), \text{ con } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{B}_\delta(\mathbf{0})\}.$$

Por la dependencia continua de los datos iniciales, la aplicación $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}(t_1, t_0, \mathbf{x}_0)$ es un homeomorfismo para cada t_1, t_0 fijos. Por lo tanto, existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que

$\overline{\mathbb{B}}_{\delta_1}(\mathbf{0}) \subset V(t_1, \varepsilon)$. Con este $\delta_1(\varepsilon, t_0) > 0$, tenemos que

$$\|\mathbf{x}(t; t_1, \mathbf{x}_1)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_1, \quad \|\mathbf{x}_1\| < \delta_1(\varepsilon, t_0)$$

Lo cual implica la estabilidad de $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ en $t = t_1$.

□

En virtud de la proposición 1, de aquí en adelante sólo diremos que $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ es estable o asintóticamente estable sin especificar en qué instante.

6.5. Ejemplos

Ejemplo 1. Consideremos el problema de estimar el crecimiento de una población, donde el medio sólo puede sostener de manera “estable” un máximo K de población (la *capacidad de soporte* del medio), de modo que si $x(t)$ estuviese por encima de K , la tasa sería negativa y la población decrecería acercándose a K ; si $x(t) = K$, la tasa sería nula y, por tanto, la población constante, y, finalmente, si $x(t)$ se mantiene por debajo de K , la tasa sería positiva, creciendo entonces la población, aunque menos rápidamente cuanto más próxima esté a ese valor K .

La manera más simple de reflejar matemáticamente ese comportamiento es imponer que la tasa de crecimiento x'/x sea proporcional a la diferencia $(K - x)$. Se tiene así la denominada *ecuación logística*:

$$x' = \frac{a}{K}x(K - x)$$

propuesta por Verhulst en 1836.

Luego, la solución única del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = ax(1 - x/K) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

está dada por

$$x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)\exp(-at)}$$

Obsérvese que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K$$

cualquiera que sea la condición inicial $x_0 \neq 0$. Es decir, la población se estabiliza a largo plazo en el valor K (capacidad de soporte del medio en que aquélla evoluciona) independientemente del tamaño inicial del que parta (excepto si $x_0 = 0$, naturalmente).

La solución estacionaria $x(t) \equiv K$ se dice que es (*asintóticamente*) *estable* por esa propiedad que tiene de que todas las demás soluciones (excepto la trivial) convergen a ella cuando $t \rightarrow \infty$. La solución estacionaria $x(t) \equiv 0$ es, por el contrario, *inestable*: en cuanto x_0 es distinto de 0, por pequeño que sea, la correspondiente solución se aleja de ella. El aspecto de las gráficas de las soluciones de la ecuación logística se muestran en la figura 2.7:

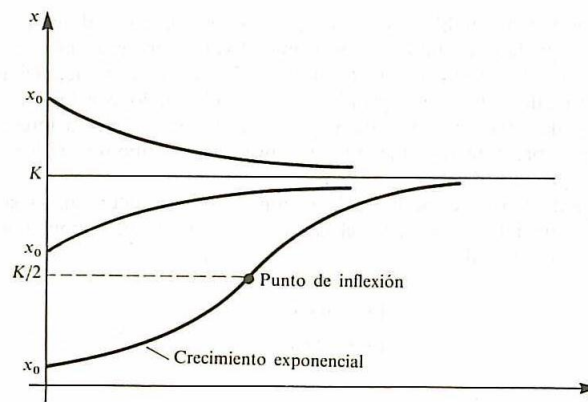


Figura 6.8: Soluciones de la Ecuación Logística

Ejemplo 2. Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

Las soluciones están dadas por

$$x(t) = x(t_0) \exp(a(t - t_0)), \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

como sabemos. Si $a = 0$, las soluciones son $x(t) = x(t_0)$, y todas ellas son, claramente, estables, tomando cualquier $\beta \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$, se tiene

$$|y(t) - x(t)| = |y(t_0) - x(t_0)| \exp(a(t - t_0)) \quad (*)$$

de donde, por ser $a < 0$, resulta inmediatamente que toda solución $x(t)$ es asintóticamente estable (cualquiera que sea $\beta \in \mathbb{R}$).

Finalmente, de la misma expresión (*) se deriva que, si $a > 0$, todas las soluciones son, dado $\beta \in \mathbb{R}$, inestables: tomando, por ejemplo, $\varepsilon = 1$, es claro que, cualquiera que sea $\delta > 0$, existen soluciones $y(t)$ con $|y(t_0) - x(t_0)| \leq \delta$ tales que $|y(t) - x(t)| > \varepsilon$ para valores (todos, de hecho) $t \geq t^*$, para un cierto $t^* \geq t_0$.

Este ejemplo pone de manifiesto cómo la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial, que, por supuesto, se da cualquiera que sea el signo de a en intervalos compactos $[0, T]$, *no es uniforme en t en el intervalo $[0, \infty)$* cuando $a > 0$; de ahí que en este caso las soluciones no sean estables.

En este ejemplo observamos que la propiedad de estabilidad es, dependiendo del signo de a , la misma para todas las soluciones de la ecuación. Ésta es una característica de las ecuaciones lineales, pero, en general, para ecuaciones no lineales, eso no tiene por qué ocurrir.

Ejemplo 3. La solución del P.V.I.

$$x' = x^2, \quad x(t_0) = x_0$$

es

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}$$

Las soluciones positivas ($x_0 > 0$) están definidas en $(-\infty, 1/x_0 + t_0)$ y las negativas ($x_0 < 0$), en $(1/x_0 + t_0, \infty)$; se tiene además la solución trivial $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, correspondiente a la condición inicial $x(t_0) = 0$, cualquiera que sea $t_0 \in \mathbb{R}$.

Si $\tilde{x}_0 > 0$, la correspondiente solución no está definida en $[\beta, \infty)$ para ningún $\beta \in \mathbb{R}$; falla, pues la condición previa de la definición de estabilidad y la solución es inestable.

Si $\tilde{x}_0 < 0$, la solución $\bar{x}(t) = x(t; \beta, \tilde{x}_0)$, para un cierto $\beta \in \mathbb{R}$, está definida en $(1/\tilde{x}_0 + \beta, \infty) \supset [\beta, \infty)$. Dados $t_0 \geq \beta$ y $x_0 < 0$, la solución $x(t; t_0, x_0)$ está definida en $(1/x_0 + t_0, \infty) \supset [t_0, \infty)$ y verifica

$$\begin{aligned} |x(t; t_0, x_0) - \bar{x}(t)| &= \frac{|x_0 - \bar{x}(t_0)|}{[1 - x_0(t - t_0)][1 - \bar{x}(t_0)(t - t_0)]} \\ &= \frac{|x_0 - \bar{x}(t_0)|}{[1 + |x_0|(t - t_0)][1 + |\bar{x}(t_0)|(t - t_0)]} \leq |x_0 - \bar{x}(t_0)| \end{aligned}$$

de donde se deduce que, dado $\varepsilon > 0$, si x_0 es tal que $|x_0 - \bar{x}(t_0)| \leq \delta = \varepsilon$, entonces $x(t; t_0, x_0)$ está definida y verifica $|x(t; t_0, x_0) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$, y, además, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; t_0, x_0) - \bar{x}(t)| = 0$ cuando $t \rightarrow \infty$; es decir, $\bar{x}(t)$ es asintóticamente estable.

La solución $x(t) \equiv 0$ está, por supuesto, definida para todo $t \geq \beta$, con cualquier $\beta \in \mathbb{R}$, pero es inestable, pues para cualquier valor $x_0 > 0$, por pequeño que sea, la solución $x(t; t_0, x_0)$ no está definida en $[\beta, \infty)$ (y además tiende a ∞ para $t \rightarrow 1/x_0 + t_0$); sí que es cierto que, si $x_0 < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; t_0, x_0)| = 0$, lo que supone una suerte de estabilidad (asintótica) unilateral o *semiestabilidad* para la solución trivial $x(t) \equiv 0$.

Observación 2. La estabilidad aquí definida es la que se conoce como “*estabilidad en el sentido de Liapunov*”. Se trata de una estabilidad “a la derecha”; se podría definir de una manera completamente análoga una estabilidad “a la izquierda” considerando en las definiciones anteriores el intervalo $(-\infty, \beta]$ y el lím $x(t)$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Normalmente, interesa estudiar la estabilidad a la derecha como parte del análisis del comportamiento a largo plazo (o sea, en el sentido de los tiempos crecientes) de las soluciones de un sistema y, por ello, el término *estabilidad* se referirá sistemáticamente a la estabilidad a la derecha (en el sentido de Liapunov).

En la práctica, interesa estudiar la estabilidad de ciertas soluciones que representan comportamientos significativos del sistema físico modelado por la ecuación diferencial, particularmente soluciones constantes (o estacionarias) y soluciones periódicas.

El calificativo de “estable” que se aplica a los puntos de los sistemas planos, no se corresponde exactamente con las definiciones que damos aquí. Los nodos y focos estables representan soluciones estacionarias asintóticamente estables según la presente definición. Los puntos de silla y los nodos y focos inestables corresponden, éstos sí, a soluciones estacionarias inestables, mientras que los centros son estables pero no asintóticamente estables.

CAPÍTULO DOS

Estabilidad de Sistemas Lineales Ordinarios de Primer Orden

7. Capítulo 2: Estabilidad de Sistemas Lineales Ordinarios de Primer Orden

En este capítulo se consideran los sistemas lineales no homogéneos del tipo:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \quad t \in J \quad (7.1)$$

donde $\mathbf{A}(t) \in C[J, \mathbb{R}^{n \times n}]$ y $\mathbf{b} \in C[J, \mathbb{R}^n]$.

Definición 5. Diremos que el sistema (7.1) es estable (asintóticamente estable), si toda solución de (7.1) lo es.

7.1. Estabilidad de la Solución Trivial de Sistemas Homogéneos

Al estudiar las propiedades de estabilidad de una solución $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ del sistema lineal (7.1), hay que estimar $\|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ para soluciones $\mathbf{x}(t)$ tales que $\|\mathbf{x}(t_0) - \tilde{\mathbf{x}}(t_0)\|$ sea pequeño; pero la función $\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$ es solución del sistema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, con lo que las propiedades de estabilidad de una solución cualquiera del sistema lineal no homogéneo son exactamente las mismas que las de la solución nula del sistema homogéneo asociado.

En particular, cualquier solución no nula del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ tiene las mismas propiedades de estabilidad que la solución $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$. Hemos dicho:

Proposición 2. *El sistema (7.1) es estable (asintóticamente estable) si y sólo si la solución trivial del sistema lineal homogéneo asociado:*

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (7.2)$$

es estable (asintóticamente estable).

Demostración. " \implies " Supongamos que (7.1) es estable, la estabilidad asintótica se prueba de modo análogo.

Sea $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ una solución fija y $\mathbf{x}(t)$ cualquier solución de (7.1) y definimos $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ la cual es solución de (7.2).

Como $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ es estable, se tiene que: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ tal que:

si $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \delta$, entonces $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$. lo cual implica que :
 $\|\mathbf{y}(t)\| = \|\mathbf{0} - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$, si $\|\mathbf{y}(t_0)\| = \|\mathbf{0} - \mathbf{y}(t_0)\| < \delta$.

Es decir que la solución trivial de (7.2) es estable.

" \Leftarrow " Si la solución trivial es estable:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ tal que si $\|\mathbf{0} - \mathbf{y}(t_0)\| < \delta \implies \|\mathbf{0} - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon \forall t \geq t_0$,
 es decir $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \forall t \geq t_0$, de aquí que $x(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ es estable.

□

La Proposición 2 es muy importante por cuanto dice que para el estudio de la estabilidad de sistemas lineales no homogéneos, basta con estudiar la estabilidad de la solución trivial del sistema lineal homogéneo asociado (que será el mismo si el sistema era ya homogéneo).

Tiene sentido, por ello, decir de un sistema lineal que es estable, asintóticamente estable o inestable.

7.2. Acotación y Estabilidad

En general, las propiedades de acotación (a la derecha) y de estabilidad de una solución son independientes. Por ejemplo, las soluciones $x(t) = t + x_0$ de $x' = 1$ son estables, pero no acotadas.

Sin embargo, para los sistemas lineales homogéneos se tiene:

Teorema 2. *La ecuación (7.2) es estable si, y sólo si, todas sus soluciones son acotadas.*

Demostración. " \Leftarrow " Supongamos que todas las soluciones de (7.2) están acotadas en $[\tau, \infty)$ y sea $t_0 \geq \tau$; entonces, existe una constante M tal que $\|\Phi(t)\| \leq M$ para $t \in [\tau, \infty)$, siendo $\Phi(t)$ la matriz fundamental del sistema que verifica $\Phi(t_0) = I$ (las columnas de una matriz fundamental son soluciones linealmente independientes del sistema). Dado $\varepsilon > 0$, $\|\mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon/M$ implica que $\|\Phi(t)\mathbf{x}_0\| \leq \|\Phi(t)\|\|\mathbf{x}_0\| < \varepsilon$, para $t \in [\tau, \infty)$, es decir, la solución trivial estable.

" \Rightarrow " Supongamos que la solución $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ de (7.2) es estable. Entonces

$$\|\mathbf{x}_i(t; t_0, \delta \mathbf{e}_i/2)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n y δ es el número dado en la definición de estabilidad. Luego, si $\Phi(t)$ denota a la matriz fundamental del sistema (7.2) cuyas columnas son las soluciones $\mathbf{x}_i(t; t_0, \delta \mathbf{e}_i/2)$, entonces $\Phi(t)$ está acotada, lo cual a su vez implica la acotación de las soluciones del sistema (7.2).

□

Cabe notar que el Teorema 2 no es válido para sistemas no lineales. En efecto, consideremos la ecuación

$$x' = \sin^2(x) \text{ con } x(0) = x_0$$

Sus soluciones vienen dadas por:

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg}x_0 - t) & ; \quad \text{si } x_0 \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ k\pi & ; \quad \text{si } x_0 = k\pi \end{cases}$$

cuyo gráfico es :

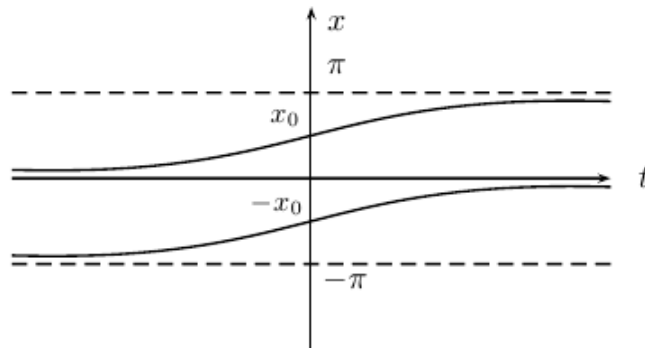


Figura 7.1: Soluciones de $x' = \sin^2(x)$ con $x(0) = x_0$

Del gráfico se observa que las soluciones están acotadas y sin embargo la solución trivial no es estable.

7.3. Estabilidad Asintótica Global

La estabilidad asintótica para los sistemas lineales también presenta algunas particularidades:

Definición 6. Si una solución $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ es estable y toda solución del sistema converge a ella cuando $t \rightarrow \infty$, se dice entonces que $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ es globalmente asintóticamente estable.

Pues bien, si un sistema lineal es asintóticamente estable, es, automáticamente, globalmente asintóticamente estable, como se verá a continuación.

Recuérdese, por otra parte, que una solución $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ es asintóticamente estable si cumple dos requisitos:

i) es estable, y

ii) toda solución que comienza en $t = t_0$ suficientemente cerca de $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ converge a $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Aunque pueda resultar poco intuitivo, la segunda condición no implica la primera. Pues bien, esta situación extraña no se da en los sistemas lineales; en estos, la convergencia de todas las soluciones a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, equivale a la estabilidad asintótica (global) de la solución trivial, o sea, de cualquier solución. Se tiene, en efecto, el siguiente:

Teorema 3. *La solución trivial de (7.2) es asintóticamente estable si y sólo si*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0, \text{ para todo } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. " \Leftarrow " Si toda solución converge a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, todas las soluciones están acotadas en el intervalo $[\tau, \infty)$; por tanto, el sistema es estable por el Teorema 2, lo que, junto a la hipótesis implica, por definición, que el sistema es asintóticamente estable (globalmente, además).

" \Rightarrow " Supongamos que la solución trivial de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ es asintóticamente estable. Entonces, existe $\rho > 0$ tal que para $\|\mathbf{x}_0\| < \rho$ se satisface que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| =$

0. Para concluir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0$ para datos iniciales con norma $\geq \rho$, es suficiente definir

$$\varphi(t) = \frac{\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \rho}{\|\mathbf{x}_0\| 2},$$

$\varphi(t)$ también es solución y se tiene $\|\varphi(t_0)\| = \rho/2$. Con lo que $\|\varphi(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, y lo mismo ocurrirá con $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$.

□

Observación 3. En general, el conjunto $\Omega = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0 \right\}$ se llama región de atracción de la solución trivial de (7.2). El Teorema anterior junto con la Proposición 2 nos dice que para sistemas lineales homogéneos Ω es todo \mathbb{R}^n , si el sistema es asintóticamente estable. En este caso se dice que la solución trivial es globalmente asintóticamente estable.

Ejemplo 4. El teorema 3 no es válido para sistemas no lineales, tal como veremos a continuación. Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x' = -\frac{x}{t} + [2t - y^2 t^3 (t-1) - 1] y^2 t \exp(y^2 t^2 (1-t)) \\ y' = -\frac{y}{t} \end{cases} \quad (7.3)$$

con $x(1) = x_0$, $y(1) = y_0$.

Se puede verificar que

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{t} + (t-1) y_0^2 \exp[y_0^2 (1-t)] \\ \frac{y_0}{t} \end{pmatrix}$$

es la solución general de (7.3). Y además $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t)\| = 0$, para todo $\mathbf{z}(1) = (x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$.

Sin embargo para $0 < \delta < \frac{1}{e}$, N suficientemente grande y $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(1) = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{\sqrt{N}}\right)^T$, se verifica que $\|\mathbf{z}_0\| < \delta$ y eligiendo $t^* = 1 + N$, se tiene

$$\|\mathbf{z}(t^*; 1, z_0)\| \geq \|\mathbf{x}(t^*)\| = \frac{1}{N(N+1)} + \frac{1}{e} > \frac{1}{e}$$

Por lo tanto la solución trivial de (7.3) es inestable.

7.4. Sistemas Lineales con Coeficientes Constantes

Consideremos el siguiente sistema lineal a coeficientes constantes

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (7.4)$$

Para sistemas lineales a coeficientes constantes su estabilidad se puede caracterizar completamente a través de los autovalores de la matriz \mathbf{A} . El siguiente teorema nos da precisamente esa caracterización.

Teorema 4. (a) *Cada solución $\mathbf{x} = \varphi(t)$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es estable si todos los eigenvalores de \mathbf{A} tienen parte real negativa.*

(b) *Cada solución $\mathbf{x} = \varphi(t)$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es inestable si al menos un eigenvalor de \mathbf{A} tiene parte real positiva.*

(c) *Supóngase que todos los eigenvalores de \mathbf{A} tienen parte real ≤ 0 y $\lambda_1 = i\sigma_1, \dots, \lambda_l = i\sigma_l$ tienen parte real igual a cero. Sea k_j la multiplicidad de $\lambda_j = i\sigma_j$. Esto significa que el polinomio característico de \mathbf{A} puede ser factorado en la forma*

$$p(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{k_1} \dots (\lambda - i\sigma_l)^{k_l} q(\lambda)$$

donde todas las raíces de $q(\lambda)$ tienen parte real negativa. Entonces, cada solución $\mathbf{x} = \varphi(t)$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es estable si \mathbf{A} tiene k_j eigenvectores linealmente independientes para cada eigenvalor $\lambda_j = i\sigma_j$. De otra manera, cada solución $\varphi(t)$ es inestable.

Demostración. **(a)** Cada solución $\mathbf{x} = \varphi(t)$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es de la forma $\varphi(t) = \exp(\mathbf{A}t)\varphi(0)$. Sea $\phi_{ij}(t)$ el ij -ésimo elemento de la matriz $\exp(\mathbf{A}t)$, y sean $\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0$ las componentes de $\varphi(0)$. Entonces, la i -ésima componente de $\varphi(t)$ es

$$\varphi_i(t) = \phi_{i1}(t)\varphi_1^0 + \dots + \phi_{in}(t)\varphi_n^0 = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}(t)\varphi_j^0$$

Supongamos que todos los autovalores de \mathbf{A} tienen parte real negativa. Sea $-\alpha_1$ el tamaño de las partes reales de los eigenvalores de \mathbf{A} . Se puede mostrar que para cada número $-\alpha$, con $-\alpha_1 < -\alpha < 0$, podemos encontrar un número K tal que

$$|\phi_{ij}(t)| \leq K \exp(-\alpha t) \quad t \geq 0$$

Consecuentemente,

$$|\varphi_i(t)| \leq \sum_{j=1}^n K \exp(-\alpha t) |\varphi_j^0| = K \exp(-\alpha t) \sum_{j=1}^n |\varphi_j^0|$$

para algunas constantes positivas K y α . Ahora $|\varphi_j^0| \leq \|\varphi(0)\|$. Por tanto,

$$\|\varphi(t)\| = \max\{|\varphi_1(t)|, \dots, |\varphi_n(t)|\} \leq nK \exp(-\alpha t) \|\varphi(0)\|$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Escogemos $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{nK}$. Entonces

$$\|\varphi(t)\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|\varphi(0)\| < \delta(\varepsilon) \quad \text{y} \quad t \geq 0$$

ya que

$$\|\varphi(t)\| \leq nK \exp(-\alpha t) \|\varphi(0)\| < \frac{nK\varepsilon}{nK} = \varepsilon$$

Por tanto, la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es estable.

(b) Sea λ un eigenvalor de \mathbf{A} con parte real positiva y sea \mathbf{v} un eigenvector de \mathbf{A} con eigenvalor λ . Entonces, $\varphi(t) = c \exp(\lambda t) \mathbf{v}$ es una solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para alguna constante c .

1. Si λ es real entonces v es también real y

$$\|\varphi(t)\| = |c| \exp(\lambda t) \|\mathbf{v}\|$$

Entonces, $\|\varphi(t)\|$ se aproxima a infinito cuando t tiende a infinito, para cualquier elección de $c \neq 0$ sin importar que tan pequeña sea. Por tanto $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es inestable.

2. Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es complejo, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2$ es también complejo. En este caso

$$\begin{aligned} \exp(\alpha + i\beta) \cdot t \cdot (\mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2) &= \exp(\alpha t) (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) (\mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2) \\ &= \exp(\alpha t) [(\mathbf{v}^1 \cos(\beta t) - \mathbf{v}^2 \sin(\beta t)) + i(\mathbf{v}^1 \sin(\beta t) + \mathbf{v}^2 \cos(\beta t))] \end{aligned}$$

es una solución de valores complejos de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Luego

$$\psi(t) = c \exp(\alpha t) (\mathbf{v}^1 \cos(\beta t) - \mathbf{v}^2 \sin(\beta t))$$

es una solución de valores reales de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, para cualquier elección de la constante c . Claramente, $\|\psi(t)\|$ no es acotada cuando t tiende a infinito si c y ya sea \mathbf{v}^1 ó \mathbf{v}^2 es distinto de cero. Por tanto, $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es inestable.

(c) Si \mathbf{A} tiene k_j eigenvectores linealmente independientes para cada eigenvalor $\lambda_j = i\sigma_j$ de multiplicidad k_j , entonces podemos encontrar una constante K tal que

$$\left\| \exp(\mathbf{A}t)_{ij} \right\| \leq K$$

Entonces,

$$\|\varphi(t)\| \leq nK \|\varphi(0)\|$$

para cada solución $\varphi(t)$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Se sigue ahora inmediatamente de la prueba de (a) que $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es estable.

Por otro lado, si \mathbf{A} tiene menos de k_j eigenvectores linealmente independientes con eigenvalor $\lambda_j = i\sigma_j$, entonces $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ tiene soluciones $\varphi(t)$ de la forma

$$\varphi(t) = c \exp(i\sigma_j t) [\mathbf{v} + t(\mathbf{A} - i\sigma_j I) \mathbf{v}]$$

donde $(\mathbf{A} - i\sigma_j I) \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Si $\sigma_j = 0$, entonces $\varphi(t) = c(\mathbf{v} + t\mathbf{A}\mathbf{v})$ es de valor real. Más aún, $\|\varphi(t)\|$ es acotada cuando t tiende a infinito para cualquier elección de $c \neq 0$. Similarmente, ambas, la parte real e imaginaria de $\varphi(t)$ son acotadas en magnitud para $\varphi(0) \neq 0$ arbitrariamente pequeño, si $\sigma_j \neq 0$. Por tanto, la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es inestable.

□

Observación 4. Si todos los eigenvalores de \mathbf{A} tienen parte real negativa, entonces cada solución $\mathbf{x}(t)$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ se aproxima a cero cuando t tiende a infinito. Esto se sigue inmediatamente de $\|\mathbf{x}(t)\| \leq K \exp(-\alpha t) \|\mathbf{x}(0)\|$ que se obtuvo en la prueba de la parte (a) del Teorema 4.

Por tanto, la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ no solo es estable, sino también asintóticamente estable. La condición sobre los autovalores para deducir la estabilidad asintótica no es válida para sistemas con coeficientes variables, como muestra el siguiente ejemplo:

Sea el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}$ con:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \sin^2(t) \end{bmatrix}$$

Los autovalores de $\mathbf{A}(t)$ son (excepcionalmente) independientes de t y valen $(-1 \pm i\sqrt{7})/4$. Tienen, pues, parte real negativa. Por otro lado, se puede comprobar directamente que la función

$$\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \exp(t/2)$$

es solución del sistema; crece exponencialmente con t y, en consecuencia, el sistema no es asintóticamente estable.

Ejemplo 5. Determine si cada solución $\mathbf{x}(t)$ de la ecuación diferencial

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

es estable, asintóticamente estable, o inestable.

Solución. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1 - \lambda & 2 \\ -3 & -2 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= -(1 + \lambda)^3 - 4(1 + \lambda) = -(1 + \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) \end{aligned}$$

Por tanto, $\lambda = -1$ y $\lambda = -1 \pm 2i$ son los eigenvalores de \mathbf{A} . Ya que los tres eigenvalores tienen parte real negativa, concluimos que cada solución de la ecuación diferencial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 6 Probar que cada solución de la ecuación diferencial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

es inestable.

Solución. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 5 \\ 5 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 25$$

Por tanto $\lambda = 6$ y $\lambda = -4$ son los eigenvalores de \mathbf{A} . Ya que un eigenvalor de \mathbf{A} es positivo, concluimos que cada solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es inestable.

Ejemplo 7 Mostrar que cada solución de la ecuación diferencial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

es estable, pero no asintóticamente estable.

Solución. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

es

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 6$$

Así, los eigenvalores de \mathbf{A} son $\lambda = \pm\sqrt{6}i$. Por lo tanto, por la parte (c) del **Teorema** 4, cada solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es estable. Sin embargo, ninguna solución es asintóticamente estable. Esto se sigue inmediatamente del hecho de que la solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \sin(\sqrt{6}t) \\ 2 \cos(\sqrt{6}t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{6} \cos(\sqrt{6}t) \\ 2 \sin(\sqrt{6}t) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, cada solución $\mathbf{x}(t)$ es periódica, con período $2\pi/\sqrt{6}$, y ninguna solución $\mathbf{x}(t)$ (excepto $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$) se aproxima a $\mathbf{0}$ cuando t tiende a infinito.

Ejemplo 8 Mostrar que cada solución de la ecuación diferencial

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

es inestable.

Solución. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

es

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 & 0 \\ 0 & -6 - \lambda & -2 \\ -6 & 0 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^2(\lambda + 7)$$

Por lo tanto, los eigenvalores de \mathbf{A} son $\lambda = -7$ y $\lambda = 0$. Cada eigenvector \mathbf{v} de \mathbf{A} con eigenvalor 0 debe satisfacer la ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto implica que $v_1 = \frac{3v_2}{2}$ y $v_3 = -3v_2$, así que cada eigenvector \mathbf{v} de \mathbf{A} con eigenvalor 0 debe ser de la forma

$$\mathbf{v} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Consecuentemente, cada solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es inestable, ya que $\lambda = 0$ es un eigenvalor de multiplicidad 2 y \mathbf{A} sólo tiene un eigenvector linealmente independiente con eigenvalor 0.

CAPÍTULO TRES

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

8. Capítulo 3: Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

8.1. Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

Conocer $Re(\lambda)$ donde λ representa los valores propios de un sistema lineal con coeficientes constantes, basta casi siempre para precisar la estabilidad del sistema (y de una ecuación, que era estable si lo era su sistema equivalente y ambos tienen el mismo polinomio característico). El problema es que para $n > 2$, normalmente los λ no son calculables (sin métodos numéricos). Pero este hecho no impide estudiar la estabilidad.

El criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz brinda una manera de saber si un sistema lineal con coeficientes constantes o una ecuación diferencial con coeficientes constantes, es estable o no, a partir de los coeficientes del respectivo polinomio característico. Se demostrará este criterio y luego se verán algunos ejemplos de cómo utilizarlo.

Definición 7. Diremos que

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad a_0 > 0,$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, es un polinomio de Hurwitz, si todas sus raíces tienen parte real negativa.

Lema 2. Si $P_n(z)$ es un polinomio de Hurwitz, entonces $a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$.

Demostración. Sean z_1, \dots, z_p las raíces reales de $P_n(z)$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sus correspondientes multiplicidades. Denotemos con z_{p+1}, \dots, z_{p+q} las raíces complejas de $P_n(z)$ y β_1, \dots, β_q sus respectivas multiplicidades.

Por hipótesis $Re(z_k) < 0, k = 1, 2, \dots, p + q$.

Sabemos que

$$P_n(z) = a_0 \prod_{k=1}^p (z - z_k)^{\alpha_k} \prod_{k=1}^q (z - z_{p+q})^{\beta_k} (z - \bar{z}_{p+q})^{\beta_k}$$

Pongamos $z_k = -b_k$, con $b_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, p$ y $z_{j+p} = -b_{j+p} + ic_j$, con $b_{j+p} > 0$, $j = 1, \dots, q$.

Así

$$P_n(z) = a_0 \left(\prod_{k=1}^p (z + b_k)^{\alpha_k} \right) \left(\prod_{j=1}^q (z^2 + 2b_{j+p}z + b_{j+p}^2 + c_j^2)^{\beta_j} \right)$$

lo cual implica que todos los coeficientes de $P_n(z)$ son mayores que cero.

□

Corolario 1. *En el caso $n \leq 2$ la condición anterior es suficiente también; es decir, todo polinomio de segundo grado es de Hurwitz si y sólo si $a_i > 0$ $i = 0, 1, 2$.*

Demostración. Cuando $n = 1$, $P_1(z) = a_0z + a_1 = 0$, $a_0 > 0 \iff z = -a_1/a_0 < 0 \iff a_1 > 0$. Por tanto, $P_1(z)$ es de Hurwitz.

Para $n = 2$, sea el polinomio $P_2(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, $a > 0$, entonces

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Si las raíces son reales, como $\sqrt{b^2 - 4ac} < \sqrt{b^2} = b$ ya que $c > 0$, se tiene entonces que ambas raíces tienen parte real negativa.

Si las raíces son complejas se tiene que la parte real $-b$ es siempre negativa.

□

Denotaremos por H_n al conjunto de todos los polinomios de Hurwitz de grado n .

Definición 8. Diremos que $F(z)$ es un polinomio asociado a $P_n(z)$ si existe $\alpha > 0$ tal que

$$F(z) = (1 + \alpha z) P_n(z) + P_n(-z).$$

Lema 3. Sea $P_n(z) \in H_n$. Entonces su asociado $F(z) \in H_{n+1}$.

Demostración. Definamos una familia de polinomios de $F_\mu(z)$ como sigue

$$F_\mu(z) = (1 + \alpha z) P_n(z) + \mu P_n(-z); \quad \mu \in [0, 1]$$

Y demostraremos que $F_\mu(z) \in H_{n+1}, \forall \mu \in [0, 1]$.

Observemos que si $\mu = 0$, entonces $F_0(z) = (1 + \alpha z) P_n(z) \in H_{n+1}$, ya que $\alpha > 0$, entonces todas las raíces de $P_0(z)$ tiene parte real menor que cero.

Luego sí $\mu \in (0, 1]$, como las raíces de cualquier polinomio dependen continuamente de sus coeficientes, tenemos que los ceros de $F_\mu(z)$ como funciones de μ , son continuas; es decir,

$$z_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$j = 1, \dots, n + 1$ son funciones continuas.

Supongamos que existe un $\tilde{\mu} \in (0, 1]$ y un índice $1 \leq j \leq n$ tal que $\operatorname{Re} z_j(\tilde{\mu}) = 0$ y $\operatorname{Re} z_j(\mu) < 0, \forall \mu \in [0, \tilde{\mu})$.

Denotando con $z_j(\tilde{\mu}) = i\beta$ ($\beta \neq 0$), tenemos que $F_{\tilde{\mu}}(z_j) = 0$ y $F_{\tilde{\mu}}(\bar{z}_j) = 0$. Lo cual implica que

$$(1 + i\beta\alpha) P_n(i\beta) = -\tilde{\mu} P_n(-i\beta) \quad \text{y} \quad (1 - i\beta\alpha) P_n(-i\beta) = -\tilde{\mu} P_n(i\beta)$$

excluyendo $P_n(-i\beta)$ en ambas ecuaciones e igualando, tenemos que:

$$P_n(i\beta)(1 + \alpha^2\beta^2 - \tilde{\mu}^2) = 0.$$

Como $\tilde{\mu}^2 \leq 1$, entonces, $(1 + \alpha^2\beta^2 - \tilde{\mu}^2) > 0$, por tanto $P_n(i\beta) = 0$; es decir, $i\beta$ es raíz de $P_n(z)$. Contradicción. Luego, no existe $\tilde{\mu} \in (0, 1]$ tal que $\Re[z_j(\tilde{\mu})] = 0$ y así necesariamente $\Re[z_j(\mu)] < 0, \forall \mu \in (0, 1]$ y $j = 1, \dots, n+1$. Tomando $\mu = 1$ se obtiene lo deseado.

□

Lema 4. Si $F(z) \in H_{n+1}$, entonces existe $\alpha > 0$ y $P_n \in H_n$ tal que F es el asociado de P_n .

Demostración. Sea

$$F(z) = Az_0^{n+1} + A_1z^n + \dots + A_nz + A_{n+1}, \quad A_0 > 0.$$

Mostraremos que existe un $\alpha > 0$ y un polinomio $P_n(z)$ tal que

$$P_n(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n,$$

tal que

$$F(z) = (1 + \alpha z)P_n(z) + P_n(-z) \tag{8.1}$$

Si se verifica (8.1), entonces se tiene que

$$F(-z) = (1 - \alpha z)P_n(-z) + P_n(z) \tag{8.2}$$

Excluyendo $P_n(-z)$ de (8.1) y (8.2), obtenemos

$$\alpha^2 z^2 P_n(z) = (\alpha z - 1)F(z) + F(-z) \tag{8.3}$$

Sustituyendo $F(z)$ en (8.3), se tiene que

$$\alpha^2 z^2 P_n(z) = \alpha A z_0^{n+2} + (\alpha A_1 - A_0 + (-1)^{n+1} A_0) z^{n+1} + (\alpha A_2 - A_1 + (-1)^n A_1) z^n + \dots$$

$$\dots + \alpha A_n z^2 + (\alpha A_{n+1} - 2A_n) z$$

Lo cual implica que eligiendo $\alpha = \frac{2A_n}{A_{n+1}}$, los coeficientes del polinomio $P_n(z)$ se determinan unívocamente.

Definamos

$$v_\mu(z) = (\alpha z - 1) F(z) + \mu F(-z), \quad \mu \in [0, 1).$$

Mostremos que

- a) $v_\mu(z)$ tiene una raíz real positiva y $(n + 1)$ raíces con parte real negativa, $\forall \mu \in [0, 1)$;
- b) $\lim_{\mu \rightarrow 1} v_\mu(z)$ posee n raíces con parte real negativa y dos con parte real nula.

Probemos a). Si $\mu = 0$, entonces $v_0(z) = (\alpha z - 1) F(z)$. Así, $v_0(z) = 0$ si y sólo si $z = \frac{1}{\alpha}$ ó $F(z) = 0$. Por lo tanto, v_0 cumple con **a)**.

Probemos que esta disposición de las raíces de $v_0(z)$ se mantiene con respecto a los polinomios $v_\mu(z)$, $\forall \mu \in [0, 1)$.

En efecto, supongamos que existen $\tilde{\mu} \in (0, 1)$ y un $1 \leq j \leq n + 2$ tales que $z_j(\tilde{\mu}) = i\beta$ es raíz del polinomio $v_{\tilde{\mu}}(z)$. Entonces $v_{\tilde{\mu}}(i\beta) = v_{\tilde{\mu}}(-i\beta) = 0$. Así

$$(\alpha\beta i - 1) F(i\beta) + \tilde{\mu} F(-i\beta) = 0,$$

y

$$-(\alpha\beta i + 1) F(-i\beta) + \tilde{\mu} F(i\beta) = 0$$

de donde se sigue que (excluyendo $F(-i\beta)$ e igualando)

$$-(1 + \alpha\beta i)(1 - \alpha\beta i) F(i\beta) + \tilde{\mu}^2 F(i\beta) = 0,$$

o bien

$$F(i\beta) [\tilde{\mu}^2 - 1 - \alpha^2 \beta^2] = 0$$

Esto implica que $F(i\beta) = 0$ ya que $\tilde{\mu}^2 < 1$. Contradicción, pues $F(z) \in H_{n+1}$. Con esto queda probado **a**).

Probemos **b**). Sustituyendo $F(z)$ y $\alpha = \frac{2A_n}{A_{n+1}}$ en $v_\mu(z)$, obtenemos

$$v_\mu(z) = \frac{2A_n}{A_{n+1}} A_0 z^{n+2} + \dots + \left(\frac{2A_n}{A_{n+1}} - A_{n-1} + \mu A_{n-1} \right) z^2 + (2A - \mu A_n) z + A_{n+1} (\mu - 1).$$

Notemos que

$$v_1(z) = (\alpha z - 1) F(z) + F(-z),$$

por lo cual $v_1(z)$, de acuerdo a (8.3), lo podemos escribir como

$$v_1(z) = \alpha^2 z^2 P_n(z) \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{2A_n}{A_{n+1}}$$

Luego, $v_1(z)$ posee sólo dos raíces nulas ya que el término libre de $P_n(z)$ es distinto de cero. Ahora, teniendo en cuenta la disposición de las raíces de v_μ para $\mu \in [0, 1)$ y la relación existente entre las raíces y los coeficientes de un polinomio (relaciones de Cardano-Viète, ver apéndice), obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{z_j(\mu)} = -\frac{A_n(1-\mu)}{A_{n+1}(\mu-1)} = \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad \forall \mu \in [0, 1).$$

De donde se sigue

$$\sum_{j=1}^{n+2} \Re e \frac{1}{z_j(\mu)} = \frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad \forall \mu \in [0, 1) \text{ y } \lim_{\mu \rightarrow 1^-} \sum_{j=1}^{n+2} \Re e \frac{1}{z_j(\mu)} = \frac{A_n}{A_{n+1}}.$$

Esta última igualdad muestra que las raíces que tienden a cero cuando $\mu \rightarrow 1^-$, son la positiva y una con parte real negativa; ya que si fuesen dos raíces con parte real negativa las que tienden a cero, tendríamos que

$$\lim_{\mu \rightarrow 1^-} \sum_{j=1}^{n+2} \operatorname{Re} \frac{1}{z_j(\mu)} = -\infty,$$

lo cual es una contradicción.

□

Consideremos el polinomio $P_n(z)$ y supongamos que los $a_i > 0, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Formemos una matriz $n \times n$ como sigue, donde $a_i = 0$ si $i > n$

$$M_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

y sean

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} = a_n \Delta_{n-1}.$$

Teorema 5. (Criterio de Routh-Hurwitz) *Las raíces de $P_n(z)$ poseen parte real negativa si y sólo si $\Delta_i > 0, i = 1, \dots, n$.*

Demostración. (\Rightarrow) Asumamos que $P_n \in H_n$. Realicemos la prueba por inducción. Sea

$P_1(z) = a_0z + a_1$. Así $z = -a_1/a_0 < 0$ y $\Delta_1 = a_1 > 0$. Consideremos $P_2(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2$.

Luego $H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}$, así que $\Delta_1 = a_1 > 0$ y $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 > 0$.

Supongamos que para todo $P_n \in H_n$, se verifica que $\Delta_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Sea $F \in H_{n+1}$,

de acuerdo con el Lema 4, existe $\alpha > 0$ y $P_n \in H_n$ tal que

$$F(z) = (1 + \alpha z)P_n(z) + P_n(-z).$$

Por comodidad pongamos $\alpha = 2c$, donde $c > 0$. Entonces

$$F(z) = 2ca_0z^{n+1} + (a_0 + a_0(-1)^n + 2ca_1)z^n + (a_1 + (-1)^{n-1}a_1 + 2ca_2)z^{n-1} + \dots \quad (8.5)$$

$$\dots + (2a_{n-2} + 2ca_{n-1})z^2 + 2ca_nz + 2a_n.$$

Supongamos por ejemplo que n es par, el caso n impar se analiza en forma similar. De

(8.5) obtenemos que:

$$F(z) = 2ca_0z^{n+1} + (2a_0 + 2ca_1)z^n + 2ca_2z^{n-1} + \dots + (2a_{n-2} + 2ca_{n-1})z^2 + 2ca_nz + 2a_n;$$

de donde se sigue que:

$$\mathbf{M}_F = \begin{pmatrix} 2a_0 + 2ca_1 & 2ca_0 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 + 2ca_3 & 2ca_2 & 2a_0 + 2ca_1 & \dots & 0 \\ 2a_4 + 2ca_5 & 2ca_4 & 2a_2 + 2ca_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2a_n \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la segunda columna por $-\frac{1}{c}$ y sumándola a la primera; la cuarta la multiplicamos por $-\frac{1}{c}$ y la sumamos a la tercera; y así sucesivamente hasta llegar a la n -ésima columna, obtenemos

$$\mathbf{M}_F = \begin{pmatrix} 2ca_1 & 2ca_0 & 0 & \dots & 0 \\ 2ca_3 & 2ca_2 & 2ca_1 & \dots & 0 \\ 2ca_5 & 2ca_4 & 2ca_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2a_n \end{pmatrix}.$$

De donde se sigue que:

$$\tilde{\Delta}_1 = 2ca_1 = 2c\Delta_1,$$

$$\tilde{\Delta}_2 = (2c)^2 \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = (2c)^2 \Delta_2$$

⋮

$$\tilde{\Delta}_n = (2c)^n \Delta_n,$$

$$\tilde{\Delta}_{n+1} = 2a_n \tilde{\Delta}_n.$$

Teniendo en cuenta que $\Delta_j > 0, \forall j = 1, \dots, n$, se sigue que $\tilde{\Delta}_j > 0, \forall j = 1, \dots, n + 1$.

(\Leftarrow) Sea $P_n(z)$ un polinomio dado, con $a_j > 0, \forall j = 1, \dots, n$ y $\Delta_j > 0, \forall j = 1, \dots, n$. La prueba la realizaremos por inducción.

Sea $P_1(z) = a_0z + a_1$, como $\Delta_1 = a_1 > 0$, entonces $z_1 = -a_1/a_0 < 0$.

Para $n = 2$ consideremos $P_2(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2$. Luego $\mathbf{M}_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}$. Por hipótesis

$\Delta_1 = a_1 > 0$ y $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 > 0$, esto significa que $a_1, a_2 > 0$; aplicando el Corolario 1 se tiene el resultado.

Supongamos que nuestra afirmación es cierta para todos los polinomios de grado n .

Ahora sea $F(z)$ un polinomio de grado $(n + 1)$ con coeficientes positivos tal que $\tilde{\Delta}_j > 0, \forall j = 1, \dots, n + 1$.

De las fórmulas (8.3) y (8.4) se sigue que existe un polinomio $P_n(x)$ tal que

$$F(z) = (1 + \alpha z) P_n(z) + P_n(-z), \quad \text{con } \alpha = \frac{2A_n}{A_{n+1}} > 0.$$

Exactamente igual que en la prueba de la necesidad se obtiene que

$$\tilde{\Delta}_1 = 2c\Delta_1, \quad \tilde{\Delta}_2 = (2c)^2 \Delta_2, \dots, \tilde{\Delta}_n = (2c)^n \Delta_n, \tilde{\Delta}_{n+1} = 2a_n \tilde{\Delta}_n.$$

Lo cual implica que $\Delta_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Por la hipótesis inductiva obtenemos que $P_n(z) \in H_n$ y por el Lema 3 concluimos que $F \in H_{n+1}$.

□

Ejemplo 6. En el sistema

$$\begin{aligned} x' &= x - z \\ y' &= 3x - y \\ z' &= x + y - z \end{aligned}$$

tenemos:

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como los menores:

$$1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad |\mathbf{M}_3| < 0$$

no son todos positivos, entonces el sistema es inestable.

Ejemplo 7.

$$x^{(iv)} + 4x''' + 8x'' + 8x' + 4x = 4t$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

y

$$\mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Como todos los menores:

$$4 > 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 24 > 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 128 > 0, \quad |\mathbf{M}_4| > 0$$

son positivos, la ecuación es estable.

CAPÍTULO CUATRO

Sistemas Lineales Semi-Autónomos y

Sistemas Semi-Lineales

9. Capítulo 4: Sistemas Lineales Semi-Autónomos y Sistemas Semi-Lineales

9.1. Sistemas Lineales Semi-autónomos

En esta sección estudiaremos bajo que condiciones se puede establecer la estabilidad de sistemas del tipo

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{A} + \mathbf{C}(t)) \mathbf{x}(t) \quad (9.1)$$

con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{C} \in C[(t_0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n}]$.

$\mathbf{C}(t)$ representa una “perturbación” no autónoma de \mathbf{A} . Es natural esperar que si $\mathbf{C}(t)$ es, en algún sentido “pequeña” cuando $t \rightarrow \infty$, las soluciones del sistema (9.1) se comporten más o menos como las soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Teorema 6. *Si la matriz \mathbf{A} tiene todos sus autovalores con parte real negativa y*

$$\int_0^\infty \|\mathbf{C}(t)\| dt < \infty \quad (9.2)$$

entonces la solución trivial de (9.1) es asintóticamente estable.

Demostración. De (9.1) se obtiene que

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-s))\mathbf{C}(s)\mathbf{x}(s)ds$$

Fórmula que se comprueba por simple derivación, y que está sugerida por el método de variación de las constantes aplicado a $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}(t)\mathbf{x}$, contemplando $\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$ como un término no homogéneo $\mathbf{b}(t)$.

Como todos los autovalores de la matriz \mathbf{A} tienen parte real negativa, existen constantes positivas $K > 0$ y $\alpha > 0$ tales que

$$\|\exp(\mathbf{A}t)\| \leq K \exp(-\alpha t), \quad \forall t \geq 0$$

Combinando estas dos últimas relaciones se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq \|\exp(\mathbf{A}t)\| \|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t \|\exp(\mathbf{A}(t-s)) \mathbf{C}(s) \mathbf{x}(s)\| ds \\ &\leq K \exp(-\alpha t) \|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t K \|\mathbf{C}(s)\| \|\mathbf{x}(s)\| \exp(-\alpha(t-s)) ds \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \exp(\alpha t) \leq K \|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t K \|\mathbf{C}(s)\| \|\mathbf{x}(s)\| \exp(\alpha s) ds$$

Usando el Lema de Gronwall (Ver apéndice) y (9.2) se obtiene que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \exp(\alpha t) \leq K \|\mathbf{x}_0\| \exp\left(\int_0^t K \|\mathbf{C}(s)\| ds\right)$$

Lo cual implica que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq K^* \|\mathbf{x}_0\| \exp(-\alpha t), \quad \forall t \geq 0,$$

donde $K^* = K \exp\left\{\int_0^\infty K \|\mathbf{C}(s)\| ds\right\}$. Lo cual a su vez prueba nuestra afirmación.

De la demostración del Teorema anterior se obtiene fácilmente el siguiente

□

Corolario 2. 1. Si $\|\mathbf{C}(t)\| \leq \delta$, $\forall t \geq 0$, con $\delta > 0$ suficientemente pequeño y los autovalores de la matriz \mathbf{A} tienen parte real negativa, entonces la solución trivial del sistema (9.1) es uniforme asintóticamente estable.

2. Si las soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ están acotadas sobre $[0, \infty)$ y se satisface (9.2), entonces las soluciones de (9.1) también están acotadas sobre $[0, \infty)$.

9.2. Estabilidad de Sistemas Semi-Lineales

Consideremos el sistema semi lineal

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = 0, \quad \forall t > \tau, \quad (9.3)$$

donde $\mathbf{A}(t) \in C[J, \mathbb{R}^{n \times n}]$ y $\mathbf{f} \in C^1[J \times D, \mathbb{R}^n]$.

Definición 9. La solución trivial de (9.3) es exponencial asintóticamente estable, si existen constantes $K \geq 1$ y $\alpha > 0$ tales que toda solución $\mathbf{x}(t)$, con $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, satisface que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq K \|\mathbf{x}_0\| \exp(-\alpha(t - t_0)) \quad t \geq t_0$$

Proposición 3. Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{K}(t, s) = \Phi(t) \Phi^{-1}(s)$ la matriz de transición. Entonces todas las soluciones de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$ son uniformemente estables si y sólo si existe una constante $M > 0$, tal que

$$\|\mathbf{K}(t, s)\| \leq M, \quad \forall t, s: \quad 0 \leq s \leq t < \infty$$

Demostración. La demostración es consecuencia del hecho que $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{K}(t, t_0) \mathbf{x}_0$:

(\Rightarrow) Como todas las soluciones de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$ son uniformemente estables entonces la solución trivial es estable y dado $\delta > 0$ (que no depende de t_0) existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ entonces $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) < \varepsilon$. Luego, $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) \mathbf{x}_0\| \leq \|\Phi(t) \Phi^{-1}(t_0)\| \|\mathbf{x}_0\| < \|\Phi(t) \Phi^{-1}(t_0)\| \delta < \varepsilon$. Tomando $M = \varepsilon/\delta$ y considerando que este δ es válido para todo t_0 , se tendrá que

$$\|\mathbf{K}(t, s)\| \leq M, \quad \forall t, s: \quad 0 \leq s \leq t < \infty$$

(\Leftarrow) Si $\|\mathbf{K}(t, s)\| \leq M, \quad \forall t, s: \quad 0 \leq s \leq t < \infty$, en particular $\frac{\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}_0\|} \leq M$, es decir que $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq M \|\mathbf{x}_0\|$ y tomando $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, se tendrá que $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \varepsilon$, con $\varepsilon = M \|\mathbf{x}_0\|$

□

Teorema 7. *La solución trivial de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ es exponencialmente estable si y sólo si es uniforme asintóticamente estable.*

Demostración. (\Rightarrow) Notemos que exponencialmente estable implica uniforme asintóticamente estable.

(\Leftarrow) Demostremos el recíproco. Sabemos que existe $\delta > 0$, tal que $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $T = T(\varepsilon) > 0$ tal que: si $t \geq t_0 + T$, entonces $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$. Tomemos $\varepsilon > 0$ de modo que $\varepsilon = \delta/2$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta > 1$. Definamos ahora

$$\psi(t) = \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}_0\|} \left(\delta - \frac{1}{n} \right), \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Entonces $\|\psi(t_0)\| = \delta - \frac{1}{n} < \delta$ y por tanto $\|\psi(t)\| < \frac{\delta}{2}$, si $t \geq t_0 + T$. Lo cual implica

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \|\mathbf{x}_0\| \frac{\delta}{2} \left(\delta - \frac{1}{n} \right)^{-1}, \quad \text{si } t \geq t_0 + T$$

Haciendo tender $n \rightarrow \infty$, se obtiene que:

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_0\|, \quad \text{si } t \geq t_0 + T.$$

Mostremos que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \frac{\|\mathbf{x}_0\|}{2^r}, \quad \text{si } t \geq t_0 + rT, \quad r \in \mathbb{N}.$$

En efecto, por la unicidad de las soluciones se tiene que:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, t_0 + T, \mathbf{x}(t_0 + T)), \quad \forall t > \tau \tag{9.4}$$

Entonces

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(t_0 + T)\| \leq \frac{1}{2^2} \|\mathbf{x}_0\|, \quad \text{si } t \geq t_0 + 2T$$

El resto sigue por inducción.

Teniendo en cuenta que $2^{-r} = \exp(-r \ln 2)$, obtenemos $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \exp(-r \ln 2) \|\mathbf{x}_0\|$, si $t \geq t_0 + rT$, $r \in \mathbb{N}$.

Sea $t \geq t_0 + T$ arbitrario. Entonces existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 + rT \leq t < t_0 + (r + 1)T$. De donde se sigue que $(t-t_0-T)/T \leq r$ lo cual a su vez implica que $\exp(-r \ln 2) \leq \exp[-\ln 2^{(t-t_0-T)/T}]$ y por tanto

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| \exp(\ln 2) \exp\left(-\ln 2 \frac{t-t_0}{T}\right), \quad \text{si } t \geq t_0 + T \quad (9.5)$$

Supongamos ahora que $t \in [t_0, t_0 + T]$. Como la solución trivial de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$ es uniformemente estable, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M \|\mathbf{x}_0\|, \quad \text{si } t \geq t_0$$

Como $t \in [t_0, t_0 + T]$, entonces $(t-t_0)/T \leq 1$; y por tanto

$$\exp\left(-\ln 2 \frac{t-t_0}{T}\right) \geq \exp(-\ln 2) = \frac{1}{2}.$$

Luego, si $t \in [t_0, t_0 + T]$, se tiene que $1 \leq 2 \exp\left(-\ln 2 \frac{t-t_0}{T}\right)$ y por ende

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M \|\mathbf{x}_0\| \leq 2M \|\mathbf{x}_0\| \exp\left(-\ln 2 \frac{t-t_0}{T}\right) \quad (9.6)$$

Combinando (9.5) y (9.6), obtenemos que existen constantes $K \geq 1$ y $\alpha > 0$, tales que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq K \|\mathbf{x}_0\| \exp(-\alpha(t-t_0)), \quad \forall t \geq t_0.$$

Donde $\alpha = \frac{\ln 2}{T}$, $K = \max\{2, 2M\}$.

□

Teorema 8. (a) Si las soluciones de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$ son uniformemente estables y existe una función continua e integrable $m : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq m(t) \|\mathbf{x}\|, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in J \times \mathbf{D}, \quad (9.7)$$

entonces la solución trivial de (9.3) es uniformemente estable.

(b) Si las soluciones de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ son uniforme asintóticamente estables, entonces bajo la condición (9.7) siendo m una función continua y $\int_t^{t+1} m(s) ds \leq C, \forall t \geq t_0$, la solución trivial de (9.3) es uniforme asintóticamente estable.

Demostración. Probemos (a).

Sea $\mathbf{x}(t)$ la única solución de (9.3) tal que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Supongamos que $[t_0, \beta)$ es el intervalo maximal de existencia de $\mathbf{x}(t)$. Utilizando variación de parámetros, de (9.3) obtenemos que:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{K}(t, s) \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds, \quad t \in [t_0, \beta); \quad (9.8)$$

Teniendo en cuenta que la solución trivial de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ es uniforme estable, existe una constante $M > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{K}(t, t_0)\| \leq M \quad (9.9)$$

Luego, de (9.8) y (9.9) se sigue:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M \|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^t M \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\| ds, \quad t \in [t_0, \beta) \quad (9.10)$$

Combinando (9.7) y (9.10), obtenemos

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M \|\mathbf{x}_0\| + M \int_{t_0}^t m(s) \|\mathbf{x}(s)\| ds, \quad t \in [t_0, \beta) \quad (9.11)$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall a (9.11), se tiene que:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M \|\mathbf{x}_0\| \exp\left(M \int_{t_0}^t m(s) ds\right) \leq M \|\mathbf{x}_0\| \exp\left(M \int_{t_0}^{\infty} m(s) ds\right), \quad \forall t \in [t_0, \beta).$$

Esto prueba que las soluciones del sistema (9.3) son prolongables a infinito y uniformemente estables.

Probemos (b).

La prueba de (b) es análoga a la de (a), sólo se debe tener en cuenta que: si $m : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función continua y $\int_t^{t+1} m(s) ds \leq C, \quad \forall t \geq t_0$, entonces

$$\int_{t_0}^t \exp(-\alpha(t-s)) m(s) ds \leq \frac{C}{1 - \exp(-\alpha)}, \quad \forall t \geq 0, \quad \alpha > 0$$

En efecto, del teorema del valor medio para integrales se sigue que:

$$\begin{aligned} \int_{t-k-1}^{t-k} \exp(-\alpha(t-s)) m(s) ds &= \exp(-\alpha k) \int_{\xi}^{t-k} m(s) ds \\ &\leq \exp(-\alpha k) \int_{t-k-1}^{t-k} m(s) ds \leq \exp(-\alpha k) C \end{aligned}$$

donde $\xi \in [t-k-1, t-k]$. Lo cual implica que:

$$\int_{t_0}^t \exp(-\alpha(t-s)) m(s) ds \leq \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\alpha k) C = \frac{C}{1 - \exp(-\alpha)}.$$

□

CAPÍTULO CINCO

Los Métodos de Liapunov

10. Capítulo 5: Los Métodos de Liapunov

10.1. Estabilidad de Sistemas No Lineales

Ya se ha estudiado la estabilidad de sistemas lineales. Ahora pasamos a estudiar la estabilidad de sistemas no lineales autónomos de primer orden expresados en forma normal. Concretamente, sistemas de la forma

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$$

donde el término no lineal $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 en un abierto \mathbf{D} , con $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y conexo tal que $\mathbf{0} \in \mathbf{D}$.

Muchas ecuaciones diferenciales no las sabemos resolver e incluso, aunque se pudieran calcular sus soluciones, a veces no es necesario determinarlas explícitamente pues sólo se pretende conocer el comportamiento de las mismas.

El método que emplearemos para tal estudio posee la desventaja, que precisa de la construcción de ciertas funciones para las cuales no existen métodos analíticos para su construcción y todo depende de la habilidad del usuario, aunque en muchos casos el problema en consideración sugiere la forma de la función adecuada.

Vamos a ver un ejemplo en el que se manifiestan estas ideas:

Consideremos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representan las poblaciones, a lo largo del tiempo, de dos especies que compiten entre sí por el alimento y el espacio vital limitados en su microcosmos. Supongamos que las tasas de crecimiento de las poblaciones, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, están gobernadas por un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t)) \quad \text{donde} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

En la mayoría de los casos este sistema será de tal forma que no sabremos calcular sus soluciones, esto es, no podremos obtener $x_1(t)$ y $x_2(t)$, que nos dirían el número de individuos de cada especie en un tiempo t . Sin embargo, hay algunas propiedades de tipo cualitativo, que son interesantes y a las que con frecuencia pueden darse respuestas satisfactorias sin necesidad de determinar explícitamente las soluciones. Por ejemplo, consideremos las siguientes cuestiones:

1. ¿Hay valores para los cuales ambas especies coexisten en un régimen permanente? Es decir, ¿existen números α, β tales que $x_1(t) = \alpha$ y $x_2(t) = \beta$ son soluciones del sistema $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$? Si tales valores existen se les llama *valores (soluciones) de equilibrio o puntos críticos*.
2. Supongamos que las dos especies coexisten en equilibrio, e introducimos en un momento t , algunos miembros de una de las especies presentes en el microcosmos donde conviven. ¿Permanecerán las poblaciones cerca de los valores de equilibrio para todo tiempo futuro?, es decir, si $\phi(t)$ es una solución de equilibrio del sistema $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$ y $\psi(t)$ es otra solución tal que $\phi(t_0)$ está próximo a $\psi(t_0)$, ¿se verificará que $\psi(t) \rightarrow \phi(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$?
3. Si conocemos el número de individuos de cada especie en un tiempo t_0 , ¿Cuál será la evolución de las especies cuando transcurre el tiempo? Si no tienden a valores de equilibrio, ¿triunfará una de las especies?

Veremos, en este tema, que para responder a estas cuestiones no necesitamos resolver el sistema $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$. Para ello, empezaremos definiendo los principales conceptos.

Definición 10. Diremos que un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$ es un *punto de equilibrio crítico, estacionario o fijo* del sistema $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$ cuando la velocidad del sistema en ese punto sea

cero. Es decir, cuando $f(\mathbf{x}_0) = 0$.

Si \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio, la función constante $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ es una solución del sistema no lineal, pues

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0} = f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Supondremos en lo que sigue que los puntos críticos de los sistemas autónomos que consideremos están aislados, esto es, existe un entorno del punto crítico donde no hay otro punto crítico.

Además, supondremos que el punto crítico aislado a estudiar es el $\mathbf{0}$, lo cual no supone ningún tipo de restricción pues de no ser así bastará hacer un cambio de coordenadas adecuado: si \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio del sistema $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$, el cambio de variable

$$\mathbf{x} \triangleq \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$$

transforma dicho sistema en

$$\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}_0)$$

del cual $\mathbf{0}$ es un punto de equilibrio.

La pregunta que nos hacemos ahora es, dado un punto de equilibrio de un sistema no lineal, ¿cómo se comportan las trayectorias del sistema no lineal que parten de puntos cercanos al punto de equilibrio?

A grosso modo, diremos que un punto de equilibrio es estable ó asintóticamente estable cuando las trayectorias que parten de puntos suficientemente cercanos al punto de equilibrio, no se alejan de él o tienden a él, respectivamente.

Y es inestable cuando no es estable; es decir, cuando existen trayectorias que se alejan del punto de equilibrio aunque partan de puntos muy próximos.

A continuación, presentamos la definición formal:

Definición 11. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$ un punto de equilibrio del sistema $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$. Diremos que ese punto es:

- **Estable (E)** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0\| \leq \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

Aquí, $\mathbf{x}(t)$ denota a una trayectoria cualquiera del sistema.

- **Asintóticamente estable (AE)** si y sólo si es estable y, además, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0\| \leq \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0.$$

- **Inestable (I)** cuando no es estable.

A continuación, se ilustran gráficamente los anteriores conceptos:

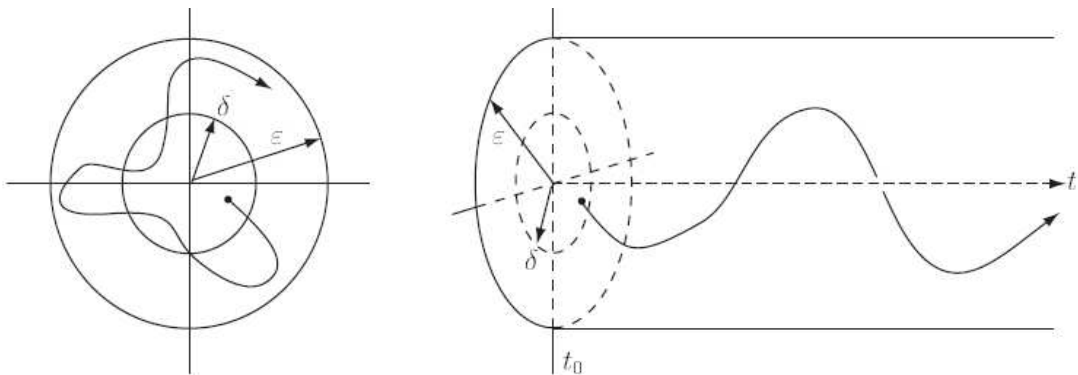


Figura 10.1: Estabilidad de Liapunov de un punto de equilibrio

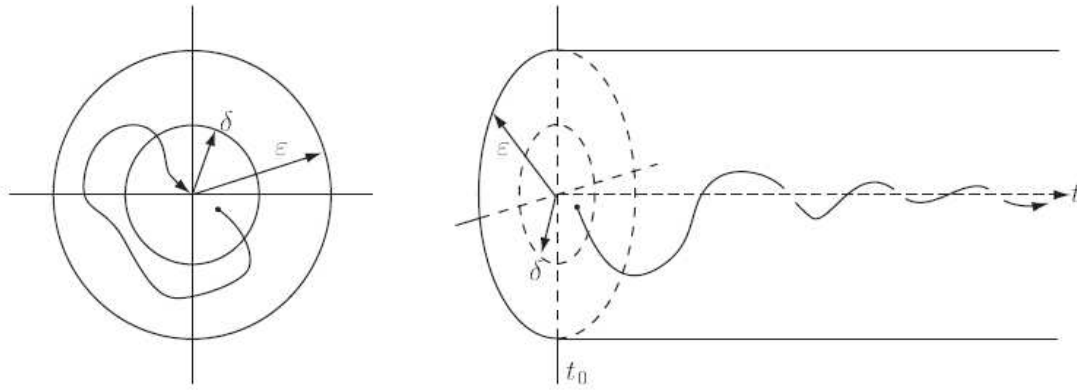


Figura 10.2: Estabilidad Asintótica de un punto de equilibrio

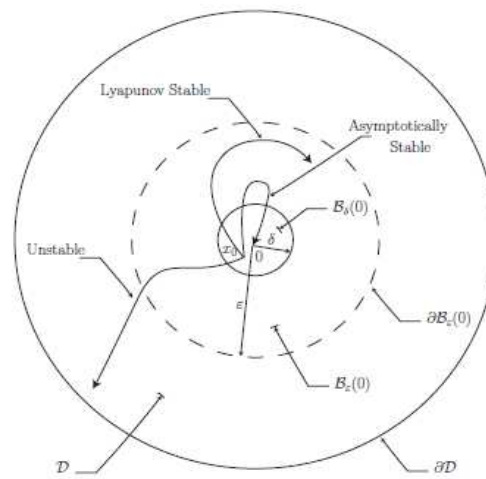


Figura 10.3: Ilustración gráfica de (E), (EA) e (I)

Estas definiciones son parecidas, pero no iguales, a las dadas en el caso de sistemas lineales. Conviene entender las diferencias.

La primera diferencia es que son los propios sistemas lineales los que se definían como inestables, estables o asintóticamente estables; pero al trabajar con sistemas no lineales son sus puntos de equilibrio los que se definen como tales. En particular, un sistema no lineal puede tener simultáneamente puntos de equilibrio estables e inestables.

Otra diferencia importante es el carácter local que tienen las definiciones en el caso no lineal, en contraposición al carácter global del caso lineal. Por ejemplo, si un sistema lineal es AE, todas sus trayectorias tienden al origen. En cambio, dado un punto de equilibrio

AE de un sistema no lineal, tan sólo podemos afirmar que tienden a él las trayectorias que empiezan suficientemente cerca de ese punto, en una zona que recibe el nombre de *cuenca de atracción*.

10.2. Linealización. Método Indirecto.

El método de linealización de Liapunov se refiere al análisis de estabilidad local.

La idea detrás del método de linealización para estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema no lineal autónomo consiste en construir un sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes que “se parezca” al sistema no lineal original en las proximidades del punto de equilibrio, con la esperanza (no siempre fundada) de que el comportamiento dinámico de ambos sistemas sea “el mismo”.

Definición 12. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$ un punto de equilibrio del sistema no lineal $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$.

Entonces, diremos que

$$A = Df(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

es la matriz del sistema linealizado de $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$ en el punto \mathbf{x}_0 .

Ahora recordamos el teorema de caracterización visto en el capítulo 2:

Teorema 9. *Sea A la matriz del sistema linealizado de un sistema no lineal en un punto de equilibrio. Entonces:*

- Si A tiene algún autovalor propio de parte real positiva, el punto de equilibrio es I.

- Si todos los autovalores propios de A tienen parte real negativa, el punto de equilibrio es AE.
- En los otros casos, la linealización no decide la estabilidad.

Observación 5. Cuando A no tiene ningún autovalor propio de parte real nula, las trayectorias del sistema no lineal en las proximidades del punto de equilibrio tienen el “mismo” aspecto que las trayectorias del sistema linealizado, según el Teorema de Hartman-Grobman (ver Apéndice).

Ejemplo 8. Determinar la estabilidad para el punto crítico $(0, 0)$ del sistema

$$\begin{cases} x' = -x - y - 3x^2y \\ y' = -2x - 4y + y \sin(x) \end{cases}$$

La matriz del sistema linealizado correspondiente es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Cuyos autovalores son $\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$ ambos con parte real negativa, por lo cual el punto crítico $(0, 0)$ del sistema es asintóticamente estable.

10.3. Funciones de Liapunov. Método Directo.

El Método de las funciones de Liapunov puede proporcionar información cuando el método de linealización no sirve para decidir la estabilidad.

Consiste en construir una función $V(\mathbf{x}) : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$ que “mide” la distancia al punto de equilibrio (por ejemplo, $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$), para después estudiar si el valor de esa función aumenta, no aumenta o disminuye a lo largo de las trayectorias del sistema, en cuyo caso el punto de equilibrio será inestable, estable o asintóticamente estable, respectivamente.

Así pues, para aplicar esta idea, necesitamos dos cosas:

- Saber que funciones $V(\mathbf{x})$ “midan” la distancia al punto de equilibrio; y
- Estudiar la variación del valor de la función $V(\mathbf{x})$ sobre las trayectorias del sistema no lineal $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$.

Empezamos por el segundo punto. Sea $\dot{V}(\mathbf{x})$ la función definida mediante la fórmula

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \triangleq \langle \nabla V(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle$$

donde $\nabla V(\mathbf{x})$ denota el gradiente de la función $V(\mathbf{x})$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar.

Ahora dada una trayectoria cualquiera $\mathbf{x}(t)$ del sistema no lineal, aplicamos la regla de la cadena para calcular la derivada de la composición $V(\mathbf{x}(t))$ respecto al tiempo t .

Usando la notación $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))$, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{V(\mathbf{x}(t))\} &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}'_1(t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}'_n(t) = \langle \nabla V(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla V(\mathbf{x}(t)), f(\mathbf{x}(t)) \rangle = \dot{V}(\mathbf{x}(t)). \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que $\mathbf{x}(t)$ es una solución del sistema no lineal. Es decir, que $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$. Por tanto, estudiando el signo de la función $\dot{V}(\mathbf{x}) = \langle \nabla V(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle$ cerca del punto de equilibrio, podremos saber si el valor de la función $V(\mathbf{x})$ aumenta o disminuye a lo largo de las trayectorias. Las siguientes definiciones hacen referencia al

signo que tiene una función alrededor de un determinado punto.

Definición 13. Diremos que una función $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es:

- *Definida positiva* en \mathbf{x}_0 cuando $V(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, pero $V(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_0$.
- *Semi-definida positiva* en \mathbf{x}_0 cuando $V(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ y $V(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_0$.
- *Definida negativa* en \mathbf{x}_0 cuando $V(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, pero $V(\mathbf{x}) < \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_0$.
- *Semi-definida negativa* en \mathbf{x}_0 cuando $V(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ y $V(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_0$.

Observación 6. Las formas cuadráticas positivas definidas (semi-definidas, etc.), es decir, funciones de la forma $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{P} \mathbf{x}$ donde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^t > \mathbf{0}$ ($\geq \mathbf{0}$, etc.) son definidas positivas (semi-definidas, etc.) con respecto a la definición anterior.

Para clarificar, en la medida de lo posible, estos conceptos, observamos que:

- Si una función es definida, también es semi-definida.
- Existen funciones que son semi-definidas, pero no son definidas. Ejemplo: $V(x, y) = x^2$.
- Existen funciones que no son ni definidas ni semi-definidas. Ejemplo: $V(x, y) = xy$.

- La función idénticamente nula es tanto semi-definida negativa como semi-definida positiva.
- Una función definida positiva en un punto “mide” la distancia al punto ya que su valor disminuye/aumenta conforme nos acercamos/alejamos del punto \mathbf{x}_0 .

La única diferencia entre funciones definidas y semi-definidas es que las segundas pueden anularse en puntos tan cercanos como queramos al punto \mathbf{x}_0 . Por ejemplo, $V(x, y) = x^2 + y^2$ es definida positiva, pero $V(x, y) = x^2$ sólo es semi-definida positiva. Estas funciones $V(\mathbf{x})$ se conocen como funciones de Liapunov.

La importancia de estos conceptos radica en los siguientes resultados, que son conocidos como los Teoremas de Liapunov.

Teorema 10. (*Estabilidad y Estabilidad Asintótica*) Sea $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ un punto de equilibrio para el sistema $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$. Sea $V : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida positiva continuamente diferenciable.

1. Si $\dot{V} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es semi-definida negativa en \mathbf{x}_0 , entonces \mathbf{x}_0 es estable.
2. Si $\dot{V} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es definida negativa en \mathbf{x}_0 , entonces \mathbf{x}_0 es asintóticamente estable.

Demostración. Supóngase que $\dot{V} : D \rightarrow \mathbb{R}$ es semi-definida negativa en \mathbf{x}_0 .

Dado $\varepsilon > 0$, consideramos la bola cerrada $\bar{B}(\mathbf{0}, \varepsilon) \subset \mathbf{D}$. Ya que su frontera $S(\mathbf{0}, \varepsilon)$ es compacta (cerrada y acotada) y V es continua, V admite un mínimo \mathbf{m} en $S(\mathbf{0}, \varepsilon)$ por el teorema de los valores extremos.

Tal mínimo es positivo porque V es definida positiva:

$$\min_{\{\mathbf{x}: \|\mathbf{x}\|=\varepsilon\}} V(\mathbf{x}) = \mathbf{m} > \mathbf{0}.$$

Ya que V es continua, en particular en el origen, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\bar{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{0}, \delta) \implies |V(\bar{\mathbf{x}}) - V(\mathbf{0})| = V(\bar{\mathbf{x}}) < \mathbf{m}.$$

Afirmamos que este δ es el “ δ correcto” requerido en la definición de estabilidad, así que cualquier trayectoria que comience en $B(\mathbf{0}, \delta)$ nunca sale de $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$.

Escogiendo $\bar{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{0}, \delta)$ como la condición inicial para $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$, y procediendo por contradicción suponemos que la trayectoria $\mathbf{x}(t; \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}})$ no está enteramente contenida en la bola $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$.

Entonces existe un tiempo T en el cual la trayectoria intersecta la frontera de $\bar{B}(\mathbf{0}, \varepsilon)$, es decir, $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}})) \geq \mathbf{m}$.

Pero la derivada de V con respecto al tiempo, esto es \dot{V} , es semi definida negativa, por tanto V es no creciente a lo largo de las correspondientes trayectorias (esto es, $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}})) \leq V(\bar{\mathbf{x}})$).

Por tanto,

$$\mathbf{m} \leq V(\mathbf{x}(t; \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}})) \leq V(\bar{\mathbf{x}}) < \mathbf{m}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, la trayectoria está contenida en $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$.

Dado $\varepsilon > 0$, hemos construido un $\delta > 0$ tal que si $\bar{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{0}, \delta)$ entonces $\mathbf{x}(t; \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}}) \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ para todo $t \geq 0$. Por tanto, $\mathbf{0}$ es un punto de equilibrio estable.

Supongamos ahora que $\dot{V} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es definida negativa en \mathbf{x}_0 .

Por supuesto, esto implica que \dot{V} es también semi definida negativa, por tanto la propiedad de estabilidad en la definición de estabilidad asintótica es satisfecha por el punto de equilibrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

Afirmamos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ ó, más explícitamente que para todo ε' tal que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, existe un cierto tiempo T tal que $\mathbf{x}(t; \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}}) \in B(\mathbf{0}, \varepsilon')$ para todo $t \geq T$.

En efecto, en vista de la estabilidad y del tiempo invariante, para todo $\varepsilon' > 0$ existe un $\delta' > 0$ tal que, si $\mathbf{x}(T) \in B(\mathbf{0}, \delta')$, entonces $\mathbf{x}(t; T, \mathbf{x}(T)) \in B(\mathbf{0}, \varepsilon')$ para todo $t \geq T$.

Por tanto, sólo necesitamos probar que existe T tal que $\mathbf{x}(T) \in B(\mathbf{0}, \delta')$.

Para proceder por contradicción, suponemos que este no es el caso.

Entonces, para todo $t \geq 0$ tenemos

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}}) \in \bar{B}(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus B(\mathbf{0}, \delta')$$

Ya que $\bar{B}(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus B(\mathbf{0}, \delta')$ es compacto, y \dot{V} es continua y definida negativa, \dot{V} alcanza un máximo negativo $-\mu$ en el.

Por tanto, $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\mu$ si $\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus B(\mathbf{0}, \delta')$ y finalmente

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t; \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}})) &= V(\bar{\mathbf{x}}) + \int_0^t \dot{V}(\mathbf{x}(\tau; \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}})) d\tau \\ &= V(\bar{\mathbf{x}}) - \mu t \end{aligned}$$

Tomando $t \rightarrow \infty$ obtenemos una contradicción, porque $V(\mathbf{x}) \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{0}, \varepsilon)$, pero el miembro derecho tiende a $-\infty$. Luego existe T tal que $\mathbf{x}(T) \in B(\mathbf{0}, \delta')$.

□

Teorema 11. (*Inestabilidad*) Consideremos el sistema no lineal $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$. Supongamos que existe una función continuamente diferenciable $V : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$ y un escalar $\varepsilon > 0$ tal que

$$V(\mathbf{0}) = 0 \tag{10.1}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \tag{10.2}$$

Además, suponemos que para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$ tal que $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ y $V(\mathbf{x}_0) > 0$. Entonces, el punto de equilibrio $\mathbf{0}$ del sistema es inestable.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que existe $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{0}, \delta)$, entonces $\mathbf{x}(t) \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$, $t \geq 0$.

Por hipótesis, existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$ tal que $V(\mathbf{x}_0) = c > 0$ y $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$. En este caso, se sigue de (10.2) que $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \geq 0$, $t \geq 0$, y por tanto, $V(\mathbf{x}(t)) \geq c > 0$, $t \geq 0$.

Así, sobre la trayectoria, $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) > 0$, $t \geq 0$, donde $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, denota la solución de la ecuación no lineal con condición inicial \mathbf{x}_0 .

Ahora, consideramos el conjunto $\mathbf{S} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{x}(t), t \geq 0\}$ y notemos que $\bar{\mathbf{S}}$ es compacta.

Ya que $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) > 0$, $t \geq 0$, se sigue que existe $d = \min_{\mathbf{y} \in \bar{\mathbf{S}}} \dot{V}(\mathbf{y}) > 0$.

Luego, ya que $V(\cdot)$ es continua sobre $\bar{B}(\mathbf{0}, \varepsilon)$ se sigue que existe $\alpha > 0$ tal que $V(\mathbf{x}) \leq \alpha$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon) \cap \mathbf{S}$. Por tanto, se sigue que

$$\alpha \geq V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_1}^t \dot{V}(\mathbf{x}(s)) ds \geq c + (t - t_1)d, \quad t \geq t_1. \quad (10.3)$$

Ya que el miembro derecho de (10.3) no es acotado se sigue que existe $t \geq t_1$ tal que $\alpha < c + (t - t_1)d$, que contradice (10.3).

Por tanto, no existe $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{0}, \delta)$, entonces $\mathbf{x}(t) \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$, $t \geq 0$.

Así, el punto de equilibrio $\mathbf{0}$ del sistema es inestable. □

Observación 7. La mayor dificultad práctica del método de Liapunov es hallar alguna función definida positiva o negativa que permita aplicar alguno de los teoremas. No es fácil. Una elección estándar es tomar la energía mecánica (cinética más potencial) como función $V(\mathbf{x})$ en los problemas mecánicos.

Otra dificultad es que el teorema solo brinda condiciones suficientes; por lo tanto, el hecho de no encontrar una función candidata a Liapunov que satisfaga las condiciones de estabilidad o de estabilidad asintótica no significa que el origen es inestable o no asintóticamente estable.

10.3.1. Interpretación Física

El Método Directo de Lyapunov permite determinar si un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable sin determinar explícitamente sus soluciones.

La idea física detrás de los teoremas de Liapunov; de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad es la siguiente :

Considerar un sistema que este “aislado” en el sentido de que no hay fuerzas externas actuando sobre él. Supongamos que podemos identificar los estados de equilibrio del sistema y que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ es uno de los puntos de equilibrio (posiblemente el único).

Ahora, supongamos que es posible definir, en algún sentido, la energía total del sistema, la cual es una función que tiene la propiedad de ser igual a cero en el origen y positiva en otra parte. En otras palabras, la energía tiene un mínimo local o global en $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$

Si el sistema, el cual está inicialmente en el estado de equilibrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, es perturbado a un nuevo estado inicial diferente de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ (donde el nivel de energía es positivo), entonces hay varias posibilidades. Si la dinámica del sistema es tal que la energía no crece con el tiempo, entonces el nivel de energía del sistema no se incrementa más allá del valor positivo inicial. Dependiendo de la naturaleza de la función de energía, esto podría ser suficiente para concluir que el equilibrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ es estable.

Si la dinámica es tal que la energía del sistema es decreciente monótonamente con el tiempo (la energía de hecho se reduce a cero), entonces esto podría ser suficiente para concluir que el equilibrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable.

Por último, si la función de energía continúa incrementándose más allá del valor inicial, entonces uno podría ser capaz de concluir que el equilibrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ es inestable.

Tal enfoque de analizar el desarrollo cualitativo de sistemas mecánicos fue inicialmente explorado por Lagrange quien mostró que el equilibrio de un sistema mecánico conservativo es estable si corresponde a un mínimo local de la función de energía potencial y que este es inestable si corresponde a un máximo local. Liapunov tuvo la habilidad de extraer de este tipo de razonamiento una teoría general que es aplicable a cualquier ecuación diferencial.

Esta teoría requiere de la búsqueda de una función que satisfaga las propiedades antes mencionadas. Hablamos de las funciones de Liapunov que son una generalización de la energía de un sistema mecánico.

10.3.2. Interpretación Geométrica en \mathbb{R}^2

Se mostró en el anteproyecto de este trabajo de investigación que si $V(\mathbf{x})$ es una función de Lyapunov, el conjunto de los \mathbf{x} tal que $V(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, para alguna constante $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ es una hipersuperficie cerrada (denominada superficie de Lyapunov o superficie de nivel) en el espacio de estados que encierra al origen.

El uso de las superficies de Liapunov hace que el teorema sea fácilmente interpretable:

Las superficies que corresponden a constantes decrecientes $\mathbf{0} < \mathbf{c}_2 < \mathbf{c}_1$, se encuentran íntegramente contenidas como lo muestra la Figura 10.4 para el caso de \mathbb{R}^2 . La condición $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ se puede interpretar geoméricamente ya que la misma significa que el producto escalar entre el gradiente de $V(\mathbf{x})$ y el campo vectorial $f(\mathbf{x})$ es negativo:

$$\nabla V(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) = \|\nabla V(\mathbf{x})\| \|f(\mathbf{x})\| \cos(\theta) \leq 0$$

donde θ es el ángulo entre $\nabla V(\mathbf{x})$ y $f(\mathbf{x})$.

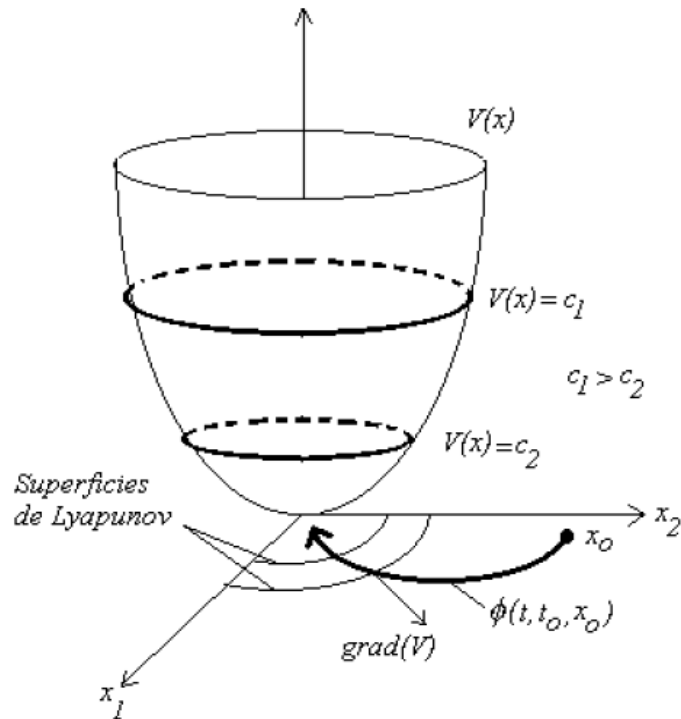


Figura 10.4: Interpretación Geométrica de las Superficies de Liapunov para el caso \mathbb{R}^2 .

Teniendo en cuenta que f es un vector tangente a la trayectoria solución, la condición $\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) \leq 0$ significa que cuando una trayectoria cruza una superficie de Liapunov, esta trayectoria lo hace hacia adentro y nunca vuelve a salir.

Además cuando $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ las trayectorias se mueven desde una superficie hacia otra interior correspondiente a un c menor.

Cuando c decrece, las superficies de Liapunov correspondientes se achican hacia el origen mostrando que las trayectorias se aproximan al origen a medida que transcurre el tiempo. En cambio, si $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ no se puede asegurar que las trayectorias converjan al origen, pero se puede concluir que el origen es estable ya que las trayectorias quedarán contenidas en algún entorno ε del origen si la condición inicial \mathbf{x}_0 está dentro de alguna superficie de Liapunov contenida en dicho entorno ε .

10.3.3. Ejemplos

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que la energía total de un cierto sistema físico es una función de Liapunov que nos permite detectar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema.

Ejemplo 9. Consideremos una partícula de masa m en movimiento cuya posición está dada por una variable escalar, x . Para describir su estado completo, necesitamos también especificar su velocidad, x' . Asumimos que el movimiento está determinado por fuerzas $F(x)$ que dependen solo de la posición y no de la velocidad (es decir, no hay fricción ó amortiguación). Ya que masa por aceleración es igual a las fuerzas actuando sobre la partícula, la ecuación diferencial que determina el movimiento está dada por $mx'' = F(x)$ con $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F(0) = 0$ y $xF(x) < 0$, si $x \neq 0$. El sistema equivalente a tal ecuación es

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \frac{1}{m}F(x_1) \end{cases}$$

Dadas las condiciones, $(x_1, x_2) = (0, 0)$ es el único punto de equilibrio del sistema. Queremos resolver para una cantidad (energía), que se conserva a lo largo de las trayectorias “integrando” la ecuación diferencial. Podemos multiplicar ambos lados de la ecuación $mx'' = F(x)$ por x' , obteniendo

$$mx''x' = F(x)x',$$

$$mx''x' - F(x)x' = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m(x')^2 - \int_0^{x_1} F(s) ds \right] = 0 \quad \text{ó}$$

$$\frac{1}{2}m(x')^2 - \int_0^{x_1} F(s) ds = E,$$

donde E es constante a lo largo de las trayectorias. La energía potencial del campo de fuerza se define como la integral negativa del campo de fuerza,

$$U(x) = - \int_0^{x_1} F(s) ds.$$

Luego,

$$E(x, x') = \frac{1}{2}m(x')^2 + U(x)$$

es constante a lo largo de las soluciones. La cantidad $E(x, x')$ es llamada la energía o energía total, y es la suma de la energía potencial $U(x)$ y la energía cinética $\frac{1}{2}m(x')^2$. Debido a que existe una función que es constante a lo largo de las trayectorias, estos sistemas son a menudo llamados sistemas conservativos. La siguiente función es una función de Liapunov asociada al sistema:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}mx_2^2 + U(x_1)$$

En efecto, $V(0, 0) = 0$ y si $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, se tiene que

$$- \int_0^{x_1} F(s) ds > 0 \text{ si } x_1 \neq 0$$

ya que la gráfica de $-F$ en una vecindad del origen es necesariamente como la de la Figura 10.5. Así que V es definida positiva. Finalmente:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}x'_2 = -F(x_1)x'_1 + mx_2x'_2 = -F(x_1)x_2 + mx_2\frac{1}{m}F(x_1) = 0$$

Así que \dot{V} es semi-definida negativa.

Por lo tanto, el punto de equilibrio $(0, 0)$ del sistema es estable.

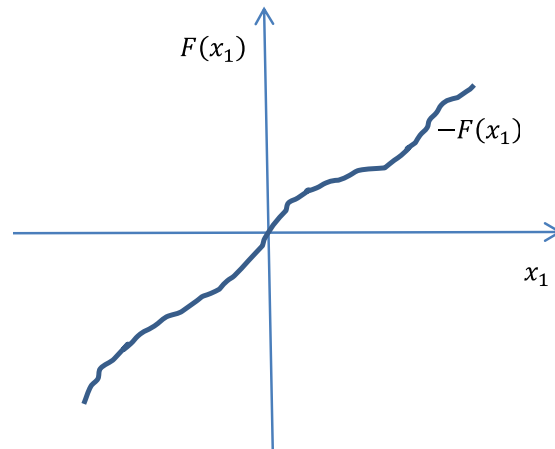


Figura 10.5: Gráfica de la función $-F(x_1)$ con $x_1F(x_1) < 0$

Ejemplo 10. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1^3 \\ x_2' = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

Definamos $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. La función $V(x_1, x_2)$ es definida positiva

$$\dot{V} = 2x_1(-x_2 - x_1^3) + 2x_2(x_1 - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4)$$

es definida negativa. Por lo tanto, el punto de equilibrio $(0, 0)$ del sistema es asintóticamente estable.

Ejemplo 11. Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2^6(t), & x_1(0) = x_{10}, \quad t \geq 0, \\ x_2' = x_2^3(t) + x_1^6(t), & x_2(0) = x_{20}. \end{cases}$$

Para examinar la estabilidad de este sistema consideramos $V(x_1, x_2) = -\frac{1}{6}x_1^6 + \frac{1}{4}x_2^4$.

Notar que sobre la línea $x_1 = 0$, $V(x_1, x_2) > 0$ en puntos arbitrariamente cerca del origen.

Calculando $\dot{V}(x_1, x_2)$ tenemos

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^5 x_1' + x_2^3 x_2' = x_1^6 + x_2^6 - x_1^5 x_2^6 + x_2^3 x_1^6.$$

Ahora, existe una vecindad \mathcal{N} del origen y $\delta \in (0, 1)$ tal que $|-x_1^5 x_2^6 + x_2^3 x_1^6| \leq \delta(x_1^6 + x_2^6)$, $(x_1, x_2) \in \mathcal{N}$, lo cual implica que $\dot{V}(x_1, x_2) \geq (1 - \delta)(x_1^6 + x_2^6) > 0$, $(x_1, x_2) \in \mathcal{N}$. Por tanto, se sigue del Teorema 11 que el punto de equilibrio $(0, 0)$ del sistema es inestable.

10.4. Aplicación a un Sistema Físico

Sistema de Nivel de Líquidos de Dos Tanques Interconectados.

El sistema bajo análisis está formado por dos tanques conectados en cascada, es decir, el flujo de salida del primer tanque es el flujo de entrada del segundo tanque, como se muestra en la Figura 10.6.

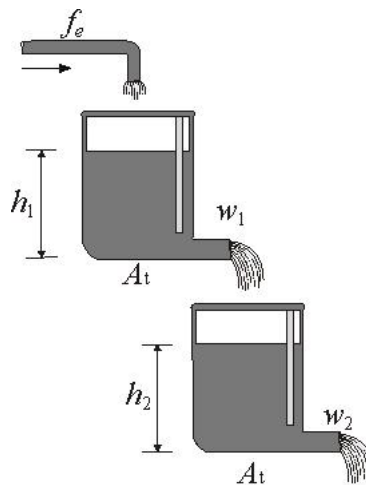


Figura 10.6: Sistema Hidráulico de Dos Tanques en Cascada

El modelo matemático del sistema está definido por:

$$\begin{cases} h_1'(t) = \frac{f_e}{A_t} - \frac{w_1}{A_t} \sqrt{h_1} \\ h_2'(t) = \frac{w_1}{A_t} \sqrt{h_1} - \frac{w_2}{A_t} \sqrt{h_2} \end{cases} \quad (10.4)$$

Donde h_1 y h_2 son los niveles de los tanques, f_e el flujo de alimentación o entrada, w_1 y w_2 son las razones del flujo de salida de cada depósito, y A_t el área de la sección transversal de cada tanque.

A. Sistema Hidráulico con entrada unitaria

Para fines prácticos del estudio tomamos los siguientes valores:

$$w_1 = w_2 = A_t = f_e = 1 \text{ (unidades) .}$$

Sustituyendo, el sistema (10.4) se convierte en:

$$\begin{cases} h_1'(t) = 1 - \sqrt{h_1} \\ h_2'(t) = \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \end{cases} \quad (10.5)$$

El siguiente paso de la metodología es encontrar los puntos de equilibrio. Para ello primero, igualamos a cero las derivadas, es decir:

$$h_1'(t) = 1 - \sqrt{h_1} = 0 \quad (10.6)$$

$$h_2'(t) = \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} = 0 \quad (10.7)$$

De la ecuación (10.6) obtenemos que $1 - \sqrt{h_1} = 0 \therefore h_1 = 1$.

De la ecuación (10.7) y sustituyendo h_1 : $\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} = 0 \therefore h_2 = 1$. De lo anterior se observa que el sistema tiene un sólo punto de equilibrio (para estas condiciones) el cual se encuentra en $(h_1 = 1, h_2 = 1)$. A continuación, se prueba la estabilidad del punto de equilibrio usando primero el método indirecto de Liapunov, es decir, usando linealización, para ello se determina el Jacobiano establecido por el Teorema 9 definido como:

$$A = \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{h=PE} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \end{pmatrix}_{h=PE}$$

Resultando:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{h_1}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{h_1}} & -\frac{1}{\sqrt{h_2}} \end{pmatrix}_{h=(1,1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Se encuentran los valores propios de A :

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(\lambda + 1)$$

Y los valores propios son:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ y } \lambda_2 = -1$$

Entonces, debido a que A no tiene autovalores nulos o imaginarios con parte real nula, tenemos por el Teorema de Hartman-Grobman (ver Apéndice) que existe un homeomorfismo h que transforma las trayectorias del sistema no lineal en las del sistema linealizado, preservando la parametrización, o sea el sentido en el que se recorren, por lo cual podemos estudiar la estabilidad del punto crítico del sistema no lineal a partir de su matriz lineal A ; y dado que, los valores propios de A son reales negativos, el punto de equilibrio es asintóticamente estable, de acuerdo al Teorema 9.

Ahora, usando el método directo de Liapunov. Debido a que el punto crítico del sistema no es $(0, 0)$, hacemos $\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}_0)$, es decir, una traslación del sistema, de tal manera que su punto crítico ahora es $(0, 0)$. El sistema resultante es:

$$\begin{cases} h_1'(t) = 1 - \sqrt{h_1 + 1} \\ h_2'(t) = \sqrt{h_1 + 1} - \sqrt{h_2 + 1} \end{cases} \quad (10.8)$$

Sea la función $V(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T P \mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde $P = \text{identidad}$, es decir:

$$V(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} (h_1^2 + h_2^2)$$

$V(\mathbf{h})$ es una función definida positiva, verificaremos que es una función de Liapunov para el sistema (10.5). Calculamos:

$$\dot{V}(\mathbf{h}) = \frac{\partial V}{\partial h_1} h_1' + \frac{\partial V}{\partial h_2} h_2'$$

La cual nos queda como:

$$\dot{V}(\mathbf{h}) = h_1 (1 - \sqrt{h_1 + 1}) + h_2 (\sqrt{h_1 + 1} - \sqrt{h_2 + 1})$$

Ahora, se debe comprobar que $\dot{V}(\mathbf{h})$ es definida negativa en $(0, 0)$. Para ello hacemos lo siguiente: Multiplicamos y dividimos ambos términos por sus respectivos conjugados, y obtenemos:

$$\dot{V}(\mathbf{h}) = \frac{h_1(-h_1)}{1 + \sqrt{h_1 + 1}} + \frac{h_2(h_1 - h_2)}{\sqrt{h_1 + 1} + \sqrt{h_2 + 1}}$$

Ahora, completando cuadrados en el numerador del segundo término, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{h}) &= \frac{h_1(-h_1)}{1 + \sqrt{h_1 + 1}} + \frac{-\left(\frac{1}{2}h_1 - h_2\right)^2 + \frac{1}{4}h_1^2}{\sqrt{h_1 + 1} + \sqrt{h_2 + 1}} \\ &= \frac{-\left(\frac{1}{2}h_1 - h_2\right)^2}{\sqrt{h_1 + 1} + \sqrt{h_2 + 1}} + h_1^2 \left\{ \frac{1}{4(\sqrt{h_1 + 1} + \sqrt{h_2 + 1})} - \frac{1}{1 + \sqrt{h_1 + 1}} \right\} \end{aligned}$$

El primer término es siempre negativo ó cero, se necesita verificar esto mismo en el segundo término; para ello nos preguntamos si:

$$4(\sqrt{h_1 + 1} + \sqrt{h_2 + 1}) > 1 + \sqrt{h_1 + 1} ?$$

Lo cual significaría que:

$$3\sqrt{h_1 + 1} + 4\sqrt{h_2 + 1} - 1 > 0$$

Y esto es cierto, si por ejemplo, se escoge $(h_1, h_2) \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, \frac{3}{4})$. Así, escogiendo $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{0}, \varepsilon)$

con $0 < \varepsilon < 1$, se tiene que $\dot{V}(\mathbf{h})$ es definida negativa en \mathcal{B} . Por tanto, aplicando del Teorema 10 se tiene que el punto de equilibrio $(0,0)$ del sistema trasladado (10.11) es asintóticamente estable. Y así también, el punto de equilibrio $(1,1)$ del sistema original (10.10) es asintóticamente estable.

El retrato de fases es el siguiente:

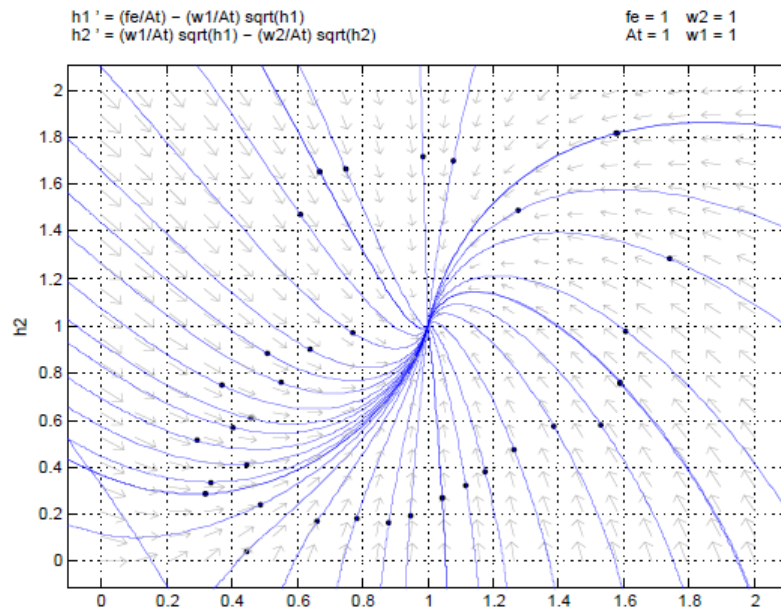


Figura 10.7: Retrato de Fases del Sistema 10.5

B. Sistema Hidráulico sin Entrada

Considérese un flujo de entrada cero y seguimos considerando el área de los dos tanques iguales y de magnitud unitaria. De igual manera consideramos el mismo el factor de apertura en las dos válvulas, con lo cual los parámetros del modelo son: $A_t = 1$, $w_1 = w_2 = 1$ y $f_e = 0$. Veremos que en este caso, podemos determinar la estabilidad de manera intuitiva.

Para el sistema sin entrada el modelo (10.4) tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} h_1'(t) = -\sqrt{h_1} \\ h_2'(t) = \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \end{cases} \quad (10.9)$$

Para encontrar el punto de equilibrio, las ecuaciones diferenciales se igualan a cero

$$-\sqrt{h_1} = 0 \quad \rightarrow h_1 = 0$$

$$\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} = 0 \quad \rightarrow h_2 = 0$$

Así, es fácil ver que el punto de equilibrio (PE) se encuentra en $(0, 0)$, el cual es diferente al del caso anterior, con lo cual se demuestra la existencia de múltiples puntos de equilibrio en un sistema no lineal.

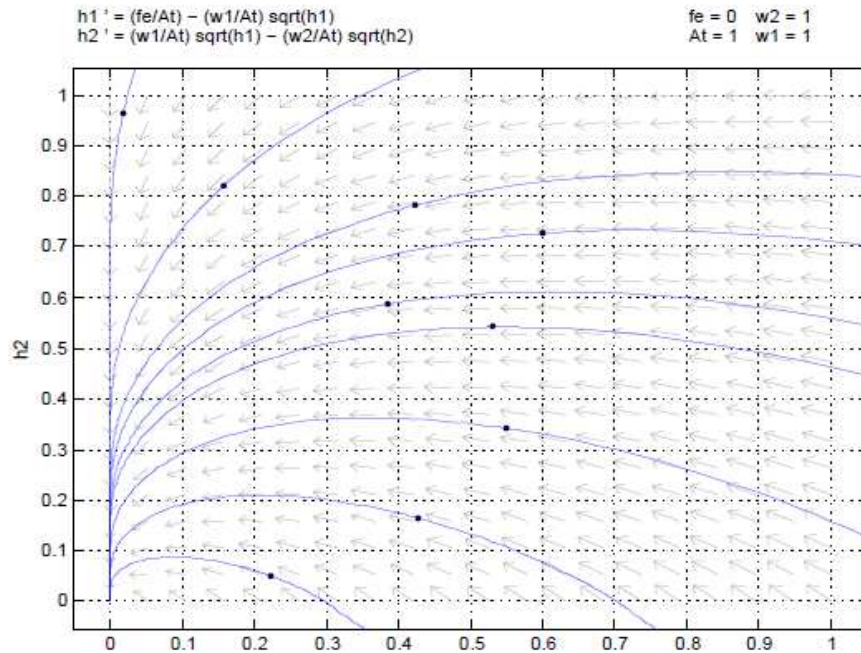


Figura 10.8: Retrato de Fases para Diferentes Condiciones Iniciales

En el retrato de fases de la la Figura 10.8 se observa la trayectoria para diferentes condiciones iniciales. Por ejemplo, para la condición inicial $h_1 = 1$ y $h_2 = 0$, el tanque 1 inicia

con una altura unitaria y durante la evolución, hacia el origen, transfiere su volumen al tanque 2 con un factor de apertura en la válvula w_1 . El tanque a su vez, desahoga su volumen quedándose finalmente ambos tanques con una altura de cero. Entonces cualquier trayectoria del retrato de fases terminará en el punto de equilibrio. Ahora comprobamos estos resultados con los métodos de Liapunov

La matriz linealizada no está definida para este sistema. Así que usamos el método directo de Liapunov:

Tomamos nuevamente $V(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$, entonces

$$\dot{V}(\mathbf{h}) = h_1(-\sqrt{h_1}) + h_2(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) = -h_1^{3/2} + h_1^{1/2}h_2 - h_2^{3/2}$$

Pero observamos que no podemos encontrar un entorno del origen en el cual $\dot{V}(\mathbf{h}) = -h_1^{3/2} + h_1^{1/2}h_2 - h_2^{3/2}$ sea definida negativa, ya que no está definida para valores negativos; y es que de hecho el modelo no tiene sentido para valores de h_1 y h_2 negativos, ya que estos representan la altura del líquido en cada tanque. Tenemos entonces que el diagrama de fases indica que el punto de equilibrio es asintóticamente estable, pero no lo podemos demostrar con los métodos de Liapunov.

C. Sistema Hidráulico con $f_e = 0.5$.

Por otro lado, para un flujo de entrada constante $f_e = 0.5$, y $A_t = 1$, $w_1 = w_2 = 1$. El punto de equilibrio con entrada de flujo constante representa la permanencia constante de los estados en un punto diferente al origen. Para demostrar la estabilidad con $f_e = 0.5$, las ecuaciones son

$$\begin{cases} h_1'(t) = \frac{1}{2} - \sqrt{h_1} \\ h_2'(t) = \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \end{cases} \quad (10.10)$$

Igualando a cero para obtener su punto de equilibrio

$$0.5 - \sqrt{h_1} = 0 \quad \rightarrow h_1 = \left(\frac{f_e}{w_1}\right)^2 = \left(\frac{0.5}{1}\right)^2 = 0.25$$

$$\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} = 0 \quad \rightarrow h_2 = \left(\frac{f_e}{w_2}\right)^2 = \left(\frac{0.5}{1}\right)^2 = 0.25$$

El diagrama de fases se muestra en la Figura 10.9. En éste se ilustra la nueva trayectoria de evolución del sistema y cómo el punto de equilibrio ha cambiado a $h_1 = 0.25$ y $h_2 = 0.25$.

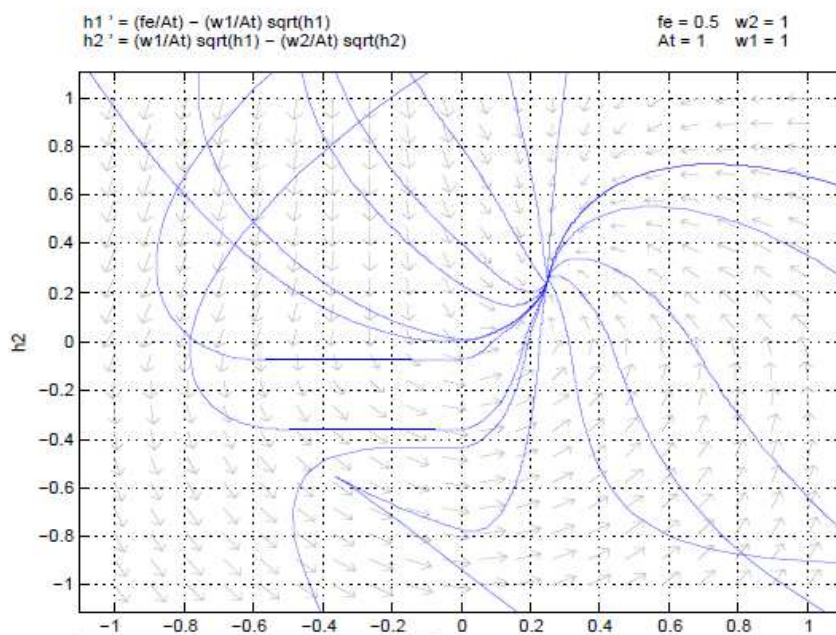


Figura 10.9: Retrato de Fases para el Sistema de Dos Tanques con $f_e = 0.5$.

De igual manera que en el primer caso, calculamos el Jacobiano y lo evaluamos en el punto de equilibrio:

$$A = \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{h=PE} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \end{pmatrix} \Big|_{h=PE} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2h_1^{1/2}} & 0 \\ \frac{1}{2h_1^{1/2}} & -\frac{1}{2h_2^{1/2}} \end{pmatrix} \Big|_{(0.25, 0.25)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios de la matriz A , desarrollando $\det(\lambda I - A)$:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 1) = (\lambda + 1)^2.$$

Se observa entonces, que los valores propios del sistema son reales y negativos, por lo tanto el punto de equilibrio es asintóticamente estable, como ya se había observado en la Figura 10.9.

Ahora, por el método directo de Liapunov Primero, se debe realizar la traslación del sistema, ya que el punto de equilibrio no es el origen. El sistema trasladado es:

$$\begin{cases} h_1'(t) = \frac{1}{2} - \sqrt{h_1 + \frac{1}{4}} \\ h_2'(t) = \sqrt{h_1 + \frac{1}{4}} - \sqrt{h_2 + \frac{1}{4}} \end{cases} \quad (10.11)$$

Y tomamos nuevamente $V(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$, entonces

$$\dot{V}(\mathbf{h}) = h_1 \left(\frac{1}{2} - \sqrt{h_1 + \frac{1}{4}} \right) + h_2 \left(\sqrt{h_1 + \frac{1}{4}} - \sqrt{h_2 + \frac{1}{4}} \right)$$

Luego, multiplicando y dividiendo ambos términos por sus respectivos conjugados, obtenemos:

$$\dot{V}(\mathbf{h}) = \frac{h_1(-h_1)}{\frac{1}{4} + \sqrt{h_1 + \frac{1}{4}}} + \frac{h_2(h_1 - h_2)}{\sqrt{h_1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{h_2 + \frac{1}{4}}}$$

Ahora, completando cuadrados en el numerador del segundo término, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{h}) &= \frac{h_1(-h_1)}{\frac{1}{4} + \sqrt{h_1 + \frac{1}{4}}} + \frac{-\left(\frac{1}{2}h_1 - h_2\right)^2 + \frac{1}{4}h_1^2}{\sqrt{h_1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{h_2 + \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{-\left(\frac{1}{2}h_1 - h_2\right)^2}{\sqrt{h_1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{h_2 + \frac{1}{4}}} + h_1^2 \left\{ \frac{1}{4\left(\sqrt{h_1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{h_2 + \frac{1}{4}}\right)} - \frac{1}{\frac{1}{4} + \sqrt{h_1 + \frac{1}{4}}} \right\} \end{aligned}$$

El primer término es siempre negativo ó cero, se necesita verificar esto mismo en el segundo término; para ello nos preguntamos si:

$$i 4 \left(\sqrt{h_1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{h_2 + \frac{1}{4}} \right) > \frac{1}{4} + \sqrt{h_1 + \frac{1}{4}} ?$$

Lo cual significaría que:

$$3\sqrt{h_1 + \frac{1}{4}} + 4\sqrt{h_2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} > 0$$

Y esto es cierto, si por ejemplo, se escoge $(h_1, h_2) \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, \frac{1}{8})$.

El aspecto de $\dot{V}(\mathbf{h})$ en $\mathcal{B}(\mathbf{0}, \frac{1}{8})$ es el siguiente:

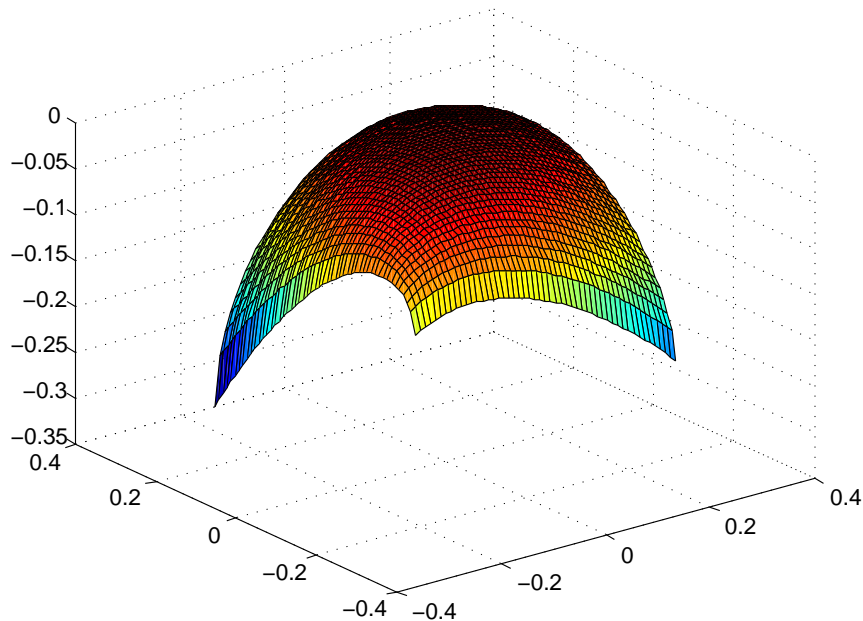


Figure 10.10: Gráfico de $\dot{V}(\mathbf{h})$ en $\mathcal{B}(\mathbf{0}, \frac{1}{4})$ con $f_e = 0.5$

Así, escogiendo $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{0}, \varepsilon)$ con $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, se tiene que $\dot{V}(\mathbf{h})$ es definida negativa en \mathcal{B} . Por tanto, aplicando del Teorema 10 se tiene que el punto de equilibrio $(0, 0)$ del sistema trasladado (10.11) es asintóticamente estable. Y así también, el punto de equilibrio $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ del sistema original (10.10) es asintóticamente estable.

11. Conclusiones

A continuación se presentan las principales conclusiones, a las que se ha llegado a lo largo del desarrollo de este proyecto y que resumen los aspectos más sobresalientes de la teoría estudiada:

1. Bajo condiciones bastante generales, se cumple que en intervalos compactos de tiempo, a datos iniciales próximos corresponden soluciones próximas.
2. Determinar la estabilidad de la solución trivial del sistema homogéneo asociado a un sistema no homogéneo lineal, es suficiente para determinar la estabilidad del resto de soluciones.
3. La teoría más completa de estabilidad se tiene para las ecuaciones y sistemas lineales con coeficientes constantes.
4. El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, es una forma sencilla de determinar la estabilidad de un sistema de coeficientes constantes; sin embargo, debido a que requiere el cálculo de determinantes, puede volverse ineficiente al aplicarlo a sistemas de gran dimensión.
5. Determinar la estabilidad de sistemas del tipo semi autónomos y semi lineales requiere de ciertas condiciones especiales adicionales, generalmente relacionadas con acotación y convergencia.
6. La metodología para el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio de sistemas no lineales desde el punto de vista de Liapunov, basados en el método directo como en el indirecto, permite obtener resultados formales de estabilidad con un cierto grado de dificultad; sobre todo al momento de la selección de la función de Liapunov.

12. Recomendaciones

A continuación se presentan algunas recomendaciones referentes a diferentes aspectos que conlleva la realización de un proyecto de este tipo; y que pueden ser de utilidad para otros estudiantes:

1. Estudiar Teoría de Estabilidad de EDOs es un tema útil e interesante, y requiere de conocimientos vistos en las materias de cálculo; por lo cual es una buena forma de mejorar la comprensión y aplicación de muchos conceptos; haciendo de este tema una buena opción para incluirse en los estudios de licenciatura.
2. A la hora de iniciar con este proyecto, se encuentra la dificultad de que no hay modelos ni alguna guía de fácil acceso que puedan orientar mejor al estudiante en su trabajo, por lo cual se recomienda la elaboración de una guía con las normas de cómo realizar un proyecto de este tipo que se ajusten a la escuela de matemática, y que se puedan poner a disposición del estudiante modelos de trabajos antes realizados especialmente en forma digital.
3. Otra forma de facilitar la elaboración de un proyecto de grado es que en materias como seminario se debería enfocar la atención en cómo elaborar el perfil de un tal proyecto, de esta manera los estudiantes que deban realizar este proceso lo harán de forma más rápida y eficiente, ya que contarán con la base para hacerlo.
4. Referente al tema de estudio hay muchas cuestiones que se pueden seguir estudiando: como la construcción de funciones de Liapunov para lo cual existen algunos criterios, las diversas aplicaciones que tiene en problemas físicos, y temas de estabilidad avanzada; los cuáles serían una buena opción para trabajos futuros.

13. Apéndice

13.1. Teorema de Punto Fijo de Banach

Definición. Espacio métrico completo.

Un espacio métrico (X, d) se dice que es completo si toda sucesión de Cauchy converge, es decir, existe un elemento del espacio que es el límite de la sucesión.

Sea E un espacio métrico completo (E, d) y $T : E \rightarrow E$ una transformación.

Definición. Punto fijo y contracción.

Se dice que $x \in E$ es un punto fijo de la transformación T , si $Tx = x$. Diremos que la aplicación $T : E \rightarrow E$ es una contracción, si existe una constante $L \in [0, 1)$, tal que $d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$, para todo x, y en E .

Teorema. *Si $T : E \rightarrow E$ es una contracción, entonces T posee un único punto fijo en E .*

13.2. Teorema de Existencia y Unicidad Local

Definición. Condición global de Lipschitz

Sea J un intervalo y \mathbf{D} un subconjunto de \mathbb{R}^n . La función $\mathbf{f} : J \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es globalmente Lipschitz, respecto a $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$, uniformemente en $t \in J$, sobre $J \times \mathbf{D}$, si existe una constante $K > 0$, tal que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq K \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad \forall (t, \mathbf{x}_i) \in J \times \mathbf{D}, \quad i = 1, 2.$$

Condición local de Lipschitz

Diremos que \mathbf{f} es una función localmente Lipschitz sobre $J \times \mathbf{D}$, si para todo punto $P \in J \times \mathbf{D}$, existe un entorno V_P del punto P , tal que la restricción de \mathbf{f} a V_P ($\mathbf{f}|_{V_P}$) es globalmente Lipschitz

Lema. *Supongamos que $\mathbf{f} \in C[J \times \mathbf{D}, \mathbb{R}^n]$. El problema (6.1) es equivalente a la resolución de la ecuación integral*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds$$

El resultado que se presenta a continuación da la existencia y unicidad de soluciones del P.V.I. (6.1) bajo condiciones bastante generales.

Teorema. *Si $f \in C[J \times \mathbf{D}, \mathbb{R}^n]$ es localmente Lipschitz en su segunda variable, uniformemente con respecto a la primera, entonces para cualquier punto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in J \times \mathbf{D}$, existe $\delta > 0$ y una única solución de (6.1) definida en $J_1 = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.*

Demostración. Elijamos constantes $r > 0$ y $s > 0$ tales que el conjunto

$$D^* = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq r, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq s\},$$

esté contenido en $J \times \mathbf{D}$. Llamemos $M = \max\{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| : (t, \mathbf{x}) \in D^*\}$, y sea $K > 0$ la constante de Lipschitz de $\mathbf{f}|_{D^*}$.

Tomemos ahora un número $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < \min\{r, s/M, 1/K\}$, y sea $J_1 = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Consideremos ahora el subconjunto C^* de $C[J_1, \mathbb{R}^n]$ formado por las funciones que satisfacen las condiciones siguientes:

a) $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$,

b) $\|\varphi(t) - \mathbf{x}_0\| \leq s, t \in J_1$

Teniendo en cuenta el Lema definamos en C^* un operador T mediante la siguiente fórmula:

$$T\varphi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in J_1.$$

Los puntos fijos del operador T son soluciones del P.V.I. (6.1). Ahora probaremos que T es una contracción de C^* en si misma. Es fácil ver que si $\varphi \in C^*$, entonces $T\varphi \in C^*$. Además, C^* es un subconjunto cerrado de $C[J_1, \mathbb{R}^n]$, por lo que C^* es un espacio métrico completo, con la métrica inducida por la norma del espacio $C[J_1, \mathbb{R}^n]$. Por otra parte, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in C^*$ y $t \in J_1$, se verifica que

$$\begin{aligned} \|T\varphi_1(t) - T\varphi_2(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\| ds \right| \\ &\leq K \left| \int_{t_0}^t \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \right| \\ &\leq K |t - t_0| \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq K\delta \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad \forall t \in J_1. \end{aligned}$$

Así que

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq K\delta \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Teniendo en cuenta la elección de δ , obtenemos que $T : C^* \rightarrow C^*$ es una contracción.

Entonces, por el teorema de punto fijo de Banach existe un único punto fijo para T en C^* , el que a su vez es la única solución del P.V.I. (6.1) definido en J_1

□

13.3. Teorema de la Contracción Uniforme

Supongamos que G es un espacio topológico y E un espacio métrico completo (E, d) y consideremos una familia de operadores $T_y : E \rightarrow E$, con $y \in G$. Diemos que T_y es una

contracción uniforme, si existe una constante $L \in (0, 1)$ tal que $d(T_y x_1, T_y x_2) \leq Ld(x_1, x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in E$ e $y \in G$.

Teorema. Si $T_y : E \rightarrow E$ es una contracción uniforme y para cada x en E , $T_y x$ es continuo en y , entonces el único punto fijo de T_y , al cual denotaremos por $g(y)$, es continuo en y . Además, si interior $G = \overset{\circ}{G} \neq \emptyset$ y $T_y x$ es continuamente diferenciable en x e y , entonces $g \in C^1 \left[\overset{\circ}{G}, E \right]$.

13.4. Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones no Prolongables

Teorema. Bajo las hipótesis del teorema de existencia y unicidad local, el P.V.I. (6.1) admite una única solución φ no prolongable, definida sobre el intervalo $J^* = (\alpha, \beta)$ llamado el intervalo maximal de existencia.

13.5. Relaciones de Cardano Viète

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = a_0 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde x_1, \dots, x_n son sus raíces. Se verifica que:

$$a_0 = (-x_1)(-x_2) \dots (-x_n) = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$$

$$a_1 = (-x_2)(-x_3) \dots (-x_n) + (-x_1)(-x_3) \dots (-x_n) + \dots + (-x_1)(-x_2) \dots (-x_{n-1})$$

$$= (-1)^{n-1} \prod_{i \neq 1} x_i + (-1)^{n-1} \prod_{i \neq 2} x_i + \dots + (-1)^{n-1} \prod_{i \neq n} x_i = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-1} \prod_{i \neq j} x_i$$

Se obtiene entonces que:

$$-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$$

13.6. Lema de Lebesgue

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico y $K \subset X$ un subconjunto, diremos que K es secuencialmente compacto si dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en K , existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a un punto de K .

Lema. Si (X, d) es un espacio métrico y $K \subset X$ un subconjunto secuencialmente compacto y $\{A_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de K , entonces existe $r > 0$ tal que para cada $x \in K$ existe $i \in I$ de modo que $B(x, r) \subset A_i$. (A este $r > 0$ se le llama número de Lebesgue del cubrimiento).

13.7. Desigualdad de Gronwall

Lema. Desigualdad de Gronwall Supongamos que $\mu, \beta \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}^+]$ y sea c una constante no negativa. La desigualdad

$$\mu(t) \leq c + \int_{t_0}^t \beta(s) ds \mu(s) ds, \quad t \geq t_0$$

implica que

$$\mu(t) \leq c \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(s) ds\right) \quad t \geq t_0$$

Una demostración de este resultado se puede ver en la página 11 de [3] (Ver Bibliografía).

13.8. Teorema de Hartman-Grobman

Teorema 12. *Sea $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un punto de equilibrio del sistema no lineal dado por $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ donde $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$, es continuamente diferenciable y \mathbf{D} es un entorno del origen. Sea la matriz Jacobiana*

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \quad \text{continua sobre } \mathbf{D}$$

Entonces, si \mathbf{A} no tiene autovalores nulos o imaginarios con parte real nula, existe un homeomorfismo \mathbf{h} , es decir una función que tiene inversa y ambas continuas, definida en un entorno abierto \mathbf{U} del origen, tal que para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{U}$, hay un intervalo abierto $\mathbf{I}_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero de modo que para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{U}$ y $t \in \mathbf{I}_0$:

$$\mathbf{h}(\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)) = \exp(\mathbf{A}(t - t_0)) \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$$

donde $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ representa la solución de $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ dada a partir de la condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ a partir del instante inicial $t = t_0$.

Es decir, que \mathbf{h} transforma las trayectorias del sistema no lineal en las del sistema linealizado, preservando la parametrización, o sea el sentido en el que se recorren.

14. Bibliografía

Referencias

- [1] Fernández Pérez, Carlos(1992). *ecuaciones diferenciales-I: ecuaciones lineales*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- [2] Fernández Pérez, Carlos(1996). *ecuaciones diferenciales-II: ecuaciones no lineales*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- [3] Lizana, Marcos (2000). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Venezuela (Mérida): Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes. Disponible en:
<https://dl.dropboxusercontent.com/u/2862723/temp/Libroedo-actualizado.pdf>
- [4] Martin Braun (1993). *Differential Equations and Their Applications*.Springer.
- [5] De Guzmán, M. (1975). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría de Estabilidad y Control*. Ed. Alhambra , Madrid.
- [6] Wassim M. Haddad VijaySekhar Chellaboina (2007). *Nonlinear Dynamical Systems and Control. A Lyapunov-Based Approach*. United States of América: Princeton University Press.

Fuentes de Internet

Referencias

- [7] *Teoría de Estabilidad de Sistemas Dinámicos*.
<http://www.dynamics.unam.edu/DinamicaNoLineal/CursosNotas/Estabilidad.pdf>
- [8] *Estabilidad en Sistemas de Ecuaciones Diferenciales*.
<http://personal.us.es/niejimjim/tema06.pdf>
- [9] F. Ramponi. *Notes on Lyapunov's theorem*.
<http://control.ee.ethz.ch/~ifalst/docs/lyapunov.pdf>
- [10] *Sistemas no Lineales*.
<http://www.pagine.ma1.upc.edu/~edis/snl.pdf>
- [11] Anzures M. Juan, Padilla G. José A. y Cuevas S. Omar. *Estabilidad de Sistemas No-lineales: Sistema de Nivel de Líquidos de Dos Tanques Interconectados*.
http://www.itson.mx/publicaciones/rieeyc/Documents/v5/art2_diciembre2008.pdf