

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



TRABAJO DE GRADUACIÓN

ANÁLISIS DE LAS ECUACIONES DE LOTKA- VOLTERRA Y ALGUNAS DE SUS VARIANTES

PRESENTADO POR:

ARGELIO MÉNDEZ HERNÁNDEZ
RHINA VERÓNICA BARRERA ESCOBAR

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, AGOSTO DE 2013

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

Ingeniero Mario Roberto Nieto Lovo

VICE RECTORA ACADÉMICA:

Maestra Ana María Glower de Alvarado

SECRETARIA GENERAL:

Doctora Ana Leticia de Amaya

FISCAL GENERAL:

Licenciado Francisco Cruz Letona

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

Master Martín Enrique Guerra Cáceres

VICE DECANO:

Licenciado Ramón Arístides Paz Sánchez

SECRETARIO:

Licenciado Carlos Antonio Quintanilla Aparicio

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR DE LA ESCUELA:

Doctor José Nerys Funes Torres

ASESORES:

Licenciado Mauricio Hernán Lovo

Master Francisco Chicas

ASESORES DEL TRABAJO DE GRADUACIÓN

LICENCIADO MAURICIO HERNÁN LOVO
ESCUELA DE MATEMÁTICA

MASTER FRANCISCO CHICAS
ESCUELA DE BIOLOGÍA

AGRADECIMIENTOS

A Dios Todopoderoso:

Por que día a día nos demuestra lo grande que es su amor aún en los más pequeños detalles, fortalecer mi corazón e iluminar mi mente.

A mis padres:

Por el amor, el apoyo, la paciencia y los consejos que me permitieron crecer y ser mejor cada día.

A mis hermanas y abuelita:

Por su confianza, que han estado junto a mi y son parte fundamental en mi vida.

Al licenciado Mauricio Lovo y el master Francisco Chicas:

Por su disponibilidad, la paciencia y el impulso en el momento justo.

A mi demás familia y amigos:

Por creer en mi y compartir conmigo los buenos y malos momentos.

RHINA VERÓNICA BARRERA ESCOBAR

AGRADECIMIENTOS

A Dios Todopoderoso:

Por permitirme alcanzar una meta más en mi vida.

A mis padres:

Por hacer de mi una mejor persona y apoyarme en el transcurso de los años, especialmente en mi formación profesional.

A mis hermanos:

Por estar siempre presente, motivarme y brindarme su confianza para culminar con éxito esta investigación.

A mis sobrinos:

Por ser el motivo para seguir adelante.

A mi demás familia y amigos:

Por que de una u otra manera me han llenado de sabiduría para terminar mi tesis.

ARGELIO MÉNDEZ HERNÁNDEZ

Resumen

Un modelo matemático es un conjunto de expresiones que caracterizan la evolución de las variables de estado o bien de las salidas del sistema para distintas situaciones. El objetivo fundamental de este trabajo es describir y analizar las ecuaciones de Lotka-Volterra y tres de sus variantes.

1. Modelo clásico con ajuste logístico.
2. Modelo presas con refugios.
3. Modelo de Leslie.

Este tipo de modelos matemáticos estudian interacciones de poblaciones de dos especies en el cual hay depredadores y presas, donde los depredadores dependen fundamentalmente de las presas. Cada modelo incluye diferentes parámetros poblacionales que completan dichas ecuaciones y de ellos depende su comportamiento.

Para realizar el estudio de estos modelos se han utilizado conceptos de análisis matemático y la teoría de sistemas dinámicos para analizar los puntos de equilibrio y como interpretar el concepto de estabilidad en estos puntos.

Además hemos apoyado nuestro análisis con el uso del programa MATLAB, que nos permitió observar las soluciones y sus respectivos campos fase de manera gráfica, concreta y acertada, simulando diferentes situaciones para cada uno de los modelos descritos.

Índice general

1. Introducción a sistemas dinámicos	1
1.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales y concepto de solución	1
1.1.1. Órbitas y Trayectorias	3
1.1.2. Extremos relativos	4
1.2. Sistemas autónomos	7
1.2.1. Propiedades de las soluciones	7
1.2.2. Sistemas dinámicos	8
1.3. Estabilidad en las soluciones	10
1.4. Comportamiento asintótico de las soluciones.	15
1.4.1. Ciclos Límite	16
1.5. Ejemplos de modelos unidimensionales	19
1.5.1. Modelo de Malthus	19
1.5.2. Modelo Logístico	20
2. Modelos depredador - presa	24
2.1. Análisis del modelo clásico Lotka - Volterra	24
2.1.1. Análisis del modelo	26
2.1.2. Puntos de equilibrio	26
2.1.3. Analizando el punto P utilizando una función Lyapunov del sistema	28
2.2. Soluciones no estacionarias al modelo Lotka - Volterra	31
2.3. Modelo depredador-presa más general	35
2.3.1. Análisis de diferentes modelos de depredador presa más general.	35

3. Programación y simulación de los modelos	52
3.1. Elementos de MATLAB	52
3.1.1. Funcionamiento	53
3.1.2. Comandos a utilizar	54
3.2. Simulación teórica de los modelos	56
3.2.1. Modelo clásico con ajuste logístico	56
3.2.2. Modelo presas con refugios	71
3.2.3. Modelo de Leslie	85

Índice de símbolos

I : Intervalo.

t : Tiempo.

Φ : Solución del problema de Cauchy.

C^r : La función tiene r derivadas continuas.

\cap : Intersección de conjuntos.

\subset : Inclusión de conjuntos.

γ_{t_0} : Órbita asociada a un punto.

Ω : Conjunto abierto.

f : Función.

$\mathbf{Hess}(f(a))$: Matriz Hessiana de f en a .

H : Matriz simétrica $n \times n$.

λ : Autovalores.

Δ_k : Determinante de orden k .

$\det(H)$: Determinante de la matriz H .

∞ : Infinito.

Γ : Órbita periódica.

\mathbf{divB} : Divergente de \mathbf{B}

$J(x, y)$: Jacobiano (x, y) .

tr : Traza de la matriz.

\dot{x} : Derivada de una función con respecto al tiempo.

INTRODUCCIÓN

En la naturaleza como en el vida encontramos diferentes aplicaciones de situaciones matemáticas, entre ellas, la dinámica de poblaciones, esto nos lleva a estudiar con detenimiento una forma de poder describir como se desarrollan los fenómenos usando el modelaje matemático. Un modelo de un sistema biológico convertido a sistemas de ecuaciones, pretende describir cómo el sistema biológico se comporta con el transcurso del tiempo.

Uno de los modelos más conocidos y estudiados en matemáticas son las ecuaciones de Lotka-Volterra, creadas por el biofísico Alfred Lotka y el matemático Vito Volterra, quienes iniciaron sus estudios en el siglo XIX.

Este modelo se analiza a partir del modelo de Malthus que proyecta un crecimiento exponencial y el modelo logístico que amortigua el crecimiento exponencial con un término de competición o de fricción social proporcional al número de posibles encuentros entre individuos, esto pretende describir el cambio de una población a lo largo del tiempo que se considera aislada de los demás, luego se describe el modelo Depredador-Presa que se refiere a una interacción de dos especies, pero que igual lo supone de una forma ideal en donde las dos especies en cuestión están aisladas de las demás.

Así que agregando algunos factores que intervienen, se realizan tres posibles variantes para el modelo, el primero es el modelo clásico con ajuste logístico, el segundo es el modelo de presas con refugios y el tercero es el modelo de Leslie. Para analizar cada uno de estos modelos se ha trabajado la teoría básica y fundamental de sistemas dinámicos. Con la finalidad de complementar este estudio se han realizado algunas simulaciones teóricas de las tres variantes del modelo analizadas, reflejando diferentes situaciones en el comportamiento de las poblaciones.

Capítulo 1

Introducción a sistemas dinámicos

1

1.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales y concepto de solución

Es posible modelar una asombrosa variedad de procesos por medio de sistemas diferenciales de primer orden de ecuaciones diferenciales que tiene la forma normal:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

en las *variables de estado* x_1, x_2, \dots, x_n y la variable independiente t , que representa el tiempo. Las derivadas son con respecto al tiempo y se supone que las funciones de *tazas de cambio* f_i son funciones conocidas de tiempo y estado. Para abreviar, denotaremos $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ esto es, el vector cuyas componentes son las variables dependientes del sistema diferencial, y llamaremos f a la función vectorial (f_1, \dots, f_n) , donde cada una de las f_i está definida en un subconjunto abierto U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

¹Las definiciones, corolarios y teoremas de este capítulo se han obtenido de [1], [2], [3], [4],[5], [7]

Pueden darse condiciones iniciales a cada una de las variables de estado, así que tenemos el problema de valor inicial o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Un conjunto de funciones $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ definidas en un intervalo I de t que contiene a t_0 que satisface las ecuaciones del problema de valor inicial para toda t en I se llama *Solución*.

Formalmente tenemos que:

Definición 1.1.1 Una **solución** del problema (1.1) es una aplicación

$$t \mapsto \Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)),$$

definida en algún intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ con valores en \mathbb{R}^n y tal que satisface la ecuación diferencial original:

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = f_i(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ y $t \in I$.

Que en notación vectorial sería:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = f(t, \Phi(t))$$

Para asegurar la existencia de solución es útil conocer el *Teorema de existencia y unicidad*; que garantiza bajo ciertas condiciones de regularidad sobre la función f , que para cada condición inicial (t_0, x_0) existe una única solución local del problema (1.1).

Teorema 1.1.2 (de existencia y unicidad de solución) Sea f una función continua en el punto $(t_0, x_0) \in U$. Entonces, existe un entorno I_1 del punto t_0 , suficientemente pequeño, tal que ahí podemos asegurar la existencia de una solución, $\phi_1 : I_1 \mapsto \mathbb{R}^n$, del problema (1.1) que satisface la condición inicial $\phi_1(t_0) = x_0$.

Además, si f es de clase C^r , con $r \geq 1$ y $\phi_2 : I_2 \mapsto \mathbb{R}^n$ es también solución del

problema (1.1) satisfaciendo la misma condición inicial $\phi_2(t_0) = x_0$, entonces ambas funciones son iguales en los puntos comunes a los entornos I_1 e I_2 , es decir:

$$\phi_1(t) = \phi_2(t), \quad t \in I_3 = I_1 \cap I_2.$$

Observación:

Una solución del problema (1.1), no necesariamente existe para todos los valores de t ; no obstante, siempre existe un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ entorno del punto t_0 tal que es el mayor entorno de ese punto donde está definida la solución, en el sentido que sigue:

$$\text{Si } a \text{ es finito} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow a^+} |\phi(t)| = +\infty$$

$$\text{Si } b \text{ es finito} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow b^-} |\phi(t)| = +\infty$$

dicha solución recibirá el nombre de *solución maximal*.

1.1.1. Órbitas y Trayectorias

Definición 1.1.3 Sea $\phi(t; t_0, x_0)$ la solución del problema (1.1), definida en un intervalo maximal I .

- La gráfica de la función $\phi(t; t_0, x_0)$, es decir, el conjunto de puntos

$$\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x = \phi(t; t_0, x_0), t \in I\}$$

se llamará, **trayectoria** de la solución, y se denota por γ

- Aparecen también los conceptos de **semiórbita** positiva y negativa asociadas al punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ definidas como los conjuntos

$$\gamma_{t_0}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \phi(t; t_0, x_0), t \in I, t \geq t_0\}$$

$$\gamma_{t_0}^- = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \phi(t; t_0, x_0), t \in I, t \leq t_0\}$$

El concepto de órbita resulta pues inmediato

$$\gamma_{t_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \phi(t; t_0, x_0), t \in I, \}$$

Dicho de otro modo, la órbita viene dada por todos los puntos que la solución acaba por recorrer.

Observación: Hay mucha similitud y correspondencia entre las ideas de trayectoria y órbita, pero, de acuerdo con la definición, la órbita de un punto dado coincide con la proyección de la trayectoria sobre el espacio determinado por las variables dependientes.

1.1.2. Extremos relativos

Definición 1.1.4 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que f tiene un máximo relativo (respectivamente un mínimo relativo) en un punto a si $\exists \epsilon > 0$ tal que $f(a) \geq f(x) \forall x$ que verifique $|x - a| < \epsilon$ (respectivamente $f(a) \leq f(x) \forall x$). Si a es un máximo o un mínimo relativo se dice que a es un extremo relativo de f .

Definición 1.1.5 Sean $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, una función definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{a} \in \Omega$ tales que f es de clase C^2 en a . Llamaremos Matriz Hessiana de f en \mathbf{a} a la matriz:

$$Hess(f(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

La matriz Hessiana es una matriz simétrica y es la matriz asociada a la forma cuadrática $d^2 f$ en la base canónica.

Definición 1.1.6 Sea H una matriz simétrica $n \times n$ sean $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ sus autovalores.

Diremos que H es:

- Definida positiva si todos sus autovalores son estrictamente positivos, es decir si $\lambda_i > 0 \ i = 1, \dots, n$.
- Definida negativa si todos sus autovalores son estrictamente negativos, es decir, si $\lambda_i < 0 \ i = 1, \dots, n$.
- Semidefinida positiva si todos sus autovalores son positivos y algunos de ellos es 0, es decir, si $\lambda_i \geq 0 \ i = 1, \dots, n$ y existe al menos un j tal que $\lambda_j = 0$.

- *Semidefinida negativa si todos sus autovalores son negativos y alguno de ellos es 0, es decir, si $\lambda_i \leq 0 \ i = 1, \dots, n$ y existe al menos un j tal que $\lambda_j = 0$.*
- *Indefinida si tiene autovalores estrictamente positivos y autovalores estrictamente negativos.*

Definición 1.1.7 Criterio de Sylvester Sea H una matriz simétrica $n \times n$ y sea Δ_k el determinante de orden k que forman los elementos de las k primeras columnas de H (menor principal de orden k). Entonces

1. H es definida positiva si y solo si $\Delta_k > 0 \ \forall k = 1, \dots, n$, es decir,

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

2. H es definida negativa si y solo si $(-1)^k \Delta_k > 0 \ \forall k = 1, \dots, n$, es decir,

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Dicho de otra forma: H es definida negativa si y solo si los menores principales de orden impar son negativos y los de orden par son positivos.

3. Si no se verifica ninguna de las dos anteriores condiciones y $\det(H) \neq 0$ entonces H es indefinida.

Determinación de los extremos relativos.

Para la determinación de los los extremos relativos de una función lo primero que hay que obtener son los *puntos críticos*, es decir, los puntos que verifican

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i$$

Una vez obtenidos estos puntos se calcula el valor de la *matriz hessiana* de f en cada uno de ellos.

Definición 1.1.8 *Entonces:*

- *Si $Hess(f(a))$ es definida positiva entonces a es un mínimo relativo de f .*

- Si $Hess(f(a))$ es definida negativa entonces a es un máximo relativo de f .
- Si $Hess(f(a))$ es indefinida entonces a no es un extremo relativo de f .

Si la matriz hessiana es semidefinida no podemos asegurar nada sobre la existencia o no de extremo relativo en el punto.

1.2. Sistemas autónomos

Si $f(t, x)$ no depende explícitamente de t , el problema (1.1) se reducirá a la expresión:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Los sistemas como (1.2) serán llamados *sistemas autónomos*. En realidad, cualquier sistema que pueda escribirse como $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ se puede convertir fácilmente en un sistema autónomo sin más que considerar la variable temporal t como una nueva variable espacial. Bastaría, pues, escribir $x_{n+1} = t$, y el sistema resultaría en forma autónoma, como:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_{n+1}, x_1, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n, \\ \dot{x}_{n+1} = x_1. \end{cases} \quad (1.3)$$

y tener en cuenta que las órbitas de este sistema son las trayectorias del anterior.

1.2.1. Propiedades de las soluciones

El teorema de existencia y unicidad de solución, garantiza que dos trayectorias nunca puedan cortarse, sin embargo las órbitas correspondientes si pueden hacerlo. Lógicamente, si en nuestro recorrido sobre cada órbita alcanzamos dos veces el mismo punto, lo hacemos con un determinado desfase temporal y no tiene por que verse obligada la partícula a repetir ese mismo camino de forma periódica una y otra vez, en dicho punto las *trayectorias* se cruzarían.

No obstante, una consecuencia importante generada por los sistemas autónomos es que partículas que parten del mismo punto, pero con intervalos en tiempo entre ellas, recorren exactamente la misma órbita.

Teorema 1.2.1 *Supongamos condiciones adecuadas de regularidad en la función f del problema (1.2) para asegurar existencia y unicidad de solución para cada dato inicial (t_0, x_0) a partir del teorema (1.1.2).*

Si una partícula B comienza su movimiento, en un punto x_0 del espacio, T segundos más tarde de que lo haya hecho una partícula A , ambas recorren exactamente el mismo camino pero manteniendo un desfase de T segundos.

Definición 1.2.2 Sea $\phi(t)$ una solución del problema de valores iniciales (1.2).

- Si la función $\phi(t) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, entonces x_0 será llamado punto **de equilibrio**, o bien punto fijo, estacionario, de reposo, o nodo,... y la función $\phi(t) = x_0$ será la correspondiente **solución de equilibrio**.
- Si la solución del sistema (1.2) verifica una determinada condición de periodicidad, es decir,

$$\phi(0) = \phi(T) = x_0 \text{ para algún } T > 0$$

$$\phi(t) = \phi(t + T) \text{ para } t \in (0, T)$$

$$\text{pero } \exists t \in (0, T) \text{ tal que } \phi(t) \neq x_0,$$

Diremos que $\phi(t)$ es una **solución periódica** de la ecuación y llamaremos **período** de dicha solución al menor valor T que verifique la condición antes expuesta.

La trayectoria asociada a los puntos de equilibrio es una función constante.

Estos puntos son las órbitas de las soluciones correspondientes y se encontrarán resolviendo el sistema $f(x) = 0$ que nos calcula los puntos de velocidad nula. Si la solución es periódica la trayectoria correspondiente se traducirá como una curva que siempre oscila con la misma amplitud. La órbita asociada es una curva cerrada.

Además, si la solución referida no se ajusta a ninguno de los tipos anteriores siempre podemos, al menos, asegurar que la aplicación $t \mapsto \phi(t)$ es inyectiva, es decir, las órbitas nunca se cortan a sí mismas.

1.2.2. Sistemas dinámicos

Llamamos *sistema dinámico* a una terna (X, T, ϕ) que consiste en un *espacio de fases* X , un *conjunto de tiempos* T y un *flujo u operador de evolución*

$\phi : T \times X \rightarrow X$ verificando las siguientes propiedades:

- I) X es un espacio métrico, T es un subgrupo aditivo de \mathbb{R} (es decir, $0 \in T$ y si $t, s \in T$ entonces $t + s \in T$ y ϕ es una aplicación continua).
- II) $\phi(0, x_0) = x_0 \forall x_0 \in X$
- III) $\phi(t, \phi(s, x_0)) = \phi(t + s, x_0) \forall t, s \in T, \wedge x_0 \in X$

1.3. Estabilidad en las soluciones

Supongamos que $\phi(t; t_0, x_0)$ una solución del problema de valores iniciales (1.1) que está definida para todo $t \geq t_0$

Definición 1.3.1 Diremos que $\phi(t; t_0, x_0)$ es una **solución estable** si:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que, si $|x'_0 - x_0| < \delta$, $\phi(t; t_0, x'_0)$ existe, está definida para $t \geq t_0$ y verifica que $|\phi(t; t_0, x'_0) - \phi(t; t_0, x_0)| < \epsilon$ para $t \geq t_0$. Si la solución no verifica esta condición se dice que es **inestable**, es decir, si existe un $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ es posible encontrar un x'_0 tal que $|x'_0 - x_0| < \delta$, pero $|\phi(t_1; t_0, x'_0) - \phi(t_1; t_0, x_0)| \geq \epsilon$, para algún $t_1 > t_0$.

Asimismo, diremos que $\phi(t; t_0, x_0)$ es **asintóticamente estable** si es estable y, además, existe un $\eta > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t; t_0, x'_0) - \phi(t; t_0, x_0)| = 0$ cuando $|x'_0 - x_0| < \eta$.

Un concepto de estabilidad de puntos fijos o estabilidad en el sentido de Lyapunov es el siguiente:

Teorema 1.3.2 .

1. Un punto fijo x_0 del sistema (1.2) se llamará **estable o foco** si, para cualquier entorno N de x_0 , existe N' , $N \subset N'$, tal que cualquier órbita que pase por N' permanece en N a medida que t aumenta.

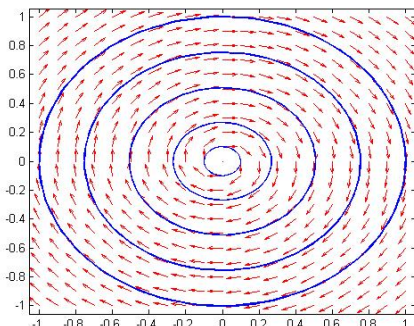


Figura 1.1: Punto fijo estable.

2. Un punto fijo x_0 del sistema (1.2) se llamará **asintóticamente estable o atractor** si es estable y existe un entorno N de x_0 tal que cualquier órbita que pase por N se acerca a x_0 cuando $t \rightarrow \infty$.

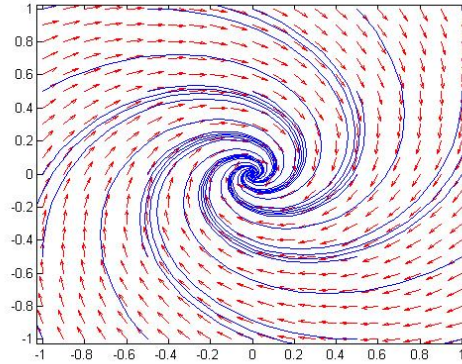


Figura 1.2: Punto fijo asintóticamente estable.

3. De un punto fijo del sistema (1.2) que no es estable, se dirá que es **inestable o repulsor**.

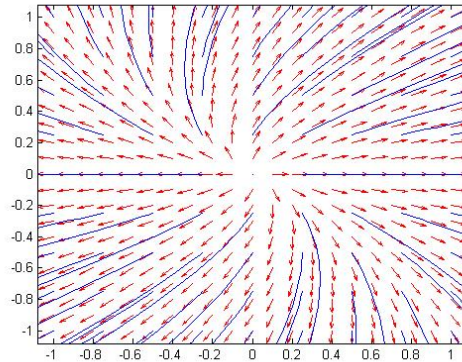


Figura 1.3: Punto fijo inestable.

Resulta lógico plantearse el análisis de la estabilidad de una solución de un sistema autónomo a partir de la estabilidad de la solución idénticamente nula en un sistema del tipo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (1.4)$$

en donde x denota un vector n -dimensional cuyas componentes son las n variables de estado del sistema y f es asimismo una función vectorial con n componentes.

Suponiendo que x_0 es la órbita asociada a una solución estacionaria del sistema (1.4).

Podemos determinar el comportamiento de las órbitas alrededor de dicho punto.

Si f es lineal, no hay problema. si no lo es, consideramos en lugar de $f(x)$, la expresión obtenida al aplicar la fórmula de Taylor a dicha función en un entorno de x_0 (suponemos las condiciones de regularidad suficientes).

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + D^2f(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

Para que la aproximación sea de carácter lineal, truncamos ese desarrollo infinito eliminando los términos de orden superior a la unidad.

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

Como x_0 es un punto de equilibrio del sistema, $f(x_0) = 0$ y efectuando un cambio de variables (una traslación de ejes) para situar el origen del sistema de coordenadas sobre el punto de equilibrio x_0 , podemos escribir el sistema lineal:

$$\frac{dx}{dt} = Df(x_0)x, \quad (1.5)$$

donde seguimos llamando x al vector de variables de estado una vez realizado el cambio. Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación variacional*. La matriz de este sistema $Df(x_0)x$ no es más que la matriz de las derivadas de primer orden, *matriz jacobiana*, de la función $f(x)$, calculada en el punto x_0 .

Teorema 1.3.3 (de Hartman-Grobman) *Si, en las condiciones anteriores, $\det [Df(x_0)] \neq 0$ y $Df(x_0)$ no tiene autovalores con parte imaginaria nula, entonces existe un homeomorfismo h definido en algún entorno V de x_0 y con valores en \mathbb{R}^n , que transforman las órbitas de la ecuación (1.4) en las órbitas de (1.5). Este homeomorfismo puede ser elegido de forma que conserve el sentido de las órbitas y la parametrización del tiempo.*

Como consecuencia del teorema de Hartman-Grobman, se verifica el siguiente teorema:

Teorema 1.3.4 .

1. Sea $f \in C^1$. Si x_0 es un punto de equilibrio del sistema (1.2) y, además, $Df(x_0)$ es una matriz que no tiene autovalores con parte real nula entonces la solución $\phi(t) \equiv x_0$ de (1.2) es asintóticamente estable (respectivamente inestable) si y sólo si la solución correspondiente al sistema lineal (1.5) es asintóticamente estable (respectivamente inestable).
2. Sea $f \in C^1$. Si, al menos, uno de los autovalores de la matriz jacobiana $Df(x_0)$ tiene parte real positiva, entonces el punto de equilibrio x_0 del sistema de ecuaciones diferenciales (1.4) es inestable.

El teorema anterior está enunciado para una dimension arbitraria n , pero resulta más sencillo si nos limitamos al caso plano, donde, los autovalores de la matriz de coeficientes quedan determinados a partir de su traza y su determinante.

Es decir, si el sistema es de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

De donde la matriz de coeficientes asociadas sería:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico resulta de la ecuación $\det(A - \lambda I)$, es decir:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

O, lo que es lo mismo, si $tr A$ representa la traza de la matriz y $\det A$ su determinante, entonces: $\lambda^2 - tr A \lambda + \det A = 0$, los autovalores asociados serán:

$$\frac{1}{2} \left(tr A \pm \sqrt{\Delta} \right)$$

, donde Δ , corresponde al discriminante de esa ecuación y tiene la expresión:

$$\Delta = (tr A)^2 - 4\det A.$$

De estos resultados se obtiene que los autovalores reales corresponden a matrices que satisfacen la desigualdad $\Delta \geq 0$. Los que poseen parte real negativa han de verificar que $\text{tr } A < 0$. Si $\det A$ es negativo, necesariamente los dos autovalores son reales y con signos opuestos

Corolario 1.3.5 *Si tenemos dimensión $n = 2$, una condición suficiente para asegurar la estabilidad asintótica de un punto de equilibrio en un sistema autónomo, es que una matriz jacobiana del sistema tenga traza negativa y determinante positivo.*

Un teorema que establece el carácter estable de un punto de equilibrio asociado a una ecuación diferencial unidimensional es:

Corolario 1.3.6 *(Teorema de estabilidad lineal)*

Sea $n = 1$ y supongamos $f \in C^1$ y x_0 un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, esto es, $f(x_0) = 0$. Supongamos también, que $f'(x_0) \neq 0$. Entonces, el punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable si $f'(x_0) < 0$ y es inestable si $f'(x_0) > 0$

1.4. Comportamiento asintótico de las soluciones.

En algunas ocasiones es conveniente analizar el *comportamiento asintótico de las soluciones*, es decir, cuando se estudian las soluciones de un sistema autónomo que están definidas para todo $t \in \mathbb{R}^+$ (o para todo $t \in \mathbb{R}^-$) observando su comportamiento para valores de t *próximos* a $+\infty$ (a $-\infty$, respectivamente) puesto que el sistema nos ofrece la posibilidad de predecir qué ocurrirá cuando pase un intervalo de *tiempo* conveniente.

Los aspectos asintóticos de una solución se enmarcan dentro del estudio de los denominados ω -límites asociados a cualquier punto del plano de fases.

Definición 1.4.1 Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo válido en alguna región de \mathbb{R}^n y sea $x(t) = \phi(t; t_0, x_0)$ una solución de la ecuación que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

- El **conjunto α -límite** de x_0 está formado por todos los puntos de acumulación del conjunto $\{\phi(t; t_0, x_0) : t \leq 0\}$, es decir,

$$\alpha(x_0) = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \rightarrow -\infty / \phi(t; t_0, x_0) \rightarrow z\}.$$

- El **conjunto ω -límite** de x_0 está formado por todos los puntos de acumulación del conjunto $\{\phi(t; t_0, x_0) : t \geq 0\}$, es decir,

$$\omega(x_0) = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \rightarrow +\infty / \phi(t; t_0, x_0) \rightarrow z\}.$$

Los puntos de estos conjuntos tienen la propiedad de que cualquier entorno de ellos es "visitado" por la solución infinitas veces. Por supuesto, puede producirse, el vacío.

Definición 1.4.2 Una región $D \subset \mathbb{R}^2$ es *positivamente invariante* para el flujo asociado a la ecuación (1.4) si, para cualquier dato inicial $\mathbf{X}_0 \in D$, la órbita positiva $\gamma^+(\mathbf{X}_0) \subset D$.

Alguna de las propiedades de los conjuntos ω -límites:

Proposición 1.4.1 .

1. Para cualquier punto z de la órbita de x_0 se verifica que $\omega(x_0) = \omega(z)$.
2. Los conjuntos ω -límites son cerrados y pueden ser descritos como:

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t \geq t_0} \overline{\{\phi(s; t_0, x_0) : s \geq t\}}$$

3. El conjunto $\omega(x_0)$ es invariante, es decir, es unión de órbitas (la órbita de cualquier solución que comience a ser descrita a partir de un punto del conjunto ω -límite, permanece siempre dentro de dicho conjunto).
4. Se puede probar fácilmente que $\omega(x_0)$ es un conjunto conexo por arcos, es decir; dos puntos cualesquiera del conjunto se pueden unir con una línea totalmente contenida en dicho conjunto.

En el estudio de los conjuntos ω -límites en algunas ocasiones es posible determinar algunas de las propiedades de las soluciones sin necesidad de calcularlas.

1.4.1. Ciclos Límite

Un enunciado fundamental del análisis matemático es el llamado teorema de la curva de Jordan.

Teorema 1.4.3 *Toda curva γ cerrada y simple, en el plano, divide a éste en dos conjuntos conexos disjuntos.*

Estos conjuntos suelen denominarse *interior* y *exterior*, respectivamente. El enunciado nos indica que: dos puntos cualesquiera del interior (o del exterior) a la curva pueden unirse por un arco que no corta a la curva γ . Sin embargo, si se pretende un punto del interior con uno del exterior mediante un arco, necesariamente ese arco corta a γ .

Definición 1.4.4 Una órbita cerrada Γ será llamada **ciclo límite** si hay dos puntos en \mathbb{R}^2 , uno en el interior de γ y otro en el exterior, tales que los conjuntos α -límite o ω -límite de las órbitas que construidas a partir de esos puntos coinciden, precisamente, con la órbita periódica Γ

Definición 1.4.5 Una órbita periódica Γ de un sistema autónomo plano (1.4) es **orbitalmente estable** si para cada $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $d(\mathbf{X}_0, \Gamma) < \delta$ y que verifica que $d(\phi(t, \mathbf{X}_0), \Gamma) < \epsilon$, para cualquier $t \geq 0$.

Γ se dirá **orbitalmente inestable** si no es orbitalmente estable.

Si el ciclo límite Γ verifica la igualdad $\Gamma = \omega(x_0)$ para cada punto x_0 de un entorno de Γ , entonces diremos que es un *atractor periódico*. O sea, las órbitas se ciñen al ciclo formando espirales que se acercan a él desde ambos lados. Por otra parte, si las espirales se alejan de él, el ciclo se denomina *repulsor*. Si las órbitas tienden a acercarse al ciclo por uno de sus lados, pero se ven rechazadas por el otro, el ciclo recibe el nombre de *semiestable*.

Teorema 1.4.6 (de Poincaré-Bendixson) En el contexto que ya hemos definido, sea $D \in \mathbb{R}^2$ una región positivamente invariante que contiene un número finito de puntos de equilibrio. Sea $\mathbf{X}^0 \in D$ y consideremos $\omega(\mathbf{X}^0)$. Entonces se satisface una de las siguientes condiciones.

1. $\omega(\mathbf{X}^0)$ es un punto fijo;
2. $\omega(\mathbf{X}^0)$ es una órbita cerrada;
3. $\omega(\mathbf{X}^0)$ consiste en un número finito de puntos de equilibrio x_1, x_2, \dots, x_n y órbitas γ con $\alpha(\gamma) = x_i$ y $\omega(\gamma) = x_j$

Para usar el teorema de Poincaré-Bendixson con el objetivo de probar la existencia de una órbita periódica no trivial en un determinado problema, tenemos que construir un recinto abierto y acotado $D \subset \mathbb{R}^2$, que no contenga puntos de equilibrio estables, tal que toda la solución que comience en D permanezca allí para toda $t \geq 0$ (esto es, un abierto acotado positivamente invariante). Se puede comprobar que para cualquier

$\mathbf{X}^0 = (x_0, y_0) \in D$, $\omega(\mathbf{X}^0)$ no contiene puntos que pertenezcan a la frontera de D . Como partimos de que D no contiene puntos de equilibrio, podemos deducir que $\omega(\mathbf{X}^0)$ es necesariamente una órbita periódica.

En general la aplicación de este teorema no es fácil, ya que la construcción de un abierto D con las propiedades descritas no es algo evidente, y además, tampoco asegura la existencia del ciclo límite.

A veces, es útil conocer si el sistema considerado tiene o no órbitas periódicas.

Teorema 1.4.7 (Criterio de Bendixson) *Sea D un abierto acotado, simplemente conexo. Si $\operatorname{div} \mathbf{f} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ es de signo constante y no es idénticamente nula en D , entonces el sistema (1.4) no tiene órbitas periódicas que permanezcan por completo en D .*

Como una generalización de este resultado, aparece el criterio de Dulac.

Teorema 1.4.8 (Criterio de Dulac) *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo y sea $B(x, y)$ una función $C^1(D)$ que solo toma valores reales. Si la función $\operatorname{div} \mathbf{Bf} \equiv \frac{\partial(B f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(B f_2)}{\partial y}$ es de signo constante y no es idénticamente cero en D , entonces el sistema (1.4) no tiene órbitas periódicas que permanezcan por completo en la región D .*

La función B se denomina función de Dulac. Cuando $B(x, y) = 1$, este criterio se reduce al de Bendixson.

Un teorema de tipo geométrico que relaciona las órbitas periódicas y los puntos de equilibrio en una región del plano, es el siguiente:

Teorema 1.4.9 *Sea D una región de \mathbb{R}^2 donde podemos asegurar la existencia de una órbita periódica Γ , tal que la región H que define su interior está totalmente contenida en D . Entonces, en H debe existir un punto de equilibrio.*

1.5. Ejemplos de modelos unidimensionales

1.5.1. Modelo de Malthus

El modelo de Malthus se basa en la suposición de que la especie no posee influencias externas, de forma que, los únicos cambios que se producen se deben a los nacimientos y a las muertes. El término correspondiente al factor de migración sería nulo. En esta situación la ley de crecimiento de la especie viene dada por:

$$\dot{x}(t) = ax - bx \quad (1.6)$$

Donde a representa la tasa de natalidad y b representa la tasa de mortalidad.

Esta ecuación tiene por única solución, bajo la condición inicial $x(0) = x_0$, la ecuación que resulta ser:

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)t}$$

Las diferentes posibilidades vienen descritas en la siguiente figura:

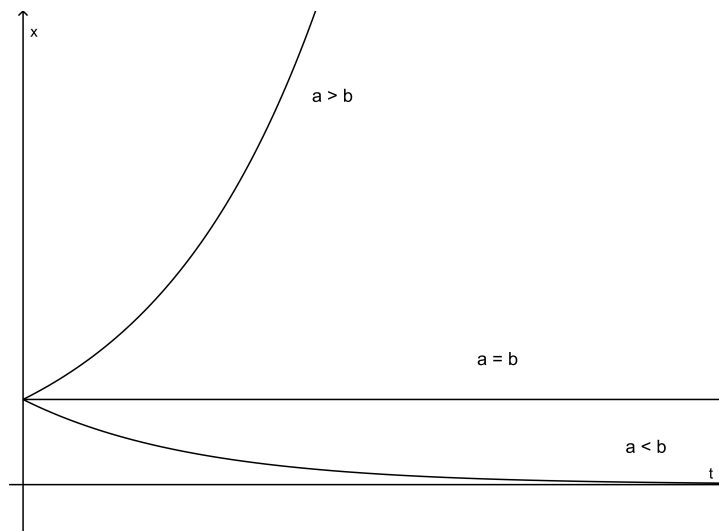


Figura 1.4: Comportamiento de las soluciones de acuerdo al modelo de Malthus.

Dependiendo del signo de la diferencia de $a - b$, así la función de tipo exponencial evoluciona de forma distinta:

- Si $a > b$, la gráfica crece indefinidamente hasta infinito,

- Si $a = b$, la gráfica es constante igual a x_0 , y
- Si $a < b$, la gráfica decrece hacia 0.

Por tanto, si la tasa de nacimientos supera a la de defunciones, el tamaño de la población crece exponencialmente en tiempo, mientras que si la tasa de defunciones supera a la de nacimientos la población se extingue, tiende a su desaparición.

El modelo Malthusiano ha sido utilizado como un referente en demografía, pero debemos tener en cuenta lo siguiente:

- El modelo supone que la probabilidad que un individuo se reproduzca o muera es constante.
- Un crecimiento o decrecimiento exponencial, no resulta realista, pues a medida que la población aumenta los recursos disminuyen, lo que conlleva a una menor tasa de crecimiento.
- El crecimiento de cualquier población está limitada por las restricciones del medio ambiente y la escasez de recursos.

1.5.2. Modelo Logístico

El modelo logístico introduce una regulación de la densidad, que postula una tasa de crecimiento relativo variable, es aquel en el que la tasa decrece linealmente como función de $x(t)$. La ecuación que representa esta situación esta dada por:

$$\frac{\dot{x}}{x} = a - bx \rightarrow \dot{x} = ax - bx^2$$

siendo a y b constantes positivas. Este modelo describe un proceso que depende de la posibilidad de encuentro entre los miembros de la especie, siendo este un factor que reduce el crecimiento previsto a partir de la tasa de reproducción.

Si $a \neq 0$, la ecuación queda escrita de una forma más conveniente. Así si elegimos $r = a$ y $K = \frac{a}{b}$ tenemos:

$$\dot{x}(t) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (1.7)$$

Observamos que el segundo miembro es una parábola abierta hacia abajo, que alcanza su punto máximo en las coordenadas $(\frac{K}{2}, \frac{rK}{4})$.

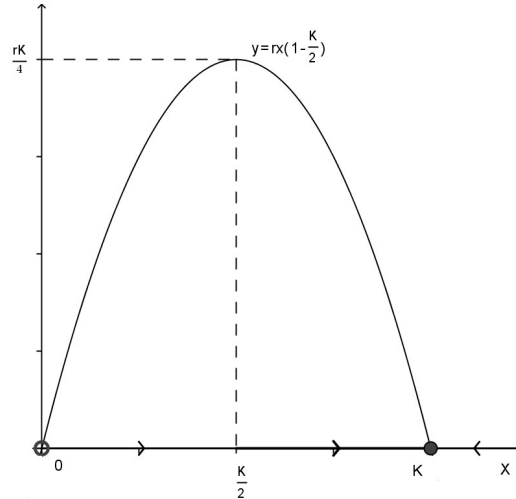


Figura 1.5: Parábola que marca el crecimiento absoluto del modelo logístico.

La ecuación anteriormente descrita suele denominarse como *ley de crecimiento logístico o ecuación logística* y fue introducida por primera vez por el matemático y biólogo holandés P. F. Verhulst.

En ella se observa que el crecimiento exponencial dado por el factor $rx(t)$, es amortiguado por el término $\frac{rx^2}{4}$ que, de alguna manera, es un término de competición o de fricción social proporcional al número de posibles encuentros entre individuos. Podríamos decir que r representa la tasa de reproducción potencial en ausencia de elementos inhibitorios como las limitaciones medioambientales. Al analizar el signo del miembro derecho de la ecuación (1.7), una población que inicialmente tiene menos de K individuos ($x_0 < K$) crece indefinidamente pero no llega a alcanzar ese valor (pues en ese instante $\dot{x}(t) = 0$). Análogamente, si $x_0 > K$ la población decrece indefinidamente pero nunca alcanza el valor de K . (Obsérvese la figura 1.6)

Recordemos que en el modelo malthusiano las soluciones presentan un comportamiento exponencial en cambio en el modelo logístico son acotadas, tendiendo hacia K , el nivel de saturación o capacidad máxima del medio vendrá determinada por la cantidad de elementos, de espacio, de depredadores presentes en el habitat y otras

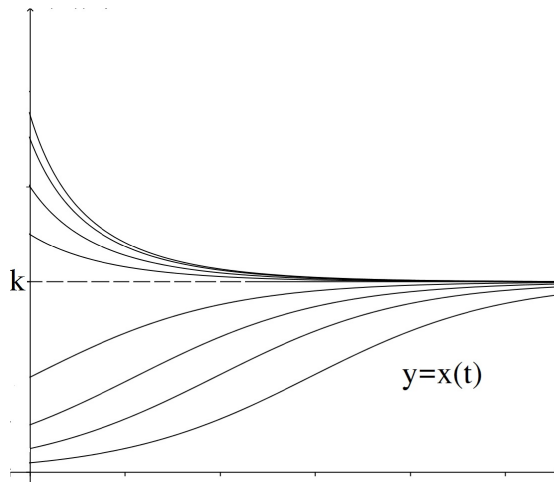


Figura 1.6: Soluciones a la ecuación logística

causas. El comportamiento de las soluciones de la ecuación logística se puede detallar encontrando las soluciones con el método de separación de variables de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{x(K-x)} = \frac{r}{K} dt$$

integrando se obtiene:

$$\ln|x| - \ln|x-K| = rt + c \quad (1.8)$$

donde c es una constante arbitraria que quedará determinada a partir de la condición inicial $x(0) = x_0$, obtenida experimentalmente, que suele acompañar a la ecuación (1.7). La principal dificultad a la que nos enfrentamos a la hora de intentar obtener una fórmula explícita que describa el comportamiento de la población en un instante de tiempo arbitrario t es la presencia de la función valor absoluto. En $\ln|x|$ no ofrece ningún problema ya que estamos suponiendo que, gracias a la interpretación del problema, $x(t) > 0$ para cualquier instante de tiempo. En cambio, vamos a tener que distinguir dos casos para que $\ln|x-K|$ esté siempre bien definido.

(i) Si $x > K$, entonces la expresión (1.8) se escribiría como

$$\ln\left(\frac{x}{x-K}\right) = rt + c.$$

Y, despejando la variable x , obtenemos:

$$x(t) = \frac{K}{1 - ce^{-rt}},$$

donde la constante c queda determinada a partir del dato inicial, $c = 1 - \frac{K}{x_0}$.

(ii) Si $x < K$, (1.8) se escribe como

$$\ln\left(\frac{x}{K-x}\right) = rt + c,$$

y las soluciones asociadas

$$x(t) = \frac{K}{1 + ce^{-rt}},$$

con $c = 1 + \frac{K}{x_0}$.

Se concluye que, en cualquier caso, las soluciones de la ecuación logística se pueden escribir como:

$$x(t) = \frac{Kx_0e^{rt}}{K + x_0(e^{rt}-1)} \quad (1.9)$$

Las curvas asociadas a las soluciones, dependiendo del valor de x_0 son las que aparecen en la figura (1.6).

Hay dos soluciones constantes $x(t) = 0$ y la $x(t) = K$. Las soluciones del tipo (1.9) normalmente se llaman de crecimiento logístico, curvas logísticas o sigmoides.

Capítulo 2

Modelos depredador - presa

1

2.1. Análisis del modelo clásico Lotka - Volterra

Sea $x(t)$ e $y(t)$ el tamaño, densidad de población o concentración de dos especies existentes que interactúan. En general, el sistema que describe esta situación corresponderá a uno del tipo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde f y g describen el crecimiento de cada una de las especies y no dependen de forma explícita del tiempo sino del tamaño de la población en un instante determinado de tiempo.

En el modelo clásico de Lotka-Volterra se considera un hábitat en donde coexisten dos especies que interactúan entre ellas. La especie $x(t)$ se le llamará presa y tiene una fuente de alimentación por la que no compite la otra especie $y(t)$, a la que llamaremos depredador; pero en cambio ésta tiene a $x(t)$ en su dieta. De esta forma, $x(t)$

¹Las hipótesis de los modelos y definiciones de este capítulo se han obtenido de [3], [5], [10] y [11]

representa el número de presas en el instante t , mientras que $y(t)$ indica la cantidad de depredadores en ese mismo momento.

Hipótesis más simples del problema depredador presa.

- Las presas, en ausencia de cualquier depredador, evolucionan de una forma natural siguiendo un modelo continuo unidimensional. En este caso se puede suponer que las presas tienen una tasa de crecimiento constante e igual a $a > 0$.

$$x'(t) = ax(t)$$

- Si hay presencia de depredador la tasa de crecimiento percapita tendrá una reducción en una cantidad proporcional a la población de depredadores en cada instante.

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$$

- Si no hay presas, los depredadores morirán con una tasa de mortalidad relativa constante $c > 0$.

$$y'(t) = -cy(t)$$

- La contribución de las presas a la tasa de crecimiento relativa de los depredadores es proporcional a la cantidad de presas en dicho momento.

$$y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

Con base en las hipótesis anteriores el modelo de Lotka - Volterra resulta como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \quad (2.2)$$

donde los parámetros a, b, c , y d son constantes positivas. Estas son las ecuaciones de Lotka-Volterra, que fueron propuestas por Volterra en el año 1926 para explicar las oscilaciones encontradas en el volumen de pesca de ciertas especies de peces en el mar adriático. También Lotka había estudiado estas ecuaciones para explicar las oscilaciones observadas en cierta reacción química.

2.1.1. Análisis del modelo

Buscamos, por tanto, funciones $(x(t), y(t))$ que sean solución del sistema de ecuaciones (2.2). Obviamente, esta solución dependerá de la cantidad inicial presente de depredadores y presa, es decir, de $(x(0), y(0))$. No obstante, estudiando la ecuación, podemos obtener ya algunas soluciones particulares de esta.

- Si suponemos que no están presente individuos de ninguna de las dos especies involucradas en el modelo, $x(t) = y(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ tendríamos, que la órbita de la solución trivial se reduce a un solo punto que es el origen.
- Si suponemos que la población de presas se reduce a cero, $x(t) = 0$, el sistema ligado al modelo se transforma en una ecuación lineal y corresponde a un modelo de crecimiento de tipo exponencial decreciente, con lo que $y(t) = y(0)e^{-ct}$, $t \in \mathbb{R}$, siendo $y(0)$ una constante mayor que cero que indica el tamaño inicial de la población de depredadores. La trayectoria solución sobre el plano de fases describiría el segmento situado sobre el eje de coordenadas, recorrida con origen en el punto $y(0)$ y hacia abajo, tendiendo a llegar al origen.
- Si no hay depredadores, $y(t) = 0$, observamos que la evolución de la población de presas se ajustaría a un modelo malthusiano de crecimiento. De este modo las funciones, $x(t) = x(0)e^{at}, y(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, son la pareja de soluciones del sistema diferencial planteado, siendo $x(t) > 0$ el tamaño inicial de la población de presas. La trayectoria recorrida sobre el plano de fases es una semirrecta localizada esta vez sobre el eje de abscisas, cuyo origen es el punto $x(0)$, y que recorre en el sentido positivo de dicho eje.

2.1.2. Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio en este sistema son en las que la variación de la densidad de la población es nula. Para calcular los puntos de equilibrios se resuelve el siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 \\ -cy + dxy = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Por tanto, los únicos puntos de equilibrio son el $O = (0, 0)$ y el $P = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

Analizando el punto $O = (0, 0)$ se tiene que

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

Cuya matriz asociada es

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

Segun la matriz se tienen los autovalores $\lambda_1 = a > 0$ y $\lambda_2 = -c < 0$ por lo que el punto de equilibrio es un nodo inestable en otras palabras es un punto de silla.

Analizando el punto $P = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ para ello se realiza un cambio de variable

$$\begin{cases} u = x - \frac{c}{d} \\ v = y - \frac{a}{b} \end{cases} \quad (2.4)$$

Esto es para situar el origen de coordenadas en el punto P , y se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -b\frac{c}{d}v - buv \\ \frac{dv}{dt} = d\frac{a}{b} + duv \end{cases} \quad (2.5)$$

donde ahora se tiene que $(0, 0)$ es punto de equilibrio y se tiene

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -bv & -b\frac{c}{d} - bu \\ d\frac{a}{b} + dv & du \end{pmatrix} \Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -b\frac{c}{d} \\ d\frac{a}{b} + dv & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz se obtienen al resolver el polinomio $\lambda^2 + ac = 0$ y resulta $\lambda = \pm\sqrt{ac}i$ por lo que en este caso no se puede aplicar el teorema de *Hartman-Grobman* y determinar el tipo de punto, ya que en el sistema linealizado hay un centro. En cambio, el sistema no lineal puede tener trayectorias que convergen en espiral al equilibrio o fuera de él, dependiendo de los términos de orden superior.

2.1.3. Analizando el punto P utilizando una función Lyapunov del sistema

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(E)$ y

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x(0) = x_0 \quad (2.6)$$

Una solución de la ecuación (2.6), es una función $\phi_t(x_0) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en una vecindad de cero, tal que $\phi_0(x_0) = x_0$ y $\frac{d}{dt}(\phi_t(x_0)) = f(\phi_t(x_0))$.

Si $V \in C^1(E)$ definimos la derivada de V a lo largo de las soluciones $\phi_t(x)$ como, $\frac{d}{dt}V(\phi_t(x))|_{t=0} = \dot{V} = DV(x) \cdot f(x)$.

Sea x_0 un punto de equilibrio de (2.6) y $V \in C^1(E)$ tal que:

1. $V(x_0) = 0$
2. $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$

Cuando $\dot{V} \leq 0$ para todo $x \in E$ ó $\dot{V} > 0$ para todo $x \in E - \{x_0\}$ decimos que V es una función de Lyapunov para (2.6) en E .

Sea x_0 un punto de equilibrio de (2.6) y V una función de Lyapunov, entonces x_0 es estable.

Con la finalidad de construir una función de Lyapunov para el sistema de (2.2), proponemos una función H como suma de dos funciones

$$H(x, y) = F(x) + G(y)$$

.

Se calculará como debe de ser G y F de tal manera que H satisfaga las condiciones sobre la derivada para ser una función de Lyapunov.

Calculamos la derivada de H a lo largo del sistema (2.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) &= \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dG}{dy} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{dF}{dx}(ax - bxy) + \frac{dG}{dy}(-cy + dxy) \\ &= x \frac{dF}{dx}(a - by) + y \frac{dG}{dy}(dx - c) \end{aligned}$$

Para que las soluciones de (2.2) vivan en las curvas de nivel de H se debe cumplir

$$\frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) = 0 \rightarrow x \frac{dF}{dx}(a - by) + y \frac{dG}{dy}(dx - c) = 0$$

Al separar las variables x y y se tiene:

$$\frac{x \frac{dF}{dx}}{dx - c} = \frac{y \frac{dG}{dy}}{by - a} \quad (2.7)$$

Como x y y son variables independientes la ecuación (2.7) se tiene, si y solo si

$$\frac{x \frac{dF}{dx}}{dx - c} = \frac{y \frac{dG}{dy}}{by - a} = cte.$$

Como la constante puede ser uno se tiene:

$$\frac{x \frac{dF}{dx}}{dx - c} = 1 \rightarrow F = dx - c \ln x$$

y

$$\frac{y \frac{dG}{dy}}{by - a} = 1 \rightarrow G = by - a \ln y$$

Por lo que H es de la forma

$$H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y$$

y esta definida para $x > 0$ y $y > 0$

A partir de H buscamos proponer una función de Lyapunov, por lo que es necesario determinar los puntos críticos de H . Como,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right) = (0, 0) = \left(d - \frac{c}{x}, b - \frac{a}{y} \right)$$

donde se tiene que es el mismo punto crítico para el sistema (2.2) $P = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right)$.

Para demostrar que P es un mínimo es suficiente checar que la matriz hessiana de H en P es definida positiva por definición.

$$Hess(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \rightarrow Hess(H) = \begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix}$$

de aquí se tiene

$$Hess(H(P)) = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{c} & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

Como $\frac{d^2}{c} > 0$ y $det(Hess(H(P))) > 0$, tenemos que H tiene un mínimo en P

Si $m = H(P) = a + c - c \ln \frac{c}{d} - a \ln \frac{a}{b}$, entonces la función $V(x, y) = H(x, y) - m$ es una función de Lyapunov en el primer cuadrante para el sistema (2.2). Por tanto, el punto de equilibrio P es estable.

2.2. Soluciones no estacionarias al modelo Lotka - Volterra

Para describir el comportamiento vamos a reducir el sistema a una ecuación en la que y es una variable que tan solo depende de forma explícita de x . Las curvas $y(t)$, soluciones de esta ecuación vendrían asociadas a las órbitas del sistema y de su representación gráfica.

Se divide la segunda ecuación del sistema (2.2) por la primera se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(dx - c)}{x(a - by)}$$

esta ecuación es de variables separables y se puede integrar de forma inmediata obteniendo

$$by - a \log y = dx - c \log x + C$$

Por tanto se puede expresar así:

$$\frac{y^a}{e^{by}} \frac{x^c}{e^{dx}} = e^C = C \quad (2.8)$$

Si se grafica

$$z = x^c y^a e^{-(by+dx)}$$

se obtiene una superficie tridimensional (ver figura 2.1).

Si se hacen diferentes cortes de esta superficie on valores de z constantes se obtiene la figura (2.2):

Por tanto, dado unos valores iniciales se calcula la constante C y la solución está sobre la curva dada por la ecuación (2.8). Un análisis detallado de las curvas dadas por la ecuación (2.8) en el plano (x, y) revela que todas ellas son curvas cerradas alrededor del punto de equilibrio $(P = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b}))$.

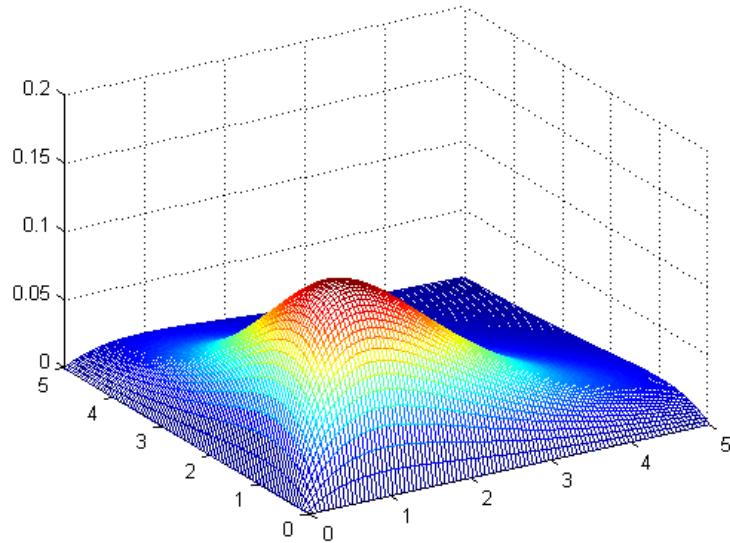


Figura 2.1: Superficie tridimensional asociada al sistema de Lotka-Volterra.

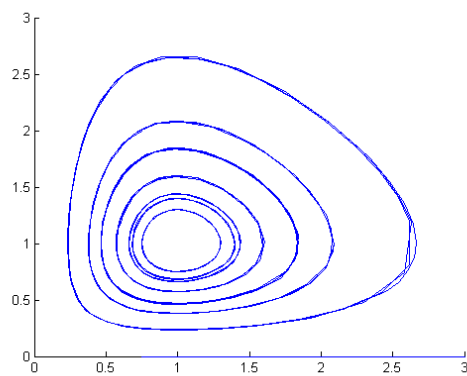


Figura 2.2: Curvas de nivel donde a, b, c y d son igual a uno.

En la siguiente figura aparecen algunas de las órbitas representadas en el correspondiente plano de fases.

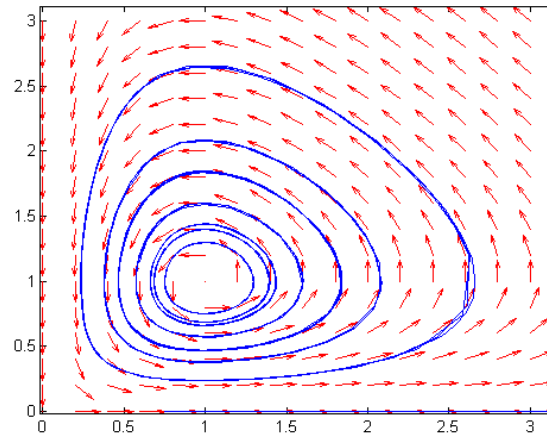


Figura 2.3: Diagrama de fases del modelo donde a, b, c y d iguales a uno.

Estas órbitas son las asociadas a las curvas que dibujan las soluciones ligadas a determinadas condiciones iniciales. (Ver figura 2.4)

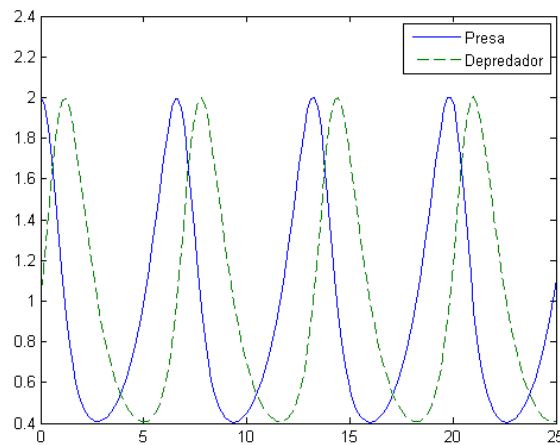


Figura 2.4: Gráfica de las soluciones del sistema de Lotka-Volterra

Hay algunas propiedades importantes que Volterra descubrió:

1. *La llamada Ley de la periodicidad de Volterra* que dice que el cambio de los tamaños poblacionales de las dos especies (depredadores y presas) son periódicos, pero con distinta fase (Ver figura 2.4).
2. *La Ley de Conservación de los promedios*, lo que nos dice es que los promedios de los tamaños poblacionales de las especies involucradas son independientes de su tamaño inicial.
3. *La Ley de la perturbación de los promedios* más conocida como el *principio de Volterra*. Que nos dice que si las poblaciones de ambas especies son destruidas a una razón proporcional su tamaño poblacional, el promedio de las presas aumenta, mientras que el de los depredadores disminuye.

Es decir que si sometemos un modelo clásico depredador-presa a algún tipo de explotación, como la pesca de arrastre-proporcional al número de individuos presentes, disminuirá la tasa de crecimiento tanto de las presas como de los depredadores.

El principio de Volterra tiene aplicaciones interesantes para los tratamientos con insecticidas que destruyen tanto al depredador como a la presa. Implica que la aplicación de insecticidas en realidad incrementara la población de aquellos insectos que son mantenidos bajo control por otros insectos depredadores.

Tener en cuenta el *Principio de Volterra* es crucial para el diseño de plaguicidas, de modo que focalicen su efecto letal sobre la especie-plaga y minimicen los daños colaterales en los predadores naturales. Esto es algo que se tiene muy en cuenta en la industria farmacológica con el concepto de diana terapéutica en el tratamiento del cáncer y otras enfermedades para evitar en lo posible que los fármacos ocasionen daños colaterales en el sistema inmunológico.

2.3. Modelo depredador-presa más general

Una de las características que no permite que el modelo de Lotka - Volterra se ajuste mejor a la realidad es que, en ausencia de depredadores, el número de presas crece indefinidamente como en el modelo de Malthus.

Para generalizar el modelo de Lotka-Volterra es necesario considerar las funciones f y g del sistema de ecuaciones (2.1), donde se consideran otras hipótesis y se tome en cuenta la capacidad de soporte máximo del medio como en el crecimiento logístico.

De este modo, un sistema generalizado debe ajustarse a una expresión del tipo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - yF_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = yF_2(x, y) \end{cases} \quad (2.9)$$

donde la expresión $rx(1 - \frac{x}{K})$ es el crecimiento de las presas en ausencia de depredadores (y), el término $-yF_1(x, y)$ como afecta los depredadores al crecimiento de presas (término de interacción), y el término $yF_2(x, y)$ es la tasa de crecimiento de las presas. Las funciones F_1 y F_2 se pueden elegir dependiendo de las hipótesis que se hagan.

2.3.1. Análisis de diferentes modelos de depredador presa más general.

1. Modelo clásico con ajuste logístico.

En esta parte se considera que existe competencia entre las presas por la limitada cantidad de recursos disponibles y la lucha entre los depredadores por el limitado número de presas, por lo que el modelo clásico de Lotka-Volterra queda así:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - ex^2 \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy - fy^2 \end{cases} \quad (2.10)$$

donde a, b, c y d son constantes positivas como en el modelo clásico y los términos ex^2 describe la competencia entre las presas y fy^2 la competencia entre los

depredadores.

Si hacemos $r_1 = a$, $r_2 = c$, $K_1 = \frac{a}{e}$ y $K_2 = \frac{c}{f}$ el modelo (2.10) queda así:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -r_2 y \left(1 + \frac{y}{K_2}\right) + dxy \end{cases} \quad (2.11)$$

donde ahora en el modelo clásico de Lotka-Voterra se observa que tiene un ajuste logístico para cada especie.

Si hacemos $b = \frac{a_1 r_1}{K_1}$ y $d = \frac{a_2 r_2}{K_2}$ la misma ecuación (2.11) resultaría:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} - \frac{a_1}{K_1} y\right) \\ \frac{dy}{dt} = -r_2 y \left(1 + \frac{y}{K_2} - \frac{a_2}{K_2} x\right) \end{cases} \quad (2.12)$$

Adimensionalizando el modelo

Con el objeto de reducir el número de parámetros que aparecen es conveniente realizar una adimensionalización de las ecuaciones. Se debe tener en cuenta que solo se pueden sumar magnitudes de la misma dimensión en esta parte utilizamos los corchetes $[.]$ para indicar la dimensión de una determinada magnitud.

Se debe tener en cuenta que:

$$\frac{[x]}{[K_1]} = 1, \frac{[y]}{[K_2]} = 1$$

también

$$\frac{[x]}{[t]} = [r][x] \implies \frac{1}{[t]} = [r] \implies 1 = [r][t]$$

de aquí resulta que:

$\tau = r_1 t$, $u = \frac{x}{K_1}$ y $v = \frac{y}{K_2}$ donde τ , u y v no tienen dimensión y efectuando los cambios al modelo (2.12) se tiene:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u \left(1 - u - \frac{a_1 K_2}{K_1} v\right) \\ \frac{dv}{d\tau} = -\frac{r_2}{r_1} v \left(1 + v - \frac{a_2 K_1}{K_2} u\right) \end{cases} \quad (2.13)$$

si $\rho = \frac{r_2}{r_1}$, $B = \frac{a_1 K_2}{K_1}$ y $C = \frac{a_2 K_1}{K_2}$ con estos cambios el modelo (2.13) queda así:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1 - u - Bv) \\ \frac{dv}{d\tau} = -\rho v(1 + v - Cu) \end{cases} \quad (2.14)$$

y de este modo, pasamos de un sistema dependiente de seis parámetros a otro que tan solo dependerá de tres. Los puntos de equilibrio de este modelo son:

$(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ y $(\frac{1+B}{1+BC}, \frac{C-1}{1+BC})$.

Análisis del punto $(0, 0)$

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - 2u - Bv & -Bu \\ \rho Cv & -\rho - 2\rho v + \rho Cu \end{pmatrix}$$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}$$

se tiene que $\lambda_1 = 1 > 0$ y $\lambda_2 = -\rho < 0$ por lo que el punto $(0, 0)$ es un punto silla.

Análisis del punto $(1, 0)$

Si $w = u - 1$ y $z = v$

$$J(w, z) = \begin{pmatrix} 1 - 2(w + 1) - Bz & -B(w + 1) \\ \rho Cz & -\rho - 2\rho z + \rho C(w + 1) \end{pmatrix}$$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -B \\ 0 & -\rho(1 - C) \end{pmatrix}$$

el punto es punto silla si $C > 1$

Análisis del punto $(\frac{1+B}{1+BC}, \frac{C-1}{1+BC})$

Para que el punto esté en el primer cuadrante $C > 1$.

Si $w = u - \frac{1+B}{1+BC}$ y $z = v - \frac{C-1}{1+BC}$

$$J(w, z) = \begin{pmatrix} 1 - 2(w + \frac{1+B}{1+BC}) - B(z + \frac{C-1}{1+BC}) & -B(w + \frac{1+B}{1+BC}) \\ \rho C(z + \frac{C-1}{1+BC}) & -\rho - 2\rho(z + \frac{C-1}{1+BC}) + \rho C(w + \frac{1+B}{1+BC}) \end{pmatrix}$$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -2B & -\frac{B(1+B)}{(1+BC)} \\ \frac{-\rho C(1-C)}{1+BC} & \frac{\rho(1-C)}{1+BC} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(J(0,0)) &= -\frac{2\rho B(1-C)}{1+BC} - \frac{\rho BC(1+B)(1-C)}{(1+BC)^2} \\
&= -\frac{\rho B(1-C)}{1+BC} \left(2 + \frac{C(1+B)}{1+BC}\right) \\
&= -\rho B \frac{1-C}{1+BC} \left(\frac{3BC+C+2}{1+BC}\right) \\
&= \rho B \frac{C-1}{1+BC} \left(\frac{3BC+C+2}{1+BC}\right) > 0
\end{aligned}$$

$$tr(J(0,0)) = -2B + \rho \frac{1-C}{1+BC} < 0$$

por lo que el punto es un atractor asintóticamente estable.

2. Modelo presas con refugios.

Los refugios son cualquier espacio usado por una parte de las presas para evitar la depredación y esa fracción la denotaremos por x_r . Para este caso consideramos que la cantidad de presas en refugio es proporcional a los encuentros entre presas y depredadores, esto es:

$$x_r = \delta xy$$

para las presas se considera que tienen un ajuste logístico. Si x_r es la cantidad de presas que consiguen refugio efectivo entonces la cantidad de presas a las que puede optar el depredador es $x - x_r$ por lo que podemos tomar $F_1(x, y) = q(x - x_r)$ donde q es la tasa de consumo de los depredadores. Los depredadores mueren con tasa de mortalidad relativa constante c y la contribución de las presas a la tasa de crecimiento relativa de los depredadores es proporcional a la cantidad de presas que no consiguen refugio en dicho momento por lo que se puede tomar $F_2(x, y) = p(x - x_r) - c$.

El modelo con las hipótesis anteriores es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - qy(x - x_r) \\ \frac{dy}{dt} = (p(x - x_r) - c)y \end{cases} \quad (2.15)$$

Si $x_r = 0$ el modelo queda así:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxy \\ \frac{dy}{dt} = pxy - cy \end{cases} \quad (2.16)$$

que tiene como puntos de equilibrio $(0, 0)$, $(K, 0)$ y $\left(\frac{c}{p}, \frac{r(pK-c)}{pqK}\right)$ este último está en el primer cuadrante.

Análisis del punto $(0, 0)$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - qy & -qx \\ py & px - c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

como $\lambda_1 = r > 0$ y $\lambda_2 = -c < 0$, entonces el punto es un punto silla.

Análisis del punto $(K, 0)$

Hacemos el cambio de variable $u = x - K$ y $v = y$ se tiene que

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} r - \frac{2r(u+K)}{K} - qv & -q(u+K) \\ pv & p(u+K) - c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} -r & -qK \\ 0 & pK - c \end{pmatrix}$$

de aquí se tiene que $\lambda_1 = -r < 0$ y $\lambda_2 = pK - c > 0$, entonces el punto es un punto silla.

Análisis del punto $\left(\frac{c}{p}, \frac{r(pK-c)}{pqK}\right)$

Hacemos el cambio de variable $u = x - \frac{c}{p}$ y $v = y - \frac{r(pK-c)}{pqK}$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r - \frac{2r(u+\frac{c}{p})}{K} - q(v + \frac{r(pK-c)}{pqK}) & -q(u + \frac{c}{p}) \\ p(v + \frac{r(pK-c)}{pqK}) & p(u + \frac{c}{p}) - c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{rc}{pK} & -q\frac{c}{p} \\ \frac{r(pK-c)}{qK} & 0 \end{pmatrix}$$

luego $tr(J(0, 0)) = -\frac{rc}{pK} < 0$ y $det(J(0, 0)) = \frac{cr}{pK}(pK - c) > 0$ por lo que el sistema autónomo es asintóticamente estable en $(\frac{c}{p}, \frac{r(pK-c)}{pqK})$. Ahora consideremos $x_r = \delta xy$ con $\delta > 0$ es decir, la cantidad de presas en refugio es proporcional a los encuentros presa-depredador por lo que el modelo queda así:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxy(1 - \delta y) \\ \frac{dy}{dt} = (px(1 - \delta y) - c)y \end{cases} \quad (2.17)$$

donde:

r : es la tasa de crecimiento per capita de las presas.

K : es la capacidad de soporte o carga del medio ambiente.

q : es la tasa de mortalidad de las presas o consumo de los depredadores.

p : mide la eficacia con que los depredadores convierten en energía lo consumido para el nacimiento de nuevos depredadores.

c : tasa de mortalidad natural de los depredadores.

Simplificación del modelo

Utilizando la adimensionalización se reducen los parametros del modelo (2.17). Por lo que de la primera ecuación del sistema se tiene:

$$\frac{[x]}{[t]} = \left[r\left(1 - \frac{x}{K}\right)x\right] = [qx(1 - \delta y)y]$$

de aquí:

$$\frac{[x]}{K} = 1$$

tambien

$$\frac{[x]}{[t]} = [r][x] \implies \frac{1}{[t]} = [r] \implies 1 = [r][t]$$

$$\frac{[x]}{[t]} = [q][x][y] \implies \frac{1}{[t]} = [q][y] \implies [r] = [q][y] \implies 1 = \frac{[q]}{[r]}[y]$$

De aquí resulta que $\tau = rt$, $u = \frac{x}{K}$ y $v = \frac{q}{r}y$ donde τ , u y v no tienen dimensión.

Efectuando los cambios al modelo (2.17) se tiene:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = (1-u)u - (1 - \delta\frac{r}{q}v)uv \\ \frac{dv}{d\tau} = (pKu(1 - \delta\frac{r}{q}v) - c)v \end{cases} \quad (2.18)$$

si $N = \delta\frac{r}{q}$, $B = pK$ y $C = \frac{c}{pK}$

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = (1-u - (1-Nv)v)u \\ \frac{dv}{d\tau} = (B(u(1-Nv) - C)v \end{cases} \quad (2.19)$$

Los puntos de equilibrio de este sistema son: $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(u_e, \frac{u_e - C}{Nu_e})$ donde u_e es solución de la ecuación

$$p(u) = -Nu^3 + Nu^2 - Cu + C^2 = 0 \quad (2.20)$$

Análisis del punto $(0, 0)$

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - 2u + Nv^2 - v & -u + 2Nuv \\ Bv - BNv^2 & Bu - 2BNuv - BC \end{pmatrix} \implies J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -BC \end{pmatrix}$$

se tiene que $\lambda_1 = 1 > 0$ y $\lambda_2 = -BC < 0$, entonces el punto es un punto silla.

Análisis del punto (1, 0)

Haciendo el cambio de variable $w = u - 1$ y $z = v$ se tiene que:

$$J(w, z) = \begin{pmatrix} 1 - 2(w + 1) + Nz^2 - z & -(w + 1) + 2N(w + 1)z \\ Bz - BNz^2 & B(w + 1) - 2BN(w + 1)z - BC \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & B - BC \end{pmatrix}$$

se tiene que $\lambda_1 = -1 < 0$ y $\lambda_2 = B - BC < 0$, entonces el punto es un punto silla si $C < 1$.

Análisis de punto $(u_e, \frac{u_e - C}{Nu_e})$

Según la regla de los signos de Descartes la ecuación:

$-Nu^3 + Nu^2 - Cu + C^2 = 0$ tiene por lo menos una raíz positiva y ninguna negativa.

Supongamos que E es raíz real del polinomio (2.20) entonces se tiene que:

$$\frac{Nu^3 - Nu^2 + Cu - C^2 = 0}{u - E} = Nu^2 + (NE - N)u + (NE - N)E + C + \frac{NE^3 - NE^2 + CE - C^2}{u - E};$$

pero si E es raíz $NE^3 - NE^2 + CE - C^2 = 0$ se obtiene que $N = \frac{C(E - C)}{E^2(1 - E)}$

de aquí $C < E < 1$ ya que $N > 0$.

Para las otras raíces:

$$Nu^2 + (NE - N)u + (NE - N)E + C = 0$$

sustituyendo N se obtiene:

$$(E - C)u^2 - (1 - E)(E - C)u + CE(1 - E) = 0$$

donde las soluciones de esta ecuación vienen dadas por:

$$u = \frac{(1 - E)(E - C) \pm \sqrt{(1 - E)(E - C)(E - E^2 - C - 3EC)}}{2(E - C)}$$

La ecuación tendrá una solución real si $E - E^2 - C - 3EC < 0$, tendrá dos raíces reales una con multiplicidad dos si $E - E^2 - C - 3EC = 0$, también

es posible que tenga una raíz pero con multiplicidad tres $u_1 = u_2 = u_3 = \frac{1}{3}$ y tendra tres raíces reales positivas distintas si $E - E^2 - C - 3EC > 0$.

Caso I

Si $-3EC - C - E^2 + E < 0$, entonces el punto de equilibrio es: $(E, \frac{E(1-E)}{C})$, ahora si hacemos el cambio de variable $w = u - E$ y $z = v - \frac{E(1-E)}{C}$

$$J(w, z) = \begin{pmatrix} 1 - 2(w + E) + N(z + \frac{E(1-E)}{C})^2 - z - \frac{E(1-E)}{C} & -(w + E) + 2N(w + E)(z + \frac{E(1-E)}{C}) \\ B(z + \frac{E(1-E)}{C}) - BN(z + \frac{E(1-E)}{C})^2 & B(w + E) - 2BN(w + E)(z + \frac{E(1-E)}{C}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} -E & -2C + E \\ B - BE & -BE + BC \end{pmatrix}$$

$\det(J(0, 0)) = B(2E^2 - 3EC + 2C - E) > 0$ ya que si $C = E(\frac{1-E}{3E+1})$ se tiene que $\det(J(0, 0)) = B(\frac{E(E-3)^2}{3E+1}) > 0$ y además:

$tr(J(0, 0)) = -E - B(E - C) < 0$, ya que $C < E$ de aquí se sabe que el punto es atractor asintóticamente estable.

Caso II

Si $E - E^2 - C - 3EC = 0$ se tendrán los puntos de equilibrio $(E, 3E + 1)$, $(\frac{1-E}{2}, \frac{(E+1)(3E+1)}{4E})$ y $(\frac{1}{3}, 2)$ donde este último es de multiplicidad tres.

Análisi del punto $(E, 3E + 1)$

Haciendo el cambio de variable $w = u - E$ y $z = v - (3E + 1)$ se tiene:

$$J(w, z) = \begin{pmatrix} 1 - 2(w + E) + N(z + 3E + 1)^2 - (z + E + 1) & -(w + E) + 2N(w + E)(z + 3E + 1) \\ B(z + 3E + 1) - BN(z + 3E + 1)^2 & B(w + E) - 2BN(w + E)(z + 3E + 1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 - 2E + N(3E + 1)^2 - 3E - 1 & -E + 2NE(3E + 1) \\ B(3E + 1) - BN(3E + 1)^2 & BE - 2BNE(3E + 1) - BC \end{pmatrix}$$

como $E - E^2 - C - 3EC = 0$, entonces $C = \frac{E(1-E)}{3E+1}$ y $N = \frac{4E}{(3E+1)^2}$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -E & E\frac{5E-1}{3E+1} \\ B(1-E) & -\frac{4E^2B}{3E+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(J(0,0)) &= \frac{4^3 B}{3E+1} - B(1-E)E \left(\frac{5E-1}{3E+1} \right) \\
&= \frac{-4E^3 B - B(1-E)(5E^2 - E)}{3E+1} \\
&= \frac{E^3 B - 6E^2 B + BE}{3E+1} \\
&= \frac{BE(9E^2 - 6E + 1)}{3E+1} \\
&= \frac{BE(3E-1)^2}{3E+1} > 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}(J(0,0)) &= -E - 4B \frac{E^2}{3E+1} \\
&= \frac{-4BE^2 - 3E^2 - E}{3E+1} \\
&= \frac{-(4BE^2 + 3E^2 + E)}{3E+1} < 0.
\end{aligned}$$

por lo que el punto $(E, 3E+1)$ es asintóticamente estable.

Análisis del punto $\left(\frac{1-E}{2}, \frac{(E+1)(3E+1)}{4E} \right)$

Haciendo el cambio de variable $w = u - \frac{1-E}{2}$ y $z = v - \frac{(E+1)(3E+1)}{4E}$ se tiene

el jacobiano:

$$\begin{aligned}
J(w, z) &= \begin{pmatrix} 1 - 2 \left(w + \frac{1-E}{2} \right) + N \left(z + \frac{(E+1)(3E+1)}{4E} \right)^2 - \left(z + \frac{(E+1)(3E+1)}{4E} \right) \\ B \left(z + \frac{(E+1)(3E+1)}{4E} \right) - BN \left(z + \frac{(E+1)(3E+1)}{4E} \right)^2 \\ - \left(w + \frac{1-E}{2} \right) + 2N \left(w + \frac{1-E}{2} \right) \left(z + \frac{(E+1)(3E+1)}{4E} \right) \\ B \left(w + \frac{1-E}{2} \right) - 2BN \left(w + \frac{1-E}{2} \right) \left(z + \frac{(E+1)(3E+1)}{4E} \right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow J(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1-E) & -\frac{1}{2} \frac{(1-E)^2}{3E+1} \\ \frac{1}{2} B(1+E) & \frac{1}{2} \frac{1-E^2}{3E+1} \end{pmatrix}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \det(J(0,0)) &= \frac{1}{4} \frac{B(1-E)(1-E^2)}{3E+1} - \frac{1}{4} \frac{B(1+E)(1-E)^2}{3E+1} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{B(1-E)(1-E^2)}{3E+1} - \frac{1}{4} B \frac{1-E-E^2+E^3}{3E+1} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{B(1-E)(1-E^2)}{3E+1} - \frac{1}{4} \frac{B(1-E)(1-E^2)}{3E+1} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(J(0,0)) &= -\frac{1}{2}(1-E) - \frac{1}{2} B \frac{1-E^2}{3E+1} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(1-E + B \frac{1-E^2}{3E+1} \right) < 0
 \end{aligned}$$

por lo que el punto $\left(\frac{1-E}{2}, \frac{(E+1)(3E+1)}{4E} \right)$ es silla nodo.

Análisis del punto $\left(\frac{1}{3}, 2 \right)$

Haciendo cambio de variable $w = u - \frac{1}{3}$ y $z = v - 2$

$$\begin{aligned}
 J(w,z) &= \begin{pmatrix} 1 - 2(w + \frac{1}{3}) + N(z+2)^2 - (z+2) & -(w + \frac{1}{3}) + 2N(w + \frac{1}{3})(z+2) \\ B(z+2) - BN(z+2)^2 & B(w + \frac{1}{3}) - 2BN(w + \frac{1}{3})(z+2) \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow J(0,0) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3}B & -\frac{2}{9}B \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

se tiene que $\det(J(0,0)) = 0$ y $\text{tr}(J(0,0)) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}B < 0$ por lo que el punto es atractor no hiperbólico.

Caso III

Si $E - E^2 - C - 3EC > 0$ las raíces serán positivas y distintas donde:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= E \\
 u_2 &= \frac{(1-E)(E-C) - \sqrt{(1-E)(E-C)(E-E^2-C-3EC)}}{2(E-C)} \\
 u_3 &= \frac{(1-E)(E-C) + \sqrt{(1-E)(E-C)(E-E^2-C-3EC)}}{2(E-C)}
 \end{aligned}$$

y puede ocurrir que $u_1 < u_2 < u_3$, $u_2 < u_1 < u_3$ ó $u_2 < u_3 < u_1$, las tres raíces son menor que uno y mayor que C .

Consideremos la diferencia $u_2 - C$ tenemos que:

$$u_2 - C = \frac{1}{2(E - C)} \left((1 - E - 2C)(E - C) - \sqrt{W} \right)$$

($W = (1 - E)(E - C)(E - E^2 - C - 3EC)$) donde el signo depende del factor:

$F = (1 - E - 2C)(E - C) - \sqrt{W}$ de manera que $F > 0$ si:

$$(1 - E - 2C)(E - C) > \sqrt{W}$$

$$((1 - E - 2C)(E - C))^2 > W$$

$$((1 - E - 2C)(E - C))^2 - W > 0$$

$$4C^2(1 - C)(E - C) > 0$$

de aca se tiene que $C < E < 1$.

Ahora $F < 0$ si $1 - E - 2C \leq 0$ ó $C \geq \frac{1-E}{2}$ y \sqrt{W} no es real por lo que $u_2 > C$.

Consideremos ahora la diferencia $u_3 - 1$, teniendo

$$u_3 - 1 = \frac{1}{2(E - C)} (\sqrt{W} - (1 + E)(E - C))$$

esto será negativo si:

$$\sqrt{W} - (1 + E)(E - C) < 0$$

$$-4E^2(1 - C) < 0$$

por lo que $u_3 < 1$ y las tres raíces pertenecen al intervalo $]C, 1[$.

Para saber la relación de u_1 y u_3 consideramos la diferencia

$$u_1 - u_3 = \frac{1}{2(E - C)} ((3E - 1)(E - C) - \sqrt{W})$$

y $u_1 < u_3$ ó $u_1 > u_3$ depende de $2E^2 - 3EC + 2C - E$ lo mismo ocurre con u_1 y u_2 si se considera la diferencia

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{2(E - C)} ((3E - 1)(E - C) + \sqrt{W})$$

Ahora definimos las regiones:

$$\Lambda_1 = \{(E, C) \in \Lambda / E \frac{1-2E}{2-3E} < C < E \frac{1-E}{3E+1} \text{ y } E < \frac{1}{3}\}$$

$$\Lambda_2 = \{(E, C) \in \Lambda / E \frac{1-2E}{2-3E} < C < E \frac{1-E}{3E+1} \text{ y } E > \frac{1}{3}\}$$

donde:

$$\Lambda = \left\{ (E, C) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 / 0 < C < E \frac{1-E}{3E+1} \right\}$$

Se obtiene que:

- a) $u_1 < u_2 < u_3$ si $(E, C) \in \Lambda_1$
- b) $u_2 < u_1 < u_3$ si $(E, C) \in \Lambda - (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$
- c) $u_2 < u_3 < u_1$ si $(E, C) \in \Lambda_2$

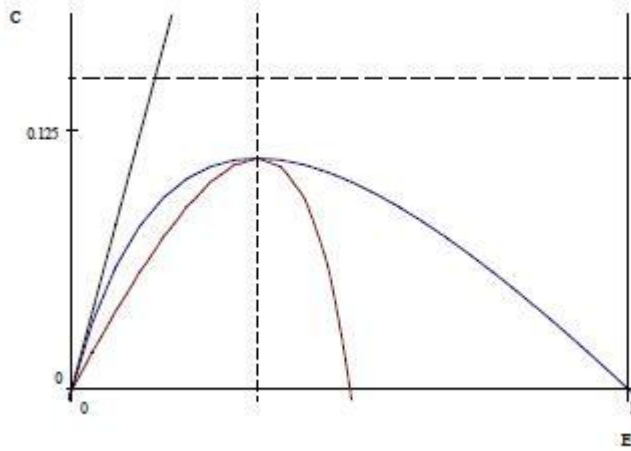


Figura 2.5: El gráfico describe la situación del orden de las raíces cuando $C > \frac{1-2E}{2-3E}$, $C < E \frac{1-E}{3E+1}$ y $E = \frac{1}{3}$.

Los tres puntos de equilibrio están en el nullcline $1 - u - (1 - Nv)v = 0$ y $u(1 - Nv) - C = 0$, donde se obtiene la matriz jacobiana escrita como:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} -u & (2Nv - 1)u \\ B(1 - u) & -BNuv \end{pmatrix}$$

Para el depredador el nullcline se tiene que $v = \frac{u-C}{uN}$, entonces para cada uno de los puntos de equilibrio estan en el primer cuadrante y se tiene que:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} -u & u - 2C \\ B(1 - u) & -B(u - C) \end{pmatrix}$$

donde: $\det (J(u, v)) = B (2u^2 - (3C + 1)u + 2C)$ y

$$\text{tr} (J(u, v)) = -u - B(u - C) < 0$$

por lo que la naturaleza de los tres puntos de equilibrio depende de la matriz jacobiana.

Análisis del punto (u_1, v_1)

Si $u_1 = E$ y $v_1 = \frac{(1-E)E}{C}$ se tiene que

$$\det (J(u_1, v_1)) = B(2E^2 - 3EC + 2C - E)$$

y $\text{tr} (J(u_1, v_1)) = -E - B(E - C) < 0$ por lo que punto es atractor si $2E^2 - 3EC + 2C - E > 0$ con el orden $u_1 < u_2 < u_3$ ó $u_2 < u_3 < u_1$ y será punto silla si $2E^2 - 3EC + 2C - E < 0$ con el orden $u_2 < u_1 < u_3$

Análisis de los puntos (u_2, v_2) y (u_3, v_3)

Si se tiene el orden $u_1 < u_2 < u_3$, entonces $2E^2 - 3EC + 2C - E > 0$ y $u_1 < \frac{1}{3}$ por lo que el punto (u_2, v_2) es punto silla y (u_3, v_3) es un atractor.

Si se tiene el orden $u_2 < u_3 < u_1$, entonces $2E^2 - 3EC + 2C - E > 0$ y $u_1 > \frac{1}{3}$ por lo que el punto (u_3, v_3) es punto silla y el punto (u_2, v_2) es un atractor.

Si se tiene el orden $u_2 < u_1 < u_3$ y $2E^2 - 3EC + 2C - E < 0$ por lo que los puntos (u_2, v_2) y (u_3, v_3) son atractores.

3. Modelo de Leslie

En 1945 Leslie planteó una modificación del modelo de Lotka-Volterra y

propuso el modelo descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxy \\ \frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{y}{nx}\right) \end{cases} \quad (2.21)$$

donde la ecuación de las presas es de tipo logístico y la interacción depredador presa es lineal ($F_1(x, y) = x$) y la tasa de crecimiento de los depredadores se ajusta a una ley logística donde la capacidad de soporte máximo es dependiente de la cantidad de alimentos (presas).

Los parámetros tienen diferentes significados biológicos.

r : es la tasa de crecimiento percapita de las presas.

K : es la cantidad o soporte del medio ambiente.

q : es la tasa de mortalidad o consumo de los depredadores.

s : es la tasa de crecimiento percapita de los depredadores.

n : es una calidad del alimento que provee nuevos nacimientos de depredadores.

Notemos que el sistema no está definido para $x = 0$ y los puntos de equilibrio para este modelo son $(K, 0)$ y $\left(\frac{rK}{r+qKn}, \frac{rKn}{r+qKn}\right)$

Análisis del punto $(K, 0)$

Haciendo $u = x - K$ y $v = y$ se tiene:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} r - 2r(u + K) - qv & -q(u + K) \\ \frac{sv^2}{n(u+k)^2} & s - \frac{2sv}{n(u+k)} \end{pmatrix}$$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -r & -Kq \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

se tiene que $\lambda_1 = -r < 0$ y $\lambda_2 = s < 0$ por lo que el punto $(K, 0)$ es inestable y es punto silla, tal y como se observa en la figura 2.6.

Análisis del punto $\left(\frac{rK}{r+qKn}, n\frac{rK}{r+qKn}\right)$

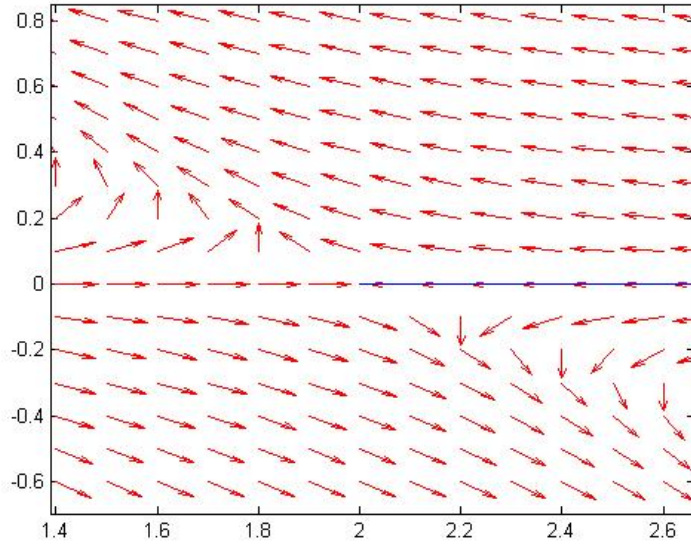


Figura 2.6: Diagrama de fases de un punto silla con $K=2$.

Haciendo $u = x - \frac{rK}{r+qKn}$ y $v = y - n\frac{rK}{r+qKn}$ se tiene:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} r - 2r(u + \frac{rK}{r+qKn}) - qn\frac{rK}{r+qKn} & -q(u + \frac{rK}{r+qKn}) \\ \frac{s(v+n\frac{rK}{r+qKn})^2}{n(u+\frac{rK}{r+qKn})^2} & s - \frac{2s(v+n\frac{rK}{r+qKn})}{n(u+\frac{rK}{r+qKn})} \end{pmatrix}$$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{r^2}{r+qKn} & -rqK \\ sn & -s \end{pmatrix}$$

se obtiene que:

$$\begin{aligned} \det(J(0, 0)) &= \frac{r^2s}{r+qKn} + \frac{srqKn}{r+qKn} \\ &= \frac{rs(r+qKn)}{r+qKn} \\ &= rs > 0 \end{aligned}$$

y

$$\text{tr}(J(0, 0)) = -\frac{r^2}{r+qKn} - s < 0$$

por lo que el punto es un atractor asintóticamente estable.

Esta situación se puede observar con mayor precisión de forma gráfica en la siguiente figura:

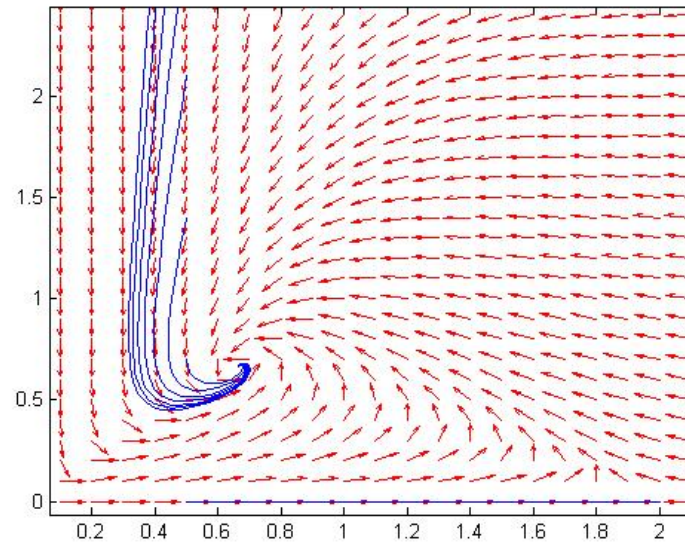


Figura 2.7: Punto atractor asintóticamente estable.

Capítulo 3

Programación y simulación de los modelos

1

3.1. Elementos de MATLAB

MATLAB es un lenguaje de alto rendimiento para la informática técnica. Integra computación, visualización y programación en un ambiente fácil de utilizar en donde los problemas y soluciones se expresan en notación matemática familiar.

Entre sus usos típicos se hallan:

- La manipulación de matrices,
- La representación de datos y funciones,
- La implementación de algoritmos,
- Modelado, simulación y desarrollo de prototipos,
- La creación de interfaces de usuarios, y

¹Para la elaboración de este capítulo se ha utilizado [6]

- La comunicación con programas en otros lenguajes y con otros dispositivos hardware.

El nombre MATLAB es una abreviatura de *MATrix LABoratory*, es decir, un laboratorio de matrices. Fue creado por *Cleve Moler* en 1984, surgiendo la primera versión con la idea de emplear paquetes de subrutinas escritas en FORTRAN en los cursos de álgebra lineal y análisis numérico, sin necesidad de escribir programas en dicho lenguaje. Ha evolucionado a lo largo de los años con el aporte de muchos usuarios. En ambientes universitarios, es una herramienta estándar para cursos de iniciación y perfeccionamiento en las matemáticas, la ingeniería y la ciencia.

En 2004 se estimaba que era empleado por más de un millón de personas en ámbitos académicos y empresariales.

Son aplicaciones típicas el cálculo numérico, la realización de algoritmos, la resolución de problemas con formulación matricial, la estadística, la optimización, etc. Es de destacar la aplicación en el estudio, simulación y diseño de los sistemas dinámicos y de control.

3.1.1. Funcionamiento

MATLAB es un programa intérprete de comandos. Esto quiere decir que es capaz de procesar de modo secuencial una serie de comandos previamente definidos, obteniendo de forma inmediata los resultados. Los comandos pueden estar ya definidos en el propio MATLAB y pueden también ser definidos por los usuarios. Para que MATLAB pueda realizar este proceso el usuario ha de escribir la lista de comandos en la ventana de comandos, si su número es reducido o en un fichero de extensión `.m`, constituyendo entonces un programa.

El método que debe seguirse para procesar los datos es muy simple:

1. El usuario escribe expresiones en la ventana de comandos, o bien en un archivo de texto apropiado (`archivo.m`)
2. Tras la orden de ejecución `ENTER` (o escribir el nombre del fichero), MATLAB procesa la información.

3. MATLAB escribe los resultados en la ventana de comandos y los gráficos (si los hubiere) en otras ventanas gráficas.

3.1.2. Comandos a utilizar

- PLOT: la función `plot` tiene diferentes formas, dependiendo de los argumentos de entrada. Si `y` es un vector, `plot(y)` produce una gráfica de los elementos de `y` contra los índices de los elementos de `y`. Si se especifican dos vectores como argumentos, `plot(x,y)` produce la gráfica de `y` contra `x`.
- SUBPLOT: esta función permite ver múltiples gráficas en la misma ventana o imprimirlas en el mismo papel, su sintaxis es: `subplot(m, n, p)`, esto divide la ventana en una matriz de dimensiones `m` por `n` y selecciona el lugar en el que aparecerá la gráfica `p`-ésima .
- ODE45: resuelve ecuaciones diferenciales por el método de Runge-Kuta-Fehlberg de cuarto y quinto orden. Para ello se necesita convertir primero (si es posible) las ecuaciones diferenciales de orden n en n ecuaciones diferenciales de primer orden.
Su sintaxis es: `ode45('función', a, b, inicial)`, donde 'función' es una función creada por el usuario en donde describe las ecuaciones diferenciales, `a` es el inicio del intervalo de integración, `b` es el final del intervalo de integración e `inicial` es la condición inicial, el intervalo de integración y la condición inicial son variables previamente declaradas.
- HOLD: asigna una nueva figura a la gráfica ya existente, si su sintaxis es: `hold on`, es decir, con este comando MATLAB no remueve la gráfica existente; agrega los nuevos datos sobre la gráfica anterior, reescalando si es necesario.
- LENGTH: define la cantidad máxima de elementos que tiene un vector. Su sintaxis es `length(valor)`.
- MARGIN: es el número de argumentos de entrada de la función.

- **ZEROS**: genera una matriz de $n \times n$ con todos los valores igual a cero. La sintaxis es: `zeros(n)`.
- **QUIVER**: dibuja los vectores U , V con flechas en los puntos X , Y . Las matrices X , Y , U , V deben tener el mismo tamaño. Su sintaxis es: `quiver(X, Y, U, V)`
- **AXIS TIGHT**: este comando establece los límites de los ejes en función de los datos.
- **INLINE**: sirve para definir el nombre y el orden de los argumentos de la función. Su sintaxis es: `nombre= inline ('expresión matemática', 'arg1', 'arg2', ... 'argn')`.

3.2. Simulación teórica de los modelos

3.2.1. Modelo clásico con ajuste logístico

En el capítulo anterior consideramos una variación del modelo de Lotka Volterra cuando existe competencia entre las presas por la limitada cantidad de recursos disponible y la lucha entre los depredadores por el limitado número de presas, ajustando el modelo a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - ex^2 \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy - fy^2 \end{cases}$$

Para poder ver las soluciones del modelo, se han creado en MATLAB los siguientes archivos:

- *campovec.m* en donde se ha creado una función:

```
function campovec(func,y1val,y2val,t)
if nargin==3
t=0;
end
n1=length(y1val);
n2=length(y2val);
yp1=zeros(n2,n1);
yp2=zeros(n2,n1);
for i=1:n1
for j=1:n2
ypv = feval(func,t,[y1val(i);y2val(j)]);
yp1(j,i) = ypv(1);
yp2(j,i) = ypv(2);
end
end
dist=sqrt(yp1.^2+yp2.^2);
quiver(y1val,y2val,yp1./dist,yp2./dist,.6,'r');
```

```
axis tight;
```

Esta función permite crear un campo vectorial, para poder visualizarla junto con posibles soluciones, se han utilizado los comandos:

```
f = inline('[a*y(1)-b*y(1)*y(2)-e*y(1)*y(1);-c*y(2)+d*y(1)*y(2)-f*y(2)*y(2)]','t','y')
campovec(f,0:1:20,0:1:20)
hold on
for y20=0:10:100
[ts, ys] = ode45(f,[0,100],[40;y20]);
plot(ys(:,1),ys(:,2))
end
hold off
```

OBSERVACIÓN: Para que las instrucciones sean ejecutadas correctamente se debe colocar en el lugar de las letras el valor correspondiente a cada parámetro. En lo que sigue utilizaremos estas instrucciones para crear todos los diagramas de fases que se utilizarán, solo se cambiará; lógicamente, el argumento de la función `inline` en donde se colocarán las respectivas ecuaciones.

- *lotka1.m* en donde se ha definido una función:

```
function yprima = lotka1(t,y)
a = .....; b = .....; c = .....; d = .....; e = .....; f = .....
yprima = [a*y(1)-b*y(1)*y(2)-e*y(1)*y(1);-c*y(2)+d*y(1)*y(2)-f*y(2)*y(2)];
```

Observación: los puntos que aparecen en el código anterior se deben ir cambiando de acuerdo a los valores asignados para cada parámetro que deseamos analizar.

Para poder ver las soluciones de la ecuación de forma gráfica utilizamos la siguiente notación:

```
[t,y]= ode45(@lotka1,[1 10],[1/3;4])
```

```
plot(t,y(:,1),t,y(:,2),'- -')
```

Aquí invocamos a la función `ode 45` con las ecuaciones descritas en el archivo `lotka1.m`, el intervalo de integración es $[1, 10]$ y con la condición inicial $[\frac{1}{3}, 4]$, al ejecutar las instrucciones obtenemos la solución de forma gráfica.

Para iniciar nuestro análisis debemos comprender el significado de cada uno de los parámetros involucrados en las ecuaciones:

- *a*: representa la tasa de crecimiento constante de las presas.
- *b*: representa la constante de proporcionalidad entre los encuentros de las dos especies.
- *c*: representa la tasa de mortalidad de los depredadores.
- *d*: representa la razón del beneficio obtenido por los depredadores con el consumo de presas.
- *e*: representa la tasa de competencia entre las presas.
- *f*: representa la tasa de competencia entre los depredadores.

■ **PRIMER CASO**

Consideraciones: $a=0.5$, $b=0.02$, $c=0.03$, $d=0.5$, $e=1$, $f=1$ El parámetro a un valor no muy grande, indica que hay un mayor número de nacimientos que de muertes, b es pequeño ya que los encuentros entre las especies son esporádicos, c es un valor que indica que hay pocas muertes naturales de los depredadores, d es un dato que representa la ganancia obtenida de los depredadores sobre las presas, considerando el valor de e como 1 se determina que la competencia entre las presas es alta por que los recursos son limitados y f al ser el valor máximo alcanzado indica que los recursos de los depredadores son limitados.

Para estos valores se debe cumplir la condición $ad > ec$, pues esto garantiza que el punto de equilibrio quede en el primer cuadrante, ya que un caso diferente carecería de sentido biológico real.

Con estos parámetros se obtiene el diagrama de fases siguiente (figura 3.2):

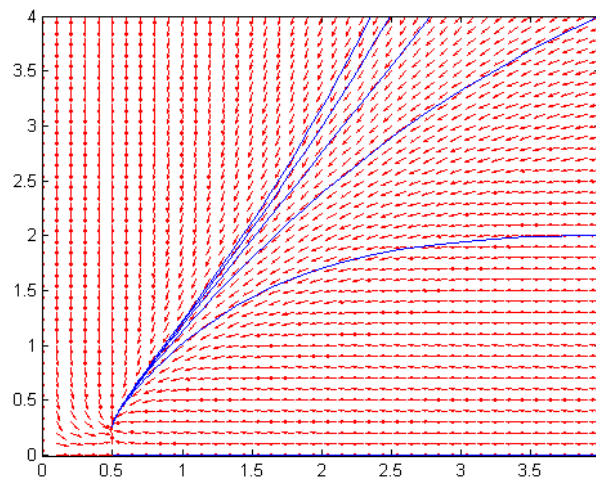


Figura 3.1: Diagrama de fases para el primer caso del modelo clásico con ajuste logístico.

Si analizamos las situaciones de la cantidad inicial de miembros de cada población obtenemos:

1. Cantidad de presas superior a la cantidad de depredadores.

Se ha considerado la condición inicial $(5, 1)$, obteniendo la gráfica siguiente (figura 3.2):

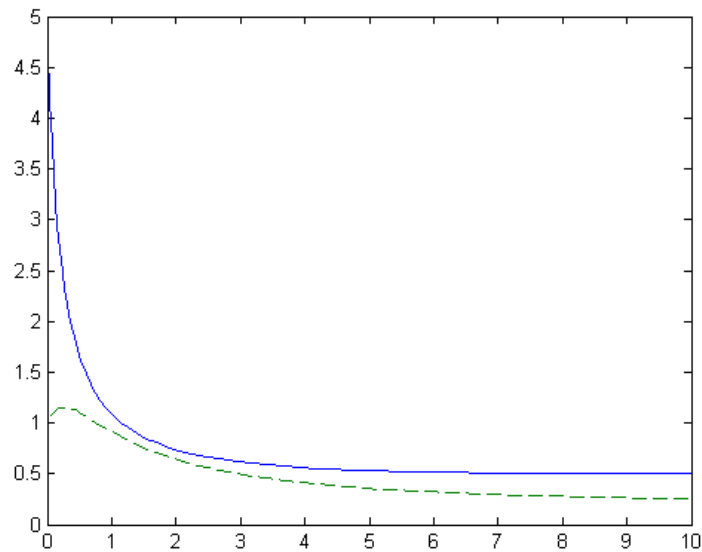


Figura 3.2: Soluciones para condición inicial $(5, 1)$.

Se observa que al existir abundancia de presas la población de depredadores tiende a aumentar de forma paulatina mientras que las presas decrecen aceleradamente por lo que los depredadores después de encontrar su punto máximo disminuyen dramáticamente hasta que las dos poblaciones logran estabilizarse.

2. Cantidad de presas igual a la cantidad de depredadores.

Se ha considerado la condición inicial $(1, 1)$, obteniendo la gráfica siguiente (figura 3.3):

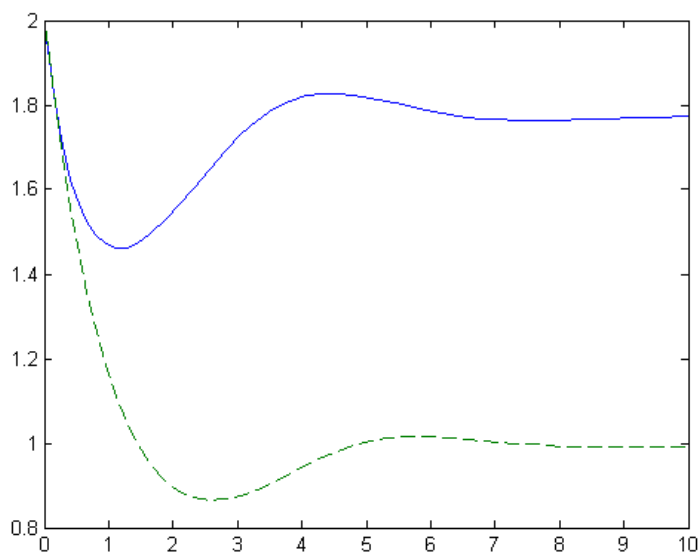


Figura 3.3: Soluciones para condición inicial $(1, 1)$.

Con esta condición se observan fluctuaciones entre las gráficas se inicia con un decrecimiento acelerado, luego crecen hasta lograr su estabilización.

3. Cantidad de presas inferior a la cantidad de depredadores.

Se ha considerado la condición inicial $(1, 5)$, obteniendo la gráfica siguiente (figura 3.4):

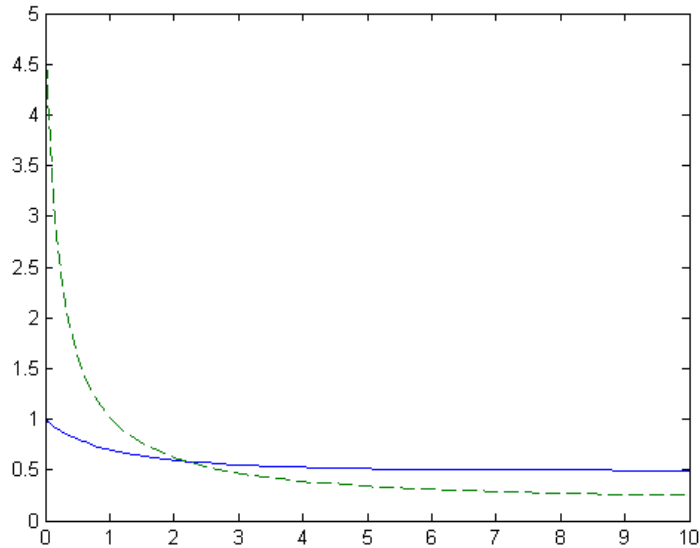


Figura 3.4: Soluciones para condición inicial $(1, 5)$.

Al iniciar con una población de presas inferior los depredadores decrecen igual que las presas logrando en un momento igualar las poblaciones para luego encontrar la estabilidad.

■ *SEGUNDO CASO*

Consideraciones: $a=0.8$, $b=0.3$, $c=0.03$, $d=0.5$, $e=0.2$, $f=0.1$. Los valores modificados en esta ocasión son: la tasa de natalidad a que se ha incrementado, indicando que hay un crecimiento acelerado de la población de presas, el parámetro b , también en aumento para dar una mayor oportunidad de encuentro entre las dos especies, y los parámetros e y f para disminuir la competencia propia de cada especie.

El diagrama de fases para esta situación es la siguiente (figura 3.5):

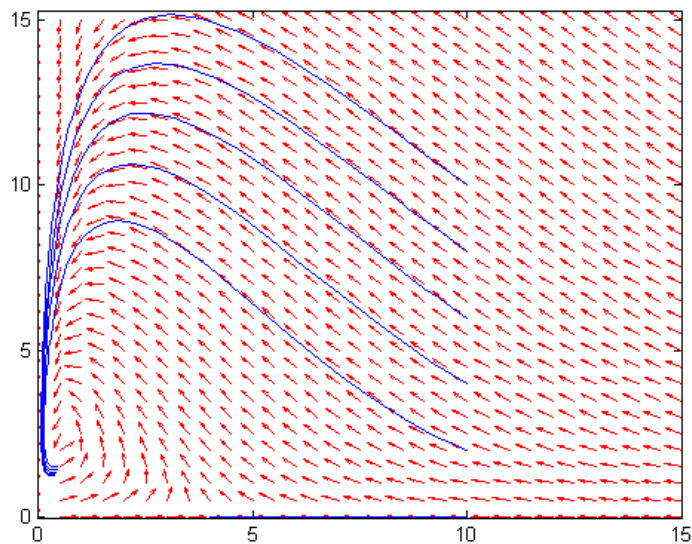


Figura 3.5: Diagrama de fases para el segundo caso del modelo clásico con ajuste logístico.

Cambiando las condiciones iniciales se obtiene:

1. Cantidad de presas superior a la cantidad de depredadores.

Se ha considerado la condición inicial $(1, 5)$, obteniendo la gráfica siguiente (figura 3.6):

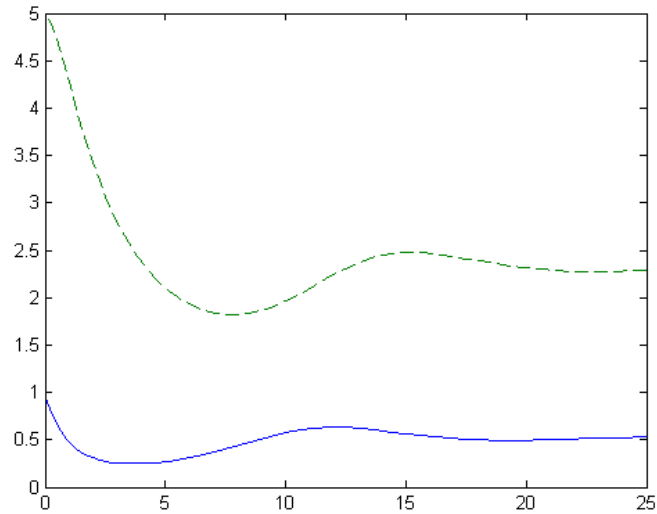


Figura 3.6: Soluciones para condición inicial $(1, 5)$.

Al inicio las gráficas muestran variadas fluctuaciones pero pasado un periodo determinado logran estabilizarse.

2. Cantidad de presas igual a la cantidad de depredadores.

Se ha considerado la condición inicial $(2, 2)$, obteniendo la gráfica siguiente (figura 3.7):

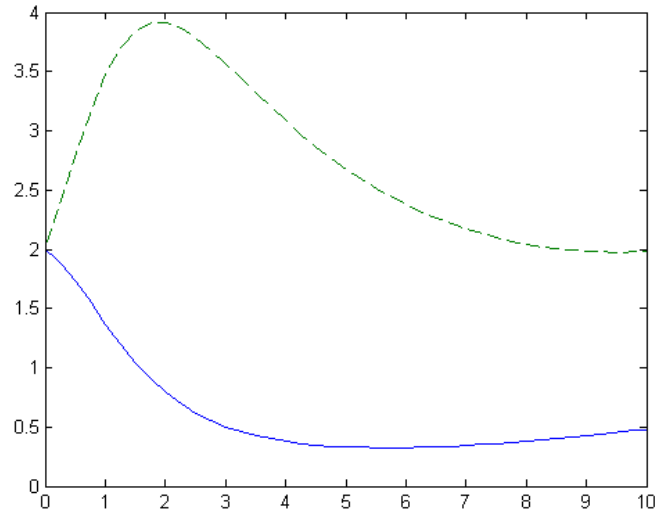


Figura 3.7: Soluciones para condición inicial $(2, 2)$.

Los depredadores encuentran un máximo y luego disminuyen mientras las presas decrecen, hasta que ambas poblaciones encuentran la estabilización.

3. Cantidad de presas inferior a la cantidad de depredadores.

Se ha considerado la condición inicial $(5, 1)$, obteniendo la gráfica siguiente (figura 3.8):

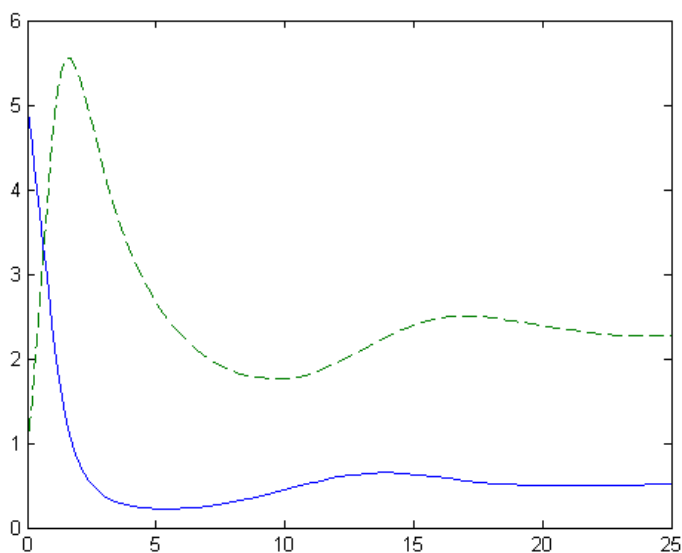


Figura 3.8: Soluciones para condición inicial $(5, 1)$.

Se muestran cambios drásticos al inicio pero luego ambas poblaciones logran estabilizarse.

■ **TERCER CASO**

Consideraciones: $a=0.3$, $b=0.5$, $c=0.03$, $d=0.5$, $e=0.5$, $f=0.5$. Se ha supuesto una tasa de crecimiento de las presas baja, una cantidad de encuentros del 50% y tanto la competencia entre las presas como la competencia entre los depredadores de 0.5

Obteniendo el siguiente diagrama de fases (figura 3.9):

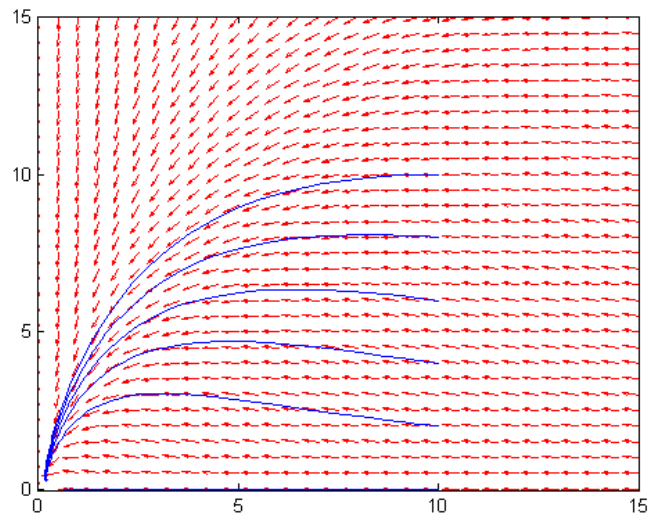


Figura 3.9: Diagrama de fases para el tercer caso del modelo clásico con ajuste logístico.

Analizando diferentes condiciones iniciales encontramos:

1. Cantidad de presas superior a la cantidad de depredadores.

Se ha considerado la condición inicial $(1, 10)$, obteniendo la gráfica siguiente (figura 3.10):

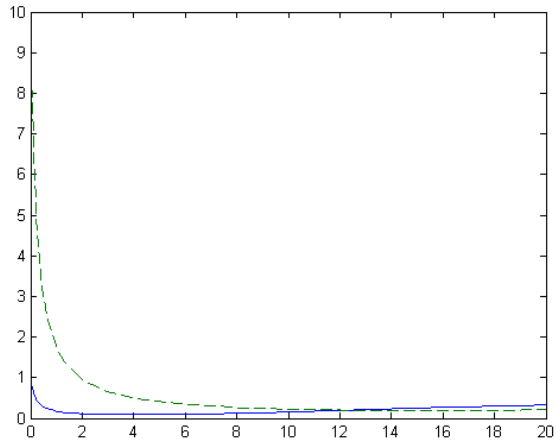


Figura 3.10: Soluciones para condición inicial $(1, 10)$.

2. Cantidad de presas igual a la cantidad de depredadores.

Con la condición inicial $(10, 10)$, se obtiene la siguiente gráfica (figura 3.11) :

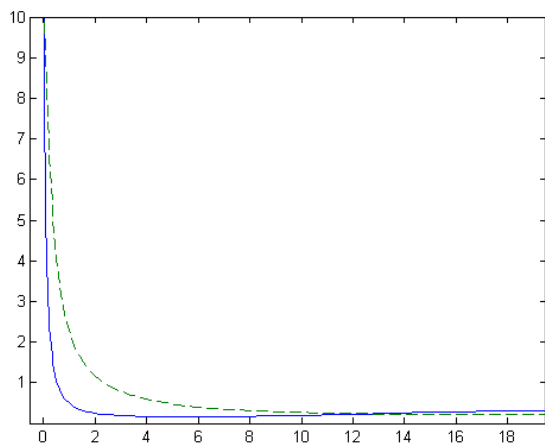


Figura 3.11: Soluciones para condición inicial $(10, 10)$.

3. Cantidad de presas inferior a la cantidad de depredadores.

Si la condición inicial es $(10, 3)$, obtenemos (figura 3.12):

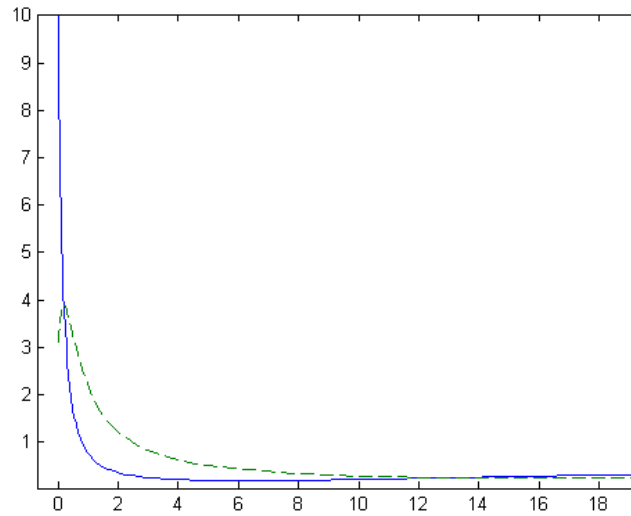


Figura 3.12: Soluciones para condición inicial $(10, 3)$.

Al observar los tres gráficos se nota que hay un decrecimiento acelerado de las poblaciones hasta lograr la estabilización en valores cercanos a la extinción. Solo en el tercer gráfico existe un crecimiento mínimo de los depredadores pero luego decrece y se comporta como los gráficos anteriores. Superando las presas a la cantidad de depredadores.

La siguiente tabla resume lo expuesto:

Parámetros	a	b	c	d	e	f	Observación
Caso 1	0.5	0.02	0.03	0.1	1	1	Las dos poblaciones decrecen hasta estabilizarse y tienen a estabilizarse de tal manera que el número de presas supera a los depredadores.
Caso 2	0.8	0.3	0.03	0.5	0.2	0.1	Las poblaciones se estabilizan pero al hacerlo los depredadores superan en número a las presas.
Caso 3	0.3	0.5	0.03	0.5	0.5	0.5	En un intervalo de tiempo los depredadores superan en número a las presas pero luego se estabilizan y las presas superan en número a los depredadores.

3.2.2. Modelo presas con refugios

Otra de las variaciones considerada anteriormente es cuando las presas evitan la depredación utilizando cualquier espacio disponible.

Generando las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxy(1 - \delta y) \\ \frac{dy}{dt} = (px(1 - \delta y) - c)y \end{cases}$$

Donde:

- r : es la tasa de crecimiento percapita de las presas.
- K : es la capacidad de soporte del medio ambiente.
- q : es la tasa de consumo de los depredadores o mortalidad de las presas.
- p : mide la eficacia con que los depredadores convierten en energía lo consumido para el nacimiento de nuevos depredadores.
- c : es la tasa de mortalidad natural de los depredadores.
- δ : la proporción entre las presas en refugio y los encuentros presa-depredador.

De la misma manera como se ha analizado el modelo anterior se han creado en MATLAB los archivos siguientes:

El archivo `lotkaref.m` en donde se crea la función con las ecuaciones diferenciales antes mencionadas:

```
function yprima = lotkaref(t,y)
r=.....; K=.....; q=.....; p=.....; c=.....; d=.....;
yprima = [r*y(1)*(1-y(1)/K)-q*y(1)*y(2)*(1-d*y(2));(p*y(1)*(1-d*y(2))-c)*y(2)];
```

Y para obtener las soluciones gráficas se debe invocar la función con los siguientes comandos:

```
[t,y]= ode45(@lotkaref,[... ..],[...,...])
```

```
plot(t,y(:,1),t,y(:,2),'-')
```

En donde se colocan el intervalo de integración deseado y la condición inicial correspondiente.

■ *PRIMER CASO*

Se han tomado en cuenta las consideraciones siguientes: $r=0.8$, $K=10$, $q=0.5$, $p=0.5$, $c=0.1$, $d=0.1$. Una tasa de crecimiento de las presas bastante alta, una capacidad de soporte del medio suficiente, el consumo de los depredadores y la eficacia en que este alimento se convierte en energía igual, mortalidad de los depredadores bastante baja y la capacidad de las presas de refugiarse baja.

El diagrama de fases para esta situación se observa a continuación (figura 3.13):

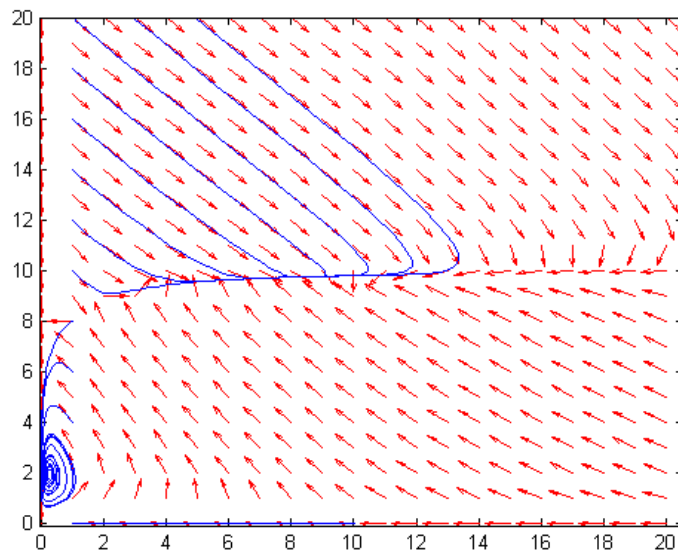


Figura 3.13: Diagrama de fases para el primer caso del modelo presas con refugio.

Al cambiar las condiciones iniciales se obtiene:

1. Cantidad de presas igual que la cantidad de depredadores y valores inferiores al soporte del medio.

Se ha considerado como condición inicial el punto (6, 6) (figura 3.14). Con esta condición inicial los depredadores crecen hasta estabilizar-

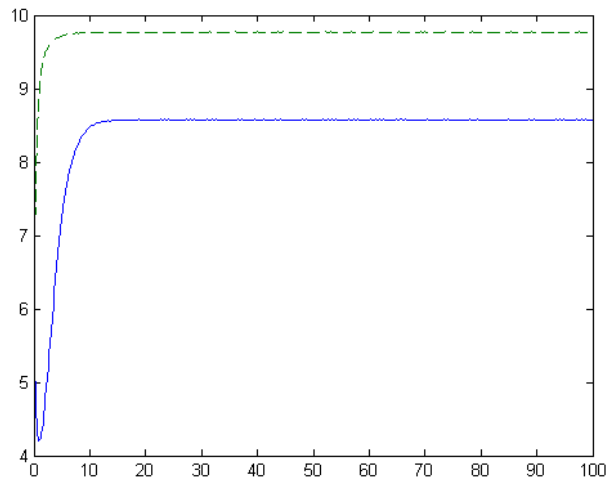


Figura 3.14: Soluciones para condición inicial (6, 6).

se y las presas decrecen hasta llegar a un punto mínimo luego crecen hasta estabilizarse manteniendo la población de presas inferior a la población de depredadores.

2. Cantidad de depredadores superior al soporte del medio de las presas.

Se considera la condición inicial $(4, 15)$ (figura 3.15).

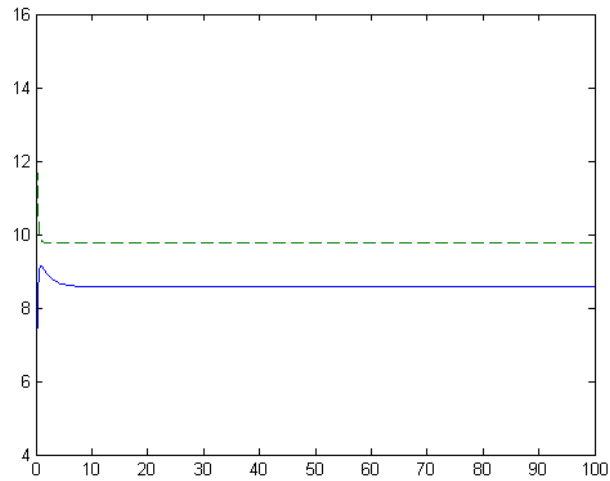


Figura 3.15: Soluciones para condición inicial $(4, 15)$.

Como se puede observar los depredadores decrecen hasta estabilizarse en un valor cercano al del soporte del medio de las presas, en cambio las presas crecen hasta lograr un máximo luego decrecen hasta estabilizarse en ese momento el número de presas es inferior al número de depredadores.

3. Cantidad de presas y depredadores cercanos a cero.
Se considera la condición inicial $(2, 4)$ (figura 3.16).

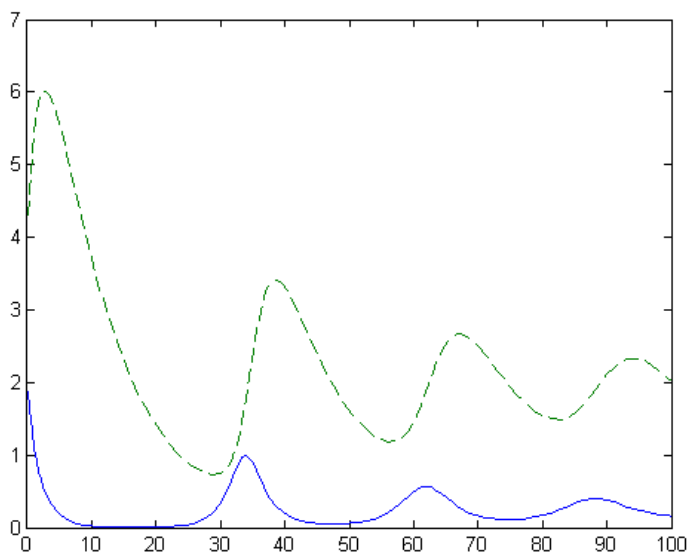


Figura 3.16: Soluciones para condición inicial $(2, 4)$.

En el gráfico se observa que las poblaciones fluctúan de tal manera que se obtiene un largo tiempo para estabilizarse; pero siempre la cantidad de depredadores supera a la cantidad de presas.

4. Cantidad de depredadores inferior al soporte del medio de las presas.

Consideremos como condición inicial el punto $(10, 4)$. (figura 3.17)

Se observa que los depredadores crecen hasta estabilizarse y las

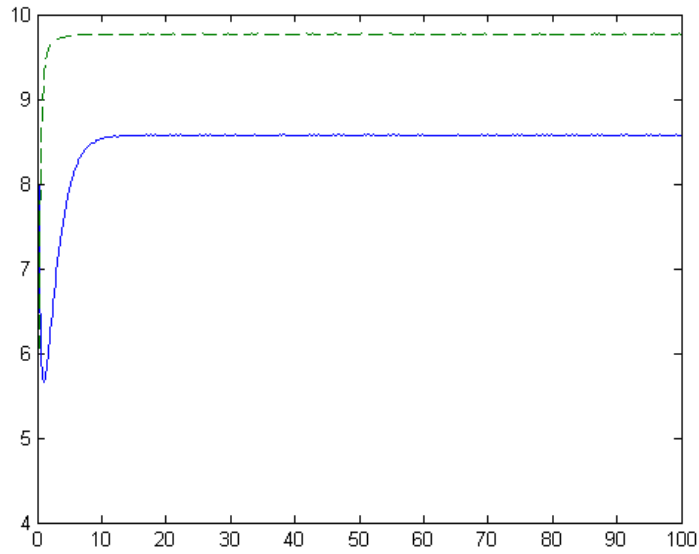


Figura 3.17: Soluciones para condición inicial $(10, 4)$.

presas en este caso decrecen hasta alcanzar un mínimo luego crecen hasta estabilizarse manteniendo la cantidad de presas inferior que la de los depredadores.

■ *SEGUNDO CASO*

Las consideraciones previstas son: $r=0.3$, $K=10$, $q=0.9$, $p=0.8$, $c=0.9$, $d=0.5$, determinando una tasa de crecimiento de las presas muy baja y una tasa de mortalidad de los depredadores bastante alta a pesar que el beneficio obtenido y la eficacia del alimento son también valores altos.

El diagrama fase para esta situación es (figura 3.18):

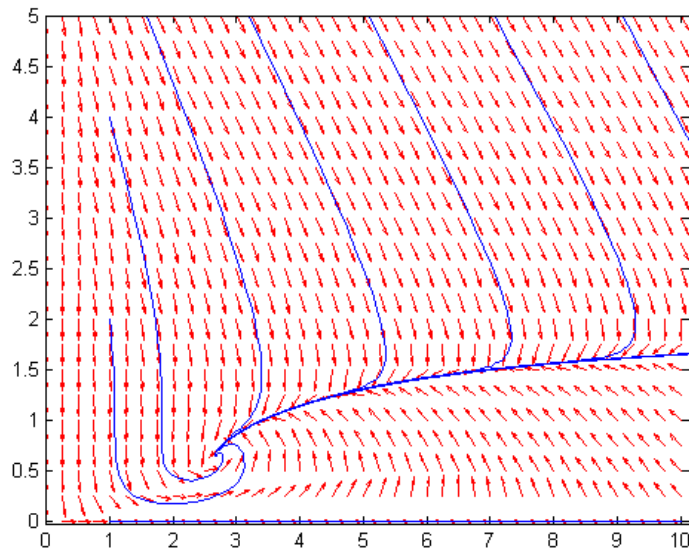


Figura 3.18: Diagrama de fases para el segundo caso del modelo presas con refugio.

Cambiando los valores iniciales obtenemos:

1. Cantidad de presas inferior a la cantidad de depredadores.

La condición inicial es el punto $(1, 3)$. (figura 3.19)

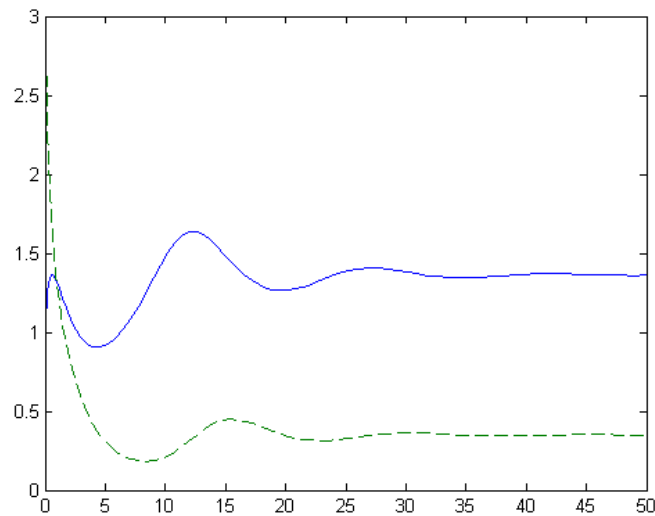


Figura 3.19: Soluciones para condición inicial $(1, 3)$.

Hay variaciones en el crecimiento y decrecimiento de las poblaciones pero luego se llega a un punto de estabilidad manteniendo la cantidad de presas superior a la cantidad de depredadores.

2. Cantidad de presas igual a la cantidad de depredadores.

Tomando como condición inicial el punto $(5, 5)$. (figura 3.20)

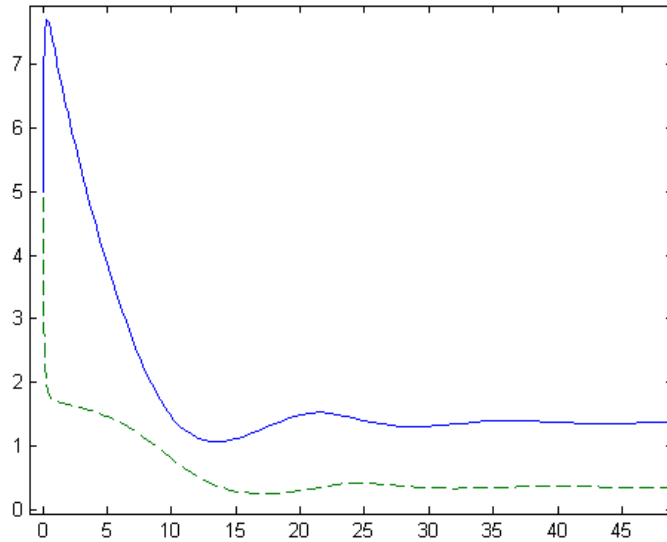


Figura 3.20: Soluciones para condición inicial $(5, 5)$.

Las presas crecen hasta encontrar un valor máximo para luego decrecer pero manteniéndose siempre superior a la población de depredadores, mientras que los depredadores decrecen inicialmente de manera acelerada, pero luego se suaviza hasta llegar al equilibrio.

3. Cantidad de presas superior a la cantidad de depredadores.

El punto $(10, 1)$ es ahora la condición inicial seleccionada. (figura 3.21)

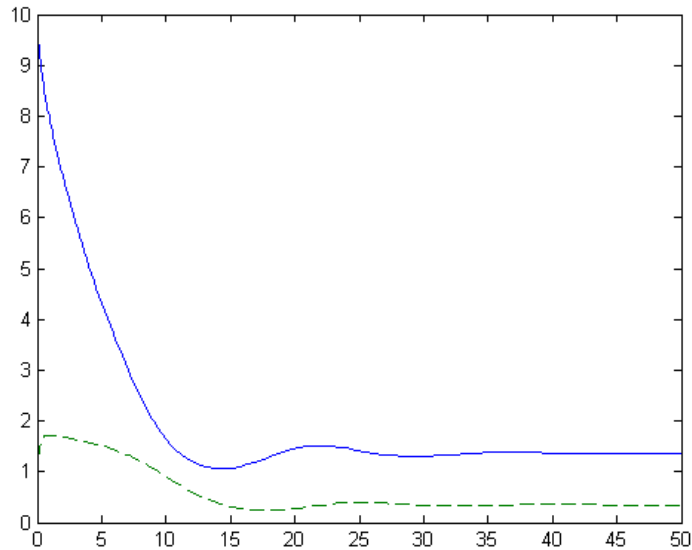


Figura 3.21: Soluciones para condición inicial $(10, 1)$.

La población de los depredadores decrece provocando ciertas variaciones hasta encontrar los puntos de estabilidad, mientras que los depredadores muestran un leve crecimiento para luego decrecer y encontrar la estabilidad.

■ **TERCER CASO**

Las consideraciones previstas son: $r=\frac{1}{121}$, $K=10$, $q=0.025$, $p=\frac{1}{12}$, $c=\frac{1}{11}$, $d=1$, observamos una tasa de crecimiento de las presas sumamente baja y una tasa de mortalidad superior a ésta, una beneficio obtenido mayor que la tasa de consumo de las presas y una eficacia total de la posibilidad de encontrar refugio

El diagrama fase para esta situación es (figura 3.22):

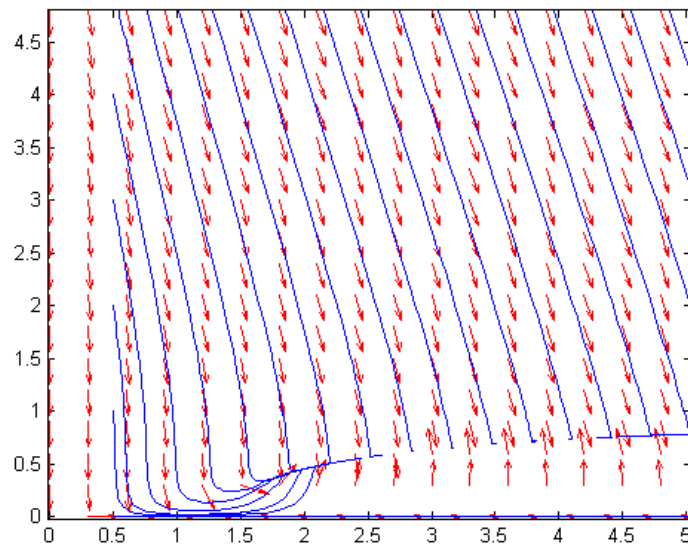


Figura 3.22: Diagrama de fases para el tercer caso del modelo presas con refugio.

Cambiando las condiciones iniciales tenemos:

1. Cantidad de presas inferior a la cantidad de depredadores.

Como condición inicial se ha colocado el punto (1, 5) (figura 3.23):

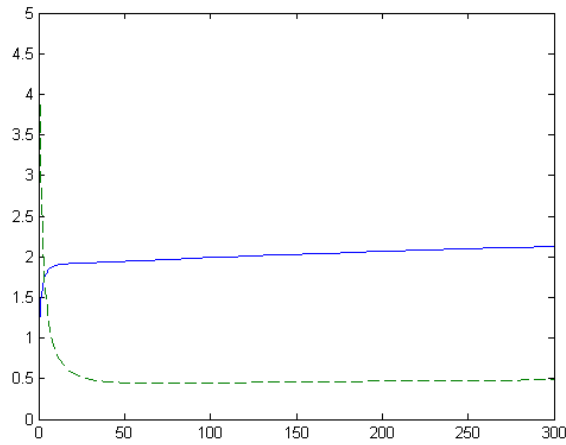


Figura 3.23: Soluciones para condición inicial $(1, 5)$.

2. Cantidad de presas igual a la cantidad de depredadores.

Los valores iniciales son las coordenadas del punto $(0,5, 0,5)$ (figura 3.24):

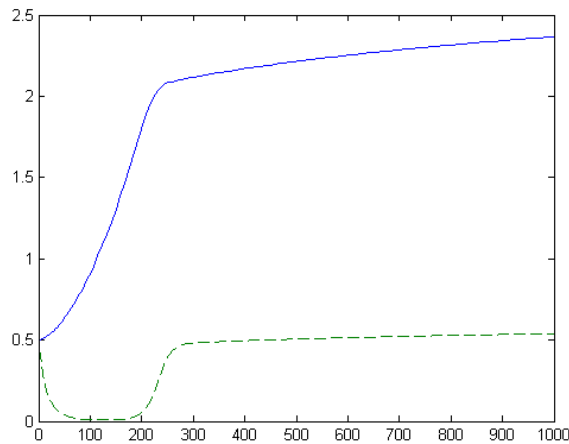


Figura 3.24: Soluciones para condición inicial $(0,5, 0,5)$.

3. Cantidad de presas superior a la cantidad de depredadores.

El valor inicial es el punto (10, 5) (figura 3.25)

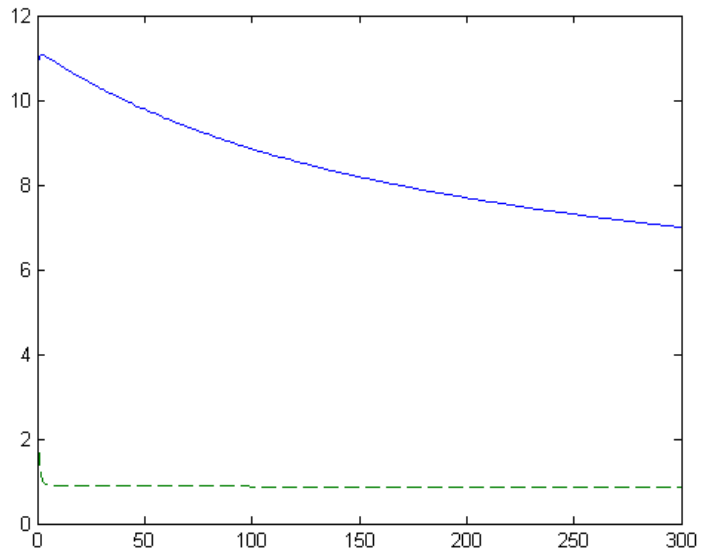


Figura 3.25: Soluciones para condición inicial (10, 5).

En las tres gráficas se observan fluctuaciones propias de acuerdo a los valores iniciales, pero cabe resaltar que a comparación con los casos anteriores le lleva al sistema demasiado tiempo para lograr la estabilización.

El siguiente cuadro sintetiza lo expuesto.

Parámetros	r	K	q	p	c	d	Observación
Caso 1	0.8	10	0.5	0.5	0.1	0.1	Los depredadores siempre decrecen hasta estabilizarse y las presas crecen hasta encontrar la estabilización
Caso 2	0.3	10	0.9	0.8	0.9	0.5	Las dos poblaciones presas crecen con tendencia a estabilizarse mientras que los depredadores decrecen hasta llegar casi a la extinción pero luego tienden a crecer y estabilizarse se observa que el número de presas supera al número de depredadores.
Caso 3	$\frac{1}{121}$	10	0.025	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{11}$	1	Las presas crecen hasta llegar a un máximo luego ambas poblaciones decrecen buscando la estabilización.

3.2.3. Modelo de Leslie

En este modelo se propone que el crecimiento de las presas y el crecimiento de los depredadores son de tipo logístico y la interacción depredador-presa es lineal.

Las ecuaciones para el modelo son:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - qxy \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right) \end{cases}$$

Donde:

- r : es la tasa de crecimiento percapita de las presas.
- K : es la capacidad de soporte del medio ambiente.
- q : es la tasa de consumo de los depredadores o mortalidad de las presas.
- s : es la tasa de crecimiento percapita de los depredadores.
- n : es la calidad del alimento que provee nuevos nacimientos de depredadores.

Para poder resolver el sistema se ha creado el archivo `lotkales.m` con las siguientes instrucciones:

```
function yprima = lotkales(t,y)
r=.....; K=.....; q=.....; s=.....; n=.....;
yprima = [r*y(1)*(1-y(1)/K)-q*y(1)*y(2);s*y(2)*(1-y(2)/(n*y(1))];
```

Y para observar las soluciones de manera gráfica se invocan las funciones con los instrucciones siguientes:

```
[t,y]= ode45(@lotkales,[... ..],[...,...])
plot(t,y(:,1),t,y(:,2),'-')
```

Colocando, lógicamente, los valores correspondientes a la integración y las condiciones iniciales.

■ *PRIMER CASO*

Se han tomado en cuenta las consideraciones siguientes: $r=0.2$, $K=100$, $q=0.01$, $s=0.2$, $n=0.5$. En este caso suponemos una tasa de natalidad de las presas r muy baja, una capacidad de soporte K elevada para las condiciones iniciales supuestas, una tasa de mortalidad de las presas q sumamente baja, una tasa de crecimiento de los depredadores r igual a la tasa de crecimiento de las presas y que la calidad de alimento que proporcionan las presas n es bastante beneficiosa.

El diagrama fase para esta situación es (figura 3.26):

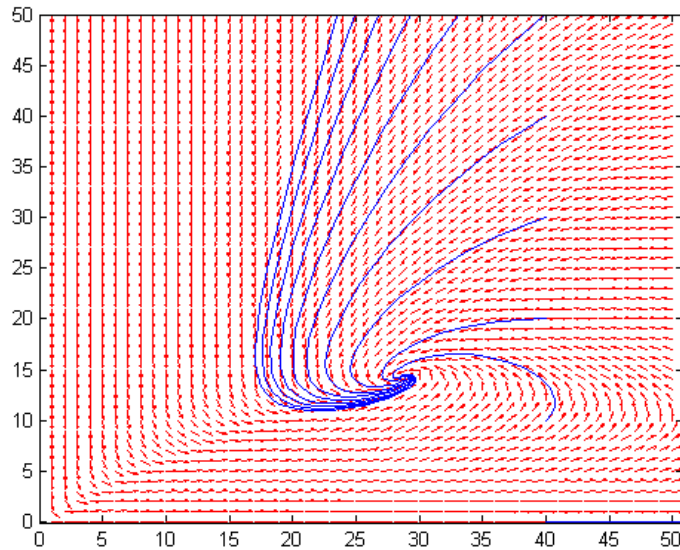


Figura 3.26: Diagrama de fases para el primer caso del modelo de Leslie.

Al cambiar las condiciones iniciales se obtiene lo siguiente:

1. Cantidad de presas mayor que la cantidad de depredadores.

Se ha considerado como condición inicial el punto $(40, 5)$ (figura 3.27):

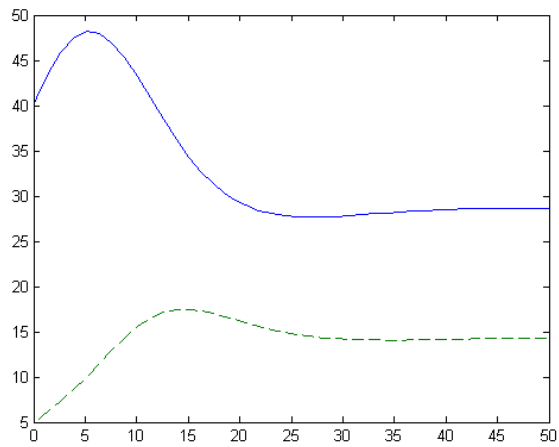


Figura 3.27: Soluciones para condición inicial $(40, 5)$.

2. Cantidad de presas igual a la cantidad de depredadores.
Considerando la condición inicial $(30, 30)$ (figura 3.28):

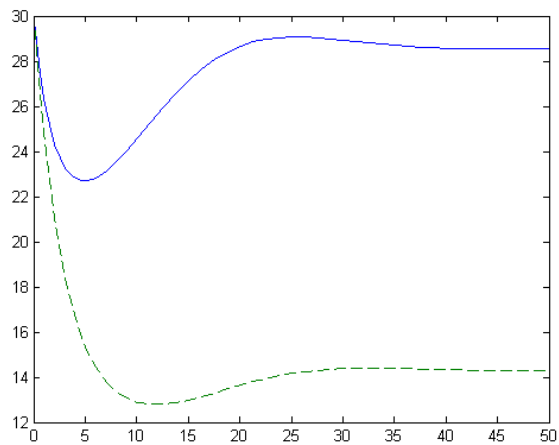


Figura 3.28: Soluciones para condición inicial $(30, 30)$.

3. Cantidad de presas inferior a la cantidad de depredadores.

Se ha considerado la condición inicial $(5, 40)$ (figura 3.29):

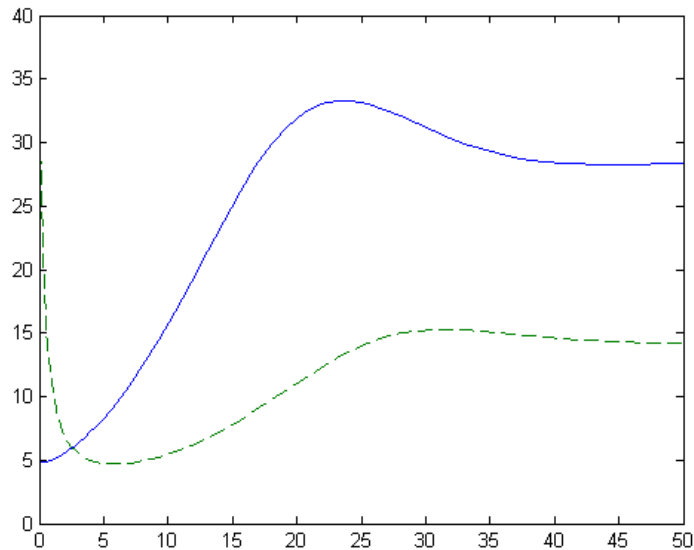


Figura 3.29: Soluciones para condición inicial $(5, 40)$.

En el primer y tercer caso el comportamiento es similar, las presas y los depredadores crecen hasta encontrar un máximo, luego decrecen hasta obtener los valores de estabilidad. Para el segundo caso, la situación es lo contrario, las dos poblaciones decrecen hasta encontrar un mínimo luego crecen suavemente hasta encontrar la estabilidad.

■ *SEGUNDO CASO*

Consideraciones: $r=0.5$, $K=2$, $q=0.5$, $s=0.75$ y $n=0.8$. En este caso se ha contemplado la posibilidad de valores extremos: una tasa de crecimiento y de mortalidad de las presas igual, una capacidad de soporte del medio bastante bajo, en comparación con las condiciones iniciales que son superiores a este valor y un tasa de crecimiento de los depredadores superior a la tasa de crecimiento de las presas obteniendo un beneficio bastante alto. El diagrama de fases es mostrado en la siguiente gráfica (figura 3.30):

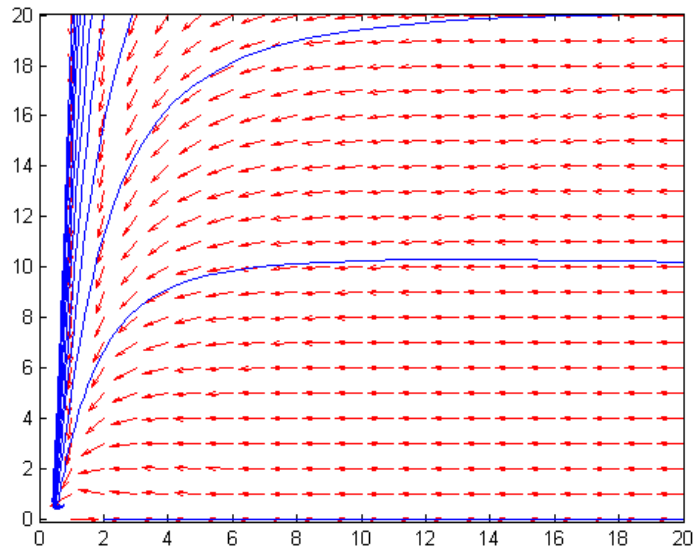


Figura 3.30: Diagrama de fases para el segundo caso del modelo de Leslie.

1. Cantidad de presas superior a la cantidad de depredadores.

Se ha tomado como condición inicial $(5, 1)$ obteniendo como resultado la siguiente gráfica (figura 3.31):

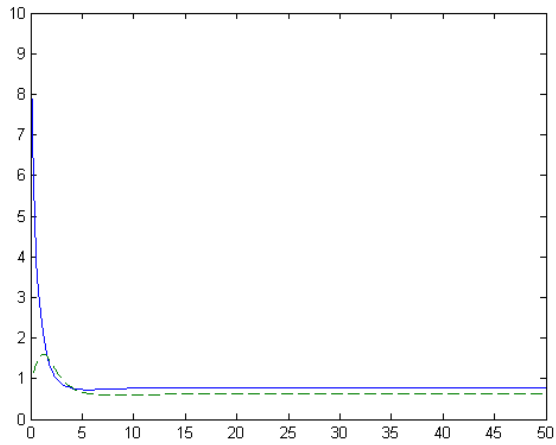


Figura 3.31: Soluciones para condición inicial (5, 1).

2. Cantidad de presas inferior a la cantidad de depredadores.

Se ha tomado como condición inicial (10, 50) obteniendo la gráfica siguiente como resultado (figura 3.32):

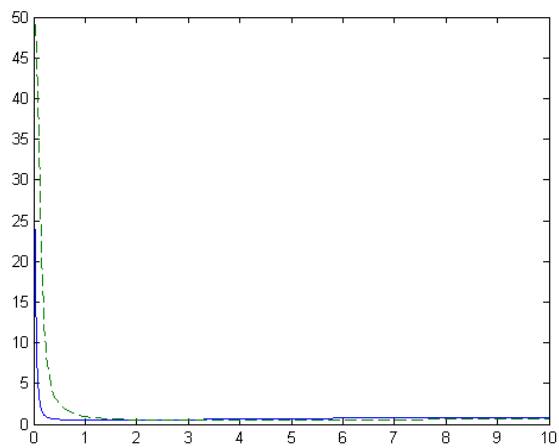


Figura 3.32: Soluciones para condición inicial (10, 50).

3. Cantidad de presas inferior a la cantidad de depredadores.

Se ha tomado como condición inicial $(1, 5)$ observando la siguiente gráfica (figura 3.33):

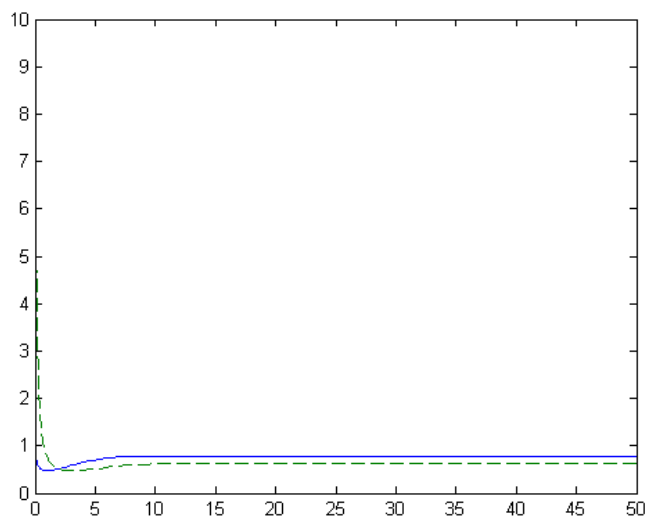


Figura 3.33: Soluciones para condición inicial $(1, 5)$.

Dadas las condiciones supuestas en las tres gráficas se observa un decrecimiento acelerado de ambas poblaciones hasta llegar casi a su extinción, alcanzado los valores de estabilización sumamente bajos.

■ *TERCER CASO*

Consideraciones: $r=0.5$, $K=50$, $q=0.3$, $s=0.25$ y $n=0.5$. En este caso se propone una tasa de crecimiento superior a la tasa de mortalidad de las presas, una capacidad de soporte del medio superior a las condiciones iniciales y un tasa de crecimiento de los depredadores inferior a la tasa de crecimiento de las presas obteniendo un beneficio bastante alto. El diagrama fase obtenido es (figura 3.34):

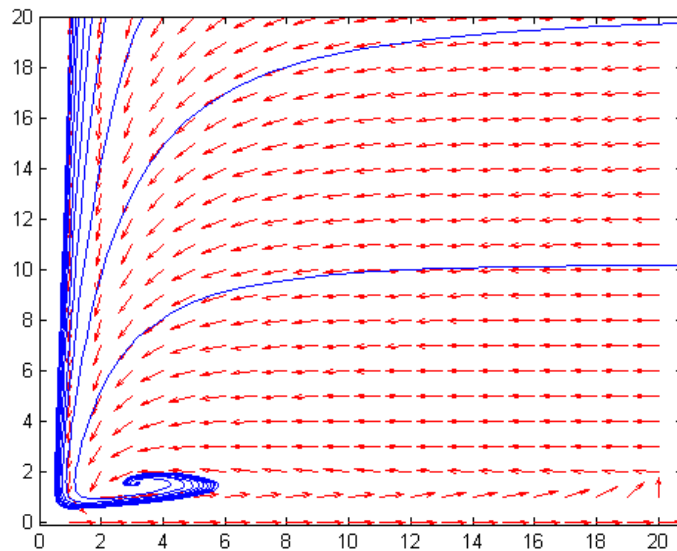


Figura 3.34: Diagrama de fases para el tercer caso del modelo presas con refugio.

1. Cantidad de presas superior a la cantidad de depredadores.

Se ha tomado como condición inicial $(25, 5)$ observando la siguiente gráfica (figura 3.35):

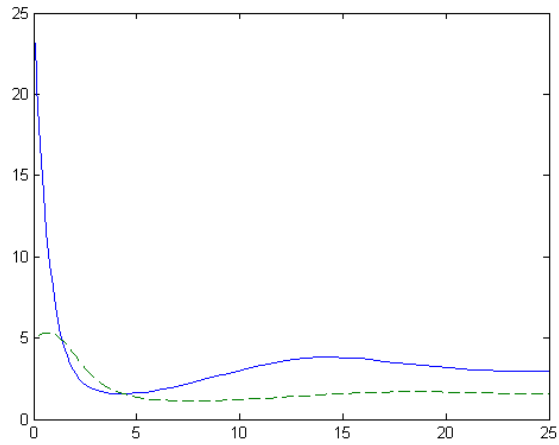


Figura 3.35: Soluciones para condición inicial $(25, 5)$.

2. Cantidad de presas igual a la cantidad de depredadores.

Se ha tomado como condición inicial $(25, 25)$ observando la siguiente gráfica (figura 3.36):

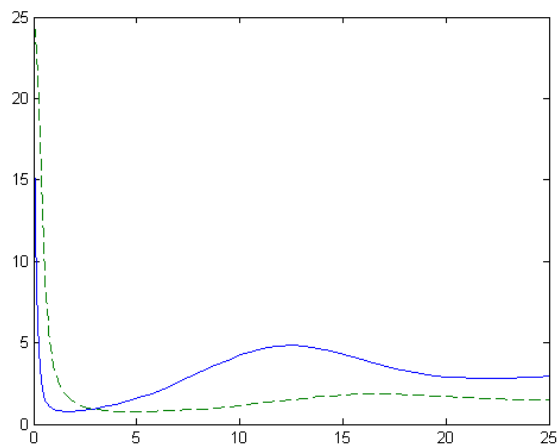


Figura 3.36: Soluciones para condición inicial $(25, 25)$.

3. Cantidad de presas inferior a la cantidad de depredadores.

Se ha tomado como condición inicial (1, 15) observando la siguiente gráfica (figura 3.37):

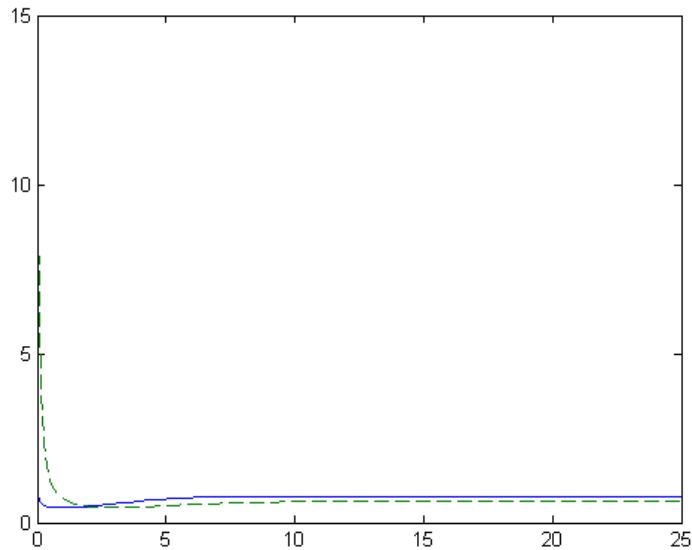


Figura 3.37: Soluciones para condición inicial (1, 15).

En el primer y segundo se observan fluctuaciones variadas, intersectándose las poblaciones en algunos instantes, para luego encontrar la estabilidad de ambas. Para el tercer caso se observa un decrecimiento acelerado, hasta casi llegar a la extinción.

El siguiente cuadro resume lo anteriormente expuesto:

Parámetros	r	K	q	s	n	Observación
Caso 1	0.2	100	0.01	0.2	0.5	Las dos poblaciones tienden a crecer hasta llegar a un punto máximo y luego decrecen hasta estabilizarse y las presas siempre superan a los depredadores.
Caso 2	0.5	2	0.5	0.75	0.8	Ambas poblaciones tienden a decrecer hasta llegar a estabilizarse el número de presas siempre supera al número de depredadores.
Caso 3	0.5	50	0.3	0.25	0.5	Las poblaciones fluctúan hasta llegar a una estabilización

Bibliografía

- [1] LOMEN, D. Y LOVCLOCK D. Ecuaciones diferenciales a través de gráficas modelos y datos. México: CECSA. Primera edición 2000.
- [2] ORDOÑEZ, PABLO. Cálculo. Delta publicaciones universitarias. Primera edición 2005.
- [3] ROMERO, J. Y GARCIA, C. Modelos y sistemas dinámicos. Universidad de Cádiz, servicios de publicaciones. Tercera edición 1998.
- [4] BRAUN, M. Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Grupo editorial Iberoamericana. Primer edición 1983
- [5] JIMÉNEZ LÓPEZ, VICTOR. Ecuaciones diferenciales: cómo aprenderlas, cómo enseñarlas. Universidad de Murcia. Primera edición 2000.
- [6] THE MATH WORKS, INC. Matlab, The language of technical computing. Prentice Hall. Tercera edición 1998.
- [7] CAÑADA, A. De las matemáticas para biólogos a la biología matemática: Un punto de vista particular a través del análisis matemático y la dinámica de poblaciones. Disponible en: <http://www.ugr.es/acanada/investigacion/jaen99.pdf>.
- [8] IGLESIAS, D. Simulación de dinámicas de poblaciones de lepidopteros forestales. Disponible en:

http://www.sea-entomologia.org/PDF/ZAPATERI_6/Z06-002-043.pdf.

- [9] CARREÑO, R. CABELLO, T. Modelos matemáticos de depredador-presa en cultivos hortícolas en invernadero en el Sudeste de la Península Ibérica. Disponible en:

http://biblioteca.universia.net/html_bura/ficha/params/id/26042050.html.

- [10] ELKINTO, J. El papel de la ecología de poblaciones y de los modelos de población en el control biológico . Disponible en:

http://www.avocadosource.com/books/vandriescherg2007/VanDriescheRG2007_SEC04_Chapter10.pdf.

- [11] GONZÁLEZ OLIVARES, EDUARDO. Dinámicas de modelos depredador-presa simples con uso de refugio por las presas. Una pequeña revisión y nuevos resultados. Disponible en:

<http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:UHQ9GKd-w0oJ:ima.ucv>

[.cl/BIOMATVIICH/webanexas/BIOMAT_VI/Gonzalez_Eduardo.ppt+dinamicas+de](http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:UHQ9GKd-w0oJ:ima.ucv)

[+modelos+depredador-presa+simples+con+uso+de+refugio+eduardo+gonzalez](http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:UHQ9GKd-w0oJ:ima.ucv)

[&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=sv](http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:UHQ9GKd-w0oJ:ima.ucv)