

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR.
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA.
ESCUELA DE MATEMÁTICA.



TEORÍA DEL GRADO TOPOLÓGICO DE BROUWER.
APLICACIONES AL ANÁLISIS Y AL CÁLCULO DE LA VARIABLE
COMPLEJA.

PRESENTADO POR:
ERIKA CARMENLINA ANGULO BENÍTEZ.
CARNÉ: AB06001.

PARA OPTAR AL GRADO DE:
LICENCIADA EN MATEMÁTICA.

ING. CARLOS MAURICIO CANJURA LINARES
DOCENTE DIRECTOR.

DR. SIMÓN ALFREDO PEÑA AGUILAR.
DOCENTE DIRECTOR.

CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN SALVADOR, 16 DE SEPTIEMBRE DEL 2013.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR.
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA.
ESCUELA DE MATEMÁTICA.



TEORÍA DEL GRADO TOPOLÓGICO DE BROUWER.
APLICACIONES AL ANÁLISIS Y AL CÁLCULO DE LA VARIABLE
COMPLEJA.

PRESENTADO POR:
ERIKA CARMENLINA ANGULO BENÍTEZ.
CARNÉ: AB06001.

PARA OPTAR AL GRADO DE:
LICENCIADA EN MATEMÁTICA.

ING. CARLOS MAURICIO CANJURA LINARES
DOCENTE DIRECTOR.

DR. SIMÓN ALFREDO PEÑA AGUILAR.
DOCENTE DIRECTOR.

CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN SALVADOR, 16 DE SEPTIEMBRE DEL 2013.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR.



Ing. Mario Roberto Nieto Lovo.
RECTOR.

MSc. Ana María Glower de Alvarado.
VICERRECTORA ACADÉMICA.

Dra. Ana Leticia Zavaleta de Amaya.
SECRETARIA GENERAL.

Lic. Francisco Cruz Letona.
FISCAL GENERAL.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA.

Msc. Martín Enrique Guerra Cáceres.
DECANO.

Lic. Arístides Paz Sánchez.
VICEDECANO.

Dr. José Nerys Funes Torres.
DIRECTOR DE LA ESCUELA DE MATEMÁTICA.

CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN SALVADOR, 16 DE SEPTIEMBRE DEL 2013.

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIA.

7 Por eso supliqué y se me concedió la prudencia;
invoqué y vino a mí el espíritu de sabiduría.
8 La preferí a cetros y tronos
y en su comparación tuve en nada la riqueza.
9 No la equiparé a la piedra más preciosa,
porque todo el oro a su lado es un puñado de arena
y ante ella la plata es como el barro.
10 La quise más que a la salud y a la belleza
y preferí tenerla como luz, porque su claridad no anochece.
11 Con ella me vinieron a la vez todos los bienes
e incalculables riquezas en sus manos.
12 Yo disfruté de todos, porque la Sabiduría los trae,
aunque ignoraba que ella fuera su origen.
13 Sin engaño la aprendí y sin envidia la comparto;
no escondo sus riquezas,
14 porque es un tesoro inagotable para los hombres,
y los que la adquieren se granjean la amistad de Dios,
recomendados por los dones que ofrece la instrucción.

Sabiduría, cap. 7; 7-14 .

Es mi intención que estas líneas se han utilizadas para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas las personas que hicieron posible la realización y culminación de este proyecto de investigación.

A Dios por regalarme inspiración, por haberme acompañado y brindarme una vida llena de aprendizajes y experiencia; por permitirme el haber llegado hasta este momento tan importante de mi formación académica y profesional; por este trabajo de investigación el cual habiéndolo finalizado ha llenado todas mis expectativas.

A mis padres, Carmelina Benítez de Angulo y Francisco Rubén Angulo, quienes han velado siempre por mi bienestar; reconozco su confianza y agradezco su apoyo, el cual me brindaron sin dudar un sólo momento en mi capacidad y por haberme

dado la oportunidad de formarme con una excelente educación en el transcurso de mi vida. A los demás miembros de mi familia, Victoria Cerón, Sara María Cerón y Sara Cecibel Angulo Benítez, por todo el apoyo brindado y por compartir momentos significativos conmigo. Con todos ellos me encuentro en deuda por el ánimo infundido y la confianza en mi depositada, sus voces de ánimo han constituido una aportación de valor incalculable.

Deseo hacer extensiva mi gratitud hacia mis asesores, Ing. Carlos Mauricio Canjura Linares y Dr. Simón Alfredo Peña Aguilar por las incontables horas dedicadas a esta aportación, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa de este proyecto, por sus sugerencias y el interés mostrado hacia mi trabajo y por los conocimientos que compartieron conmigo.

Finalmente dedico este documento al lector cuyo genuino interés hace fructífero este esfuerzo.

A todos ustedes muchas gracias.

Atte.: Erika C. Angulo Benítez.

INTRODUCCIÓN.

De la relación $f(x) = y$ interesa saber si existe o no solución, en el caso afirmativo, si esta es única, y si hay varias soluciones, la pregunta es cómo están distribuidas en el dominio de definición; en cuanto a la estabilidad interesa saber cómo cambian las soluciones bajo alteraciones del valor y o perturbaciones de la función f . En esta tesis se analiza la existencia y estabilidad de soluciones para problemas del tipo $f(x) = y$ bajo la herramienta del grado topológico de Brouwer.

Ya que la mayoría de las ecuaciones pueden resolverse de forma explícita, bajo el uso tanto de métodos numéricos para obtener información cuantitativa como métodos analíticos y topológicos que proporcionan información cualitativa, afirmamos que para caracterizar la existencia y la estabilidad de soluciones han de emplearse técnicas topológicas, lo que consiste en el objeto de estudio de este proyecto de investigación denominado: Teoría de grado topológico de Brouwer. Aplicaciones al análisis y al cálculo de la variable compleja. El origen de dichas técnicas se encuentra en los trabajos de C. F. Gauss y A. L. Cauchy, retomados a finales del siglo XIX por L. Kronecker, J. Hadamard, H. Poincaré y L. E. J. Brouwer, quien finalmente desarrollo la teoría de grado topológico de funciones continuas en espacios de dimensión finita con la publicación en 1911, esta teoría es conocida como grado de Brouwer.

Inicialmente se proporciona una descripción general del grado topológico, además se provee la construcción y formalización de la definición, a fin de garantizar que dicha herramienta ciertamente posee las cualidades que se le adjudican.

En primer lugar se trabaja la teoría de grado topológico para funciones diferenciales con derivada continua y para valores regulares, posteriormente se alteran las restricciones con respecto a las tres variables inmersas en el estudio de la función grado, es decir, se modifican la función, el dominio y el punto; básicamente, levantaremos la restricción de la hipótesis relativa a que el valor sea regular, mediante el uso del lema de Sard; posteriormente a expensas de suavizar las funciones a través de un proceso de regularización, específicamente la convolución, finalmente llegamos a concretar la definición del grado topológico para funciones continuas; es

durante todo este proceso en donde se presentan las principales propiedades que resultan ser fundamentales para las aplicaciones de la teoría de grado.

Se presenta un capítulo completa y únicamente orientado a las aplicaciones del grado topológico al análisis y al cálculo de variable compleja. Con respecto al análisis y a la topología se retoman resultados tales como el teorema de punto fijo de Brouwer, el teorema de Borsuk , el cual trata específicamente del grado topológico de funciones impares y el corolario de Borsuk - Ulam; inmediatamente después se contempla la teoría previa necesaria para comprender los resultados que se expondrán de la relación del grado topológico con respecto a tópicos de cálculo de variable compleja, como una anticipación a los requerimientos que la investigación precisa, y bajo un análisis minucioso de la teoría de funciones holomorfas se sintetizan algunas demostraciones de teoremas conocidos como lo son el principio del argumento, el teorema de Rouché y el teorema fundamental del álgebra, dandoles una nueva demostración más práctica y haciendo notable la brevedad en cuanto a la prueba a partir de la teoría de grado, sin reducir el análisis inmerso, detallando así las ventajas que provee una herramienta tan versátil como lo es el grado topológico de Brouwer, colaborando en reducir la construcción y complicación de muchas demostraciones clásicas.

Índice general

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIA.	I
INTRODUCCIÓN.	III
DATOS HISTÓRICOS.	1
Capítulo 1. FORMALIZACIÓN DE LA DEFINICIÓN DE GRADO TOPOLÓGICO.	4
1.1. GENERALIDADES Y DEFINICIONES PREVIAS.	5
1.2. DEFINICIÓN DE GRADO TOPOLÓGICO DE BROUWER.	6
1.3. FÓRMULA DE REPRESENTACIÓN INTEGRAL DEL GRADO TOPOLÓGICO.	8
Capítulo 2. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL GRADO TOPOLÓGICO DE BROUWER.	23
2.1. ANALIZANDO deg BAJO LA MODIFICACIÓN DEL $1er$ PARÁMETRO, LA FUNCIÓN.	23
2.2. deg ES CONSTANTE EN CADA COMPONENTE CONEXA DE $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.	35
2.3. LEVANTANDO LA RESTRICCIÓN DE QUE p SEA UN VALOR REGULAR.	45
2.4. deg ES INVARIANTE BAJO HOMOTOPÍAS.	47
2.5. GRADO TOPOLÓGICO PARA FUNCIONES CONTINUAS.	54
2.6. PERTURBACIÓN DE LA FUNCIÓN deg RESPECTO DE LA VARIABLE Ω .	63
2.7. deg ES INVARIANTE BAJO COMPOSICIÓN CON DIFEOMORFISMOS DE CLASE C^1 .	66
Capítulo 3. APLICACIONES DE LA TEORÍA DE GRADO TOPOLÓGICO AL ANÁLISIS Y AL CÁLCULO DE VARIABLE COMPLEJA.	70
3.1. APLICACIONES DE deg EN \mathbb{R}^N .	70
3.2. APLICACIONES DE deg EN \mathbb{C} .	76
APÉNDICES.	89
APÉNDICE A. LEMA DE SARD.	89
APÉNDICE B. RELACIÓN DE EQUIVALENCIA (Ec. 2.2.8.).	94
APÉNDICE C. JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN 2.5.2.	96

Índice general

vi

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

99

DATOS HISTÓRICOS.

A continuación se describe cronológicamente las contribuciones de figuras célebres de cuyo estudio partieron las técnicas que conducirían al desarrollo de la teoría del grado topológico de Brouwer.

Parece difícil atribuir a alguien en concreto la formalización del concepto de grado de Brouwer. Más bien se puede decir que constituye un ejemplo típico de creación matemática escalonada donde los avances parciales desempeñaron un papel fundamental en la formulación general. Instrumentos matemáticos similares, que proporcionan una descripción semejante a la del grado respecto a un objeto ya habían sido introducidos en épocas anteriores por Kronecker y conceptos análogos sobre campos vectoriales introducidos por Poincaré en su estudio de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Otros conceptos preconcebidos que están íntimamente relacionados con la noción de grado son la demostración dada por Gauss del teorema fundamental del álgebra, algunos teoremas de Sturm, Liouville, Cauchy, Hermite y Sylvester sobre raíces de polinomios constituyen una motivación de la teoría del grado topológico basada en la noción de índice de un punto respecto de una curva continua.

Por su misma naturaleza es claro que los orígenes de la teoría de grado topológico hay que buscarlos en los primeros intentos de la resolución de ecuaciones algebraicas: $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$; $a_n \neq 0$.

La existencia de al menos una solución de la ecuación anterior constituye una de las formulaciones del teorema fundamental del álgebra. Las ecuaciones de primer y segundo grado fueron estudiadas ya por los matemáticos babilónicos, por Diofanto de Alejandría (año 250 A.C.) y por Mohamed Ibn Musa Al-Kharizmi (siglo IX). La escuela italiana de algebristas del siglo XVI abordó con éxito la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado por radicales. La fórmula para la ecuación de tercer grado fue obtenida por Scipión del ferro, Antonio María de Fior, Nicolo Tartaglia y Jerónimo Cardano, y la fórmula para la ecuación de cuarto grado fue establecida por Ludovico Ferrari (1522-1565). Intentos fallidos de resolución de ecuaciones algebraicas de grado superior se deben a Walter Von Tschisnhausen (1651-1708). La demostración de la supuesta imposibilidad se debe a Abel en el siglo XIX. Después del éxito de la escuela italiana, las investigaciones se centraron en dar demostraciones del teorema fundamental del álgebra. Demostraciones no completas fueron dadas por D'Alembert en 1746, Euler en 1749 y Lagrange

en 1772. Karl-Friedrich Gauss, consideró muy importante el teorema fundamental del álgebra, dando hasta cuatro demostraciones del mismo: la primera en 1799, la segunda en 1815, la tercera en 1816 y la cuarta en 1849. Es justamente en las demostraciones primera y cuarta del teorema fundamental del álgebra dadas por Gauss donde se encuentran los primeros argumentos e ideas de la teoría del grado topológico. Utilizando propiedades de las curvas algebraicas (no formalizadas hasta el año de 1933 por Ostrowski), consigue probar que dentro de un círculo de radio suficientemente grande, la curva algebraica dada por la parte real de la ecuación: $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$; $a_n \neq 0$ que tiene al menos un punto común con la curva algebraica dada por la parte imaginaria de la ecuación, de esta forma se inicia la línea de investigación y así los orígenes de la teoría de grado se remontan a las demostraciones del teorema fundamental del álgebra dadas por Gauss, estas ideas fueron utilizadas por Kronecker para establecer la teoría del índice, teoría que se introduce mediante procedimientos analíticos.

Una construcción completamente diferente, con técnicas de topología se debe a Brouwer, resolviendo las cuestiones abiertas y dando consistencia a la teoría. L.E.J. Brouwer estableció el grado para funciones continuas, en 1912 (para espacios de dimensión finita el grado topológico se denomina grado de Brouwer). Las contribuciones posteriores de Hopf, establecen una nueva aportación al trabajo de Brouwer. Más tarde Leray y Schauder extendieron estas construcciones a perturbaciones compactas de la identidad en dimensión infinita. Pero en verdad, debemos señalar que el camino hacia una construcción analítica del grado fue descubierto por la investigación de Sard, sobre la medida del conjunto de los valores críticos de funciones diferenciables, en 1942. En 1951 Nagumo, estableció una construcción analítica elemental y presenta un nuevo enfoque para definir el grado topológico para una función continua; este tratamiento del tema suele llamarse enfoque diferencial y en general los lineamientos son dados por Lloyd y Amman. Como dato adicional, Agustín Louis Cauchy (1789-1857), en una memoria presentada a la Academia de Turín el 17 de noviembre de 1831 y en el artículo del año 1837, introduce un nuevo cálculo que se puede emplear en la resolución de ecuaciones de todos los grados: el cálculo de índices de funciones.

Hay esencialmente tres métodos generales para manejar la teoría, estos son el método geométrico, el analítico y el algebraico.

El método geométrico, utiliza sólo algunos hechos del álgebra lineal y topología simple y se basa en aproximaciones de aplicaciones continuas. Este tipo de enfoque se utilizó, de hecho, por primera vez por Leray en 1948-1949, en sus conferencias inéditas en el Colegio de Francia, pero los detalles y la forma de la presentación se deben a Dugundji [1985]. Peitgen - Sieberg [1981], hacen una recapitulación de este enfoque para encontrar algoritmos para el cálculo de puntos fijos.

El segundo método, la versión analítica, basado en el uso de diversas herramientas de análisis, tiene sus raíces en el trabajo de Kronecker, quien inició lo que podría llamarse una teoría grado con sus estudios desarrollados en el marco de mapeos C^1 en 1878. Varios enfoques analíticos para mapeos continuos también los

facilitaron Nagumo [1951] y Heinz [1959]. En 1969 utilizando el enfoque analítico y considerando los aportes de Schwartz se extiende el teorema antipodal de Borsuk.

El tercer método, basado en las herramientas de la topología algebraica, cuya descripción más breve se encuentra en la monografía de Dold de [1972], en la que se muestra las propiedades de normalización, de adición, y homotopía con el fin de caracterizar el grado. Este método, que de hecho se demostró por primera vez por Führer [1971] y más tarde, pero de forma independiente Zeidler [1972] y Amann-Weiss [1973], implica que cada uno de los enfoques mencionados nos lleva a la misma noción de grado.

No es exagerado referirse respecto de la nueva herramienta de Brouwer como un instrumento extraordinario, es de hecho una serie asombrosa de conjeturas que se hacen realidad, y de nuevos teoremas y conceptos que en su momento iban a ser fundamentales en topología, todos producidos en menos de dos años. Luitzen Egbertus Jan Brouwer fue un matemático holandés (1881-1966), graduado en la Universidad de Ámsterdam donde fue discípulo de Diederik Korteweg. Sus trabajos ocuparon temas como lógica, topología, teoría de la medida y análisis complejo. Brouwer además de formular su teorema de punto fijo, demostró la importancia de los espacios cartesianos y funda el intuicionismo matemático, como antagónico al formalismo matemático de su época.

Si bien es cierto que herramientas matemáticas similares habían sido introducidas con anterioridad, el avance definitivo lo dieron Hadamard en 1910 y el mismo Brouwer en sus artículos expuestos en los años 1910, 1911 y 1912, por tanto el primer autor que dio una definición del grado de una función continua fue Brouwer en su artículo publicado en el año 1911 y a partir de allí fue denominado grado topológico de Brouwer.

FORMALIZACIÓN DE LA DEFINICIÓN DE GRADO TOPOLÓGICO.

La teoría del grado topológico se puede considerar como el estudio de las técnicas que nos permiten obtener información sobre la existencia de soluciones de una ecuación de la forma:

$$(Ec. 1.1.1) \quad y = f(x)$$

donde x e y varían en espacios apropiados y f es una aplicación continua.

Se aborda en primera instancia el caso \mathbb{R}^N , ya que la ventaja al iniciar el estudio en este espacio de Banach es que los resultados se podrán interpretar en el contexto de cualquier espacio normado de dimensión finita. Se destaca que en el desarrollo de esta teoría se trabajará con funciones definidas sobre conjuntos abiertos y acotados de \mathbb{R}^N .

Muchos de los problemas a tratar generalmente encajan en el modelo siguiente: dado un elemento $y \in \mathbb{R}^N$, Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y una función continua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, el objetivo es hallar $x \in \mathbb{R}^N$, tal que: $f(x) = y$, descartando la posibilidad de tener soluciones en la imagen de la frontera de Ω , $\partial\Omega$.

Planteada la ecuación interesa saber si existe o no solución, como también si esta es única. En el caso afirmativo de que existan varias soluciones nos preguntamos cómo están distribuidas en Ω , evitando $\partial\Omega$. Sin embargo, existe otra inquietud sumamente importante, supongamos que ya está resuelto el problema (Ec. 1.1.1), nos interesa saber cómo cambia el resultado de la ecuación si alteramos o modificamos la función f y el valor y , y si al realizar esta acción se presenta estabilidad en las respuestas obtenidas en la situación inicial. Por ejemplo consideremos una ecuación polinomial en \mathbb{R}^N , cuyos coeficientes han sido obtenidos por interpolación de ciertos datos experimentales, (los cuales, usualmente contienen pequeños, pero inevitables errores), en esta situación siempre es deseable saber si los ceros o las raíces del polinomio, están cercanos a los ceros del polinomio verdadero. Para ilustrarlo dispongámonos a sustituir la función f y el valor y , por \tilde{f} y \tilde{y} , respectivamente, como podemos tomar $\epsilon > 0$, tan pequeño como se quiera, concluimos que f y \tilde{f} están tan próximas como se desee, sin embargo las soluciones de ambas ecuaciones pueden ser drásticamente diferentes, y a pesar de que f y \tilde{f} sean una deformación continua de la otra, ambas pueden cuantificar situaciones diferentes y hasta es probable que se pierdan soluciones, luego para evitar este tipo de dificultades, se colocará en la

construcción de la teoría de grado, la condición $y \notin f(\partial\Omega)$. De forma que en el desarrollo de este proyecto de investigación se incluirá el resultado principal que consiste en afirmar que el grado topológico es invariante bajo pequeñas perturbaciones de la función f . Esta propiedad se utiliza estratégicamente para obtener información acerca de la existencia de soluciones de una ecuación del tipo $f(x) = y$, mediante $\tilde{f}(x) = \tilde{y}$, y así garantizar que el grado topológico de Brouwer es una herramienta que esencialmente suministra información sobre la existencia y estabilidad de tales soluciones.

Al considerar la función: $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continua, con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado e $y \in \mathbb{R}^N$, tal que $y \notin f(\partial\Omega)$, se dirá que la terna (f, Ω, y) es admisible y se denotará por $\deg(f, \Omega, y)$ al número entero asociado a dicha terna. Por tanto, la meta es construir una función cuyo dominio sean las ternas admisibles y contra dominio los enteros: $\deg : \{(f, \Omega, y) : \text{terna admisible}\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y el propósito es consolidar los resultados que garanticen el poder calcular $\deg(\tilde{f}, \Omega, \tilde{y})$ en lugar de $\deg(f, \Omega, y)$, entonces con base en la invariancia bajo perturbaciones, ambos grados han de ser idénticos, bajo determinadas condiciones obteniéndose la información buscada, esta propiedad se busca que sea menos restrictiva haciendo uso de funciones pertenecientes a $C(\bar{\Omega})$ y en un contexto más general.

1.1. GENERALIDADES Y DEFINICIONES PREVIAS.

En toda la discusión de la formalización del grado topológico se considera $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (espacio de Banach \mathbb{R}^N) como un subconjunto abierto no vacío y acotado y la función $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, aunque muy bien puede considerarse $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$, sin embargo esta particularidad de tomar una función de clase C^1 es con el propósito de asegurar la existencia de una derivada continua; lo que pronto se pondrá de manifiesto que es necesario para aplicar la definición.

DEFINICIÓN 1.1.1. y -PUNTO.

Se dice que $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un y -punto de f si y sólo si $f(x) = y$ si y sólo si $x \in f^{-1}(\{y\})$.

DEFINICIÓN 1.1.2. VALOR REGULAR.

Se dice que $y \in \mathbb{R}^N$ es un valor regular de f si para todo $x \in f^{-1}(\{y\})$ se tiene que $D_f(x)$ es sobreyectiva y si además $f^{-1}(\{y\}) \cap S_f(\bar{\Omega}) = \emptyset$, donde: $S_f(\bar{\Omega}) = \{x \in \bar{\Omega} : J_f(x) = 0\}$ conjunto de puntos críticos.

Un punto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ se dice regular si no es crítico y un punto $y \in \mathbb{R}^N$ que no es valor regular se llama valor crítico de f .

1.2. DEFINICIÓN DE GRADO TOPOLÓGICO DE BROUWER.

DEFINICIÓN 1.2.1. GRADO TOPOLÓGICO.

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función de clase C^k , con $k \geq 1$. Si $y \in \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$ es valor regular de f , definimos $\deg(f, \Omega, y)$ por:

$$(Ec. 1.2.1) \quad \deg(f, \Omega, y) = \begin{cases} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \text{sgn}(J_f(x)) & \text{si } f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset. \\ 0 & \text{si } f^{-1}(\{y\}) = \emptyset. \end{cases}$$

La ecuación 1.2.1. esencialmente es para funciones derivables con derivada continua y posee coherencia bajo el siguiente hecho:

TEOREMA 1.2.2. EL CONJUNTO DE PREIMAGENES DE UN VALOR REGULAR ES UN CONJUNTO FINITO.

Sean y un valor regular de $f \in C^1(\bar{\Omega})$, entonces el conjunto de las preimágenes, $f^{-1}(\{y\})$, es un conjunto finito.

DEMOSTRACIÓN.

Por hipótesis $f \in C^1(\bar{\Omega})$, dado que y es un conjunto unipuntual en \mathbb{R}^N , ha de considerarse como un conjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^N , por tanto compacto, de forma que el conjunto de imágenes inversas de y , $f^{-1}(\{y\})$ es compacto en $\bar{\Omega}$, en particular un subconjunto cerrado de $\bar{\Omega}$.

$f^{-1}(\{y\})$ contiene en su totalidad puntos regulares, pues son las preimágenes de un valor regular, de manera que:

$$(Ec. 1.2.2) \quad D_f(x_i) \neq 0, \quad \forall x_i \in f^{-1}(\{y\})$$

lo que garantiza, mediante los desarrollos de Taylor, que se puede obtener un disco de radio ε en el que x_i sea el único valor que satisfaga la ecuación $f(x) = y$, lo que sería un indicador de que el conjunto de preimágenes del valor regular y , $f^{-1}(\{y\})$, está formado en su totalidad por ceros aislados de $F(x) = f(x) - y = 0$.

Así, se busca demostrar inicialmente que si $x_0 \in f^{-1}(\{y\})$ entonces x_0 es un cero aislado. Procederemos por contradicción, por lo que se supone que existe una sucesión $\{x_n\} \subset f^{-1}(\{y\})$ tq.: $x_n \rightarrow x_0$. En este sentido la compacidad del conjunto $f^{-1}(\{y\})$ es útil para asegurar que la sucesión x_n sea convergente al punto x_0 .

El desarrollo de Taylor de orden 1 permite escribir:

$$(Ec. 1.2.3) \quad 0 = f(x_n) - f(x_0) = D_f(x_0)(x_n - x_0) + \mathfrak{o}(\|x_n - x_0\|)$$

implica que: $D_f(x_0)(x_n - x_0) = \mathfrak{o}(\|x_n - x_0\|)$

de lo que podemos inferir que para todo $r > 0$ existe n_0 tq.: si $n \geq n_0$ entonces

$$(Ec. 1.2.4) \quad \|D_f(x_0)(x_n - x_0)\| < \frac{1}{2} r \|x_n - x_0\|.$$

En relación a la teoría de operadores basta recordar el resultado siguiente:

Si T es un operador lineal de X sobre Y , donde X y Y son espacios lineales normados. Entonces, la inversa T^{-1} existe y es continua sobre su dominio de definición, si y sólo si existe una constante $m > 0$ tal que:

$$(Ec. 1.2.5) \quad m \|x\| \leq \|Tx\| \quad \text{para toda } x \in X.$$

Así dado que y es un valor regular, $f^{-1}(\{y\})$ contiene en su totalidad puntos regulares, cumpliéndose la (Ec. 1.2.2) y en particular para $x_0 \in f^{-1}(\{y\})$ se tiene $J_f(x_0) \neq 0$, por lo que $D_f(x_0)$ es inversible, de manera que existe $r > 0$ tal que $\forall u \in \mathbb{R}^N$:

$$(Ec. 1.2.6) \quad \|D_f(x_0)(u)\| \geq r \|u\|$$

obteniendo la contradicción.

OBSERVACIÓN.

La calidad de compacto permite que de todo recubrimiento por abiertos se logre extraer un subrecubrimiento finito.

Bajo el supuesto de que y es un valor regular de f , tenemos que $J_f(x_i) \neq 0$, con $x_i \in f^{-1}(\{y\})$. Entonces por el teorema de la función inversa existe una vecindad o entorno abierto W_i para cada $x_i \in f^{-1}(\{y\})$ y un entorno V_i de $f(x_i)$ en \mathbb{R}^N tq.:

$$f(W_i) = V_i, \text{ es decir, } f|_{W_i} : W_i \longrightarrow V_i$$

y además se tiene una inversa

$$(f|_{W_i})^{-1} : V_i \longrightarrow W_i \text{ de clase } C^1 \text{ en } V_i.$$

De forma que en cada entorno W_i , existe un sólo y -punto de f , esto demuestra que $f^{-1}(\{y\})$ consiste de puntos aislados, es decir, si $x_i \in f^{-1}(\{y\})$ entonces existe una vecindad W_i tq.:

$$(Ec. 1.2.7) \quad W_i \cap f^{-1}(\{y\}) = \{x_i\}$$

luego se observa que los W_i cubren a $f^{-1}(\{y\}) \subset \bar{\Omega}$, finalmente siendo $\bar{\Omega}$ compacto lo es también $f^{-1}(\{y\})$ y podemos extraer un subrecubrimiento finito de $f^{-1}(\{y\})$.

1.3. FÓRMULA DE REPRESENTACIÓN INTEGRAL DEL GRADO TOPOLÓGICO.

Esta parte del trabajo de investigación está enfocada a garantizar la representación integral del grado topológico y a demostrar que esta es equivalente a la ya enunciada definición del grado topológico de Brouwer.

DEFINICIÓN 1.3.1. REPRESENTACIÓN INTEGRAL DEL GRADO TOPOLÓGICO.

Sean Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , f una función pertenecientes a las clases $C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $b \in \mathbb{R}^N$ tq.: $b \notin f(\partial\Omega)$.

Se considera $0 < \varepsilon < \text{dist}(b, f(\partial\Omega))$ y una función $\varphi \in C([0, \infty[, \mathbb{R})$ con soporte compacto contenido en $]0, \varepsilon[$, y tal que:

$$(Ec. 1.3.1) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|) dx = 1$$

donde $|\cdot|$ es la norma euclidea de \mathbb{R}^N , $|x| = \left(\sum_{k=1}^N x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Llamamos el grado topológico de Brouwer de f en Ω , en relación con el valor regular b al número:

$$(Ec. 1.3.2) \quad \text{deg}(f, \Omega, b) = \int_{\Omega} \varphi(|f(x) - b|) J_f(x) dx .$$

El objetivo es demostrar que el número $\text{deg}(f, \Omega, b)$ además de ser un entero, es también independiente de ε y de φ , para ello necesitamos unos lemas técnicos. Posteriormente la definición 1.3.1. será de gran ayuda para abordar el resultado que hace referencia a que el grado topológico es constante en una componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.

LEMA 1.3.2.

Sea g una función de clase C^2 de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ en \mathbb{R}^{N-1} .

Haciendo:

$$(Ec. 1.3.3) \quad B_i = \det(\partial_1 g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_N g)$$

se obtiene:

$$(Ec. 1.3.4) \quad \sum_{i=1}^N (-1)^i \partial_i B_i = 0.$$

Consideraremos diferentes definiciones para c_{ij} , dependiendo de si $j < i$, $i < j$ o $i = j$.

Si $j < i$:

$$c_{ij} = \det(\partial_1 g, \dots, \partial_{j-1} g, \partial_{ij} g, \partial_{j+1} g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_N g)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \text{la columna } \partial_{ij} g \text{ está donde debería estar } \partial_j g. \end{array}$$

Ahora para el caso $i < j$

$$c_{ij} = \det(\partial_1 g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_{j-1} g, \partial_{ij} g, \partial_{j+1} g, \dots, \partial_N g)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \text{la columna } \partial_{ij} g \text{ está donde debería estar } \partial_j g. \end{array}$$

Finalmente para el caso $i = j$ hacemos $C_{ii} = 0$, para $1 \leq i \leq N$.

El objetivo principal es demostrar que: $\sum_{i=1}^N (-1)^i \partial_i B_i = 0$, se procede designando por α al miembro izquierdo de esta ecuación, luego se sustituye $\partial_i B_i$ por $\sum_{j=1}^N c_{ij}$ a fin de obtener la siguiente línea de igualdades:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^N (-1)^i \partial_i B_i = \sum_{i=1}^N (-1)^i \sum_{j=1}^N c_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (-1)^i c_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^N (-1)^i c_{ij} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{Cofactor.} \end{aligned}$$

Para trabajar con la expresión anterior debemos demostrar que:

$$c_{ij} = (-1)^{j+i-1} c_{ji}$$

En efecto:

Supongamos por ejemplo $j < i$, luego sabemos que:

$$c_{ij} = \det(\partial_1 g, \dots, \partial_{j-1} g, \partial_{ij} g, \partial_{j+1} g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_N g)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \dots \quad \uparrow \quad \uparrow \\ j-1 \text{ intercambios sucesivos.} \end{array}$$

El intercambio de dos renglones (o columnas) distintas tiene el efecto de multiplicar el determinante por (-1) .

Así desde la columna $\partial_1 g$ hasta la columna $\partial_{ij} g$ existen j elementos, por tanto $j-1$ intercambios sucesivos, de forma que c_{ij} equivale también a:

$$(Ec. 1.3.5) \quad c_{ij} = (-1)^{j-1} \det(\partial_{ij} g, \partial_1 g, \dots, \partial_{j-1} g, \partial_{j+1} g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_N g)$$

Dado que el objetivo es trabajar con c_{ij} y c_{ji} , para posteriormente concluir mediante transitividad, obtenemos asimismo la expresión para c_{ji} :

$$c_{ji} = \det(\partial_1 g, \dots, \partial_{j-1} g, \partial_{j+1} g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{ij} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_N g)$$

$$\uparrow \quad \dots \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \dots \quad \uparrow \quad \uparrow$$

Puesto que hace falta la columna j hay $i-1$ elementos, desde la columna $\partial_1 g$ hasta la columna $\partial_{ij} g$ y por lo tanto existen $i-2$ intercambios.

$$= (-1)^{i-2} \det(\partial_{ij} g, \partial_1 g, \dots, \partial_{j-1} g, \partial_{j+1} g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_N g)$$

Al multiplicar por ambos lados por $(-1)(-1) = 1 = (-1)^2$ el resultado no se altera, luego:

$$(Ec. 1.3.6) \quad c_{ji} = (-1)^i \det(\partial_{ij} g, \partial_1 g, \dots, \partial_{j-1} g, \partial_{j+1} g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_N g)$$

Despejando los determinantes de las ecuaciones 1.3.5 y 1.3.6 respectivamente, se obtiene:

$$c_{ij}(-1)^{-j+1} = \det(\partial_{ij} g, \partial_1 g, \dots, \partial_{j-1} g, \partial_{j+1} g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_N g)$$

y también

$$c_{ji}(-1)^{-i} = c_{ji} \frac{1}{(-1)^i} = c_{ji} \frac{1^i}{(-1)^i} = c_{ji} \left(\frac{1}{-1}\right)^i = c_{ji}(-1)^i$$

$$= \det(\partial_{ij} g, \partial_1 g, \dots, \partial_{j-1} g, \partial_{j+1} g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_N g)$$

$$\text{por transitividad: } c_{ij}(-1)^{-j+1} = c_{ji}(-1)^i \implies c_{ij} = (-1)^{j+i-1} c_{ji}.$$

Haciendo uso de está última implicación:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i,j=1}^N (-1)^i c_{ij} \\ &= \sum_{i,j} (-1)^i (-1)^{j+i-1} c_{ji} \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{2i} (-1)^{j-1} c_{ji} \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{j-1} c_{ji} \\ &= - \sum_{i,j} (-1)^j c_{ji} = -\alpha \end{aligned}$$

Lo que en resumen se puede expresar en la siguiente línea de igualdades:

$$\alpha = \sum_{i,j=1}^N (-1)^i c_{ij} = - \sum_{i,j=1}^N (-1)^j c_{ji} = -\alpha$$

luego $\alpha = 0$, concluyendo la prueba.

LEMA 1.3.3.

Sea $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ donde: $f = (f^1, \dots, f^{j-1}, f^j, f^{j+1}, \dots, f^N)$

Designando por $A_{ij}(x)$ al cofactor de $\partial_i f^j(x)$ (donde el índice i contabiliza las columnas y j designa las filas) en el jacobiano $J_f(x)$. Entonces para todo $1 \leq j \leq N$ fijo se obtiene:

$$(Ec. 1.3.7) \quad \sum_{i=1}^N \partial_i A_{ij} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.

El cofactor A_{ij} de $\partial_i f^j(x)$ y está dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det (\partial_l f^k)_{k \neq j, l \neq i}$$

Donde: $\det (\partial_l f^k)_{k \neq j, l \neq i}$ es el menor de la matriz $J_f(x)$ de $N \times N$ que resulta de eliminar el renglón j y la columna i , y es un determinante de $(N - 1) \times (N - 1)$.

Para un j fijo, se propone la función auxiliar siguiente:

$$g = (f^1, \dots, f^{j-1}, f^{j+1}, \dots, f^N)$$

↓
carece de f^j .

Tenemos que g es una función de clase C^2 de Ω en \mathbb{R}^{N-1} cumpliendo las hipótesis del lema 1.3.2.

$$B_i = \det (\partial_1 g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_N g)$$

Columnas del determinante y se carece de la columna $\partial_i g$.

Por el lema 1.3.2. existe una analogía entre

$$\sum_{i=1}^N (-1)^i \partial_i B_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N \partial_i A_{ij} = 0$$

por lo que se da la siguiente igualdad:

$$A_{ij} = (-1)^i B_i ; 1 \leq i, j \leq N ;$$

■

LEMA 1.3.4.

Sean Ω subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, con $0 \notin f(\partial\Omega)$, sea $\psi \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$, cuyo soporte compacto $spt \psi = \overline{\{x/\psi(x) \neq 0\}} \subset]0, \varepsilon[$ con $0 < \varepsilon < dist(0, f(\partial\Omega))$ y tal función cumpla con la particularidad de que: $\int_0^\infty r^{N-1} \psi(r) dr = 0$.

Entonces:

$$(Ec. 1.3.8) \quad \int_{\Omega} \psi(|f(x)|) J_f(x) dx = 0.$$

DEMOSTRACIÓN:

La idea de la prueba es escribir la función: $\psi(|f(x)|) J_f(x)$ como la divergencia de una función que es nula en las proximidades del borde $\partial\Omega$ y luego hacer una integración por partes.

Supongamos por un instante que $f \in C^2$ y sea $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$(Ec. 1.3.9) \quad \gamma(r) = \begin{cases} 0; & \text{para } r = 0. \\ r^{-N} \int_0^r t^{N-1} \psi(t) dt; & \text{para } r > 0. \end{cases}$$

Inicialmente se debe garantizar que: $\gamma \in C_c^1([0, \infty[, \mathbb{R})$ y $r\gamma' + N\gamma = \psi$, γ es de clase C^1 debido a su definición, y ya que γ depende de $\psi \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$, cuyo soporte es por hipótesis $spt \psi \subset]0, \varepsilon[$, $0 < \varepsilon < dist(0, f(\partial\Omega))$ se asegura que $\gamma \in C_c^1([0, \infty[, \mathbb{R})$.

A continuación el objetivo es demostrar la ecuación $r\gamma' + N\gamma = \psi$, considerando el caso para $r > 0$, ya que por la misma definición de γ , si $r = 0$ entonces $r\gamma'(r) + N\gamma(r) = 0$. Así:

$$\gamma(r) = r^{-N} \int_0^r t^{N-1} \psi(t) dt.$$

$$\gamma'(r) = -N r^{-N-1} \int_0^r t^{N-1} \psi(t) dt + r^{-N} \frac{d}{dr} \int_0^r t^{N-1} \psi(t) dt.$$

De forma que:

$$\begin{aligned} & r\gamma'(r) + N\gamma(r) \\ &= r \left[-N r^{-N-1} \int_0^r t^{N-1} \psi(t) dt + r^{-N} \frac{d}{dr} \int_0^r t^{N-1} \psi(t) dt \right] + N r^{-N} \int_0^r t^{N-1} \psi(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -N r^{-N} \int_0^r t^{N-1} \psi(t) dt + r^{-N+1} [t^{N-1} \psi(t)] \Big|_0^r + N r^{-N} \int_0^r t^{N-1} \psi(t) dt \\
 &= r^{-N+1} [r^{N-1} \psi(r)] \\
 &= r^{-N+1+N-1} \psi(r) \\
 &= r^0 \psi(r) = \psi(r).
 \end{aligned}$$

Asegurando que: $r \gamma' + N \gamma = \psi$.

Como un recurso auxiliar hacemos $F(y) = \gamma(\|y\|) y$, para $y \in \mathbb{R}^N$ de tal forma que:

$$\begin{aligned}
 F(y) &= \gamma(\|y\|) \cdot y \\
 &\quad \uparrow \text{escalar} \quad \nwarrow \text{vector.} \\
 &= (\gamma(\|y\|) \cdot y_1, \dots, \gamma(\|y\|) \cdot y_N) \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 &\quad F_1(y) \qquad \qquad F_N(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{R}^N \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}_0^+ \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R} \\
 y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \sqrt{y_1^2 + \dots + y_N^2} \rightsquigarrow \gamma\left(\sqrt{y_1^2 + \dots + y_N^2}\right)
 \end{aligned}$$

Pues la norma aplicada a un vector es una función de \mathbb{R}^N a \mathbb{R}_0^+ y γ es una función de $[0, +\infty[$, es decir, de \mathbb{R}_0^+ a \mathbb{R} .

Ya que $Div F = \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2(y)}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial F_N(y)}{\partial y_N}$, se trabajará inicialmente con la primera componente del vector $F(y)$, pues las demás funciones componente tendrán un comportamiento idéntico.

Así la derivada parcial de $F_1(y) = \gamma(\|y\|) \cdot y_1$ respecto de la primera componente de $y \in \mathbb{R}^N$ se obtiene mediante la regla de la derivada de un producto

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(y) &= \frac{\partial \gamma(\|y\|)}{\partial y_1} \cdot y_1 + \gamma(\|y\|) \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} y_1 \\ &= \frac{\partial \gamma(\|y\|)}{\partial y_1} \cdot y_1 + \gamma(\|y\|) . \end{aligned}$$

Consideremos la composición de funciones: $\mu = \gamma \circ \eta$, donde η designará la norma euclídea $\|\cdot\|$ aplicada a un vector de \mathbb{R}^N , $\eta = \|y\|$

$$\begin{array}{ccccc} \mu : & \eta = \|\cdot\| & \gamma & & \\ & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow \mathbb{R}. \end{array}$$

Atendiendo esta notación $\gamma(\|y\|)$ es equivalente a considerar $\mu(y)$ con $y \in \mathbb{R}^N$. De forma que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} \mu(y) &= \gamma'(\eta(y)) \cdot \frac{\partial \eta(y)}{\partial y_1} \\ &\downarrow \\ \frac{\partial(\eta(y))}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_N^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_1} \left[(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_N^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_N^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_N^2}} \right) (2y_1) = \left(\frac{1}{\|y\|} \right) (y_1) . \end{aligned}$$

Así para la derivada parcial de $F_1(y)$ respecto de la primera componente de $y \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(y) &= \frac{\partial \gamma(\|y\|)}{\partial y_1} \cdot y_1 + \gamma(\|y\|) \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} y_1 \\ &= \frac{\partial \gamma(\|y\|)}{\partial y_1} \cdot y_1 + \gamma(\|y\|) \\ &= \frac{\partial \mu(y)}{\partial y_1} \cdot y_1 + \gamma(\|y\|) \\ &= \gamma'(\|y\|) \cdot \frac{y_1}{\|y\|} \cdot y_1 + \gamma(\|y\|) \\ &= \gamma'(\|y\|) \cdot \frac{y_1 \cdot y_1}{\|y\|} + \gamma(\|y\|) \end{aligned}$$

y similarmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(y) &= \gamma'(\|y\|) \cdot \frac{y_2 \cdot y_2}{\|y\|} + \gamma(\|y\|) \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_{N-1}}(y) &= \gamma'(\|y\|) \cdot \frac{y_{N-1} \cdot y_{N-1}}{\|y\|} + \gamma(\|y\|) \\ \frac{\partial F_N}{\partial y_N}(y) &= \gamma'(\|y\|) \cdot \frac{y_N \cdot y_N}{\|y\|} + \gamma(\|y\|) \end{aligned}$$

de forma que:

$$Div F = \left(\frac{y_1 \cdot y_1 + y_2 \cdot y_2 + \dots + y_{N-1} \cdot y_{N-1} + y_N \cdot y_N}{\|y\|} \right) \cdot \gamma'(\|y\|) + N \cdot \gamma(\|y\|)$$

utilizando el hecho de que $\sum_{k=1}^N y_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^N y_k^2} \right)^2 = (\|y\|)^2$, se obtiene finalmente la expresión para el divergente de $F(y) = \gamma(\|y\|) \cdot y$:

$$\begin{aligned} Div F &= \frac{\|y\|^2}{\|y\|} \cdot \gamma'(\|y\|) + N \cdot \gamma(\|y\|) \\ &= \|y\| \gamma'(\|y\|) + N \cdot \gamma(\|y\|) = \psi(\|y\|) \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \end{aligned}$$

Considerándolos como valores en $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, ya que: $\gamma \in C_c^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

La última igualdad se afirma mediante la fórmula $r \gamma' + N \gamma = \psi$.

Recordemos que el propósito es llegar a demostrar la ecuación 1.3.8, reexpresando $\psi(|f(x)|) J_f(x)$ como la divergencia de una función que es nula en las proximidades del borde $\partial\Omega$ y luego realizar una integración por partes.

Considerando:

$$\begin{aligned} Div F(f(x)) &= Div F(y) = \nabla \cdot F|_{y=f(x)} \\ &= \|y\| \gamma'(\|y\|) + N \cdot \gamma(\|y\|) = \psi(\|y\|) = \psi(\|f(x)\|) \end{aligned}$$

es posible escribir:

$$\psi(|f(x)|) J_f(x) = J_f(x) \cdot \nabla \cdot F|_{y=f(x)}; \quad f(x) \in \mathbb{R}^N.$$

Ahora el objetivo es garantizar:

$$(Ec. 1.3.10) \quad J_f(x) \cdot \nabla \cdot F |_{y=f(x)} = \sum_{i=1}^N \partial_i \sum_{j=1}^N A_{ij}(x) F^j(f(x)).$$

Para posteriormente hacer uso del lema 1.3.3, se hace un análisis del miembro derecho de la ecuación 1.3.10 :

$$\begin{array}{ccc} \sum_i \partial_i \sum_j A_{ij}(x) F^j(f(x)); & \text{con } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ y } f(x) \in \mathbb{R}^N. \\ \downarrow & \searrow \\ \partial_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f^N}{\partial x_i} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\partial_l f^k)_{\substack{k \neq j \text{ filas,} \\ l \neq i \text{ columnas}}} \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \nwarrow \\ \text{Cofactor} \qquad \qquad \text{Menor de } (N-1) \times (N-1) \\ \text{de } (N-1) \times (N-1). \end{array} \end{array}$$

desde luego se procede con la idea de derivada de un producto.

$$\begin{aligned} & \sum_i \partial_i \sum_j A_{ij}(x) F^j(f(x)) \\ &= \sum_i \sum_j (\partial_i (A_{ij}(x))) F^j(f(x)) + \sum_i \sum_j A_{ij}(x) \partial_i (F^j(f(x))) \\ & \quad \text{Mediante el uso del lema 1.3.3} \\ & \quad \sum_{i=1}^N \partial_i (A_{ij}(x)) = 0. \end{aligned}$$

$$= \sum_i \sum_j A_{ij}(x) \partial_i (F^j(f(x))) ; \text{ por la regla de la cadena}$$

$$\begin{array}{ccc} F(y) = \gamma(\|y\|) \cdot y & & \\ \downarrow & \searrow & \\ F: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N & \gamma: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}; & \\ \frac{\partial F \circ f}{\partial y}(x) = \sum_k \frac{\partial F^j}{\partial y_k}(f(x)) \partial_i f^k(x) & & \\ \partial_i (F^j(f(x))) = \sum_k \frac{\partial F^j}{\partial y_k}(f(x)) \partial_i f^k(x) & & \\ & = \sum_k \partial_i f^k(x) \frac{\partial F^j}{\partial y_k}(f(x)) & \end{array}$$

$$= \sum_i \sum_j A_{ij}(x) \sum_k \partial_i f^k(x) \frac{\partial F^j}{\partial y_k}(f(x)) ; \text{ reordenando con respecto a las sumatorias.}$$

$$= \sum_j \sum_k (\sum_i A_{ij}(x) \partial_i f^k(x)) \frac{\partial F^j}{\partial y_k}(f(x))$$

El siguiente paso es demostrar que: $\sum_i A_{ij}(x) \partial_i f^k(x) = \delta_{kj} J_f(x)$

$$\partial_i f^k(x) A_{ij}(x); \quad \text{si } k = j.$$

$$= \partial_i f^j(x) A_{ij}(x); \quad \text{donde } A_{ij}(x) \text{ denota cofactor, que resulta de eliminar}$$

la columna i y la fila j en $\det \left(\frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq N}$.

$$= \partial_i f^j(x) \cdot \left((-1)^{i+j} \det (\partial_l f^s)_{s \neq j, l \neq i} \right).$$

Luego $\sum_{i=1}^N A_{ij}(x) \partial_i f^j(x)$ es la denominada expansión de $J_f(x) = \det \left(\frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq N}$

por cofactores en el j -ésimo renglón, cuando $k = j$.

Finalmente haciendo uso de la definición de delta de Kronecker :

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1; & \text{si } k = j \\ 0; & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

Se obtiene:

$$\sum_{i=1}^N A_{ij}(x) \partial_i f^k(x) = \delta_{kj} J_f(x)$$

De manera que sustituyendo esta última igualdad en la expresión:

$$\sum_j \sum_k \left(\sum_i A_{ij}(x) \partial_i f^k(x) \right) \frac{\partial F^j}{\partial y_k}(f(x))$$

$$= \sum_j \sum_k (\delta_{kj} J_f(x)) \frac{\partial F^j}{\partial y_k}(f(x)); \quad \text{Al tomar } k = j, \text{ en la definición de delta de Kronecker.}$$

$$= \sum_{j=1}^N (J_f(x)) \frac{\partial F^j}{\partial y_j}(f(x))$$

↓

$$\nabla \cdot F \big|_{y=f(x)}$$

De manera que por la discusión precedente, se obtiene:

$$\sum_i \partial_i \sum_j A_{ij}(x) F^j(f(x)) = J_f(x) \cdot (\nabla \cdot F)(f(x))$$

Finalmente:

$$\psi(|f(x)|) J_f(x) = J_f(x) \nabla \cdot F|_{y=f(x)} = \sum_{i=1}^N \partial_i \sum_{j=1}^N A_{ij}(x) F^j(f(x))$$

a fin de obtener la ecuación 1.3.8 integramos la ecuación anterior sobre Ω

$$\int_{\Omega} \psi(|f(x)|) J_f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \partial_i \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}(x) F^j(f(x)) \right) dx$$

puesto que $F^j(f(x)) = 0$ en un vecindario de la frontera $\partial\Omega$, una integración por partes muestra que la última integral es nula.

Así el lema ha sido demostrado para una función f de clase C^2 , el caso general se deduce por la regularización de la función f .

A continuación el objetivo es verificar que la definición del grado topológico es independiente de ε y de la función φ .

PROPOSICIÓN 1.3.5.

De acuerdo a las hipótesis y la notación de la definición 1.3.1, el grado topológico de Brouwer de f en Ω , en relación con el valor regular b , $\deg(f, \Omega, b) = \int_{\Omega} \varphi(|f(x) - b|) J_f(x) dx$ es independiente de ε y de la función φ , previsto que $\varepsilon < \text{dist}(b, f(\partial\Omega))$.

DEMOSTRACIÓN.

Sean $\varepsilon_0 = \text{dist}(b, f(\partial\Omega))$ y $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_0$. Si φ_1 y φ_2 tienen su soporte contenido en $]0, \varepsilon_1[$ y $]0, \varepsilon_2[$ y son tales que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1(|x|) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2(|x|) dx = 1$$

luego haciendo $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, en el lema 1.3.4 se obtiene:

$$\int_{\Omega} \psi(|f(x) - b|) J_f(x) dx = 0 \quad \blacksquare$$

La siguiente fórmula de representación fue usada por Heinz (1959) para introducir la definición del grado topológico de Brouwer. Los trabajos de Heinz se ubican dentro del método analítico, basado en el uso de diversas herramientas de análisis y bajo un enfoque diferencial.

PROPOSICIÓN 1.3.6. FÓRMULA DE REPRESENTACIÓN INTEGRAL DEL GRADO TOPOLÓGICO.

Sea $f \in C^1(\bar{\Omega})$, $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(S_f)$ y sea $\varphi_\varepsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$

$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tq.: $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$ y $\text{spt}(\varphi_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$

entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tq.:

$$(Ec. 1.3.11) \quad \text{deg}(f, \Omega, b) = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - b) J_f(x) dx$$

para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

La proposición 1.3.6 es de hecho la garantía de que ambas definiciones del grado topológico de Brouwer, definición 1.2.1 y la definición 1.3.1 son equivalentes.

PRUEBA:

Por hipótesis: $p \notin f(S_f \cup \partial\Omega)$, lo que garantiza que b es un valor regular de f , por tanto el conjunto $f^{-1}(\{b\}) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ es un conjunto finito de puntos regulares.

Por el hecho de que f es una función de clase C^1 , mediante el teorema de Taylor podemos obtener un disco de radio positivo dentro del cual existe un único punto que satisface $f(x) = b$, es decir, cada $a_i \in f^{-1}(\{b\})$, con $i = 1, 2, \dots, k$, es un cero aislado para $f(x) - b = 0$.

Por el supuesto de que existen funciones $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ continuas con $\text{spt}(\varphi_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, podemos elegir entornos abiertos, disjuntos dos a dos y disjuntos con $\partial\Omega$ para cada punto regular a_i , $U_i = U_i(a_i, \varepsilon) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Una propiedad interesante del jacobiano es que cuando este es diferente de cero en el entorno de un punto dado, entonces el teorema de la función inversa garantiza que la función f es localmente invertible en un vecindario de a_i , además las hipótesis correspondientes al teorema de la función inversa aseguran que $x \in U_i(a_i, \varepsilon)$, tienen una vecindad en la que f es uno a uno (inyectiva).

Así considerando: $f : U_i(a_i, \varepsilon) \rightarrow B(b, r_i)$ y ya que a_i es un punto regular, $D_f|_{U_i} \neq 0$, la función f es inversible y $f|_{U_i}$ es inyectiva (por el teorema de inversión local, f es un difeomorfismo).

Si $\varphi_\varepsilon(f(x) - b) \neq 0$ significa que $f(x) - b$ está en el soporte de φ_ε ,

$\text{spt} \varphi_\varepsilon = \overline{\{f(\cdot) - b : \varphi_\varepsilon(f(\cdot) - b) \neq 0\}}$, mientras que x está en el soporte de f , $\text{spt} f \subset \cup_{i=1}^k U_i$, por lo que el soporte de φ_ε depende del soporte de f , de este análisis se infiere que: $\text{spt} \varphi_\varepsilon(f(\cdot) - b) \subset \text{spt} f \subset \cup_{i=1}^k U_i$.

A continuación utilizamos el miembro derecho de la ecuación 1.3.11, con la variante de que la integración no se realiza sobre todo Ω sino sobre un U_i arbitrario, posteriormente se generaliza, de esta forma:

$$\int_{U_i} \varphi_\varepsilon (f(x) - b) J_f(x) dx = \int_{U_i} \varphi_\varepsilon (f(x) - b) \operatorname{sgn} (J_f(x)) |J_f(x)| dx .$$

Por ser f una función de clase C^1 , hemos conseguido mediante el teorema de Taylor un entorno abierto en el que únicamente existe un a_i , luego $J_f |_{U_i=U_i(a_i,\varepsilon)} \neq 0$, y por la continuidad del Jacobiano de f en este entorno, el J_f sobre U_i no cambia de signo, ya que sólo hay un punto regular como centro de cada entorno $U_i = U_i(a_i, \varepsilon)$ por lo que para $\operatorname{sgn} (J_f(x))$ tomamos el representante $\operatorname{sgn} (J_f(a_i))$, por lo que:

$$\begin{aligned} & \int_{U_i} \varphi_\varepsilon (f(x) - b) \operatorname{sgn} (J_f(x)) |J_f(x)| dx \\ &= \operatorname{sgn} (J_f(a_i)) \int_{U_i} \varphi_\varepsilon (f(x) - b) |J_f(x)| dx ; \end{aligned}$$

Por el cambio de variables.
 $z = f(x) \rightarrow dz = J_f(x) dx.$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{sgn} (J_f(a_i)) \int_{B(b,r_i)} \varphi_\varepsilon (z - b) dz \\ &= \operatorname{sgn} (J_f(a_i)) \int_{B(0,r_i)} \varphi_\varepsilon (u) du ; \end{aligned}$$

nuevamente por cambio de variables y dado que una de las hipótesis es
 $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1.$

$$= \operatorname{sgn} (J_f(a_i)) .$$

De manera que habiendo trabajado individualmente los entornos U_i obtenemos

$$\int_{U_i} \varphi_\varepsilon (f(x) - b) J_f(x) dx = \operatorname{sgn} (J_f(a_i)).$$

Ahora dado que $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, es claro que $\operatorname{spt} \varphi_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N$, asimismo $\varphi_\varepsilon (f(x) - b)$ toma $x \in \operatorname{spt} f \subset \cup_{i=1}^k U_i$, considerando $f |_{U_i} : U_i(a_i, \varepsilon) \rightarrow B(b, r_i)$, así φ_ε toma valores de $f(x)$ es decir en el conjunto de llegada de f , específicamente en $B(b, r_i)$, por lo que se realiza la siguiente escogitación de $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 = \inf (r_1, r_2, \dots, r_k)$, dándole consistencia a la hipótesis $\operatorname{spt} \varphi_\varepsilon \subset B(0, r_i); \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$

Proseguimos la demostración considerando la restricción $b \notin f(\overline{\Omega} \setminus \cup_{i=1}^k U_i)$, pues no pueden haber soluciones de la ecuación $f(x) = b$ fuera de $\cup_{i=1}^k U_i$, ya que las únicas imágenes inversas de b por f son a_1, a_2, \dots, a_k ; es importante destacar además que $\overline{\Omega} \setminus \cup_{i=1}^k U_i$ es un conjunto acotado.

Puesto que los $U_i = U_i(a_i, \varepsilon) \subset \Omega$, con $i = 1, 2, \dots, k$, son disjuntos dos a dos, $U_i \cap U_j = \emptyset$; $i \neq j$, y que además no se integra sobre $\overline{\Omega}$, sino que sobre Ω , ya que $x \notin \partial\Omega$, pues $U_i \cap \partial\Omega = \emptyset$, deducimos que:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon}(f(x) - b) J_f(x) dx \\
 &= \int_{\overline{\Omega} \setminus \cup_{i=1}^k U_i} \varphi_{\varepsilon}(f(x) - b) J_f(x) dx + \int_{\cup_{i=1}^k U_i} \varphi_{\varepsilon}(f(x) - b) J_f(x) dx \\
 &= \sum_{i=1}^k \int_{U_i} \varphi_{\varepsilon}(f(x) - b) J_f(x) dx \\
 &= \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn}(J_f(a_i)) \\
 &= \operatorname{deg}(f, \Omega, b) .
 \end{aligned}$$

Concluyendo de manera afirmativa la equivalencia de ambas definiciones del grado topológico de Brouwer, además de asegurar muy exhaustivamente la fórmula de representación integral del grado topológico.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL GRADO TOPOLÓGICO DE BROUWER.

Como se ha explicado previamente, la definición del grado topológico utiliza esencialmente funciones de clase C^k con $k \geq 1$, en este capítulo el objetivo principal es conocer las diferentes propiedades que posee la función deg al modificar o perturbar el primer parámetro de la terna admisible, la función; Posteriormente se garantizará, mediante un proceso de regularización, el poder escoger una función únicamente continua en lugar de una función de clase C^k .

A continuación se presenta el primer resultado fundamental que provee la base de este estudio.

2.1. ANALIZANDO deg BAJO LA MODIFICACIÓN DEL 1er PARÁMETRO, LA FUNCIÓN.

PROPOSICIÓN 2.1.1. LOS GRADOS TOPOLÓGICOS RESPECTO DE FUNCIONES EXTREMADAMENTE CERCANAS SON IDÉNTICOS.

Sea $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$, $p \notin \phi(S_\phi) \cup \phi(\partial\Omega)$. Existe $\delta > 0$ tq.: si $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ y

$$(Ec. 2.1.1.) \quad \|\phi - \psi\|_1 \leq \delta$$

es decir,

$$(Ec. 2.1.2.) \quad \psi \in B^1(\phi, \delta) = \{\xi \in C^1(\overline{\Omega}) : \|\phi - \xi\|_1 \leq \delta\}.$$

Entonces: $p \notin \psi(S_\psi) \cup \psi(\partial\Omega)$ y $\deg(\phi, \Omega, p) = \deg(\psi, \Omega, p)$.

DEMOSTRACIÓN.

Por hipótesis $p \notin (\phi(S_\phi) \cup \phi(\partial\Omega))$, en particular implica que $p \notin \phi(S_\phi)$, por lo que p es un valor regular respecto de ϕ , luego $\phi^{-1}(\{p\})$ consiste en ser un conjunto finito o es vacío, por lo que trabajamos por separado cada uno de estos casos.

1ER CASO: $\phi^{-1}(\{p\})$ es un conjunto un conjunto vacío.

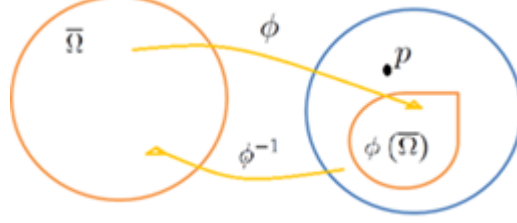


Fig. 01. Ilustración respecto a la aplicación de la función ϕ sobre $\bar{\Omega}$, garantizando $p \notin \phi(\bar{\Omega})$.

Dado que $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$, donde $\bar{\Omega}$ es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^N , (por ser Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N), y bajo el supuesto de que $\phi^{-1}(\{p\}) = \emptyset$, implica que no hay ningún elemento en $\bar{\Omega}$ que genere el valor regular p , mediante la aplicación ϕ , pues la compacidad se conserva bajo aplicaciones continuas, de forma que se puede asegurar que $\rho(p, \phi(\bar{\Omega})) > 0$, además ya que $p \notin (\phi(S_\phi) \cup \phi(\partial\Omega))$, se garantiza que $\rho(p, \phi(\Omega)) > 0$.

Se excluye de este análisis el caso en el que se tiene la mínima distancia $\rho(p, \phi(\Omega)) = 0$ pues el valor regular p se encontraría en la frontera.

Elegimos $\delta = \frac{1}{2}\rho(p, \phi(\bar{\Omega})) > 0$, de manera que $\forall x \in \bar{\Omega}$:

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. 2.1.3.)} \quad \|\phi(x) - p\| &= \text{Sup}\{|\phi(x) - p| : x \in \bar{\Omega}\} \\
 &\geq 2\delta = \rho(p, \phi(\bar{\Omega})) \\
 &\downarrow \\
 &\text{inf}\{\rho(p, y) : y \in \phi(\bar{\Omega})\} \\
 &\downarrow \\
 \rho(p, y) &= |p - y| \\
 &= \text{máx}\{|p_i - y_i| : i = 1, \dots, N\}
 \end{aligned}$$

Es importante mencionar entorno a la discusión de las normas, que en la ecuación 2.1.2, la norma del espacio C^1 , $\|\cdot\|_1$, posee la siguiente definición:

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. 2.1.4.)} \quad \|\psi - \phi\|_1 &= \|\psi - \phi\| + \|\nabla(\psi - \phi)\| \\
 &= \text{Sup}\{|\psi(x) - \phi(x)| : x \in \bar{\Omega}\} + \text{Sup}\{|\nabla(\psi(x) - \phi(x))| : x \in \bar{\Omega}\} \\
 &= \text{Sup}_{x \in \bar{\Omega}} \left\{ \text{máx}_{1 \leq i \leq N} |\psi_i(x) - \phi_i(x)| + \text{Sup}_{x \in \bar{\Omega}} \left\{ \text{máx}_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} (\psi_i - \phi_i)(x) \right| \right\} \right\}.
 \end{aligned}$$

Entonces $\forall x \in \bar{\Omega}$ se tiene:

$$(Ec. 2.1.5.) \quad \|\phi(x) - \psi(x)\| \leq \|\phi - \psi\|_1 < \delta.$$

A continuación el objetivo es determinar la relación de distancia entre $\psi(x)$ y p , por lo que se procede de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - p\| &= \|\phi(x) - \psi(x) + \psi(x) - p\|; \text{ mediante la desigualdad triangular.} \\ &\leq \|\phi(x) - \psi(x)\| + \|\psi(x) - p\| \\ \implies \|\phi(x) - p\| - \|\phi(x) - \psi(x)\| &\leq \|\psi(x) - p\|; \quad \forall x \in \bar{\Omega} \\ \implies \|\psi(x) - p\| &\geq \|\phi(x) - p\| - \|\phi(x) - \psi(x)\|; \text{ utilizando la ecuación 2.1.5.} \\ &> \|\phi(x) - p\| - \delta; \quad \text{bajo el uso de (Ec. 2.1.3).} \\ &> 2\delta - \delta = \delta. \end{aligned}$$

Finalmente $\|\psi(x) - p\| > \delta$, para todo $x \in \bar{\Omega}$, por lo que $p \notin \psi(\bar{\Omega})$ en consecuencia $\psi^{-1}(\{p\}) = \emptyset$, es decir, p no tiene imágenes inversas en $\bar{\Omega}$ mediante ψ^{-1} , luego se asegura que $p \notin \psi(S_\psi) \cup \psi(\partial\Omega)$, por ser $S_\psi \subset \bar{\Omega}$ y por $\partial\Omega \subset \bar{\Omega}$.

Concluyendo que: $deg(\psi, \Omega, p) = deg(\phi, \Omega, p) = 0$.

2DO CASO: $\phi^{-1}(\{p\})$ es un conjunto finito.

De acuerdo a la hipótesis: $p \notin \phi(S_\phi) \cup \phi(\partial\Omega)$, p es un valor regular, de forma que por el teorema 1.2.2., $\phi^{-1}(\{p\})$ es un conjunto finito, $\phi^{-1}(\{p\}) = \{a_1, \dots, a_k\}$.

Puesto que ϕ es una función de clase C^1 , mediante el desarrollo de Taylor es posible obtener un disco de radio positivo dentro del cual existe un único punto que satisface $\phi(x) = p$, esto permite elegir r de forma tal que las bolas:

$$\begin{aligned} Q(a_i, r) &= \{y \in \mathbb{R}^N : \rho(a_i, y) < r\}; \quad i = 1, 2, \dots, k; \\ &\downarrow \\ |a_i - y| &= \text{máx} \{|a_{i_j} - y_j| : j = 1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

sean disjuntas y en consecuencia los a_i son puntos aislados que satisfacen la ecuación $\phi(x) = p$.

En adelante el propósito es mostrar que existe $r > 0$, $\delta > 0$ tal que si $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ cumpliendo (Ec. 2.1.1.), entonces ψ admite exactamente un p -punto en $Q(a_i, r)$ $i = 1, 2, \dots, k$, es decir, en cada bola existe exactamente un punto $x \in \bar{\Omega}$ que satisface la ecuación $\psi(x) = p$.

Elegimos r_0 de forma tal que las bolas $Q(a_i, r_0)$ sean disjuntas y no corten al conjunto $\partial\Omega \cup S_\phi$;

$$0 < r_0 < \min \left\{ \frac{\rho(a_i, a_j)}{3}; i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, k \right\} \wedge \min \left\{ \frac{\rho(a_i, \partial\Omega \cup S_\phi)}{3}; i = 1, 2, \dots, k \right\}$$

se introduce la siguiente notación

$$(Ec. 2.1.6.) \quad Q(r_0) = Q(a_1, r_0) \cup \dots \cup Q(a_k, r_0) = \bigcup_{i=1}^k Q(a_i, r_0).$$

Ya que $\phi^{-1}(\{p\}) = \{a_1, \dots, a_k\}$ es un conjunto finito de puntos regulares que además son aislados, cada bola $Q(a_i, r_0)$ con $i = 1, 2, \dots, k$, es un conjunto finito dentro del conjunto compacto $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$, en consecuencia cada bola $Q(a_i, r_0)$ es compacta. Dado que la unión finita de una colección cualquiera de conjuntos compactos es compacta, se infiere que $Q(r_0) = \bigcup_{i=1}^k Q(a_i, r_0)$ es un conjunto compacto.

Como cada a_i es un punto regular, $J_\phi(a_i) \neq 0$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y denotamos por:

$$(Ec. 2.1.7.) \quad c = \min \{|J_\phi(a_i)| : i = 1, 2, \dots, k\} > 0.$$

Ya que J_ϕ es una aplicación lineal continua sobre $\bar{\Omega}$, pues $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$, por el teorema de Heine Cantor, la aplicación J_ϕ es uniformemente continua.

Si denotamos por $c_i = |J_\phi(a_i)|$ para $i = 1, 2, \dots, k$, podemos realizar el análisis para cada una de las bolas $Q(a_i, r_0)$ de la siguiente forma:

tomando en particular $\epsilon = \frac{1}{3} c_i$, existe $\delta > 0$ tq.: $|J_\phi(a_i) - J_\phi(x)| < \epsilon$ siempre que $|a_i - x| < \delta$, de manera que:

$$\begin{aligned} |J_\phi(x)| &= |J_\phi(x) - J_\phi(a_i) + J_\phi(a_i)| \\ &= |J_\phi(a_i) - (J_\phi(a_i) - J_\phi(x))|; |a - b| \geq ||a| - |b|| \\ &\geq |J_\phi(a_i)| - |J_\phi(a_i) - J_\phi(x)| \\ &\geq c_i - \frac{1}{3} c_i = \frac{2}{3} c_i. \end{aligned}$$

De forma que $|J_\phi(x)| \geq \frac{2}{3} c_i \geq \frac{2}{3} c$, por (Ec. 2.1.7.).

De lo anterior se afirma que existe $0 < r_1 < r_0$ tal que $|J_\phi(x)| \geq \frac{2}{3}c$, para todo $x \in Q(r_1) = \cup_{i=1}^k Q(a_i, r_1)$. De manera directa: el jacobiano es una función continua, si en cierto x su valor absoluto es mayor que c entonces en un entorno es mayor que $\frac{2}{3}$ de c .

Según (Ec. 2.1.4.), el que la función ψ esté cerca de ϕ según la norma $\|\cdot\|_1$, $\|\psi - \phi\|_1 \leq \delta$, significa que no sólo están cerca los valores de la función, sino también todas las derivadas parciales de orden 1 lo están, y en tal caso el jacobiano de ψ está próximo del jacobiano de ϕ uniformemente, para todo $x \in \bar{\Omega}$, por lo que se elige $\delta_1 > 0$ de tal forma que se cumpla (Ec. 2.1.2.), entonces $\forall x \in \bar{\Omega}$ se tiene:

$$(Ec. 2.1.8.) \quad \|J_\phi(x) - J_\psi(x)\| = Sup \{|J_\phi(x) - J_\psi(x)| : x \in \bar{\Omega}\} \leq \frac{1}{3}c$$

siempre que: $\|\phi - \psi\|_1 \leq \delta_1$.

Se deduce que sí $x \in Q(r_1)$ y $\psi \in B^1(\phi, \delta_1)$, es decir, $\|\phi - \psi\|_1 \leq \delta_1$ entonces:

$$\begin{aligned} \|J_\psi(x)\| &= \|J_\phi(x) - J_\phi(x) + J_\psi(x)\| ; |a - b| \geq ||a| - |b||. \\ &\geq \|J_\phi(x)\| - \|J_\phi(x) - J_\psi(x)\| \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\geq \frac{2}{3}c \qquad \leq \frac{1}{3}c \\ &\geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)c = \frac{1}{3}c. \end{aligned}$$

Obteniendo:

$$(Ec. 2.1.9.) \quad \|J_\psi(x)\| = Sup \{|J_\psi(x)| : x \in Q(r_1)\} \geq \frac{1}{3}c > 0;$$

siempre que: $\|\phi - \psi\|_1 \leq \delta_1$.

Se deduce por (Ec. 2.1.9.) que: $\psi(Q(a_i, r_1))$ es un conjunto de valores regulares, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

El resto de la prueba consiste en aplicar el teorema de contracción para probar que efectivamente ψ tiene un sólo p -punto en cada $Q(a_i, r_1)$.

En esta parte se hace indispensable recordar que en un espacio métrico (X, d) , una función f se denomina contracción si existe un número $\alpha < 1$ tq.:

$$(Ec. 2.1.10.) \quad d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y), \forall x, y \in X.$$

El teorema de contracción afirma, que una función contracción en un espacio métrico completo, posee un único punto fijo. Ya que \mathbb{R}^N es un espacio métrico completo (Banach) con cualquiera de sus distancias usuales, resta el garantizar una aplicación que tenga las características de una contracción, de tal forma que nos centraremos en el estudio de las soluciones de la ecuación: $\psi(x) = p$ en $Q(a_i, r_1)$; $0 < r_1 < r_0$; $\forall i \in 1, \dots, k$.

Es claro que basta probarlo para una bola $Q(a_i, r_1)$ arbitraria de manera que fijamos un índice i y simplificamos la nomenclatura introduciendo la siguiente notación:

$$a = a_i \quad \text{y} \quad h = \phi(a_i) - \psi(a_i) = \phi(a) - \psi(a)$$

iniciamos el análisis de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi(x) = p = \phi(a) ; & \quad \phi^{-1}(\{p\}) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \\ & \iff \phi(a_i) = p; \quad i = 1, 2, \dots, k. \\ & = \phi(a) + \psi(a) - \psi(a) \\ & = \psi(a) + \phi(a) - \psi(a) \\ & = \psi(a) + h \end{aligned}$$

De forma que estudiar las soluciones de $\psi(x) = p$ equivale a buscar las soluciones de $\psi(x) - \psi(a) = h$ en $Q(a, r_1)$, el cual veremos que representa un problema de punto fijo.

Con el propósito de que la bola $Q(a, r_1)$ este centrada en el origen $Q(0, r_1)$, se realiza la traslación de coordenadas siguiente $x = z + a$, $\forall z \in Q(0, r_1)$, así bajo este cambio de variables $\psi(x) = \psi(z + a)$, reescribimos la ecuación:

$$\begin{aligned} h &= \psi(x) - \psi(a) \\ &= \psi(z + a) - \psi(a) \\ &= \psi(z + a) - \psi(a) - D\psi(a) \cdot z + D\psi(a) \cdot z. \end{aligned}$$

$$(Ec. 2.1.11.) \quad h = \psi(z + a) - \psi(a) - D\psi(a) \cdot z + D\psi(a) \cdot z.$$

Considerando la aplicación $T: Q(0, r_1) \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida como:

$$(Ec. 2.1.12.) \quad T(z) = \psi(z + a) - \psi(a) - D\psi(a) \cdot z$$

en la ecuación 2.1.11 obtenemos:

$$(Ec. 2.1.13.) \quad h = T(z) + D\psi(a) \cdot z$$

Por definición, la diferencial de ψ en a es un operador lineal, y más aún $D\psi(a)$ es un operador lineal inversible, por (Ec. 2.1.9.).

Como ψ es una aplicación de \mathbb{R}^N , entonces se le puede asociar directamente con la matriz de sus derivadas parciales. Así que se puede multiplicar por la izquierda a ambos miembros de la ecuación $D\psi(a).z = h - T(z)$ por la inversa de dicha matriz, $(D\psi(a))^{-1}$

$$(D\psi(a))^{-1} D\psi(a).z = (D\psi(a))^{-1} (h - T(z))$$

$$\implies z = (D\psi(a))^{-1} (h - T(z)); \text{ denotamos la inversa de } (D\psi(a))^{-1} \text{ por } V.$$

Se puede pensar que el operador inverso V consiste directamente en multiplicar a la izquierda por la inversa de la matriz $D\psi(a)$.

$$\implies z = V (h - T(z))$$

Definimos la aplicación $W : Q(0, r_1) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ como: $V (h - T(z)) = W(z)$ para obtener:

$$\text{(Ec. 2.1.14.)} \quad z = V (h - T(z)) = W(z)$$

así $h = \psi(x) - \psi(a)$ representa un problema de punto fijo.

Estudiar la ecuación $\psi(x) = p$, para algún $x \in Q(a, r_1)$ equivale a analizar, luego de la traslación de coordenadas, la relación $\psi(z + a) = p = \phi(a)$, para algún $z \in Q(0, r_1)$ y equivale a su vez a resolver $W(z) = z$, para algún $z \in Q(0, r_1)$.

Lo siguiente consiste en demostrar que la ecuación $W(z) = z$ admite exactamente una solución en $Q(0, r_1)$ para algún $r_1 < r_0$ y cuando $\|\phi - \psi\|_1 < \delta_1$, para algún $\delta_1 < \delta$, es decir, garantizar que $W(z) = z$ tiene un único punto fijo en $Q(0, r_1)$.

Para aplicar el teorema de la contracción, inicialmente nuestro propósito es mostrar que W es efectivamente una contracción.

Ya que: $z = V (h - T(z)) = W(z)$, donde $T(z) = \psi(z + a) - \psi(a) - D\psi(a).z$ se estima la componente $(T(z) - T(y))_l$ para $y, z \in Q(0, r_1)$, $1 \leq l \leq N$, donde l cuantifica las funciones componente ya que $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N-1}, \psi_N)$ con $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ y en notación de operadores se escribirá $(Tz - Ty)_l$.

Dado que $T : Q(0, r_1) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es un operador lineal:

$$\begin{aligned} (T(z) - T(y))_l &= \psi_l(z + a) - \psi_l(a) - D\psi_l(a) \cdot z - \psi_l(a + y) + \psi_l(a) + D\psi_l(a) \cdot y \\ &= \psi_l(z + a) - \psi_l(a + y) - D\psi_l(a) \cdot (z - y) \end{aligned}$$

$$(Ec. 2.1.15.) \quad (T(z) - T(y))_l = \psi_l(z + a) - \psi_l(a + y) - D\psi_l(a) \cdot (z - y)$$

Se trabajará por separado la expresión $\psi_l(z + a) - \psi_l(a + y)$ de (Ec. 2.1.15.)

$$\psi_l(z + a) - \psi_l(a + y);$$

$\forall y, z \in Q(0, r_1)$
derivando e integrando
respecto a $\theta \in [0, 1]$.

$$= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \psi_l(a + \theta z + (1 - \theta)y) d\theta;$$

mediante el
teorema del valor medio.

$$= \int_0^1 D\psi_l(a + \theta z + (1 - \theta)y) (z - y) d\theta;$$

por la derivada implícita.
 $1 \leq l \leq N; \quad \forall y, z \in Q(0, r_1)$.

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(a + \theta z + (1 - \theta)y) \cdot (z_j - y_j) d\theta$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(a + \theta z + (1 - \theta)y) \right] d\theta;$$

$z_j - y_j$ sale como una
constante por carecer
de la variable de integración.

$$= \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \int_0^1 \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(a + \theta z + (1 - \theta)y) \right] d\theta.$$

Obteniendo:

$$(Ec. 2.1.16.) \quad \psi_l(z + a) - \psi_l(a + y) = \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \int_0^1 \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(a + \theta z + (1 - \theta)y) \right] d\theta$$

Sustituyendo la igualdad 2.1.16 en (Ec. 2.1.15.)

$$(T(z) - T(y))_l$$

$$= \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \int_0^1 \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(a + \theta z + (1 - \theta)y) \right] d\theta - D\psi_l(a) \cdot (z - y)$$

$$= \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \int_0^1 \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(a + \theta z + (1 - \theta)y) \right] d\theta - \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(a) \right]$$

$$= \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \int_0^1 \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (a + \theta z + (1 - \theta) y) - \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (a) \right] d\theta$$

Bajo el cambio de variables
 $\zeta = a + \theta z + (1 - \theta) y$.

$$= \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \int_0^1 \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (\zeta) - \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (a) \right] d\theta$$

Sumando y restando
 $\frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (\zeta)$ y $\frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (a)$.

$$= \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \int_0^1 \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (\zeta) - \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (\zeta) + \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (\zeta) - \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (a) + \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (a) - \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (a) \right] d\theta$$

Se toman las parejas del integrando en orden y se busca una acotación apropiada para cada una de ellas.

Mediante (Ec. 2.1.1.) y (Ec. 2.1.4.) es posible obtener desigualdades para

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (\zeta) - \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (\zeta) \text{ y para } \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (a) - \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (a).$$

(Ec. 2.1.17.)

$$\left| \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (\zeta) - \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (\zeta) \right| \leq \delta \implies \int_0^1 \left| \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (\zeta) - \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (\zeta) \right| d\theta \leq \int_0^1 \delta d\theta = \delta \cdot \theta \Big|_0^1 = \delta.$$

(Ec. 2.1.18.)

$$\left| \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (a) - \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (a) \right| \leq \delta \implies \int_0^1 \left| \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (a) - \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} (a) \right| d\theta \leq \int_0^1 \delta d\theta = \delta \cdot \theta \Big|_0^1 = \delta.$$

Para el análisis $\frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (\zeta) - \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} (a)$ introducimos la función $\varepsilon : [0, r_1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$\varepsilon(r) = \text{Sup}_{r \in [0, r_1]} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} (a + \theta z + (1 - \theta) y) - \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} (a) \right| d\theta : z, y \in \overline{Q(0, r)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \right\}$$

de forma que se obtiene:

$$(Ec. 2.1.19.) \quad \int_0^1 \left| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} (\zeta) - \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} (a) \right| d\theta \leq \int_0^1 \varepsilon(r) d\theta = \varepsilon(r) \cdot \theta \Big|_0^1 = \varepsilon(r).$$

Antes de proseguir es conveniente dar la forma explícita del vector $(Tz - Ty)$ y su respectiva norma:

$$\begin{aligned} (Tz - Ty) &= ((T(z) - T(y))_1, (T(z) - T(y))_2, \dots, (T(z) - T(y))_l, \dots, (T(z) - T(y))_N) \\ &= ((T_1z - T_1y), (T_2z - T_2y), \dots, (T_lz - T_ly), \dots, (T_Nz - T_Ny)) \end{aligned}$$

$$|Tz - Ty| = \text{máx} \{|T_iz - T_iy| : i = 1, 2, \dots, l, \dots, N\} ; \quad y, z \in \overline{Q(0, r)}.$$

Para cada componente tenemos la igualdad:

$$\begin{aligned} (T(z) - T(y))_l &= T_l(z) - T_l(y) \\ &= \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \int_0^1 \left[\frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(\zeta) - \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j}(\zeta) + \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j}(\zeta) - \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(a) \right] d\theta \end{aligned}$$

Al aplicar normas a ambos miembros

$$\begin{aligned} |Tz - Ty| &\leq \left| \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \right| \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(\zeta) - \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j}(\zeta) \right| d\theta + \int_0^1 \left| \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(a) \right| d\theta + \int_0^1 \left| \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j}(\zeta) - \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j}(a) \right| d\theta \right) \end{aligned}$$

sustituyendo las acotaciones expuestas en (Ec. 2.1.17.), (Ec. 2.1.18.) y (Ec. 2.1.19.) se consigue

$$(Ec. 2.1.20.) \quad |Tz - Ty| \leq \left| \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \right| \int_0^1 [2\delta + \varepsilon(r)] d\theta$$

Sin embargo es preciso analizar que: $\left| \sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \right| = \sum_{j=1}^N |z_j - y_j|$ es una suma de N elementos todos distintos, en cambio al considerar la norma asociada al máximo $|z - y| = \text{máx} \{|z_i - y_i| : i = 1, 2, \dots, N\}$ esta sólo tomará uno de tales valores absolutos, que es el máximo valor absoluto de la diferencia entre componentes, posteriormente para acotar se multiplica por N , que es la cantidad de sumandos; por consiguiente la desigualdad 2.1.20. se torna

$$|T(z) - T(y)| \leq N |z - y| \int_0^1 [2\delta + \varepsilon(r)] d\theta \leq N |z - y| [[2\delta + \varepsilon(r)] \cdot \theta]_0^1$$

$$(Ec. 2.1.21.) \quad |T(z) - T(y)| \leq N |z - y| (2\delta + \varepsilon(r))$$

A fin de asegurar la condición de contracción para la aplicación W , examinamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} W(z) - W(y) &= V(h - Tz) - V(h - Ty) \\ &= V(h - Tz - h + Ty); \text{ pues } V = (D\psi(a))^{-1} \\ &\quad \text{es un operador lineal.} \\ &= V(Ty - Tz); \end{aligned}$$

Entonces aplicando normas a ambos miembros de la igualdad precedente:

$$\begin{aligned} |W(z) - W(y)| &= |V(T(z) - T(y))| \\ &\leq |V| |T(z) - T(y)|; \quad \text{bajo el uso de (Ec. 2.1.21.).} \\ &\leq N |z - y| |V| [2\delta + \varepsilon(r)] \\ &\leq \{N \cdot 2\delta \cdot |V| + N \cdot \varepsilon(r) \cdot |V|\} |z - y| \end{aligned}$$

$$\text{(Ec. 2.1.22.)} \quad |W(z) - W(y)| \leq \{N \cdot 2\delta \cdot |V| + N \cdot \varepsilon(r) \cdot |V|\} |z - y|$$

Lo siguiente es demostrar que: $N \cdot 2\delta \cdot |V| + N \cdot \varepsilon(r) \cdot |V|$ en (Ec. 2.1.22.) es una constante estrictamente menor que 1 y así asegurar la condición para la contracción.

La función auxiliar $\varepsilon(r)$ posee la particularidad de que $\lim_{r \rightarrow 0^+} \varepsilon(r) = 0$, por lo que se escoge un r adecuado, específicamente $r \leq r_1$ suficientemente pequeño tal que: $N \cdot \varepsilon(r) \cdot |V| < \frac{1}{6}$, y eligiendo $\delta \leq \delta_1$, tal que: $N \cdot 2\delta \cdot |V| < \frac{1}{6}$, posteriormente sustituyendo ambas desigualdades en (Ec. 2.1.22.) se obtiene la contracción.

En consecuencia la ecuación $\psi(x) = p$ en su equivalente $W(z) = z$, con $z \in Q(0, r)$, $r < r_1 < r_0$, es una contracción y la ecuación admite una única solución en $Q(0, r)$ y este proceso se lleva a cabo para cada bola $Q(a_i, r)$ con $i = 1, \dots, k$. Luego $\psi(x) = p$ tiene una y sólo una solución a la que designaremos b_i en $Q(a_i, r)$ para cada i .

Lo siguiente es afirmar que no existen otras soluciones fuera de $\cup_{i=1}^k Q(a_i, r)$, es decir, la totalidad de soluciones de $\psi(x) = p$, $\psi^{-1}(\{p\}) = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ están incluidas en $Q(r)$.

Así el siguiente paso en la demostración, es garantizar que $\psi^{-1}(p) \subset Q(r)$.

Se escoge δ tal que $\delta \leq \frac{1}{2}l(r) = \frac{1}{2} \min \{|\phi(x) - p| : x \notin Q(a_1, r) \cup \dots \cup Q(a_k, r)\}$

Asumimos que $\psi(x) = p$ para algún $x \in \bar{\Omega} \setminus Q(r)$. Entonces:

$$|\phi(x) - \psi(x)| \geq l(r) \geq 2\delta > |\phi(x) - \psi(x)|$$

lo que sugiere una contradicción y esto prueba este caso.

El que $\psi^{-1}(p) \subset Q(r) = \cup_{i=1}^k Q(a_i, r)$; con $r < r_1 < r_0$, garantiza que: $Q(r) \cap \partial\Omega = \emptyset$ y en consecuencia $p \notin \psi(\partial\Omega)$.

Por el supuesto de que $\phi^{-1}(\{p\}) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, se obtiene por definición:

$$(Ec. 2.1.23.) \quad deg(\phi, \Omega, p) = \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn}(J_\phi(a_i))$$

por los resultados previos, $\psi^{-1}(\{p\}) = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ entonces:

$$(Ec. 2.1.24.) \quad \begin{aligned} deg(\psi, \Omega, p) &= \sum_{b_i \in \psi^{-1}(\{p\})} \operatorname{sgn}(J_\psi(b_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn}(J_\psi(b_i)) \end{aligned}$$

Ya que $\forall i = 1, \dots, k$, J_ϕ es continua en cada $Q(a_i, r)$ y $J_\phi(x) \neq 0, \forall x \in Q(a_i, r)$, se deduce que J_ϕ tiene un signo constante en $Q(a_i, r)$, pues posee un único cero en cada bola, y además el desarrollo de Taylor asegura que existe un entorno alrededor del punto a_i , con elementos distintos de cero, en donde la función no se anula, y dado que $b_i \in Q(a_i, r)$ se afirma que:

$$(Ec. 2.1.25.) \quad \operatorname{sgn}(J_\phi(a_i)) = \operatorname{sgn}(J_\psi(b_i)).$$

Retomando (Ec. 2.1.8.) inferimos que:

$$|J_\phi(b_i) - J_\psi(b_i)| = \operatorname{Sup} \{ |J_\phi(b_i) - J_\psi(b_i)| : b_i \in Q(a_i, r) \subset \bar{\Omega} \} \leq \frac{1}{3}c$$

Además al considerar $\psi^{-1}(\{p\}) = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ y $\phi^{-1}(\{p\}) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ resulta que $\psi(b_i) = p = \phi(a_i)$; en $Q(a_i, r_1)$ con $r < r_1 < r_0$, de esta discusión se consigue:

$$(Ec. 2.1.26.) \quad \operatorname{sgn}(J_\phi(b_i)) = \operatorname{sgn}(J_\psi(b_i))$$

Utilizando (Ec. 2.1.25.) y (Ec. 2.1.26.), procedemos por transitividad, consiguiendo finalmente:

$$(Ec. 2.1.27.) \quad \text{sgn}(J_\phi(a_i)) = \text{sgn}(J_\psi(b_i))$$

Concluimos que:

$$\begin{aligned} \text{deg}(\phi, \Omega, p) &= \sum_{i=1}^k \text{sgn}(J_\phi(a_i)) ; \quad \text{por (Ec. 2.1.27.)} \\ &= \sum_{i=1}^k \text{sgn}(J_\psi(b_i)) \\ &= \text{deg}(\psi, \Omega, p) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2. *deg* ES CONSTANTE EN CADA COMPONENTE CONEXA DE $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.

A continuación se presenta una serie de resultados auxiliares, pero indispensables para demostrar el resultado fundamental por el que principalmente se ha creado esta sección: “el grado topológico es constante en cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$ ”

LEMA 2.2.1.

Sea $f \in C_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, Ω un dominio abierto de \mathbb{R}^N , $K = \text{spt}(f)$

y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ un arco o camino continuo tal que:

$$(Ec. 2.2.1.) \quad A = \{k + \gamma(s) : k \in K, s \in [0, 1]\} \subset \Omega.$$

Entonces existe una función $\psi \in C_c^1(\overline{\Omega})$ tq.:

$$(Ec. 2.2.2.) \quad \text{div}(\psi)(x) = f(x - \gamma(0)) - f(x - \gamma(1)).$$

PRUEBA.

La demostración se divide en dos casos.

CASO 1.

Inicialmente suponemos que el arco $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ está definido como $\gamma(s) = s x_0$, para $s \in [0, 1]$, consideraremos también la notación $\gamma(t) = t x_0$, con $t \in [0, 1]$, de manera que (Ec. 2.2.2.) se reexpresa de la siguiente forma

$$(Ec. 2.2.3.) \quad A = \{k + t x_0 : k \in K, t \in [0, 1]\}$$

El objetivo es demostrar que existe $\psi \in C_c^1(\overline{\Omega})$ tq.:

$$(Ec. 2.2.4.) \quad \operatorname{div}(\psi)(x) = f(x) - f(x - x_0).$$

Sea $F : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como:

$$(Ec. 2.2.5.) \quad F(x) = \int_0^1 f(x - t x_0) dt$$

Ya que $f \in C_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{\Omega})$. Dado que $F(x) \neq 0$ implica que $f(x) \neq 0$ y por la definición de F se garantiza que $\operatorname{spt} F \subset \operatorname{spt} f$ así: $x - t \cdot x_0 \in K = \operatorname{spt}(f)$

Con el propósito de mostrar que $\operatorname{spt}(F) \subset A \subset \Omega$ se realiza el siguiente análisis:

si $x \in \operatorname{spt}(F)$ implica que $F(x) \neq 0$, entonces existe $t \in [0, 1]$ tq.: $f(x - t \cdot x_0) \neq 0$, luego $x - t \cdot x_0 \in K = \operatorname{spt}(f)$, es decir, $x \in K + t \cdot x_0$ y por ende $x = t \cdot x_0 + k \in A$, pues A contiene los elementos $k \in K$; como $A \subset \Omega$ se obtiene finalmente $\operatorname{spt}(F) \subset A \subset \Omega$.

La línea de demostración: $x \in K + t \cdot x_0$ vale para argumentar compacidad, ya que K es un soporte compacto y $t \cdot x_0$ consiste de un sólo punto, luego la suma de compactos $K + t \cdot x_0$ constituye un compacto.

Si $t \in [0, 1]$ y $x - t \cdot x_0 \notin K$ entonces $f(x - t \cdot x_0) = 0$ pues $K = \operatorname{spt}(f)$. Luego si $x \notin \cup_{t \in [0, 1]} K + t \cdot x_0$ entonces $F(x) = 0$.

$F(x) = \int_0^1 f(x - t \cdot x_0) dt$ sólo puede ser distinta de cero, si $f(x - t \cdot x_0)$ lo es, por lo que se asegura que $F \in C_c^1(\overline{\Omega})$

Se supone la función auxiliar

$$(Ec. 2.2.6.) \quad \psi(x) = F(x) \cdot x_0$$

para $x_0 \in \mathbb{R}^N$, la cual pertenece a las funciones de clase $C_c^1(\overline{\Omega})$ y nos disponemos a calcular su divergente:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \psi(x) &= \nabla \cdot \psi(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^1} (F(x) \cdot x_0^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (F(x) \cdot x_0^2) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x^N} (F(x) \cdot x_0^N) \\ &\quad \downarrow \\ &= \text{constante.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (F(x) \cdot x_0^i) \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \text{constante.} \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int_0^1 f(x-t \cdot x_0) dt \right) \right] \cdot x_0^i \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^i} f(x-t \cdot x_0) dt \right] \cdot x_0^i \quad ; \quad f \in C_c^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) .
 \end{aligned}$$

por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^N \left[\int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x^j} (f(x-t \cdot x_0)) \frac{\partial x^j}{\partial x^i} dt \right] \cdot x_0^i \quad ; \\
 &\quad \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases} \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^i} f(x-t \cdot x_0) dt \right] \cdot x_0^i \quad ; \\
 &= \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} f(x-t \cdot x_0) x_0^i \right\} dt ;
 \end{aligned}$$

por la regla de la cadena podemos obtener una expresión para $\frac{d}{dt} f(x-t \cdot x_0)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} f(x-t \cdot x_0) &= f'(x-t \cdot x_0) \cdot (-x_0) \\
 &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} f(x-t \cdot x_0) x_0^i
 \end{aligned}$$

implica que:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} f(x-t \cdot x_0) x_0^i = - \frac{d}{dt} f(x-t \cdot x_0) .$$

Así:

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} f(x-t \cdot x_0) x_0^i \right\} dt ; \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 &\quad \text{sustituyendo por } - \frac{d}{dt} f(x-t \cdot x_0) \\
 &= - \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x-t \cdot x_0) dt \\
 &= - [f(x-t \cdot x_0)] \Big|_0^1 \\
 &= - [f(x-x_0) - f(x)] \\
 &= f(x) - f(x-x_0). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

CASO 2.

Bajo las mismas suposiciones del caso 1. Sea $f \in C_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $K = \text{spt}(f)$, Ω un dominio de \mathbb{R}^N y para algún arco $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisfice:

$$(Ec. 2.2.7.) \quad A = \{k + \gamma(s) : k \in K, s \in [0, 1]\} = \cup_{s \in [0, 1]} K + \gamma(s)$$

Para cada $s, t \in [0, 1]$ se define la relación de equivalencia $s \sim t$ si y sólo si existe $\psi \in C_c^1(\overline{\Omega})$ tq.:

$$(Ec. 2.2.8.) \quad \text{div}(\psi)(x) = f(x - \gamma(s)) - f(x - \gamma(t))$$

tal relación de equivalencia determina una partición por subconjuntos disjuntos del intervalo cerrado $[0, 1]$ según sus clases de equivalencia y es suficiente mostrar que cada clase de equivalencia es un conjunto abierto de $[0, 1]$, ya que sí se prueba que las clases son abiertas y argumentando mediante la conexión del conjunto $[0, 1]$, se tendrá que existe una única clase y en definitiva $0 \sim 1$. La demostración de que la igualdad 2.2.8. es efectivamente una relación de equivalencia se muestra en detalle en el apéndice B.

Para probar que cada clase es abierta fijamos $s, s \in [0, 1]$ y sea C la clase de equivalencia para s . Debemos mostrar que C es un conjunto abierto de $[0, 1]$.

Definimos la función

$$(Ec. 2.2.9.) \quad f_s(x) = f(x - \gamma(s))$$

e introducimos la notación siguiente:

$$(Ec. 2.2.10.) \quad K_s = \text{spt}(f_s) \subset \Omega.$$

es posible inferir que: $K_s = K + \gamma(s)$ con $\text{spt}(f) = K$, pues sí $f_s(x) \neq 0$ implica que: $f(x - \gamma(s)) \neq 0$ y sucede siempre que $x - \gamma(s) \in K = \text{spt}(f)$ y para el s fijo que se ha considerado $x \in K + \gamma(s) = K_s$, donde K es el soporte compacto (cerrado y acotado) de f y dado que γ es una función arco-conexa (en particular una aplicación continua), se obtiene que K_s es un soporte compacto, finalmente $x \in K + \gamma(s) = \text{spt}(f_s) = K_s \subset \Omega$.

Para ver que C es un conjunto abierto necesitamos mostrar que todos sus puntos son interiores. Así para un $\varepsilon > 0$ conveniente se tiene:

$$(Ec. 2.2.11.) \quad \{t \in [0, 1] : |t - s| < \varepsilon\} \subset C.$$

obtenemos subconjuntos abiertos de la clase de equivalencia C de s , además de todo recubrimiento abierto del conjunto compacto $[0, 1]$ se posee una subcolección finita, es decir, un subrecubrimiento abierto finito que también lo recubre.

Ya hemos definido la función $f_s(x) = f(x - \gamma(s))$ con $\text{spt}(f_s) = K_s \subset \Omega$, además para dicho s definimos el conjunto siguiente:

$$(Ec. 2.2.12.) \quad A_s = \{k + \theta \cdot h_t : k \in K_s, \theta, t \in [0, 1]\},$$

donde: $h_t = \gamma(t) - \gamma(s)$ y por la continuidad de $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, se afirma que h_t es continua.

Como $K_s = \text{spt}(f_s)$ es un subconjunto compacto del abierto y acotado Ω , $\rho(K_s, \partial\Omega) > 0$, pues $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{\mathbb{R}^N} \setminus \overline{\Omega}$ y por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tq.: sí $|t - s| < \varepsilon$ entonces:

$$(Ec. 2.2.13.) \quad |h_t| = |\gamma(t) - \gamma(s)| < \frac{1}{2}\rho(K_s, \partial\Omega)$$

De igual forma haciendo $\eta = \frac{1}{2}\rho(K_s, \Omega^c) > 0$ y por la continuidad de γ , existe $\varepsilon > 0$ tq.:

$$(Ec. 2.2.14.) \quad |h_t| = |\gamma(t) - \gamma(s)| < \eta = \frac{1}{2}\rho(K_s, \Omega^c)$$

siempre que: $|t - s| < \varepsilon$. Fijando t tq.: $|t - s| < \varepsilon$ y con $A_s \subset \Omega$, en conjunto con el supuesto de que para algún $\theta \in [0, 1]$

$$(Ec. 2.2.15.) \quad x = k + \theta h_t \in \Omega^c$$

Entonces

$$(Ec. 2.2.16.) \quad |x - k| = \theta |h_t| < \theta \eta; \quad \theta \in [0, 1]; \text{ por (Ec. 2.2.14.)}$$

Ahora considerando que $k \in K_s$ y bajo el supuesto expresado en (Ec. 2.2.15.) tenemos que:

$$(Ec. 2.2.17.) \quad |x - k| = \rho(k, \Omega^c) < \eta = \frac{1}{2}\rho(K_s, \Omega^c).$$

Mediante la desigualdad $|x - k| < \theta \eta$ con $\theta \in [0, 1]$ descrita en (Ec. 2.2.16.) y $|x - k| = \rho(k, \Omega^c) < \eta$ con $\eta = \frac{1}{2}\rho(K_s, \Omega^c)$, en (Ec. 2.2.17.), se logra la contradicción.

Finalmente, bajo el uso del caso 1 del presente lema, existe $\psi \in C_c^1(\overline{\Omega})$ tq.: si $|t - s| < \varepsilon$ entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\psi)(x) &= f_s(x) - f_s(x - h_t) \\ &= f(x - \gamma(s)) - f(x - h_t - \gamma(s)) \\ &= f(x - \gamma(s)) - f(x - \gamma(t) + \gamma(s) - \gamma(s)) \\ &= f(x - \gamma(s)) - f(x - \gamma(t)) \end{aligned}$$

por lo que $s \sim t$ y en consecuencia la clase C es un conjunto abierto de $[0, 1]$.

PROPOSICIÓN 2.2.2 “EL GRADO TOPOLÓGICO ES CONSTANTE EN CADA COMPONENTE CONEXA DE $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$ ”.

Sea $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Sea θ una componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$ y sean los valores regulares $b_1, b_2 \in \theta \setminus f(S_f)$ entonces:

$$(Ec. 2.2.18.) \quad \operatorname{deg}(f, \Omega, b_1) = \operatorname{deg}(f, \Omega, b_2).$$

Significa que:

Si θ designa una componente conexa de $[f(\partial\Omega)]^c$ y el conjunto de todos los valores regulares de f que están en θ es denotado por $\theta^r = \{p \in \theta \subset [f(\partial\Omega)]^c / J_f(p) \neq 0\}$ entonces $\operatorname{deg}(f, \Omega, \cdot)|_{\theta^r}$ es constante.

Se inicia la demostración asumiendo que la función está en $C^2(\overline{\Omega})$ luego suavizamos la restricción a una función en $C^1(\overline{\Omega})$. Así vamos a considerar $f \in C^2(\overline{\Omega})$ que tiene la propiedad de tener tanto a b_1 como a b_2 como unos de sus valores regulares.

A fin de utilizar el hecho de que “un conjunto abierto conexo de \mathbb{R}^N es arco-conexo”, inicialmente garantizaremos que $[f(\partial\Omega)]^c$ es abierto, con este propósito realizamos el siguiente análisis:

Por definición: $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{\mathbb{R}^N \setminus \Omega}$ la cual es una intersección entre cerrados y por tanto $\partial\Omega$ es un conjunto cerrado.

Ya que Ω es abierto y acotado se puede considerar que $\partial\Omega$ subconjunto de \mathbb{R}^N está contenido en una N -bola $B(a, r)$ para algún $r > 0$ y algún a de \mathbb{R}^N , por tanto es un conjunto acotado.

Así, por la argumentación precedente $\partial\Omega$ se considera un conjunto compacto y dado que $f \in C^2(\overline{\Omega})$, y en particular f es una aplicación continua, implica que $f(\partial\Omega)$ es un conjunto compacto en \mathbb{R}^N , pues la compacidad se conserva bajo aplicaciones continuas, por tanto $[f(\partial\Omega)]^c = \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$ es abierto.

De los resultados topológicos se conoce que: un conjunto abierto de \mathbb{R}^N es conexo si y sólo si es conexo por caminos ó arcoconexo. Por hipótesis θ es una componente conexa de $[f(\partial\Omega)]^c$, y como $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$ es un conjunto abierto, luego $\theta \subset [f(\partial\Omega)]^c = \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$ es un conjunto abierto conexo de \mathbb{R}^N y en consecuencia arcoconexo.

Supongamos que θ contiene los valores regulares b_1 y b_2 , se considera la función arco-conexa $\gamma : [0, 1] \rightarrow \theta$ como el camino que los une, con: $\gamma(0) = b_1$ y $\gamma(1) = b_2$.

γ es una aplicación continua del compacto $[0, 1]$ a θ , así la traza de γ es compacta, (pues la compacidad se conserva bajo aplicaciones continuas), luego existe un entorno abierto ó una bola abierta con ε_0 suficientemente grande, N_{ε_0} -entorno, en θ que contiene $\gamma([0, 1])$.

Sea $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una familia de funciones continuas tal que:

$$(Ec. 2.2.19.) \quad spt(\varphi_\varepsilon) = K_\varepsilon \subset \Omega$$

$$(Ec. 2.2.20.) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(y) dy = 1$$

$$(Ec. 2.2.21.) \quad K_\varepsilon = Q(0, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^N / \rho(0, y) < \varepsilon\}$$

↓

$$\rho(0, y) = |y| = \text{máx}\{|y_i| : i = 1, \dots, N\}.$$

Por “la representación integral del grado”, el grado topológico es independiente de ε y φ , así se puede elegir la misma función φ para ambas representaciones respecto de b_1 y de b_2 , y ya que existe ε tq.: $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, e implica que:

$$(Ec. 2.2.22.) \quad deg(f, \Omega, b_i) = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - b_i) J_f(x) dx ; \text{ para } i = 1, 2.$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{ \varepsilon_0, \rho(\gamma, \theta^c) \}$, donde $\rho(\gamma, \theta^c)$ es estrictamente positiva, ya que: $\gamma : [0, 1] \rightarrow \theta$ posee traza compacta y $\gamma(s) \in \theta \subset [f(\partial\Omega)]^c = \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$, $\forall s \in [0, 1]$, así para todo $s \in [0, 1]$ se considera:

$$(Ec. 2.2.23.) \quad K_{s, \varepsilon} = \{z + \gamma(s) : z \in spt(\varphi_\varepsilon) = K_\varepsilon, s \in [0, 1]\} \subset \Omega$$

se infiere entonces que: $\cup_{s \in [0, 1]} K_{s, \varepsilon} \subset \Omega$, y de acuerdo al caso 2 del Lema 2.2.1, existe $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ con $spt(\psi) \subset \theta$ tq.:

$$(Ec. 2.2.24.) \quad \begin{aligned} div(\psi)(f(x)) &= \varphi_\varepsilon(f(x) - \gamma(0)) - \varphi_\varepsilon(f(x) - \gamma(1)) \\ &= \varphi_\varepsilon(f(x) - b_1) - \varphi_\varepsilon(f(x) - b_2). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros de (Ec. 2.2.24.) por $J_f(x)$ e integrando sobre Ω obtenemos:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} div(\psi)(f(x)) J_f(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - b_1) J_f(x) dx - \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - b_2) J_f(x) dx; \end{aligned}$$

Por la representación integral
del grado topológico.

$$= deg(f, \Omega, b_1) - deg(f, \Omega, b_2).$$

Entonces:

$$(Ec. 2.2.25.) \quad deg(f, \Omega, b_1) = deg(f, \Omega, b_2) + \int_{\Omega} div(\psi)(f(x)) J_f(x) dx$$

Dado que $f \in C^2(\overline{\Omega})$ y $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tq.:

$$(Ec. 2.2.26.) \quad [spt(\psi) \cap f(\partial\Omega)] \subset [\Omega \cap f(\partial\Omega)] = \emptyset$$

Por lo que se cumplen las hipótesis del lema 1.3.4., entonces existe $\xi \in C_c^1(\overline{\Omega})$ tq.: $div(\xi)(x) = div(\psi)(f(x)) J_f(x)$ con $spt(\xi) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$, pues b_1 y $b_2 \notin f(\partial\Omega)$.

Así la ecuación (Ec. 2.2.25.) se transforma en:

$$(Ec. 2.2.27.) \quad deg(f, \Omega, b_1) = deg(f, \Omega, b_2) + \int_{\Omega} div(\xi)(y) dy$$

Para nuestros propósitos utilizaremos el teorema clásico de la divergencia que dice que la integral de la divergencia de un campo es igual a su flujo a través del borde. En este caso, la integral de la divergencia resulta ser cero porque el campo se anula sobre el borde, de forma que:

$$(Ec. 2.2.28.) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} (\xi)(y) dy = 0$$

concluyendo: $\operatorname{deg} (f, \Omega, b_1) = \operatorname{deg} (f, \Omega, b_2)$; con $f \in C^2(\overline{\Omega})$.

A continuación se considera θ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \theta$ como en la 1era parte y se debilita la restricción $f \in C^2(\overline{\Omega})$ regularizando $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

Por la proposición 2.1.1, existe $\delta(b_i) > 0$, para $i = 1, 2$ tq.: $\|g - f\|_1 \leq \delta(b_i)$ e implica que $b_i \notin (g(\partial\Omega) \cup g(S_g))$ y $\operatorname{deg} (f, \Omega, b_i) = \operatorname{deg} (g, \Omega, b_i)$.

Haciendo: $\delta = \frac{1}{2} \min \{\delta(b_1), \delta(b_2), \rho(\gamma, f(\partial\Omega))\}$, se demostrará que b_1 y b_2 está en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus g(\partial\Omega)$ a condición de que $\|f - g\|_1 < \delta$.

$\forall x \in \partial\Omega, s \in [0, 1]$, tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x) - \gamma(s)| &= |f(x) - g(x) + g(x) - \gamma(s)|; \text{ Por desigualdad triangular.} \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - \gamma(s)| \end{aligned}$$

e implica que:

$$(Ec. 2.2.29.) \quad |\gamma(s) - g(x)| \geq |\gamma(s) - f(x)| - |f(x) - g(x)|.$$

Mayorizando $|\gamma(s) - f(x)|$ donde: $\gamma : [0, 1] \rightarrow \theta \subset \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$

$$\begin{aligned} \rho(\gamma(s), f(\partial\Omega)) &= \inf \{\rho(\gamma(s), f(x)) : f(x) \in f(\partial\Omega)\} \\ &\quad \downarrow \\ \rho(\gamma(s), f(x)) &= |\gamma(s) - f(x)| \end{aligned}$$

por tanto $\forall x \in \partial\Omega, s \in [0, 1]$, tenemos:

$$(Ec. 2.2.30.) \quad |\gamma(s) - f(x)| \geq \rho(\gamma(s), f(\partial\Omega)).$$

Minorizando $|f(x) - g(x)|$.

Por $\|f - g\|_1 < \delta$, tenemos que para toda $x \in \partial\Omega$ y toda $s \in [0, 1]$

$$|f(x) - g(x)| < \delta = \frac{1}{2} \text{mín} \{ \delta(b_1), \delta(b_2), \rho(\gamma(s), f(\partial\Omega)) \}$$

y en particular:

$$(Ec. 2.2.31.) \quad |f(x) - g(x)| < \delta = \frac{1}{2} \rho(\gamma(s), f(\partial\Omega)).$$

Sustituyendo (Ec. 2.2.30.) y (Ec. 2.2.31.) en (Ec. 2.2.29.)

$$\begin{aligned} |\gamma(s) - g(x)| &\geq |\gamma(s) - f(x)| - |f(x) - g(x)| \\ &\geq \rho(\gamma(s), f(\partial\Omega)) - \frac{1}{2} \rho(\gamma(s), f(\partial\Omega)) \\ &\geq \frac{1}{2} \rho(\gamma(s), f(\partial\Omega)) \\ &> 0. \end{aligned}$$

↙
Estrictamente mayor que cero pues :

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \theta \subset \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega).$$

$$\therefore \gamma(s) \in \mathbb{R}^N \setminus g(\partial\Omega), \quad \forall s \in [0, 1].$$

Ya que γ une a b_1 y b_2 , deducimos que b_1 y b_2 pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus g(\partial\Omega)$.

Finalmente tomando $g \in C^2(\overline{\Omega})$ tq.: $\|g - f\|_1 \leq \delta$ tenemos:

$$\text{deg}(f, \Omega, b_1) = \text{deg}(g, \Omega, b_1) = \text{deg}(g, \Omega, b_2) = \text{deg}(f, \Omega, b_2).$$

↓ ↓ ↓

Prop. 2.1.1

1era parte de
esta proposición.

Prop. 2.1.1. ■

2.3. LEVANTANDO LA RESTRICCIÓN DE QUE p SEA UN VALOR REGULAR.

Anteriormente en la definición 1.2.1, se mencionó de manera explícita que el valor correspondiente al tercer parámetro de la terna admisible debe ser regular, sin embargo en esta sección el propósito va orientado a modificar esta restricción, a fin de tomar cualquier clase de valor, sea regular o crítico.

A continuación se enuncia el lema de Sard, el cual es de vital importancia para el objetivo expuesto.

LEMA 2.3.1 SARD.

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y $S_f = \{x : x \in \Omega, J_f(x) = 0\}$ el conjunto de puntos críticos de f . Entonces $f(S_f)$ es de medida nula.

La demostración del lema de Sard es presentada en el apéndice A debido a su extensión.

La siguiente definición es enunciada con el objetivo de levantar la restricción de que p sea un valor regular.

DEFINICIÓN 2.3.2. GRADO TOPOLÓGICO RESPECTO DE UN VALOR CRÍTICO.

Sea $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$, $p \notin \phi(\partial\Omega)$ y sin embargo es tal que $p \in \phi(S_\phi)$.

Definimos $\deg(\phi, \Omega, p)$, el grado de ϕ en Ω , con respecto a p , como el número $\deg(\phi, \Omega, q)$ para $q \notin (\phi(S_\phi) \cup \phi(\partial\Omega))$ tq.:

$$(Ec. 2.3.1.) \quad |p - q| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)).$$

JUSTIFICACIÓN.

Por el lema de Sard $\phi(S_\phi)$ es un conjunto de medida nula, así de manera implícita se tiene que el conjunto de valores regulares es denso en \mathbb{R}^N , de forma que considerando el hecho que los valores críticos son aislados y eligiendo un $r > 0$ adecuado, cada bola $Q(p, r)$ contiene puntos que resultan ser valores regulares de la función ϕ .

Así

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. 2.3.2.)} \quad & Q(p, r) \not\subseteq \phi(S_\phi) \\
 & \downarrow \\
 & Q(p, r) = \{y \in \mathbb{R}^N : \rho(p, y) < r\}; \\
 & \downarrow \\
 & |p - y| = \text{máx} \{|p_i - y_i| : i = 1, \dots, N\}
 \end{aligned}$$

por tanto, existe $q_r \in Q(p, r)$ tq.: $q_r \notin \phi(S_\phi)$.

Puesto que Ω es abierto y acotado de \mathbb{R}^N , $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{\mathbb{R}^N} \setminus \Omega$ es un conjunto cerrado y absolutamente acotado; dado que la compacidad se conserva bajo aplicaciones continuas, se obtiene que $\phi(\partial\Omega)$ es igualmente un conjunto compacto.

Dado que una de las hipótesis consideradas es que $p \notin \phi(\partial\Omega)$, para r lo suficientemente pequeño tal que:

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. 2.3.3.)} \quad & r < \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \\
 & \downarrow \\
 & \text{inf} \{\rho(p, y) : y \in \phi(\partial\Omega)\}
 \end{aligned}$$

Dado que $\phi(\partial\Omega)$ es un conjunto compacto y además, ya que la distancia es una función continua, se garantiza la existencia del ínfimo.

se tiene que: $Q(p, r) \cap \phi(\partial\Omega) = \emptyset$, luego existe un valor regular lejos de la imagen de la frontera, $q_r \notin (\phi(S_\phi) \cup \phi(\partial\Omega))$ tal que: $|p - q_r| < \rho(p, \phi(\partial\Omega))$.

Asumimos que:

$$\text{(Ec. 2.3.4.)} \quad |q_i - p| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \quad , \quad i = 1, 2$$

q_1 y q_2 son tales que:

$$(Ec. 2.3.5.) \quad q_i \notin (\phi(\partial\Omega) \cup \phi(S_\phi)) , \quad i = 1, 2$$

entonces:

$$(Ec. 2.3.6.) \quad q_i \in B(p, \rho(p, \phi(\partial\Omega))) \subset \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega) , \quad i = 1, 2.$$

Para cada par de puntos en $B(p, \rho(p, \phi(\partial\Omega)))$ se puede obtener una combinación lineal convexa, luego la convexidad implica la conexidad de la misma, así $B(p, \rho(p, \phi(\partial\Omega)))$ es un conjunto conexo el cual está incluido en $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, y en consecuencia está en una componente conexa de $(\phi(\partial\Omega))^c$, por tanto, q_1 , q_2 y p están en la misma componente conexa y por la proposición 2.2.2, respecto a que el grado es constante en cada componente conexa, se tiene:

$$(Ec. 2.3.7.) \quad deg(\phi, \Omega, q_1) = deg(\phi, \Omega, q_2) .$$

Así la definición no depende del punto q_i escogido, por lo que se concluye que los grados son iguales. ■

2.4. *deg* ES INVARIANTE BAJO HOMOTOPIAS.

A continuación se presenta el tercer resultado fundamental relativo a la invariancia del grado topológico bajo homotopías, los dos primeros literales son versiones de las proposiciones 2.2.2 y de 2.1.1. respectivamente, considerando valores regulares o críticos.

TEOREMA 2.4.1. INVARIANCIA DEL GRADO TOPOLÓGICO BAJO HOMOTOPIAS.

Sea $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$

i) $deg(\phi, \Omega, \cdot)$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$.

ii) Si $p \notin \phi(\partial\Omega)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tq.: $\|\psi - \phi\|_1 \leq \epsilon$

e implica que: $p \notin \psi(\partial\Omega)$ y $deg(\phi, \Omega, p) = deg(\psi, \Omega, p)$.

iii) Si H es una C^1 -homotopía entre ϕ y ψ y $p \notin H_t(\partial\Omega)$, $\forall t \in [0, 1]$

entonces $deg(\phi, \Omega, p) = deg(\psi, \Omega, p)$.

iv) Si $p \notin \phi(\partial\Omega)$, entonces $deg(\phi + a, \Omega, p + a) = deg(\phi, \Omega, p)$
para toda $a \in \mathbb{R}^N$.

DEMOSTRACIÓN i) .

Sea θ una componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ y $p_1, p_2 \in \theta$ ambos valores críticos de ϕ . El lema de Sard menciona de manera ímplicita que el conjunto de valores regulares de una función de clase $C^1(\bar{\Omega})$ es denso en \mathbb{R}^N , por lo que es posible elegir q_i , para $i = 1, 2$, valores regulares de ϕ tal que cumplan el requisito de la definición 2.3.2, $q_i \notin (\phi(S_\phi) \cup \phi(\partial\Omega))$, para $i = 1, 2$.

Ya que estamos en la componente conexa θ de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ así basta elegir q_i que cumpla:

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. 2.4.1.)} \quad |q_i - p_i| &= |p_i - q_i| \\
 &< \rho(p_i, \phi(\partial\Omega)); && \text{para } i = 1, 2. \\
 &= \inf \{ \rho(p_i, y) : y \in \phi(\partial\Omega) \}; && \text{para } i = 1, 2. \\
 &\quad \downarrow \\
 &|p_i - y| = \max \{ |p_{i_j} - y_j| : j = 1, \dots, N \}.
 \end{aligned}$$

Cuando se cumple la desigualdad (Ec. 2.4.1.) se asegura que $q_i \notin \phi(\partial\Omega)$, además se ha elegido $q_i \in \theta \setminus \phi(S_\phi)$ para $i = 1, 2$, tal que:

$$\text{(Ec. 2.4.2.)} \quad q_i \in B(p_i, \rho(p_i, \phi(\partial\Omega)))$$

en donde la existencia de la bola se garantiza por el lema de Sard.

$q_1, q_2 \in \theta \setminus \phi(S_\phi)$, por lo que q_1 y q_2 están en la misma componente conexa θ de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, así $q_1, q_2 \notin \phi(\partial\Omega)$, donde q_1 y q_2 son valores regulares de $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$, cercanos a los valores críticos p_1 y p_2 respectivamente, por lo que se cumplen todas las hipótesis de la proposición 2.2.2. (cierta para valores regulares únicamente) que explícitamente menciona que el grado es constante en cada componente conexa, es decir:

$$\begin{aligned}
 deg(\phi, \Omega, \cdot) |_{\theta^r} & \text{ es constante .} \\
 & \nwarrow \text{Conjunto de todos los valores} \\
 & \text{regulares de } \phi \text{ que están en } \theta.
 \end{aligned}$$

por lo que obtenemos el siguiente resultado:

$$(Ec. 2.4.3.) \quad deg(\phi, \Omega, q_1) = deg(\phi, \Omega, q_2).$$

Ya que $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ donde q_1 y q_2 son valores regulares de ϕ y además $q_1, q_2 \notin \phi(\partial\Omega)$, podemos utilizar la definición 2.3.2 en donde definimos el grado de ϕ en Ω relativo a $p \notin \phi(\partial\Omega)$ de la siguiente forma:

$$(Ec. 2.4.4.) \quad deg(\phi, \Omega, p_i) = deg(\phi, \Omega, q_i), \text{ para cada } i = 1, 2.$$

$$deg(\phi, \Omega, p_1) = deg(\phi, \Omega, q_1) = deg(\phi, \Omega, q_2) = deg(\phi, \Omega, p_2)$$

↓ ↓ ↓

Definición 2.3.2 proposición 2.2.2. definición 2.3.2.

Finalmente obtenemos: $deg(\phi, \Omega, p_1) = deg(\phi, \Omega, p_2)$. ■

DEMOSTRACIÓN ii) .

Fijarse que con respecto a la proposición 2.1.1. la diferencia está en las restricciones que debe cumplir el punto p en el cual es evaluado el grado topológico:

$$p \notin (\phi(S_\phi) \cup \phi(\partial\Omega))$$

$$p \notin \phi(\partial\Omega).$$

$$p \notin (\psi(S_\psi) \cup \psi(\partial\Omega))$$

$$p \notin \psi(\partial\Omega).$$

Valores regulares.

Cualquier tipo
de valor ya sea
regular o crítico.

$p \notin \phi(\partial\Omega)$, consideraremos el caso en que p es un valor crítico de ϕ , de acuerdo a las hipótesis $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ y por el lema de Sard que menciona de manera implícita que el conjunto de valores regulares de una función $C^1(\overline{\Omega})$ es denso en \mathbb{R}^N , existe $q \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, tal que: $q \notin \phi(S_\phi)$, lo que significa que q es un valor regular de ϕ , y es tal que: $q \notin (\phi(\partial\Omega) \cup \phi(S_\phi))$ y además:

$$(Ec. 2.4.5.) \quad |p - q| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)), \quad \phi(\partial\Omega) \subset \mathbb{R}^N$$

$$\downarrow$$

$$inf \{ \rho(p, y) : y \in \phi(\partial\Omega) \}$$

$$\downarrow$$

$$|p - y| = máx \{ |p_i - y_i| : i = 1, \dots, N \}$$

se tomará particularmente:

$$(Ec. 2.4.6.) \quad |p - q| < \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega))$$

por lo que se asegura que p y q pertenecen a la misma componente de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$.

Hasta el momento se tiene que $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$, $q \notin (\phi(S_\phi) \cup \phi(\partial\Omega))$ cumpliendo las hipótesis de la proposición 2.1.1, por lo que existe $\varepsilon_0 > 0$ tq:

$$(Ec. 2.4.7.) \quad 0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega)).$$

Así es posible conseguir $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que $q \notin (\psi(S_\psi) \cup \psi(\partial\Omega))$ y $deg(\psi, \Omega, q) = deg(\phi, \Omega, q)$, siempre que: $\|\phi - \psi\|_1 < \varepsilon_0$.

Ahora el objetivo es demostrar que $\rho(p, \psi(\partial\Omega)) > |p - q|$.

Para toda $x \in \partial\Omega$ tenemos que:

$$\begin{aligned} |\psi(x) - p| &= |\psi(x) - p + \phi(x) - \phi(x)| = |\phi(x) - p + \psi(x) - \phi(x)| \\ &= |\phi(x) - p + ((-1)(\phi(x) - \psi(x)))| \\ &= |(\phi(x) - p) - (\phi(x) - \psi(x))| \end{aligned}$$

Por las propiedades del valor absoluto

$$\begin{aligned} |x| - |y| &\leq |x - y| \\ &\geq |\phi(x) - p| - |\phi(x) - \psi(x)| \end{aligned}$$

Por simetría

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \psi(x)| &= |\psi(x) - \phi(x)| \\ &\geq |\phi(x) - p| - |\psi(x) - \phi(x)| \end{aligned}$$

$$(Ec. 2.4.8.) \quad |\psi(x) - p| \geq |\phi(x) - p| - |\psi(x) - \phi(x)|$$

Mayorizando. $|\phi(x) - p|$ de (Ec. 2.4.8.)

$$(Ec. 2.4.9.) \quad \begin{aligned} \forall x \in \partial\Omega : \quad &|\phi(x) - p| \geq \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \\ &\downarrow \\ &inf \{ \rho(p, y) : y \in \phi(\partial\Omega) \} \\ &\downarrow \\ &|p - y| = máx \{ |p_i - y_i| : i = 1, \dots, N \} \end{aligned}$$

Minorizando. $|\psi(x) - \phi(x)|$ de (Ec. 2.4.8.)

$$\|\phi - \psi\|_1 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega))$$

donde por (Ec. 2.1.4.) se infiere que $|\phi(x) - \psi(x)| \leq \|\phi - \psi\|_1, \forall x \in \overline{\Omega}$

y particularmente: $\forall x \in \partial\Omega$: se tiene:

$$(Ec. 2.4.10.) \quad |\psi(x) - \phi(x)| \leq \|\phi - \psi\|_1 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega))$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \partial\Omega : \quad |\psi(x) - p| &\geq |\phi(x) - p| - |\psi(x) - \phi(x)| \\ &\quad \downarrow \qquad \searrow \\ &\geq \rho(p, \phi(\partial\Omega)) < \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \\ &\geq \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \\ &> |p - q| \end{aligned}$$

Pues q NO pertenece a $\phi(\partial\Omega)$.

$$|\psi(x) - p| \geq |\phi(x) - p| - |\psi(x) - \phi(x)| \geq \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega)) > |p - q|$$

se obtiene:

$$(Ec. 2.4.11.) \quad |p - q| < \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \leq \rho(p, \psi(\partial\Omega))$$

y así p, q pertenecen a la misma componente conexa de: $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$.

Por i) del teorema 2.4.1 $deg(\phi, \Omega, \cdot)$ y $deg(\psi, \Omega, \cdot)$ son constantes en cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ y de $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$ respectivamente, luego se concluye que:

$$deg(\psi, \Omega, p) = deg(\psi, \Omega, q) = deg(\phi, \Omega, q) = deg(\phi, \Omega, p).$$

↓

↓

↓

Definición 2.3.2

proposición 2.1.1.

definición 2.3.2.

Finalizando la demostración 2do literal del teorema 2.4.1 .

■

Antes de realizar la prueba de iii) del teorema 2.4.1 . necesitamos precisar lo que significa una C^1 –homotopía y las particularidades que cumple.

DEFINICIÓN 2.4.2. C^1 –HOMOTOPÍA.

Sean $\phi, \psi \in C^1(\overline{\Omega})$ y $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una C^1 –homotopía entre ϕ y ψ si:

$$(Ec. 2.4.12.) \quad H_t \in C^1(\overline{\Omega}) \quad , \forall t \in [0, 1].$$

$$(Ec. 2.4.13.) \quad \lim_{t \rightarrow s} \|H_t - H_s\|_1 = 0 \quad , \forall t \in [0, 1].$$

$$(Ec. 2.4.14.) \quad H_0(x) = \phi(x) \quad \wedge \quad H_1(x) = \psi(x) \quad , \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

$$\text{Donde } H_t(x) = H(x, t); \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0, 1].$$

DEMOSTRACIÓN iii) .

Definimos $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ como

$$(Ec. 2.4.15.) \quad u(t) = \deg(H_t, \Omega, p) = \deg(H(x, t), \Omega, p).$$

Mostraremos que u es continua. Ya que por hipótesis H es una C^1 – homotopía entre ϕ y ψ , H cumple la propiedad expresada en (Ec. 2.4.13.) y dado que el límite existe tenemos que por definición:

$$(Ec. 2.4.16.) \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tq.:} \quad |t - s| < \delta \quad \implies \quad \|H_t - H_s\|_1 \leq \epsilon$$

lo que asegura la continuidad de la función u sobre $[0, 1]$ y además constituye la hipótesis principal del literal ii) del teorema 2.4.1 .

Fijamos $t \in [0, 1]$ y asumimos $p \notin H_t(\partial\Omega)$, e implica que existe $\epsilon > 0$ tq.: $\|H_t - H_s\|_1 \leq \epsilon$. Entonces:

$$(Ec. 2.4.17) \quad p \notin H_s(\partial\Omega), \quad s \in [0, 1] \quad \wedge \quad \deg(H_t, \Omega, p) = \deg(H_s, \Omega, p).$$

$$\deg(H_t, \Omega, p) = \deg(H_t, \Omega, q) = \deg(H_s, \Omega, q) = \deg(H_s, \Omega, p)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\text{Definición 2.3.2.} \qquad \text{proposición 2.1.1.} \qquad \text{definición 2.3.2.}$$

$$\downarrow$$

$$|p - q| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \quad , \quad \phi(\partial\Omega) \subset \mathbb{R}^N.$$

$$(Ec. 2.4.18) \quad deg(H_t, \Omega, p) = deg(H_s, \Omega, q) ; \quad \text{para } t, s \in [0, 1].$$

La aplicación $u(t) = deg(H_t, \Omega, p) \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in [0, 1]$, manda el conjunto conexo $[0, 1]$ a un conexo de \mathbb{Z} , sin embargo en \mathbb{Z} no existen conjuntos conexos, a menos que sea un conjunto unipuntual.

Dado que “el grado es constante en cada componente conexa”, $u(0) = u(1)$, por lo que deducimos que u es una función constante en $[0, 1]$, esto es:

$$(Ec. 2.4.19) \quad deg(H_0, \Omega, p) = deg(H_1, \Omega, p)$$

$$(Ec. 2.4.20) \quad deg(\phi, \Omega, p) = deg(\psi, \Omega, p). \quad \blacksquare$$

DEMOSTRACIÓN iv) .

El resultado se sigue inmediatamente de la fórmula de representación integral del grado topológico, descrita en la proposición 1.3.6., específicamente:

$$(Ec. 2.4.21) \quad deg(\phi, \Omega, p) = \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon}(\phi(x) - p) J_{\phi}(x) dx ; \quad \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Así sustituyendo ϕ por $\phi + a$ y p por $p + a$ en (Ec. 2.4.21)

$$\begin{aligned} (Ec. 2.4.22) \quad deg(\phi + a, \Omega, p + a) &= \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon}(\phi(x) + a - p - a) J_{\phi}(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon}(\phi(x) - p) J_{\phi}(x) dx \\ &= deg(\phi, \Omega, p) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El 3er resultado del teorema 2.4.1 menciona que si H es una C^1 -homotopía entre ϕ y ψ y $p \notin H_t(\partial\Omega)$; $\forall t \in [0, 1]$ entonces: $deg(\phi, \Omega, p) = deg(\psi, \Omega, p)$, una consecuencia de este es precisamente el corolario 2.4.2. a continuación.

COROLARIO 2.4.2 EL GRADO TOPOLÓGICO DE ϕ DEPENDE ÚNICAMENTE DE LOS VALORES QUE TOME ϕ EN SU FRONTERA.

Sea $\phi, \psi \in C^1(\overline{\Omega})$ tq.:

$$(Ec. 2.4.23) \quad \phi(x) = \psi(x), \quad \text{si } x \in \partial\Omega.$$

Entonces para todo $p \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$: $deg(\phi, \Omega, p) = deg(\psi, \Omega, p)$.

DEMOSTRACIÓN.

Considerando la homotopía convexa

$$(Ec. 2.4.24) \quad H(x, t) = t\phi(x) + (1-t)\psi(x)$$

donde para todo $x \in \partial\Omega$, $\phi(x) = \psi(x)$, es decir, asumimos que ambas funciones coinciden en la frontera, de tal forma que $H(x, t)$ puede reexpresarse como:

$$(Ec. 2.4.25) \quad \begin{aligned} H(x, t) &= t\phi(x) + (1-t)\psi(x) \\ &= t\phi(x) + (1-t)\phi(x) \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

Analizamos para $p \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, así si $p \notin \phi(\partial\Omega)$ implica que:

$$(Ec. 2.4.26) \quad p \notin H(x, t) = t\phi(x) + (1-t)\psi(x); \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0, 1].$$

obteniendo: $p \notin H(\partial\Omega, t)$, $\forall t \in [0, 1]$ y el resultado sigue inmediatamente del teorema 2.4.1, iii)

$$deg(\phi, \Omega, p) = deg(\psi, \Omega, p) \quad \blacksquare$$

2.5. GRADO TOPOLÓGICO PARA FUNCIONES CONTINUAS.

Con el propósito de debilitar la restricción de considerar la función de la terna admisible como una aplicación de clase $C^1(\overline{\Omega})$ e introducir la definición del grado de Brouwer para funciones continuas, usamos el teorema de extensión de Tietze y se aproximan funciones continuas mediante funciones diferenciables, (regularización).

TEOREMA 2.5.1 TEOREMA DE EXTENSIÓN DE TIETZE.

Sea X un espacio métrico, $A \subset X$ un conjunto cerrado y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Entonces existe una función continua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, la cual coincide con f restringida sobre A tal que:

$$(Ec. 2.5.1) \quad Sup_{x \in X} g(x) = Sup_{x \in A} f(x) \quad \wedge \quad Inf_{x \in X} g(x) = Inf_{x \in A} f(x)$$

En torno a la teoría de regularización, es necesario precisar las características que debe poseer una función que provee la convolución.

DEFINICIÓN 2.5.2 .

Una función $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una simétrica positiva si:

- i) $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.
- ii) $\text{spt}(\theta) \subset \{x \in \mathbb{R}^N : |x|_2 \leq 1\}$; $|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$.
- iii) $\int_{\mathbb{R}^N} \theta(x) dx = 1$.
- iv) $\theta(x) = \mu(|x|_2)$ para alguna $\mu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.
- v) $\theta(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^N$.

Como un ejemplo, la función $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$(Ec. 2.5.2) \quad \theta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|_2^2 - 1}\right) ; & |x|_2 < 1 \\ 0 & |x|_2 \geq 1 \end{cases}$$

es una simétrica positiva si la constante C se escoge tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \theta(x) dx = 1$. Para mayor detalle de la definición 2.5.2 se remite al lector al apéndice C.

LEMA 2.5.3.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto y acotado, $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$(Ec. 2.5.3) \quad \forall \epsilon > 0, \exists \tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ tq. : } \left| \tilde{f}(x) - f(x) \right|_2 \leq \epsilon, \forall x \in \bar{\Omega}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ es un subconjunto compacto del espacio métrico \mathbb{R}^N . Dado que la compacidad se conserva bajo aplicaciones continuas, $f(\bar{\Omega})$ es por tanto cerrado y acotado, con esto probamos que la función f es acotada; así es posible afirmar que toda función continua restringida a un conjunto compacto es una función acotada.

Ya que $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, entonces por el teorema de extensión de Tietze, existe una función continua, más precisamente una extensión continua de f , $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, la cual coincide con f sobre $\bar{\Omega}$ tal que cumple (Ec. 2.5.1).

Dado que $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es una extensión continua de f ; si se restringe g al conjunto compacto:

$$(Ec. 2.5.4) \quad K = \{x \in \mathbb{R}^N : \rho(x, \bar{\Omega}) \leq 1\}$$

$$\downarrow$$

$$\inf \{\rho(x, y) : y \in \bar{\Omega}\}; \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$$

$$\downarrow$$

$$|x - y| = \text{máx} \{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \dots, N\}.$$

El teorema de Heine-Cantor explícitamente menciona que toda función continua sobre un conjunto compacto de un espacio métrico es uniformemente continua; por lo que la función g es uniformemente continua sobre el conjunto compacto K .

Por consiguiente: $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : K \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones uniformemente continuas sobre los conjuntos compactos $\bar{\Omega}$ y K respectivamente.

En el tratamiento de funciones continuas se puede aproximar uniformemente toda función continua por funciones derivables indefinidamente. De modo más preciso vamos a considerar una función $\theta_r : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\theta_r(x) = \frac{1}{r^N} \theta\left(\frac{x}{r}\right)$ y que posea las propiedades expresadas en la definición 2.5.2. e introducimos la convolución $f_r = \theta_r * g$, en donde θ_r es una función infinitamente diferenciable y g es una aplicación uniformemente continua y en particular continua, de forma que $f_r \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$; $\forall r > 0$.

Ya que g es uniformemente continua sobre el conjunto compacto K , (Ec. 2.5.4),

entonces existe $0 < r < 1$ tq.: $|y - z|_2 \leq r$ con $y, z \in K$ y se infiere que:

$$(Ec. 2.5.5) \quad |g(y) - g(z)| \leq \frac{\epsilon}{\mathcal{L}^N(K)}$$

donde \mathcal{L}^N es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^N .

Mediante la convolución (regularización): $f_r = \theta_r * g = g * \theta_r$

$$(Ec. 2.5.6) \quad g * \theta_r(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \theta_r(x - t) dt$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} -g(x-u) \theta_r(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-u) \theta_r(u) du.$$

$$(Ec. 2.5.7) \quad g(x) - (g * \theta_r)(x)$$

$$= g(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x-u)) \theta_r(u) du$$

$$= g(x) \int_{\mathbb{R}^N} \theta_r(u) du - \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x-u)) \theta_r(u) du ;$$

Utilizando
la 3era propiedad
de la definición 2.5.2.
 $\int_{\mathbb{R}^N} \theta_r(u) du = 1.$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \theta_r(u) du - \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x-u)) \theta_r(u) du ;$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - g(x-u)) \theta_r(u) du ;$$

Puesto que:
 $\theta_r(u) = 0$ y $g(x-u) = 0$
fuera de
 $K = \{x \in \mathbb{R}^N : \rho(x, \bar{\Omega}) \leq 1\}.$

$$= \int_K (g(x) - g(x-u)) \theta_r(u) du .$$

Dado que g es una extensión continua de f , se tiene que para todo $\epsilon > 0$ dado, existe un n_0 tal que para $n \geq n_0$, se cumple para $u \in K$ que: $|g(x) - g(x-u)| \leq \epsilon$.

$$(Ec. 2.5.8) \quad \left| \int_K (g(x) - g(x-u)) \theta_r(u) du \right|$$

$$\leq \int_K |g(x) - g(x-u)| \theta_r(u) du$$

$$= \int_K |g(x) - g(x-u)| |\theta_r(u)| du ;$$

utilizando la
5ta propiedad
de la definición 2.5.2.
 $\theta_r(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^N$.

$$\leq \int_K |g(x) - g(x-u)| \theta_r(u) du ;$$

sustituyendo
 $|g(x) - g(x-u)| \leq \epsilon$.

$$\leq \int_K \epsilon \theta_r(u) du = \epsilon \int_K \theta_r(u) du = \epsilon .$$

Utilizando
la 3era propiedad
de la definición 2.5.2.
 $\int_{\mathbb{R}^N} \theta_r(u) du = 1.$

En orden, siendo g uniformemente continua sobre el compacto K , entonces existe $0 < r < 1$ tq.: $|y - z|_2 \leq r$ con $y, z \in K$ e implica que: $|g(y) - g(z)| \leq \frac{\epsilon}{L^N(K)}$, de forma que para toda $x \in \bar{\Omega}$:

$$(Ec. 2.5.9) \quad |f_r(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \theta_r(x-y) (g(y) - g(x)) dy \right| \leq \epsilon$$

y es suficiente para inferir que: $\tilde{f} = f_r$. ■

DEFINICIÓN 2.5.4 .

Sea $\phi \in C(\bar{\Omega})$ y sea $p \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$. Definimos $\deg(\phi, \Omega, p)$, el grado de ϕ y p con respecto a Ω , como el grado $\deg(\psi, \Omega, p)$ para cualquier $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ tq.:

$$(Ec. 2.5.10) \quad |\psi(x) - \phi(x)| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)) ; \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

donde

$$(Ec. 2.5.11) \quad |\psi(x) - \phi(x)| = \text{máx} \{ |\psi_i(x) - \phi_i(x)| : i = 1, 2, \dots, N \}.$$

$$(Ec. 2.5.12) \quad \rho(p, \phi(\partial\Omega)) = \text{inf} \{ \rho(p, y) : y \in \phi(\partial\Omega) \} \\ \downarrow \\ \text{máx} \{ |p_i - y_i| : i = 1, 2, \dots, N \}.$$

JUSTIFICACIÓN.

Dado que $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, podemos aplicar el lema 2.5.3

para cada $\phi_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $i = 1, \dots, N$, de manera que existen $\tilde{f}_i \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, funciones componentes $\tilde{f}_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, N$, de forma que $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_N) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y tq.:

$$(Ec. 2.5.13) \quad \left| \tilde{f}_i(x) - \phi_i(x) \right|_2 \leq \epsilon ; \quad \forall x \in \bar{\Omega} ; \quad i = 1, \dots, N.$$

En particular existe $\xi_i \in C^1(\mathbb{R}^N)$ tq.:

$$(Ec. 2.5.14) \quad |\xi_i(x) - \phi_i(x)|_2 \leq \epsilon ; \quad \forall x \in \bar{\Omega} ; \quad i = 1, \dots, N.$$

Es posible encontrar las funciones ξ_i de forma tal que cumplan con

$$(Ec. 2.5.15) \quad |\xi_i(x) - \phi_i(x)| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)) ; \quad \forall x \in \overline{\Omega} .$$

y por tanto obtenemos : $\psi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que:

$$(Ec. 2.5.16) \quad |\psi(x) - \phi(x)| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)) ; \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

además como $p \notin \phi(\partial\Omega)$ y $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$, se infiere que $p \notin \psi(\partial\Omega)$. ■

A continuación demostraremos que dos funciones cumpliendo las condiciones de la definición 2.5.4. poseen grados idénticos :

COROLARIO 2.5.5.

Si $\psi_1, \psi_2 \in C^1(\overline{\Omega})$, y son tales que:

$$(Ec. 2.5.17) \quad |\psi_1(x) - \phi(x)| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)) ; \quad \forall x \in \overline{\Omega} .$$

$$(Ec. 2.5.18) \quad |\psi_2(x) - \phi(x)| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)) ; \quad \forall x \in \overline{\Omega} .$$

Entonces:

$$(Ec. 2.5.19) \quad \deg(\psi_1, \Omega, p) = \deg(\psi_2, \Omega, p).$$

PRUEBA.

En efecto, considerando la combinación lineal convexa de $\psi_1, \psi_2 \in C^1(\overline{\Omega})$:

$$(Ec. 2.5.20) \quad H(x, t) = t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0, 1]$$

la cual es una C^1 -homotopía entre ψ_1 y ψ_2 , que cumple además con $p \notin H(\partial\Omega, t)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Para toda $x \in \overline{\Omega}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. 2.5.21)} \quad & |H(x, t) - \phi(x)| \\
 &= |t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x) + t(\phi(x)) - t(\phi(x)) - \phi(x)|; \\
 &= |t(\psi_1(x) - \phi(x)) + (1-t)(\psi_2(x) - \phi(x))|; \\
 &\hspace{15em} \text{aplicando} \\
 &\hspace{15em} \text{desigualdad triangular.} \\
 &\leq t|\psi_1(x) - \phi(x)| + (1-t)|\psi_2(x) - \phi(x)|; \\
 &\hspace{15em} \text{sustituyendo (Ec. 2.5.17)} \\
 &\hspace{15em} \text{y (Ec. 2.5.18).} \\
 &< t\rho(p, \phi(\partial\Omega)) + (1-t)\rho(p, \phi(\partial\Omega)) \\
 &= \rho(p, \phi(\partial\Omega)).
 \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene la condición principal de la definición 2.5.4.

$$\text{(Ec. 2.5.22)} \quad |H(x, t) - \phi(x)| < \rho(p, \phi(\partial\Omega))$$

Ya que H es una C^1 -homotopía entre ψ_1 y ψ_2 , $p \notin H_t(\partial\Omega)$, $\forall t \in [0, 1]$ entonces por el teorema 2.4.1. concluimos $\deg(\psi_1, \Omega, p) = \deg(\psi_2, \Omega, p)$. ■

PROPOSICIÓN 2.5.6.

Siendo $\phi \in C(\overline{\Omega})$ y considerando $p \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$. Definimos $\deg(\phi, \Omega, p)$ como el grado $\deg(\psi, \Omega, p)$ para cualquier $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ tq.:

$$\text{(Ec. 2.5.23)} \quad |\psi(x) - \phi(x)| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)) ; \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

la función ψ puede ser elegida tal que $p \notin \psi(S_\psi)$.

DEMOSTRACIÓN.

Tomando $\chi \in C^1(\overline{\Omega})$ tq.:

$$(Ec. 2.5.24) \quad \|\phi - \chi\| < \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega))$$

donde

$$(Ec. 2.5.25) \quad \|\phi - \chi\| = \sup\{|\phi(x) - \chi(x)| : x \in \Omega\}$$

$$\downarrow$$

$$\text{máx}\{|\phi_i(x) - \chi_i(x)| : i = 1, \dots, N\}.$$

Por el lema de Sard es posible elegir $q \in \mathbb{R}^N$ tq.: $q \notin \chi(S_\chi)$ y que cumpla además $|p - q| < \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega))$, esta desigualdad es una condición similar a la de la definición 2.3.2., aunque más restrictiva.

Consideremos la siguiente función:

$$(Ec. 2.5.26) \quad \psi(x) = \chi(x) + p - q$$

Claramente $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$, pues depende de $\chi \in C^1(\overline{\Omega})$ y

$$(Ec. 2.5.27) \quad |\psi(x) - \phi(x)|$$

$$= |\chi(x) + p - q - \phi(x)|$$

$$= |\chi(x) - \phi(x) + p - q|;$$

desigualdad triangular.

$$\leq |\chi(x) - \phi(x)| + |p - q|$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\|\phi - \chi\| < \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \qquad |p - q| < \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega))$$

$$\downarrow$$

$$\sup\{|\phi(x) - \chi(x)| : x \in \Omega\}$$

$$< \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega)) + \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega))$$

$$= \rho(p, \phi(\partial\Omega)).$$

Tenemos que:

$$(Ec. 2.5.28) \quad \psi(x) = \chi(x) + p - q \implies \psi(x) - p = \chi(x) - q$$

de forma que buscar soluciones para $\psi(x) = p$ es equivalente a buscar soluciones para $\chi(x) = q$ y

$$(Ec. 2.5.29) \quad \forall x \in \bar{\Omega} : J_\psi(x) = J_\chi(x)$$

en consecuencia $q \notin \chi(S_\chi)$ implica $p \notin \psi(S_\psi)$.

Queda por demostrar que: $p \notin \psi(\partial\Omega)$ y para ello se procede por contradicción.

Si $p \in \psi(\partial\Omega)$ implica que $q \in \chi(\partial\Omega)$ y mediante la desigualdad triangular:

$$(Ec. 2.5.30) \quad \begin{aligned} \rho(p, \chi(\partial\Omega)) &\leq \rho(p, q) + \rho(q, \chi(\partial\Omega)) ; \\ &\leq |p - q| + \rho(q, \chi(\partial\Omega)) \\ &\qquad\qquad\qquad \begin{array}{l} q \in \chi(\partial\Omega) \\ \text{por tanto} \\ \rho(q, \chi(\partial\Omega)) = 0 . \end{array} \\ &< \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega)). \end{aligned}$$

Mientras que si se analiza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\chi(x) - p| &= |\chi(x) + \phi(x) - \phi(x) - p| \\ &= |\phi(x) - p + \chi(x) - \phi(x)| \\ &= |\phi(x) - p - (-\chi(x) + \phi(x))| \\ &\geq ||\phi(x) - p| - |\phi(x) - \chi(x)|| \\ &= |\phi(x) - p| - |\chi(x) - \phi(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \qquad \searrow \\ \text{por la hipótesis de que} \qquad \|\phi - \chi\| < \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \\ p \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega) : \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \qquad \qquad \qquad \sup \{ |\phi(x) - \chi(x)| : x \in \Omega \}. \end{array}$$

implica que finalmente que:

$$\rho(p, \chi(\partial\Omega)) > \frac{1}{2} \rho(p, \phi(\partial\Omega))$$

lo que es imposible provocando la contradicción con (Ec. 2.5.30) ■

2.6. PERTURBACIÓN DE LA FUNCIÓN deg RESPECTO DE LA VARIABLE Ω .

En el estudio de la teoría de grado topológico, se han obtenido las diferentes propiedades mediante la perturbación del 1er y 3er parámetro de la función $deg : \{(f, \Omega, p) : \text{ternas admisibles}\} \rightarrow \mathbb{Z}$, gracias a estos resultados es posible obtener el grado para una función que es únicamente continua, como también conseguir el grado topológico con respecto a un valor crítico, de manera que perturbando la función grado respecto del parámetro Ω obtenemos dos de las propiedades más importantes en torno a esta teoría; la primera dice que el grado es aditivo respecto de la variable Ω y la segunda que es invariante respecto de la sustracción de conjuntos cerrados, bajo determinadas condiciones.

TEOREMA. 2.6.1 ADITIVIDAD RESPECTO DEL DOMINIO Y PROPIEDAD DE ESCISIÓN.

Sea ϕ una función continua y $p \notin \phi(\partial\Omega)$:

1.- (ADITIVIDAD). Sea Ω_i una sucesión finita de abiertos disjuntos dos a dos, con $\Omega_i \subset \Omega$ para $1 \leq i \leq n$ tal que: $\Omega = \cup_{1 \leq i \leq n} \Omega_i$ y $\phi_i = \phi|_{\Omega_i}$. Entonces:

$$(Ec. 2.6.1.) \quad deg(\phi, \Omega, p) = \sum_{1 \leq i \leq n} deg(\phi_i, \Omega_i, p)$$

2.- (ESCISIÓN). Si $K \subset \bar{\Omega}$ es cerrado y $p \notin \phi(K)$. Entonces

$$(Ec. 2.6.2.) \quad deg(\phi, \Omega, p) = deg(\phi, \Omega - K, p).$$

De manera intuitiva la propiedad de escisión dice que se pueden extraer conjuntos cerrados que no aporten p puntos.

DEMOSTRACIÓN.

1.- En primer lugar demostraremos que para todo $i = 1, 2, \dots, n$ se tiene que $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$.

Para ello procederemos por contradicción, es decir, supongamos que existe $x \in \partial\Omega_i$ tal que $x \notin \partial\Omega$. Entonces teniendo en cuenta que $\partial\Omega_i \subset \bar{\Omega}_i \subset \bar{\Omega}$ y dado que $x \notin \partial\Omega$, debe ser que x pertenece al interior de Ω , dicho de otra forma $x \in \Omega$, el cual es abierto y acotado.

Luego ya que por hipótesis $\Omega = \cup_{1 \leq i \leq n} \Omega_i$ donde cada Ω_i con $1 \leq i \leq n$ es disjunto con los demás, existe algún $j \neq i$ tal que $x \in \Omega_j$ y por lo tanto existe alguna bola $B(x, r)$ tal que $x \in B(x, r) \subset \Omega_j$ pero como $x \in \partial\Omega_i$ entonces $\Omega_i \cap B(x, r) \neq \emptyset$ y así existen i, j tal que $i \neq j$ y $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Ahora ya que el resultado que se pretende demostrar es para una función continua, elegimos una función ψ de clase C^1 con $p \notin \psi(\partial\Omega)$ que cumple con:

$$(Ec. 2.6.3.) \quad \|\phi - \psi\| < \eta$$

esta escogitación es posible debido a que el conjunto de funciones de clase C^1 es denso en el conjunto de funciones continuas.

Dado que $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$ se tiene que $p \notin \psi(\partial\Omega_i)$ y para todo $x \in \overline{\Omega}_i$ la ecuación 2.6.3 es válida.

Así mediante la definición del grado topológico para funciones continuas a través de una función de clase C^1 sobre $\overline{\Omega}$, se completa el esquema. La idea en sí es definir el grado de la función continua ϕ sobre $\overline{\Omega}$, a través de la función $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ suficientemente cercana a ϕ según la norma $\|\phi - \psi\| < \eta$, así se obtiene: $deg(\phi, \Omega, p) = deg(\psi, \Omega, p)$.

Ahora designamos $\psi_i = \psi|_{\Omega_i}$ entonces para todo i tenemos que:

$$(Ec. 2.6.4.) \quad deg(\psi_i, \Omega_i, p) = deg(\phi_i, \Omega_i, p)$$

y el resultado se sigue del cálculo directo:

$$\begin{aligned} (Ec. 2.6.5.) \quad deg(\phi, \Omega, p) &= deg(\psi, \Omega, p) \\ &= \sum_{x \in \psi^{-1}\{p\}} sgn(J_\psi(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{x \in \psi_i^{-1}\{p\}} sgn(J_{\psi_i}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n deg(\psi_i, \Omega_i, p) \\ &= \sum_{i=1}^n deg(\phi_i, \Omega_i, p). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.- Inicialmente se observa que el subconjunto $K \subset \overline{\Omega}$ es cerrado y por lo tanto es un conjunto compacto entonces $\phi(K)$ es también un compacto. Se considera una función ψ de clase C^1 , con $p \notin \psi(\partial\Omega)$.

La función ψ ha de cumplir la desigualdad en (Ec. 2.6.3.) y en particular:

$$(Ec. 2.6.6.) \quad \|\phi - \psi\| < \rho(p, \phi(K)).$$

Afirmamos que $\rho(p, \phi(K)) > 0$, ya que por hipótesis $p \notin \phi(K)$. Mediante (Ec. 2.6.6.) deducimos además que $p \notin \psi(K)$ de manera que $\psi^{-1}\{p\} \cap K = \emptyset$.

Comprobaremos en primer lugar que

$$(Ec. 2.6.7.) \quad deg(\phi, \Omega, p) = deg(\psi, \Omega - K, p)$$

y luego que

$$(Ec. 2.6.8.) \quad deg(\psi, \Omega - K, p) = deg(\phi, \Omega - K, p).$$

La igualdad 2.6.7. se obtiene del cálculo siguiente:

$$\begin{aligned}
 deg(\phi, \Omega, p) &= deg(\psi, \Omega, p); && \text{mediante la desigualdad} \\
 & && \|\phi - \psi\| < \eta \\
 &= \sum_{x \in \psi^{-1}\{p\}} sgn(J_\psi(x)); && \text{definición del grado topológico.} \\
 &= \sum_{x \in \psi^{-1}\{p\} \cap (\Omega - K)} sgn(J_\psi(x)); && \text{no hay ningún problema en} \\
 & && \text{reexpresar así ya que} \\
 & && \text{el conjunto } K \text{ no aporta} \\
 & && p \text{ puntos} \\
 & && \psi^{-1}(\{p\}) \cap K = \emptyset. \\
 &= deg(\psi, \Omega - K, p); && \text{como } \psi^{-1}(\{p\}) \subset \Omega \setminus K \\
 & && \text{es posible aplicar} \\
 & && \text{nuevamente} \\
 & && \text{la definición} \\
 & && \text{del grado topológico.}
 \end{aligned}$$

Para la segunda sencillamente observemos en primer lugar que

$$(Ec. 2.6.9.) \quad \phi(\partial\Omega) \supset \phi(\partial\Omega - K)$$

y por lo tanto

$$(Ec. 2.6.10.) \quad \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \leq \rho(p, \phi(\partial\Omega - K)).$$

Esta última desigualdad se basa en la idea de la mínima distancia del valor p al conjunto $\phi(\partial\Omega)$, con $p \notin \phi(\partial\Omega)$ y puede que al retirar el conjunto K se elimine el punto que hace que la distancia sea pequeña.

Luego por la forma en que ha sido elegida ψ , y por las ecuaciones 2.6.9 y 2.6.10

$$(Ec. 2.6.11.) \quad \|\phi - \psi\| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)) \leq \rho(p, \phi(\partial\Omega - K)).$$

Finalmente de la desigualdad 2.6.11, se infiere que $\|\phi - \psi\| < \rho(p, \phi(\partial\Omega - K))$ y mediante la definición del grado topológico para funciones continuas a través de una función de clase C^1 sobre $\bar{\Omega}$, se tiene que:

$$\text{deg}(\psi, \Omega - K, p) = \text{deg}(\phi, \Omega - K, p) \quad \blacksquare$$

2.7. deg ES INVARIANTE BAJO COMPOSICIÓN CON DIFEOMORFISMOS DE CLASE C^1 .

Antes de demostrar que la función grado es invariante bajo cambios de coordenadas mediante funciones de clase C^1 , específicamente, mediante difeomorfismos, necesitamos precisar las siguientes nociones:

DEFINICIÓN 2.7.1. HOMEOMORFISMO

Sean M y N espacios métricos. Una aplicación $f : M \rightarrow N$ se dice que es homeomorfismo, si f es continua, biyectiva y f^{-1} es continua.

De manera intuitiva, un homeomorfismo es una función que pasa biunívocamente abiertos en abiertos.

DEFINICIÓN 2.7.2. DIFEOMORFISMOS DE CLASE C^1 .

Sean E y F dos espacios de Banach, V un abierto de E y W un abierto de F . Un difeomorfismo f entre los abiertos V , W es una aplicación $f : V \rightarrow W$ que es biyectiva, diferenciable de clase C^1 (considerada como aplicación de V en F), tal que la aplicación recíproca $g = f^{-1} : W \rightarrow V$ es también diferenciable de clase C^1 (considerada como aplicación de W en E).

CARACTERIZACIÓN 2.7.3. C^1 -DIFEOMORFISMO.

Se dice que $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es un C^1 -difeomorfismo, si f^{-1} existe y ambas f y f^{-1} son funciones de clase C^1 .

TEOREMA 2.7.4. TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función de clase C^1 . Supongamos que para $a \in A$, la diferencial $Df(a)$ es invertible y que $f(a) = b$. Entonces existen abiertos $U, V \subset \mathbb{R}^N$ tales que: $a \in U$, $b \in V$ y $f : U \rightarrow V$ es una función biyectiva y la inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ es de clase C^1 y además $Df^{-1}(b) = [Df(a)]^{-1}$.

Como consecuencia del teorema de la función inversa, si A es un abierto de \mathbb{R}^N y $g : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una aplicación inyectiva y diferenciable de clase C^1 tal que $J_g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces $g(A)$ es abierto en \mathbb{R}^N y $g : A \rightarrow g(A)$ es un difeomorfismo de clase C^1 .

TEOREMA 2.7.5. INVARIANCIA DEL GRADO BAJO UN CAMBIO DE COORDENADAS.

Sean $\phi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $p \notin \phi(\partial\Omega)$. Se considera $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ un C^1 -difeomorfismo y sea $E \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado tq.: $f(E) = \Omega$, es decir, $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Se define la función $\psi \in C(\bar{E}; \mathbb{R}^N)$ como $\psi = f^{-1} \circ \phi \circ f$ además se cumple la condición $q \notin \psi(\partial E)$, con $q = f^{-1}(p)$.

Entonces $\deg(\phi, \Omega, p) = \deg(\psi, E, q)$, es decir, el grado topológico, $\deg(\phi, \Omega, p)$, es invariante bajo un cambio de coordenadas mediante difeomorfismos de clase C^1 .

OBSERVACIÓN.

Por ser f un C^1 -difeomorfismo, existe f^{-1} y $f, f^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^N)$

y la definición de la función f^{-1} es : $f^{-1} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow E \subseteq \mathbb{R}^N$

donde $E \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y acotado.

DEMOSTRACIÓN.

Ya que f es un difeomorfismo tenemos que por la biyectividad de la función y específicamente la sobreyectividad, todo elemento de $\partial\Omega$ es imagen de algún elemento de ∂E , es decir, $f(\partial E) = \partial\Omega$.

Si sucediera que:

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. 2.7.1.)} \quad q \in \psi(\partial E) &\implies f^{-1}(p) \in (f^{-1} \circ \phi \circ f)(\partial E) \\
 &\implies f(f^{-1}(p)) \in (f \circ f^{-1} \circ \phi \circ f)(\partial E) \\
 &\implies f(f^{-1}(p)) \in (id \circ \phi \circ f)(\partial E) \\
 &\implies p \in \phi \circ f(\partial E) = \phi(f(\partial E)) = \phi(\partial\Omega) \\
 &\implies p \in \phi(\partial\Omega)
 \end{aligned}$$

Lo cual NO puede pasar, puesto que está contemplado en las hipótesis que: $p \notin \phi(\partial\Omega)$ por tanto $q \notin \psi(\partial E)$.

La cadena de implicaciones anteriores también puede considerarse de manera recíproca.

$$(Ec. 2.7.2.) \quad \begin{array}{ccccc} & f & \phi & & f^{-1} \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ E \subseteq \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \Omega \subset \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^N & \longrightarrow & E \subseteq \mathbb{R}^N \end{array}$$

$$(Ec. 2.7.3.) \quad \begin{aligned} (f^{-1} \circ \phi \circ f)(E) &= f^{-1}(\phi(f(E))) \\ &= f^{-1}(\phi(\Omega)) = E \end{aligned}$$

por lo que ψ es un automorfismo.

Para demostrar la invariancia del grado topológico bajo un cambio de coordenadas, se considera inicialmente $\phi \in C^1(\Omega)$; por hipótesis se conoce que $p \notin \phi(\partial\Omega)$, por lo que es preciso demostrar además que:

$$\begin{array}{ccc} p \notin \phi(S_\phi) & \text{implica que} & q \notin \psi(S_\psi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_\phi \subset \Omega & & S_\psi \subset E. \end{array}$$

$$(Ec. 2.7.4.) \quad \begin{aligned} p \notin \phi(S_\phi) &; \text{ aplicando } f^{-1}. \\ \implies f^{-1}(p) &\notin (f^{-1} \circ \phi)(S_\phi) \\ &\downarrow \\ f : E \subseteq \mathbb{R}^N &\longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \\ &\downarrow \\ &S_\phi \subset \Omega. \\ \implies q \notin \psi(S_\psi) &; \text{ por hipótesis } q = f^{-1}(p). \end{aligned}$$

$$(Ec. 2.7.5.) \quad \begin{aligned} deg(\psi, E, q) &= \sum_{y \in \psi^{-1}(\{q\})} \text{sgn}(J_\psi(y)) \\ &= \sum_{\psi(y)=q} \text{sgn}(J_\psi(y)) \end{aligned}$$

$$\psi(y) = q \implies (f^{-1} \circ \phi \circ f)(y) = q = f^{-1}(p)$$

Por la propiedad multiplicativa de los jacobianos, argumentamos lo siguiente, ya que por hipótesis f es un C^1 -difeomorfismo por lo que f es diferenciable en el conjunto abierto E de \mathbb{R}^N y que ϕ es diferenciable en la imagen $f(E) = \Omega$ y por lo que f^{-1} es diferenciable sobre el conjunto imagen $\phi(\Omega)$. Entonces la función

composición $\psi = f^{-1} \circ \phi \circ f$ es diferenciable en E , y por la forma matricial de la regla de la cadena, las correspondientes matrices jacobianas se hallan relacionadas como sigue:

$$(Ec. 2.7.6.) \quad J_\psi(y) = J_{(f^{-1} \circ \phi \circ f)}(y) = J_{f^{-1}}(\phi(f(y))) \cdot J_\phi(f(y)) \cdot J_f(y)$$

La condición suficiente (aunque no necesaria) para que una función sea biunívoca (que exista inversa) es que el determinante jacobiano de la función sea no nulo.

$$(Ec. 2.7.7.) \quad \begin{aligned} f(f^{-1} \circ \phi \circ f)(y) &= f(f^{-1}(p)) \\ \implies (f \circ f^{-1} \circ \phi \circ f)(y) &= (f \circ f^{-1})(p) = (id)(p) \\ \implies (\phi \circ f)(y) &= p \end{aligned}$$

de ahí que dado que el jacobiano de la función inversa de f es la matriz inversa del jacobiano de f

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{y=f^{-1}(x)}^{-1}, \quad \text{en donde se ha considerado } x = f(y).$$

se prosigue con respecto a la ecuación 2.7.5.

$$\begin{aligned} deg(\psi, E, q) &= \sum_{y \in \psi^{-1}(\{q\})} \text{sgn}(J_\psi(y)) \\ &= \sum_{\psi(y)=q} \text{sgn}(J_\psi(y)) \\ &= \sum_{(f \circ \psi)(y)=p} \text{sgn}(J_\phi(f(y)) \cdot J_f(y)) \\ &= \sum_{y \in (f \circ \psi)^{-1}(p)} \text{sgn}(J_\phi(f(y)) \cdot J_f(y)); \\ &\quad J_{(f \circ \psi)}(y) = J_\phi(f(y)) \cdot J_f(y) \cdot \\ &= \sum_{\phi(x)=p} \text{sgn}[\det(\nabla \phi(x))] \\ &\quad \text{considerando: } f(y) = x, \text{ donde } f(E) = \Omega \\ &\quad p \notin \phi(\partial\Omega), \text{ donde } \phi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N). \\ &= \sum_{x \in \phi^{-1}(\{p\})} \text{sgn}[J_\phi(x)] \\ &= deg(\phi, \Omega, p). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE GRADO TOPOLÓGICO AL ANÁLISIS Y AL CÁLCULO DE VARIABLE COMPLEJA.

El presente capítulo principalmente detalla las ventajas que provee una herramienta tan versátil como lo es el grado de Brouwer, por ejemplo el sintetizar algunas demostraciones de teoremas conocidos en importantes áreas de las matemáticas.

En las secciones siguientes se abordan algunas consecuencias del concepto de grado topológico, específicamente el teorema de punto fijo de Brouwer, el teorema de Borsuk y el corolario de Borsuk-Ulam y posteriormente se trabaja con especial interés en el cálculo de variable compleja, específicamente el principio del argumento, el teorema de Rouché y el teorema fundamental del álgebra ilustrarán este hecho.

3.1. APLICACIONES DE deg EN \mathbb{R}^N .

Una aplicación inmediata de la definición de grado topológico de Brouwer es, precisamente, el teorema que lleva su nombre, el conocido teorema de punto fijo de Brouwer, el cual expresa que toda función continua de la bola unidad en sí misma tiene al menos un punto fijo.

DEFINICIÓN 3.1.1. PUNTO FIJO.

Sea X un conjunto y $\phi : X \rightarrow X$ una función. Se dice que $x \in X$ es un punto fijo de ϕ si $\phi(x) = x$, o bien si x es un cero de $\psi_1 = id - \phi$.

Como hemos estudiado anteriormente, la teoría del grado topológico nos permite decidir, bajo determinadas circunstancias, cuando existe una solución de una ecuación del tipo $\phi(x) = p$ o equivalentemente la existencia de algún cero de $\psi(x) = \phi(x) - p$. En particular la existencia de algún punto fijo de ϕ se traduce en la existencia de algún cero de la función $\psi(x) = \phi(x) - x$.

DEFINICIÓN 3.1.2. PROPIEDAD DEL PUNTO FIJO.

Sea X un espacio vectorial normado, $S \subset X$. Se dice que S tiene la propiedad del punto fijo si cada función $\phi : S \rightarrow S$ continua tiene un punto fijo.

OBSERVACIÓN.

Supongamos que Ω es un abierto tal que $\overline{\Omega}$ es homeomorfo a $\overline{B} = \overline{B(0,1)}$ es decir existe una función $h : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{B}$ continua con inversa h^{-1} continua. Entonces es fácil probar que $\overline{\Omega}$ tiene la propiedad del punto fijo si y sólo si \overline{B} la tiene; más precisamente si $\phi : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$ es continua consideraremos $\varphi = h \circ \phi \circ h^{-1} : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ y entonces resulta que: $y \in \overline{B}$ es un punto fijo de φ si y sólo si $x = h^{-1}(y)$ es un punto fijo de ϕ .

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. 3.1.1.)} \quad \varphi(y) = y &\implies (h \circ \phi \circ h^{-1})(y) = y \\
 &\implies (h^{-1} \circ h \circ \phi \circ h^{-1})(y) = h^{-1}(y) \\
 &\implies (id \circ \phi \circ h^{-1})(y) = h^{-1}(y) \\
 &\implies (\phi \circ h^{-1})(y) = h^{-1}(y) \\
 &\implies \phi(h^{-1}(y)) = h^{-1}(y).
 \end{aligned}$$

A continuación será enunciada y demostrada la propiedad de normalización, la cual ha sido ubicada específicamente en esta parte del trabajo por hacerse uso directo de ella y ya que su demostración es casi inmediata no provoca inconvenientes.

De manera general la propiedad de normalización dice que: si $f = id$, la aplicación identidad en \mathbb{R}^N , definida por $id(x) = x$, entonces, $f(x) = y$, con $y \notin f(\partial\Omega)$, tiene la única solución $x = y$.

TEOREMA 3.1.3. PROPIEDAD DE NORMALIZACIÓN.

Si $\phi = id$ entonces:

$$\text{(Ec. 3.1.2.)} \quad deg(\phi, \Omega, p) = \begin{cases} 1; & \text{si } p \in \Omega. \\ 0; & \text{si } p \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.

Es claro que si $p \notin \overline{\Omega}$ entonces $\phi^{-1}(\{p\}) = \emptyset$ y por lo tanto $deg(\phi, \Omega, p) = 0$. Por otro lado si $p \in \Omega$ entonces $\phi^{-1}(\{p\}) = \{p\}$ y $J_\phi(\{p\}) = det D\phi(\{p\}) = 1$, luego $deg(\phi, \Omega, p) = 1$.

TEOREMA 3.1.4. PUNTO FIJO DE BROUWER.

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^N tal que $\bar{\Omega}$ sea homeomorfo a \bar{B} . Entonces $\bar{\Omega}$ posee la propiedad del punto fijo.

DEMOSTRACIÓN.

A demostrar que toda $\varphi : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ continua tiene al menos un punto fijo, es decir, basta probar que \bar{B} tiene la propiedad del punto fijo.

Sea $\phi : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ continua, supongamos además que para todo $x \in \partial B$ se tiene que $\phi(x) \neq x$.

Definimos la homotopía

$$(Ec. 3.1.3.) \quad H(t, x) = x - t\phi(x)$$

de manera que $H_0 = id$ y $H_1 = id - \phi$.

A demostrar $\lim_{t \rightarrow s} \|H_t - H_s\| = 0$, $\forall s \in [0, 1]$:

$$(Ec. 3.1.4.) \quad \begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow s} \|H_t - H_s\| \\ &= \lim_{t \rightarrow s} \|x - t\phi(x) - x + s\phi(x)\| \\ &= \lim_{t \rightarrow s} \|s\phi(x) - t\phi(x)\| \\ &= \lim_{t \rightarrow s} \|(s-t)\phi(x)\| \\ &= \lim_{t \rightarrow s} |s-t| \|\phi(x)\| = 0, \quad \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Observemos que si $x \in \bar{B}$ entonces para todo $t \in [0, 1)$ se tiene que $t\phi(x)$ pertenece al interior de B , $t\phi(x) \in B$, de manera que para todo $t \in [0, 1)$ vale que $0 \notin H_t(\partial B)$. Luego argumentamos mediante la invariancia bajo homotopía

Siendo H una homotopía y $\forall t \in [0, 1]$, H_t es una función continua, con $0 \notin H_t(\partial B)$ entonces:

$$(Ec. 3.1.5.) \quad deg(H_t, B, 0) = deg(H_0, B, 0)$$

y por la propiedad de normalización, ya que $H_0 = id$, la función identidad, entonces:

$$(Ec. 3.1.6.) \quad deg(H_0, B, 0) = \begin{cases} 1; & \text{si } 0 \in B. \\ 0; & \text{si } 0 \notin \bar{B}. \end{cases}$$

El resultado se sigue de la invariancia bajo homotopía:

$$(Ec. 3.1.7.) \quad deg(id, B, 0) = 1 = deg(id - \phi, B, 0).$$

Finalmente \overline{B} posee la propiedad del punto fijo. \blacksquare

Para abordar el teorema de Borsuk y el corolario de Borsuk-Ulam se requiere del concepto de conjunto simétrico respecto del origen y de la definición de una función impar. Consideremos un espacio vectorial normado X , diremos que $A \subset X$ es un conjunto simétrico respecto del origen si cada vez que $x \in A$ se tiene que $-x \in A$ y se dice que $\phi : A \rightarrow X$ es una función impar si para todo $a \in A$ se tiene $\phi(-a) = -\phi(a)$.

TEOREMA 3.1.5. TEOREMA DE BORSUK.

Sea $\Omega \subset X$ un entorno abierto acotado y simétrico del cero (origen) y ϕ una función continua, con $0 \notin \phi(\partial\Omega)$.

Si $\phi|_{\partial\Omega}$ es impar entonces el grado $deg(\phi, \Omega, 0)$ es impar.

DEMOSTRACIÓN.

Basta probar el teorema para $X = \mathbb{R}^N$. Consideremos la función continua φ

definida por $\varphi(x) = \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{2}$ que es impar, con $0 \notin \phi(\partial\Omega)$, el detalle a continuación:

$$(Ec. 3.1.8.) \quad \begin{aligned} \varphi(-a) &= \frac{\phi(-a) - \phi(-(-a))}{2} = \frac{\phi(-a) - \phi(a)}{2} \\ &= -\frac{-\phi(-a) + \phi(a)}{2} \\ &= -\frac{\phi(a) - \phi(-a)}{2} = -\varphi(a) \end{aligned}$$

y además coincide sobre el borde $\partial\Omega$ con ϕ , es decir

$$(Ec. 3.1.9.) \quad \varphi|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega}.$$

$$(Ec. 3.1.10.) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{2}; \quad \text{ya que por hipótesis} \\ &\quad \phi|_{\partial\Omega} \text{ es impar.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\phi(x) - (-\phi(x))}{2} \\ &= \frac{2\phi(x)}{2} = \phi(x). \end{aligned}$$

Luego dado que ambas funciones son continuas con $0 \notin \phi(\partial\Omega)$ tq.: $\phi|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$ deduciremos un resultado similar al del corolario respecto de la dependencia del grado sobre los valores del borde para funciones de clase C^1 .

Así que consideramos la homotopía inducida por la combinación lineal convexa de ϕ y φ , es decir, $\forall x \in \Omega$ y $t \in [0, 1]$

$$(Ec. 3.1.11.) \quad H(t, x) = t\phi(x) + (1-t)\varphi(x).$$

Observemos que de acuerdo a la hipótesis como ambas coinciden sobre el borde de Ω se tiene que si $x \in \partial\Omega$ y $t \in [0, 1]$ entonces $H(t, x) = \phi$. Luego para todo $t \in [0, 1]$ vale que $0 \notin H(t, \partial\Omega)$ y el grado está definido a lo largo de la deformación.

Así por la invariancia mediante homotopías establecida se obtiene:

$$(Ec. 3.1.12.) \quad deg(\phi, \Omega, 0) = deg(\varphi, \Omega, 0).$$

Por la formalización del grado topológico se puede obtener el grado para una función continua mediante una función de clase C^1 , por lo que es posible hacer una escogitación apropiada de una función impar ψ de clase C^1 .

Ya que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ simétrico y ϕ una función continua impar sobre $\bar{\Omega}$, con $0 \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$. Entonces es posible que para cada $\epsilon > 0$ existe $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ impar, con $0 \notin \psi(\partial\Omega)$, tq.: $\|\phi - \psi\| < \epsilon$ y más particularmente:

$$(Ec. 3.1.13.) \quad |\psi(x) - \phi(x)| < \rho(p, \phi(\partial\Omega)) ; \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

y por definición:

$$(Ec. 3.1.14.) \quad deg(\varphi, \Omega, 0) = deg(\psi, \Omega, 0) = \sum_{x \in \psi^{-1}\{0\}} sgn J_\psi(x)$$

Finalmente, dado que por hipótesis $\Omega \subset X$ es un entorno abierto acotado y simétrico con respecto del cero y ψ es una función impar de clase C^1 con $0 \notin \psi(\partial\Omega)$, se tiene que:

$$(Ec. 3.1.15.) \quad deg(\psi, \partial\Omega, 0) = 0$$

y cada vez que $\psi(x) = 0$ se tendrá también que $\psi(-x) = 0$, por lo que se concluye que $deg(\psi, \Omega, 0)$ es impar.

Por la discusión precedente, $deg(\phi, \Omega, 0) = deg(\psi, \Omega, 0)$, en consecuencia el grado $deg(\phi, \Omega, 0)$ es impar. ■

COROLARIO 3.1.6. BORSUK-ULAM.

Sea $\Omega \subset X$ un entorno simétrico respecto del cero y $\psi \in C(\partial\Omega)$. Si $\psi(\overline{\Omega})$ y en particular $\psi(\partial\Omega)$ está contenido en un subespacio vectorial propio $X_0 \subset X$. Entonces existe un punto $x \in \partial\Omega$ tal que $\psi(x) = \psi(-x)$ o sea ψ tiene la misma imagen sobre al menos un par de puntos antipodales.

DEMOSTRACIÓN.

Por contradicción, supongamos sin pérdida de generalidad que $X = \mathbb{R}^N$ y un subespacio propio $X_0 = \mathbb{R}^M$ con $M < N$. Ya que estamos en un espacio métrico y siendo $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto cerrado, $\psi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ y en particular $\psi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función continua, por el teorema de extensión de Tietze podemos extender ψ a una función $\overline{\psi} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, la cual coincide con ψ en $\overline{\Omega}$ y en particular en $\partial\Omega$, además podemos definir $\phi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ como:

$$(Ec. 3.1.16.) \quad \phi(x) = \frac{\overline{\psi}(x) - \overline{\psi}(-x)}{2}; \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

la cual es una función que al igual que $\overline{\psi}$ coincide con ψ en $\overline{\Omega}$, por lo que así como ψ mapea $\overline{\Omega}$ en \mathbb{R}^M (por hipótesis), también ϕ mapea $\overline{\Omega}$ en \mathbb{R}^M , $\phi(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^M$, a causa de la extensión $\overline{\psi}$ proporcionada por el teorema de Tietze.

$$(Ec. 3.1.17.) \quad \begin{aligned} \phi(-x) &= \frac{\overline{\psi}(-x) - \overline{\psi}(-(-x))}{2} \\ &= \frac{\overline{\psi}(-x) - \overline{\psi}(x)}{2} \\ &= -\frac{\overline{\psi}(x) - \overline{\psi}(-x)}{2} = -\phi(x). \end{aligned}$$

Así ϕ resulta ser impar con $\phi(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^M$.

Ahora para todo $x \in \partial\Omega$ y por la imparidad de la función ϕ

$$(Ec. 3.1.18.) \quad \phi(-x) = -\phi(x) \neq \phi(x).$$

y de acuerdo al teorema de Borsuk aplicado a $\phi|_{\partial\Omega}$ se tiene que $deg(\phi, \Omega, 0) \neq 0$, pues es un número impar.

Por ser ϕ una extensión a \mathbb{R}^N , $\phi(\partial\Omega)$ contendría un entorno abierto del origen y dado que el grado es localmente constante, es decir, constante en cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, se afirma que para un k lo suficientemente grande, se tiene que:

$$(Ec. 3.1.19.) \quad \begin{array}{ccc} deg(\phi, \Omega, (0, 0, \dots, 0)) & = & deg(\phi, \Omega, (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{k})) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & N \text{ componentes} & N \text{ elementos} \end{array}$$

Sin embargo, ya que $(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{k}) \notin \mathbb{R}^M$, tenemos que:

$$(Ec. 3.1.20.) \quad \deg(\psi, \Omega, (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{k})) = 0$$

y dado que $\bar{\psi}$ es una extensión de ψ mediante el teorema de Tietze y por la forma en que ha sido definida ϕ mediante $\bar{\psi}$ se contradice que

$$(Ec. 3.1.21.) \quad \deg(\phi, \Omega, 0) \neq 0$$

por lo que se contradice que $\phi(\partial\Omega)$ está contenido en un subespacio propio de \mathbb{R}^N . ■

3.2. APLICACIONES DE \deg en \mathbb{C} .

En esta sección se proporciona una demostración a partir de la teoría de grado topológico de Brouwer de resultados clásicos del cálculo de variable compleja; específicamente del principio del argumento, el teorema de Rouché y el teorema fundamental del álgebra.

Se hará uso de las funciones analíticas, y en particular de las funciones meromorfas (funciones definidas en \mathbb{C} , excepto en los polos), por ser de gran utilidad para localizar raíces de ecuaciones dentro de curvas. Por lo que es conveniente enunciar una de las fórmulas más valiosas del análisis complejo, la cual consiste en contar las raíces de una ecuación en el interior de una curva cerrada.

TEOREMA 3.2.1. DE CONTEO DE RAÍCES Y POLOS.

Sea f analítica en una región A excepto para los polos en b_1, \dots, b_m y ceros en a_1, \dots, a_n , contados con su multiplicidad. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en A y que no pasa a través de ninguno de los puntos a_j o b_k . Entonces:

$$(Ec. 3.2.1.) \quad \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^n I(\gamma, a_j) - \sum_{k=1}^m I(\gamma, b_k) \right]$$

donde la primera suma recorre todos los ceros de f , contados tantas veces como indiquen sus multiplicidades, y la segunda suma recorre los polos de f , contados tantas veces como indiquen sus ordenes.

De manera general, este teorema considera una curva orientada en sentido positivo (antihorario), que se pueda deformar hasta un punto en el interior de un conjunto abierto Ω del plano complejo, así para cada punto $z \in \Omega$,

$$(Ec. 3.2.2.) \quad \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i [Z_f - P_f]$$

Donde Z_f es el número de ceros dentro de γ y P_f es el número de polos dentro de γ , cada uno contado con su multiplicidad y su orden respectivamente.

TEORÍA DE GRADO TOPOLÓGICO, DIMENSIÓN $N = 2$, CASO COMPLEJO.

Ya que $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ es posible definir el grado para $N = 2$. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado y simplemente conexo, cuya frontera $\gamma = \partial\Omega$ es una curva continua orientada positivamente. Dada una función $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa, salvo en un número finito de puntos llamados polos, y es tal que $f(z) \neq 0$ con $z \in \gamma$, es decir, $z \in \partial\Omega$. Así se tiene la siguiente fórmula, que es un caso particular del teorema de los ceros y polos, y cuenta los ceros de f (con su multiplicidad):

$$(Ec. 3.2.3.) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \# \{ \text{ceros de } f \text{ en } \Omega \}$$

↓

γ es una curva cerrada, continua
y orientada positivamente.

Esta última igualdad no es otra cosa que el índice de la curva $f \circ \gamma$ respecto del origen, y este índice está definido para cualquier curva continua, con la única condición de que no existan soluciones en $\partial\Omega$, y específicamente este detalle es lo que permite extender la definición del grado topológico bajo la noción de coincidencia con el número de vueltas de una curva con respecto a un punto.

Anteriormente se garantizó la definición 1.2.1. del grado topológico de Brouwer, en esta ocasión el propósito es asegurar la subsecuente afirmación:

TEOREMA 3.2.2. COINCIDENCIA DE LA DEFINICIÓN DE GRADO TOPOLÓGICO CON EL ÍNDICE DE UNA CURVA.

Sea Ω un conjunto abierto y acotado cuya frontera es la imagen de una C^1 -curva simple, cerrada y positivamente orientada γ . Asumamos que: $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en un cierto vecindario Ω y $p \notin f(\partial\Omega)$ es un valor regular de f , es decir, $f'(z) \neq 0$ siempre que $f(z) = p$. Entonces:

$$(Ec. 3.2.4.) \quad \deg(f, \Omega, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-p} dz.$$

OBSERVACIÓN.

Notar que en el caso general, cuando la función f es analítica (sin distinción en si es meromorfa), al ser Ω un abierto acotado, la condición $f \neq 0$ en $\partial\Omega$ implica que f sólo puede tener raíces en un número finito de componentes conexas de Ω , de esa forma, al sumar el grado de f sobre dichas componentes conexas, resulta una suma finita. Puede haber únicamente un número finito de polos en cualquier región acotada, ya que los polos son aislados.

DEMOSTRACIÓN.

Denotamos por \mathcal{A} al conjunto de todas las soluciones de $f(z) = p$ en Ω , es decir:

$$(Ec. 3.2.5.) \quad \mathcal{A} = \{z \in \Omega : f(z) = p\}$$

Para el detalle de la demostración consideraremos dos casos, cuando $\mathcal{A} = \emptyset$ y cuando $\mathcal{A} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ y en ambos se busca concluir mediante transitividad.

Caso $\mathcal{A} = \emptyset$.

Asumimos que $\mathcal{A} = f^{-1}(\{p\}) = \emptyset$, así por la misma definición de grado topológico $deg(f, \Omega, p) = 0$.

Tomando el miembro derecho de (Ec. 3.2.4.) y dado que γ es una C^1 -curva simple, cerrada y positivamente orientada, que por lo regular consiste de la frontera de Ω , $\partial\Omega$ y dado que hemos supuesto que f es holomorfa en un vecindario de Ω , se procede bajo el uso del teorema de Cauchy, el cual establece que:

si γ es una curva cerrada simple (es decir, que intersecta con ella misma en sus extremos y da un único giro) y si g es analítica (todas las derivadas de g existen) en y dentro de γ , entonces:

$$(Ec. 3.2.7.) \quad \int_{\gamma} g = 0.$$

Haciendo

$$(Ec. 3.2.8.) \quad \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-p} dz$$

donde $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)-p}$ es analítica con la derivada $g'(z)$ continua sobre y en el interior de una curva cerrada simple γ . Entonces:

$$(Ec. 3.2.9.) \quad \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-p} dz = 0.$$

Ahora consideremos el caso $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sea $\mathcal{A} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ finito, ya que por hipótesis $p \notin f(\partial\Omega)$, donde f es holomorfa en un vecindario de Ω y por tanto continua, se afirma que: $\mathcal{A} \cap \partial\Omega = \emptyset$.

Dado que $f^{-1}(\{p\}) \neq \emptyset$ tenemos que:

$$(Ec. 3.2.10.) \quad \deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(\{p\})} \operatorname{sgn}(J_f(x)) \quad .$$

Ya que Ω es una región, por ser un conjunto abierto y acotado, y dado que: $\mathcal{A} = \{z \in \Omega : f(z) = p\}$, $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{A} \subset \Omega$, todos ellos distintos.

$$= \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(J_f(z_i)).$$

Sea $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)-p}$ analítica en $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, esto es g es analítica en Ω , excepto para singularidades aisladas en z_1, z_2, \dots, z_n , entonces dado que el teorema de Cauchy exige que la función debe ser analítica en y dentro de curva cerrada simple γ para obtener una integral de valor cero, podemos asegurar que si la función g no es analítica en todo el interior de γ , entonces la integral puede o no ser cero, así en el miembro derecho:

$$(Ec. 3.2.11.) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-p} dz \neq 0$$

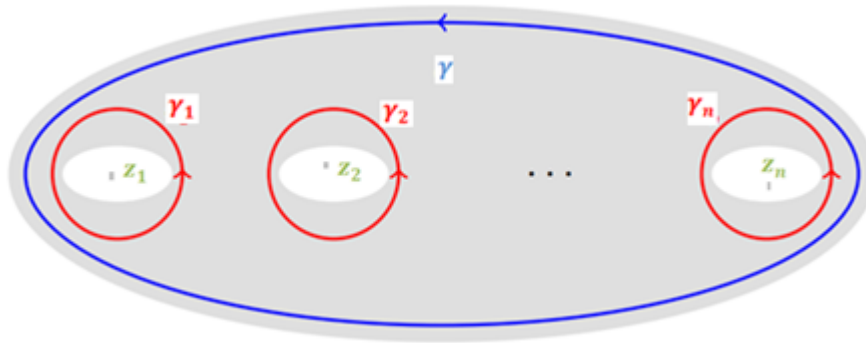


Fig. 02. Esbozo respecto al supuesto que cada γ_k consiste en ser un círculo (curva cerrada simple), en consecuencia $\int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)-p} dz = 2\pi i$; para $1 \leq k \leq n$.

De manera que se suponen curvas cerradas simples $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, con f analítica en la región entre γ y $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Entonces:

$$(Ec. 3.2.12.) \quad \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-p} dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)-p} dz$$

Si se supone que cada γ_k consiste en ser un círculo (curva cerrada simple) tenemos que:

$$(Ec. 3.2.13.) \quad \int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)-p} dz = 2\pi i; \quad \text{para } 1 \leq k \leq n.$$

De forma que:

$$(Ec. 3.2.14.) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-p} dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)-p} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i n = n. \end{aligned}$$

Finalmente se argumenta por la cardinalidad de \mathcal{A} . ■

Así tanto el grado $deg(f, \Omega, y)$ como $I(f \circ \gamma, 0)$ son un número entero que (intuitivamente) cuenta el número de soluciones estables en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de la ecuación $f(x) = y$. De forma que respecto al grado topológico y su relación con la integral

compleja ponemos de manifiesto la coincidencia del índice de una curva γ continua cerrada y orientada positivamente en \mathbb{C} y el número de vueltas que contabiliza, con el número de soluciones estables que provee la aplicación de grado topológico en \mathbb{R}^2 , vía la identificación $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$.

A continuación el objetivo es justificar el índice de un campo y su relación con el grado, usualmente llamado índice de Poincaré. En esta discusión es de vital importancia el uso de la afirmación de que la función grado es constante en cada componente conexa del conjunto $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$.

DEFINICIÓN. 3.2.3. EL ÍNDICE DE POINCARÉ.

Sea $\phi \in C(\overline{\Omega})$ y $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ un p -punto aislado de ϕ , ($\phi(x_0) = p$ si y sólo si $x_0 \in \phi^{-1}(\{p\})$). Consideremos la colección Γ_{x_0} de todos los abiertos que contienen a x_0 y a ningún otro p -punto de ϕ . Si $U_1, U_2 \in \Gamma_{x_0}$, entonces $U_1 \cup U_2 \in \Gamma_{x_0}$.

La propiedad de escisión establece que si $K \subset \overline{\Omega}$ es cerrado y $p \notin \phi(K)$. Entonces:

$$(Ec. 3.2.15.) \quad deg(\phi, \Omega, p) = deg(\phi, \Omega - K, p).$$

De manera implícita la propiedad de escisión dice que el conjunto K , no aporta p -puntos. Luego bajo el uso de esta propiedad se comprueba que:

$$(Ec. 3.2.16.) \quad deg(\phi, U_1, p) = deg(\phi, U_2, p)$$

de manera que $deg(\phi, U, p)$ es el mismo para todo $U \in \Gamma_{x_0}$.

Así se define el índice del campo ϕ en el punto x_0 como $deg(\phi, U, p)$ para algún $U \in \Gamma_{x_0}$ y se denota por $i(\phi, x_0, p)$.

JUSTIFICACIÓN.

Para verificar que la definición es correcta sólo debemos comprobar (Ec. 3.2.16.).

Teniendo en cuenta que U_1 y U_2 son abiertos de x_0 , podemos considerar

$$(Ec. 3.2.17.) \quad U = B(x_0, r) \subset U_1, U_2 .$$

De forma que:

$$(Ec. 3.2.18.) \quad K_i = \overline{U_i - B(x_0, r)} = \overline{U_i - U}$$

es un subconjunto cerrado de $\overline{U_i}$, para $i = 1, 2$.

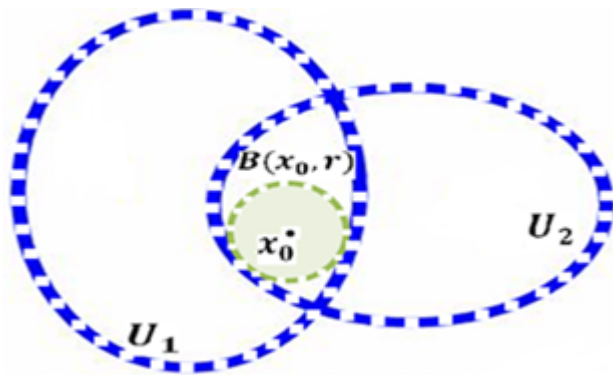


Fig. 03. Diagrama de conjuntos que representa la relación de los U_i , para $i = 1, 2$ y $B(x_0, r)$.

Analizando bajo la teoría de conjuntos

$$(Ec. 3.2.19.) \quad U_1 - K_1 = B(x_0, r)$$

$$(Ec. 3.2.20.) \quad U_2 - K_2 = B(x_0, r)$$

de manera que por transitividad de las ecuaciones 3.2.19. y 3.2.20. se obtiene:

$$(Ec. 3.2.21.) \quad U_1 - K_1 = U_2 - K_2 = B(x_0, r) = U .$$

Posteriormente bajo el uso de la propiedad de escisión se tiene que :

$$(Ec. 3.2.22.) \quad \begin{aligned} deg(\phi, U_1, p) &= deg(\phi, U_1 - K_1, p) \\ &= deg(\phi, U_2 - K_2, p) = deg(\phi, U_2, p) \end{aligned}$$

finalmente $deg(\phi, U, p)$ es el mismo para todo $U \in \Gamma_{x_0}$ ■

Si la preimagen de ϕ del punto p es finita entonces sus puntos son aislados y podemos expresar el grado a través de la suma de sus índices; más precisamente se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA.3.2.4. EL GRADO COMO SUMA DE ÍNDICES.

1. Si ϕ es una función continua, con $p \notin \phi(\partial\Omega)$ y $\phi^{-1}\{p\}$ finito entonces

$$(Ec. 3.2.23.) \quad deg(\phi, \Omega, p) = \sum_{x \in \phi^{-1}\{p\}} i(\phi, x, p)$$

DEMOSTRACIÓN.

1. Supongamos que $\phi^{-1}\{p\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Consideraremos una sucesión finita de entornos abiertos disjuntos dos a dos $\{U_j\}_{1 \leq j \leq n}$ de los p -puntos, tal que: $\Omega = \cup_{1 \leq j \leq n} U_j$ y para j , $\phi|_{U_j} = \phi_j$.

Entonces:

$$(Ec. 3.2.24.) \quad \begin{aligned} deg(\phi, \Omega, p) &= \sum_{1 \leq j \leq n} deg(\phi_j, U_j, p) \\ &\quad \downarrow \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} i(\phi_j, x_j, p) \\ &= \sum_{x_j \in \phi^{-1}\{p\}} i(\phi, x_j, p) . \end{aligned} \quad \blacksquare$$

TEOREMA.3.2.5. PRINCIPIO DEL ARGUMENTO.

Sea $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y Ω un dominio acotado tal que $\overline{\Omega} \subset U$ y $0 \notin f(\partial\Omega)$. Entonces

$$(Ec. 3.2.25.) \quad deg(f, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f = Ind_{\gamma \circ f} 0$$

donde Z_f es el número de ceros de f en Ω contados con su multiplicidad.

DEMOSTRACIÓN.

Al ser Ω un abierto acotado, la condición $f(z) \neq 0$ en $\partial\Omega$ implica que f sólo puede tener raíces en un número finito de componentes conexas de Ω , de esa forma, al sumar el grado de f sobre dichas componentes conexas, resulta una suma finita. Puede haber únicamente un número finito de polos en cualquier región acotada, ya que los polos son aislados.

Si z_0 es un cero de f , $z_0 \in f^{-1}(\{0\})$ entonces es aislado y por lo tanto existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ y $z \in B^*(z_0, \varepsilon) = B(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$ entonces $f(z) \neq 0$.

Considerando que f es una función analítica y en particular continua sobre $\overline{\Omega}$ y z_0 es un p -punto, con $p = 0$, luego el grado está definido como el índice de Poincaré, más precisamente: si $\varepsilon < \varepsilon_0$ entonces $deg(f, B(z_0, \varepsilon), 0) = i(f, z_0, 0)$.

Ahora supongamos que z_1, z_2, \dots, z_n son todos los ceros de f ; entonces de acuerdo al teorema relativo al grado como suma de índices existen entornos disjuntos dos a dos $B_j = B(z_j, \varepsilon)$, con $j = 1, 2, \dots, n$ tal que:

$$(Ec. 3.2.26.) \quad \begin{aligned} deg(f, \Omega, 0) &= \sum_{1 \leq j \leq n} deg(f_j, B_j, 0) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} i(f_j, z_j, 0) \\ &= \sum_{j=1}^n i(f, z_j, 0) \\ &= \sum_{z_j \in \phi^{-1}\{0\}} i(f, z_j, 0) \end{aligned}$$

Por otro lado los entornos se pueden elegir de forma tal que para cada $j = 1, 2, \dots, n$ exista g_j holomorfa en B_j tal que si $z \in B_j$ entonces $f(z) = (z - z_j)^{m_j} g_j(z)$ con $g_j(z) \neq 0$ y m_j la multiplicidad del cero z_j .

Ahora tomamos derivada logarítmica:

$$(Ec. 3.2.27.) \quad f(z) = (z - z_j)^{m_j} g_j(z)$$

$$(Ec. 3.2.28.) \quad f'(z) = m_j \cdot (z - z_j)^{m_j-1} \cdot g_j(z) + (z - z_j)^{m_j} g_j'(z)$$

$$(Ec. 3.2.29.) \quad \begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m_j \cdot (z - z_j)^{m_j-1} \cdot g_j(z) + (z - z_j)^{m_j} g_j'(z)}{(z - z_j)^{m_j} g_j(z)} \\ &= \frac{m_j}{z - z_j} + \frac{g_j'(z)}{g_j(z)} \end{aligned}$$

e integramos a ambos lados:

$$(Ec. 3.2.30.) \quad \int_{\partial B_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\partial B_j} \frac{m_j}{z - z_j} dz + \int_{\partial B_j} \frac{g_j'(z)}{g_j(z)} dz$$

teniendo en cuenta que $\frac{g_j'(z)}{g_j(z)}$ es analítica en B_j por el teorema de Cauchy que establece que si ∂B_j es una curva cerrada simple y si g es analítica en y dentro de ∂B_j , entonces se tiene que: $\int_{\partial B_j} \frac{g_j'(z)}{g_j(z)} dz = 0$, de manera que para todo $j = 1, 2, \dots, n$:

$$(Ec. 3.2.31.) \quad \int_{\partial B_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\partial B_j} \frac{m_j}{z - z_j} dz$$

$$(Ec. 3.2.32.) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_j} \frac{m_j}{z - z_j} dz \\ &= m_j \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_j} \frac{1}{z - z_j} dz \right\} = m_j \end{aligned}$$

la última igualdad se obtiene del supuesto de que z_1, z_2, \dots, z_n son todos los ceros de f , y dado que no existe ningún polo en B_j como tampoco en ∂B_j y únicamente existe el cero z_j correspondiente a cada B_j .

$$(Ec. 3.2.33.) \quad \int_{\partial B_j} \frac{1}{z - z_j} dz = 2\pi i (Z_f - P_f) = 2\pi i$$

así utilizando la teoría desarrollada respecto al índice de una curva continua en el plano complejo, índice de Poincaré, se tiene para cada $j = 1, 2, \dots, n$ la igualdad

$$(Ec. 3.2.34.) \quad i(f, z_j, 0) = \deg(f, B_j, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m_j;$$

multiplicidad de ceros
individuales.

Finalmente sumando sobre j se obtiene la totalidad de ceros o soluciones. ■

TEOREMA 3.2.6. ROUCHÉ.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y U un abierto tal que $\bar{\Omega} \subset U$. Si f, g son analíticas en U tales que

$$(Ec. 3.2.35.) \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

para todo $z \in \partial\Omega$ entonces f y g tienen la misma cantidad de ceros contados con sus multiplicidades en Ω .

DEMOSTRACIÓN.

La demostración mediante la herramienta del grado topológico de Brouwer es una consecuencia del principio del argumento de Cauchy que básicamente expresa que si $f(z)$ es una función meromorfa (holomorfa sobre todo un subconjunto abierto U del plano complejo, excepto en el conjunto de polos aislados de la función) definida como sigue:

Sea $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y Ω un conjunto abierto limitado (acotado) por el camino simple y cerrado (sin cortes consigo mismo, el cual posee una orientación antihoraria) $\partial\Omega$, donde $\bar{\Omega} \subset U$ y $0 \notin f(\partial\Omega)$, y tal que f no tiene ceros ni polos en $\partial\Omega$, entonces se cumple la siguiente relación:

$$(Ec. 3.2.36.) \quad \deg(f, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f - P_f$$

Sin embargo dado que la función es meromorfa, carece de polos, así:

$$(Ec. 3.2.37.) \quad \deg(f, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f .$$

Además, la demostración del teorema de Rouché hace uso de la invariancia del grado bajo homotopías, como detallamos a continuación:

para todo $t \in [0, 1]$ y $z \in \partial\Omega$ se tiene que:

$$\begin{aligned} (Ec. 3.2.38.) \quad & |(1-t)f(z) + tg(z)| \\ &= |f(z) - t(f(z) - g(z))| \\ &\geq ||f(z)| - t|f(z) - g(z)|| ; \text{ pues por hipótesis:} \\ & \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)| \\ &\geq |f(z)| - t|f(z) - g(z)| > 0 \end{aligned}$$

Luego si $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$ con

$$(Ec. 3.2.39.) \quad H(t, z) = (1-t)f(z) + tg(z), \forall t \in [0, 1], 0 \notin H(\partial\Omega)$$

mediante la invariancia del grado bajo homotopías se tiene que H_t consiste de una función continua para todo $t \in [0, 1]$ y

$$(Ec. 3.2.40.) \quad \deg(H_t, \Omega, p) = \deg(H_0, \Omega, p)$$

de tal forma que:

$$(Ec. 3.2.41.) \quad \begin{aligned} \deg(f, \Omega, 0) &= \deg(H_1, \Omega, 0) \\ &= \deg(H_0, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El próximo teorema establece que si una función continua ϕ sobre $\overline{\Omega}$ tiene la propiedad de que para algún origen w en Ω y para todo punto x de su borde, $\phi(x) - w$ no es una dilatación del punto $x - w$ entonces ϕ tiene un punto fijo.

Cabe destacar que este resultado es ubicado en esta parte, ya que será aplicado inmediatamente después en la demostración del teorema fundamental de álgebra.

TEOREMA 3.2.7. DILATAIONES Y PUNTOS FIJOS.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado y $\phi \in C(\overline{\Omega})$. Si existe $w \in \Omega$ tal que para todo $x \in \partial\Omega$ y para todo $c > 1$ se tiene que $\phi(x) - w \neq c \cdot (x - w)$ entonces ϕ tiene un punto fijo.

DEMOSTRACIÓN.

Por contradicción. Supongamos que ϕ no tiene puntos fijos y consideremos la homotopía

$$(Ec. 3.2.42.) \quad H(t, x) = (x - w) - t(\phi(x) - w) = x - w - t(\phi(x) - w)$$

la cual es una combinación lineal convexa para $x \in \overline{\Omega}$ y $t \in [0, 1]$.

Veamos que $0 \notin H_t(\partial\Omega)$ para todo $t \in [0, 1]$. Resulta claro considerando $t = 1$:

$$(Ec. 3.2.43.) \quad H(1, x) = H_1(x) = (x - w) - (\phi(x) - w) = x - \phi(x).$$

De tal forma que:

$$(Ec. 3.2.44.) \quad H(1, \cdot) = H_1(\cdot) = id - \phi.$$

$$(Ec. 3.2.45.) \quad H(0, \cdot) = H_0(\cdot) = id - w.$$

Si para algún $0 < t < 1$ existe $x \in \partial\Omega$ tal que $H_t(x) = 0$ entonces

$$(Ec. 3.2.46.) \quad (x - w) - t(\phi(x) - w) = 0 \implies t^{-1}(x - w) = \phi(x) - w$$

contradiendo la hipótesis (de que es una dilatación del punto).

Luego nuevamente por la invariancia por homotopía, siendo H una homotopía y $\forall t \in [0, 1]$, H_t es una función continua, con $0 \notin H_t(\partial\Omega)$, entonces:

$$(Ec. 3.2.47.) \quad deg(H_t, \Omega, 0) = deg(H_0, \Omega, 0)$$

así se tiene que:

$$(Ec. 3.2.48.) \quad deg(H_0, \Omega, 0) = deg(H_1, \Omega, 0)$$

es decir,

$$(Ec. 3.2.49.) \quad deg(id - w, \Omega, 0) = deg(id - \phi, \Omega, 0).$$

Como $w \in \Omega$ entonces utilizando la propiedad de escisión y considerando a w como un conjunto unipuntual cerrado

$$(Ec. 3.2.50.) \quad deg(id - w, \Omega, 0) = deg(id, \Omega, 0)$$

luego mediante la propiedad de normalización:

$$(Ec. 3.2.51.) \quad deg(id, \Omega, 0) = 1 = deg(id - w, \Omega, 0)$$

y concluimos que $deg(id - \phi, \Omega, 0) = 1$, es decir, $id - \phi$ tiene un p -punto, con $p = 0$ y en consecuencia ϕ un punto fijo.

■

Finalizamos esta sección dando una demostración del teorema fundamental del álgebra utilizando teoría de grado, más precisamente recurriendo a la invariancia bajo homotopía del grado topológico.

TEOREMA 3.2.8. FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.

Si

$$(Ec. 3.2.52.) \quad h(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \in \mathbb{C}[X]$$

es un polinomio con coeficientes complejos y de grado mayor o igual a 1, entonces h se anula en algún $z_0 \in \mathbb{C}$.

DEMOSTRACIÓN.

Podemos suponer que h es polinomio mónico, es decir, el coeficiente principal del término de mayor grado es 1. En primer lugar observamos que h es homotópico al polinomio z^n , mediante

$$(Ec. 3.2.53.) \quad H(t, z) = z^n + (1-t)[a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}],$$

Luego se concluye que

$$(Ec. 3.2.54.) \quad \begin{aligned} \deg(h, B, 0) &= \deg(H_0, B, 0) \\ &= \deg(H_1, B, 0) = \deg(z^n, B, 0) = n \neq 0. \end{aligned}$$

Siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado y ya que $h(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ es una función holomorfa (por ser infinitamente diferenciable) y por tanto continua sobre $\overline{\Omega}$, ahora mediante el teorema de dilataciones y punto fijo, tomaremos particularmente $w = 0 \in \Omega$ tal que para todo $x \in \partial\Omega$ y para todo $c > 1$ se tiene que:

$$(Ec. 3.2.55.) \quad h(z) - w = h(z) - 0 = h(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \neq c \cdot (z - 0) = cz$$

↓

polinomio mónico.

Entonces h tiene un punto fijo y se asegura la existencia de una solución, así existe $z_0 \in B \subset \mathbb{C}$ tal que $h(z_0) = 0$.

■

APÉNDICES.

APÉNDICE A. LEMA DE SARD.

LEMA DE SARD.

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y $S_f = \{x : x \in \Omega, J_f(x) = 0\}$ el conjunto de puntos críticos de f . Entonces $f(S_f)$ es de medida nula.

DEMOSTRACIÓN.

Es suficiente considerar que $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, pues provee los siguientes resultados:

↔ Dado que la compacidad se conserva bajo aplicaciones continuas, $f(\bar{\Omega})$ es un conjunto compacto.

↔ S_f es acotado pues es subconjunto del abierto y acotado Ω de \mathbb{R}^N , mientras que \bar{S}_f es un conjunto cerrado, por tanto \bar{S}_f es compacto.

↔ El demostrar que $\mu_N(f(\bar{S}_f)) = 0$ implica que $\mu_N(f(S_f)) = 0$, ya que evidentemente $S_f \subseteq \bar{S}_f$ e implica que $f(S_f) \subseteq f(\bar{S}_f)$.

↔ Si el dominio de definición de una función continua es compacto, podemos asegurar la existencia de un elemento máximo y un mínimo.

↔ El teorema de Heine-Cantor asegura que una función continua en un compacto es uniformemente continua.

De la demostración se excluye el caso: $S_f = \{x : x \in \Omega, J_f(x) = 0\} = \emptyset$ pues provoca que $f(S_f)$ tenga medida nula, concluyendo la prueba, por lo que asumimos $S_f \subset \Omega$ tq.: $S_f \neq \emptyset$.

Consideraremos Ω como un cubo de lado a , luego se particiona de la siguiente manera:

para $k \geq 1$ entero, dividimos el cubo en k^N cubos c_i de lado $\frac{a}{k}$ con $1 \leq i \leq k^N$, de tal forma que: $\Omega = \cup_{i=1}^{k^N} c_i$ y bajo estos supuestos $S_f \cap \Omega$ equivale a

$$(Ec. A.01.) \quad S_f \cap \cup_{i=1}^{k^N} c_i \neq \emptyset.$$

Si c_i es tal que $S_f \cap c_i \neq \emptyset$ consideremos $x \in S_f \cap c_i$ y $y \in c_i$.

Se define $T_x : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ como:

$$(Ec. A.02.) \quad T_x(y) = f(x) + \nabla f(x)(y - x).$$

y es el trasladado del hiperplano vectorial $\nabla f(x)(y - x)$ por un vector $f(x)$.

Usando el hecho de que la aplicación ∇f es uniformemente continua en $\bar{\Omega}$

Dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq.: $|x - y| < \delta$,

$$(Ec. A.03.) \quad |f(y) - T_x(y)| \leq \epsilon |x - y| \\ \implies |f(y) - f(x) - \nabla f(x)(y - x)| \leq \epsilon |x - y|$$

para cada par de puntos $x, y \in c_i \subset \bar{\Omega}$, donde ϵ depende $|x - y|$.

Si c_i es tal que $S_f \cap c_i \neq \emptyset$ consideraremos $x \in S_f \cap c_i$ y $y \in c_i$ para inferir que $f(c_i)$ posee una medida de Lebesgue n -dimensional pequeña.

En efecto:

Si $x \in S_f \cap c_i$, entonces para toda $y \in c_i$ se obtiene:

$$(Ec. A.04.) \quad |x - y| = |y - x| \leq \frac{a\sqrt{N}}{k}.$$

El detalle de la demostración de la desigualdad A.04. a continuación.

Dados los elementos de \mathbb{R}^N

$$(Ec. A.05.) \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in (S_f \cap c_i) \subset \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$$

y

$$(Ec. A.06.) \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in c_i \subset \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$$

En lo que sigue la idea es adaptar varios resultados a funciones de varias variables reemplazando la recta tangente por el plano tangente.

Ya que hemos consideraremos Ω como un cubo de lado a , luego para $k \geq 1$ entero, particionamos el cubo en k^N cubos c_i de lado $\frac{a}{k}$ con $1 \leq i \leq k^N$. Si elegimos un cubo c_i y tomamos cualesquiera dos puntos de él, todo el segmento que los une, tomándolos como extremos está contenido en el mismo cubo c_i , por tanto cada cubo c_i es convexo lo que implica conexidad por caminos.

El teorema del valor medio (de Lagrange) o teorema de los incrementos finitos es una propiedad de las funciones derivables en un conjunto abierto, acotado y convexo, en particular $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función real diferenciable sobre ese abierto. Entonces :

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. A.13.)} \quad & \exists \xi \in c_i \text{ tq.: } \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) \\
 & \implies f(y) - f(x) = f'(\xi) (y - x) \\
 & \implies f(y) - f(x) = f'(x + \theta(y - x)) (y - x); \theta \in [0, 1].
 \end{aligned}$$

Observación: la función debe ser a valores en \mathbb{R} , dado que nuestro problema se trata de una función a valores en un espacio \mathbb{R}^N con $N > 1$, se utilizará la métrica $\|\cdot\|$ y el determinante para la matriz de derivadas parciales.

Ya que el teorema del valor medio permite escribir:

$$\text{(Ec. A.14.)} \quad f(y) - f(x) = f'(x + \theta(y - x)) (y - x); \quad \theta \in [0, 1].$$

Aplicando normas a ambos miembros de la desigualdad

$$\implies |f(y) - f(x)| = |f'(x + \theta(y - x)) (y - x)|; \quad \theta \in [0, 1].$$

Dado que todo conjunto no vacío de números reales que esté acotado (en particular acotado superiormente) admite un supremo se garantiza la existencia de $Sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(x + \theta(y - x))|$.

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. A.15.)} \quad & |f(y) - f(x)| \leq |y - x| Sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(x + \theta(y - x))|; \\
 & \leq |y - x| Máx_{x \in \bar{\Omega}} \|f'(x)\|; \quad |y - x| \leq \frac{a\sqrt{N}}{k}. \\
 & \leq \frac{a\sqrt{N}}{k} Máx_{x \in \bar{\Omega}} \|f'(x)\|.
 \end{aligned}$$

Por la desigualdad (Ec. A.11.) y ya que $J_f(x) = 0$, la aplicación $T_x = f(x) + \nabla f(x)(y - x)$ mapea $\bar{\Omega}$ en un hiperplano H_x de dimensión $N - 1$, la relación (Ec. A.12.), $dist(f(y), f(x) + H_x) \leq \frac{a\sqrt{N}}{k} \epsilon$, sólo da la longitud de una dimensión, el espesor, así si c_i es tal que: $S_f \cap c_i \neq \emptyset$, entonces el conjunto $f(z)$ con z en c_i está contenido en el bloque de espesor

$$(Ec. A.16.) \quad 2 \epsilon \cdot \left(\frac{a\sqrt{N}}{k} \right).$$

En la desigualdad

$$(Ec. A.17.) \quad |f(y) - f(x)| \leq \frac{a\sqrt{N}}{k} \text{Máx}_{x \in \bar{\Omega}} \|f'(x)\|; \quad |y - x| \leq \frac{a\sqrt{N}}{k}.$$

denotando por: $\mathcal{L} = \text{Máx}_{x \in \bar{\Omega}} \|f'(x)\|$, se deduce que la longitud para cada una de las $N - 1$ dimensiones restantes del cubo c_i es:

$$(Ec. A.18.) \quad 2 \mathcal{L} \frac{a\sqrt{N}}{k}.$$

Finalmente se obtiene la estimación:

$$(Ec. A.19.) \quad \mu_N(f(c_i)) \leq 2 \epsilon \cdot \left(\frac{a\sqrt{N}}{k} \right) \cdot \left(2 \mathcal{L} \frac{a\sqrt{N}}{k} \right)^{N-1}$$

cuando $|y - x| \leq \frac{a\sqrt{N}}{k}$.

y puesto que hay k^N cubos c_i , $\forall k \geq 1$ se tiene:

$$(Ec. A.20.) \quad \Omega = \cup_{i=1}^{k^N} c_i \longrightarrow f(S_f(\Omega)) \subset \cup_{i=1}^{k^N} f(c_i)$$

$$(Ec. A.21.) \quad \begin{aligned} \mu_N(f(S_f)) &\leq 2 k^N \epsilon \cdot \left(\frac{a\sqrt{N}}{k} \right) \cdot \left(2 \mathcal{L} \frac{a\sqrt{N}}{k} \right)^{N-1} \\ &= 2^N \mathcal{L}^{N-1} \cdot k^N \cdot \left(\frac{a\sqrt{N}}{k} \right)^N \cdot \epsilon \\ &= 2^N \mathcal{L}^{N-1} \cdot \left(a\sqrt{N} \right)^N \cdot \epsilon. \end{aligned}$$

Gracias a que el dominio $\bar{\Omega}$ es compacto el valor de ϵ cuando $|y - x| \leq \frac{a\sqrt{N}}{k}$ no es excesivo, mientras que haciendo $k \rightarrow \infty$, $\mu_N(f(S_f)) = 0$. ■

APÉNDICE B. RELACIÓN DE EQUIVALENCIA (Ec. 2.2.8.).

Este suplemento esta dedicado específicamente a exponer la relación de equivalencia utilizada en la demostración del caso 2 del lema 2.2.1, (Ec. 2.2.8.).

Para cada $s, t \in [0, 1]$ se define la relación de equivalencia $s \sim t$ si y sólo si existe $\psi \in C_c^1(\bar{\Omega})$ tq.:

$$(Ec. B.01.) \quad \text{div} (\psi) (x) = f(x - \gamma(s)) - f(x - \gamma(t))$$

tal relación de equivalencia determina una partición por subconjuntos disjuntos del intervalo cerrado $[0, 1]$ según sus clases de equivalencia.

A demostrar que efectivamente es una relación de equivalencia:

REFLEXIVIDAD.

$$(Ec. B.02.) \quad \omega \sim \omega : \quad \text{div} (\psi) (x) = f(x - \gamma(\omega)) - f(x - \gamma(\omega)) = 0$$

para todo $\omega \in [0, 1]$.

El hecho de que $\omega \sim \omega$ es claro pues basta considerar el camino constante: $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, dado por $\gamma(\omega) = c$ (constante), $\forall \omega \in [0, 1]$ y así obtenemos una función constante

$$(Ec. B.03.) \quad f(x - \gamma(\omega)), \quad \forall x \in K = \text{spt} (f) \subset A.$$

donde $A = \{k + \gamma(s) : k \in K, s \in [0, 1]\}$.

Luego el divergente de una función constante ψ es igual a cero.

SIMETRÍA.

La simetría se obtiene por el siguiente motivo:

$$(Ec. B.04.) \quad \omega \sim s$$

$$\text{div} (\psi) (x) = f(x - \gamma(\omega)) - f(x - \gamma(s)); \quad \forall \omega, s \in [0, 1].$$

entonces la función contraría $-\psi(x)$ posee su divergencia como sigue:

$$(Ec. B.05.) \quad s \sim \omega$$

$$\text{div} (-\psi) (x) = f(x - \gamma(s)) - f(x - \gamma(\omega)); \quad \forall \omega, s \in [0, 1].$$

TRANSITIVIDAD.

La transitividad se sigue de $\omega \sim s$ y $s \sim t$

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. B.06.)} \quad \omega \sim s \\
 \operatorname{div} (\psi) (x) &= f(x - \gamma(\omega)) - f(x - \gamma(s)); \\
 \forall \omega, s \in [0, 1], \psi &\in C_c^1(\overline{\Omega}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. B.07.)} \quad s \sim t \\
 \operatorname{div} (\lambda) (x) &= f(x - \gamma(s)) - f(x - \gamma(t)); \\
 \forall s, t \in [0, 1], \lambda &\in C_c^1(\overline{\Omega}).
 \end{aligned}$$

implica que existe $\tau(x) = \psi(x) + \lambda(x)$, y dado que la divergencia es un operador lineal:

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. B.08.)} \quad \operatorname{div} \tau(x) &= \operatorname{div} (\psi(x) + \lambda(x)) \\
 &= \operatorname{div} (\psi) (x) + \operatorname{div} (\lambda) (x) \\
 &= f(x - \gamma(\omega)) - f(x - \gamma(t)) \\
 \therefore \omega R s \wedge s R t &\longrightarrow \omega R t.
 \end{aligned}$$

concluyendo de manera afirmativa la verificación de que la ecuación 2.2.8. es en efecto una relación de equivalencia.

APÉNDICE C. JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN 2.5.2.

A continuación se presentan los argumentos para garantizar que la aplicación

$$(Ec. C.01.) \quad \theta_r : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \theta_r(x) = \frac{1}{k} \theta_1 \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$\text{donde } \theta_1 \left(\frac{x}{a} \right) = \begin{cases} \exp \left(\frac{-1}{1 - \left| \frac{x}{a} \right|_2^2} \right); & \left| \frac{x}{a} \right|_2 < 1 \\ 0 & \left| \frac{x}{a} \right|_2 \geq 1 \end{cases}$$

cumple la definición 2.5.2. que es fundamental para la regularización de funciones y posteriormente utilizada para la convolución.

El soporte de θ_1 es la bola $\left| \frac{x}{a} \right|_2 = \frac{|x|_2}{|a|_2} < 1$, que de modo preciso es equivalente a $|x|_2 < |a|_2$; sin embargo, $a \in \mathbb{R}$, por lo que la norma euclídea $|a|_2$ es el valor absoluto $|a|$.

$$i) \quad \theta_r \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

$$(Ec. C.02.) \quad \theta_r(x) = \frac{1}{k} \theta_1 \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{k} \exp \left(\frac{-1}{1 - \left| \frac{x}{a} \right|_2^2} \right)$$

↓

Por ser una función exponencial
 θ_r es infinitamente diferenciable.

La argumentación de que θ_r es una función con soporte compacto, se basa en el hecho de que el soporte de θ_r depende del soporte de θ_1 , así $spt(\theta_1)$ consiste de todos los $x \in \mathbb{R}^N$ tales que $|x|_2 < |a|$.

$$ii) \quad spt(\theta_r) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2} \leq 1 \right\};$$

El soporte de θ_r depende del soporte de θ_1 .

$$(Ec. C.03.) \quad \begin{aligned} spt(\theta_r) &\subset \left\{ \frac{x}{a} \in \mathbb{R}^N : \left| \frac{x}{a} \right|_2 < 1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{a} \in \mathbb{R}^N : |x|_2 < |a| \right\} \\ &\quad \downarrow \\ & a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \theta_r(x) dx = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{(Ec. C.04.)} \quad \theta_r(x) &= \frac{1}{k} \theta_1\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= \frac{1}{k} \exp\left(\frac{-1}{1-|\frac{x}{a}|_2^2}\right) \\ &\quad \downarrow \\ \text{tomando} \quad k &= \int \int \cdots \int_{\mathbb{R}^N} \theta_1\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) dx ; a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{(Ec. C.05.)} \quad \theta_1\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) = \exp\left(\frac{-1}{1-|\frac{x}{a}|_2^2}\right); \left|\frac{x}{a}\right|_2 < 1.$$

$$\begin{aligned} \text{(Ec. C.06.)} \quad \int \int \cdots \int_{\mathbb{R}^N} \theta_1\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) dx ; \quad y = \frac{x}{a} &\longrightarrow dy = \left(\frac{1}{a}\right) dx \\ &\quad \downarrow \\ &\quad dy_i = \left(\frac{1}{a}\right) dx_i \\ &\quad \downarrow \\ &\quad a dy = dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(Ec. C.07.)} \quad \int \int \cdots \int_{\mathbb{R}^N} \theta_1\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) dx &= \int \int \cdots \int_{\mathbb{R}^N} \theta_1(y) (a dy) \\ &= \int \int \cdots \int_{\mathbb{R}^N} \theta_1(y) (a dy_1 \dots a dy_N) \\ &= a^N \int \int \cdots \int_{\mathbb{R}^N} \theta_1(y) dy \end{aligned}$$

$$\int \int \cdots \int_{\mathbb{R}^N} \theta_r(x) dx = \int \int \cdots \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{k} \theta_1\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) dx$$

↓
Por el cambio de variables $\frac{1}{k}$ puede salir de la integral.

$$= \frac{1}{a^N \int \int \cdots \int_{\mathbb{R}^N} \theta_1(y) dy} \int \int \cdots \int_{\mathbb{R}^N} \theta_1\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) dx = 1.$$

$$\text{iv)} \quad \theta_r(x) = \mu(|x|_2) \text{ para alguna } \mu : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\text{(Ec. C.08.)} \quad \theta_r(x) = \frac{1}{k} \theta_1\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{k} \exp\left(\frac{-1}{1-|\frac{x}{a}|_2^2}\right)$$

puede ser escrita como $\mu(|x|_2)$ para alguna $\mu : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, considerando $\theta_r(x) = \mu\left(\left|\frac{x}{a}\right|_2\right)$, donde $|\cdot|_2$ es la norma euclídea que toma un vector de \mathbb{R}^N y lo lleva a \mathbb{R}^+ pues $|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$, de manera que $|\cdot|_2 : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^+$, así se asegura que μ toma valores en \mathbb{R}^+ .

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. C.09.)} \quad \mu \circ |\cdot|_2 &= \mu(|\cdot|_2) = \exp\left(\frac{-1}{1-|\cdot|_2^2}\right) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{|\cdot|_2^2-1}\right); \text{ para } |\cdot|_2 < 1.
 \end{aligned}$$

donde $|\cdot|_2^2 \in \mathbb{R}^+$, implica $|\cdot|_2^2 - 1 \in \mathbb{R}$ y por ende $\frac{1}{|\cdot|_2^2-1} \in \mathbb{R}$ con $|\cdot|_2^2 - 1 \neq 0$, por lo que se debe tomar $|\cdot|_2 < 1$.

Si se escogiera $|\cdot|_2^2 = 1$ tendríamos $e^{-\infty} = 0$, por lo que cuando el vector de \mathbb{R}^N es unitario este no está en el soporte de θ_1 y en consecuencia tampoco en el soporte de θ_r .

$$\begin{aligned}
 \text{(Ec. C.10.)} \quad K = \text{spt } \theta_r &= \text{spt } \theta_1 = \overline{\{x/\theta_1(x) \neq 0\}} = \left|\frac{x}{a}\right|_2 < 1. \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad |x|_2 < |a|.
 \end{aligned}$$

$$\text{v) } \quad \theta_r(x) = \frac{1}{k} \theta_1\left(\frac{x}{a}\right) \geq 0 \text{ para toda } x \in \mathbb{R}^N.$$

Por su misma definición esta propiedad es cierta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

↔ **Anders**, Martinsson. *Guía para la redacción de artículos científicos destinados a la publicación*. Programa general de Información y UNISIST. Segunda edición. París, Francia. 1983.

↔ **Ahlfors**, Lars Valerian. *Complex analysis, an introduction to the theory of analytic functions of the one complex variable*. Universidad de Harvard. Compañía de libros McGraw-hill. Segunda Edición.

↔ **Benítez**, Trujillo; **Díaz**, Moreno. *Introducción a los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones*. Servicio de publicaciones Universidad de Cádiz. España. 1998.

↔ **Bröcker**, Theodor; **Jänich**, Klaus. *Introducción a la topología diferencial*. Editorial AC. Madrid, España. 1977.

↔ **Calvo Pinilla**, Manuel; **Carnicer Álvarez**, Jesús. *Curso de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Prensas Universitarias de Zaragoza. segunda Edición. Zaragoza, España. 2010.

↔ **Cartan**, Henri. *Cálculo diferencial*. Ediciones Omega, S. A.. Barcelona, España. 1972.

↔ **Cid**, José Ángel. *Grado topológico y ecuaciones diferenciales, departamento de matemáticas*. Universidad de Jaén. Santiago de Compostela, España. 2010.

↔ **Deimling**, K. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag. 1985.

↔ **Dieudonné**, Jean. *Cálculo infinitesimal*. Ediciones Omega, S. A. Barcelona, España. 1971.

↔ **Drábek**, Pavel; **Milota**, Jaroslav. *Methods of nonlinear analysis applications to differential equations*. Birkhäuser Advanced Texts. Basel, Suiza. 2007.

- ↔ **Droniou**, Jérôme. *Degrés topologiques et applications*. Université Montpellier II. Francia, 2006.
- ↔ **Etcheberry**, Alain. *Elementos de variable compleja*. Equinoccio, Ediciones de la Universidad Simón Bolívar. Venezuela, 2000.
- ↔ **Fonseca**, Irene; **Gangbo**, Wilfrid. *Degree Theory in analysis and applications topologiques et applications*. Oxford Science Publications. Estados Unidos. 1995.
- ↔ **Granas**, Andrzej; **Dugundji**, James. *Fixed point theory*. Springer Monographs in Mathematics. Department of Mathematics and Computer Science, University of Warmia And Mazury. Olsztyn, Polonia, 2003.
- ↔ **Grossman**, Stanley. *Álgebra Lineal*. Mc Graw Hill-Interamericana. Sexta Edición. México, 2008.
- ↔ **Kavian**, Otared. *Methods of Nonlinear Analysis Introduction a la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag. Francia. 1993.
- ↔ **Lloyd**, N.G. *Degree theory*. Cambridge University Press. Londres, Inglaterra. 1978.
- ↔ **Marsden**, Jerrold E. **Hoffman**, Michael J. *Basic Complex Analysis*. W H Freeman & Co. Tercera Edición. New York, Estados Unidos. 1998.
- ↔ **Marsden**, Jerrold E.; **Tromba**, Anthony J. *Cálculo Vectorial*. Addison Wesley Iberoamericana; Tercera Edición. New York, Estados Unidos. 1991.
- ↔ **Montiel**, Sebastián; **Ros**, Antonio. *Curvas y superficies*. Proyecto Sur de Ediciones, S.L. Segunda edición. Armilla Granada, España. 1997.
- ↔ **Nakamura**, Shoichiro. *Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB*. Prentice-Hall Hispanoamericana. México. 1997.
- ↔ **Needham**, Tristan. *Visual Complex Analysis*. Departamento de Matemáticas de la Universidad de San Francisco. Clarendon Press, Oxford. 1997.
- ↔ **O'Regan**, Donal; **Yeol Je Cho**, Yu-Qing Chen. *Topological Degree Theory and Applications*. Volume 10. Series in Mathematical Analysis and Applications (SIMAA). Editorial Chapman & Hall/CRC. Taylor & Francis Group . Estados Unidos 2006.

- ↔ **Ortega, R.** *Degree theory and boundary value problems*. 2006.
<http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/degree.pdf>.
- ↔ **Outereño Domínguez, Enrique; Garma, Santiago; Flament, Dominique; Navarro Brotóns, Víctor.** *Contra los titanes de la rutina: Encuentro, en Madrid, de investigadores Hispano-Franceses sobre la historia y la filosofía de la matemática. Orígenes de la teoría del grado topológico de Brouwer-Kronecker*. CSIC-Dpto. de Publicaciones. Imprenta de la comunidad de Madrid. España. 1994.
- ↔ **Rudín, Walter.** *Principios de análisis matemático*. McGraw Hill. Tercera edición. México. 1980.
- ↔ **Schwartz, Laurent.** *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Enseignement des sciences. Segunda edición. París, Francia. 1965.
- ↔ **Taylor, Angus E.** *Introduction to functional analysis*. John Wiley & Sons, Inc. California, Estados Unidos. 1958 .
- ↔ **Warner W, Frank.** *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate texts in mathematics. Editorial Springer. New York, Estados Unidos. 1971.
- ↔ **Wawrzynczyk, Antoni.** *Introducción al análisis funcional*. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Primera edición. México. 1993.
- ↔ **Wilson, H.K.** *Ordinary Differential Equations. Introductory and Intermediate Courses*. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts, Estados Unidos. 1971.
- ↔ **Yangari Sosa, Miguel Angel; Calahorrano, Marco.** *Problemas elípticos no lineales perturbados con condiciones de Dirichlet homogéneas. Caso asintóticamente lineal*. Escuela Politécnica Nacional. Quito, Ecuador. 2008.
- ↔ **Zill, Dennis G.** *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*. Editorial Thomson. Octava edición. México. 2007.