UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

INTRODUCCIÓN AL HOMEOMORFISMO DE ROTACIÓN EN GRUPOS ABELIANOS COMPACTOS

PRESENTADO POR:

BR. SARAÍ ELIZABETH AGUILAR FLORES,
BR. YERIS GEOVANY QUINTANILLA

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

ASESORES:

LIC. MAURICIO HERNÁN LOVO
MSC.JOSÉ RENÉ PALACIOS

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, NOVIEMBRE DE 2013

AUTORIDADES

RECTOR:
ING. MARIO ROBERTO NIETO LOVO

VICE-RECTORA ACADÉMICA:
Maestra Ana María Glover de Alvarado

SECRETARIA GENERAL:
DRA. ANA LETICIA ZAVALETA DE AMAYA

FISCAL GENERAL:
LIC. FRANCISCO CRUZ LETONA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:
MSC. MARTÍN ENRIQUE GUERRA CÁCERES

VICE-DECANO:
Licenciado Ramón Arístides Paz Sanchez

SECRETARIO:
LIC. CARLOS ANTONIO QUINTANILLA APARICIO

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR:
DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES

SECRETARIA:
MSC. ALBA IDALIA CÓRDOVA CUÉLLAR

CIUDAD UNIVERSITARIA, NOVIEMBRE DE 2013

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

ASESORES DEL TRABAJO DE GRADUACIÓN

LICENCIADO MAURICIO HERNÁN LOVO CÓRDOVA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

MSC. JOSÉ RENÉ PALACIOS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, NOVIEMBRE DE 2013

DE SARAÍ

Con especial dedicatoria a mi querida e incomparable madre Norma Elizabeth Flores por su apoyo incondicional, a mi estimado padre Joel Aguilar Aguilar y a mis queridos hermanos.

Con infinito agradecimiento a DIOS por brindarnos sabiduria y entendimiento en todos estos años. Con especial agradecimiento a nuestros buenos docentes, queridos amigos y a mi compañero de tesis.

DE YERIS

Dedicada a mi abuela Maria Margarita Palacios por su apoyo incondicional, a mi madre Maria Vicenta Quintanilla y yuceel.

Con infinito agradecimiento a DIOS por brindarnos sabiduria y entendimiento en todos estos años. Con especial agradecimiento a nuestros buenos docentes, queridos amigos y a mi compañera de tesis.

Resumen

El presente trabajo es una introducción a los homeomorfismos de rotación en un grupo abeliano compacto G.
Se establecen las equivalencias entre rotación minimal, grupo monotético con generador y rotación ergódica para un $\alpha \in G$, particularizando para $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{T}^n$.
Fundamentándose los resultados en las teorías básicas de álgebra abstracta, topología y teoría de la medida, especificamente espacios de Hilbert, series de Fourier y medida de Haar.

Abstract

This work is devoted to give an introduction to the rotation homomorphism within an Abelian and compact group G.
The equivalence between the minimal rotation and the monothetic group both, generator and ergodic rotation, is established for any $\alpha \in G$. The results are also particularizing to $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{T}^n$.
The work is based on the results from the abstract algebra, topology and measure theory, specifically f rom the Hilbert spaces, Fourier series and Haar measure.

Índice general

Introducción

La Teoría de Grupos Topológicos es uno de los ejemplos más interesantes de la fusión de dos áreas distintas de la Matemática; la Teoría de Grupos y la Topología General. Como su nombre lo indica, un grupo topológico es un grupo en el que se define una topología de tal forma que se relaciona con las operaciones presentes en un grupo, requiriendo que las operaciones multiplicación y tomar inverso de grupo sean continuas.
Esta interacción genera estructuras más diversas. Aunado a lo anterior, la presencia de una estructura algebraica que incide directamente en la topología incrementa los posibles métodos de trabajo.Aunque lograr que una topología haga continuas las operaciones de grupo presenta grandes dificultades. sin embargo una vez que se tiene tal topología se consiguen resultados inesperados, elegantes y en ocasiones, impensables en un espacio topológico arbitrario.

El primer capítulo de este trabajo aborda algunos conceptos y resultados de grupos, de teoría de la medida y topología que serán fundamentales para el desarrollo de la teoría.

El segundo capítulo presenta la teoría de grupos topológicos, definiciones básicas y propiedades, entre estas, bases de vecindades, grupos topológicos cocientes y los grupos totalmente disconexos.

El capítulo tres desarrolla la teoría de la medida de Haar, enfocandose principalmente en la existencia y unicidad de esta y sus propiedades más importantes. Además se hace una introducción a la serie de Fourier de una función y su convergencia.

En el capítulo final se plantea la dinámica de grupos abelianos compactos, sus propiedades de generador monotético y ergodicidad en grupos abelianos compactos. En particular se estudia el círculo y el toro, para posteriormente hacer el análisis en grupos abelianos compactos en general.

Capítulo 1
PRELIMINARES

1.1. Teoría de grupos

Un grupo es un conjunto no vacío G equipado con la operación binaria $*$ tal que satisface los axiomas siguientes:

1. Clausura: Si $a \in G$ y $b \in G$, entonces $a * b \in G$.
2. Asociatividad: $a * (b * c) = (a * b) * c$ para todo $a, b, c \in G$.
3. Existe un elemento $e \in G$ (llamado el elemento identidad) tal que $a * e = a = e * a$.
4. Para cada $a \in G$, existe un elemento $d \in G$ (llamado el inverso de a) tal que $a * d = e$ y $d * a = e$.

Un grupo G es finito (o de orden finito) si tiene un número finito de elementos. En este caso el número de elementos de G es llamado el orden de G y es denotado por $|G|$. Un grupo con infinitos elementos se dice que tiene **orden infinito**.

En adelante si no hay peligro de confusione la operación en un grupo la denotaremos por $a * b = ab$. y denotaremos por e al elemento identidad de G.

Proposición 1.1. *Si G es un grupo y si $a, b \in G$. Entonces:*

1. G tiene un único elemento identidad.

2. *Cancelación en G:*

$$\textit{Si} \quad ab = ac, \quad \textit{entonces} \quad b = c; \quad \textit{si} \quad ba = ca, \quad \textit{entonces} \quad b = c.$$

3. *Cada elemento de G tiene un inverso único.*

Demostración. 1. El grupo G tiene un único elemento identidad: Por definición de grupo Si e y e' son ambos elementos identidad de G, entonces $ea = a = ae$ y $e'a = a = ae'$ para cada $a \in G$. La primera de estas ecuaciones con, $a = e'$, vemos que $ee' = e'$. La última ecuación, con $a = e$ vemos que $e = ee'$.Entonces $e' = ee' = e$, así que existe exactamente un único elemento identidad.

2. Por la definición de grupo, el elemento a tiene un inverso d tal que $da = e = ad$. Si $ab = ac$, entonces $d(ab) = d(ac)$. Por asociatividad y las propiedades del inverso y la identidad

$$(da)b = (a)c$$

$$eb = ec$$

$$b = c$$

El segundo argumento se prueba similarmente.

3. Suponga que d y d' son ambos inversos de de $a \in G$. Entonces $ad = e = ad'$, así que $d = d'$ (por numeral anterior). Entonces a tiene exactamente un único inverso.

□

En adelante el único inverso de un elemento a en un grupo será denotado por a^{-1}.

Proposición 1.2. *Si G es un grupo y $a, b \in G$, entonces*

1. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;

2. $(a^{-1})^{-1} = a$.

Demostración. 1. Tenemos que

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = e$$

y, similarmente,

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = e.$$

Como el inverso de ab es único por teorema (1.1). $b^{-1}a^{-1}$ es este inverso, es decir, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

2. Por definición $a^{-1}a = e$ y $(a^{-1})(a^{-1})^{-1} = e$, así que $a^{-1}a = a^{-1}(a^{-1})^{-1}$. Cancelando a^{-1} por (1.1) probamos que $a = (a^{-1})^{-1}$

□

Sea G un grupo y $a \in G$. definimos $a^2 = aa$, $a^3 = aaa$ y para cualquier entero positivo n,

$$a^n = aaa \cdots a \quad (n\text{-factores}).$$

También definimos $a^0 = e$ y

$$a^{-n} = a^{-1}a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1} \quad (n\text{-factores})$$

.

Proposición 1.3. *Sea G un grupo y sea $a \in G$. Entonces para todo $m, n \in \mathbb{Z}$*

$$a^m a^n = a^{m+n} \text{ y } (a^m)^n = a^{mn}$$

Demostración. Es una consecuencia directa de que $a^n = aa \ldots a$ (n-factores.) □

Un elemento a en un grupo se dice que tiene **orden finito** si $a^k = e$ para algún entero positivo k. En este caso, el **orden del elemento** a es el entero positivo n más pequeño tal que $a^n = e$ el orden de a es denotado $|a|$. Un elemento se dice que tiene **orden infinito** si $a^k \neq e$ para cualquier entero positivo k.
Si $A, B \subset G$, definimos AB y A^{-1} por :

$$AB = \{xy : x \in A, y \in B\}, \quad A^{-1} = \{x^{-1} : x \in A\} \quad \text{respectivamente}$$

Definición 1.1. *Un subconjunto H de un grupo G es un* ***subgrupo*** *de G si H es él mismo un grupo bajo la operación sobre G.*

Cualquier grupo G tiene dos subgrupos: el mismo G y el grupo unipuntual $\{e\}$, el cual es llamado el **subgrupo trivial**. Todos los otros subgrupos son llamados **subgrupos propios**.

Proposición 1.4. *(caracterización de subgrupos)*
Un subconjunto no vacío H de un grupo G es un subgrupo de G si cumple:

1. *si $a, b \in H$, entonces $ab \in H$; y*
2. *si $a \in H$, entonces $a^{-1} \in H$.*

Definición 1.2. *Un grupo es abeliano si y sólo si satisface el axioma de Conmutatividad: $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$.*
Denotaremos en este caso la operación por $+$.

Definición 1.3. *Sea G un grupo sea H un subgrupo de G y $a \in G$:*
definimos $aH = \{ah/h \in H\}$, $Ha = \{ha/h \in H\}$ como las clases laterales izquierda y derecha respectivamente.

Definición 1.4. *Un subgrupo N de un grupo G se dice* ***normal*** *si $Na = aN$ para cualquier $a \in G$.*

la condición $Na = aN$ no implica que $na = an$ para todo $n \in N$.

Definición 1.5. *Si N es un subgrupo de G, entonces el conjunto de clases laterales izquierdas y derechas de N en G se llama el espacio cociente de G por N y se denota por G/N*

Si $N \lhd G$. el espacio cociente G/N tiene la estructura de grupo con la operación $(aH)(bH) = abH$.

1.2. Topología

Una **topología** sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X están en τ.

2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ.

3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ.

Un **espacio topológico** es un par ordenado (X, τ), formado por un conjunto X y una topología τ sobre X , pero a menudo omitiremos hacer mención específica de (X, τ) si no existe confusión.

Definición 1.6. *Si X es un espacio topológico con una topología τ, diremos que un subconjunto U de X es un* ***conjunto abierto*** *de X si U pertenece a la colección τ.*

Dado un subconjunto A de un espacio topológico X.
El **interior** de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A.
La **clausura** de A se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.
El interior de A se denota por Int A y la clausura de A se denota mediante $\bar{A}$.
obviamente, Int A es un conjunto abierto y $\bar{A}$ es un conjunto cerrado, más aún,

$$\text{Int}A \subset A \subset \bar{A}.$$

Si A es abierto $A = \text{Int } A$, mientras que, si A es cerrado, $A = \bar{A}$.

Definición 1.7. *Si A es un subconjunto del espacio X y si x es un punto de X, diremos que x es* ***punto límite*** *(o "punto de acumulación") de A si cada entorno de x interseca a A en algún punto distinto del propio x*

Dicho de otro modo, x es un punto límite de A si pertenece a la clausura de $A - \{x\}$. El punto x puede o no pertenece a A.

Definición 1.8. *Supongamos que τ y τ' son dos topologías sobre un conjunto dado X. Si $\tau' \supset \tau$,diremos que τ' es* ***más fina*** *que τ; si τ' contiene propiamente a τ, diremos que τ' es* ***estrictamente más fina*** *que τ. También diremos que τ es* ***más gruesa*** *que τ', o* ***estrictamente más gruesa****, en ambas situaciones. Diremos que τ es* ***comparable*** *con τ' si $\tau' \supset \tau$ ó $\tau \supset \tau'$.*

Definición 1.9. *Si X es un conjunto, una **base** para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (llamados **elementos básicos**) tales que:*

1. *Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.*
2. *Si x pertenece a la intersección de los elementos básicos B_1 Y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B\cap_2$*

Proposición 1.5. *Sea $\mathcal{B}$ como la definición anterior, entonces el conjunto τ formado por todos los subconjuntos U de X, tales que para cada $x \in U$ existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \in U$ es una topología. (Con esta topología U es abierto de X).*

Demostración. Nótese que cada elememto básico es sí mismo un elemento de τ. Comprobaremos brevemente que la colección τ es, efectivamente, una topología sobre X. Si U es el conjunto vacío, satisface la condición de ser abierto trivialmente. De la misma forma, X está en τ, puesto que para cada $x \in X$ existe algún elememto básico B que contiene a x y que está contenido a su vez en X. Tomemos una familia indexada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de elementos de τ y probemos que

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$$

pertenece a τ. dado $x \in U$, existe un índice α tal que $x \in U_\alpha$. Puesto que U_α es abierto, existe un elememto básico B tal que $x \in U \subset U_\alpha$. Entonces $x \in B$ y $B \subset U$, por lo que U es abierto, por definición.
Tomemos ahora dos elememtos U_1 y U_2 de τ y probemos que $U_1 \cap U_2$ pertenece a τ. Dado $x \in U_1 \cap U_2$, elegimos un elememto básico B_1 que contenga a x tal que $B_1 \subset U_1$; elijamos también un elememto básico B_2 que contenga a x tal que $B_2 \subset U_2$. La segunda condición para una base nos permite elegir un elememto básico B_3 que contiene a x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Por tanto, $x \in B_3$ y $B_3 \subset u_1 \cap U_2$, por lo que $U_1 \cap U_2$ pertenece a τ, por definición.
Finalmente, mostramos por inducción que cualquier intersección finita $U_1 \cap U_2 \cap \ldots U_n$ de elememtos de τ está en τ. Este hecho es trivial para $n = 1$; supongamos que es cierto para $n - 1$ y probémoslo para n. Tenemos

$$(U_1 \cap \ldots \cap U_n) = (U_1 \cap \ldots \cap U_{n-1}) \cap U_n.$$

Por hipótesis, $U_1 \cap \ldots U_{n-1}$ pertenece a τ; utilizando el resultado que acabamos de probar, la intersección de $U_1 \cap \ldots U_{n-1}$ y U_n también pertenece a τ. Así hemos comprobado que la colección de conjuntos abiertos generados por una base $\mathcal{B}$ es, en efecto, una topología. $\square$

Definición 1.10. *Un espacio X se dice que tiene una base numerable en X si existe una colección numerable B de entornos de X tales que cada entorno de x contiene al menos a uno de los elementos de B.*

Definición 1.11. *Un espacio que tiene una base numerable en cada uno de sus puntos se dice que satisface el primer axioma de numerabilidad o que es $uno - numerable$.*

Definición 1.12. *Si un espacio X tiene una base numerable para su topología, entonces se dice que X cumple el segundo axioma de numerabilidad.*

Definición 1.13. *una **subbase** ζ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X.*

Proposición 1.6. *Sea ς una subbase, entonces la colección τ de todas las uniones de intersecciones finitas de elememtos de ς es una topología.*

Demostración. Debemos de mostrar que la colección $\mathcal{B}$ de todas las intersecciones finitas de elememtos de ζ es una base, y por consiguiente, la colección τ de todas las uniones de elememtos de $\mathcal{B}$ será una topología. Dado $x \in X$, pertenece a un elememto de ζ, y de aquí a un elememto de $\mathcal{B}$; esta es la primera condición para una base. Para comprobar la segunda condición, sean

$$B_1 = S_1 \cap \ldots \cap S_m \text{ y } B_2 = S'_1 \cap \ldots \cap S'_n$$

dos elememtos de $\mathcal{B}$. Su intersección

$$B_1 \cap B_2 = (S_1 \cap \ldots \cap S_m) \cap (S'_1 \cap \ldots \cap S'_n)$$

es también una intersección finita de elememtos de ζ, por lo que pertenece a $\mathcal{B}$. $\square$

Si X e Y son espacios topológicos, existe una manera natural de definir una topología sobre el producto cartesiano $X \times Y$.

Proposición 1.7. *Sean X e Y espacios topológicos con topologías τ_X y τ_Y respectivamente. Entonces la colección τ que tiene como base $\mathcal{B} = \{W/\ W = U \times V,\ U \in \tau_X\ \ y\ \ V \in \tau_Y\}$ es una topología.*

Demostración. Vamos a comprobar que $\mathcal{B}$ es una base. La primera condición es trivial, puesto que $X \times Y$ es ya un elemento básico. La segunda condición es casi igual de obvia, ya que la intersección de cualesquiera dos elememtos básicos $U_1 \times V_1$ Y $U_2 \times V_2$ es otro elemento básico. Tenemos

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times U_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

y el último conjunto es un elemento básico porque $U_1 \cap U_2$ y $V_1 \cap V_2$ son abiertos en X e Y, respectivamente □

Definición 1.14. *Sea $\pi_1 : X \times Y \to X$ definida por*

$$\pi_1(x, y) = x$$

y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ definida por

$$\pi_2(x, y) = y.$$

*Las aplicaciones π_1 y π_2 se denominan **proyecciones** de $X \times Y$ sobre su primer y segundo factor, respectivamente.*

Sean X e Y espacios topológicos y sea $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p es una **Aplicación Cociente (AC)** siempre que un subconjunto U de Y es abierto en Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X.

Esta condición es más fuerte que la continuidad; algunos matemáticos la llaman "continuidad fuerte". Una condición equivalente es requerir que un conjunto A de Y sea cerrado en Y si, y sólo si, $p^{-1}(A)$ es cerrado en X. La equivalencia de las dos condiciones se sigue de la ecuación

$$p^{-1}(Y - B) = X - p^{-1}(B).$$

Otro modo de describir una **AC** es la siguiente: Diremos que un subconjunto C de X es **saturado** (respecto a la aplicación sobreyectiva $p : X \to Y$) si C contiene a cada conjunto $p^{-1}(y)$ al que interseca. Así, C es saturado si es igual a la imagen inversa completa de un subconjunto de Y.

Definición 1.15. *Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es* ***cerrado*** *si el conjunto $X - A$ es abierto.*

Proposición 1.8. *Sea X un espacio topológico. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

- *$\emptyset$ y X son cerrados.*
- *Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.*
- *Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerradas.*

Demostración. :

- $\emptyset$ y X son cerrados porque son los complementos de los conjuntos abiertos X y $\emptyset$, respectivamente.
- Dada una colección de conjuntos cerrados $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$, aplicamos la ley de De-Morgan,
$$X - \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J}(X - A_\alpha).$$
Puesto que los conjuntos $X - A_\alpha$ son abiertos por definición, la parte derecha de la ecuación representa una unión arbitraria de conjuntos abiertos, y así, es abierto. Por lo tanto, $\bigcap A_\alpha$ es cerrado.
- De manera similar, si A_i es cerrado para $i = 1, \ldots, n$ consideraremos la ecuación
$$X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X - A_i).$$
El conjunto de la parte derecha de esta ecuación es una intersección finita de conjuntos abiertos y es, por consiguiente, abierto. De aquí, $\bigcup A_i$ es cerrado.

$\square$

Definición 1.16. *Un espacio topológico X se denomina* ***espacio de Hausdorff*** *si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X, existen entornos U_1 y U_2 de x_1 y x_2, respectivamente, que son disjuntos.*

Proposición 1.9. *Cada conjunto con un número finito de puntos en un espacio de Hausdorff X es cerrado.*

Demostración. Es suficiente probar que cada espacio unipuntual $\{x_0\}$ es cerrado. Si x es un punto de X distinto de x_0, entonces x y x_0 tienen entornos disjuntos U y V, respectivamente. Puesto que U no interseca a $\{x_0\}$, el punto x no puede pertenecer a la clausura del conjunto $\{x_0\}$. Como consecuencia, la clausura del conjunto $\{x_0\}$ es el propio $\{x_0\}$, por lo que es cerrado. $\square$

Proposición 1.10. *Si X es un espacio de Hausdorff, entonces una sucesión de puntos converge a lo sumo a un punto de X.*

Demostración. Supongamos que x_n es una sucesión de puntos en X que converge a x. Si $y \neq x$, sean U y V entornos de x e y, respectivamente. Puesto que U contiene a x_n para todo n, excepto para un número finito de valores de n, el conjunto V no puede cumplir lo mismo. Por lo tanto, x_n no puede converger a y. $\square$

Definición 1.17. *Sean X e Y dos espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es* ***continua*** *si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.*

Definición 1.18. *Sea X e Y espacios topológicos; sea $f : X \to Y$ una biyección. Si la función f y la función inversa*

$$f^{-1} : Y \to X$$

son ambas continuas, entonces f se dice que es un ***homeomorfismo****.*

Sea X un espacio topológico arbitrario. Decimos que X es homogéneo si dados cualesquiera dos puntos $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f(x) = y$.

Definición 1.19. *Sea X un espacio topológico. Una separación de X es un par U, V de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X. El espacio X se dice que es* ***conexo*** *si no existe una separación de X.*

Otro forma de enunciar lo anterior es la siguiente:
Un espacio X es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.
Recordemos que un conjunto es unipuntual si y sólo si contiene un elememto.

Definición 1.20. *Un espacio X es* ***totalmente disconexo*** *si sus únicos subespacios conexos son los conjuntos unipuntuales.*

Definición 1.21. *Una colección A de subconjuntos del espacio X se dice que cubre a X, o que es un cubrimiento de X, si la unión de los elementos de A coincide con X. Se dice que A es un cubrimiento abierto de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.*

Definición 1.22. *Si (X, τ) es un espacio topológico tal que cada cubrimiento abierto A de X podemos reducirlo a una subcolección finita que también cubra a X, entonces decimos que X es* ***compacto****.*

Proposición 1.11. *Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado del espacio compacto X. Dado un cubrimiento $\mathcal{A}$ de Y por conjuntos abiertos de X, podemos considerar el cubrimiento $\mathcal{B}$ de X uniendo $\mathcal{A}$ y el conjunto abierto $X - Y$, es decir,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\}.$$

Como X es compacto, existe alguna subcolección finita que cubre a X, si esta subcolección contiene $X - Y$ la descartamos,si no es así lo dejamos como está. La colección resultante es en todo caso una subcolección finita que cubre a Y, por lo tanto Y es compacto. □

Proposición 1.12. *Cada subespacio compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado del espacio Hausdorff X. Probaremos que el espacio $X - Y$ es cerrado. Luego Y será cerrado.
Sea x_0 un punto de $X - Y$. Vamos a demostrar que existe un entorno de x_0 que no interseca a Y. Para cada punto $y \in Y$ elijamos entornos disjuntos U_y y V_y de los puntos x_0 y y, respectivamente. (utilizando la condición de Hausdorff). La colección $\{V_y : y \in y\}$ es un cubrimiento de Y por abiertos de X; por tanto, podemos cubrir Y

con un número finito de estos conjuntos, por ejemplo $V_{y_1}, V_{y_2}, \dots, V_{y_n}$, el conjunto abierto

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

contiene a Y y es disjunto del abierto

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$$

que se forma al tomar la intersección de los correspondientes entornos de x_0, ya que si z es un punto de V, entonces $z \in V_{y_i}$ para algún i, por tanto, $z \notin U_{y_i}$ y así $z \notin U$ por tanto U es un entorno de x_0 que no interseca a Y. $\square$

El resultado que hemos establecido a lo largo de la demostración anterior nos será útil, así que vamos a enunciarlo de un modo explícito para referirnos a él.

Proposición 1.13. *Si Y es un subespacio compacto de un espacio Hausdorff X y x_0 no está en Y, entonces existen abiertos disjuntos U y V de X conteniendo a x_0 y a Y respectivamente.*

Demostración. Se deduce de la prueba de la proposición inmediata. $\square$

Un espacio X se dice **localmente compacto en** x si existe algún subespacio compacto C de X que contiene una vecindad de x. Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, X se dice simplemente que es **localmente compacto**.

Proposición 1.14. *Sea X un espacio Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si, y sólo si, dado $x \in X$, existe un entorno V de x tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subset U$.*

Demostración. Claramente esta nueva fomulación implica la compacidad local, el conjunto $C = \bar{V}$ es el compacto requerido conteniendo un entorno V de x. Para demostrar el recíproco, supongamos que X es localmente compacto; sean x un punto de X y U un entorno de x. Consideraremos la compacificación por un punto Y de X, y sea C el conjunto $Y - U$. Entonces C es cerrado en Y, así que C es subespacio compacto de Y. Aplicando el Lema 1.13 elegimos abiertos disjuntos V

y W conteniendo a x y C, respectivamente. Entonces la adherencia $\bar{V}$ de V en Y es compacta y además $\bar{V}$ es disjunto de C, así que $\bar{V} \subset U$, tal y como queriamos demostrar. □

Proposición 1.15. *La imagen de un conjunto compacto bajo una aplicación continua es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ continua con X compacto, sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento del conjunto $f(X)$ por abiertos de Y. La colección

$$\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

es un cubrimiento de X por conjuntos abiertos ya que f es continua, por tanto, un número finito de ellos, por ejemplo

$$f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_n)$$

cubren X, entonces los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ cubren $f(X)$. □

Proposición 1.16. *Sea X un espacio Hausdorff, sean V y L subconjuntos compactos disjuntos de X. Entonces existen subconjuntos abiertos disjuntos U Y V de X tales que $K \subset U$ y $L \subset V$.*

Demostración. Supongamos que K y L son diferente de vacío. Podemos encontrar casos donde K contiene exactamente un punto, es decir x. Para cada $y \in L$ existen conjuntos abiertos U_y y V_y disjuntos tales que U_y, V_y disjuntos tales que $x \in U_y$ y $y \in V_y$ (Recordemos que X es Hausdorff). Dado que L es compacto, existe una familia finita $y_1 \ldots y_n$ tales que los conjuntos $V_{y_1}...V_{y_n}$ cubren a L. Los conjuntos U y V definidos por $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ y $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$, son los conjuntos requeridos. Debemos mostrar que para cada $x \in U_x$ y $L \subset V_x$. Dado que K es compacto, existe una familia finita $x_1 \ldots X_k$ tales que $U_{x_1} \ldots U_{x_k}$ cubren a K. La prueba se completa definiendo $U = \bigcup U_{x_i}$ y $V = \bigcap V_{x_i}$ □

Proposición 1.17. *Sea X un espacio Hausdorff, sea K un subconjunto compacto de X, y sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos tales que $K \subset U_1 \bigcup U_2$, entonces existen conjuntos compactos K_1 y K_2 tales que $K_1 \subset U_1$ y $K_2 \subset U_2$*

Demostración. Sea $L_1 = K - U_1$ y $L_2 = K - U_2$. Entonces L_1 y L_2 son disjuntos y compactos y de acuero a la proposición anterior podemos separar conjuntos abiertos disjuntos, V_1 y V_2. Si definimos K_1 y K_2 por $K_1 = K - V_1$ y $K_2 = K - V_2$ entonces K_1 y K_2 son compactos y estan contenidos en U_1 y U_2 respectivamente y así K está contenido en la unión. □

Definición 1.23. *Un subconjunto A de un espacio X se dice que es* ***denso*** *en X si $\bar{A} = X$.*

Proposición 1.18. *supongamos que X tiene una base numerable. Entonces:*

- *Todo cubrimiento abierto de X contiene una subcolección numerable que recubre a X.*
- *Existe un subconjunto numerable de X que es denso en X.*

Demostración. Sea $\{B_n\}$ una base numerable para X.

- Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Para cada entero positivo n para el que sea posible, elegimos un elemento A_n de $\mathcal{A}$ que contiene al elemento B_n de la base. La colección $\mathcal{A}'$ de los conjuntos A_n es numerable, puesto que está indexada con un subconjunto J de enteros positivos, es más, recubre a X: dado un punto $x \in X$, podemos elegir un elemento A de $\mathcal{A}$ que contiene a x. Puesto que A es abierto existe un elemento B_n de la base tal que $x \in A_n \subset A$. Al pertenecer B_n a un elemento de $\mathcal{A}$, el índice n está en el conjunto J, por lo que A_n está definido; como A_n contiene a B_n contiene a x. Así, $\mathcal{A}$ es una subcolección numerable de A que recubre X.
- De cada elemento B_n no vacío de la base, elegimos un punto x_n. Sea D el conjunto formado por los puntos x_n. Entonces D es denso en X: dado cualquier punto x de X, cada elemento de la base que contenga a x intersecta a D por lo que x pertenece a $\bar{D}$.

□

Definición 1.24. *Supongamos que los conjuntos unipuntuales son cerrados en X. Entonces X es* ***regular*** *si para cada par formado por un punto x y un conjunto cerrado B que no contiene a x, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y B respectivamente.*

Definición 1.25. *El espacio X se dice **normal** si para cada par A,B de conjuntos cerrados disjuntos de X, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente.*

Proposición 1.19. *Sea X un espacio topológico donde los conjuntos unipuntuales son cerrados.*

- *X es regular si, y sólo si, dado un punto x de X y un entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\bar{V} \subset U$.*
- *X es normal si, y sólo si, dado un conjunto cerrado A y un conjunto abierto U que contiene a A, existe un conjunto abierto V que contiene a A tal que $\bar{V} \subset U$.*

Demostración.

- Supongamos que X es regular, y que el punto x y el entorno U de x están dados. si $B = X - U$ entonces B es un conjunto cerrado. Por hipótesis, existen conjuntos abiertos disjuntos V y W que contien a x y B, respectivamente. el conjunto $\bar{V}$ es disjunto de B, ya que si $y \in B$, el conjunto W es un entorno de y distinto de V. Por tanto, $\bar{V} \subset u$, como se deseaba.
- Para lo otra parte se usa exactamente el mismo argumento, simplemente se sustituye el punto x por el conjunto A.

□

1.3. Teoría de la Medida

Definición 1.26. *Sean a y b dos números reales tales que $a \leq b$. Hay cuatro intervalos de la recta con extremo izquierdo a y extremo derecho b, conocidos; $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ y $(a, b]$.*
*Llamándose **intervalo cerrado**, **intervalo abierto** e intervalos semi cerrados o semi abiertos respectivamente.*

Definición 1.27. *La longitud o medida de un intervalo I con extremo derecho a y extremo izquierdo b de la recta real es el número real*

$$\mu(I) = b - a.$$

Definición 1.28. *En $\mathbb{R}^n$ se llama intervalo a cada conjunto $I \subseteq \mathbb{R}^n$ que pueda expresarse como el producto cartesiano de n intervalos de la recta. Es decir, I es un intervalo de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si existen intervalos de la recta $I_1 \ldots I_n$ tales que*

$$I = I_1 X \ldots X I_n; \quad I_j \subset R, j = 1, \ldots, n$$

.

Un intervalo cuyos lados tienen todos la misma longitud se llama un cubo.

Definición 1.29. *Un conjunto $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ se llama un* ***conjunto elemental*** *si existen intervalos disjuntos $I_1, \cdots I_n$ del espacio $\mathbb{R}^n$; es decir, $I_j \subset R^n, j = 1, \ldots, n$, tales que:*

$$A = \bigcup_{k=1}^{N} I_k.$$

De lo anterior se sigue que la unión de dos conjuntos elementales disjuntos es un conjunto elemental. Es decir que si

$$A = \bigcup_{k=1}^{N} I_k \text{ y } B = \bigcup_{i=1}^{M} J_i$$

son conjuntos elementales, se sigue que

$$A \cap B = \bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{M} (I_k \cap J_i)$$

En general, cualquier intersección finita de conjuntos elementales es un conjunto elemental.

Proposición 1.20. *Si A es un conjunto elemental de $\mathbb{R}^n$ y B es un conjunto elemental de $\mathbb{R}^m$, entonces $A \times B$ es un conjunto elemental de $\mathbb{R}^{n+m}$.*

Demostración. Sean

$$A \cap B = \bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{M} (I_k \cap J_i),$$

donde los I_k intervalos son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^n$, en tanto que los J_i son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^m$. Por un lado tenemos

$$A \cap B = \bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{M} (I_k \cap J_i).$$

Por otro, los productos $I_k \times J_i$ son intervalos de $\mathbb{R}^{n+m}$ que forman una familia disjunta, pues si $k \neq k'$ o bien $i \neq i'$, se verifica

$$(I_k \times J_i) \cap (I_{k'} \times J_{i'}) = (I_k \cap J_i) \times (I_{k'} \cap J_{i'}) = \emptyset.$$

$\square$

Definición 1.30. *Sean $J_1 \dots J_n$ intervalos de la recta tales que $I = J_1 \times \cdots \times J_n$ la* ***medida*** *o* ***volumen*** *de I se define por medio de la fórmula:*

$$\mu(I) = \mu(J_1) \dots \mu(J_n).$$

Es decir, la medida de un intervalo de $\mathbb{R}^n$ es el producto de la longitud o medida de sus lados.

Proposición 1.21. *Si el intervalo I es la unión de los intervalos disjuntos $I_1, I_2, \cdots I_N$, entonces $\mu(I) = \mu(I_1) + \mu(I_2) + \cdots \mu(I_N)$.*

Demostración. Hagamos la demostración por inducción.
Si $N = 2$, pues la única manera de descomponer el intervalo $I = J_1 \times J_2 \times \cdots J_n$ como unión de dos intervalos disjuntos I_1 e I_2 consiste en dividir uno de sus lados J_k en dos intervalos disjuntos J_k' y J_k''. Si por simplicidad en la notación suponemos $k = 1$, entonces

$$I_1 = J_1' \times J_2 \times \dots \times j_n \quad I_2 = J_1'' \times J_2 \times \dots \times j_n$$

de donde

$$\begin{aligned} \mu(I) &= \mu(J_1)\mu(J_2) \dots \mu(J_n) \\ &= [\mu(J_1') + \mu(J_1'')]\mu(J_2) \dots \mu(J_n) \\ &= \mu(I_1) + \mu(I_2). \end{aligned}$$

La demostración en general se realiza por inducción sobre N del, modo siguiente: puesto que I_1 e I_2 son disjuntos, existe un hiperplano de ecuación $x_k = c$ que deja al intervalo I_1 completamente contenido en un semiespacio S_1 de los él determina, y el intervalo I_2 el semiespacio complementario $S_2 = \mathbb{R}^n - S_1$.
Si para cada intervalo J del espacio $\mathbb{R}^n$, ponemos

$$J' = J \cap S_1 \quad \text{y} \quad J'' = J \cap S_2$$

tendremos $\mu(J) = \mu(J') + \mu(J'')$; además,

$$I' = I_1, I'' = \emptyset, I_2' = \emptyset, I_2'' = I_2,$$

de donde, recordando que $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_N$, resulta

$$I' = I_1 \cup I_3' \cup \ldots I_N', \quad I'' = I_2 \cup I_3'' \cup \ldots \cup I_N''.$$

Suponiendo que (proposición 1.21) ha sido demostrado para descomposiciones de un intervalo cualquiera en $N - 1$ intervalos disjuntos, tendremos

$$\begin{aligned}\mu(I) &= \mu(I') + \mu(I'') \\ &= \mu(I_1) + \mu(I_3') + \ldots \mu(I_N') + \mu(I_2) + \mu(I_3'') + \ldots + \mu(I_N'') \\ &= \mu(I_1) + \mu(I_2) + \ldots + \mu(I_N).\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada la propiedad aditiva de la medida de intervalos. □

Si el conjunto elemental A del espacio $\mathbb{R}^n$ es la unión de los intervalos disjuntos $I_1, I_2, \ldots I_N$ de dicho espacio, llamaremos **medida** de A al número

$$\mu(A) = \mu(I_1) + \mu(I_2) + \ldots + \mu(I_N).$$

La definición es correcta, pues si $J_1, J_2, \ldots J_M$ es otra sucesión finita de intervalos disjuntos cuya unión es A, entonces cada intervalo I_k de la descomposición anterior es la unión de los intervalos disjuntos $I_k \cap J_i (i = 1, 2, \ldots, M)$ y análogamente, cada intervalo J_i es la unión de los intervalos disjuntos $I_k \cap J_i (k = 1, 2, \ldots, N)$, y en virtud de (proposición 1.21)

$$\sum_{k=1}^{N}\mu(I_k)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{I=1}^{M}\mu(I_k\cap J_i)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\mu(I_k\cap J_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{M}\mu(J_i)$$

Es decir, el número $\mu(A)$ no depende de la representación particular de A usada para calcularlo.
Como consecuencia inmediata de la definición, tenemos:

Proposición 1.22. *Si el conjunto elemental A es la unión de los conjuntos elementales disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_N$, entonces*

$$\mu(A)=\mu(A_1)+\mu(A_2)+\ldots\mu(A_N).$$

La siguiente propiedad es una consecuencia también inmediata de la que acabamos de enunciar.

Proposición 1.23. *Si el conjunto elemental A está contenido en el conjunto elemental B, entonces $\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A)$; en particular, $\mu(A)\leq\mu(B)$.*

Demostración. En efecto, puesto que $B=A\cup(B-A)$, en virtud de (proposición 1.22) tendremos

$$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A),$$

lo cual demuestra la proposición. □

Definición 1.31. *Diremos que un conjunto U es σ-**elemental** si existe una sucesión de subconjuntos elementales A_k $(k=1,2,\ldots)$ disjuntos dos a dos, tal que*

$$U=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

*La medida del conjunto σ-**elemental** U se define por la fórmula*

$$\mu(U)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\mu(A_k),$$

En particular la $\mu(\emptyset) = 0$
Para cada subconjunto E del espacio $\mathbb{R}^n$, definimos la **medida exterior** de E por medio de la fórmula

$$\mu^*(E) = inf\{\mu(U) : U \supset E\}.$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los conjuntos σ-elementales U que contienen al conjunto E.

Definición 1.32. *Un conjunto E se llama medible si para cada conjunto A se tiene $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$*

Definición 1.33. *Si E es un conjunto medible, se define la medida de Lebesgue de E, $\mu(E) = \mu^*(E)$.*

Definición 1.34. *Una colección de conjuntos $\sum$ se llama una σ-algebra , si verifica las siguientes condiciones:*

1. $\emptyset \in \sum$.
2. *La unión de cualquier sucesión (E_k) de miembros de $\sum$ es un miembro de $\sum$.*
3. *El complemento de cada miembro de $\sum$ es un miembro de $\sum$.*

Observación 1.1. *Si $\sum$ es una σ - álgebra, entonces:*

- $\mathbb{R}^n = \emptyset^{\complement}$ *es un miembro de* $\sum$.
- *La intersección de cualquier colección (E_k) de miembros de σ es un miembro de σ.*

Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, denotemos por $\sigma(\mathcal{C})$ a la intersección de todas las σ-álgebras $\sum$, tales que $\mathcal{C} \subset \sum$ (por lo menos hay una, ya que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$).
Así, tenemos:

1. $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$.
2. Si $\sum$ es una σ-álgebra que verifica $\mathcal{C} \subset \sum$, entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sum$

Es decir, $\sigma(\mathcal{C})$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$.

Definición 1.35. *La colección de subconjuntos $\sigma(\mathcal{C})$ se llama la σ - álgebra generada por la colección $\mathcal{C}$.*

Definición 1.36. *La σ - álgebra $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I})$ generada por la colección de los intervalos en $\mathbb{R}^n$, es decir, $\sigma(\mathcal{I})$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{I}$, se llama la σ-algebra de Borel. Los miembros de $\mathcal{B}$ se llaman conjuntos borelianos.*

Para cualquier conjunto G tenemos, si τ es una topología sobre G se definen los borelianos de la siguiente forma:

Definición 1.37. *La σ - álgebra $\mathcal{B} = \sigma(\tau)$ generada por la colección de los abiertos en G, es decir, $\sigma(\tau)$ es la mínima σ-álgebra que contiene a τ, se llama la σ-algebra de Borel. Los miembros de $\mathcal{B}$ se llaman conjuntos borelianos.*

Definición 1.38. *Sea X un conjunto. Un espacio medible es un par ordenado $(X, \mathcal{B})$ tal que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.*

Definición 1.39. *Una medida μ en el espacio medible $(X, \mathcal{B})$ es una función no negativa definida para cada $A \in \mathcal{B}$ que satisface: i) $\mu(\emptyset) = 0$ ii) $\mu((\bigcup_{i=1}^{\infty})(E_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ para cualquier colección numerable de conjuntos disjuntos $E_i \subset \mathcal{B}$.*

Proposición 1.24. *Si $A, B \in \mathcal{B}$ y $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$*

Demostración. $B = A \cup (A^c \cap B)$ y esta unión es disjunta. Por lo tanto $\mu(B) = \mu(A) + \mu(A^c \cap B) \geq \mu(A)$ □

Definición 1.40. *Un conjunto $E \subset \mathcal{B}$ es de medida σ-finita si E es la colección numerable de conjuntos con medida finita en $\mathcal{B}$. Un espacio $(X, \mathcal{B}, \mu)$ se llama σ-finito si X tiene medida σ-finita*

Definición 1.41. *Un espacio de medida se llama completo si todo subconjunto de un conjunto de medida cero está en $\mathcal{B}$ (Es decir, es medible.) En este caso, también decimos que μ es una medida completa.*

Definición 1.42. *Si μ^* es una medida exterior definida en X y $E \subset X$, E se llama μ^* medible si $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ para todo $A \subset X$*

Como $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.Entonces E es medible si y sólo si $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap) + \mu^*(A \cap E^c)$ para todo $A \subset X$ con $\mu^*(A) < \infty$

Proposición 1.25. *(Teorema de Carathéodory 1918) Si μ^* es una medida exterior definida en X, la colección $\mathcal{C}$ de conjuntos μ^*-medibles es una σ-álgebra y la restricción de μ^* a $\mathcal{C}$ es una medida completa.*

Demostración. Puesto que la definición anterior es simétrica, $E \subset \mathcal{C}$ implica $E^c \in \mathcal{C}$. Si $E, F \in \mathcal{C}$ y $A \subset X$, por sub aditividad:

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \cap E \cap F) \\ &\quad + \mu^*(A \cap E \cap F^c) + \mu^*(A \cap E^c \cap F) + \mu * (A \cap E^c \cap F^c) \\ &\quad \geq \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^c).\end{aligned}$$

Luego $E \cup F \in \mathcal{C}$ es cerrado por uniones finitas. También, si $E \cap F \neq \mu^*(E \cup F) = \mu^*((E \cup \cup F) \cap E) + \mu^*((E \cup \cup F) \cap E^c) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$ Por lo tanto tenemos que, para toda colección finita de conjuntos disjuntos $E_j j = 1^n$ en $\mathcal{C}$, $\mu * (\bigcup_j = 1^n E_j) = \sum_j = 1^n \mu * (E_j)$. Si $E_j j = 1^\infty$ es una colección numerable de conjuntos medibles, definimos $F_n = E_n \bigcap (\bigcup_j = 1^n - 1 F_j)^c$. F_n es medible para cada n, $\bigcup E_n = \bigcup F_n$, y la colección F_n es disjunta. Luego sólo debemos demostrar que $\mathcal{C}$ es cerrado por uniones numerables disjuntas. Sea A_j una colección numerable de conjuntos disjuntos en $\mathcal{C}$. Se define $B_n = \bigcup_j = 1^n A_j$ y $B = \bigcup_j = 1^\infty A_j$. Para cada $E \subset X$ $\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n - 1)$. Por inducción, tenemos que $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_j = 1^n \mu^*(E \cap A_j)$.Entonces $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n + \mu^*(E \cap B_n^c) \geqslant \sum \mu^*(E \cap A_j \cap) + \mu^*(E \cap B^c)$, y , si $n \longrightarrow \infty$, tenemos que $\mu^*(E) \geqslant \sum \mu^*(E \cap A_j + \mu^*(E \cap B^c)) \geqslant \mu^*(\bigcup (E \cap A_j)) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$. O sea, $B \in \mathcal{B}$. Si se toma $E = \bigcup A_j$ (es decir,B), se tiene que

$$\mu^*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*((\bigcup_{i=1}^{\infty}) \bigcap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Finalmente, si $\mu^*(A) = 0$, para cada $E \in X$, $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leqslant \mu^*(E)$.Luego $A \in \mathcal{C}$. Es decir, μ^* restringido a $\mathcal{C}$, es completo. $\square$

Definición 1.43. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Diremos que μ en los* *borelianos $\mathcal{B}(X)$ es regular interior en $E \in B(X)$ si*

$$\mu(E) = \sup \mu(K) : K \ \ compacto \ \ y \ \ K \in E$$

. Diremos que es regular exterior en E si

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(A) : A \ \textbf{\textit{abierto}} \ \ \textbf{\textit{y}} \ \ E \subset A\}$$

Definición 1.44. *μ es regular si es finita en los compactos*

Consideraremos funciones f definidas sobre el espacio $\mathbb{R}^n$, con valores en la recta extendida $\overline{\mathbb{R}}$, de modo que $-\infty$ y $+\infty$ son posibles valores de f.
Para cada número real a, indicaremos por $\{f > a\}$ (léase: el conjunto donde f es mayor que a) al conjunto

$$\{f > a\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\} = f^{-1}((0, \infty]).$$

Análogamente se definen los conjuntos

$$\{f \geq a\}, \quad \{f < a\}, \quad \{f \leq a\}, \tag{1.1}$$

que corresponden, respectivamente, a las desigualdades $f(x) \geq a$, $f(x) < a$ y $f(x \leq a)$. El símbolo $\{f = a\}$ indica el conjunto formado por todos los puntos donde f toma el valor a.
Diremos que f es una función **medible** si para cada número real a, el conjunto donde f es mayor que a es un subconjunto medible del espacio $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.26. *Si f es medible y J un intervalo cualquiera de $\mathbb{R}$, entonces $f^{-1}(J)$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$*

Demostración. Observemos que la clase de conjuntos

$$\mathcal{S} = \{S : S \subset \mathbb{R}^n, \ f^{-1}(S) \ \text{es} \ \ \text{medible}\}$$

es una σ- álgebra de conjuntos de $\mathbb{R}$, en virtud de las fórmulas

$$f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(S_k), \quad f^{-1}(\mathbb{R} - S) = f^{-1}(\mathbb{R}) - f^{-1}(S).$$

Como $\mathcal{S}$ contiene a la clase $\mathcal{I}_1$ formada por todos los intervalos de la recta, se sigue que la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_1 = \sigma(\mathcal{I}_1)$ está contenida en $\mathcal{S}$. $\square$

Funciones simples.

La función **característica** $\mathcal{X}_E$ de un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ se define por medio de la fórmula

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Es fácil demostrar que $\mathcal{X}_E$ es medible con respecto a $\sum$ si y sólo si $E \in \sum$.
Una función medible y finita $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama una función **simple** si el conjunto de todos sus valores es finito: Es decir, si σ es medible y la imagen $\sigma(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$.
Toda función simple es una combinación lineal de funciones características de conjuntos medibles y recíprocamente, toda función de esta forma es una función simple.
Toda función que verifique que $f \geq 0$ se llama **no negativa**, toda función medible no negativa es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples no negativas.

Integral de funciones no negativas.

Si E es un subconjunto del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no negativa sobre E, para cada descomposición del conjunto E como unión finita de conjuntos disjuntos E_1, $E_2, \ldots E_n$, calculemos la suma

$$\sum_{i=1}^{n} v_i m(E_i).$$

donde v_i es el ínfimo de los valores que toma la función f sobre el conjunto E_i.
El supremo de tales sumas se llama **integral** de f sobre E y se denota por

$$\int_E f \quad \text{ó} \quad \int_E f(x)dx.$$

de manera que

$$\int_E f = \int_E f(x)dx = \sup \sum_{i=1}^{N} v_i m(E_i).$$

donde el supremo se toma sobre todas las posibles descomposiciones de E como unión finita de conjuntos (medibles) disjuntos y $v_i = \text{ínf}\, f(E_i)$.

Proposición 1.27. *(Teorema de Convergencia Monótona) Sea f_n una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en un conjunto medible $E, f = \text{lím}\, f_n$ la función límite. Se supone $f_n \leq f$ para todo n. Se tiene que $\int_E f = \text{lím} \int_E f_n$.*

Demostración. Ya establecimos $\int_E f_n \leq \int_E f$, y por lo tanto $\text{lím}\sup \int_E f_n \leq \int_E f$. Con el lema de Fatou se concluye que $\leq \int_E f \leq \text{lím}\, inf \int_E f_n \leq \text{lím}\, sup \int_E f_n \leq \int_E f$ □

Ahora escribiremos las definiciones generales de espacios L^p y de dualidad que serán utilizadas en los proximos capítulos.
Sea X un espacio de medida y sea $\mathcal{F}$ la colección de funciones medibles complejas definidas en X. O sea, $f \in \mathcal{F}$ signfica $f = f_r + i f_i$ tal que $f_r, f_i : X \to \mathbb{R} \cup \pm\infty$ son funciones medibles. Identificamos funciones $f, g \in \mathcal{F}$ como iguales si $f(x) = g(x)$ para casi todo $x \in X$. Es decir que las funciones son en realidad clases de equivalencia de funciones medibles bajo la relación $f \sim g$ si $\mu(\{x \in X : f(x) = g(x)\}) = 0$.
Los elementos en los espacios $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ serán funciones que satisfacen ciertas funciones de crecimiento y las funciones en $L^\infty(\mu)$ serán las funciones casi siempre acotadas.

Definición 1.45. *Para $1 \leq p \leq \infty$ el espacio*

$$L^p(\mu) = \{f \in \mathcal{F} : \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$$

y

$$y \quad L^\infty(\mu) = \{f \in \mathcal{F} : \exists\, M \in \mathbb{R}^+ \quad tal \;\; que \;\; \mu\{x \in X : |f(x) > M|\} = 0\}.$$

Observación 1.2. *Es claro que los espacios están bien definidos porque si $f, g \in \mathcal{F}$ y $f \sim g$, tenemos que $f \in L^p(\mu)$ si y sólo si $g \in L^p(\mu)$ para $1 \leq p \leq \infty$.*

Definición 1.46. *Si G es un grupo abeliano compacto, definimos un caracter de G como un homomorfismo continuo de grupo $\varphi : G \to \mathbb{S}^1$.*

El conjunto de todos los caracteres en G es otro grupo abeliano compacto, llamado el grupo dual de G y denotado como $\hat{G}$. Con más detalle, se define al grupo dual como sigue:

Definición 1.47. *Si G es un grupo abeliano (localmente) compato, definimos el **grupo de caracteres** (dual de Pontrjagin) de G como*

$$\hat{G} = Hom_{cont}(G) = \{\varphi : G \to \mathbb{S}^1 : \varphi \textit{ es un homomorfismo continuo}\}.$$

Si tomamos dos caracteres de $\hat{G}$ se pueden multiplicar punto a punto para formar un nuevo caracter.
El caracter trivial $x \to 1$ es la identidad de $\hat{G}$. La topología de $\hat{G}$ es la de la convergencia uniforme sobre compactos. Se puede demostrar que el grupo $\hat{G}$ con la topología así definida es un grupo abeliano compacto.

El grupo dual está presentado como el espacio subyacente para una versión abstracta de la transformada de Fourier. En este contexto, las funciones sobre el grupo G (e.g. funciones en $L^1(G)$ o $L^2(G)$) se transforman en las funciones con dominio en el grupo dual G. Esto se implementa vía la integral

$$\hat{f}(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(-x)\, dx$$

donde la integral utiliza la medida de Haar.

Capítulo 2

GRUPOS TOPOLÓGICOS

2.1. Grupos topológicos

2.1.1. Definiciones básicas y resultados

Definición 2.1. *Sea G un conjunto con una operación binaria*

$$* : G \times G \to G$$

y sea τ una familia de subconjuntos de G.
Decimos que G es un ***grupo topológico*** *si:*

a. $(G, *)$ *es un grupo,*

b. (G, τ) *es un espacio topológico, y*

c. las funciones dadas por

$$\begin{aligned} m : & G \times G \to G \\ & (x, y) \mapsto x * y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i : & G \to G \\ & x \mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

son continuas

En adelante G denotará a un grupo topológico.

Proposición 2.1. *G es un grupo topológico si y sólo si la función*

$$\begin{aligned} n :& G \times G \to G \\ & (x, y) \mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. " $\Longrightarrow$ " Supongamos que G es un grupo topológio, es decir,

$$\begin{aligned} i :& G \to G \\ & x \mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m :& G \times G \to G \\ & (x, y) \mapsto xy \end{aligned}$$

son continuas. Entonces la función

$$\begin{aligned} m' :& G \times G \to G \times G \\ & (x, y) \mapsto (x, y^{-1}) \end{aligned}$$

es continua, ya que tiene como componentes a funciones continuas.
Entonces:

$$m(m'(x, y)) = m(x, y^{-1}) = xy^{-1}$$

es una función continua por ser composición de funciones continuas.
Tomando

$$n = m \circ m'$$

tenemos la prueba.
" $\Longleftarrow$ " Supongamos que $(G, *)$ es un grupo, (G, τ) es un espacio topológio y

$$\begin{aligned} n :& G \times G \to G \\ & (x, y) \mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

es una función continua.
La función

$$\begin{aligned} n' :& G \to G \times G \\ & x \mapsto (e, x) \end{aligned}$$

es una función continua. Entonces

$$n(n'(x)) = n(e, x) = ex^{-1} = x^{-1}$$

es continua por ser composición de funciones continuas.
Así $i = n \circ n'$ es continua.
Además $n(m'(x, y)) = n(x, y^{-1}) = x(y^{-1})^{-1} = xy$ es continua por ser composición de funciones continuas.
Así, la función $m = n \circ m'$ es continua. $\square$

Ejemplos 2.1.

- *$\mathbb{R}$ con la suma usual y la topología euclidiana es un grupo topológico.*

  1. *($\mathbb{R}, +$) es un grupo.*
     Ya que si $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces:

     $$a + b \in \mathbb{R}, \qquad a + (b + c) = (a + b) + c \in \mathbb{R}$$

     $$y \ \exists \ e = 0 \in \mathbb{R} \quad \textit{tal que} \quad a + 0 = 0 + a = a$$

  2. *($\mathbb{R}, \tau$) es un espacio topológico: τ la topología euclidiana.*
     Recordemos que un subconjunto U de $\mathbb{R}$ es llamado abierto en la topología euclidiana sobre $\mathbb{R}$ si cumple que:
     Para todo $x \in U$, existen $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, tal que $x \in (a, b) \subseteq U$.

     Así veamos que τ cumple las propiedades de topología:

     - *Para todo $x \in \mathbb{R}$ tomemos $a = x-1, b = x+1$, entonces $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Así $\mathbb{R} \in \tau$.*
       $\emptyset$ cumple esta propiedad ya que está incluido en cualquier subconjunto.
     - *Sea $\{A_j; j \in J\}$ una familia de elememtos de τ, para algún conjunto J de indices.*
       Entonces debemos demostrar que $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$.
       Así, sea $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$, entonces $\exists\, A_j \in \bigcup_{j \in J} A_j$ tal que $x \in A_j$, es decir $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tal que $x \in (a, b) \subset A_j$.

De donde para cada $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$ $\exists$ (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset \bigcup_{j\in J} A_j$

- *Sea $\{A_j; j \in J\}$; J un conjunto de índices finito, Una familia finita de elememtos de τ.*
  Tenemos que demostrar que $\bigcap_{j\in J} A_j \in \tau$.
  Sea $x \in \bigcap_{J\in J} A_j$, entonces $x \in A_j$ para todo $j \in J$.
  Así, para cada $j \in J$ $\exists$ a_j,$b_j \in \mathbb{R}$ tal que $x \in (a_j, b_j) \subseteq A_j$.
  Tomemos $a = max\{a_j\}$ y $b = min\{b_j\}$.
  Entonces $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tal que $x \in (a, b) \subseteq \bigcap_{j\in J} A_j$.
  Por lo tanto $\bigcap_{j\in J} A_j \in \tau$ para J conjunto finito de índices.

  $\therefore$ $(\mathbb{R}, \tau)$ *es una topología.*

3. *Veamos que las funciones m e i son continuas.*

- $$\begin{aligned} m :& G \times G \to G \\ &(x, y) \mapsto x + y \end{aligned}$$

  Haremos la demostración mediante la técnica $\epsilon - \delta$. Dado $\epsilon > 0$, denotemos por $B_\epsilon(x + y)$ a la bola con centro en $x + y$ y radio ϵ, tomemos $\delta = \epsilon/2$, $z \in B_\delta(x)$ y $w \in B_\delta(y)$.
  Entonces $|(z + w) - (x + y)| \leq |z - x| + |w - y| < \epsilon$. Es decir, la imagen de $B_\delta(x) \times B_\delta(y)$ bajo m está contenida en $B_\epsilon(x + y)$ y por lo tanto, la suma es continua. (m es continua).

- $$\begin{aligned} i :& G \to G \\ &x \mapsto x^{-1} = -x \end{aligned}$$

  Dado $\epsilon > 0$, denotemos $B_\epsilon(-x)$ a la bola con centro en $-x$ y radio ϵ, sea $\delta = \epsilon$. Sea $y \in B_\delta(x)$.
  Entonces $|(-y) - (-x)| = |-1||y - x| = |y - x| < \epsilon$.
  Es decir, la imagen de $B_\delta(x)$ bajo i está contenida en $B_\epsilon(-x)$ y por lo tanto i es continua.

Por las tres pruebas anteriores $\mathbb{R}$ es un espacio topológico con la suma usual *y la topología euclidiana.*

- $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{C}^n$ *son grupos topológicos con la suma vectorial usual y la topología euclidiana.*
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ *y* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *son grupos topológicos con la multiplicación usual y la topología euclidiana.*
- $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *es un grupo topológico con la multiplicación compleja usual y la topología inducida de* $\mathbb{C}^*$*. a este grupo topológico se le llama círculo unitario*
  En efecto.
  Sabemos que cada complejo z *se puede expresar de la forma* $z = |z|e^{i\theta}$ *con* $|z|$ *el norma del compljo y* θ *su ángulo. Con la topología usual en los complejos los abiertos son todos los generados por los conjuntos*

$$E(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta,\ \ \delta \in \mathbb{R},\ \ \delta > 0\}$$

y la multiplicación usual está dada por

$$zw = |z||w|e^{i(\theta+\theta')}.$$

Los abiertos de $\mathbb{S}^1$ *son los generados por los conjuntos*

$$\mathbb{S}^1 \cap E(z_0, \delta) = E'(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0, |z| = |z_0| = 1\}$$

Las primeras dos condiciones de grupos topológicos son heredadas de $\mathbb{C}$*, nos restaría por probar la continuidad de las funciones*

$$\begin{aligned} m : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, w) &\mapsto zw \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto z^{-1} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

1. *Sea* $\epsilon > 0$ *y sea* $E(zw, \epsilon)$ *el abierto con centro en* zw *y radio* ϵ*.*
   Sea $\delta = \epsilon/2$ *y* $E(z, \delta)$*,* $E(w, \delta)$ *los abiertos con centro* z *y* w *y radio* δ *respectivamente. Si* $z' \in E(z, \delta)$ *y* $w' \in E(w, \delta)$*, entonces,*

$$
\begin{aligned}
|zw - z'w'| &= |zw - z'w' + zw' - zw'| \\
&= |w(z - z') + z'(w - w')| \\
&\leq |w'||z - z'| + |z'||w - w'| \\
&= |z - z'| + |w - w'| \\
&= \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}
$$

y así m es continua.

2. *Sea $\epsilon > 0$ y $E(z^{-1}, \epsilon)$ el abierto con centro z^{-1} y radio ϵ, sea $\delta \leq \epsilon$ y $E(z, \delta)$ el abierto con centro en z y radio δ. Si $w \in E(z, \delta)$, entonces,*

$$
\begin{aligned}
|z^{-1} - w^{-1}| &= |\frac{1}{z} - \frac{1}{w}| \\
&= |\frac{w - z}{zw}| \\
&= |-\frac{1}{zw}||z - w| \\
&= |z - w| \leq \epsilon
\end{aligned}
$$

y así i es continua.

Existe otra forma equivalente de definir el círculo unitario y es la siguiente

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

que son las clases laterales de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Z}$ que tienen como representante al intervalo unidad $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$. La prueba de que definido de esta forma es un grupo topológico se hará más adelante.
En el desarrollo de este trabajo se estarán usando estas dos definiciones para el círculo.

- *Sea $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \mathbb{S}^1$ el producto cruz n-veces de $\mathbb{S}^1$ es un grupo topológico. A este grupo topológico se le llama el toro de dimensión n. La prueba es una generalización de la del círculo.*
  También el toro se puede definir de la forma

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

La prueba de que así definido es un espacio topológico se hará más adelante.

- *Sea* $k = R$ *ó* $\mathbb{C}$. *El* ***grupo general lineal***

$$GL(n,k) = \{g \in \mathcal{M}_{n\times n}(k) : det(g) \neq 0\}$$

es un grupo topológico con la suma usual y la multiplicación matricial y la topología euclidiana inducida de k^{n^2}

Proposición 2.2. *Si* y *es cualquier punto de* G *las siguientes operaciones son homeomorfismos en* G*:*

$$\begin{aligned} L_y : G &\to G \\ x &\mapsto yx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R_y : G &\to G \\ x &\mapsto xy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i_y : G &\to G \\ x &\mapsto yxy^{-1} \end{aligned}$$

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in G$ tales que $x_1 = x_2$, entonces como G es un grupo se tiene:
$yx_1 = yx_2$ de donde $L_y(x_1) = L_y(x_2)$
Además $x_1y = x_2y$ de donde $R_y(x_1) = R_y(x_2)$
y por último $yx_1 = yx_2$ y como el inverso es único se tiene $yx_1y^{-1} = yx_2y^{-1}$.
Por lo tanto, las tres funciones definidas anteriormente están bien definidas. Por hipótesis la función m y la función i son continuas.

1. Probemos que L_y es homeomorfismo.
   - Continuidad.
     Sea $x, y \in G$ y sea U un entorno de $m(y,x)$ en G.
     Entonces por continuidad de m se tiene que $\exists\, V, W$ entornos de x, y respectivamente tales que $m(W \times V) = WV \subset U$.
     En particular $yV \subset U$.
     Entonces $L_y(V) = yV \subset U$.
     Por lo tanto L_y es continua.
   - Inyectiva.
     Sea $L_y(x) = L_y(z)$ entonces $yx = yz$.
     Como G es un grupo $\exists\, y^{-1}$ único.
     Así $y^{-1}yx = y^{-1}yz$ de donde $x = z$, es decir L_y es inyectiva.

- Sobreyectiva.
  Sea $z \in G$, entonces $L_y(y^{-1}z) = y(y^{-1}z) = z$.
  Es decir para cada $z \in G \; \exists \; y^{-1}z$ tal que $L_y(y^{-1}z) = z$.
  Por lo tanto L_y es sobreyectiva.
- Continuidad de $(L_y)^{-1}$.
  Sabemos que $L_y = yx$, encontremos su inversa.
  Sea $x = y(L_y)^{-1}$, entonces $(L_y)^{-1} = y^{-1}x$.
  Es decir, $(L_y)^{-1} = L_{y^{-1}} = y^{-1}x$.
  Entonces la continuidad de $(L_y)^{-1}$ se prueba de forma similar que la de L_y.
  Sea $x, y^{-1} \in G$ y sea U entorno de $m(y^{-1}, x)$ en G.
  por continuidad de m y de $i \; \exists \; V, W$ entornos de x, y^{-1} respectivamente tales que: $m(W \times V) = WV \subset U$ en particular $y^{-1}V \subset U$.
  Entonces $L_{y^{-1}}(V) = y^{-1}V \subset U$.
  Por lo tanto $(L_y)^{-1} = L_{y^{-1}}$ es continua.

Podemos así concluir que L_y es un homeomorfismo.

2. Probemos que R_y es un homeomorfismo.

- Continuidad.
  Sean $x, y \in G$ y sea U un entorno de $m(x, y)$ en G.
  Entonces por continuidad de $m \; \exists V, W$ entornos de x, y respectivamente tales que $m(V \times W) = VW \subset U$, en particular $Vy \subset U$.
  Entonces $R_y(V) = Vy \subset U$.
  Pot lo tanto, R_y es continua.
- Inyectiva.
  Sea $R_y(x) = R_y(z)$, entonces $xy = zy$ y como G es grupo entonces: $(xy)y^{-1} = (zy)y^{-1}$ de donde $x = z$.
  Por lo tanto R_y es inyectiva.
- Sobreyectiva.
  Sea $z \in G$, entonces $R_y(zy^{-1}) = (zy^{-1})y = z$.
  Es decir para cada $z \in G \; \exists \; zy^{-1}$ tal que $L_y(zy^{-1}) = z$.
  Por lo tanto ,R_y es sobreyectiva.
- Continuidad de $(R_y)^{-1}$.
  Sabemos que $R_y = xy$, encontremos su inversa.

Sea $x = y(R_y)^{-1}$, entonces $(R_y)^{-1} = xy^{-1}$.
Es decir, $(R_y)^{-1} = R_{y^{-1}} = xy^{-1}$.
Entonces la continuidad de $(R_y)^{-1}$ se prueba de forma similar que la de R_y.
Sea $x, y^{-1} \in G$ y sea U entorno de $m(y^{-1}, x)$ en G.
por continuidad de m y de i $\exists\, V, W$ entornos de x, y^{-1} respectivamente tales que: $m(W \times V) = WV \subset U$ en particular $Vy^{-1} \subset U$.
Entonces $R_{y^{-1}}(V) = Vy^{-1} \subset U$.
Por lo tanto, $(R_y)^{-1} = R_{y^{-1}}$ es continua.

Podemos concluir así que R_y es un homeomorfismo.

3. Por último demostremos que i_y es homeomorfismo.
Observemos que $R_{y^{-1}}(L_y(x)) = R_{y^{-1}}(yx) = yxy^{-1}$, es decir i_y es la composición de homeomorfismos.
Por lo tanto, i_y es homeomorfismo.

$\square$

Definición 2.2. *a. Sea $x \in G$. Si $U \subset G$, decimos que U es una **vecindad** de x, si x está en el interior de U.*

b. Si $U \subset G$ es una vecindad de algún punto de G, decimos que U es una vecindad simétrica si $U = U^{-1}$

Notemos que con esta definición, una vecindad de un punto puede ser abierta, cerrada o compacta.
Esta definición motiva la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Sea G un grupo topológico normal. Entonces,*

a. Para cada vecindad U de la identidad $e \in G$, existe una vecindad V de la identidad tal que $VV \subset U$.

b. Para toda vecindad U del elememto idéntico, existe una vecindad simétrica V de la identidad tal que $V \subset U$.

c. Si H es un subgrupo de G, entonces $\bar{H}$ también es un subgrupo de G.

d. Todo subgrupo abierto de G es también cerrado.

e. Si K y L son subconjuntos compactos de G, entonces KL es compacto.

Demostración. a. Recordemos que si una función es continua, entonces al restringir su dominio esta sigue siendo continua. Sea U una vecindad abierta de la identidad $e \in G$, entonces la función: $m' : U \times U \to G$ es continua puesto que $m : G \times G \to G$ es continua dado que G es un grupo topológico. Luego $m^{-1}(U)$ es abierto $\bigcup_{x \in G/e} xH$ y contiene a (e, e), por definición de topología producto en $U \times U$ $\exists$ abiertos $W, W' \subset U$ tales que $(e, e) \subset W \times W'$.
Sea $V = W \cap W'$, entonces $V \subset U$ es una vecindad abierta de e y por la forma que hemos construido V, podemos afirmar que:
$m(V \times V) = VV \subset U$.
Por lo tanto $\exists$ una vecindad abierta V de la identidad e tal que $VV \subset U$.

b. Notemos que $x \in U \cap U^{-1}$ si y sólo sí $x, x^{-1} \in U$.
Luego $V = U \cap U^{-1}$ es la vecindad simétrica deseada de e.

c. Sean $x, y \in \bar{H}$. Entonces, existen sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\} \subset H$ que convergen a x y y. Por continuidad de las operaciones en el grupo se tiene que

$$x_n y_n \mapsto xy \quad \text{y} \quad x_n^{-1} \mapsto x^{-1}.$$

Por lo tanto, xy y $x^{-1} \in \bar{H}$ y $\bar{H}$ es un subgrupo de G.

d. Si H es un subgrupo abierto de G, entonces xH es subgrupo abierto de G por ser R_y homeomorfismo $\forall x \in G$. Luego $G - H = \bigcup xH$ es abierto por ser unión de abiertos.

e. Como K y $L \subset G$ son compactos y m es una función continua, entonces:
$K \times L$ es compacto en $G \times G$ y $m(K \times L) = KL$ es la imagen continua de $K \times L$ bajo m.
Por lo tanto KL es compacto en G.

$\square$

Observación 2.1. *De acuerdo con a) y b) de la proposición anterior, si U es una vecindad del elemento identidad, entonces siempre podemos encontrar una vecindad simétrica V de la identidad tal que $VV \subset U$.*

2.1.2. Bases de vecindades

Sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos abiertos de G. Decimos que $\mathcal{B}$ es una **base de** G si todo subconjunto abierto V de G se escribe como una unión de elementos de $\mathcal{B}$. A $\mathcal{B}$ le llamaremos una **base de vecindades** de G.

Observación 2.2. *$\mathcal{B}$ es una **base de vecindades de** G si y sólo si para todo abierto V de G y para todo punto $x \in V$, existe un elemento $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset V$.*

Esta observación motiva la siguiente.

Definición 2.3. *Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de G es una **base de vecindades de un punto** $x \in G$ si para todo abierto de $V \subset G$ que contiene a x, existe un elemento $U \subset V$ tal que $x \in U \subset V$.*

Observación 2.3. *Sea $\mathcal{B}$ una base de vecindades de la identidad $e \in G$. Entonces,*

a) $\bigcap_{U \in \mathcal{B}} U = \{e\}$.

b) Si $U, V \in \mathcal{B}$, son tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces existe un elemento $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset U \cap V$.

c) Para todo elemento $U \in \mathcal{B}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $VV^{-1} \subset U$.

d) Para todo elemento $U \in \mathcal{B}$ y $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $Vx \subset U$.

e) Para todo elemento $U \in \mathcal{B}$ y $x \in G$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x^{-1}Vx \subset U$.

2.1.3. Grupos topológicos cocientes

Recordemos que si H es un subgrupo de G, entonces el conjunto de clases laterales izquierdas de H en G se llama el espacio cociente de G por H y se denota por G/H.
La proyección canónica

$$\begin{aligned} \pi : & G \to G/H \\ & x \mapsto xH \end{aligned}$$

está bien definida.
Definimos la topología cociente como la topología más fina que hace a la proyección cociente continua. Esto es,

$$U \subset G/H \text{ es abierto si y sólo si } \pi^{-1}(U) \text{ es abierto en } G$$

Sea $\mathcal{B}$ una base de vecindades de G, para cada $U \in \mathcal{B}$ definimos $U_H = \{xH : x \in U\}$ entonces $\mathcal{B}_H = \{U_H : U \in \mathcal{B}\}$ es una base de vecindades para la topología cociente en G/H.

Proposición 2.4. *Sea H un subgrupo de G.*

a. Si G es localmente compacto, entonces G/H es localmente compacto.

b. Si $H \subset G$ es un subgrupo normal, entonces G/H es un grupo topológico.

Demostración. a. G es localmente compacto si para cada $x \in G$ $\exists$ U una vecindad compacta tal que $x \in U \subset G$, entonces:
Por la topología cociente tenemos que $\pi(U)$ es una vecindad compacta de $\pi(x)$ en G/H y esto es para cada $x \in G$.
Por lo tanto G/H es localmente compacto.

b. Por hipótesis m, i e π son funciones continuas.
Entonces tenemos que demostrar que las funciones

$$\begin{aligned} m' :&G/H \times G/H \to G/H \\ &(xH, yH) \mapsto xHyH = xyH \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i' :&G/H \to G/H \\ &xH \mapsto (xH)^{-1} = x^{-1}H \end{aligned}$$

son continuas.

- Continuidad de m'.
Sea $x, y \in G$ y U una vecindad de $\pi(xy) \in G/H$.
Por ser π la topología cociente entonces $\pi^{-1}(U)$ es un abierto en G. Por

continuidad de m $\exists\, V, W \subset G$ entornos de x, y respectivamente tales que $m(V \times W) = VW \subset \pi^{-1}(U) \subset U$.
Así $\pi(VW) \subset U$.
Además $\pi(xy) = (xy)H$.
Como H es normal entonces $(xy)H = xHyH = \pi(x)\pi(y)$, de donde $\pi(VW) = (VW)H = (V)H(W)H = \pi(V)\pi(W)$.
Es decir, $\pi(V)$ $\pi(W)$ son vecindades de $\pi(x)$ y $\pi(y)$ respectivamente que cumplen $\pi(VW) = \pi(V)\pi(W) \subset U$.
De donde para cada vecindad U de $\pi(xy)$ en G/H existen abiertos $\pi(V)$ y $\pi(W)$ vecindades de $\pi(x)$ y $\pi(y)$ respectivamente en G/H tales que

$$m'(\pi(V), \pi(W)) = \pi(V)\pi(W) \subset U$$

.
Por lo tanto m' es una función continua.

- Continuidad de i'.
  Sea $x \in G$ y sea U una vecindad de $\pi(x^{-1})$ en G/H.
  Por continuidad de π tenemos que $\pi^{-1}(x^{-1})$ es un abierto en G y por continuidad de i $\exists V \subset G$ entorno de x tal que $i(V) = V^{-1} \subset \pi^{-1}(U) \subset U$, de donde $\pi^{-1}(V^{-1}) \subset U$.
  Además para cada $x^{-1} \in G$, $\pi(x^{-1}) = x^{-1}H = (xH)^{-1}$ por ser H normal.
  de aquí que $\pi(x^{-1}) = (\pi(x))^{-1}$ y así, $\pi(V^{-1}) = (\pi(V))^{-1}$.
  Entonces $\pi(V)$ es un entorno de $\pi(x)$ en G/H que cumple $i'(\pi(V)) = (\pi(V)^{-1}) = \pi(V^{-1}) \subset U$.
  Es decir, para cada vecindad U de $\pi(x^{-1})$ en G/H existe una vecindad $\pi(V)$ de $\pi(x)$ en G/H tal que

  $$i'(\pi(V)) = (\pi(V)^{-1}) = \pi(V^{-1}) \subset U$$

  .
  Por lo tanto i' es continua.

$\square$

Ejemplos 2.2. 1. *$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un grupo topológico.*

En efecto.

Por la proposición anterior sólo necesitamos demostrar que $\mathbb{R}$ es un grupo topológico y que $\mathbb{Z}$ es normal en $\mathbb{R}$.

Pero ya demostramos que $\mathbb{R}$ es un grupo topológico con la suma usual y la topología euclidiana.

$\mathbb{Z}$ con la suma usual es normal en $\mathbb{R}$ ya que es abeliano.

Es decir, para $x \in \mathbb{R}$, $x + \mathbb{Z} = \{\cdots, x + (-1), x, x + 1, \cdots\} = \{\cdots, -1 + x, x, 1 + x, \cdots\} = \mathbb{Z} + x$.

Por lo tanto por la proposición anterior $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un grupo topológico.

2. *$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un grupo topológico.*

   La demostración es una generalización de la anterior.

Definición 2.4. *Un grupo localmente compacto es un grupo topológico Hausdorff y localmente compacto.*

2.2. Grupos totalmente disconexos

Definición 2.5. *La **componente** de un punto $x \in G$ es el subconjunto conexo (cerrado) máximo de G que contiene a x.*

Para cualquier punto $x \in G$, su componente la denotaremos por U_x.

Proposición 2.5. *Sea U_e la componente de la identidad $e \in G$.*

a) Si G es conexo, entonces $U_e = G$.

b) Si $U_e = \{e\}$, entonces $U_x = \{x\}$ para todo $x \in G$. En este caso decimos que G es totalmente disconexo.

Demostración. a) Sabemos que para cualquier topología τ sobre G, G es abierto y cerrado, por hipótesis G es conexo entonces, G es conexo y cerrado y es el máximo; como $e \in G$: entonces $U_e = G$.

b) Supongamos que $\{x\} \subset U_x$, es decir, U_x contiene otro elemento distinto de x.

Ya hemos demostrado que L_y es homeomorfismo, entonces, $L_y(U_x) = yU_x$ es conexo y cerrado para cualquier y. Tomando $y = x^{-1}$ tenemos que $e \in yU_x$ lo cual es una contradicción ya que hemos encontrado un subconjunto conexo cerrado mas grande que $\{e\}$.
Por lo tanto $U_x = \{x\}$.

$\square$

Proposición 2.6. *Supongamos que G es Hausdorff localmente compacto y sea $K \subset G$ una componente compacta. Entonces, para todo subconjunto abierto V de G que contiene a K, existe un subconjunto compacto-abierto P tal que:*

$$K \subset P \subset V.$$

Demostración. Por hipótesis G es Hausdorff localmente compacto, entonces por teorema 1.14 podemos elegir una vecindad $U_{(x)}$ para cada $x \in K$ compactamente contenida en V, es decir, $U_{(x)}$ tiene cerradura compacta en V.
Ahora las vecindades $\{U_{(x)} : x \in K\}$ forman una cobertura abierta de K, por lo que podemos elegir una subcubierta finita $U_{(x_1)}, U_{(x_2)} \cdots U_{(x_k)}$ de K.
Sea $U = \bigcup_{j=1}^{k} U_{(x_j)}$, entonces $\bar{U}$ es compacto por ser cada $\bar{U}_{(x_j)}i$ compacto. Además, $K \subset \bar{U}$ y $\bar{U} \subset V$ por estar cada $U_{(x_j)} \subset V$.
Como K es componente en G entonces K debe de ser componente en $\bar{U}$. Si U es conexo, entonces por proposición anterior tenemos que K no sería componente, lo que contradice nuestra hipótesis.
Es decir, $\bar{U}$ es separable, por lo que existen W_1, W_2 abiertos-cerrados disjuntos tales que $\bar{U} = W_1 \cup W_2$ Y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.
Como K es conexo por teorema

$$K \subset W_1 \quad \text{o} \quad K \subset W_2,$$

por lo que existe como mínimo un conjunto cerrado-abierto U' tal que $K \subset U'$.
Así, $K = \bigcap_{U'} \{U' \subset \bar{U} : U' \text{ cerrado-abierto y } K \subset U'\}$.
Por lo tanto, existe $P \subset \bar{U}$ compacto-abierto tal que

$$K \subset P \subset V.$$

$\square$

Proposición 2.7. *Si U_e es la componente de la identidad $e \in G$, entonces U_e es normal en G.*

Demostración. Por hipótesis U_e es conexo y cerrado. Sean $x, y \in U_e$. Como la función i es continua entonces $i(U_e) = U_e^{-1}$ es conexo, la función L_x es homeomorfismo, entonces $L_x(U_e^{-1}) = xU_e^{-1}$ es conexo.
Como $x^{-1} \in U_e^{-1}$ entonces $e \in xU_e^{-1}$. Pero U_e es el conexo más grande que contiene a e, entonces $xU_e^{-1} \subset U_e$. En particular $xy^{-1} \in N$; es decir, U_e es un subgrupo (algebraico) de G.
Para ver que U_e es normal, observemos que U_e es cerrado. Esto implica que U_e es un subgrupo topológico de G. Si $x \in G$ por ser $i_{x^{-1}}$ homeomorfismo $i_{x^{-1}}(U_e) = x^{-1}U_e x$ es conexo cerrado y contiene a e, ya que U_e contiene a e, luego $x^{-1}U_e x \subset U_e$, puesto que U_e es el máximo conexo que contiene a e. Siendo esta la condición de normalidad.
De donde U_e es normal.
Por lo tanto, U_e es un subgrupo normal de G. □

Proposición 2.8. *Supongamos que G es localmente compacto y totalmente disconexo. Entonces, para toda vecindad U de $e \in G$, existe un subgrupo compacto-abierto H tal que*

$$e \in H \subset U.$$

Demostración. Por hipótesis G es totalmente disconexo entonces, $U_e = \{e\}$, de donde $U_e \subset U$.
Por proposición anterior $\exists$ P compacto abierto tal que $e \in P \subset U$.
Sea $Q = \{q \in G : Pq \subset P\}$. Probaremos que $H = Q \cap Q^{-1}$ es un subgrupo compacto abierto.

- Q es abierto: Sea $q \in Q$ fijo y $x \in P$ cualquier elemento, como $Pq \subset P$ entonces $xq \in P$ y P es abierto. Por la continuidad de la función m,
  tenemos que existen $U_{(x)}$ y $V_{(x)}$ vecindades de x y q respectivamente tal que $m(U_{(x)} \times V_{(x)}) = U_{(x)}V_{(x)} \subset p$. Las vecindades $\{U_{(x)} : x \in P\}$ forman una cobertura abierta de P, por lo que podemos escoger una subcubierta finita $U_{(x_1)}, U_{(x_2)} \dots U_{(x_k)}$ de P.
  Sea $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_k}$.
  Entonces como cada $U_{(x_i)}V_{(x_i)} \subset P$ tenemos que $PV \subset P$ lo que implica

que $V \subset Q$.

De donde Q es abierto.

- Q es cerrado: Sea $x \in Q^{\complement}$, recordemos que $q \in Q$ si y sólo si $Pq \subset P$, así si $x \in Q^{\complement}$ entonces, $Px \nsubseteq P$, se sigue entonces que existe $p \in P$ tal que $px \in P^{\complement}$.
  Como P es un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff, entonces por (1.12) P es cerrado, de donde $P^{\complement}$ es abierto, por ser L_p un homeomorfismo existe una vecindad W_x de x tal que
  $$L_p(W_x) = pW_x \subset P^{\complement}.$$
  Es decir, $W_x \subset Q^{\complement}$.
  Esto lo podemos hacer para cada $x \in Q^{\complement}$.
  De donde $Q^{\complement} = \bigcup_{x \in Q^{\complement}} V_x$ es abierto.
  Por lo tanto Q es cerrado.

- Q es compacto-abierto y contiene a e.
  Hemos probado que Q es un subespacio cerrado de un espacio compacto, entonces por teorema (1.11) tenemos que Q es compacto y es abierto.
  Además $e \in P$,entonces para cada $x \in Q$ $ex \in P$, es decir, $ex = x \in P$.
  Lo que implica que $Q \subset P$, como $Pe = P \subset P$, tenemos que $e \in Q$.
  Por lo tanto Q es compacto-abierto que contiene a e.

- $H = Q \cap Q^{-1}$ es compacto-abierto que contiene a e.
  Sabemos que Q es abierto-cerrado e i es una función continua, además $Q = (Q^{-1})^{-1}$.
  Es decir, $i^{-1}((Q^{-1})^{-1})$ es un abierto-cerrado.
  Pero $i^{-1}((Q^{-1})^{-1}) = Q^{-1}$. Así Q^{-1} es abierto cerrado que contiene a e ya que $e = e^{-1}$.
  Entonces $Q \cap Q^{-1}$ es un abierto cerrado y por teorema (1.11) $H = Q \cap Q^{-1}$ es compacto.
  Por lo tanto H es compacto-abierto que contiene a e.

- H es subgrupo: si $x, y \in H$, tenemos que demostrar que $xy^{-1} \in H$ y $yx^{-1} \in H$.

En efecto.
Como $x, y \in H$ entonces $Px \subset P$ y $Py \subset P$.
Además si $x \in H$ entonces $x^{-1} \in H$ por como hemos tomado H, es decir, $Px^{-1} \subset P$.
Así si $Px \subset P$ y $Py^{-1} \subset P$ entonces $(Px)y^{-1} \subset P$.
Pero $(Px)y^{-1} = Pxy^{-1} \subset P$.
Por lo tanto $xy^{-1} \in H$.
Observemos también que $xy^{-1} = (yx^{-1})^{-1}$ y como $xy^{-1} \in H$ entonces $yx^{-1} \in H$ por como hemos tomado H.
de donde H es un subgrupo.

□

Proposición 2.9. *Supongamos que G es compacto y totalmente disconexo. Sea U una vecindad de $e \in G$. Entonces, existe un subgrupo normal abierto N tal que*

$$e \in N \subset U.$$

Demostración. Por el teorema anterior, existe un subgrupo compacto-abierto H tal que $e \in H \subset U$.
Definimos

$$N = \bigcap_{x \in G} x^{-1} H x.$$

entonces tenemos que probar que N es normal y abierto en G.

a. N es normal.
En efecto dado que

$$\begin{aligned} yNy^{-1} &= y(\bigcap_{x \in G} x^{-1} H x) y^{-1} \\ &= \bigcap_{x \in G} y x^{-1} H x y^{-1} \\ &= \bigcap_{x \in G} (xy^{-1})^{-1} H x y^{-1}. \end{aligned}$$

Como x es cualquier elemento de G, entonces $\bigcup_{x \in G} xy^{-1} = G$, es decir, la intersección nada más se ha redefinido.

De donde

$$yNy^{-1} = \bigcap_{x \in G} (x')^{-1} H x' \subset N$$
$$\text{con } x' = xy^{-1}.$$

Así $yNy^{-1} \subset N$. Y N es normal.

b. N es abierto.
Como $e = x^{-1}ex \in H$, utilizando la continuidad de la función m, para $x^{-1}x$, tenemos que $\exists\, U_x$ entorno de x tal que $m(U^{-1}x, U_x) = U^{-1}xU_x \subset H$. Además $x = ex$, entonces existe V_x entorno de e tal que $m(V_x, U_x) = V_xU_x \subset U_x$. Es decir, $\exists\; U_x$ entorno de x y V_x entorno de e tal que $U_x^{-1}V_xU_x \subset H$.
Las vecindades $\{U_x : x \in G\}$ forman una cobertura abierta de G, por lo que podemos elegir una subcubierta finita $U_{x_1}, \cdots, U_{x_k}$. Sea

$$V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_k},$$

entonces $U_{x_i}^{-1}VU_{x_i} \subset H$ para todo $x \in G$.
Es decir, $x^{-1}Vx \subset H$, Pero esta condición sólo la satisfacen los elementos del conjunto N, entonces se debe de cumplir que $V \subset N$, como V es abierto por ser R_n homeomorfismo, se tiene que para cualquier $n \in G$, $V_n \subset N$ es un abierto.
Así, $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ es unión de abiertos. Por lo tanto, N es un abierto tal que

$$e \in N \subset U.$$

□

Proposición 2.10. *Sea G un grupo topológico, sea K un subconjunto compacto de G y sea U un subconjunto abierto de G que contiene a K. Entonces existen vecindades abiertas V_R Y V_L de e tal que $KV_R \subset U$ y $V_L \subset U$.*

Demostración. Para cada $x \in K$ elijamos vecindades abiertas W_x y V_x tales que $xW_x \subset U$ y $V_xV_x \subset W_x$ Entonces $xV_{xx} \in K$ es una cubertura abierta de conjuntos compactos de K tales que los conjuntos $x_iV_{x_i}$, $i = 1, ..., n$ que cubren a K. Sea $V_R = \cap_(i = 1)^n$.

Si $x \in K$, entonces existe un índice i tal que $x \in x_i V_{x_i}$ y así $xV_R \subset x_i V_{x_i} V_{x_i} \subset x_i W_{x_i} \subset U$. Dado que x es un elemento arbitrario de K, se sigue que $KV_R \subset U$ La construcción de V_L es similar. $\square$

Capítulo 3

MEDIDA DE HAAR, SERIES DE FOURIER Y ESPACIOS DE HILBERT

3.1. Medida de Haar

3.1.1. Existencia y Unicidad de la Medida de Haar

Sea G un grupo localmente compacto, y sea μ una medida regular de Borel distinta de cero. Entonces μ es una medida de Haar izquierda (o simplemente medida de Haar) si es invariante bajo traslaciones izquierdas (o simplemente invariante bajo traslaciones) en el sentido de que $\mu(xA) = \mu(A)$ para cada $x \in G$ y cada $A \in \mathbb{B}(G)$. Igualmente, μ es una medida de Haar derecha si $\mu(Ax) = \mu(A)$ para cada $x \in G$ y cada $A \in \mathbb{B}(G)$.
En este capítulo probaremos que existe una medida de Haar para cada grupo localmente compacto, y que es única salvo multiplicación por escalar.
Consideremos algunos ejemplos:

Ejemplos 3.1. *1. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es una medida de Haar derecha e izquierda.*

2. Si $\mathbb{S}^1$ es el conjunto de los números complejos z tales que $|z| = 1$, ya hemos demostrado que $\mathbb{S}^1$ es un grupo topológico.
Entonces la medida de Lebesgue lineal en $\mathbb{S}^1$ es una medida de Haar. Más

precisamente, si λ_0 es una medida de Lebesgue restringida a los subconjuntos de Borel en el intervalo $[0, 2\pi)$, y si $F : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$ está definida por $F(\theta) = e^{i\theta}$, entonces, $\lambda_0 F^{-1}$ es una medida de Haar izquierda y derecha en $\mathbb{S}^1$.

En efecto F así definida es continua. Entonces para todo abierto U de $\mathbb{S}^1$ $F^{-1}(U)$ es un abierto en $[0, 2\pi]$, como λ_0 es medida de Lebesgue entonces $\lambda_0 F$ es medida de Lebesgue. Si U es un abierto en $\mathbb{S}^1$ entonces $e^{i\theta}U$ tiene la misma medida que U nada más el intervalo se desplaza un ángulo θ, entonces $F^{-1}(e^{i\theta}U)$ también sólo se ha desplazado en θ es decir $\lambda_0 F^{-1}(e^{i\theta}U) = \lambda_0 F^{-1}(U)$ de igual forma se establece la invarianza por traslaciones derechas.

Sea G un grupo, sea x un elemento de G y f una función sobre G. Entonces, la traslación por la izquierda de f por x, lo escribiremos ${}_xf$ y definido por ${}_xf(t) = f(x^{-1}t)$ y la traslación por la derecha de f por x, lo escribiremos f_x y definido por $f_x(t) = f(tx^{-1})$. Entonces la función $\check{f}$ está definida por $\check{f}(t) = f(t^{-1})$. Es de notar que si x, f y t pertenecen a G, entonces

$${}_{xy}f(t) = f((xy)^{-1}t) = f(y^{-1}x^{-1}t) =_y f(x^{-1}t) =_x ({}_yf)(t);$$

así

$${}_{xy}f =_x ({}_yf).$$

Con un argumento similar se prueba que

$$f_{xy} = (f_x)_y.$$

Sea A un subconjunto de G, entonces la función característica del conjunto A, ${}_xA$ y A_x están relacionadas por las identidades

$$(\mathcal{X}_A)_x = \mathcal{X}_{A_x}$$

y

$${}_x(\mathcal{X}_A) = \mathcal{X}_{xA}.$$

Recordemos que para cualquier f su soporte en G está dado por $supp(f) = \{x \in G / f(x) \neq 0\}$.

Definición 3.1. *Si G es un grupo localmente compacto entonces se define $\mathcal{K}(G)$ como el espacio vectorial de todas las funciones G que son continuas y tienen soporte compacto.*

Proposición 3.1. *Sea G un grupo localmente compacto, sea μ una medida regular de Borel en G y sea $f \in K(G)$. Entonces las funciones $x \mapsto \int f(xy)\mu dy$ y $x \mapsto \int f(yx)\mu dy$ son continuas.*

Demostración. Probemos la continuidad de $x \mapsto \int f(xy)\mu dy$ en un punto arbitrario $x_0 \in G$ la prueba de la continuidad de $x \mapsto \int f(yx)\mu dy$ es similar.
Sea K un soporte de f, y sea W una vecindad abierta de x_0 con cerradura compacta. Es fácil ver que para cada $x \in W$ la función $y \mapsto f(yx)$ es continua y se anula fuera del conjunto compacto $K(W^{-1})^{-1}$. Suponga que ϵ es un numero positivo, tomemos un número positivo ϵ^{-1} tal que $(\epsilon)^{-1}\mu(K(W)^{-1})^{-1} < \epsilon$ utilizando la continuidad uniforme obtenemos una vecindad abierta V de e tal que $|(f(s) - f(t))| < (\epsilon)^{-1}$ donde s y t pertenecen a G y satisfacen que $s \in tV$. Entonces para cada $x \in W \bigcap x_0$ y cada $y \in G$ tenemos que $yx \in yx_0V$ y así, $|\int f(yx)\mu dy - \int f(yx_0)\mu(dy)| \leq \int |f(yx) - f(yx_0)|\mu(dy) \leq \epsilon^{-1}\mu(K(W)^{-}1)^{-1}) < \epsilon$ Dado que ϵ es arbitrario la prueba se completa. $\square$

Si G es un grupo localmente compacto y si μ es una medida de Haar izquierda sobre G, entonces

$$\int {}_x f d\mu = \int f d\mu \tag{3.1}$$

para cada función de Borel f que es no negativa o μ integrable (notar que $\int {}_x f d\mu = \mu({}_x A) = \mu(A) = \int f d\mu$ siempre que f sea la función característica del conjunto de Borel A, entonces usamos la linealidad de la integral y el teorema de convergencia monótona). Sea K subconjunto compacto de G y sea V un subconjunto de G cuyo interior $intV$ es no vacío, entonces $\{x(intV)\}_{x\in G}$ es una cubierta abierta del conjunto compacto K y así existen sucesiones finitas $\{x_i\}_i^n$ de elementos de G tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^n x_iV$. Sea $\#(K : V)$ el entero n más pequeño no negativo para el cual existe una sucesión $\{x_i\}_i^n$ con las condiciones dadas.
Es claro que $\#(K : V) = 0$ si y sólo si $K = \emptyset$.
Si elegimos un subconjunto compacto K_0 cuyo interior sea no vacío, este serviría

como estándar para medir el tamaño de varios subconjuntos de G y permanecerá fijo durante toda esta prueba. En otras palabras, mediremos el tamaño de un conjunto compacto arbitrario analizando la proporción $\#(K : U)/\#(K_0 : U)$ para toda vecindad arbitraria U de e, entonces, encontraremos el límite de esta proporción que haga la vecindad U la más pequeña. Usaremos este límite para construir una medida exterior μ^* en G y probaremos que la restricción de μ^* a $\mathcal{B}(G)$ es la medida requerida.

Lema 3.1. *Sea G un grupo localmente compacto, $\mathcal{C}$ la familia de todos los subconjuntos compactos de G y sea $\mathcal{U}$ la familia de todas las vecindades abiertas de e. Para cada $U \in \mathcal{U}$ definimos $h_U : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ por $h_U(K) = \#(K : U)/\#(K_0 : U)$. Entonces: h_U cumple con las siguientes propiedades:*

$$0 \leq h_U(K) \leq \#(K : K_0) \tag{3.2}$$

$$h_U(K_0) = 1 \tag{3.3}$$

$$h_U(xK) = h_U(K) \tag{3.4}$$

$$h_U(K_1) \leq h_U(K_2) \ \textit{si} \ K_1 \subset K_2 \tag{3.5}$$

$$h_U(K_1 \cup K_2) \leq h_U(K_1) + h_U(K_2) \ \textit{y} \tag{3.6}$$

$$h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2) \ \textit{si} \ K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset \tag{3.7}$$

Para cada U, K_1, K_2 y x.

Demostración. Primero notemos que

$$\#(K : U) \leq \#(K : K_0)\#(K_0 : U) \tag{3.8}$$

para toda K y U; esto lo podemos ver comprobando que si $\{x_i\}_1^m$ y $\{y_i\}_1^n$ son sucesiones tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^m x_iK_0$ y $K_0 \subset \bigcup_{j=1}^n y_jU$, entonces $K \subset \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n x_iy_jU$. Si dividimos ambos lados de (3.8) por $\#(K_0 : U)$, obtenemos la relación (3.2). Las propiedades (3.3), (3.4), (3.5) y (3.6) se siguen de la definición. En vista de (3.6), podemos probar (3.7) observando que

$$\#(K_1 \cup K_2 : U) \geq \#(K_1 : U) + \#(K_2 : U) \tag{3.9}$$

siempre que
$$K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset. \tag{3.10}$$
Así, suponemos que (3.10) es cierta y que $\{x_i\}_1^n$ es una sucesión de puntos tales que $n = \#(K_1 \cup K_2 : U)$ y $K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i=1}^n x_iU$. Entonces cada x_iU satisface a lo más uno de K_1 y K_2. En efecto, supongamos que x_iU satisface a K_1 y K_2, es decir que $x_iU \cap K_1 \neq \emptyset$ y que $x_iU \cap K_2 \neq \emptyset$ entonces existen u_j y k_{1n} tales que $x_iu_j = k_{1n}$ y existe $u_{j'}$ y k_{2n} tales que $x_iu_{j'} = k_{2n}$, como U es una vecindad de e entonces cada $u \in U$ posee inverso, de donde $x_i = k_{1n}u_j^{-1} = k_{2n}u_{j'}^{-1}$, pero esto implica que $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} \neq \emptyset$ lo que contradice nuestra hipótesis. De donde $x_iU \cap K_1 = \emptyset$ ó $x_iU \cap K_2 = \emptyset$. (para otros casos x_i pertenecería a $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1}$), así podemos particionar la sucesión $\{x_i\}_1^n$ en sucesiones $\{y_i\}_1^j$ y $\{z_i\}_1^k$ tales que $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^j y_iU$ y $K_2 \subset \bigcup_{i=1}^k z_iU$. Relacionando (3.9) y (3.6) se tiene.
Así las relaciones (3.2) a (3.7) se han probado.

$\square$

Para cada K en $\mathcal{C}$ sea I_K el subintervalo $[0, \#(K : K_0)]$ de $\mathbb{R}$.
Sea X el espacio producto $\Pi_{\mathcal{C}} I_K$, dotado con la topología producto. Dode cada intervalo I_K es compacto, el teorema de Tychonoffs implica que X es compacto. De acuerdo con la propiedad (3.2), cada función h_U pertenecen a X. Para cada vecindad abierta V de e sea $S(V)$ la clausura en X del conjunto $\{h_U : U \in \mathcal{U} \text{ y } U \subset V\}$. Es claro que si $V_1, \ldots, V_n$ pertenecen a $\mathcal{U}$ y si $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ entonces $h_V \in \bigcap_{i=1}^n S(V_i)$; en particular, la cerradura del conjunto $S(V)$, $V \in \mathcal{U}$, satisface la propiedad de la intersección finita. Por lo tanto la compacidad de X implica que $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} S(V)$ es no vacía. Si cambiamos, si elegimos un elemento h de $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} S(V)$ que los represente a todos ellas. Esta función h es nuestro limite de la función h_U.

Lema 3.2. *Sea G un grupo localmente compacto, sea X, $S(V)$ y h como se definieron anteriormente, entonces: h cumple con las siguientes propiedades:*

$$0 \leq h(K), \tag{3.11}$$

$$h(\emptyset) = 0 \tag{3.12}$$

$$h(K_0) = 1, \tag{3.13}$$

$$h(xK) = h(K), \tag{3.14}$$

$$h(k_1) \leq h(K_2) \ \textit{si} \ K_1 \subset K_2, \tag{3.15}$$

$$h(K_1 \cup K_2) \leq h(K_1) + h(K_2), y \tag{3.16}$$

$$h(K_1 \cup K_2) = h(K_1) + h(K_2) \ \textit{si} \ K_1 \cap K_2 = \emptyset. \tag{3.17}$$

Demostración. Iniciaremos con (3.16). Recordar que X está definido de tal forma que

1. Los elementos de X son funciones de $\mathcal{C}$ a $\mathbb{R}$, y
2. para cada K en $\mathcal{C}$ el mapeo de X a $\mathbb{R}$ que lleva F a $F(K)$ es continua.

Así para cada elección de subconjuntos compactos K_1 Y K_2 de G el mapeo de X a $\mathbb{R}$ definido por

$$F \mapsto F(K_1) + F(K_2) \mapsto F(K_1 \cup K_2) \tag{3.18}$$

es continua. Así este mapeo es una suma no negativa para cada h_U (ver (3.6), es no negativa para cada punto en cada conjunto $S(V)$. En particular es no negativa para h, y así está probado (3.16).
La propiedad (3.11) es clara, y las propiedades de la (3.12) a la (3.15) pueden ser probadas con argumentos similares a los usados para (3.16). Probemos (3.17). Supongamos que K_1 y K_2 son subconjuntos compactos disjuntos de G. De acuerdo a la proposición hay conjuntos abiertos disjuntos U_1 y U_2 tales que $K_1 \subset U_1$ y $K_2 \subset U_2$ y por la proposición 2.10 existen vecindades abiertas V_1 y V_2 de e tales que $K_1V_1 \subset U_1$ y $K_2V_2 \subset U_2$. Entonces K_1V y K_2V son disjuntos y para cada U que pertenece a $\mathcal{U}$ y satisface $U \subset V^{-1}$ tenemos

$$h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2)$$

(ver 3.7). Consecuentemente el mapeo definido para (3.18) se anula para cada elemento de $S(V^{-1})$. Ya que $h \in S(V^{-1})$, se tiene la propiedad (3.17).

$\square$

Ahora estamos en posición para construir la prometida medida exterior en G.

Teorema 3.1. *Si G es un grupo localmente compacto. Entonces existe una medida de Haar izquierda en G.*

Demostración. Definimos μ^* sobre la colección de conjuntos abiertos de G por

$$\mu^*(U) = sup\{h(K) : K \subset U \quad \text{y} \quad K \in \mathcal{C}\}, \tag{3.19}$$

y extendido para la colección de todos los subconjuntos de G por

$$\mu^*(A) = inf\{\mu^*(U) : A \subset U \quad \text{y} \quad U \quad \text{abierto}\}. \tag{3.20}$$

Es claro que μ^* es no negativa, ya que es monótona, y que $\mu^*(\emptyset) = 0$.
El argumento dado en la prueba del Teorema de la Representación de Riesz, prueba que podemos verificar la subaditividad contable de μ^* observando que cada sucesión $\{U_i\}$ de subconjuntos abiertos de G satisface

$$\mu^*(\bigcup_i U_i) \leq \sum_i \mu^*(U_i). \tag{3.21}$$

Así, supongamos que $\{U_i\}$ es una sucesión de subconjuntos abiertos de G. Si K es un subconjunto compacto de $\bigcup_i U_i$. Entonces existe un entero positivo n tal que $K \subset \bigcup_i U_i$, y existen subconjuntos compactos $K_1, \ldots, K_n$ de $U_1, \ldots, U_n$ tales que $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Se sigue que

$$h(K) \leq \sum_{i=1}^n h(K_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu^*(U_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(U_i)$$

(ver (3.16) y (3.19)), como K es un subconjunto compacto arbitrario de $\bigcup_i U_i$, que cumple (3.21). Así μ^* es una medida exterior de G.
Podemos comprobar que cada subconjunto de Borel de G es μ^*-medible por verificación de que si U y V son subconjuntos abiertos de G y si $\mu^*(V) < +\infty$, entonces

$$\mu^*(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^{\complement}) \tag{3.22}$$

(ver prueba de proposición (7.2.9) de [5]).

Procederemos comprobando la desigualdad. Si ϵ es un número positivo. Elegimos un subconjunto compacto K de $V \cap U$ tal que

$$h(K) > \mu^*(V \cap U) - \epsilon, \tag{3.23}$$

entonces elegimos un subconjunto compacto L de $V \cap K^{\complement}$ tal que $h(L) > \mu^*(V \cap K^{\complement}) - \epsilon$. Entonces K y L son disjuntos y así $V \cap U^{\complement} \subset V \cap K^{\complement}$. L satisface

$$h(L) > \mu^*(V \cap U^{\complement}) - \epsilon. \tag{3.24}$$

Se sigue de (3.17), (3.19), (3.23) y (3.24) que

$$\begin{aligned} \mu^*(V \cap U) + & \mu^*(V \cap U^{\complement}) - 2\epsilon < h(K) + h(L) \\ & = h(K \cup L) \leq \mu^*(V) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dado que ϵ es arbitrario, se sigue (3.22). Consecuentemente $\mathcal{B}(G)$ está incluido en la σ-álgebra de conjuntos μ^*-medibles, y la restricción de μ^* en $\mathcal{B}(G)$ es una medida. Llamamos a esta medida μ.
Notar que si K es compacto, U abierto y $K \subset U$, entonces $h(K) \leq \mu(U)$. De este resultado y de (3.20) se sigue que

$$h(K) \leq \mu(K). \tag{3.26}$$

Además, si K es un subconjunto compacto y si U es un subconjunto abierto que incluye a K y tiene cerradura compacta (ver proposición 2.6), entonces

$$\mu(K) \leq \mu(U) \leq h(U^{-1}).$$

Es decir que μ es finita en los subconjuntos compactos de G. La regularidad exterior de μ se sigue de (3.20), y la regularidad interior de (3.19) y (3.26). Es fácil observar que μ es diferente de cero e invariante bajo traslación (usar (3.13), (3.14), (3.19) y (3.20)). Así μ es la medida requerida. □

Proposición 3.2. *Si G es un grupo localmente compacto, y si μ es una medida de Haar izquierda. Entonces cada subconjunto abierto no vacío U de G satisface $\mu(U) > 0$ y cada función no negativa f que pertenece a $\mathcal{K}(G)$ y es distinta de cero satisface $\int f d\mu > 0$.*

Demostración. Como μ es regular y diferente de cero, podemos elegir un conjunto compacto K tal que $\mu(K) \neq 0$. Si U es un subconjunto no vacío de G. Entonces $\{xU\}_{x \in G}$ es una cobertura abierta del conjunto compacto K, y así existe una colección finita, digamos $x_1, \ldots, x_n$ de elementos de G tales que los conjuntos

x_iU, $i = 1, \cdots, n$ cubren K. La relación $\mu(K) \leq \sum_i \mu(x_iU)$ y la invarianza bajo traslación de μ implica que $\mu(K) \leq n\mu(U)$ y de aquí que $\mu(U) \geq 0$. Así la primera parte del lema se ha probado.
Ahora supongamos que f es una función no negativa que pertenece a $\mathcal{K}(G)$ y no es identicamente nula. Entonces existe un número positivo ϵ y un conjunto abierto no vacío U tal que $f \geq \epsilon\mathcal{X}_U$.Entonces $\int f d\mu \geq \epsilon\mu(U) > 0$. □

Teorema 3.2. *Sea G un grupo localmente compacto y μ, ν son medidas izquierdas en G. Entonces existe un número real positivo c tal que $\mu = c\nu$.*

Demostración. Sea g una función no negativa que pertenezca a $\mathcal{K}(G)$ y no identicamente nula (g se tomará fijo en toda la prueba), y sea f una función arbitraria en $\mathcal{K}(G)$. Como $\int g d\mu \neq 0$ (Proposición 3.2), podemos formar la proporción $\int f d\mu / \int g d\mu$. Probaremos que esta proporción depende únicamente de la función f y g, no en particular de la medida de Haar μ usada en esta comparación, de aquí que la medida de Haar ν satisface

$$\frac{\int f d\nu}{\int d g\nu} = \frac{\int f d\mu}{\int g d\mu},$$

y por lo tanto satisface $\int f d\nu = c \int f d\mu$, donde c esta definido por $c = \int g d\nu / \int g d\mu$. Dado que esto es válido para un f arbitrario en $\mathcal{K}(G)$, teorema (7.2.8) de [5] implica que $\nu = c\mu$.
Retomemos la proporción $\int f d\mu / \int g d\mu$. La proposición (7.6.4) de [5] implica que si $h \in \mathcal{K}(G \times G)$, entonces las integrales iteradas $\int \int h(x, y)\mu(dx)\lambda(dy)$ y $\int \int h(x, y)\lambda(dy)\mu(dx)$ existen. Si en $\int \int h(x, y)\lambda(dy)\mu(dx)$ cambiamos el orden de integración, usando la invarianza bajo traslación de la medida de Haar μ cambiamos x por $y^{-1}x$ (ver ecuación 3.1), revertimos otra vez el orden de integración y finalmente reemplazamos y por xy, encontraremos que

$$\begin{aligned} \int \int h(x, y)\lambda(dy)\mu(dx) &= \int \int h(y^{-1}x, y)\mu(dx)\lambda(dy) \\ &= \int \int h(y^{-1}, xy)\lambda(dy)\mu(dx). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Si aplicamos esta identidad a la función h definida por $h(x, y) = f(x)g(yx)/\int g(tx)\lambda(dt)$. (Notar que h no pertenece a $\mathcal{K}(G \times G)$; las proposiciones 3.1 y 3.2 implican que $x \mapsto \int g(tx)\lambda(dt)$ es continua y no se anula; además, si $K = sopp(f)$ y

$L = sopp(g)$, entonces $sopp(h) \subset K \times LK^{-1}$) para esta función h tenemos $h(y^{-1}, xy) = f(y^{-1})g(x)/\int g(ty^{-1})\nu(dt)$, y así la ecuación (3.27) implica que

$$\int f(x)\mu(dx) = \int g(x)\mu(dx) \int \frac{f(y^{-1})}{\int g(ty^{-1})\lambda(dt)} \lambda(dy).$$

Así, la proporción de $\int f d\mu$ a $\int g d\mu$ dependen de f y g, pero no de μ, y la prueba está completa. □

3.1.2. Propiedades de la medida de Haar

Si G es un grupo localmente compacto y si μ es una medida regular de Borel en G. Entonces el mapeo $x \mapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo de G sobre sí mismo y así los subconjunto A de G que pertenece a $\mathcal{B}(G)$ son exactamente para los cuales A^{-1} pertenece a $\mathcal{B}(G)$.
Definimos una función $\breve{\mu}$ en $\mathcal{B}(G)$ por $\breve{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$. Es fácil observar que $\breve{\mu}$ es una medida regular de Borel en G. La relación

$$\int f d\breve{\mu} = \int \check{f} d\mu \tag{3.28}$$

es cierta si f es una función característica.
En efecto

$$\int_A f d\breve{\mu} = \breve{\mu}(A) = \mu(A^{-1}) = \int_{A^{-1}} \check{f} d\mu.$$

se sigue en general de la linealidad de la integral y el teorema de convergencia monótona.

Proposición 3.3. *Si G es un grupo localmente compacto y si μ es una medida regular de Borel en G. Entonces μ es una medida de Haar izquierda si y sólo si $\breve{\mu}$ es una medida de Haar derecha y es una medida de Haar derecha si y sólo si $\breve{\mu}$ es una medida de Haar izquierda.*

Demostración. La identidad $(Ax)^{-1} = x^{-1}A^{-1}$ implica que $\breve{\mu}(Ax) = \breve{\mu}(A)$ para cada $x \in G$ y cada $A \in \mathcal{B}(G)$ si y sólo si $\mu(x^{-1}A^{-1}) = \mu(A)^{-1}$ para cada $x \in G$ y cada $A \in \mathcal{B}(G)$. Así, tenemos la primera parte de la prueba. Podemos derivar la segunda parte de la primera sustituyendo μ por $\breve{\mu}$ y que $\breve{\breve{\mu}} = \mu$. □

Proposición 3.4. *Si G es un grupo localmente compacto. Entonces existe una única medida de Haar en G, salvo por un multiplo escalar.*

Demostración. En vista de la proposición anterior ,este corolario es una consecuencia inmediata de los teoremas (3.1) y (3.2) □

Proposición 3.5. *Si G es un grupo localmente compacto y si μ es una medida de Haar izquierda en G. Entonces μ es finita si y sólo si G es compacto.*

Demostración. La regularidad de μ implica que μ es finita si G es compacto. Supongamos que μ es finita.Si K es un subconjunto compacto de G tal que $\mu(K) > 0$ (por ejemplo, K puede ser un conjunto compacto cuyo interior es no vacío) como $\mu(G)$ es finita implica que existe una frontera superior, por ejemplo $\mu(G)/\mu(K)$, por la longitud de las sucesiones finitas $\{x_i\}_1^n$ para las cuales los conjuntos $x_iK \quad : i = 1, \cdots, n$ son disjuntos. Así podemos elegir un entero positivo n y puntos $x_1, \cdots, x_n$ tales que los conjuntos $x_iK \quad i = 1, \cdots, n$, son disjuntos, pero tales que al no cambiar x_{n+1} los conjuntos $x_iK \quad : i = 1, \cdots, n+1$ son disjuntos. Se sigue que si $x \in G$, entonces xK está en $\bigcup_{i=1}^n x_iK$ y así x pertenece a $(\bigcup_{i=1}^n x_iK)K^{-1}$; de donde G es igual al conjunto compacto $(\bigcup_{i=1}^n x_iK)K^{-1}$. □

Se sigue que cada grupo compacto G tiene una medida de Haar μ tal que $\mu(G) = 1$. Cuando se trabaja con grupos compactos a menudo se asume que la correspondiente medida de Haar fue normalizada en este sentido.
Si G es un grupo localmente compacto, y si μ es una medida de Haar izquierda en G. Entonces el mapeo $u \mapsto ux$ es homeomorfismo de G sobre sí mismo. Así para cada $x \in G$ la fórmula $\mu_x(A) = \mu(Ax)$ define una medida regular de Borel μ_x en G. Entonces la invarianza bajo traslación de μ implica que μ_x satisface $\mu_x(yA) = \mu(yAx) = \mu(Ax) = \mu_x(A)$ para cada y en G y cada A en $\mathcal{B}(G)$ y así es una medida de Haar izquierda. Por lo tanto (Teorema 3.2) para cada x existe un número positivo, digamos $\Delta(x)$, tal que $\mu_x = \Delta(x)\mu$.
La función $\Delta : G \mapsto \mathbb{R}$ definida en este camino es llamada **la función modular** de G.
Si ν es otra medida de Haar izquierda de G, entonces existe una constante positiva c tal que $\nu = c\mu$ y así $\nu_x = c\mu_x = c\Delta(x)\mu = \Delta(x)\nu$ para cada $x \in G$, de donde la función Δ está determinada por el grupo G y no depende en particular de la medida de Haar izquierda usada en esta definición.

Recordemos que $(\mathcal{X}_A)_x = \mathcal{X}_{Ax}$ para cada miembro x y cada subconjunto A de G. Se sigue que

$$\int f_x d\mu = \Delta(x) \int f d\mu \tag{3.29}$$

es cierta si f es la función característica de un subconjunto de Borel de G, y por lo tanto f es una función de Borel que es no negativa y μ-integrable.

Proposición 3.6. *Sea G un grupo localmente compacto, y Δ la función modular de G. Entonces*

1. *Δ es continua, y*
2. *$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ para cada x y y en G.*

Demostración. Si μ es una medida de Haar izquierda en G, y si f es una función no negativa que pertenece a $\mathcal{K}(G)$ y no es idénticamente cero. Dado que $\int f d\mu \neq 0$ (por Lema (3.2) y la proposición 3.1 y la ecuación (3.2) implican la continuidad de Δ. La relación $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ de calcular

$$\Delta(xy)\mu(A) = \mu(Axy) = \Delta(y)\mu(Ax) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(A).$$

$\square$

Un grupo localmente compacto G es **unimodular** si su función modular satisface $\Delta(x) = 1$ para cada x en G. Por lo tanto un grupo es unimodular si y sólo si cada medida de Haar izquierda en G es una medida de Haar derecha y si y sólo si la colección de todas medidas de Haar izquierdas en G coincide con la colección de todas las medidas de Haar derechas en G. Es claro que cualquier grupo localmente compacto conmutativo es unimodular.

Proposición 3.7. *Cualquier grupo compacto es unimodular.*

Demostración. Si G es un grupo compacto y si Δ es su función modular. La relación $\Delta(x^n) = ((\Delta(x))^n$ para cada entero positivo n y cada $x \in G$ (Proposición 3.6); como Δ es no acotado existe un elemento $x \in G$ que satisface $\Delta(x) > 1$ o que satisface $0 < \Delta(x) < 1$ (pero entonces $\Delta(x^{-1}) > 1$). Sin embargo la continuidad de Δ y la densidad de G implican que Δ tiene límite. Por lo tanto $\Delta(x) = 1$ para cada $x \in G$. $\square$

Proposición 3.8. *Si G es un grupo localmente compacto y si μ es una medida de Haar izquierda en G. Entonces cada subconjunto de Borel A de G satisface*

$$\check{\mu}(A) = \int_A \Delta(x^{-1})\mu(dx).$$

Demostración. Definamos una medida ν en $\mathcal{B}(G)$ por

$$\nu(A) = \int_A \Delta(x^{-1})\mu(dx).$$

Probaremos que ν es regular, que es una medida de Haar derecha y finalmente que $\nu = \check{\mu}$.

Comenzaremos con la regularidad de ν. Para cada entero positivo n sea G_n el conjunto abierto de G definido por

$$G_n = \{x \in G : \frac{1}{n} < \Delta(x^{-1}) < n\}.$$

Si U es un subconjunto abierto de G. Dado que $\nu(U) = lim_n \nu(U \cap G_n)$, podemos probar que

$$\nu(U) = sup\{\nu(K) : K \subset U \text{ y } K \text{ compacto}\}$$

observando que

$$\nu(U \cap G_n) = sup\{\nu(K) : K \subset U \cap G_n \text{ y } K \text{ compacto}\}$$

para cada n. Sin embargo esta última ecuación es una consecuencia inmediata de la regularidad de μ y del hecho que $1/n < \Delta(x^{-1}) < n$ para cada $x \in G_n$ (considerar los casos donde $\mu(U \cap G_n) = +\infty$ y donde $\mu(U \cap G_n) < +\infty$ separadamente).

Ahora supongamos que A es un subconjunto de Borel arbitrario en G. Necesitamos probar que

$$\nu(A) = inf\{\nu(U) : A \subset U \text{ y } U abierto\}. \tag{3.30}$$

Podemos ciertamente restringir nuestra atención al caso donde $\nu(A)$ es finito. Sea ϵ un número positivo. Entonces para cada n podemos elegir un subconjunto U_n de G_n que contenga $A \cap G_n$ y satisface que $\nu(U_n) < \nu(A \cap G_n) + \epsilon/2^n$ (usando la regularidad de μ y el hecho que $1/n < \Delta(x^{-1}) < n$ para cada $x \in G_n$). El conjunto U definido por $U = \bigcup_n U_n$ está incluido en A y satisface $\nu(U) < \nu(A) + \epsilon$. como ϵ

es arbitrario, (3.30) está probada. Es fácil ver que cada subconjunto compacto K de G satisface $\nu(K) < +\infty$ (notar que $\mu(K)$ es finito y que la función $x \mapsto \Delta(x^{-1})$ tiene frontera en K). Por la tanto ν es regular y diferente de cero, además

$$\begin{aligned}\nu(Ay) &= \int \mathcal{X}_{Ay}(x)\Delta(x^{-1})\mu(dx)\\ &= \int \mathcal{X}_{Ay}(x)\Delta(y^{-1})\Delta((xy^{-1})^{-1})\mu(dx)\\ &= \Delta(y^{-1})\int (\mathcal{X}_A)_y(x)\Delta((xy^{-1})^{-1})\mu(dx)\\ &= \Delta(y^{-1})\Delta(y)\int \mathcal{X}_A(x)\Delta(x^{-1})\mu(dx)\\ &= \nu(A)\end{aligned}$$

y así, existe un número positivo c tal que $\nu = c\check{\mu}$ (ver proposición 3.3) y corolario 3.4, entonces

$$c = \frac{\nu(A)}{\check{\mu}(A)} = \frac{\nu(A)}{\mu(A^{-1})} = \frac{1}{\mu(A^{-1})}\int_A \Delta(x^{-1})\mu(dx)$$

siempre que A sea un conjunto de Borel que satisface $0 < \check{\mu}(A) < +\infty$. Puesto que Δ es continua y toma valores de 1 en e, podemos tomar el lado derecho de esta ecuación arbitrariamente cerrada a 1 para permitir que A sea una vecindad simétrica lo suficientemente pequeña de e. Así $c = 1$ y $\nu = \check{\mu}$. $\square$

Corolario 3.1. *Si G es un grupo localmente compacto, si μ es una medida de Haar izquierda en G y si ν es una medida de Haar derecha en G. Entonces un subconjunto A de Borel satisface $\mu(A) = 0$ si y sólo si $\nu(A) = 0$.*

Demostración. La fórmula $A \mapsto \int_A \Delta(t^{-1})\mu(dt)$ define una medida de Haar derecha en G (Proposición 3.8), y así existe una constante positiva c tal que $\nu(A) = c\int_A \Delta(t{-}1)\mu(dt)$ para cada A en $\mathcal{B}(G)$. Como Δ es positiva en todo G, se sigue que A satisface $\nu(A) = 0$ si y soló si esta satisface $\mu(A) = 0$. $\square$

3.2. Espacios de Hilbert

Definición 3.2. *Un espacio euclídeo es un espacio vectorial complejo H junto con una función que asocia a cada par ordenado de vectores $x, y \in H$ un número complejo (x, y), llamado producto interior de x e y, de manera tal que se verifican las siguientes propiedades:*

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$, *la barra denota conjugación compleja.*
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, *para todo $x, y, z \in H$.*
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$, *para todo $x, y \in H$ y para todo escalar α.*
4. $(x, x) \geq 0$, *para todo $x \in H$.*
5. $(x, x) = 0$ *sólo si $x = 0$.*

En virtud de la propiedad 3.2 podemos definir la **norma** de un vector x de H mediante la fórmula $||x|| = \sqrt{(x, x)}$. Se satisfacen las siguientes relaciones:

1. **Desigualdad de Schwarz**. Para todo $x, y \in H$, $|(x, y)| = ||x||||y||$.
2. **Desigualdad triangular**. Para todo $x, y \in H$. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Si definimos la distancia entre x, y mediante $d(x, y) = ||x - y||$ tenemos ahora que H es un espacio métrico.

Definición 3.3. *Un espacio euclídeo H recibe el nombre de espacio de Hilbert si toda sucesión de Cauchy converge en H, es decir, si H es completo con la métrica inducida por el producto interno.*

Definición 3.4. *Sea H un espacio de Hilbert. Si $(x, y) = 0$ para ciertos $x, y \in H$ decimos que x es ortogonal a y.*

Como $(x, y) = 0$ implica que $(y, x) = 0$ tenemos que la relación de ortogonalidad es una relación simétrica.

Definición 3.5. *Un conjunto de vectores U_α en H, donde α recorre algún conjunto de índices A, se llama ortonormal si satisface las relaciones de ortogonalidad $(U_\alpha, U_\beta) = 0$ para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \neq \beta$, y si está normalizado de modo que $||U_\alpha|| = 1$ para cada $\alpha \in A$. en otras palabras, $\{U_\alpha\}$ es ortogonal si*

$$(U\alpha, U_\beta) = \begin{cases} 1, & \textbf{\textit{si}} \quad \alpha = \beta \\ 0, & \textbf{\textit{si}} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Si $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ es ortogonal, asociamos a cada $x \in H$ una función compleja $\bar{x}$ sobre el conjunto de índices A, definida mediante

$$\bar{x}(\alpha) = (x, u_\alpha) \quad (\alpha \in A).$$

Ejemplos 3.2. ***Geometría de*** $L^2(I)$

Definición 3.6. *El espacio $L^2(I)$ se define como la clase de todas las funciones complejas medibles definidas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que satisfacen $(\int_I |f|^2)^{1/2} < \infty$.*

Definición 3.7. *Para $f, g \in L^2(I)$, definimos*

$$(f, g) = \int_I f\bar{g}. \tag{3.31}$$

Observe que

$$|(f,g)| \leq \int_I |f\bar{g}| = \int_I |f||g| \leq \int_I \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2) < \infty$$

y por lo tanto, la fórmula 3.31 define un número complejo. Es fácil verificar que la fórmula 3.31 define un producto interno en $L^2(I)$ y que, con la norma inducida por dicho producto interno $L^2(I)$ es un espacio métrico completo, es decir, es $L^2(I)$ es un espacio de Hilbert.
Si A y B son subintervalos de I entonces

$$(\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B) = \int_I \mathcal{X}_A \bar{\mathcal{X}}_B = \int_I A \cap B = 0$$

donde $\mathcal{X}_A$ y $\mathcal{X}_B$ son las funciones características de los conjuntos A y B, *respectivamente, en consecuencia existe un conjunto ortogonal infinito, lo cual implica que $L^2(I)$ es de dimensión infinita.*

3.3. Series de Fourier

Recordemos que la función exponencial compleja $e^{i\theta}$ podemos relacionarlas con las funciones trigonométricas $sen(\theta)$ y $cos(\theta)$ por las siguientes fórmulas:

$$sen(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}, \quad cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2},$$
$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta).$$

3.3.1. Series de Fourier de una función periódica.

Supongamos que $f(\theta)$ es una función definida en la recta real tal que $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ para todo θ. Tales funciones se dicen que son **periódicas de período** 2π, o 2π **periódicas**. Asumiremos que f es Rieman integrable sobre cualquier intervalo acotado; sería el caso si f es acotada y es continua excepto en un número finito de puntos en cada intervalo acotado. Ya que estaremos usando la función exponencial compleja, permitiremos que f admita valores complejos.
Queremos saber si f puede expandirse en una serie

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i}^{\infty}(a_n)cos(n\theta) + b_n sen(n\theta). \tag{3.32}$$

Donde $\frac{1}{2}a_0$ es el coeficiente de la función constante $1 = cos(0\theta)$ y el factor de $\frac{1}{2}$ por razones de conveniencia, b_0 no aparece porque $sen(0\theta) = 0$.
Mediante las fórmulas $cos(n\theta) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ y $(sen(n\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$ podemos reescribir (3.32) como

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \tag{3.33}$$

donde,

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{y} \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Alternativamente, si comenzamos con (3.33) usando las fórmulas $e^{in\theta} = cos(n\theta) + isen(n\theta)$, $cos(-n\theta) = cos(n\theta)$ y $sen(-n\theta) = -sen(n\theta)$ podemos cambiarla a la forma de (3.32) donde

$$a_0 = 2c_o, \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{y} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}). \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Si multiplicamos ambos lados de (3.33) por $e^{-ik\theta}$ (con k entero) e integramos de $-\pi$ a π. Tamando en cuenta que podemos integrar la serie término a término, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = \sum_{-\infty\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-x)\theta}d\theta$$

pero

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-x)\theta}d\theta = \frac{1}{i(n-k)}e^{i(n-k)\theta} \mid_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n-k} - (-1)^{n-k}}{i(n-k)} = 0 \quad \text{si} \quad n \neq k,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi \quad \text{si} \quad n = k.$$

El único término que sobrevive a la integración es el término con $n = k$, obteniendo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta} = 2\pi c_k.$$

En otras palabras sustituyendo el entero k por n, tenemos la fórmula deseada para los coeficientes c_n;

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta. \quad (3.36)$$

Ahora es fácil el problema de encontrar los coeficientes a_n y b_n para la serie (3.32)

$$a_0 = 2c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta d\theta),$$

y para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(e^{-in\theta} + e^{in\theta})d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)cos(n\theta)d\theta,$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(e^{-in\theta} - e^{in\theta})d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)sen(n\theta)d\theta;$$

es decir,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)cos(n\theta)d\theta \quad (n \geq 0), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)sen(n\theta)d\theta \quad (n \geq 1). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Definición 3.8. *Supongamos que f es periódica con periodo 2π e integrable sobre $[-\pi, \pi]$. Los números c_n definidos por (3.36) o los números a_n y b_n definidos por (3.37) son llamados los coeficientes de Fourier de f y las correspondientes series*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad o \quad \sum_{1}^{\infty}(a_n cos(n\theta) + b_n sen(n\theta))$$

son llamadas las series de Fourier de f.

En lugar de integrar de $-\pi$ a π en (ecuación 3.36) y (ecuación 3.37) igualmente podemos integrar sobre cualquier intervalo de longitud 2π, por ejemplo de 0 a 2π, el resultado será el mismo dada que los integrandos son todos 2π periódicos.

Lema 3.3. *Si F es una función con periodo P, entonces $\int_a^{a+P} F(x)dx$ es independiente de a.*

Demostración. Sea

$$g(a) = \int_a^{a+P} F(x)dx = \int_0^{a+P} F(x)dx - \int_0^a F(x)dx.$$

Por el teorema fundamental del cálculo $g'(a) = F(a + P) - F(a)$, por el teorema de periocidad de F, g' es idénticamente nula. Por lo tanto g es constante. $\square$

Otra observación útil en este contexto es que

$$\int_{-a}^{a} F(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a F(x)dx & ; F \quad \text{par} \\ 0 & ; F \quad \text{impar} \end{cases}$$

Recordemos que F es par si $F(-x) = F(x)$ y F es impar si $F(-x) = -F(x)$, entonces $cos(n\theta)$ es par y $sen(n\theta)$ es impar.

Lema 3.4. *Con referencia a las fórmulas de (3.37).*

$$si\ \ f\ \ es\ \ impar.\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)cos(n\theta)d\theta\ \ y\ \ b_n = 0;$$
$$si\ \ f\ \ es\ \ par.\quad a_n = 0\ \ y\ \ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)sen(n\theta)d\theta.$$

Aunque la serie de Fourier de una función f 2π-periódica esté escrita en la forma trigonométrica (3.32) ó en la forma exponencial (3.33), el término constante es

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta.$$

El cual no es más que el valor promedio o medio de f en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Lema 3.5. *El término constante en la serie de Fourier de una función f 2π-periódica, es el valor medio de f en el intervalo de longitud 2π. Este es tambien el valor medio de f en cualquier intervalo de longitud 2π.*

3.3.2. Teorema de convergencia.

Definición 3.9. *Una función definida en la recta real es llamada continua a trozos o suave a trozos en $\mathbb{R}$ si lo es en cualquier intervalo acotado $[a, b]$.*
Denotaremos el espacio de las funciones continuas a trozos y suaves a trozos en $\mathbb{R}$ por $PC(\mathbb{R})$ y $PS(\mathbb{R})$ respectivamente.

Consideremos nuevamente la serie de Fourier de función $f(\theta)$ 2π-periódica.

Recordemos que está definida por

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n cos(n\theta) + b_n sen(n\theta)) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \tag{3.38}$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)cos(n\psi)d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)sen(n\psi)d\psi, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-in\psi}d\psi. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Tomemos la suma parcial de la serie (3.32) y sea la suma $S_N^f(\theta)$ definida por

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{N}(a_n cos(n\theta) + b_n sen(n\theta)) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{in\theta} \tag{3.40}$$

Nuestro objetivo es mostrar que $S_N^f(\theta) \mapsto f$ cuando $N \mapsto \infty$.
Consideremos

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{i\pi(\theta-\psi)}d\psi = \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{(i\pi(\psi-\theta))}d\psi$$

donde ϕ es una función simple.
La última ecuación resulta de reemplazar n por $-n$, este cambio no afecta la suma.
Ahora haciendo el cambio de variable $\phi = \psi - \theta$ y usando el lema 3.3, obtenemos

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} f(\theta+\phi)e^{i\pi\phi}d\phi = \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\phi)e^{i\pi\phi}d\phi$$

$$S_N^f = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\phi)D_N(\phi)d\phi, \quad \text{donde} \quad D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N} e^{i\pi\phi} \tag{3.41}$$

La función $D_N(\phi)$ es llamada el n-ésimo **Kernel de Dirichlet**. Podemos expresar $D_N(\phi)$ de una forma más compacta reconociendo que es la suma de progresiones aritméticas finitas

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} e^{-iN\phi}(1 + e^{i\phi} + \ldots + e^{i2N\phi}) = \frac{1}{2\pi} e^{-iN\phi} \sum_0^{2N} e^{in\phi}.$$

donde $\sum_0^K r^n = (r^{K+1} - 1)/(r - 1)$ para cualquier $r \neq 1$, para $\phi \neq 0$ tenemos

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} e^{-iN\phi} \frac{e^{i(2N+1)\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{iN\phi}}{e^{i\phi} - 1}. \tag{3.42}$$

por otra parte, multiplicando y dividiendo por $e^{-i\phi/2}$, obtenemos

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\phi} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\phi}}{e^{i\frac{1}{2}\phi} - e^{-i\frac{1}{2}\phi}} = \frac{1}{2\pi} \frac{sen(N + \frac{1}{2})\phi}{sen(\frac{1}{2}\phi)}. \tag{3.43}$$

Lema 3.6. *Para cada N*

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(\theta) d\theta = \frac{1}{2}$$

Demostración. Sabemos que

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_1^N cos(n\theta).$$

Así tenemos

$$\int_0^{\pi} D_N(\theta) d\theta = \frac{0}{2\pi} + \frac{1}{\pi} (\sum \frac{sen(n\theta)}{n})|_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

De igual forma la integral de $-\pi$ a 0. □

Teorema 3.3 (Teorema de convergencia.)**.** *Si f es 2π-periódica y suave a trozos en $\mathbb{R}$ y S_N^f está definida por 3.37 y 3.39, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$$

para cualquier θ,en particular $\lim_{n\to\infty} S_N^f(\theta) = f(\theta)$ para cualquier θ cuando f es continua.

Demostración. Por lema 3.6, tenemos

$$\frac{1}{2}f(\theta-) = f(\theta-)\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\phi)d\phi, \quad \frac{1}{2}f(\theta+) = f(\theta+)\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\phi)d\phi$$

y por la ecuación 3.41

$$\begin{aligned} S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)] = &\int_{-\pi}^{0}[f(\theta+\psi) - f(\theta-)]D_N(\psi)d\psi \\ &+ \int_{0}^{\pi}[f(\theta+\psi) - f(\theta-)]D_N(\psi)d\psi \end{aligned} \tag{3.44}$$

Podemos probar que para cada θ fijo esta cantidad tienda a cero cuando $n \to \infty$. Por la fórmula (3.42), podemos escribir esto como

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)(e^{i(N+1)\phi} - e^{iN\phi})d\phi \tag{3.45}$$

donde $g(\phi)$ está definida por

$$\frac{f(\theta+\phi) - f(\theta-)}{e^{i\theta} - 1} \text{ para } -\pi < \phi < 0, \quad \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta+)}{e^{i\theta} - 1} \text{ para } 0 < \phi < \pi$$

Como g es una función de buen comportamiento en $[-\pi, \pi]$ y es suave excepto cerca de $\phi = 0$ (Donde $e^{i\phi} - 1$ se anula). Entonces por la regla de L'Hopital's

$$\lim_{\phi\to 0} g(\phi) = \lim_{\phi\to 0}\frac{f(\theta+\phi) - f(\theta-)}{e^{i\phi} - 1} = \lim_{\phi\to 0}\frac{f'(\theta+\phi)}{ie^{i\phi}} = \frac{f'(\theta+)}{i}.$$

Similarmente, $g(\phi)$ se aproxima al límite finito $i^{-1}f'(\theta)$ cuando ϕ se acerca a cero por la izquierda. Aquí, g es una función continua a trozos en $[-\pi, \pi]$. Así, por la desigualdad de Bessel's, estos coeficientes de Fourier

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)e^{-in\phi}d\phi$$

tienden a cero cuando $n \to \pm\infty$.

Pero la expresión (3.45) no es más que $C_{-N+1} - C_N$. Así esto se anula cuando $n \to \infty$ que es lo que necesitabamos demostrar. $\square$

3.3.3. Funciones de cuadrado sumable en el círculo y sus series de Fourier

Nos concentraremos en el espacio $L^2(\mathbb{S}^1)$, donde $\mathbb{S}^1$ denota la circunferncia unidad. El espacio $L^2(\mathbb{S}^1)$ es el espacio de Hilbert de todas las funciones complejas medibles f definidas en $\mathbb{S}^1$ que satisfacen

$$||f|| = (\int_0^1 |f|^2)^{1/2} < \infty.$$

Definición 3.10. *En este espacio el producto interno está definido por*

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(\bar{x})dx.$$

Es claro que $L^2(\mathbb{S}^1)$ es canónicamente isomorfo a $L^2(I)$. El principal resultado referente a este espacio es el siguiente teorema:

Proposición 3.9. *La familia de funciones definidas por*

$$e_n(x) = e^{2\pi inx} = cos(2\pi nx) + isen(2\pi nx)$$

forman una base ortonormal para $L^2(\mathbb{S}^1)$

En consecuencia, toda función $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ puede ser expandida mediante una serie de Fourier en la forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e_n$$

con coeficientes

$$\hat{f}(n) = (f, e_n) = \int_0^1 f\hat{e_n} = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi nx}dx.$$

La aplicación $f \to \hat{f}$ es un isomorfismo entre $L^2(\mathbb{S}^1)$ y $L^2(\mathbb{Z})$ y por lo tanto tenemos la identidad de Plancherel,

$$||f||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Lema 3.7. *Si $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$, entonces $\hat{f}'(n) = \frac{1}{2\pi in}\hat{f}(n)$.*

Demostración. $\hat{f}'(n) = \int_0^1 f'(x)e^{-2\pi inx}dx$. Integrando por partes obtenemos que $\hat{f}'(n) = e^{-2\pi inx}f(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x)(-2\pi in)dx = 2\pi in\hat{f}(n)$ □

Ejemplos 3.3. *Primero analizaremos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$.*
Sea $H = L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$, donde $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{S}^1 : |z| = 1\}$ es el círculo unitario y la medida $d\mu$ está definida por la fórmula

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(z)d\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(exp(it))dt.$$

El círculo unitario forma un grupo con respecto a la multiplicación heredada del campo $\mathbb{C}$. Observemos que la medida m satisface una condición de invarianza:

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(z_1 z)d\mu(z) = \int_{\mathbb{S}^1} f(z)d\mu(z).$$

El espacio H es un espacio de Hilbert con respecto a la forma

$$(f, g) = \int_{\mathbb{S}^1} f\bar{g}d\mu(z) \quad \text{y con la norma} \quad ||f|| = (f, f)^{1/2} = \int_{\mathbb{S}}^1 (|f|^2 d\mu)^{1/2}.$$

Sea $e_m(z) = z^m$. El conjunto $\{e_m : m \in \mathbb{Z}\} \subset H$ es cerrado con respecto a la conjugación compleja y la multiplicación puntual, porque $\bar{e}_m = e_{-m}$ y $e_n(z)e_m(z) = e_{n+m}(z)$. El espacio V generado linealmente por las funciones e_m, $m \in \mathbb{Z}$ tiene estructura de álgebra, contiene la función $1 = e_0$, es invariante bajo la conjugación compleja y separa los puntos de $\mathbb{S}^1$ porque la función $e_1(z) = z$ los separa. Por el teorema de Estone-Weierstrass para toda función continua $f \in C(\mathbb{S}^1)$ existe una función $f_n \in V$ tal que $f_n \to f$ en el espacio H. Las funciones $C(\mathbb{S}^1)$ forman un conjunto denso en $L^2(\mathbb{S}^1)$. Vemos entonces que el subespacio V generado por funciones e_m, $m \in \mathbb{Z}$ es denso en $L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$. Un cálculo sencillo *demuestra que*

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

De tal manera hemos demostrado que $\mathcal{B} = \{e_m : m \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal en $L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$. Aplicando teorema 5.10 obtenemos para toda $f \in L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$:

$$f = \sum (f, e_m) e_m \tag{3.46}$$

y además

$$||f|| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |(f, e_m)|^2. \tag{3.47}$$

En este caso la fórmula (3.47), el caso particular de la fórmula de Parceval, se denomina la fórmula de Plancherel.
La serie (3.46) converge en el espacio L^2. Recordemos que la convergencia en L^2 no implica siquiera la convergencia puntual. Existe incluso una función continua f tal que

$$f(1) \neq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \int_{\mathbb{S}^1} f(z) z^{-m} d\mu(z).$$

Sin embargo si aseguramos la suavidad de la función, la convergencia de la función resulta uniforme.

Definición 3.11. *Dada una función $f \in L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$, denotamos por $\tilde{f}$ a la función sobre $\mathbb{R}$ definida por la fórmula*

$$\tilde{f} = f(exp(it)).$$

La función $\tilde{f}$ es periódica con periodo 2π:

$$\tilde{f}(t + 2\pi) = f(exp(2\pi i + it)) = f(exp(it)) = \tilde{f}.$$

Denotamos por $Xf(exp(it)) = \frac{d}{dt}\tilde{f}(t)$. Decimos que f es de clase $C^k(\mathbb{S}^1)$ si la función $X^k f$ es continua.
Los coeficientes (f, e_m) que aparecen en la fórmula (3.46) se llaman los coeficientes de Fourier de la función f y la serie que vemos al lado derecho de la misma fórmula es la serie de Fourier de la función f.

Denotamos por $\hat{f}(m) = (f, e_m)$*. A cada* $f \in L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$ *tenemos asociada la sucesión* $(\hat{f})$ *que pertenece al espacio* $l^2(\mathbb{Z})$*. La fórmula de Plancherel (3.47) significa que la aplicación*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{S}^1, \mu) \ni f \to \hat{f} \in l^2(\mathbb{Z})$$

es una isometría. La fórmula (3.46) en cambio define la aplicación inversa a $\mathcal{F}$*. El operador* $\mathcal{F}$ *se llama* ***la transformación de Fourier*** *y la sucesión* $\hat{f}$ *es la* ***transformada de Fourier*** *de* f*.*

Proposición 3.10. *La transformación de Fourier de* $\mathcal{F}$ *es una isometría del espacio* $L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$ *sobre* $l^2(\mathbb{Z})$ *y la aplicación que asocia a la sucesión* $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z})$ *la función*

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e_m(z) \tag{3.48}$$

es una isometría de $l^2(\mathbb{Z})$ *sobre* $L^2(\mathbb{S}^1.d\mu)$*.*

Demostración. Empecemos estudiando las propiedades del operador definido por la fórnula (3.48). Para mostrar que la serie converge en L^2 para todo $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z})$ es suficiente notar que las sumas parciales forman una sucesión de Cauchy. Tenemos

$$|| \sum_{m=-n}^{m=n} a_m e_m - \sum_{m=k}^{m=k} a_m e_m || = \sum_{k \leq |m| \leq n} |a_m|^2.$$

La última suma es pequeña para $n > k$ suficientemente grande, porque

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} |a_m|^2 < \infty.$$

La sucesión de sumas parciales converge en el espacio completo $L^2(\mathbb{S}^1, d\mu)$, aunque el valor de $f(z)$ está definido tan solo por $d\mu$-casi todos los z. Por la proposición (5.9) $||f|| = ||(a_n)||_2$. La función f tiene coeficientes de Fourier a $\hat{f} = a_m$ entonces la transformación de Fourier es un operador sobreyectivo. □

Proposición 3.11. *Si* $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$*, entonces su transformada de Fourier satisface la condición* $(m\hat{f}(m)) \in l^2(\mathbb{Z})$*. Si* $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z})$ *y* $(ma_m) \in l^2(\mathbb{Z})$*, entonces la serie (3.48) converge uniformemente y la función* f *definida por (3.48) es de clase* $C(\mathbb{S}^1)$*.*

Demostración. La función Xf es continua, entonces pertenece a $L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$. Calculemos $\hat{X}f$:

$$\begin{aligned}\hat{X}f(m) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dt}f(exp(it))exp(-imt)dt\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(exp(it))\frac{d}{dt}(exp(-imt))dt\\ &= im\hat{f}(m).\end{aligned}$$

La sucesión $(m\hat{f}(m))$ es entonces elemento de $l^2(\mathbb{Z})$, porque $\hat{X}f \in l^2(\mathbb{Z})$. Si ahora (a_m) es una sucesión que multiplicada por (m) pertenece a $l^2(\mathbb{Z})$, entonces podemos estimar las sumas parciales de (3.48) para $k > n > 0$ de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}|\sum_{m=-k}^{k}a_m e_m(z) - \sum_{m=-n}^{m=n}a_m e_m(z)| &= |\sum_{n<|m|<k}a_m e_m(z)| \leq |\sum_{n<|m|<k}a_m|\\ &= \sum_{n<|m|<k}\frac{1}{|m|}|m||a_m| \leq (\sum_{n<|m|<k}\frac{1}{|m|^2})^{1/2}(\sum_{n<|m|<k}|ma_m|^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

En virtud de que $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|ma_m|^2$ y $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a_m|^2} < \infty$ las sumas parciales de (3.48) difieren poco con respecto a la norma $sup_{z\in\mathbb{S}^1}|f(z)|$ cuando k y n son suficientemente grandes. La serie converge en el espacio $C^1(\mathbb{S}^1)$. $\square$

Capítulo 4

EL HOMEOMORFISMO DE ROTACIÓN EN GRUPOS ABELIANOS COMPACTOS

4.1. Dinámica de rotaciones en grupos abelianos compactos.

En esta sección haremos el estudio de la dinámica topológica de las rotaciones en grupos abelianos compactos. Antes de hacer el análisis en general, analizaremos la dinámica en dos ejemplos importantes: el círculo $\mathbb{S}^1$ y el toro $\mathbb{T}^n$.
Sea G un grupo topológico abeliano compacto.
Dado un elemento $\alpha \in G$ definimos la **rotación por** α como el homeomorfismo $R_\alpha : G \to G$ dado por $z \mapsto z\alpha$.
Denotemos por

$$R_\alpha^n = R_\alpha \circ \ldots \circ R_\alpha$$

a la n-ésima iteración de R_α. Si $z \in G$, definimos la órbita de z bajo R_α como

$$\mathcal{O}_{R_\alpha}(z) = \{R_\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

La siguiente definición general resultará ser muy útil en nuestro análisis.

Definición 4.1. *Decimos que $\alpha \in G$ es un generador monotético de G si el conjunto* *de trasladados de α, $T(\alpha) = \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en G. Si existe un tal generador monotético diremos que G es un grupo monotético*

Una primera propiedad importante de los grupos monotéticos es la siguiente:

Proposición 4.1. *Si G es grupo monotético, entonces G es abeliano.*

Demostración. Sea α un generador monotético de G. Entonces, $T(\alpha) = \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en G. Si $z, w \in G$, entonces

$$z = \lim_{j \mapsto \infty} n_j \alpha,$$

$$w = \lim_{k \mapsto \infty} m_k \alpha.$$

Luego,

$$\begin{aligned} z + w &= \lim_{j \mapsto \infty} n_j \alpha + \lim_{k \mapsto \infty} m_k \alpha \\ &= \lim_{j,k \mapsto \infty} (n_j + m_k)\alpha \\ &= \lim_{j,k \mapsto \infty} (m_k + n_j)\alpha \\ &= \lim_{k \mapsto \infty} m_k \alpha + \lim_{j \mapsto \infty} n_j \alpha \\ &= w + z. \end{aligned}$$

Por lo tanto G es abeliano. □

Ya hemos demostrado que $\mathbb{S}^1$ es un grupo topológico y es claro que es compacto.
Supongamos que $\alpha \in \mathbb{S}^1$ es racional, digamos, $\alpha = p/q$ con $(p, q) = 1$. Entonces, $q\alpha = 0$ en $\mathbb{S}^1$, lo que implica que el conjunto de trasladados de α, $T(\alpha) = \{0, \pm\alpha, \pm 2\alpha, \ldots, \pm(q-1)\alpha\}$ es un subconjunto finito de $\mathbb{S}^1$; es decir, α no es un generador monotético de $\mathbb{S}^1$

Proposición 4.2. *Si $\alpha \in \mathbb{S}^1$ es irracional, entonces $\mathbb{S}^1$ es un grupo monotético con generador α.*

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \mathbb{S}^1$ es irracional. Entonces, $T(\alpha)$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{S}^1$. Como $\mathbb{S}^1$ es compacto, el teorema de Bolzano-Weirstrass

implica que este conjunto tiene un punto de acumulación. Supongamos que la sucesión $\{z_n = n\alpha : n \geq 0\}$ es convergente. Entonces $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy; es decir, dado $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño se cumple que $|n_\alpha - m_\alpha| < \epsilon$, si n, m son suficientemente grandes. Esto es, $|(n-m)\alpha| < \epsilon$. Haciendo $k = m - n$ concluimos que $k\alpha < \epsilon$.
Esto implica que los trasladados de α, $\{\alpha,\ 2\alpha, \ldots, n\alpha\}$ particionan a $\mathbb{S}^1$ en intervalos (disjuntos) de longitud menor que ϵ. Como estos intervalos cubren a $\mathbb{S}^1$, se sigue que $T(\alpha)$ es denso en $\mathbb{S}^1$. Por lo tanto, $\mathbb{S}^1$ es monotético con generador α. □

De las proposiciones 4.1 y 4.2 podemos deducir que $\mathbb{S}^1$ es abeliano Si $z \in \mathbb{S}^1$, entonces $R_\alpha^n(z) = z + n\alpha$. En particular, $R_\alpha(0) = n\alpha$, y por lo tanto, la órbita de 0 bajo iteraciones de α coincide con $T(\alpha)$ ($\mathcal{O}_{R_\alpha}(0) = T(\alpha)$). Esto es, la órbita de 0 bajo iteraciones de R_α es un subconjunto denso de $\mathbb{S}^1$.
Si $z \neq 0$, entonces

$$\mathcal{O}_{R_\alpha}(z) = z + \mathcal{O}_{R_\alpha}(0) = \alpha + T(\alpha).$$

Si $\alpha = p/q$, entonces $R_\alpha^q(z) = z$ y por lo tanto, toda órbita de $\mathbb{S}^1$ es periódica de periodo q bajo iteraciones de R_α. En el caso irracional la situación es muy diferente.

Lema 4.1. *Si $\alpha \in \mathbb{S}^1$, entonces, son equivalentes:*

1. *La rotación $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es minimal, es decir toda órbita es densa.*
2. *G es un grupo monotético con generador α.*

Demostración. $a \Longrightarrow b$
R_α es minimal en $\mathbb{S}^1$, entonces $T(\alpha) = \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso, lo que significa que α es un generador monotético de $\mathbb{S}^1$ Por lo tanto $\mathbb{S}^1$ es un grupo monotético
$b \Longrightarrow a$
Como $\mathbb{S}^1$ es un grupo monotético con generador α, entonces $T(\alpha) = \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$
Por otra parte si $z \in \mathbb{S}^1$, entonces

$$\mathcal{O}_{R_\alpha}(z) = z + \mathcal{O}_{R_\alpha}(0) = z + T(\alpha).$$

Como $T(\alpha)$ es denso en $\mathbb{S}^1$, entonces $\mathcal{O}_{R_\alpha}(z)$ es densa.
Dado que la densidad de $\mathcal{O}_{R_\alpha}(z)$ no depende de z sino que de α, entonces $\mathcal{O}_{R_\alpha}(z)$ es densa para todo z. Por lo tanto R_α es minimal. $\square$

Ya hemos definido el toro, hemos demostrado que es un grupo topológico y es fácil demostrar que es compacto.
Un dominio fundamental para $\mathbb{T}^n$ es el cubo unitario:

$$I^n = \{(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1 (j = 1, \ldots, n)\}.$$

En I^n identificamos caras opuestas:

$$(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n) \sim (x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

El espacio de identificación es $\mathbb{T}^n$.
Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, la rotación por α en $\mathbb{T}^n$ está dada por:

$$R_\alpha(z_1, \cdots, z_n) = (z_1 + \alpha_1, \ldots, z_n + \alpha_n).$$

Para cada $m \in \mathbb{Z}$, la m-ésima iteración de un punto $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{T}^n$ está dada por:

$$R_\alpha^m(z_1, \ldots, z_n) = (z_1 + m\alpha_1, \ldots, z_n + m\alpha_n).$$

Si $\alpha_j \in \mathbb{Q}$, para todo $j = 1, \ldots, n$, entonces,

$$T(\alpha) = \{m\alpha = (m\alpha_1, \ldots, m\alpha_n) : m \in \mathbb{Z}\}$$

es un subconjunto finito de $\mathbb{T}^n$, y por lo tanto, α no es un generador monotético de $\mathbb{T}^n$.
Para analizar el análogo al caso irracional en $\mathbb{S}^1$ necesitamos la siguiente noción:

Definición 4.2. *Decimos que* $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *son* ***racionalmente independientes*** *si*

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \alpha_j \in \mathbb{Z}$$

con $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$*, implica que* $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$.

Proposición 4.3. *Si $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son racionalmente independientes, entonces $\mathbb{T}^n$ es un grupo monotético con generador α.*

Demostración. La demostración es inmediata a partir del teorema de Kronecker. Si $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son racionalmente independientes, entonces, para cada $\epsilon > 0$ y cualquiera números reales $x_1, \ldots, x_n$ existe un entero m y una familia de enteros $k_1, \ldots, k_m$ tales que

$$|m\alpha_j - k_j - x_j| < \epsilon \quad (1 \leq j \leq n).$$

Este teorema implica que el conjunto de trasladados de α,

$$T(\alpha) = \{(m\alpha_1, \ldots, m\alpha_n) : m \in \mathbb{Z}\}$$

es denso en $\mathbb{T}^n$. Por lo tanto, $\mathbb{T}^n$ es un grupo monotético con generador α. $\square$

Observación 4.1. *Si $z = (z_1, \ldots z_n) \in \mathbb{T}^n$, entonces*

$$\mathcal{O}_{R_\alpha}(z) = z + \mathcal{O}_{R_\alpha}(0) = z + T(\alpha)$$

.

Proposición 4.4. *Si $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son racionalmente independientes, entonces, son equivalentes:*

a. La rotación $R_\alpha : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ es minimal.

b. $\mathbb{T}^n$ es un grupo monotético con generador α.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$
R_α es minimal en $\mathbb{T}^n$, es decir toda órbita es densa en $\mathbb{T}^n$, entonces $T(\alpha) = \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso, lo que significa que α es un generador monotético de $\mathbb{T}^n$ Por lo tanto $\mathbb{T}^n$ es un grupo monotético
$b \Longrightarrow a$
Como $\mathbb{T}^n$ es un grupo monotético con generador α, entonces $T(\alpha) = \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{T}^n$

Por otra parte si $z \in \mathbb{T}^n$, entonces

$$\mathcal{O}_{R_\alpha}(z) = z + \mathcal{O}_{R_\alpha}(0) = z + T(\alpha).$$

Como $T(\alpha)$ es denso en $\mathbb{T}^n$, entonces $\mathcal{O}_{R_\alpha}(z)$ es densa.
Dado que la densidad de $\mathcal{O}_{R_\alpha}(z)$ no depende de z sino que de α, entonces $\mathcal{O}_{R_\alpha}(z)$ es densa para todo z. Por lo tanto R_α es minimal. $\square$

Sea G un grupo abeliano compacto. De acuerdo con el análisis que hicimos en las dos secciones anteriores, podemos intuir la siguiente propiedad:

Lema 4.2. *Si la rotación $R_\alpha : G \to G$ tiene una órbita densa, entonces R_α es minimal.*

Demostración. Sean $z, w \in G$ con órbitas $\mathcal{O}_{R_\alpha}(z)$ y $\mathcal{O}_{R_\alpha}(w)$, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} R_\alpha^n(w) &= w + n\alpha \\ &= z + n\alpha + (w - z) \\ &= R_\alpha^n(z) + (w - z). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Luego,

$$\overline{\mathcal{O}_{R_\alpha}(z)} = G \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{\mathcal{O}_{R_\alpha}(w)} = G.$$

$\square$

Teorema 4.1. *Si $\alpha \in G$, entonces, son equivalentes:*

a. La rotación $R_\alpha : G \to G$ es minimal.

b. G es un grupo monotético con generador α.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$
R_α es minimal en G, es decir toda órbita es densa en G, entonces $T(\alpha) = \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso, lo que significa que α es un generador monotético de G. Por lo tanto G es un grupo monotético
$b \Longrightarrow a$

Como G es un grupo monotético con generador α, entonces $T(\alpha) = \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en G.
Por otra parte si $z \in G$, entonces

$$\mathcal{O}_{R_\alpha}(z) = z + \mathcal{O}_{R_\alpha}(0) = z + T(\alpha).$$

Como $T(\alpha)$ es denso en G, entonces $\mathcal{O}_{R_\alpha}(z)$ es densa.
Por proposición 4.2 concluimos que R_α es minimal. □

4.2. Ergodicidad de las rotaciones en grupos abelianos compactos

Analizaremos la propiedad ergódica de las rotaciones en grupos abelianos compactos, seguiremos el mismo orden de ideas de la sección anterior. Probaremos las propiedades en el círculo y el toro, y después lo haremos en grupos abelianos compactos generales.

Sea $z \in G$ y $U \subset G$ un subconjunto abierto.
El tiempo que pasa la órbita de z en U bajo iteraciones de R_α se puede medir como:

$$|\{0 \leq k \leq n-1 : R_\alpha^k(z) \in U\}|.$$

($|\cdot|$ denota la cardinalidad del conjunto.) Si el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : R_\alpha^k(z) \in U\}|$$

existe, entonces mide el "tiempo promedio"que pasa la órbita de z en U. Observemos que

$$R_\alpha^k(z) \in U \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{X}_U(R_\alpha^k(z)) = 1,$$

donde $\mathcal{X}_U$ denota la función característica de U. El límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{X}_U(R_\alpha^k(z))$$

se llaman los **promedios temporales** (de Birkhoff ó ergódicos) de la función $\mathcal{X}_U$.
Si $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ (funciones continuas de G), podemos extender los promedios temporales en la forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R_\alpha^k(z))$$

y estudiar su convergencia. Este es el contenido del famoso teorema:

Teorema 4.2 (Ergódico de Birkhoff)**.**
Si $\varphi \in L^1(G)$, entonces el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R_\alpha^k(z))$$

existe para casi todo punto $z \in G$ (con respecto a la medida de Haar).

Definición 4.3. *Sea $\varphi \in \mathcal{K}(G)$. Decimos que φ es **invariante** bajo R_α si*

$$\varphi(R_\alpha(z)) = \varphi(z) = \varphi(R_\alpha^{-1}(z)) \quad \textit{para} \;\; \textit{todo} \;\; z \in G.$$

De acuerdo con esta definición, una función φ es invariante bajo R_α si φ es constante en las órbitas de puntos en G bajo iteraciones de R_α.
Decimos que $U \subset G$ es invarinte bajo R_α si $\mathcal{X}_U$ es invariante bajo R_α. Esto es,

$$R_\alpha(U) = U = R_\alpha^{-1}(U).$$

Definición 4.4. *Decimos que R_α es **ergódica** con respecto a la medida de Haar μ si para cualquier conjunto invariante U de G cumple que*

$$\mu(U) = 0 \quad \textit{ó} \quad \mu(U) = 1$$

De acuerdo con el teorema ergódico, si R_α es ergódica con respecto a la medida de Haar μ, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{X}_U(R_\alpha^k(z)) = \mu(U).$$

Esto es, la órbita de todo punto en G pasa por cualquier subconjunto U de medida

positiva. Más aún, la órbita de todo punto $z \in G$, bajo iteraciones de R_α, permanece en el conjunto U un intervalo de tiempo proporcional a $\mu(U)$.
La siguinte observación es una caracterización muy importante de la ergodicidad:

Observación 4.2. *R_α es ergódica con respecto de μ si y sólo si las únicas funciones invariantes bajo R_α son las constantes.*

En este apartado analizaremos la ergodicidad de las rotaciones en el círculo y el toro.

Lema 4.3. *Si $\alpha \in \mathbb{S}^1$ es irracional, entonces, son equivalentes:*

a. La rotación $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es ergódica con respecto a la medida de Haar.

b. $\mathbb{S}^1$ es un grupo monotético con generador α.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$
La medida de Haar en $\mathbb{S}^1$ asigna un valor positivo a cada subconjunto abierto $U \subset \mathbb{S}^1$. El conjunto $\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-n}(U)$ es un subconjunto abierto invariante bajo R_α. Como R_α es ergódica con respecto de μ, se sigue que

$$\mu(\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-n}(U)) = 1.$$

Supongamos que no existe órbita densa en $\mathbb{S}^1$, es decir, todas las órbitas son finitas en $\mathbb{S}^1$, pero entonces todo elemento es racional en $\mathbb{S}^1$, en particular $\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}$ sería un conjunto de racionales y así $\mu(\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}) = 0$ lo que contradice nuestra hipópótesis ya que $\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}$ es un abierto y su medida no puede ser cero. Esto es, existe un punto $z \in \mathbb{S}^1$ cuya órbita es densa en $\mathbb{S}^1$ mediante R_α. Trasladamos este punto a α, es decir, $R_\alpha(z) = z + T(\alpha)$ y como es densa entonces $T(\alpha)$ es densa. Por lo tanto concluimos que $T(\alpha)$ es densa en $\mathbb{S}^1$; es decir $\mathbb{S}^1$ es un grupo monotético con generador α.
$(b) \Longrightarrow (a)$
Sea f una función en $L^2(\mathbb{S}^1)$ la cual es acotada e invariante bajo R_α. Escribimos el desarrollo de en series de Fourier de f como:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n z}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(R_\alpha(z)) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi in(z-\alpha)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\hat{f}(n)e^{2\pi in\alpha}]\cdot e^{2\pi inz}. \end{aligned}$$

Como f es invariante bajo R_α se sigue que $f(R_\alpha(z)) = f(z)$. Por unicidad de los coeficientes de Fourier concluimos que

$$\hat{f}(n) = \hat{f}(n)e^{2\pi in\alpha}.$$

Luego,

$$\hat{f} = 0 \quad \text{ó} \quad e^{2\pi in\alpha} = 1.$$

Esto implica que $n = 0$ y por lo tanto, $f(z) = \hat{f}(0) = \text{constante}$; es decir, R_α es ergódica con respecto de μ. □

Proposición 4.5. *Si si* $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *son racionalmente independientes, entonces, son equivalentes:*

a. La rotación $R_\alpha : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ *es ergódica con respecto a la medida de Haar.*

b. $\mathbb{T}^n$ *es un grupo monotético con generador* α.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$
La medida de Haar en $\mathbb{T}^1$ asigna un valor positivo a cada subconjunto abierto $U \subset \mathbb{T}^n$. El conjunto $\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}(U)$ es un subconjunto invariante bajo R_α. Como R_α es ergódica con respecto de μ, se sigue que

$$\mu(\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}(U)) = 1.$$

Supongamos que no existe órbita densa en $\mathbb{T}^1$, es decir, todas las órbitas son finitas en $\mathbb{S}^1$, pero entonces todo elemento α $\mathbb{T}^1$ posee componentes racionalmente dependientes en $\mathbb{S}^1$, en particular $\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}$ sería un conjunto con componentes racionalmente depependientes y así $\mu(\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}) = 0$ lo que contradice nuestra hipótesis ya que $\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}$ es un abierto y su medida no puede ser cero. Esto es, existe un punto $z \in \mathbb{T}^1$ cuya órbita es densa en $\mathbb{T}^1$ mediante R_α. Trasladamos este

punto a α, es decir, $R_\alpha(z) = z + T(\alpha)$ y como es densa entonces $T(\alpha)$ es densa. Por lo tanto concluimos que $T(\alpha)$ es densa en $\mathbb{T}^1$; es decir $\mathbb{T}^1$ es un grupo monotético con generador α.
$(b) \Longrightarrow (a)$
Sea f una función en $L^2(\mathbb{T}^n)$ la cual es acotada e invariante bajo R_α. Escribimos el desarrollo en series de Fourier de f como:

$$f(z) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k_1,\ldots,k_n) e^{2\pi \sum_{j=1}^n k_j z_j}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(R_\alpha(z)) &= \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k_1,\ldots,k_n) e^{2\pi i \sum_{j=1}^n k_j(z_j+\alpha_j} \\ &= \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k_1,\ldots,k_n) e^{2\pi i \sum_{j=1}^n k_j \alpha_j} e^{2\pi \sum_{j=1}^n k_j z_j}. \end{aligned}$$

Como f es invariante bajo R_α se sigue que $f(R_\alpha(z)) = f(z)$. Por unicidad de los coeficientes de Fourier concluimos que

$$\hat{f}(k_1,\ldots,k_n) = \hat{f}(k_1,\ldots,k_n) e^{2\pi i \sum_{j=1}^n k_j \alpha_j}.$$

Luego,

$$\hat{f}(k_1,\ldots,k_n) = 0 \quad \text{ó} \quad e^{2\pi i \sum_{j=1}^n k_j \alpha_j} = 1.$$

Esto implica que $\sum_{j=1}^n k_j \alpha_j \in \mathbb{Z}$. Por independencia racional concluimos que $k_1 = \ldots = k_n = 0$. Luego, $\hat{f}(0) \neq 0$ y por lo tanto, $f(z) = \hat{f}(0) =$ constante; es decir, R_α es ergódica con respecto de μ. $\square$

Probaremos ahora que las propiedades de las rotaciones que vimos en la sección anterior, son también válidas para un grupo abeliano compacto general. Ya hemos introducido la noción general de los espacios L^p y el dual de G. Así, que estamos en condiciones de probar el resultado de forma general.

Teorema 4.3. *Si $\alpha \in G$, entonces, son equivalentes:*

a. La rotación $R_\alpha : G \to G$ es ergódica con respecto a la medida de Haar.

b. G es un grupo monotético con generador α.

Demostración. $(a) \implies (b)$ Sea μ la medida de Haar a utilizar. Entonces μ asigna a cada abierto $U \subset G$ una medida positiva. El conjunto $\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}(U)$ es un subconjunto invariante bajo R_α. Como R_α es ergódica con respecto de μ, se sigue que

$$\mu(\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}(U)) = 1.$$

Supongamos que no existe ninguna órbita densa en G, es decir, $\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}$ no tiene órbitas densas, entonces existe $U' \in G$ talque $U' \geq \bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1} = \emptyset$, como $\mu(U' \geq \bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}) = \mu(U') + \mu(\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1})$ lo que implica que $\mu(\bigcup_{n\geq 0} R_\alpha^{-1}) < 1$ ya que $\mu(U')$¿0 lo que contradice nuestra hipótesis.
Esto es, existe un punto $z \in G$ cuya órbita es densa en G mediante R_α. Trasladamos este punto a α, es decir, $R_\alpha(z) = z + T(\alpha)$ y como es densa entonces $T(\alpha)$ es densa. Por lo tanto concluimos que $T(\alpha)$ es densa en G; es decir G es un grupo monotético con generador α.
Probaremos la implicación $(b) \implies (a)$ en dos partes.

I. Si G es monotético con generador α, entonces $\varphi(\alpha) \neq 1$, para cada caracter no trivial $\varphi \in \hat{G}$.
Demostración. Supongamos que existe $\varphi \in \hat{G} \setminus \{1\}$ tal que $\varphi(\alpha) = 1$. Como φ es un homeomorfismo, se sigue que

$$\varphi(n\alpha) = \varphi(\alpha)^n = 1,$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Esto implica que los trasladados de α, $T(\alpha)$ es un subconjunto propio del kernel de φ; es decir, $T(\alpha) \subset ker(\varphi)$. Como $\varphi \neq 1$, se sigue que $ker(\varphi)$ es un subconjunto propio y cerrado de G. Esto implica que $T(\alpha)$ no es denso en G, es decir que no es monotético.

II. Si $\varphi(\alpha) \neq 1$, para cualquier caracter no trivial $\varphi \in \hat{G}$, entonces R_α es ergódica con respecto a la medida de Haar.
Demostración. Sea $f \in L^2(G)$ una función invariante bajo R_α. Escribimos su desarrollo en series de Fourier como:

$$f(z) = \sum_{\varphi\in\hat{G}} \hat{f}(\varphi)\cdot \varphi(z).$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(R_\alpha(z)) &= \sum_{\varphi\in\hat{G}} \hat{f}(\varphi)\cdot\varphi(z+\alpha) \\ &= \sum_{\varphi\in\hat{G}} [\hat{f}(\varphi)\varphi(\alpha)]\cdot\varphi(z). \end{aligned}$$

Esto es, la rotación actúa en funciones en $L^2(G)$ por multiplicación del coeficiente de Fourier $\hat{f}(\varphi)$ por $\varphi(\alpha)$.
Como f es invariante bajo R_α se sigue que $f(R_\alpha(z)) = f(z)$. Por unicidad de los coeficientes de Fourier concluimos que

$$\hat{f}(\varphi) = \hat{f}\varphi(\alpha).$$

Por hipótesis, $\varphi(\alpha) \neq 1$ si $\varphi \neq 1$. Luego,

$$\hat{f}(\varphi) = 0 \quad \text{si} \quad \varphi \neq 1.$$

Esto implica que $f(z) = \hat{f}(1) =$ constante y por lo tanto, R_α es ergódica con respecto de μ.

$\square$

Indice alfabético

Bibliografía

Bibliografía

[1] Hungerford,Thomas W. *Abstract Algebra an Introduction*. Cleveland State University.

[2] Munkres,James R. *Topología*, Massashusetts Institute of Technology, 2^a edición.

[3] Norberto Fava, Felipe Zó. *Medida e Integral de Lebesgue*, Instituto Argentino de Matemática.

[4] Devaney,Roberto L. *An Introduction to Chaotic Dinamical Systems*, Department of Mtthematics Boston University.

[5] Cohn,Donald L. *Measure Theory*

[6] Antoni Wawrzyńczyk. *Introducción al análisis funcional*

[7] Vilches, Mauricio A. Departamento de Análisisis-IMT UETJ.

[8] Folland, Gerald B. Fourier Analysis and it Applications.

[9] Rudin, Walter, Fourier Analysis on Groups, University or Wisconsin, Madison Wisconsin.

[10] Cruz López, Manuel, Dinámica de grupos abelianos compactos, www.demat.ugto.mx/manuel/lindex.html.