UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# MODELOS DE OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA EN LA GENERACIÓN TÉRMICA DE ENERGÍA ELÉCTRICA

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:

JOSÉ DAVID ESCOBAR MUÑOZ
DANIEL ALEJANDRO RIVAS RIVAS

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN ESTADÍSTICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, AGOSTO DE 2013

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

# MODELOS DE OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA EN LA GENERACIÓN TÉRMICA DE ENERGÍA ELÉCTRICA

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR:


JOSÉ DAVID ESCOBAR MUÑOZ

DANIEL ALEJANDRO RIVAS RIVAS


ASESORES:

DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES

DR. FRANCISCO JAVIER MARTÍN CAMPO

CIUDAD UNIVERSITARIA, AGOSTO DE 2013

**AUTORIDADES**

RECTOR:
ING. MARIO ROBERTO NIETO LOVO

SECRETARIA GENERAL:
DRA. ANA LETICIA ZAVALETA DE AMAYA

FISCAL GENERAL:
LIC. FRANCISCO CRUZ LETONA

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

DECANO:
MSC. MARTÍN ENRIQUE GUERRA CÁCERES

SECRETARIO:
LIC. CARLOS ANTONIO QUINTANILLA APARICIO

**ESCUELA DE MATEMÁTICA**

DIRECTOR:
DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES

SECRETARIA:
MSC. ALBA IDALIA CÓRDOVA CUÉLLAR

CIUDAD UNIVERSITARIA, AGOSTO DE 2013

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**
**ESCUELA DE MATEMÁTICA**

______________________________

ASESOR INTERNO
**DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES**
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

______________________________

ASESOR EXTERNO
**DR. FRANCISCO JAVIER MARTÍN CAMPO**
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

CIUDAD UNIVERSITARIA, AGOSTO DE 2013

*A nuestros padres y hermanos,*

*familiares, buenos docentes y amigos.*

# Índice general

# Índice de tablas

# Índice de figuras

# Agradecimientos

*Agradecemos a Dios, a nuestros padres, a nuestros asesores (Dr. Nerys Funes y Dr. Javier Martín), a los buenos docentes de la facultad de Ciencias Naturales y Matemática por ayudarnos en nuestra formación y especialmente a nuestra amiga la Dra. Begoña Vitoriano por todo su apoyo.*

# Introducción

La toma de decisiones es inherente a la mayoría de los aspectos de las finanzas, la economía, la industria y las actividades sociales. Una herramienta que actualmente proporciona decisiones más fiables es la *Optimización*, campo en el que confluyen la Matemática y las Ciencias de la Computación. El propósito de ésta es construir y resolver de forma efectiva modelos realistas de la situación que se estudia, con objeto de permitir que enacargados de la toma de decisiones exploren una amplia variedad de posibles alternativas, pudiendo elegir entre ellas la mejor.

La planificación de operaciones es una de las principales actividades en una empresa o entidad para tomar decisiones: Planificar operaciones valorando las distintas opciones y eligiendo aquéllas que llevan a un mejor funcionamiento. No cabe duda de que es fundamental para la estrategia de la organización sin importar cuál sea su actividad. Numerosos problemas de las organizaciones se resuelven usando modelos matemáticos para poder así mejorar el funcionamiento de las mismas. Estos modelos son formulados haciendo un profundo análisis del problema y luego se resuelven haciendo uso de las herramientas computacionales actuales. Los componentes y la formulación de este tipo de problemas se presentan en este trabajo, describiendo cada uno de los componentes y las herramientas necesarias para resolverlos. Además se presenta una notación sencilla y útil para una mejor comprensión de la formulación y solución de los problemas.

En los Capítulos 1 y 2, se presentan los componentes básicos de un problema de Programación Lineal de manera Determinista, así como los de un problema de Programación Lineal de manera Estocástica. También la descripción y presentación de un árbol de escenarios que es una herramienta muy útil para la comprensión y solución de un problema de Programación Lineal Estocástica. En el Capítulo 3, se describen los modelos de generación de energía eléctrica y sus componentes. Estos modelos son importantes ya que la efectiva planificación y control de la generación de energía eléctrica es una de las principales preocupaciones de las empresas generadoras en el entorno de mercado actual. Estas preocupaciones surgen debido a las diversas fuentes de incertidumbre existentes en la demanda y en los costos de generación de energía. Por ello, la complejidad del proceso de toma de decisiones es elevada dada la incertidumbre inmersa en ella. Estas empresas deben decidir cuándo y cuánta energía generar para poder así satisfacer la demanda al menor costo posible, ya que actualmente hablar de energía es también hablar de economía. Por ello las empresas generadoras de energía deben tener en cuenta todos los factores que causan costos para la producción y satisfacción de la demanda. Así surge la necesidad de estudiar y analizar este fenómeno de la realidad. En este trabajo se buscará identificar cada uno de los elementos que influyen en la generación térmica de energía eléctrica e identificar el tipo de mercado eléectrico que existe en El Salvador y las diferentes empresas generadoras y poder así plantear un modelo que describa este problema y obtener la solución a éste haciendo uso del software GAMS (usando una licencia temporal) para su formulación y será resuelto, para poder hacer su interpretación.

# Objetivos

## General

- Estudiar la Optimización Estocástica y realizar una aplicación de los modelos de optimización a la generación térmica de energía eléctrica.

## Específicos

- Estudiar los modelos Estocásticos de Programación Matemática.
- Efectuar la aplicación en la resolución de un problema de Programación Estocástica por vía determinista y estocástica y realizar una comparación entre ellos.
- Describir los modelos utilizados en la planificación de generación de energía eléctrica.
- Aplicar la Programación Lineal Estocástica para resolver un problema de generación térmica de energía eléctrica.

# Antecedentes y Justificación

## Antecendentes

La Investigación Operativa (IO) es la aplicación del método científico para asignar los recursos o actividades de forma eficaz en la gestión y organización de sistemas complejos, se puede decir que su inicio se obtuvo a finales de los años 30.

Actualmente la IO se está aplicando en muchas actividades. Éstas, han ido más allá de las aplicaciones militares e industriales, para incluir hospitales, instituciones financieras, bibliotecas, planificación urbana, sistemas de transporte y sistemas de comercialización y modelos de energía eléctrica, por ejemplo:

- Modelos Operativos de Gestión, Begoña Vitoriano (2009).
- Optimización Estocástica de la operación a medio plazo de una empresa generadora, Pilar Meneses de Quevedo (2009).

En estos trabajos se presentan problemas característicos de programación lineal y entera, que por su implementación matemática, es una de las áreas más importantes y activas de la IO. Estos problemas se utilizan como referencia y clasificación para otros problemas. Algunos de ellos son modelados bajo incertidumbre. Con las herramientas actuales, la optimización de este tipo de modelos no presenta dificultades, al menos para problemas de tamaño moderado.

Los modelos de optimización estocástica o bajo incertidumbre que han sido más ampliamente estudiados y utilizados son los llamados *Problemas lineales de dos etapas*. En éstos, el encargado de la toma de decisiones lleva a cabo una acción en la primera etapa, después de la cual tiene lugar un experimento aleatorio, siendo las decisiones de la primera etapa determinantes para los resultados en la segunda. Entonces, se puede tomar una *decisión con recurso* en la segunda etapa, de forma que compensen cualquier efecto negativo que pueda haber ocurrido como consecuencia de las decisiones de primera etapa.

## Justificación

La Optimización Estocástica apareció en 1955 con los trabajos de Dantzig, quien desarrolló el Método Simplex de Programación Lineal en 1947, y Beale, en la misma década alcanzó con Markowitz una aplicación muy destacada al problema de selección de carteras.

El progreso impresionante de la Optimización Estocástica fue el desarrollo de la computadora digital que, con sus tremendas capacidades de velocidad de cómputo, de almacenamiento y recuperación de información, ha permitido la solución de problemas de tamaño muy grande y ha devuelto interés al tema de la Optimización Estocástica produciendo además un avance en la teoría matemática que la sustenta. Actualmente, es una de las técnicas más prometedoras y es con la que más avances se están logrando con el propósito de desarrollar modelos más realistas para mejorar la gestión de sistemas, ya que considera parte de la incertidumbre que los rodean.

Es muy notable el rápido crecimiento del tamaño y la complejidad de las organizaciones humanas (empresas) que se ha dado en estos últimos tiempos. Tal tamaño y complejidad nos hace pensar que una sola decisión equivocada puede afectar los intereses y objetivos de la organización y en ocasiones pueden pasar años para rectificar tal error. También el ritmo de la empresa implica que las decisiones deben ser tomadas más rápidamente que nunca, pues el hecho de posponer la acción puede dar una decisiva ventaja a los competidores en este mundo de la competencia y ocasionar pérdidas numerosas.

La clara dificultad de tomar decisiones ha hecho que el hombre se aboque en la búsqueda de una herramienta o método que le permita tomar las mejores decisiones de acuerdo con los recursos disponibles y los objetivos que persigue. Tal herramienta recibió el nombre de Investigación de Operaciones, debido a que sus primeras aplicaciones fueron enfocadas a las operaciones militares de la segunda guerra mundial, donde la escasez de recursos era determinante.

A pesar del crecimiento y gran aplicabilidad de los modelos de optimización, en la Escuela de Matemática solo se desarrolla una asignatura sobre esta área, llamada Métodos de Optimización, donde prácticamente se estudia la teoría del Método Simplex (desarrollado en 1947). Motivados por tal método, investigamos sobre las aplicaciones de éste, llegando así a la Investigación Operativa, que es un área matemática muy extensa, con mucha bibliografía existente y variedad de aplicaciones en la solución de problemas reales, utilizando los Modelos de Optimización Determinista y Estocástica.

Consideramos que, debido a los pocos especialistas en IO que tiene la Escuela de Matemática, no se tiene registro de trabajos de investigación en tal área y en particular en los Modelos Matemáticos Estocásticos aplicados a la optimización de generación de energía eléctrica, por lo que éste trabajo de tesis sería el primero en esta área de gran aplicación en la solución de problemas de optimización, lo que justifica el desarrollo de este proyecto.

Por otra parte, es factible desarrollar este trabajo de grado ya que disponemos de suficiente bibliografía, buenos asesores y el software que utilizaremos es GAMS con una licencia temporal.

# Planteamiento del Problema

El rápido crecimiento de la población humana trae consigo consecuencias tales como una mayor demanda de recursos. Entre estos están los alimentos y otras necesidades básicas y de servicios tales como la energía eléctrica. Debido a ello, la generación de energía eléctrica eléctrica toma un papel determinante para poder satisfacer la demanda que se tiene o se puede tener en un determinado periodo de tiempo. Su consecuencia inmediata es un costo de generación de energía y por ello, es necesario buscar herramientas y métodos para poder satisfacer la demanda de energía al menor costo posible. Esto se logra por medio de una planificación de sistemas de energía eléctrica. Estos sistemas están sujetos a incertidumbre. La incertidumbre puede deberse a la carencia de datos fiables, errores de medida o tratarse de parámetros que representan información sobre el futuro. En el caso de la planificación de sistemas de energía eléctrica, la incertidumbre surge principalmente en: la demanda y precios futuros de la electricidad o de los combustibles, las aportaciones hidráulicas o la disponibilidad de los elementos de generación y red. No toda la incertidumbre se encuentra en el mismo horizonte temporal. Debido a esto, es necesario formular modelos matemáticos para poder resolver este tipo de problemas, y así obtener la mejor solución a éstos haciendo uso de las herramientas computacionales que se tengan disponibles.

El modelo que se presentará en este trabajo de investigación podrá ser utilizado para obtener una planificación de muy corto plazo, y más concretamente, con horizonte temporal de 24 horas. Los periodos de tiempo que se consideran son de una hora, no existiendo otra subdivisión del tiempo. El fin del modelo es determinar la programación horaria en potencia de los grupos generadores de energía eléctrica de una empresa cuando existe una programación previa de energía y reserva. Sin embargo, para entender bien estos fines y cómo y cuándo se hace uso de este modelo, son necesarias algunas definiciones y aclaraciones previas sobre los elementos considerados.

Se van a describir los elementos que incluye este modelo, y en especial, los criterios que se utilizan para valorar la planificación. En primer lugar, los elementos que intervienen en el modelo son los siguientes:

- De las unidades de oferta:
  Pertenencia a una empresa (agente), límites inferior y superior de potencia, grupos incluidos en la unidad de oferta, programa de energía horario, programa de reserva secundaria.
- De los grupos generadores:
  Pertenencia a una unidad de oferta, características técnicas.
- Cumplir el programa de energía agregado de la empresa.
- Cumplir el programa de energía de cada unidad de oferta.
- Cumplir el programa de reserva secundaria de cada unidad de oferta.
- Minimizar los costos de operación.
- Suavidad en el programa de potencia.

En este trabajo de investigación, se propondrá un modelo de optimización estocástica multietapa que presente diferentes escenarios para optimizar la generación térmica de energía eléctrica. A continuación se presentan algunos elementos que serán considerados en dicho modelo:

- **Objetivo:** Minimizar costos de generación (costo de combustible, arranque y parada, etc).
- **Datos:** se consideran datos conocidos:
  1. Demanda térmica en la hora $h$.
  2. Nivel de reserva rodante con respecto a la demanda.
  3. Probabilidad del escenario $s$.
- **Variables:** Se dispone de las variables.
  1. Potencia acoplada del grupo térmico $t$ en la hora $h$.
  2. Acoplamiento del grupo térmico $t$ en la hora $h$, variable binaria $\{0,1\}$.
  3. Arranque del grupo térmico $t$ en la hora $h$, variable binaria $\{0,1\}$.
  4. Parada del grupo térmico $t$ en la hora $h$, variable binaria $\{0,1\}$.

- **Restricciones:** las restricciones que se deben satisfacer son:

    1. Suministrar la demanda en cada hora.
    2. Mantener un cierto nivel de reserva rodante.
    3. Respetar parámetros (mínimos técnicos, rampas subida y bajada, etc.).

Con la información anterior, es posible formular nuestra función objetivo y las respectivas restricciones que se deben cumplir. Para resolver el problema descrito de acuerdo a la información que se tiene, es necesario utilizar modelos matemáticos multietapa, siendo en este caso cada etapa una hora.

# Capítulo 1

# Modelos de Optimización Determinista

## 1.1. Introducción a la Investigación Operativa

Con frecuencia la Investigación Operativa (IO) es denominada *Ciencia de la Administración*. Esta ciencia, tal como la conocemos hoy, se desarrolló a partir de los grandes éxitos obtenidos mediante su aplicación a la resolución de problemas de organización militar en la segunda Guerra Mundial. Por ello recibió el nombre de *Investigación Operativa* (Operations Research). Cuando esta técnica fue introduciéndose en el mundo de los negocios como ayuda a la toma de decisiones, se le dió el nombre de *Ciencia de la Administración* o *Ciencia de la Gestión* (Management Science). En la actualidad, ambas nomenclaturas van abriéndose paso como alternativa a investigación operativa.

La IO es considerada una rama de la Matemática consistente en el uso de modelos matemáticos, estadística y algoritmos con el objetivo de buscar regularidades en el comportamiento de un fenómeno y realizar un proceso de toma de decisiones. Frecuentemente, trata el estudio de complejos sistemas reales, con la finalidad de mejorar (u optimizar en el mejor de los casos) el funcionamiento del mismo. La IO permite el análisis de la toma de decisiones en numerosos problemas, como en aquellos en los que la escasez de recursos hace necesaria la intervención de la optimización, o sin que haya dicha escasez, tratando de mejorar un sistema cotidiano, para determinar cómo se pueden maximizar o minimizar los recursos.

### 1.1.1. Características de la Investigación Operativa

A menudo se utiliza el término de Investigación de Operaciones para referirse a la IO. Hablar de "Investigación de Operaciones" es utilizar la IO para "hacer investigación sobre las operaciones" que tienen lugar en los distintos campos de las organizaciones humanas.

Ante el tremendo avance que se ha dado en casi todas las ciencias en las últimas décadas, ya no es conveniente querer saber un poco de todo, sino más bien, especializarse en alguna rama de la ciencia. Los problemas que se presentan en las organizaciones no se pueden resolver fácilmente por un solo especialista. Por el contrario, son problemas multidisciplinarios, cuyo análisis y solución requieren de la participación de varios especialistas. Estos grupos interdisciplinarios, necesariamente requieren un lenguaje común para poder entenderse y comunicarse, y es ahí donde la IO viene a ser ese puente de comunicación.

El enfoque de la IO sigue las pautas del método científico. En particular, el proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema y sigue con la construcción de un modelo científico (por lo general matemático) que intenta abstraer la esencia del problema real. En este punto se propone la hipótesis de que el modelo es una representación lo suficientemente precisa de las características esenciales de la situación como para que las conclusiones (soluciones) obtenidas sean válidas también para el problema real. Esta hipótesis se verifica y modifica mediante las pruebas adecuadas. Entonces, en cierto modo, la IO incluye la investigación científica creativa de las propiedades fundamentales de las operaciones. En particular, la IO trata de dar respuesta a la administración práctica de la organización. Así, para tener éxito, deberá también proporcionar conclusiones positivas y claras que pueda usar el encargado de la toma de decisiones cuando las necesite.

### 1.1.2. Estructura de los modelos empleados en Investigación Operativa

El enfoque de la IO como construcción de modelos constituye una herramienta que sirve para lograr una visión bien estructurada de la realidad. Así, el propósito del modelo es proporcionar un medio para analizar el comportamiento de los elementos de un sistema con el fin de optimizar su desempeño.

Un modelo matemático comprende principalmente tres conjuntos básicos de elementos:

1. **Variables o decisiones a realizar y parámetros.**

   Las variables de decisión son las incógnitas (o decisiones) que deben determinarse resolviendo el modelo. Los parámetros son los valores conocidos que relacionan las variables de decisión con las restricciones y la función objetivo. Los parámetros del modelo pueden ser determinísticos o probabilísticos.

2. **Ecuaciones de restricción o limitaciones.**

   Para tener en cuenta las limitaciones tecnológicas, económicas y otras del sistema, el modelo debe incluir restricciones (implícitas o explícitas) que restrinjan las variables de decisión a un rango de valores factibles.

3. **Función objetivo.**

   La función objetivo define la medida de efectividad del sistema como una función matemática de las variables de decisión. La solución óptima será aquella que produzca el mejor valor de la función objetivo, satisfaciendo las restricciones del problema.

### 1.1.3. Concepto de Optimización

Optimizar es la acción de llevar una cierta magnitud a su óptimo, es decir, a su máximo o a su mínimo. También se utilizan los nombres de maximizar o minimizar. Se optimiza todo tipo de magnitudes para las que se valora que tienen estados preferibles a otros y se quiere alcanzar el de mayor utilidad o satisfacción.

La IO se encarga de estudiar la búsqueda de la solución óptima en la medida de lo posible, al problema objeto de estudio, es decir, no es suficiente sólo mejorar el estado de las cosas, más bien, la meta es identificar el mejor curso de acción posible. Numerosos problemas requieren el uso de un alto potencial computacional que hacen que dicha búsqueda no llegue a su fin. Dichos problemas son conocidos como NP. Para afrontarlos, la IO cuenta con una rama de investigación sobre técnicas heurísticas y metaheurísticas que tratan de dar respuesta rápida al problema proporcionando buenas soluciones, pero a costa de no garantizar el óptimo. Sin embargo, este trabajo se basa en el uso de técnicas exactas.

### 1.1.4. Metodología de la Investigación Operativa

El proceso de la Investigación Operativa comprende las siguientes fases:

1. **Formulación y definición del problema.**

   En esta fase del proceso se necesita: Una descripción de los objetivos del sistema, es decir, qué se desea optimizar; identificar las variables implicadas, ya sean controlables o no; determinar las restricciones del sistema. También hay que tener en cuenta las alternativas posibles de decisión y las restricciones para producir una solución adecuada

2. **Construcción del Modelo Matemático.**

   En esta fase, se debe estudiar el modelo matemático que represente el funcionamiento del sistema con la mayor fidelidad posible. Debe ser un modelo tal que relacione a las variables de decisión con los parámetros y restricciones del sistema. Los parámetros (datos conocidos) se pueden obtener ya sea a partir de datos pasados, estimados por medio de herramientas estadísticas o aportes directamente por el experto en el problema.

3. **Solución del modelo.**

   Una vez que se tiene el modelo, se procede a derivar una solución matemática empleando las diversas técnicas y métodos matemáticos y computacionales para resolver problemas de programación matemática. Debemos tener en cuenta que las soluciones que se obtienen en este punto del proceso son matemáticas y debemos interpretarlas en el mundo real.

4. **Validación del modelo.**

   La validación de un modelo requiere que se determine si dicho modelo reproduce el comportamiento del sistema de modo adecuado en la situación real. Un método común para probar la validez del modelo es someterlo a datos pasados disponibles del sistema actual y observar si reproduce las situaciones pasadas del sistema. Como no hay seguridad de que el comportamiento futuro del sistema continúe replicando el comportamiento pasado, entonces siempre debemos estar atentos a posibles cambios del sistema con el transcurso del tiempo.

5. **Implementación de resultados.**

   Una vez obtenida la solución (o soluciones en caso de existir múltiples soluciones óptimas) del modelo, el siguiente y último paso del proceso es interpretar esos resultados y dar conclusiones y cursos de acción para la optimización del sistema. Si el modelo utilizado puede servir a otro problema, es necesario revisar, documentar y actualizar el modelo para sus nuevas aplicaciones.

### 1.1.5. Clasificación de los Problemas de Investigación Operativa

Los problemas de IO se pueden clasificar de las dos formas siguientes:

1. **Atendiendo al objetivo**
   De acuerdo a este criterio, los problemas de IO se clasifican en:

   - **Modelos de optimización**: Cuyo objetivo es maximizar (beneficio, eficiencia) o minimizar (costo, tiempo) ciertas magnitudes, teniendo en cuenta una serie de limitaciones o requisitos que restringen la decisión.
   - **Modelos de predicción**: Cuyo objetivo es describir o predecir sucesos (nivel de ventas, fechas de terminación de proyectos, número de clientes, etc.) dadas ciertas condiciones.

2. **Según la naturaleza de los datos**
   En algunos casos tendremos que ajustar el problema con un *Modelo Determinístico*, en el cual todos los datos importantes de éste se suponen conocidos, pero en otros, algunos de estos datos se consideran inciertos y normalmente vienen asociados a una probabilidad, por lo que será necesario utilizar un *Modelo probabilístico o estocástico* (ver Capítulo 2). Sin embargo, existen modelos que conviene tratar como *Híbridos* de estas dos categorías.

Una clasificación de modelos especialmente importante es el modelo de programación lineal, en el que las funciones matemáticas que aparecen tanto en la función objetivo como en las restricciones, son funciones lineales. Es posible construir modelos específicos de programación lineal que se ajustan a diversos tipos de problemas.

### 1.1.6. Áreas de aplicación de la Investigación Operativa

Como su nombre indica, IO significa “hacer investigación sobre las operaciones”. Esto detalla el enfoque y el área de aplicación. Entonces, la IO se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización. La naturaleza de la organización es esencialmente inmaterial y, de hecho, la IO se ha aplicado en los negocios, la industria, la milicia, el gobierno, los hospitales, la agricultura, el transporte, etc. Así, la gama de aplicaciones es extraordinariamente amplia tal como la que se presenta en [7], Capítulo 2. Casi todas las organizaciones más grandes del mundo y una buena proporción de las industrias más pequeñas cuentan con grupos de Investigación de Operaciones. Muchas industrias, incluyendo la aérea y de proyectiles, la automotriz, la de comunicaciones, computación, energía eléctrica, electrónica, alimenticia, metalúrgica, minera, del papel, del petróleo y del transporte, entre otras, han empleado la IO. Las instituciones financieras, gubernamentales y sanitarias están incluyendo cada vez más estas técnicas.

Para ser más específicos, se consideran algunos problemas que se han resuelto mediante algunas técnicas de IO. La programación lineal se ha usado con éxito en la solución de problemas referentes a la asignación de personal, la mezcla de materiales, la distribución y el transporte y las carteras de inversión [7].

## 1.2. Programación Matemática

La Programación Matemática es una de las herramientas principales para el desarrollo de modelos de IO. El propósito de un modelo de Programación Matemática es representar el comportamiento de un sistema con el fin de optimizar su desempeño. La importancia de utilizar un modelo matemático que represente una situación real es que permite analizar tal situación sin interferir en la operación que se realiza.

Se puede decir que la Programación Matemática fue originariamente un modo de resolver problemas de Programación mediante métodos matemáticos.

Un Modelo Matemático para apoyar la toma de decisiones, debe permitir visualizar, entender y comprender el problema que se quiere resolver, para tomar la decisión correcta. Encontrar las herramientas de apoyo para tomar las decisiones correctas es uno de los problemas más desafiantes al que los responsables de la toma de decisiones se enfrentan hoy en día. Regularmente la precisión en los modelos matemáticos para representar el mundo real va en relación directa con los costos destinados a la obtención de la información de entrada y la complejidad de dicho modelo. Muchos casos reales han sido emitidos como modelos matemáticos de optimización determinista y han sido resueltos computacionalmente.

Los modelos matemáticos tienen muchas ventajas sobre una descripción verbal del problema. Una ventaja obvia es que el modelo matemático describe un problema de forma mucho más concisa. Esto tiende a hacer que toda la estructura del problema sea más comprensible y ayuda a revelar las relaciones importantes entre causa y efecto. De esta manera indica con más claridad qué datos adicionales son importantes para el análisis. También facilita el manejo del problema en su totalidad y el estudio de todas sus interrelaciones simultáneamente. Por último, un modelo matemático forma un puente para poder emplear técnicas matemáticas poderosas, además de los ordenadores, en el análisis del problema.

Los modelos de Programación Matemática se distinguen porque pretenden representar la realidad de modo fiel mediante funciones. Estas son combinaciones de variables y parámetros en forma de restricciones y/o funciones objetivo. En general, las restricciones se deben respetar y las funciones objetivo establecen los criterios a optimizar.

Entre los tipos de modelos de uso más generalizado en Programación Matemática se encuentra la denominada Programación Lineal. Ésta, en su forma más básica, consiste en un conjunto de variables reales, que mediante combinación lineal de parámetros, permite establecer un objetivo y restricciones lineales. El conjunto de restricciones genera un poliedro n-dimensional, donde el método del

Simplex, dada una función objetivo, logrará encontrar la solución óptima que se encontrará en uno de los vértices del poliedro.

### 1.2.1. Modelado Matemático

El Modelado Matemático es un procedimiento que reconoce y verbaliza un problema para posteriormente cuantificarlo transformando las expresiones verbales en expresiones matemáticas. El Modelado Matemático es un *arte*. El proceso general del Modelado Matemático consta de cuatro pasos, que se describen a continuación.

1. **Identificar las variables de decisión**. Un paso crucial en la construcción de un Modelo Matemático es determinar aquellos factores *sobre los que el encargado de la toma de decisiones tiene control*, que normalmente se llaman variables de decisión del problema. Hay que distinguir entre lo que está a nuestro alcance cambiar (por ejemplo, la cantidad de artículos a producir de cada producto o el material a utilizar) de lo que no podemos modificar (como el número de horas de trabajo disponibles o fechas límites a cumplir), que normalmente denominaremos *parámetros*. Según el tipo de problema, lo que a veces es una variable de decisión en otros casos puede ser un parámetro o viceversa.

2. **Identificar la función objetivo**. El objetivo de la mayoría de estudios de IO, y el de todos los Modelos de Optimización, es encontrar el modo de optimizar alguna medida respetando las restricciones existentes. A la hora de encontrar la función objetivo, la pregunta que nos podemos hacer es: ¿Qué es lo que se pretende alcanzar?.

3. **Identificar las restricciones**. En la búsqueda de la solución óptima, normalmente existen ciertas restricciones (limitaciones, requisitos) que limitan nuestra decisión. Por ejemplo: los recursos disponibles (trabajadores, máquinas, material, etc.), fechas límite impuestas por los contratos, restricciones impuestas por la naturaleza del problema.

4. **Traducir todos los elementos básicos a un modelo matemático**. Una vez identificados los elementos básicos, hay que expresarlos matemáticamente.

Dependiendo de la naturaleza de las funciones matemáticas, el modelo será de un tipo u otro; por ejemplo, si todas ellas son lineales el problema será de Programación Lineal.

### 1.2.2. Enfoque de Optimización Determinista

Se consideran problemas deterministas a todos aquellos problemas matemáticos en donde se conocen con exactitud los datos que intervienen en el modelo, mientras que en otro caso, se hablará de modelos estocásticos. Estos se estudian en el Capítulo 2. Cuando se utiliza el término “Determinista” aplicado a un Modelo de Optimización, se indica que no se está considerando la posible incertidumbre existente en los datos de entrada del modelo. Es decir, tanto en la función objetivo como en el conjunto de restricciones del problema se está suponiendo que los parámetros de entrada toman un valor fijo. Es evidente que cuando realmente se conocen a priori todos los parámetros de entrada, el enfoque determinista es el más adecuado.

Los métodos para resolver estos problemas, según sean las variables y restricciones del modelo, se clasifican en:

- Programación Lineal: Las variables consideradas en el problema son continuas y el conjunto de restricciones más la función objetivo es lineal.
- Programación Lineal Entera: Las variables consideradas en el problema son enteras y el conjunto de restricciones más la función objetivo es lineal.
- Programación Lineal Entera Mixta: Las variables consideradas en el problema son de dos tipos: enteras y continuas, y el conjunto de restricciones más la función objetivo es lineal.
- Programación No Lineal: Las variables consideradas en el problema son continuas y el conjunto de restricciones o la función objetivo (en su totalidad o parte de él), es no lineal.
- Programación No Lineal Entera: Las variables consideradas en el problema son enteras y el conjunto de restricciones o la función objetivo (en su totalidad o parte de él), es no lineal.

- Programación No Lineal Entera Mixta: El conjunto de variables consideradas en el problema son de dos tipos: enteras y continuas, y el conjunto de restricciones o la función objetivo (en su totalidad o parte de él), es no lineal.

En general, un Problema Lineal Determinista de Programación Matemática puede plantearse como:

$$\begin{aligned} Z &= \text{optimizar } (c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n) \\ \text{s.a. :} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si se emplea notación matricial, la formulación breve del problema 1.1 se puede expesar como:

$$\begin{aligned} Z &= \text{optimizar } cx \\ \text{s.a. :} \quad & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde:
$x \in \mathbb{R}^n$: Es el vector de variables de decisión.
$c \in \mathbb{R}^n$: Es el vector de costos.
$A_{m\times n}$: Es la matriz de restricciones.
$b \in \mathbb{R}^m$: Es el vector de términos independientes.
$cx \in \mathbb{R}$: Es la función a optimizar. Cada variable lleva asociado un costo, por tanto, son multiplicados y el valor resultante representa el costo total del problema que debe ser optimizado.

Obsérvese que $c,\ A,$ y $b$ son parámetros del problema que se asumen conocidos.

# 1.3. Ejemplos de Aplicación

Para ilustrar parte de lo que se ha planteado anteriormente, se desarrollan dos ejemplos donde se hace uso de la programación matemática, en los cuales se observan algunos de los elementos mencionados anteriormente.

## 1.3.1. El Problema de la Dieta

Uno de los problemas clásicos por excelencia de programación lineal es el de asignación óptima de recursos. Un caso particular de éste es el denominado *problema de la dieta*. Consiste en determinar la composición de la dieta de mínimo costo que satisface las necesidades específicas de nutrientes. Pongamos un caso particular muy sencillo de alimentación de ganado bovino.

Aprovechamos este ejemplo para seguir paso a paso las fases de la metodología de la IO en el desarrollo de un modelo matemático.

1. **Formulación y definición del problema.** Se ha determinado que las necesidades mínimas diarias en la alimentación de una ternera son de 700 g. de proteínas, 28 g. de calcio y 150 mg. de vitaminas. Los alimentos disponibles son pienso y forraje con un costo unitario de 0.30 y 0.35 $/kg. respectivamente. La composición nutritiva por kg. de alimento se muestra en la Tabla 1.1.

| | Proteínas (g) | Calcio (g) | Vitaminas (mg) |
|---|---|---|---|
| Pienso | 30 | 2 | 10 |
| Forraje | 45 | 1 | 5 |

Tabla 1.1: Información para el problema de la dieta

Se trata de determinar la cantidad diaria óptima de cada alimento para minimizar el costo total de alimentación.

2. **Construcción del Modelo Matemático.** Para modelar matemáticamente el problema, analizamos y organizamos los datos del problema. Sea $i$ el conjunto de índices correspondiente a los alimentos (pienso y forraje). Sea $j$ el conjunto de índices correspondientes a los nutrientes (proteínas, calcio y vitaminas). Sea $b_j$ la cantidad mínima diaria requerida de cada nutriente. Sea $a_{ij}$ la cantidad de nutriente por kg. de alimento correspondiente a los valores de la Tabla 1.1. Sea $c_j$ el costo unitario de cada alimento. A continuación definimos las variables. Sea $x_i$ la cantidad diaria en kg. de cada alimento. Además indicamos la función objetivo y las restricciones del problema. La función objetivo es la minimización del costo diario de la dieta

$$\text{mín} \sum_i c_i x_i \tag{1.3}$$

Las restricciones corresponden a satisfacer con la mezcla de alimentos las necesidades mínimas diarias de cada nutriente y, por consiguiente, habrá tantas restricciones de este tipo como nutrientes.

$$\sum_i a_{ij} x_i \geqslant b_j \quad \forall j \tag{1.4}$$

Además, hay que añadir la restricción natural de que la cantidad de cada alimento ha de ser no negativa.

$$x_i \geqslant 0 \tag{1.5}$$

De acuerdo a la información disponible para este problema, el modelo es el siguiente:

$$\text{mín} \quad z = \quad 0{,}3x_1 + 0{,}35x_2 \tag{1.6a}$$

s.a.:

$$30x_1 + 45x_2 \geqslant 700 \tag{1.6b}$$

$$2x_1 + x_2 \geqslant 28 \tag{1.6c}$$

$$10x_1 + 5x_2 \geqslant 150 \tag{1.6d}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \tag{1.6e}$$

donde: la ecuación (1.6a) es la función objetivo; la restricción (1.6b) es para satisfacer las necesidades de proteínas; la restricción (1.6c) es para satisfacer las necesidades calcio; la restricción (1.6d) es para satisfacer las necesidades de vitamina; la restricción (1.6e) es para satisfacer la no negatividad de las variables.

3. **Solución del modelo.** La solución de este problema usando GAMS, se muestra en el Apéndice A.1.

4. **Validación del modelo.** La comprobación de que la realidad se representa adecuadamente es inmediata en un modelo tan sencillo como este.

5. **Implementación de resultados.** Los resultados indican que la decisión óptima es comprar 10.833 kg. de pienso y 8.333 kg. de forraje cada día. Con estas decisiones el costo diario de los alimentos es de $6.17.

### 1.3.2. El Problema del Granjero (Modelo Determinista)

De manera análoga al ejemplo 1.3.1, se presentan las fases de la IO.

1. **Formulación y definición del problema.** Un granjero dispone de $500$ Ha. (Hectáreas) de tierra que dedica a cultivar: cebada, maíz y remolacha. Además, posee ganado que alimenta, entre otros nutrientes, con cebada y maíz, para lo cual estima unas necesidades anuales de $200$ Tm. de cebada, y $240$ Tm. de maíz. En el caso de que la cantidad cosechada sea superior a las necesidades, el granjero podrá vender a un precio de $\$170/$Tm. la cebada y $\$150/$Tm. el maíz. En el caso de que la cosecha sea inferior a esa cifra deberá comprarla con un sobrecosto del $40\,\%$, es decir a $\$238/$Tm. la cebada

y a $\$210/\text{Tm}$. el maíz. El granjero dispone de una cuota de venta de remolacha de $6000$ Tm. bajo las siguientes condiciones: si la cosecha de remolacha es inferior a la cuota podrá vender cada Tm. a $\$36$, en cambio, si la cosecha es superior a la cuota, las toneladas por encima de la cuota sólo se pagarán a $\$10/\text{Tm}$. Los costos de plantación son de $\$150,\ \$230,\ \$260$ por Ha., de cebada, maíz y remolacha respectivamente.

Para cada cultivo, la productividad en Tm. por cada Ha. de tierra depende del clima, estableciendo tres posibilidades: normal, bueno o malo. Se supone que estos sucesos son equiprobables. En la Tabla 1.2 se resumen y completan los datos del problema.

| Escenario | Cebada | Maíz | Remolacha |
|---|---|---|---|
| Necesidades | 200 Tm. | 240 Tm. | $\cdots$ |
| Precio de venta | $170/Tm. | $150/Tm. | $\begin{cases} \$36/\text{Tm.} & \text{si cosecha} \leqslant 6000 \text{ Tm.,} \\ \$10/\text{Tm.} & \text{si cosecha} > 6000 \text{ Tm.} \end{cases}$ |
| Precio de compra | $238/Tm. | $210/Tm. | $\cdots$ |
| Costo de plantación | $\$150/\text{Ha.}$ | $\$230/\text{Ha.}$ | $\$260/\text{Ha.}$ |
| Productividad con tiempo normal | 2.5Tm./Ha. | 3Tm./Ha. | 20Tm./Ha. |
| Productividad con tiempo bueno | 3Tm./Ha. | 3.6Tm./Ha. | 24Tm./Ha. |
| Productividad con tiempo malo | 2Tm./Ha. | 2.4Tm./Ha. | 16 Tm./Ha. |

Tabla 1.2: Información para el problema del granjero

Se pide hacer un estudio para ayudar al granjero a determinar las hectáreas que debe dedicar a cada cultivo.

### Aproximación “Wait-and-see” o con información perfecta

Un problema se dice que es de información perfecta si se conocen con exactitud los parámetros que se han obtenido previamente. De este modo, sólo los problemas secuenciales pueden ser problemas de información perfecta.

2. **Construcción del Modelo Matemático.**

**Variables de decisión**

$x_1 =$ Ha. de cebada a plantar.

$x_2 =$ Ha. de maíz a plantar.

$x_3 =$ Ha. de remolacha a plantar.

$y_1 =$ Tm. de cebada a comprar.

$y_2 =$ Tm. de maíz a comprar.

$w_1 =$ Tm. de cebada a vender.

$w_2 =$ Tm. de maíz a vender.

$w_3 =$ Tm. de remolacha a vender por debajo de la cuota.

$w_4 =$ Tm. de remolacha a vender por encima de la cuota.

**Esquema de las variables de decisión**

| Escenario | Cebada | maíz | Remolacha | Total |
|---|---|---|---|---|
| Hectáreas a plantar | $x_1 \geqslant 0$ | $x_2 \geqslant 0$ | $x_3 \geqslant 0$ | 500 |
| Toneladas a comprar | $y_1 \geqslant 0$ | $y_2 \geqslant 0$ | $\cdots$ | |
| Toneladas a vender | $w_1 \geqslant 0$ | $w_2 \geqslant 0$ | $0 \leqslant w_3 \leqslant 6000,\ w_4 \geqslant 0$ | |

Tabla 1.3: Esquema de las variables de decisión en el problema del granjero

A continuación se presenta el modelo planteado con la información para cada estado del tiempo (normal, bueno y malo).

*a*) **Formulación determinística suponiendo tiempo normal**

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad z = \; & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 + 210y_2 \\ & -170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \end{aligned} \tag{1.7a}$$

s.a.:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 500 \tag{1.7b}$$

$$2{,}5x_1 + y_1 - w_1 \geqslant 200 \tag{1.7c}$$

$$3x_2 + y_2 - w_2 \geqslant 240 \tag{1.7d}$$

$$20x_3 \geqslant w_3 + w_4 \tag{1.7e}$$

$$w_3 \leqslant 6000 \tag{1.7f}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geqslant 0 \tag{1.7g}$$

donde: la ecuación (1.7a) es la función objetivo que se pretende minimizar; la restricción (1.7b) impide exceder las 500 Ha. disponibles para los cultivos; la restricción (1.7c) es para satisfacer las necesidades de cebada; la restricción (1.7d) es para satisfacer las necesidades de maíz; la restricción (1.7e) es para satisfacer la cuota de venta de la remolacha; la restricción (1.7f) para impedir exceder la venta por debajo de la cuota de la remolacha; la restricción (1.7g) define la naturaleza de las variables.

*b*) **Formulación determinística suponiendo tiempo bueno**

$$\begin{array}{rrl}
\text{Minimizar} & z = & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 + 210y_2 \\
& & -170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\
\text{s.a. :} & & x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 500 \\
& & 3x_1 + y_1 - w_1 \geqslant 200 \\
& & 3{,}6x_2 + y_2 - w_2 \geqslant 240 \\
& & 24x_3 \geqslant w_3 + w_4 \\
& & w_3 \leqslant 6000 \\
& & x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4 \geqslant 0
\end{array}$$

*c*) **Formulación determinística suponiendo tiempo malo**

$$\begin{array}{rrl}
\text{Minimizar} & z = & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 + 210y_2 \\
& & -170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\
\text{s.a. :} & & x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 500 \\
& & 2x_1 + y_1 - w_1 \geqslant 200 \\
& & 2{,}4x_2 + y_2 - w_2 \geqslant 240 \\
& & 16x_3 \geqslant w_3 + w_4 \\
& & w_3 \leqslant 6000 \\
& & x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4 \geqslant 0
\end{array}$$

3. **Solución del modelo.**

   a) **Solución suponiendo tiempo normal**

| Variables | Cebada | Maíz | Remolacha | |
|---|---|---|---|---|
| Superficies en Ha.$(x_1,\ x_2,\ x_3)$ | 120 | 80 | 300 | |
| Compras en Tm. $(y_1,\ y_2)$ | 0 | 0 | $\cdots$ | |
| Ventas en Tm. $(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)$ | 100 | 0 | 6000 y 0 | |
| Beneficio | | | | \$118 600 |

Tabla 1.4: Valores de las variables suponiendo tiempo normal

   b) **Solución suponiendo tiempo Bueno**

| Variables | Cebada | Maíz | Remolacha | |
|---|---|---|---|---|
| Superficie en Ha. $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ | 183.33 | 66.67 | 250 | |
| Compras en Tm. $(y_1,\ y_2)$ | 0 | 0 | $\cdots$ | |
| Ventas en Tm. $(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)$ | 350 | 0 | 6000 y 0 | |
| Beneficio | | | | \$167 667 |

Tabla 1.5: Valores de las variables suponiendo tiempo bueno

   c) **Solución suponiendo tiempo malo**

| Variables | Cebada | Maíz | Remolacha | |
|---|---|---|---|---|
| Superficie en Ha. $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ | 100 | 25 | 375 | |
| Compras en Tm. $(y_1,\ y_2)$ | 0 | 180 | $\cdots$ | |
| Ventas en Tm. $(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)$ | 0 | 0 | 6000 y 0 | |
| Beneficio | | | | \$59 950 |

Tabla 1.6: Valores de las variables suponiendo tiempo malo

Como puede observarse el planteamiento para tiempo bueno, normal y malo es análogo, pero debido a que no se sabe como será el tiempo futuro (normal, bueno o malo), existe incertidumbre, por tanto, es necesario considerar las tres posibilidades. Ese apartado se estudia con detalle en el Capítulo 2.

Los detalles de la solución de éste y los demás problemas en GAMS, se presentan en el Apéndice A.2.

4. **Validación del modelo.** La comprobación de que el modelo es adecuado, corresponde a la experiencia del pasado, obtenida por el granjero.

5. **Implementación de resultados.** Los resultados pueden observarse en las Tablas 1.4, 1.5, 1.6, que indican la decisión óptima de cuántas Ha. cultivar y cuantas Tm. comprar o vender de cada cultivo. Por ejemplo, en tiempo normal, la decisión óptima es cultivar 120 Ha. de Cebada, 80 Ha. de Maíz y 300 Ha. de Remolacha y así, no se tiene la necesidad de comprar ni Cebada ni Maíz, y puede vender 100 Tm. de Cebada y 6000 Tm. de Remolacha por debajo de la cuota, teniendo un beneficio de $118,600. Para los demás resultados obtenidos la interpretación es análoga.

# Capítulo 2

# Modelos de Optimización Estocástica

## 2.1. Enfoque de Optimización Estocástica

Muchos de los problemas de programación matemática incorporan parámetros que se suponen conocidos en el momento de resolver el problema. Sin embargo, si el problema de optimización es un modelo que representa una situación real en la que hemos de tomar una decisión, es frecuente que se desconozcan los valores de algunos de los parámetros que intervienen en el modelo. Este desconocimiento da lugar a que en el momento de adoptar una decisión se desconozcan las posibles consecuencias de la misma.

Como alternativa al enfoque determinista presentado en el Capítulo 1, la Optimización Estocástica permite incluir explícitamente la posible incertidumbre (ésta se define más adelante) sobre el valor de los parámetros de entrada en el problema de optimización. Para incorporar esta incertidumbre utilizaremos una estructura de árbol de escenarios. De esta forma, modelaremos las distintas etapas de decisión del problema, así como la existencia de incertidumbre.

En base a la información disponible acerca de los posibles resultados de una acción en cualquier proceso de toma de decisiones, podemos decir que cuando tomamos una decisión estamos ante una situación de:

1. **Certidumbre**: Si cada acción da lugar a un resultado conocido e invariable.

2. **Riesgo**: Si cada acción lleva a un posible resultado y cada resultado lleva asociada una probabilidad de que ocurra, probabilidad conocida para el decisor (normalmente estudiada mediante técnicas estadísticas), la toma de decisiones está expuesta a la acción que se produzca finalmente en el futuro.

3. **Incertidumbre**: Si cada acción tiene una consecuencia de entre un conjunto de posibles resultados, pero se desconocen las probabilidades de estos posibles resultados.

Para resolver problemas en los que se desconocen los valores de algunos de los parámetros que intervienen en el modelo (situaciones de riesgo o de incertidumbre), es posible adoptar distintas "soluciones". En determinadas circunstancias y en base a la información disponible acerca de los parámetros desconocidos, es posible "sustituir" estos valores por una estimación de los mismos, una medición no exacta de su valor esperado o bien tratar estos parámetros como variables aleatorias.

La programación estocástica analiza la resolución de problemas de programación matemática en los que algunos parámetros son desconocidos pero se conoce la distribución de probabilidad asociada a ellos y, por tanto, las situaciones que se analizan mediante la misma son situaciones de riesgo.

Se han desarrollado distintos modelos dentro de la programación estocástica. En particular, uno de los problemas que más se ha estudiado es el de las distintas formas de la función objetivo, es decir, los distintos criterios posibles de optimización. Muchos modelos de programación estocástica utilizan el criterio de optimizar la esperanza matemática de la función objetivo. El inconveniente es que una estrategia $x$ cuyo beneficio esperado sea mayor que el de otra $y$, puede tener, sin embargo, asociado también un riesgo mayor de pérdida. Por tanto, es interesante buscar otras vías que incluyan el riesgo asumido de algún modo. Hay problemas que pueden ser mejor tratados utilizando otros estadísticos, que nos permiten tener en cuenta el riesgo de una forma más explícita que el criterio del valor esperado. Estos problemas se engloban dentro de un grupo más general que es el de los modelos de mínimo riesgo. Un caso particular es el que utiliza como criterio el fractil, o cuantil, de la función objetivo aleatoria.

## 2.2. Definiciones previas

La programación estocástica trata los problemas de programación matemática en los que algunos de los parámetros implicados son variables aleatorias. A continuación presentaremos algunas definiciones básicas que se usarán en el trabajo.

1. **Escenarios**
   Son cada una de las posibles realizaciones de los parámatros inciertos consideradas a lo largo de todo el problema. Es decir, las realizaciones que se obtienen al dar a las variables aleatorias consideradas cada uno de sus posibles valores. El número de escenarios puede ser infinito o un número finito muy alto y de ahí la dificultad computacional del problema.

2. **Nodo**
   Es cada uno de los elementos de una lista enlazada, un árbol o un grafo en una estructura de datos. Cada nodo tiene su propia estructura y cuenta con varios campos, de los cuales, al menos uno, funcionará como referencia para otro nodo.

3. **Etapa**
   Cada uno de los trayectos recorridos entre dos nodos de un árbol de escenarios.

4. **Grupo de escenarios**
   Para una etapa dada es el conjunto de escenarios cuya realización de los parámetros inciertos es la misma hasta dicha etapa.

5. **Árbol de escenarios**
   Un árbol de escenarios es la representación de un conjunto de escenarios. Es una técnica que permite analizar decisiones secuenciales basadas en el uso de resultados y probabilidades asociadas.

6. **Principio de no anticipación**
   Se puede definir como la imposibilidad de vincular la decisión en el primer periodo que no depende de lo que de hecho ocurra en el segundo periodo. La decisión de hoy para hoy, no puede ser modificada mañana, es decir, en cada etapa deben fijarse como definitivas sólo las decisones de esa etapa, pero

no de las etapas siguientes. Estas pueden fijarse provisionalmente hasta tener toda la información posible en esa etapa.

Habitualmente la toma de decisiones es en función del tiempo. Así, sea ***T***$= \{1,\ 2, ...,\ T\}$ el conjunto de periodos de tiempo que constituyen el horizonte de planificación. Los periodos de tiempo se agruparán en distintas etapas de decisión dependiendo de la estructura de información disponible en el problema.

Y sea ***S***$=\ \{1,\ 2, ...,\ S\}$ el conjunto de etapas de decisión en las que se reparten los distintos periodos de tiempo, donde $S \leqslant T$. Los problemas estocásticos se pueden clasificar en cuanto al número de etapas en: *bietapa*, (aquéllos que tienen dos etapas) y *multietapa* (aquéllos que cuentan con tres o más etapas).

### 2.2.1. Enfoque “here and now” (“aquí y ahora”)

Se basan en la hipótesis de que la decisión se toma antes de conocer la realización de las variables aleatorias. Comentamos dos modos de obtener Equivalentes Deterministas: los Programas con Restricciones Probabilísticas y los Programas Estocásticos con Recursos.

1. La decisión $x = (x_1, x_2, x_3)$ debe ser hecha “aquí y ahora”, es decir, antes de obsevar el resultado del fenómeno aleatorio $\Omega$.

2. Los valores $x = (x_1, x_2, x_3)$ deben ser escogidos de forma que minimicen el costo esperado sobre todos los escenarios futuros posibles.

## 2.3. Espacios de probabilidad y variables aleatorias

La técnica que modeliza y recoge adecuadamente la incertidumbre, es la denominada *análisis de escenarios*. Esta metodología parte de conocer un conjunto finito de valores de los parámetros estocásticos, representativo del conjunto de todos los posibles valores de los mismos. Una situación como esta, ocurre frecuentemente en modelos estratégicos, donde el conocimiento de posibles resultados futuros se obtiene a partir del juicio de expertos y donde sólo se considera un número discreto y finito de escenarios en detalle.

El conjunto de todos los posibles resultados del experimento se representa por $\Omega$. Los resultados pueden combinarse en subconjuntos de $\Omega$ denominados *sucesos*. Cada suceso elemental, $\omega$, determina un escenario, $\xi^\omega = (c^\omega,\ A^\omega,\ b^\omega)$, esto es, una particular realización de los parámetros aleatorios del modelo y sea $\boldsymbol{\Xi}$ el conjunto de todas las realizaciones de parámetros aleatorios.

Se denota por $\boldsymbol{F}$, la colección de sucesos aleatorios, que es una $\sigma$ – álgebra de las partes de $\Omega$, y se define una *probabilidad*, como una aplicación
$P : \boldsymbol{F} \to\ [0,\ 1]$
tal que,

- $P(\Omega) = 1$ y $P\left(A_1 \cup A_2\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right)$ si $A_1,\ A_2 \in \boldsymbol{F} :\ A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
- $P\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} P\left(A_n\right)$ si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \boldsymbol{F} : A_n \cap A_m = \emptyset, \quad \forall n \neq m$.
- A la terna ($\Omega$, $\boldsymbol{F}$, $P$) se le denomina *espacio de probabilidad*.

Las variables aleatorias que se considerarán, $\boldsymbol{\xi}$, serán discretas, es decir, toman un número finito de valores, $\xi^\omega,\ \omega \in \Omega$, de manera que cada elemento acontece con probabilidad $P(\boldsymbol{\xi} = \xi^\omega) = w^\omega$ tal que $\sum_{\omega\in\Omega} w^\omega = 1$.

Se define la *función de distribución acumulativa* como

$$F(\xi) = P(\{\omega \in \Omega | \boldsymbol{\xi} \leqslant \xi\}) = P(\boldsymbol{\xi} \leqslant \xi)$$

Además, la *esperanza* de una variable aleatoria se calcula como

$$E[\boldsymbol{\xi}] = \sum_{\omega\in\Omega} w^\omega \xi^\omega$$

y la *varianza* es

$$Var[\boldsymbol{\xi}] = E\big[\boldsymbol{\xi} - E[\boldsymbol{\xi}]\big]^2$$

Dado $\alpha \in (0,\ 1)$, un punto $\eta$ se llama $\alpha$ – cuantil de $\boldsymbol{\xi}$ si y sólo si $\eta = \text{mín}\{\xi \in \boldsymbol{\xi} : F(\xi) \geqslant \alpha\}$.

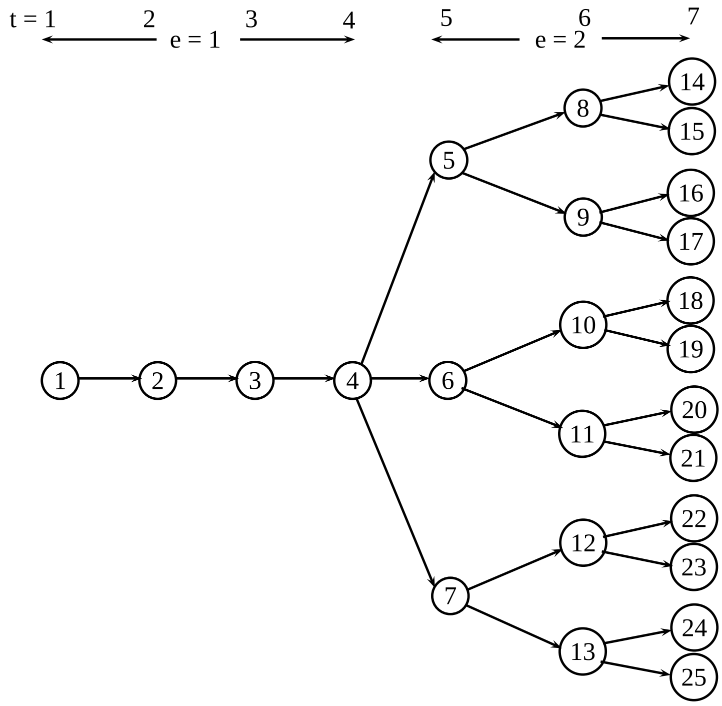


Figura 2.1: Árbol de escenarios

En adelante y para simplificar la notación se denotará por $\omega$, en lugar de $\xi^{\omega}$, a cada uno de los escenarios y por $\Omega$, en lugar de $\Xi$ "al conjunto de escenarios". En cada etapa, hay tantos nodos como realizaciones de los parámetros inciertos.

## 2.4. Planteamiento del Problema Estocástico

La Figura 2.1 representa la estocasticidad de un problema a tratar. Cada nodo en la figura representa un punto en el tiempo donde se tomará la decisión. Una vez que se toma una decisión, algunas eventualidades pueden surgir (en este ejemplo el número de sucesos es de tres para un periodo de tiempo $t = 5$) y la información relacionada con estos sucesos está disponible al inicio del periodo. Cada ruta de acceso desde la raíz a la hoja en el árbol representa un escenario específico y corresponde a una realización de todo el conjunto de los parámetros inciertos.

Cada nodo en el árbol puede estar asociado con un grupo de escenarios, tal que, dos escenarios pertenecen a un mismo grupo a partir de un determinado periodo de tiempo, siempre que presente las mismas realizaciones de los parámetros inciertos hasta ese periodo.

Una vez generado el árbol de escenarios, es necesario ampliar la modelización del problema, de manera que recoja la información proveniente de dicho árbol. Una alternativa consiste en resolver los problemas deterministas asociados a cada escenario:

$$\begin{aligned} Z^\omega &= \text{optimizar } c^\omega x^\omega \\ \text{s.a. :} \quad & A^\omega x^\omega = b^\omega \\ & x^\omega \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Cada uno de estos problemas presenta $m$ restricciones y $n$ variables, al igual que en el modelo 1.2.

A partir del modelo 2.1, el criterio para seleccionar una solución como óptima no es claro. Puede haber soluciones factibles en un escenario y en otro no. Una solución puede tener un valor mejor que otra en la función objetivo en un escenario concreto y no en otro, etc.

Sin embargo, la metodología de *análisis de escenarios*, como tratamiento de la incertidumbre en un problema de optimización, proporciona soluciones factibles bajo cada escenario, pero sin subordinarse a ninguno de ellos y cuyo valor esperado en la función objetivo es siempre el mejor, para todos ellos. Esto se consigue como se verá más adelante, optimizando una combinación lineal de las funciones objetivo bajo cada escenario, y replicando las restricciones en cada uno de ellos.

## 2.5. Elementos del Modelo Estocástico

Sea la siguiente notación utilizada en el esquema de representación mediante un árbol de escenario (ver la Figura 2.1).

1. **Notación**

$\Omega$**:** Conjunto de escenarios, consecutivamente numerados, por ejemplo, el camino $\{1, 2, ..., 5, 8, 14\}$ corresponde a un escenario, que tradicionalmente se le denomina escenario 14.

$\mathscr{G}$**:** Conjunto de grupos de escenarios, numerados consecutivamente.

$t(g)$**:** Periodo de tiempo para el grupo de escenarios $g$, para $g \in \mathscr{G}$.

$\Omega_g$**:** Conjuntos de escenarios en el grupo $g$, tal que los escenarios que pertenecen al mismo grupo tienen idénticas realizaciones en todos los parámetros inciertos hasta el periodo $t(g)$, para $g \in \mathscr{G}$ ($\Omega_g \subseteq \Omega$).

$\mathscr{K}_g$**:** Conjunto de grupos de escenarios $\{k\}$, tales que $\Omega_g \subseteq \Omega_k$ y $t(k) \in \boldsymbol{T}_{t(g)}$, para $g \in \mathscr{G}$ ($\mathscr{K}_g \subset \mathscr{G}$). Notar que el (único) camino predecesor desde el nodo asociado con el grupo de escenarios $g$ hasta el nodo raíz del árbol de escenarios dado pasa a través de los nodos asociados con el grupo de escenarios en $\mathscr{K}_g$. Desde ahora usaremos indistintivamente, nodo en el árbol de escenarios y grupos de escenarios.

$\rho(g)$**:** Nodo inmediatamente antecesor al nodo $g$ en el árbol de escenarios. Notar que $\rho(g) \in \mathscr{K}_g$.

$\mathscr{E}$**:** Conjunto de etapas en el horizonte temporal. Nota: una etapa está formada por un conjunto de periodos de tiempo cosecutivos.

$\mathscr{G}^e$**:** Conjunto de grupo de escenarios de la etapa $e$. Para $e \in \mathscr{E}$.

$\mathscr{A}^e$**:** Conjunto de grupo de escenarios asociados con los nodos raíz de la etapa $e$, para $e \in \mathscr{E}$ ($\mathscr{A}^e \subseteq \mathscr{G}^e$).

$\mathscr{C}_a$**:** Conjunto de nodos sucesores en el subárbol tal que el nodo raíz es el nodo $a$, incluido el mismo, para $a \in \mathscr{A}^e$, $e \in \mathscr{E}$.

$\mathscr{S}_g$**:** Conjunto de nodos sucesores en el subárbol, tal que el nodo raíz es el nodo $g$, incluido el mismo, para $g \in \mathscr{G}$.

Para presentar la versión estocástica de la ecuación 2.1, la siguiente notación se utiliza para las variables y los parámetros inciertos.

2. **Variables**

$x^g$**:** Vector de variables bajo el grupo de escenarios $g$, para $g \in \mathscr{G}$. Este conjunto reemplaza las variables $x_{t(g)}$ en el modelo determinista.

3. **Parámetros inciertos**

   $c^g$**:** Vector de coeficientes en la función objetivo para las variables $x^g$ en el grupo de escenarios $g$, para $g \in \mathscr{G}$. Este conjunto reemplaza el vector $c_{t(g)}$ en el modelo determinista.

   $b^g$**:** Término independiente (rhs, right – hand side) en el grupo de escenarios $g$, para $g \in \mathscr{G}$. Este conjunto reemplaza el vector $b_{t(g)}$ en el modelo determinista.

   $w^g$**:** Denota el factor de ponderación que representa la probabilidad que se asocia con el grupo de escenario $g$, para $g \in \mathscr{G}$.

El modelo se expresaria como:

$$
\begin{aligned}
Z &= \text{optimizar} \sum_{i,\omega} w^\omega x^\omega c^\omega \\
\text{s.a. :} \quad & A^\omega x^\omega = b^\omega \\
& x^\omega \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

donde:
$x^\omega \in \mathbb{R}^n$: es el vector de variables de decisión por cada escenario $\omega$.
$c^\omega \in \mathbb{R}^n$: es el vector de costos por cada escenario $\omega$.
$A^\omega_{m\times n}$: es la matriz de restricciones por cada escenario $\omega$.
$b^\omega \in \mathbb{R}^m$: es el vector de términos independientes por cada escenario $\omega$.

Obsérve que $c,\ A,\ b$ son parámetros del problema que se asumen conocidos.

Ejemplo de notación de la Figura 2.1.

$$
\begin{aligned}
\Omega = \Omega_1 &= \{14,\ 15, \ldots,\ 25\} \\
\mathscr{G}^2 &= \{5, \ldots,\ 25\};\ t(12) = 6 \\
\mathscr{K}_{13} &= \{7,\ 4, \ldots,\ 1\} \\
\mathscr{A}^2 &= \{5,\ 6,\ 7\} \\
\mathscr{S}_3 &= \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \ldots,\ 24, 25\} \quad \rho(12) = 7 \\
\mathscr{C}_5 &= \{5,\ 8,\ 9,\ 14, \ldots,\ 17\}
\end{aligned}
$$

## 2.6. Ejemplos de aplicación

Al igual que en el Capítulo 1, aplicaremos las fases de la IO, pero adaptado a problemas bajo incertidumbre (estocásticos). Se desarrollarán dos ejemplos de aplicación, en el primero, se retoma el ejemplo 1.3.2, el problema del granjero, pero bajo incertidumbre, y el segundo ejemplo, se refiere a una empresa proveedora de gas, que necesita saber cuánto gas comprar para poder satisfacer las demandas de los dos próximos años.

### 2.6.1. El problema del granjero bajo incertidumbre

1. **Formulación y definición del problema.**
   Retomando el problema del granjero, recordemos que se tiene en cuenta que la productividad de cada cultivo es una variable aleatoria sobre el espacio probabilístico ($\Omega$, $p$) donde $\Omega = \{\omega_1 =$ "tiempo normal", $\omega_2 =$ "tiempo bueno", $\omega_3 =$ "tiempo malo"$\}$ y $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = 1/3$. Además, $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$, $\xi_3(\omega)$ son las productividades de la cebada, el maíz y la remolacha, respectivamente. Es decir, tenemos un vector aleatorio $\xi(\omega) = \big(\xi_1(\omega_1), \xi_2(\omega_2), \xi_3(\omega_3)\big)$ donde $\omega \in \Omega$.

   En el caso del problema del granjero podemos considerar que los escenarios forman el conjunto $\Omega = \{\text{tiempo normal}, \text{tiempo bueno}, \text{tiempo malo}\}$.

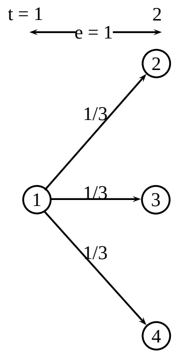


Figura 2.2: Árbol de escenarios para el problema del Granjero

### Algunas observaciones previas

*a*) Como puede observarse en el enfoque "wait and see", la solución óptima es muy sensible a los cambios en la productividad y está asociada al tiempo.

*b*) Decidir la superficie en Ha a sembrar $(x_1, x_2, x_3)$ es una decisión inicial que se debe tomar antes del experimento o fenómeno aleatorio. A tales variables se las denomina *variables de la primera etapa* o *variables implantables*.

*c*) En cambio, las cantidades a comprar o vender $(y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4)$ son decisiones que se deben tomar después del experimento o fenómeno aleatorio y que dependen de los rendimientos de los cultivos. A estas variables se les denomina *variables de la segunda etapa* o *variables no implantables*.

*d*) En resumen, debemos clasificar las variables de decisión según el instante en que deben ser tomadas sus respectivas decisiones asociadas. Las variables de decisión de la primera etapa son las que deben de tomarse antes del fenómeno aleatorio. En nuestro caso son $x_1$, $x_2$ y $x_3$. Las de la segunda etapa son las variables de decisión que deben tomarse después del fenómeno aleatorio. En nuestro caso son $y_1$, $y_2$, $w_1$, $w_2$, $w_3$ y $w_4$.

2. **Construcción del Modelo Matemático.**

**Variables de decisión**

$x_1$ = Has. de cebada a plantar.

$x_2$ = Has. de maíz a plantar.

$x_3$ = Has. de remolacha a plantar.

$y_{11}$, $y_{12}$, $y_{13}$ = Tm de cebada a comprar en los escenarios $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, respectivamente.

$y_{21}$, $y_{22}$, $y_{23}$ = Tm de maíz a comprar en los escenarios $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, respectivamente.

$w_{11}$, $w_{12}$, $w_{13}$ = Tm de cebada a vender en los escenarios $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, respectivamente.

$w_{21}$, $w_{22}$, $w_{23}$ = Tm de maíz a vender en los escenarios $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, respectivamente.

$w_{31}$, $w_{32}$, $w_{33}$ = Tm de remolacha a vender por debajo de la cuota en los escenarios $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, respectivamente.

$w_{41}$, $w_{42}$, $w_{43}$ = Tm de remolacha a vender por encima de la cuota en los escenarios $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, respectivamente.

**Formulación del problema del granjero bajo incertidumbre**

Se basa en lo siguiente:

*a*) Las variables de decisión de la primera etapa se mantienen, ya que no dependen de los escenarios.

*b*) Se consideran los escenarios asociados a $\Omega$ = $\{\omega_1$ = tiempo normal, $\omega_2$ = tiempo bueno, $\omega_3$ = tiempo malo$\}$.

*c*) Para cada variable de decisión de la segunda etapa y para cada escenario se crea una nueva varible de decisión y se suprimen las variables de decisión iniciales de la segunda etapa. Representan lo que en la segunda etapa deberá hacer el granjero en cada situación o escenario. Más concretamente, para $j = 1, 2$; se sutituye la variable $y_j$ por $y_{js} =$

valor de la variable aleatoria $y_j$ cuando estamos en el escenario $s$ (con $s = 1,2,3$) y, análogamente, para $j = 1,2,3,4$ se sutituye $w_j$ por $w_{js}$ = valor de la variable aleaoria $w_j$ cuando estamos en el escenario $s$ (con $s = 1,2,3$).

*d*) En la función objetivo las variables de decisión de la primera etapa permanecen en la misma forma. Cada variable de decisión de la segunda etapa se sustituye por tantas variables de decisión como escenarios con las probabilidades correspondientes. Su aportación conjunta a la función objetivo es la aportación de un año medio. Unos años se ganará más y otros menos, pero un año medio se ganará esa cantidad. Ejemplo: $238y_1 \to 238(p_1y_{11} + p_2y_{12} + p_3y_{13})$.

*e*) Cada restricción que sólo contiene variables de decisión de la primera etapa permanece invariante.

*f*) Cada una de las demás restricciones da lugar a tantas restricciones como escenarios para incluir lo que ocurriría en esa situación. Por ejemplo, debemos pensar en la restricción $\xi_1(\omega)x_1 + y_1 - w_1 \geqslant 200$ escrita de la forma $\xi_1(\omega)x_1 + y_1(\omega) - w_1 \geqslant 200$ para $\omega \in \Omega$, lo que da lugar a las restricciones:

$$2{,}1x_1 + y_{11} - w_{11} \geqslant 200$$
$$3x_1 + y_{12} - w_{12} \geqslant 200$$
$$2x_1 + y_{13} - w_{13} \geqslant 200$$

### Planteamiento del Modelo Final

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad z = \; & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + \\ & p_1(238y_{11} + 210y_{21} - 170w_{11} - 150w_{21} - 36w_{31} - 10w_{41}) + \\ & p_2(238y_{12} + 210y_{22} - 170w_{12} - 150w_{22} - 36w_{32} - 10w_{42}) + \\ & p_3(238y_{13} + 210y_{23} - 170w_{13} - 150w_{23} - 36w_{33} - 10w_{43}) \end{aligned} \tag{2.3a}$$

s.a.:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 500 \tag{2.3b}$$

$$\begin{aligned} 2{,}5x_{11} + y_{12} - w_{13} &\geqslant 200 \\ 3x_1 + y_{12} - w_{12} &\geqslant 200 \\ 2x_1 + y_{13} - w_{13} &\geqslant 200 \end{aligned} \tag{2.3c}$$

$$\begin{aligned} 3x_2 + y_{21} - w_{21} &\geqslant 240 \\ 3{,}6x_2 + y_{22} - w_{22} &\geqslant 240 \\ 2{,}4x_2 + y_{23} - w_{23} &\geqslant 240 \end{aligned} \tag{2.3d}$$

$$\begin{aligned} w_{31} + w_{41} &\leqslant 20x_3 \\ w_{32} + w_{42} &\leqslant 24x_3 \\ w_{33} + w_{43} &\leqslant 16x_3 \end{aligned} \tag{2.3e}$$

$$w_{13}, w_{32}, w_{33} \leqslant 6000 \tag{2.3f}$$

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0 \\ y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23} &\geqslant 0 \\ w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{31}, w_{32}, w_{33}, w_{41}, w_{42}, w_{43} &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.3g}$$

donde: la ecuación (2.3a) es la función objetivo; las restricciones (2.3b) obligan a no exceder las 500 Ha disponibles para los cultivos; las restricciones (2.3c) fuerzan satisfacer las necesidades de cebada en cada escenario; las restricciones (2.3d) satisfacen las necesidades de maíz en cada escenario; las restricciones (2.3e) satisfacen la cuota de venta de la remolacha en cada escenario; las restricciones (2.3f) obligan a no exceder la venta por debajo de la cuota de la remolacha en cada escenario; las restricciones (2.3g) representan la naturaleza de las variables.

3. **Solución del modelo.**

   Los detalles de la solución de este problema en GAMS se presentan en el Apéndice B.1, donde se obtiene la siguiente solución:

| Solución | | Cebada | Maíz | Remolacha | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Primera etapa** | Superficie en Ha. etapa $(x_1, x_2, x_3)$ | 170 | 80 | 250 | |
| **Segunda etapa** | | | | | |
| Escenario $\omega_1$ | Comprar en Tm. $(y_{11}, y_{21})$ | 0 | 0 | — | |
| | Vender Tm. $(w_{11}, w_{21}, w_{31}, w_{41})$ | 225 | 0 | 5000 y 0 | |
| Escenario $\omega_2$ | Comprar en Tm. $(y_{12}, y_{22})$ | 0 | 0 | — | |
| | Vender Tm. $(w_{12}, w_{22}, w_{32}, w_{42})$ | 310 | 48 | 6000 y 0 | |
| Escenario $\omega_3$ | Comprar en Tm. $(y_{13}, y_{23})$ | 0 | 48 | — | |
| | Vender Tm. $(w_{13}, w_{23}, w_{33}, w_{43})$ | 140 | 0 | 6000 y 0 | |
| **Beneficio** | | | | | **108 390** |

Tabla 2.1: Solución al modelo de programación estocástica

### Segunda aproximación o aproximación usando el principio de no anticipación

Teniendo en cuenta que las variables de la segunda etapa están asociadas a decisiones a tomar después de la realización del fenómeno aleatorio, podemos matizar el costo mínimo, es decir, de los beneficios máximos, del modo siguiente:

Para el escenario $\omega_1$ (tiempo normal), se tiene $z_1 = \$109,350$.
Para el escenario $\omega_2$ (tiempo bueno), se tiene $z_2 = \$167,000$.
Para el escenario $\omega_3$ (tiempo malo), se tiene $z_3 = \$48,820$.

### Resumen

Usando los beneficios obtenidos, tenemos:

| *Escenarios* | *wait and see* | *valor esperado 1* | *valor esperado 2* | *here and now 1* | *here and now 2* |
|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo normal $\omega_1$ | -118 600 | | -118 600 | | -109 350 |
| Tiempo bueno $\omega_2$ | -167 667 | | -148 000 | | -167 000 |
| Tiempo malo $\omega_3$ | -59 950 | | -55 120 | | -48 820 |
| *Promedio* | -115 406 | -118 600 | -107 240 | -108 390 | -108 390 |
| *Notación promedio* | $z_{ws}$ | $z_{ev1}$ | $z_{ev2}$ | $z_{hn1}$ | $z_{hn2}$ |

Tabla 2.2: Resumen

4. **Validación del modelo.**
   La comprobación de que el modelo es adecuado corresponde a la experiencia del pasado obtenida por el granjero.

5. **Implementación de resultados.**
   Como no se tiene seguridad de cómo será el tiempo, ya sea bueno, malo o normal, de las soluciones obtenidas se tiene que el granjero debe cultivar 170 Ha. de Cebada, 80 de Maíz, y 250 de Remolacha, obteniendo así que no debe realizar ninguna compra, y puede vender 225 Tm de Cebada, y 5000 Tm de Remolacha (bajo la cuota), esto si el tiempo es *Normal*. Si se tiene un tiempo *Bueno* el granjero no debe comprar nada y puede vender 310 Tm de Cebada y 48 Tm de maíz, y 6000 Tm de Remolacha (bajo la cuota). Si el tiempo es *Malo* el granjero debe comprar 48 Tm de Maíz, puede vender 140 Tm de Cebada y 6000 de Remolacha (bajo la cuota), obteniendo un beneficio esperado de $108,390. Éste beneficio puede obtenerse sin conocer a priori como será el tiempo (Normal, Bueno, Malo), ya que las soluciones han sido obtenidas de manera estocástica considerando la probabilidad de cada tiempo.

Considerar el problema de manera estocástica es más conveniente que considerarlo de manera determinista, ya que se desconoce como será el tiempo y el beneficio obtenido con la solución estocástica es más favorable para el granjero.

### 2.6.2. Problema de la empresa de gas

1. **Formulación y definición del problema.**

   Una empresa proveedora de gas, tiene que realizar sus compras anuales teniendo en cuenta la gestión presente y futura. Cuando la compañía compra gas suministra parte a sus consumidores y el resto lo almacena. Cuando vende gas lo toma de sus compras o de sus depósitos. Las decisiones óptimas dependerán del precio del gas ahora y en el futuro, del costo de almacenamiento, del tamaño del depósito y de la demanda en cada periodo. La demanda anual y el precio del gas para varios escenarios futuros se presentan en la Tabla 2.3. El precio de almacenamiento de una unidad de gas es de $1/año. Se quieren tomar las decisiones óptimas para los dos primeros años sabiendo que el año actual está siendo normal y el año próximo puede

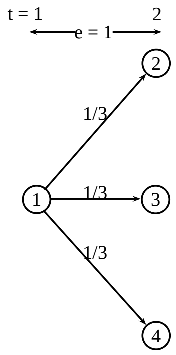


Figura 2.3: Árbol de escenarios para el problema del gas

ser normal, frío o muy frío con las probabilidades que aparecen en la Tabla 2.3.

| Escenario | Coste del gas ($) | Demanda | Probabilidad |
|---|---|---|---|
| Normal | 5 | 100 | 1/3 |
| Frío | 6 | 150 | 1/3 |
| Muy Frío | 7.5 | 180 | 1/3 |

Tabla 2.3: Información para el problema del gas

2. **Construcción del Modelo Matemático.**

**Variables de decisión**

$x_1 =$ Cantidad de gas a comprar y vender el primer año.

$x_2 =$ Cantidad de gas a comprar y almacenar el primer año.

$x_3 =$ Cantidad de gas a almacenar y vender el primer año.

$y_{11} =$ Cantidad de gas a comprar y vender el segundo año en tiempo normal.

$y_{12} =$ Cantidad de gas a comprar y almacenar el segundo año en tiempo normal.

$y_{21} =$ Cantidad de gas a comprar y vender el segundo año en tiempo frío.

$y_{22} =$ Cantidad de gas a comprar y almacenar el segundo año en tiempo frío.

$y_{31} =$ Cantidad de gas a comprar y vender el segundo año en tiempo muy frío.

$y_{32} =$ Cantidad de gas a comprar y almacenar el segundo año en tiempo muy frío.

A continuación se presenta el modelo de Optimización Estocástica planteado con la información anterior:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad z = \quad & \text{mín}\, 5(x_1 + x_2) + x_2 + \\
& \frac{1}{3}\big(5(y_{11} + y_{12})\big) + \\
& \frac{1}{3}\big(6(y_{21} + y_{22})\big) + \\
& \frac{1}{3}\big(7{,}5(y_{31} + y_{32})\big)
\end{aligned} \tag{2.4a}
$$

s.a.:

$$x_1 = 100 \tag{2.4b}$$

$$x_3 + y_{11} = 100 \tag{2.4c}$$

$$x_3 + y_{21} = 150 \tag{2.4d}$$

$$x_3 + y_{31} = 180 \tag{2.4e}$$

$$x_3 = x_2 \tag{2.4f}$$

donde: la ecuación (2.4a) es la función objetivo; la restricción (2.4b) es para satisfacer la demanda del primer año; la restricción (2.4c) es para satisfacer la demanda del segundo año en tiempo normal; la restricción (2.4d) es para satisfacer la demanda del segundo año en tiempo frío; la restricción (2.4e) es para satisfacer la demanda del segundo año en tiempo muy frío; la restricción (2.4f) es para vender lo que se almacena.

3. **Solución del modelo.**
   Los detalles de la solución de este problema en GAMS se presentan en el Apéndice B.2, donde se obtiene la siguiente solución:

| Escenario | Compra y vende | Compra y almacena | Almacena y vende | Compra y vende | Compra y almacena | Coste |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Año 1 | | | Año 2 | | |
| Estocástico | 100 | 100 | 100 | -<br>50<br>80 | -<br>-<br>- | 1400 |

Tabla 2.4: Valores de las variables para el problema del gas

4. **Validación del modelo.**
   Para observar si el modelo es adecuado, se deben tomar en cuenta las experiencias pasadas de la empresa y replicar el modelo para esas observaciones.

5. **Implementación de resultados.**
   De acuerdo a los resultados obtenidos, se obtienen los valores óptimos de las variables y de la función objetivo. Se observa que para el primer año, se deben comprar y vender 100 unidades de gas, comprar y almacenar 100 unidades de gas, almacenar y vender 100 unidades de gas. Para el segundo año se deben comprar y vender 50 unidades de gas en tiempo frío, comprar y vender 80 unidades de gas en tiempo muy frío. Con estos valores, se obtiene el costo mínimo para que la empresa pueda satisfacer todas las demandas, siendo de $1,400.

# Capítulo 3

# Optimización y Generación Térmica de Energía Eléctrica

Una de las aplicaciones que mejor puede ilustrar las ventajas de utilizar la optimización estocástica en un ámbito industrial, es la obtención de la planificación de generadores térmicos e hidráulicos de energía eléctrica. Por eso, es uno de los sectores más significativos en este sentido, tanto por las grandes dimensiones de estos sistemas, como por la complejidad de los mismos. La complejidad de estos sistemas viene dada por las características técnicas de los sistemas, por los métodos empleados para regularlos, por la fuerte relación temporal que hay entre las decisiones, y por las características de los agentes implicados. Entre los agentes implicados en este sector se encuentran: las empresas asociadas directamente al negocio de energía eléctrica (generadoras, distribuidoras, comercializadoras), otras empresas asociadas indirectamente, los clientes y los gobiernos. No hay que olvidar que la energía eléctrica se puede considerar un bien social, y que su suministro no puede dejarse exclusivamente en manos de intereses particulares, de modo que los gobiernos han de establecer normas y procedimientos que regulen cómo se va a garantizar el acceso a este bien por parte de la población, velando por que éste sea general y de calidad, haciendo que los precios sean asequibles. Por otra parte, la propia población interviene en el funcionamiento de estos sistemas a través de la demanda.

## 3.1. Modelo de Programación de unidades

Las grandes dimensiones de los sistemas, la gran cantidad de actividades incluidas, la fuerte relación intertemporal de las decisiones, el efecto a distinto plazo de esas decisiones, así como los distintos agentes implicados y la regulación del sector, hacen que las tareas de planificación y los modelos utilizados para la toma de decisiones en la generación de energía eléctrica sean de los más complejos y difíciles de desarrollar, y a su vez, de los más necesarios.

Atendiendo a la dimensión temporal de las planificaciones, resulta absolutamente inviable pensar en un único modelo o herramienta para desarrollar la planificación que describa suficientemente el sistema para cualquier alcance temporal. Hay que tener en cuenta que algunas decisiones, como son las decisiones de expansión de la generación (la construcción de nuevas centrales, por ejemplo) han de ser planificadas a varios años, pero a su vez en la operación del sistema hay que tomar decisiones a muy corto plazo o incluso en tiempo real (cada pocos segundos). Es obvio que la descripción de los elementos del sistema requeridos para valorar una decisión en tiempo real, ha de ser muy detallada en cuanto a elementos técnicos (características técnicas de los grupos generadores, de la red de transporte de energía, etc.) y, por lo tanto, no puede abarcar un largo periodo de tiempo, mientras que las decisiones de expansión de generación se basan más en valores macroeconómicos de las empresas y financieros, así como los efectos sobre la demanda que sólo pueden ser vistos a largo plazo, como la denominada elasticidad de la demanda (medida de la variación de la demanda con el precio).

Por lo tanto, los modelos de planificación han de ser diferentes, según el horizonte de planificación que se establezca, requiriendo distinto nivel de detalle de los elementos que configuran el sistema. Así se distinguen distintos tipos de modelos según su alcance temporal, pudiendo hablar de modelos de muy largo, largo, medio, corto, muy corto plazo e incluso, tiempo real. Estos modelos se utilizan para valorar distintos tipos de decisiones, distinguiéndose tanto por el detalle en la representación de los elementos que configuran el sistema y sus relaciones, como por los criterios que se utilizan para valorar las decisiones.

Las empresas de generación de energía eléctrica tradicionalmente han estado sujetas a políticas regulatorias en las que las decisiones de muy corto plazo sobre la producción de cada grupo generador (cuándo debían arrancar o parar y cuánta potencia debían generar en cada momento), eran tomadas por un operador central con un objetivo principal de minimización de costos semanales. Los modelos que se han venido utilizando son los que en la literatura se han llamado de “unit commitment” o programación de unidades. Estos modelos han sido ampliamente estudiados y aplicados en entornos centralizados, y han dado lugar a un gran número de trabajos.

## 3.2. Jerarquía temporal de los Modelos de Generación de Energía Eléctrica

La toma de decisiones en una compañía de generación de energía eléctrica es muy compleja, y comprende horizontes temporales muy diversos. Es por tanto, necesaria una jerarquía de los sistemas de ayuda a la decisión (denominados funciones) para desagregar estas decisiones. Esta jerarquía de sistemas o funciones, está íntimamente relacionada con la propia estructura departamental de la empresa, de modo que, se puede llegar a confundir si la estructura de la empresa viene dada por las limitaciones de los sistemas, o por el contrario, se desarrollan sistemas de ayuda a la decisión adecuados para cada departamento. Sea como sea de dónde surge esta relación, lo cierto es que la explotación óptima de una empresa de generación es de una enorme complejidad, y resulta absolutamente necesario que las decisiones se tomen de forma desagregada.

En la Figura 3.1 se ilustra una jerarquía temporal de las funciones comentadas. Se presenta como una de las posibles, dado que no tiene por qué ser la única adecuada, pudiendo considerarse otras donde algunos de estos niveles se fundan en uno sólo.

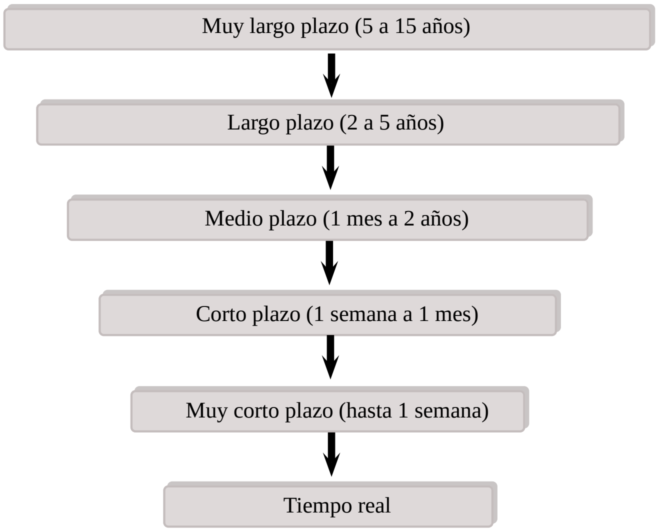


Figura 3.1: Jerarquía temporal de los modelos de generación de energía eléctrica

## 3.3. Elementos característicos de los Modelos de Generación de Energía

Los modelos utilizados para la planificación de energía eléctrica describen en mayor o menor detalle el sistema, de modo que podemos hablar de una clasificación de los mismos por el nivel de detalle de los elementos que intervienen. Estos elementos, con las respectivas hipótesis que se pueden introducir sobre ellos se muestran a continuación:

1. **Horizonte temporal:** Periodo de tiempo en el que se deben tomar las decisiones.

2. **Incertidumbre:** Después de revisar distintos modelos de planificación y su alcance temporal, se hace evidente que muchas de las decisiones que deben tomarse en la planificación y la operación de los sistemas eléctricos están sujetas a distintos grados de incertidumbre. Por ejemplo desde la perspectiva de los generadores térmicos, los precios de los combustibles utilizados en las centrales (carbón, gas, etc.) no son conocidos a priori y cuando se planifica su explotación es necesario considerar que el costo final en el que se incurrirá podrá variar en función de la evolución de estas materias primas. Son muchas las fuentes posibles de incertidumbre que se pueden contemplar

por lo que es importante, antes de diseñar el modelo de planificación se identifiquen los aspectos importantes para ser considerados. Los modelos pueden incluir o no la incertidumbre inherente a las decisiones:

- Deterministas: No incluyen ninguna aleatoriedad en el modelo.
- Estocásticos: Se incluye aleatoriedad en algunos de los parámetros de los modelos (demanda, aportaciones hidráulicas, costos de combustibles, etc.) de modo que las decisiones óptimas se toman de forma no anticipativa (es decir, con incertidumbre sobre las consecuencias futuras), lo que se traduce en planificaciones más realistas.

3. **Red de transporte:** Se entiende como la red para transportar hasta el consumidor final la energía generada que puede describirse en más o menos detalle; hay que tener en cuenta que el camino seguido por la electricidad no lo fija el operador sino que viene regido por las leyes de Kirchoff. Atendiendo a este criterio los modelos pueden ser de:

   - Nodo único: No se incluyen las características de la red de transporte, considerando que todos los generadores están en un mismo nodo, sin restricciones a la hora de la generación y su posterior distribución.
   - Red: Se incluyen las características de la red con más o menos detalle, pudiendo aparecer sólo como restricciones a la generación, restricciones de intercambio entre áreas, o de forma más detallada, incluyendo la primera o ambas leyes de Kirchoff con mayores o menores simplificaciones y las congestiones debidas a los límites en la capacidad de transmisión de las líneas.

4. **Modelado del mercado:** Los sistemas pueden responder a distintos entornos de regulación, pudiendo ser centralizados o liberalizados. La regulación determina en gran medida los modelos a utilizar, aunque también en el caso liberalizado se pueden incluir más o menos detallado el mecanismo de subasta según el interés que tenga para la planificación que se vaya a desarrollar. De este modo se pueden distinguir varios niveles de modelado:.

   - El Modelo Centralizado o de competencia perfecta: Supone que la decisión de los grupos que han de generar la energía se hace basada en satisfacer la demanda del sistema con el criterio de minimizar el costo de producción. Esta situación responde a un sistema centralizado, o bien, el resultado en competencia perfecta, donde el equilibrio entre las empresas les lleva a que sus ofertas sean los costos de generación. Esta última es una situación ideal, que aunque no suele darse, puede aproximar situaciones con muchas empresas de generación en la que ninguna tiene una posición dominante, a través de la cuál pueda ejercer poder de mercado. Sin embargo, la realidad de los mercados liberalizados no suele corresponder a este esquema, ya que la existencia de pocas empresas de generación conlleva un funcionamiento de tipo oligopolista que difícilmente puede ser modelado mediante una aproximación de competencia perfecta.

- El Modelo Liberalizado: Este segundo método supone incluir en el modelo los objetivos de las empresas en un mercado y encontrar como solución el punto de equilibrio. Con ello el problema a resolver cambia radicalmente, pues en lugar de un problema conjunto, como es el de minimización de costes, las empresas plantean su propio problema considerando las decisiones de los demás como parámetros, lo que conlleva resolver varios problemas ligados por condiciones que actúan para todas a la vez (como satisfacer la demanda). El modelado de esta situación implica la introducción de las llamadas condiciones de equilibrio que no son fáciles de tratar, y menos junto a otros criterios y metas.

En El Salvador se tiene un modelo de mercado Centralizado, que fue creado en el año de 1998, año en el cual se promulgaron algunas leyes y reglamentos como la Ley de Creación de la Superintendencia General de Electricidad y Telecomunicaciones (SIGET), el Reglamento de Operación del Sistema de Transmisión y del Mercado Mayorista, entre otros.

El rol normativo del sector eléctrico lo ejerce el Ministerio de Economía (MINEC) a través de la Dirección de Energía Eléctrica (DEE-MINEC), creada en el año 2001. La DEE-MINEC tuvo la misión de elaborar, proponer, coordinar y ejecutar las políticas, programas, proyectos y acciones que tengan como fin un eficiente funcionamiento de las actividades de generación, transporte y distribución de la energía eléctrica, que redunde en beneficio de los consumidores y usuarios a través de un suministro de optima calidad, a tarifas razonables no discriminatorias, por medio de condiciones y reglas de funcionamiento basadas en la competencia y eficiencia en la asignación de recursos.

El ente regulador del mercado eléctrico y de las actividades de generación, transmisión, distribución y comercialización, radica en la Superintendencia General de Electricidad y Telecomunicaciones, SIGET.

La coordinación de la operación del sistema eléctrico y del mercado mayorista es realizada por la Unidad de Transacciones (UT), entidad privada organizada como sociedad de capital por acciones. La UT tiene como principales funciones las siguientes:

*a*) Operar el sistema de transmisión, mantener la seguridad del sistema y asegurar la calidad mínima de los servicios y suministros.

*b*) Operar el mercado mayorista de energía eléctrica.

Algunas de las empresas que operan en el mercado eléctrico salvadoreño son las siguientes:

- Generadoras de propiedad estatal mayoritaria: Comisión Ejecutiva Hidroeléctrica del Río Lempa (CEL) y LaGeo.
- Generadoras térmicas privadas: Duke Energy, Nejapa Power y Central de Motores CESSA.
- Transmisora estatal: ETESAL, que se encarga de prestar los servicios de transporte de energía a través de la infraestructura de alambres, postes, torres, etc.
- Distribuidoras privadas: Compañía de Alumbrado Eléctrico de San Salvador (CAESS), Distribuidora Eléctrica del Sur (DELSUR), Compañía de Luz Eléctrica de Santa Ana (CLESA), Empresa Eléctrica de Oriente (EEO) y la Distribuidora de Energía Eléctrica de Usulután (DEUSEM).

5. **Modelado del sistema de generación:** Los modelos pueden describir en mayor o menor detalle el sistema de generación, es decir, las características técnicas de los grupos generadores (alternadores), que suelen tratarse de forma distinta según sean hidráulicos o térmicos. En el subsistema hidráulico, se pueden incluir simplemente las centrales con sus límites de potencia, o

se puede incluir la topología de una cuenca hidrográfica, de modo que la producción, reservas, etc. de las centrales de una misma cuenca, dependan de lo que ocurra con centrales situadas aguas arriba de esa misma cuenca.

6. **Acoplamiento temporal:** El tiempo es uno de los elementos más importantes en los modelos. En general, el tiempo se considerará dividido en periodos secuenciales, que pueden ser de muy diverso tamaño. Así, podemos hablar de periodos desde una hora, hasta de varios meses. A su vez, estos periodos se suelen dividir en subperiodos, aunque ya no tienen por qué ser correlativos. Por ejemplo, si un periodo tiene una duración de un mes, un subperiodo puede ser laborable, y otro festivo. Adicionalmente, también los subperiodos pueden subdividirse, hablando en general de bloques de carga. Los bloques de carga son niveles de demanda de una duración determinada que no son necesariamente secuenciales. Por lo tanto, para una misma división del tiempo, se pueden distinguir los modelos por las restricciones que ligan esas divisiones:

    - Restricciones intraperiodo: Ligan decisiones dentro de un mismo periodo, por ejemplo, entre bloques de carga.
    - Restricciones interperiodo: Ligan decisiones de un periodo con las del anterior.

## 3.4. Características de los Modelos de Planificación de Sistemas Eléctricos

Como ya se ha comentado, el objetivo final de todas las planificaciones es lograr una explotación "óptima" del sistema, pero las metas y criterios que determinan ese concepto de "óptimo" serán distintos en cada modelo según el alcance y las decisiones que estén siendo valoradas. Así el nivel de detalle de los elementos viene determinado por los objetivos de la planificación que se esté llevando a cabo, de ahí la importancia de distinguir los modelos por su alcance temporal. Por otra parte, las opciones de planificación no son valoradas por un único criterio, de modo que para todos los modelos de planificación es posible identificar varios criterios. De forma general, se podría decir que toda planificación conlleva una previsión de producciones y precios de energía, pero, habrá grandes variaciones en función de qué decisiones se obtengan según el alcance temporal y a qué restricciones estén sujetas. A continuación, se describen de una forma general los fines, decisiones y criterios propios de cada tipo de planificación.

### 3.4.1. Modelos de muy largo plazo (de 5 a 15 años)

Dependiendo de las empresas, y de las características del parque generador, la planificación de muy largo plazo tendrá mayor o menor relevancia. En general, sí se hacen algunos estudios con este horizonte, aunque por entes públicos o reguladores, fundamentalmente para prever la evolución de la demanda y con ello de la expansión de la generación, de la emisiones contaminantes, etc. En general, cuando se hace una planificación a muy largo plazo el análisis fundamental es el de la expansión de la generación. Con este fin, se consideran distintas decisiones de planificación asociadas a la expansión directamente, pero también a decisiones de tipo financiero.

- Asociadas a la expansión del equipo generador:
  - Instalación o compra de nuevos grupos.
  - Inversiones sobre equipos ya existentes (por ejemplo ampliación de la capacidad de producción o “repowering”).
  - Retirada o venta de grupos ya existentes.
- Asociadas a contratos de compra/venta de energía (contratos internacionales, contratos con grandes consumidores, comercializadoras,...).
- Asociadas a contratos de compra de combustible (adquisición de combustible para centrales térmicas, como combustible nuclear, carbón, gas,...).

Respecto a los criterios que se contemplan en el desarrollo de esta planificación y que deben ser incluidos en los modelos de ayuda a la decisión utilizados, los más habituales se muestran a continuación, sin perjuicio de que las empresas puedan imponer otros particulares, pues hay que tener en cuenta que esta planificación y sus criterios son de alto contenido estratégico y marcarán la evolución de la empresa, junto con las decisiones derivadas del largo plazo. De ahí que a menudo no se haga la separación entre los dos niveles:

- Valor actualizado neto de la empresa (VAN): Valor actualizado al día de hoy de la empresa en el horizonte temporal u otras medidas del valor de la empresa.
- Tasas de retorno de la inversión u otras medidas del beneficio o renta empresarial.
- Medidas del riesgo asociado a las inversiones y contratos, como el valor en riesgo (VaR).
- Cuotas de mercado: Presencia en el mercado u otros criterios estratégicos.
- Probabilidad de pérdida de carga (LOLP) u otras medidas de la garantía de suministro a largo plazo o fiabilidad.
- Medidas de impacto medioambiental o sostenibilidad de las inversiones.

### 3.4.2. Modelos de largo plazo (2 a 5 años)

Este nivel junto al anterior son los más estratégicos, y menos centrados en la operación día a día de la empresa. Los fines principales para los que se desarrolla esta planificación son el análisis de cuotas de mercado y de nuevos entrantes, así como el efecto de la elasticidad de la demanda con el precio. Las decisiones que se valoran en este caso se pueden diferenciar en las de tipo operativo cuando son operaciones que superan el ciclo anual, y de tipo estratégico para influir sobre la demanda. También pueden ser decisiones desde el punto de vista del operador o desde el punto de vista de una empresa generadora. Atendiendo al primer criterio podemos clasificarlas como:

- Decisiones operativas a planificar más allá del ciclo anual:
  - Sobre gestión del ciclo de combustible nuclear.
  - Sobre gestión de embalses de ciclo hiperanual.
  - Ciclos de mantenimiento de los grupos térmicos.

- Sobre gestión de la demanda a largo plazo:
    - Medidas en tarifas.
    - Campañas de publicidad y otras medidas de gestión de la demanda.

Respecto a los objetivos y metas planteados en este nivel, son prácticamente los mismos que los del nivel anterior, razón por la que se suelen hacer conjuntamente en las empresas. Algunos modelos clásicos utilizados en la planificación a largo plazo son los modelos de expansión de la generación y/o la red a largo plazo, los modelos de valoración de riesgos y contratos, y los modelos de valoración de inversiones o estimación de aparición de nuevos agentes.

### 3.4.3. Modelos de medio plazo (1 mes a 2 años)

Probablemente, sea este nivel el que produce más tipos de modelos y de mayor dificultad de resolver. Este nivel exige una descripción bastante detallada del sistema de generación, y han de plantearse decisiones muy variadas. En general, los modelos de medio plazo persiguen realizar una previsión de compras/consumos de combustibles (salvo el nuclear), una previsión de los precios de mercado y de los ingresos/costos de la explotación, una previsión de las producciones/gestión hidrotérmica tanto de los grupos generadores térmicos como de los embalses anuales, y un análisis de cobertura de la demanda. En general, las decisiones son de tipo operativo más que estratégico, aunque admiten una gran variedad de opciones. Aunque se pueden incluir muchas más decisiones sobre el sistema, las principales son las siguientes:

- Establecimiento del mantenimiento preventivo programado.
- Gestión de compras y stocks de combustibles.
- Gestión de los embalses anuales: Reservas, niveles de garantía, producciones, etc.
- Gestión del bombeo estacional: En la mayoría de los sistemas se incluyen grupos hidráulicos de bombeo, es decir, no basados sólo en aportaciones sino en una cantidad de agua que puede ser elevada a un embalse superior

mediante bombas hidráulicas en un momento determinado y dejarla caer para generar energía en otro. El rendimiento de esta operación es inferior a la unidad, obviamente, pero puede aprovecharse para cubrir la demanda en los momentos críticos o de mayor precio. No hay que olvidar que la energía eléctrica que se genera no puede ser almacenada, y este procedimiento permite almacenarla en forma de energía potencial.

- Gestión de la demanda: Se pueden analizar efectos de medio plazo de decisiones sobre tarifas, contratos que permitan interrumpibilidad del servicio,...

Los objetivos y metas que se suelen incluir en este tipo de modelos son muy variados, y en algunos casos muy difíciles de tratar conjuntamente, sobre todo en un entorno liberalizado, donde los modelos han de representar el equilibrio de mercado, pero este equilibrio se basa en diversos criterios que valoran las empresas. Entre los objetivos y metas más destacados están:

- Minimización de costos/maximización de la rentabilidad empresarial: El primero se plantea en entornos centralizados o de competencia perfecta, mientras que el segundo se plantea en mercados imperfectos. El primero supone un único problema realmente (el problema que resuelve el operador central), mientras que el segundo supone que ése es el objetivo de cada empresa, con un problema separado para cada una de ellas en que las decisiones de las demás aparecen como parámetros, pero que determinan lo que cada una puede hacer, ya que la demanda total ha de ser satisfecha conjuntamente.
- Cuotas de mercado: Presencia en el mercado u otros criterios estratégicos.
- Consignas largo plazo: Hay que considerar las consignas derivadas de la planificación a largo plazo, fundamentalmente las de tipo operativo referidas a gestiones de alcance más allá del anual (embalses hiperanuales, gestión de combustibles, mantenimientos de grupos, etc. ).

Algunos modelos muy utilizados en este entorno son los modelos de coordinación hidrotérmica a medio plazo, modelos de equilibrio de mercado a medio plazo, modelos de explotación de la generación a nodo único o generación/red a medio plazo, y modelos de estimación de precios.

### 3.4.4. Modelos de corto plazo (1 semana a 2 meses)

Estos modelos son en cierto modo parecidos a los anteriores en cuánto a decisiones y metas, aunque requieren un mayor nivel de detalle sobre el modelado del sistema de generación ya que corrigen el detalle de la explotación cuando está siendo realizada. En ocasiones, esta similitud se traduce en que los modelos son los mismos, introduciendo simplificaciones para el caso de medio plazo. Como muestra, en un modelo de medio plazo se suele tratar con periodos de un mes o una semana, mientras que en un modelo de corto plazo se manejan como periodos los días o las horas. El fin de los modelos de corto plazo es establecer la programación semanal, incluyendo la asignación de unidades por periodo. Las decisiones son de tipo operativo y se refieren fundamentalmente a la asignación de grupos y su producción, pudiendo resaltar las siguientes:

- Gestión de grupos de bombeo no estacional.
- Programación de paradas de grupos (nocturnas, de fin de semana, etc.).
- Gestión semanal/mensual de los embalses.
- Acoplamiento de grupos.

Respecto a los objetivos y metas, como ya se ha comentado, son muy semejantes a los de medio plazo, pero apropiados para la medida de tiempo considerada, de modo que tenemos como más importantes, la minimización de costos o maximización de la renta empresarial en equilibrio (según sea entorno centralizado o liberalizado, las cuotas de mercado, y como fundamental, las consignas de medio plazo recibidas del modelo anterior sobre producciones de los grupos. Los modelos más utilizados en este entorno son semejantes a los modelos de medio plazo, como los de coordinación hidrotérmica a corto plazo, modelos de equilibrio de mercado a corto plazo, modelos de explotación de la generación a nudo único o generación/red a corto plazo, y modelos de estimación de precios, pero incluyendo consignas de medio plazo y más detalle en los elementos del sistema. Además hay otros modelos más propios de este alcance como modelos de fiabilidad de la generación y modelos de operación/fiabilidad generación/red.

### 3.4.5. Modelos de muy corto plazo (hasta 1 semana)

En general, estos modelos son los que determinan las decisiones operativas que al fin se van a llevar a cabo en el día a día. De estas decisiones dependerá que se logren la mayor parte de las planificaciones y objetivos planteados en el corto plazo y el medio plazo. A partir de estos modelos se obtendrá la programación diaria de producción (asignación de grupos térmicos y despacho económico, “unit commitment”). Las opciones y decisiones valoradas en estos modelos fundamentalmente son:

- Gestión de arranques y paradas de los grupos térmicos (paradas nocturnas).
- Gestión del bombeo diario y semanal.
- Producciones de los grupos térmicos e hidráulicos.
- Ofertas enviadas al operador.

Los objetivos y metas en este nivel son también muy variados, existiendo una gran variedad de modelos según para qué estén diseñados. Entre ellos destacan por comunes los siguientes criterios:

- Consignas corto plazo: Es fundamental incluirlas para que las planificaciones de niveles superiores puedan ser logradas.
- Equilibrio entre las empresas que lleven a las producciones deseadas según la planificación de corto plazo.
- Cumplimiento de programas previamente establecidos en alguna subasta.
- Suavidad de las programaciones: Las consignas de corto y medio plazo suelen ser referidas a cantidades globales, de modo que si no se tiene en cuenta una cierta suavidad de las programaciones, éstas pueden resultar en múltiples arranques, paradas y variaciones de potencia de los grupos, que conllevan un gran desgaste y envejecimiento de los grupos con consecuencias no previstas en una planificación de más largo plazo.

- Suministro de servicios complementarios a la producción de energía (por ejemplo, control de la frecuencia de la red en su valor de operación “50 ciclos por segundo”, reserva que cubra los cambios imprevistos de demanda y control de tensiones en valores que garanticen el funcionamiento correcto del sistema).

Los modelos más utilizados en este alcance son los modelos de red para gestión de restricciones, los modelos de generación de ofertas en distintos mercados, los modelos de redespacho como el que se describe más adelante, y los modelos de despacho económico. En la siguiente sección se muestra a modo de ejemplo un modelo de muy corto plazo donde se ilustra la dificultad de operación de estos sistemas en un mercado liberalizado, así como la inclusión de los criterios definidos en un modelo de ayuda a la decisión en este entorno. En la Tabla 3.1 se resumen los modelos comentados mostrando los principales objetivos perseguidos por la planificación en cada uno de sus niveles, los principales criterios utilizados para valorar las opciones, y algunos ejemplos de modelos desarrollados para cada nivel.

| **Plazo** | **Horizonte temporal** | **Objetivos** | **Criterios** | **Modelo Ejemplo** |
|---|---|---|---|---|
| Muy largo | 5 a 15 años | Expansión del sistema, Gestión Financiera | Valor de la empresa, Beneficio Criterios estratégicos, Riesgo, Fiabilidad del suministro, Sostenibilidad | Cálculo de expansión de la generación |
| Largo | 2 a 5 años | Establecimiento de tarifas, Gestión de la demanda, Gestión del combustible nuclear, Gestión de embalses hiperanuales, Programación mantenemientos | | Cálculo de la expansión de la red, Determinación ciclos mantenimiento Valoración del riesgo |
| Medio | 1 mes a 2 años | Gestión combustibles fósiles, Gestión de embalses ciclo anual, Gestión del bombeo estacional, Previsión de precios de mercado, Previsión resultados empresariales, Análisis de cobertura de demanda | Consignas de largo plazo, Minimizar costos, Maximizar margen de contribución | Cálculo del calendario de mantenimientos, Coordinación hidrotérmica a medio plazo, Modelos de generación-red |
| Corto | 1 semana a 2 meses | Gestión de bombeo mensual, Gestión de paradas, Gestión semanal de embalses | | Coordinación hidrotérmica a corto plazo, Modelos generación-red |
| Muy Corto | Hasta 1 semana | Gestión de bombeo diario, Arranques y paradas horarios, Servicios complementarios | Consignas a largo plazo, Cumplir programas, Minimizar costos, Maximizar margen de contribución | Programación de unidades (unit commiment), Preparación de ofertas Despacho económico, Gestión restriccones red |

Tabla 3.1: Resumen de los modelos de Generación

## 3.5. Equipo de Generación Térmica

El equipo de generación térmica está constituido por todas las unidades generadoras o también llamados grupos térmicos, cuyo principio de funcionamiento se basa en la transformación de energía calorífica en energía eléctrica. Las fuentes primarias de energía calorífica pueden ser tanto de origen fósil (gas, fuel-oil, carbón), como de origen nuclear. Cabe resaltar que toda la potencia producida en el generador, no toda es volcada en la red, sino que parte de ella es utilizada por los servicios auxiliares. Los servicios auxiliares de una central son por ejemplo bombas que impulsan los sistemas de refrigeración, los molinos que pulverizan el carbón, los motores de los sistemas de ventilación, etc. Todos estos elementos consumen una energía que es tomada directamente del generador central, por lo que de la potencia bruta producida, solo una parte es la que se vierte a la red. Se suele utilizar la terminología de potencia bruta y potencia neta para distinguir entre la producida en bornes del generador (b.a.) y la potencia disponible en bornes de la central (b.c.), es decir, tras desconectar toda la energía asociada a los consumos auxiliares. Lo habitual es relacionar ambas magnitudes por medio de un coeficiente denominado *coeficiente de consumos auxiliares (K)*, que satisface la siguiente relación:

$$potencia_{b.c.} = potencia_{b.a.} * K$$

Por otro lado los grupos térmicos no pueden producir energía por encima de su capacidad máxima ni por debajo de su mínimo técnico. La capacidad máxima se debe al propio diseño del generador, el mínimo técnico se debe a la estabilidad de combustión en la caldera así como a otras restricciones en el generador de vapor. Para permitir tomar decisiones de arranque y parada, se utilizarán variables binarias $\{0,1\}$. De este modo, cuando el grupo térmico está acoplado, la potencia producida por el grupo térmico sólo podrá tomar valores comprendidos entre su mínimo técnico y su capacidad máxima. En caso contrario la potencia producida será nula. La notación y descripción de las variables y los datos utilizados en estos modelos se presentan en la sección 3.6.1.

Otro aspecto que es necesario modelar es la relación que debe existir entre las decisiones de arrancar o parar y el estado de acoplamiento de un grupo térmico. Es evidente que un grupo que esté acoplado no podrá arrancarse pero si pararse. Por otro lado, un grupo parado no podrá pararse pero si ser arrancado.

En los modelos utilizados en el sector eléctrico es habitual encontrar otras restricciones adicionales que afectan al equipo de generación térmica. En éste trabajo, no se han incluido todas, principalmente porque el objetivo no es tanto realizar un modelo exhaustivo del sistema de generación, sino más bien, ilustrar cómo la optimización estocástica puede aplicarse a este tipo de problemas para reflejar mejor las circunstancias en las que desarrollan su actividad los responsables de la toma de decisiones en las empresas de generación: Incertidumbre en muchos casos de los datos de entrada así como necesidad de tomar decisiones “aquí y ahora”, que sean robustas ante un futuro incierto.

### 3.5.1. Costos del equipo de generación térmica considerados en el modelo

Los costos asociados a la explotación de un grupo térmico son el costo de producción, el costo de arranque y el costo de parada. El primero incluye el costo de combustible, así como otros costos asociados a la operación de la central y a su mantenimiento. Dependiendo de la tecnología de la central (carbón, fuel-oil, gas, etc.), pueden ser diferentes.

Por otro lado, el costo de arranque representa el gasto de combustible que no se invierte en generar energía en la central sino que se consume para llevar a la caldera a unas condiciones de presión y temperatura adecuadas. Del mismo modo, el costo de parada representa la cantidad de combustible que es desperdiciado una vez que se ha tomado la decisión de parar la unidad de generación. Este costo también permite incorporar el gasto por envejecimiento prematuro que este tipo de maniobras provoca reduciendo la vida útil de la instalación. En este trabajo se supone que el costo de arranque y el de parada es un valor constante e independiente del tiempo que la central lleva parada o arrancada respectivamente.

## 3.6. Aplicación de la Optimización Estocástica para Resolver un Problema de Generación Térmica

Como se ha visto, la Optimización Estocástica tiene muchas aplicaciones y permite resolver problemas de la vida real. Como una aplicación práctica se estudiará el problema de programación de unidades de generación de energía eléctrica para minimizar los costos relacionados con la producción. El propósito no es resolver un problema con datos reales debido a la dificultad de su obtención (aunque sería lo ideal), sino resolver un problema de generación térmica de energía eléctrica con datos supuestos, que sea lo más adecuado posible para poder aplicarlo a datos reales o poder ser sometido a posibles cambios.

Supongamos que se cuenta con seis generadores y se debe satisfacer la demanda de energía eléctrica por hora, en un horizonte temporal de 24 horas. Para nuestro trabajo la demanta puede ser alta, normal o baja, dicha demanda cambiara en los puntos de apertura, es cuando habrá cambio en la demanda ya sea de normal a alta o de normal a baja o de baja a normal, ect. Los puntos de apertura serán en las horas: 7, 10, 17 y 22. Esto nos ayudara a saber su tenemos que encender un generador o apgarlo, según sea el caso de la demanda. La demanda se supone que es estocástica, que sube un 15 %, se mantiene o baja un 20 % con probabilidad de 0.2, 0.6 y 0.2 respectivamente, según las horas indicadas en los puntos de apertura. Los datos de la demanda se presentan en la Tabla 3.2, y los respectivos datos técnicos de los generadores se presentan en la Tabla 3.3. Además se supone una reserva rodante de 0.2 MW

### 3.6.1. Formulación del modelo

La programación horaria de un sistema térmico es un problema de programación matemática lineal, entero-mixto y de gran dimensión. La función objetivo está formada por los costos de producción: los costos fijos y los costos lineales, los costos de arranque y los costos de parada, asociados a las unidades térmicas puesto que éstas tienen un costo de funcionamiento que depende del tipo de combustible que utiliza para la generación. El objetivo es minimizar los costos

| Hora | Normal (MWh) | Subir (MWh) | Bajar (MWh) | Apertura |
|---|---|---|---|---|
| 00:00 | 1500 | 1725 | 1200 | |
| 01:00 | 1143 | 1314 | 914 | |
| 02:00 | 857 | 986 | 686 | |
| 03:00 | 786 | 904 | 629 | |
| 04:00 | 714 | 821 | 571 | |
| 05:00 | 743 | 854 | 594 | |
| 06:00 | 971 | 1117 | 777 | |
| 07:00 | 1429 | 1643 | 1143 | Punto apertura |
| 08:00 | 2000 | 2300 | 1600 | |
| 09:00 | 2071 | 2382 | 1657 | |
| 10:00 | 2171 | 2497 | 1737 | Punto apertura |
| 11:00 | 2186 | 2514 | 1749 | |
| 12:00 | 2143 | 2464 | 1714 | |
| 13:00 | 2071 | 2382 | 1657 | |
| 14:00 | 1857 | 2136 | 1486 | |
| 15:00 | 1886 | 2169 | 1509 | |
| 16:00 | 2000 | 2300 | 1600 | |
| 17:00 | 2171 | 2497 | 1737 | Punto apertura |
| 18:00 | 2571 | 2957 | 2057 | |
| 19:00 | 2571 | 2957 | 2057 | |
| 20:00 | 2500 | 2875 | 2000 | |
| 21:00 | 2286 | 2629 | 1829 | |
| 22:00 | 2000 | 2300 | 1600 | Punto apertura |
| 23:00 | 1886 | 2169 | 1509 | |

Tabla 3.2: Información para el problema de generación térmica

| Datos Técnicos | Gen. 1 | Gen. 2 | Gen. 3 | Gen. 4 | Gen. 5 | Gen. 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pot. Máx. (MW) | 400 | 500 | 700 | 400 | 1000 | 800 |
| Pot. Mín. (MW) | 100 | 150 | 150 | 50 | 450 | 200 |
| Rampa subida (MWh) | 200 | 300 | 500 | 300 | 600 | 400 |
| Rampa bajada (MWh.) | 300 | 300 | 200 | 100 | 600 | 400 |
| costo lineal prod. ($/MWh) | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 7 |
| costo fijo prod. ($) | 50 | 30 | 30 | 25 | 80 | 70 |
| costo arranque ($) | 10 | 20 | 10 | 15 | 20 | 15 |
| costo parada ($) | 5 | 10 | 5 | 10 | 15 | 10 |

Tabla 3.3: Información para el problema de generación térmica

totales de producción.

**Función Objetivo:**

$$\text{minimizar} \sum_{th} Pr_s(a_t P_{th} + b_t A_{th} + ca_t AR_{th} + cp_t PR_{th}) \tag{3.1}$$

La programación horaria de los generadores térmicos es un problema con un horizonte temporal comprendido en el muy corto plazo, ya que varía en 24 horas como horizonte de estudio con 6 generadores térmicos.

**Restricciones:**

**Demanda**

Dado que el modelo pretende minimizar los costos de producción, la potencia generada debe ser igual a la potencia demandada, la ecuación viene dada por:

$$\sum_t P_{th} = d_h \quad \forall h.$$

**Reserva rodante sobre la demanda**

La reserva rodante es la potencia disponible de las unidades generadoras que se encuentran sincronizadas al sistema. El servicio de reserva rodante cumple el objetivo de contar con suficiente capacidad de reserva rápida disponible para cubrir desviaciones en la demanda prevista y contingencias en unidades de generación o en el sistema de transmisión. Es un margen de seguridad sobre la potencia demandada para asegurar que siempre se suministre la demanda. La ecuación viene dada por:

$$\sum_t (\bar{p}_{th} A_{th} - P_{th}) = r.d_h \quad \forall h.$$

**Mínimos y máximos técnicos**

Esta restricción hace referencia a los límites de potencia máxima y mínimo de las unidades térmicas. Con esta restricción, se pretende garantizar que la central térmica opere a niveles de potencia que no excedan sus capacidades técnicas y operativas. Ya que la central se ve limitada respecto a su capacidad de generación debido a aspectos físicos de fabricación de la misma.

Para poder despachar una central para producir energía, ésta debe cumplir un mínimo técnico de potencia exigida y un límite máximo nominal, de lo contrario no se despacha. La cota inferior representa un mínimo técnico y la cota superior representa un máximo operativo, la ecuación viene dada por:

$$\underline{p}_t A_{th} \leqslant P_{th} \leqslant \bar{p}_{th} A_{th} \quad \forall t, h.$$

**Acoplamiento, arranque y parada**

En la generación térmica no todos los generadores deben estar acoplados al mismo tiempo ya que esto incrementaría enormemente el costo y sobrepasaría la demanda. Debido a esto, los generadores deben alternar sus arraques y paradas entre ellos para poder satisfacer la demanda a un costo mínimo. La ecuación del acoplamiento viene dada por:

$$A_{th} - A_{th-1} = AR_{th} - PR_{th} \quad \forall t, h.$$

La producción de la central en una hora determinada viene dada por el estado de acoplamiento de las horas anterior y posterior. Es decir, que el gradiente de la potencia generada, ya sea en incremento o decremento de potencia, no puede sobrepasar los límites de rampa establecidos para la unidad generadora.

De igual manera, la idea planteada también es válida en el instante de arranque y parada de la unidad térmica. En el momento de arranque o parada de una unidad térmica, el gradiente de potencia no debe ser superior a los valores preestablecidos para la misma. Es por ello que se consideran dos conjuntos de rampas: Rampa de arranque y subida y Rampa de parada y bajada.

**Rampa de subida**

Una unidad térmica no puede aumentar bruscamente su producción de una hora a la siguiente por encima de cierto incremento llamado el límite de Rampa de Subida. La rampa máxima de subida es la máxima potencia que una central puede aumentar en las horas sucesivas.

La rampa de arranque es la potencia máxima que puede generar una central cuando pasa de estar desacoplada a estar acoplada. Su respectiva ecuación viene dada por:

$$P_{th} - P_{th-1} \leqslant rs_t \quad \forall h, t.$$

**Rampa de bajada**
Una central térmica no puede disminuir bruscamente la potencia producida en el intervalo de una hora. La rampa de bajada es la máxima caída de potencia que una central puede disminuir su producción al pasar a la siguiente hora. La rampa de parada es la máxima caída de potencia que una central puede generar para poder ser desacoplada en la hora siguiente. Su respectiva ecuación viene dada por:

$$P_{th-1} - P_{th} \leqslant rb_t \quad \forall h, t.$$

**Naturaleza de las variables**

$$P_{th} \geqslant 0,\ Ar_{th},\ PR_{th},\ A_{th} \in \{0, 1\}.$$

**Nomenclatura implementada:**
**Índices:**

$s$: Correspondiente al escenario $s$; $s = 1,\ 2,\ ...,\ 81$.

$t$: $t$ – ésima unidad térmica, $t = 1,\ 2,\ ...,\ 6$.

$h$: $h$ – ésimo periodo de análisis, $h\ =\ 0,\ 2,\ ...,\ 23$.

**Variables Unidades Térmicas:**

$P_{th}$: Potencia acoplada del grupo térmico $t$ en la hora $h$ (MW).

$A_{th}$: Acoplamiento del grupo térmico $t$ en la hora $h$.
1 = está acoplada.
0 = no está acoplada.

$AR_{th}$: Arranque del grupo térmico $t$ en la hora $h$.
1 = arranca en la hora $h$.
0 = si no arranca en la hora $h$.

$PR_{th}$: Parada del grupo térmico $t$ en la hora $h$.
1 = Para en la hora $h$.
0 = Si no para en la hora $h$.

**Parámetros Unidades Térmicas:**

$Pr_s$: Probabilidad de los escenarios $s$.

$d_h$: Demanda térmica en la hora $h$.

$r$: Nivel de reserva rodante con respecto a la demanda.

$\bar{p}_t$: Potencia máxima del grupo térmico $t$ (MW).

$\underline{p}_t$: Potencia mínima del grupo térmico $t$ (MW).

$rs_t$: Rampa de subida del grupo térmico $t$ (MW/h).

$rb_t$: Rampa de bajada del grupo térmico $t$ (MW/h).

$a_t$: Costo lineal de combustible del grupo térmico $t$ ($/MW).

$b_t$: Costo fijo de combustible del grupo térmico $t$ ($/MW).

$ca_t$: Costo de arranque del grupo térmico $t$ ($).

$cp_t$: Costo de parada del grupo térmico $t$ ($).

## 3.7. Solución e Interpretación del Modelo

A modo de ejemplificar el cálculo de las probabilidades para los distintos escenarios y los respectivos nodos mostraremos con ayuda de la Figura 3.2 dicho procedimiento:

- **Probabilidades de los escenarios:** Como podemos observar en la Figura 3.2 tenemos cuatro distintos escenarios y la probabilidad para cada escenario es la multiplicación de la probabilidad de cada camino a elegir. Para el escenario uno, tenemos que multiplicar las probabilidades de los casos: $1*1*0{,}4*0{,}4 = 0{,}16$, para el escenario dos $1 * 1 * 0{,}4 * 0{,}6 = 0{,}24$, para el escenario tres $1 * 1 * 0{,}6 * 0{,}4 = 0{,}24$ y para el escenario cuatro $1 * 1 * 0{,}6 * 0{,}6 = 0{,}36$. Observemos que la suma de estas probabilidades es $1$.

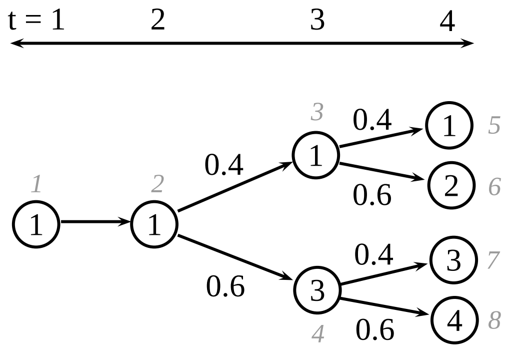


Figura 3.2: Árbol de escenarios para 4 horas

- **Probabilidades de los nodos:** Una vez calculada las probabilidades de los escenarios podemos calcular las probabilidades de los nodos, para los nodos 5, 6, 7, 8 sus probabilidades son la de los escenarios, para el nodo 3, ya que es un nodo raíz de un subárbol, su probabilidad será la suma de las probabilidades de los nodos del subárbol $0{,}16 + 0{,}24 = 0{,}4$. De igual manera para el nodo 5, su probabilidad será: $0{,}24 + 0{,}36 = 0{,}6$. Para el nodo 2, su probabilidad será: $0{,}4 + 0{,}6 = 1$ y el primer nodo tiene probabilidad $1$ porque pertenece a todos los nodos.

La Figura 3.3, muestra el árbol de escenarios para el problema de generación a resolver en este trabajo. Este árbol consta de 81 escenarios con sus correspondientes probabilidades calculadas, como se mostró en la Figura 3.2, es decir, como el producto de las probabilidades desde el nodo raíz hasta el último nodo de cada escenario. Luego la probabilidad de cada nodo es calculada como la suma de las probabilidades de los escenarios a los que pertenece ese nodo, para usar esta probabilidad en el modelo.

### 3.7.1. Tablas de soluciones al problema

En las Tablas 3.4, 3.5 y 3.6, se presenta parte de la solución del problema debido a que por la magnitud del mismo, se obtiene una solución de gran magnitud. La solución completa se presenta en el archivo *generacion de energia_estoc24h_esp.lst*, donde el costo mínimo es de **$125,220.00**.

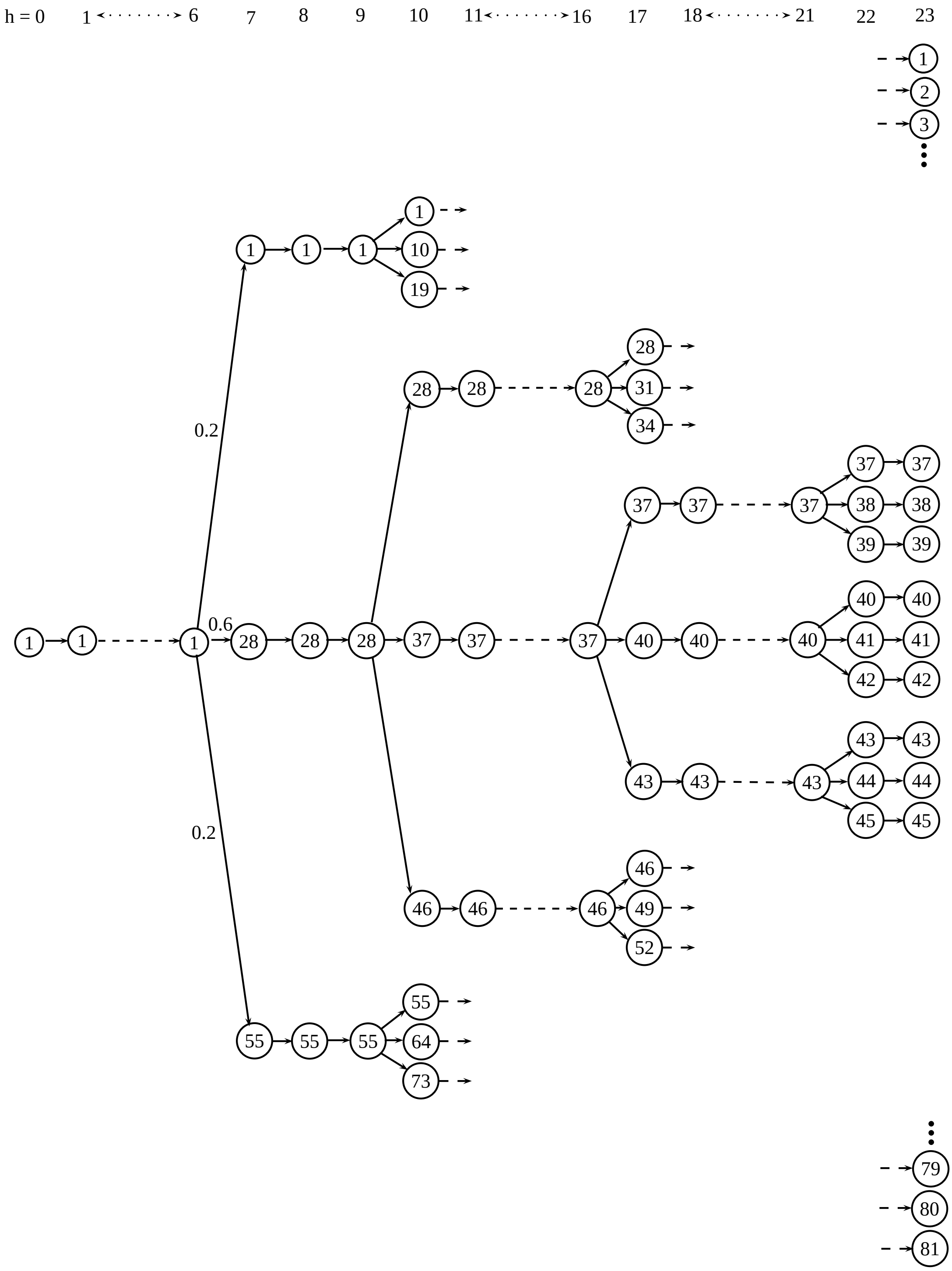


Figura 3.3: Árbol de escenarios para las 24 horas

| **Escenario** | **Generadores** | $h_0$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ | $h_5$ | $h_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $g_1$ | 157.14 | | | | | | |
| | $g_2$ | 300 | | | | | | |
| | $g_3$ | 200 | | | | | | |
| | $g_4$ | 242.86 | 142.86 | 50 | | | | |
| | $g_5$ | 600 | 1000 | 807.14 | 785.71 | 714.29 | 742.86 | 921.43 |
| | | $h_7$ | $h_8$ | $h_9$ | | | | |
| $s_1$ | $g_1$ | | 200 | 300 | | | | |
| | $g_2$ | | 300 | 300 | | | | |
| | $g_3$ | 442.86 | 700 | 700 | | | | |
| | $g_4$ | 200 | 100 | 82.14 | | | | |
| | $g_5$ | 1000 | 1000 | 1000 | | | | |

Tabla 3.4: Solución para el problema de generación térmica

| **Escenario** | **Generadores** | $h_7$ | $h_8$ | $h_9$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_{28}$ | $g_3$ | 150 | 250 | 200 |
| | $g_4$ | 278.57 | 178.57 | 228.57 |
| | $g_5$ | 1000 | 1000 | 1000 |
| $s_{55}$ | $g_4$ | 142.86 | 142.86 | 142.86 |
| | $g_5$ | 1000 | 1000 | 1000 |

Tabla 3.5: Solución para el problema de generación térmica

| **Escenario** | **Generadores** | $h_{10}$ | $h_{11}$ | $h_{12}$ | $h_{13}$ | $h_{14}$ | $h_{15}$ | $h_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $g_1$ | 300 | 500 | 100 | 300 | | 200 | 100 |
| | $g_2$ | 447.14 | 500 | 500 | 317.85 | 500 | 500 | 450 |
| | $g_3$ | 700 | 700 | 700 | 700 | 585.71 | 385.71 | 700 |
| | $g_4$ | 50 | 113.57 | 164.29 | 64.29 | 50 | 82.86 | 50 |
| | $g_5$ | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |
| | $g_6$ | | 200 | | | | | |
| $s_{10}$ | $g_1$ | 121.43 | 300 | | | | | |
| | $g_2$ | 500 | 500 | 500 | 471.43 | 457.14 | 500 | 452.86 |
| | $g_3$ | 500 | 335.71 | 592.86 | 550 | 350 | 150 | 350 |
| | $g_4$ | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 235.71 | 197.14 |
| | $g_5$ | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |
| $s_{19}$ | $g_1$ | | | | | | | |
| | $g_2$ | | | | | | | |
| | $g_3$ | 687.14 | 487.14 | 314.29 | 307.14 | 235.71 | 358.57 | 550 |
| | $g_4$ | 50 | 26 1.43 | 400 | 350 | 250 | 150 | 50 |
| | $g_5$ | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |
| | $g_6$ | | 200 | | | | | |
| $s_{28}$ | $g_1$ | 200 | 300 | 100 | 300 | | 100 | 300 |
| | $g_2$ | 300 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 |
| | $g_3$ | 700 | 549.28 | 700 | 517.85 | 585.71 | 518.57 | 450 |
| | $g_4$ | 297.14 | 264.29 | 164.29 | 64.29 | 50 | 50 | 50 |
| | $g_5$ | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |
| | $g_6$ | | 200 | | | | | |

Tabla 3.6: Solución para el problema de generación térmica

### Interpretación

De acuerdo a los resultados presentados en la Tabla 3.4, en la hora $0$, el grupo térmico 1 debe generar 157.14 MW; el grupo térmico 2 debe generar 300 MW; el grupo térmico 3 debe generar 200 MW; el grupo térmico 4 debe generar 242.86 MW y el grupo térmico 5 debe generar 600 MW. La interpretación de las Tablas 3.5, 3.6, es análoga.

# Conclusiones

- El problema de la generación térmica tiene por objetivo la minimización de los costos de de generación sujeta a una serie de restricciones, técnicas y económicas para poder satisfacer la demanda.
- Los problemas de optimización estocástica son de gran aplicación en la realidad y la resolución de estos problemas se ha facilitado gracias a los grandes avanzes computacionales, por ejemplo: GAMS, CPLX, Gurobi, Matlab, entre otros.
- Una de las limitantes para desarrollar este modelo es no contar con datos reales, pero este modelo es flexible y puede ser modificado para resolver el problema con datos reales.

# Apéndice A

# Capítulo 1

Al resolver cualquier tipo de programa en Gams, se debe hacer lo siguiente: se abre un proyecto o se crea uno nuevo accediendo desde file→ project→ Open project (o New Project), respectivamente, luego se seleciona el directorio en el cual se desea trabajar como se muestra en la Figura A.1.

## A.1. Programación y solución del problema de la dieta en Gams

1. Se procede a definir los conjuntos, parámetros, tablas y variables que se van a usar en el problema.

```
Sets
       i Tipo de alimento a comprar /pienso, forraje/

Parameters
       c(i) Costo de cada tipo de alimento
              / pienso       0.30
                forraje      0.35 /

Variables
       x(i)        Numero de Kilogramos a comprar de pienso y de forraje
       z           Define la fucion objetivo;
```

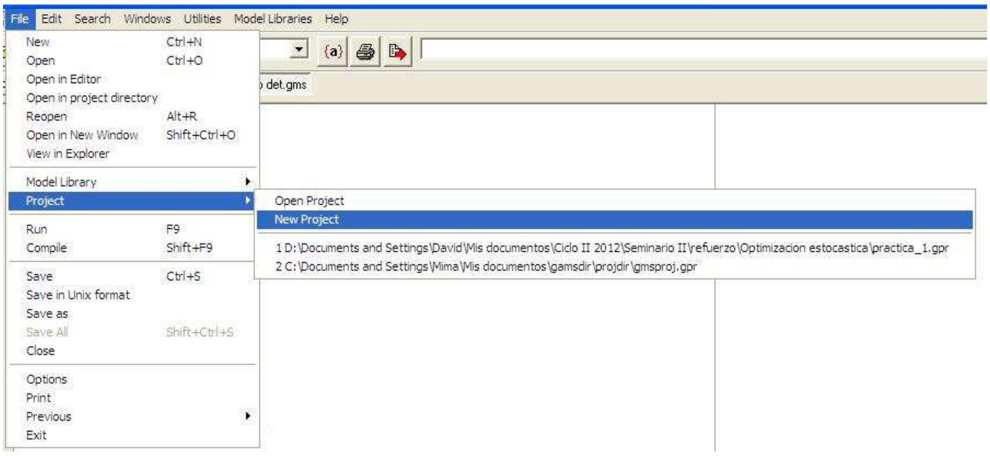


Figura A.1: Imagen de un nuevo proyecto

2. Se establece la naturaleza de las variables, es decir, si son negativas, positivas, enteras, etc.
   positive variable x;

3. Se definen las ecuaciones a utilizar: Función Objetivo y restricciones.

   Equations
   
   | | |
   |---|---|
   | Fo | define la funcion objetivo |
   | ec1 | restriccion para satisfacer las necesidades de proteinas |
   | ec2 | restriccion para satisfacer las necesidades de calcio |
   | ec3 | restriccion para satisfacer las necesidades de vitamina; |

4. Se asignan expresiones a las ecuaciones del modelo.

   | | |
   |---|---|
   | Fo .. z =e= | sum(i, x(i)*c(i)); |
   | ec1 .. | 30*x('pienso') + 45*x('forraje') =g= 700; |
   | ec2 .. | 2*x('pienso') + x('forraje') =g= 28; |
   | ec3 .. | 10*x('pienso') + 5*x('forraje') =g= 150; |

5. Se nombra el modelo.

   model problema_de_la_dieta /all/;

6. Se resuelve el modelo y se interpretan los resultados (puede ejecutarse presionando F9).

   solve problema_de_la_dieta using mip minimizing z;
   display x.l;

   Valor de la función objetivo para el problema de la dieta

```
              S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   problema_de_la_dieta   OBJECTIVE  z
     TYPE    MIP                    DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX                  FROM LINE  27

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE                6.1667
```

   Valores de las variables

```
     28 VARIABLE x.L  Numero de Kilogramos a comprar de pienso y de forraje

pienso  10.833,    forraje  8.333
```

## A.2. Programación y solución del problema del granjero determinista en Gams

1. Se procede a definir los conjuntos, parámetros, tablas y variables que se van a usar en el problema.

   Sets
   
   i Hectareas de cultivo a plantar /Ce, Ma, Re/
   
   j Toneladas de cereal a comprar /Ce, Ma/
   
   k Toneladas de cultivo a vender /Ce, Ma, Remenos, Remas/;

   Parameters

c(i) Costos de plantacion del cultivo i
/ Ce 150
Ma 230
Re 260/
p(j) Precio de compra del cereal j
/ Ce 238
Ma 210/
b(k) Precio de venta del cultivo k
/ Ce -170
Ma -150
Remenos -36
Remas -10/;

Variables

| | |
|---|---|
| x(i) | Numero de Hectareas a cultivar con el cultivo i |
| y(j) | Numero de toneladas a comprar del cereal j |
| w(k) | Numero de toneladas a vender del cultivo k |
| zn | Funcion objetivo en tiempo normal |
| zb | Funcion objetivo en tiempo bueno |
| zm | Funcion objetivo en tiempo malo; |

2. Se establece la naturaleza de las variables, es decir, si son negativas, positivas, enteras, etc.
   positive variable x, y, w;

3. Se definen las ecuaciones a utilizar: Función Objetivo y restricciones.

   Equations

| | |
|---|---|
| Fon | define la funcion en tiempo normal |
| ec1n | restriccion para no sembrar mas de las 500 Ha disponible en tiempo normal |
| ec2n | restriccion para satisfacer las necesidades de cebada del ganado en tiempo normal |
| ec3n | restriccion para satisfacer las necesidades de maiz del ganado |

| | |
|---|---|
| | en tiempo normal |
| ec4n | restriccion para no producir menos remolacha de la debida en en tiempo normal |
| ec5n | restriccion para no vender mas remolacha de la permitida en tiempo normal |
| | |
| Fob | define la funcion en tiempo bueno |
| ec1b | restriccion para no sembrar mas de las 500 Ha disponible en tiempo bueno |
| ec2b | restriccion para satisfacer las necesidades de cebada del ganado en tiempo bueno |
| ec3b | restriccion para satisfacer las necesidades de maiz del ganado en tiempo bueno |
| ec4b | restriccion para no producir menos remolacha de la debida en tiempo bueno |
| ec5b | restriccion para no vender mas remolacha de la permitida en tiempo bueno |
| | |
| Fom | define la funcion en tiempo malo |
| ec1m | restriccion para no sembrar mas de las 500 Ha disponible en tiempo malo |
| ec2m | restriccion para satisfacer las necesidades de cebada del ganado en tiempo malo |
| ec3m | restriccion para satisfacer las necesidades de maiz del ganado en tiempo malo |
| | |
| ec4m | restriccion para no producir menos remolacha de la debida en tiempo malo |
| ec5m | restriccion para no vender mas remolacha de la permitida en tiempo malo; |

4. Se asignan expresiones a las ecuaciones del modelo.

```
Fon .. zn =e=   sum(i,x(i)*c(i))+sum(j,y(j)*p(j))+sum(k,w(k)*b(k));
ec1n ..         sum(i, x(i)) =l= 500;
```

```
ec2n ..        2.5*x('Ce') + y('Ce') - w('Ce') =g= 200;
ec3n ..        3*x('Ma') + y('Ma') - w('Ma') =g= 240;
ec4n ..        20*x('Re') =g= w('Remas') + w('Remenos');
ec5n ..        w('Remenos') =l= 6000;

Fob .. zb =e=  sum(i,x(i)*c(i))+sum(j,y(j)*p(j))+sum(k,w(k)*b(k));
ec1b ..        sum(i, x(i)) =l= 500;
ec2b ..        3*x('Ce') + y('Ce') - w('Ce') =g= 200;
ec3b ..        3.6*x('Ma') + y('Ma') - w('Ma') =g= 240;
ec4b ..        24*x('Re') =g= w('Remas') + w('Remenos');
ec5b ..        w('Remenos') =l= 6000;

Fom .. zm =e=  sum(i,x(i)*c(i))+sum(j,y(j)*p(j))+sum(k,w(k)*b(k));
ec1m ..        sum(i, x(i)) =l= 500;
ec2m ..        2*x('Ce') + y('Ce') - w('Ce') =g= 200;
ec3m ..        2.4*x('Ma') + y('Ma') - w('Ma') =g= 240;
ec4m ..        16*x('Re') =g= w('Remas') + w('Remenos');
ec5m ..        w('Remenos') =l= 6000;
```

5. Se nombra el modelo.

```
model granjero_normal /fon, ec1n, ec2n, ec3n, ec4n, ec5n/;
model granjero_bueno /fob, ec1b, ec2b, ec3b, ec4b, ec5b/;
model granjero_malo /fom, ec1m, ec2m, ec3m,ec4m, ec5m/;
```

6. Se resuelve el modelo y se interpretan los resultados (puede ejecutarse presionando F9).

```
solve granjero_normal using mip minimizing zn;
display x.l, y.l, w.l;
solve granjero_bueno using mip minimizing zb;
display x.l, y.l, w.l;
solve granjero_malo using mip minimizing zm;
display x.l, y.l, w.l;
```

Valor de la función objetivo en tiempo normal

```
              S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   granjero_normal     OBJECTIVE  zn
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  76

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE          -118600.0000
```

Valores de las variables

```
----      77 VARIABLE x.L  Numero de Hectarias  a cultivar con el cultivo i

Ce 120.000,    Ma  80.000,    Re 300.000


----      77 VARIABLE y.L  Numero de toneladas a comprar del cereal j

                      ( ALL       0.000 )


----      77 VARIABLE w.L  Numero de toneladas a vender del cultivo k

Ce        100.000,    Remenos 6000.000
```

Valor de la función objetivo en tiempo bueno

```
              S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   granjero_bueno      OBJECTIVE  zb
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  78

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE          -167666.6667
```

Valores de las variables

```
----      79 VARIABLE x.L  Numero de Hectarias  a cultivar con el cultivo i

Ce 183.333,    Ma  66.667,    Re 250.000


----      79 VARIABLE y.L  Numero de toneladas a comprar del cereal j

                      ( ALL       0.000 )


----      79 VARIABLE w.L  Numero de toneladas a vender del cultivo k

Ce        350.000,    Remenos 6000.000
```

Valor de la función objetivo en tiempo malo

```
                    S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   granjero_malo       OBJECTIVE  zm
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  80

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE           -59950.0000
```

Valores de las variables

```
----      81 VARIABLE x.L  Numero de Hectarias  a cultivar con el cultivo i

Ce 100.000,    Ma  25.000,    Re 375.000


----      81 VARIABLE y.L  Numero de toneladas a comprar del cereal j

Ma 180.000


----      81 VARIABLE w.L  Numero de toneladas a vender del cultivo k

Remenos 6000.000
```

# Apéndice B

# Capítulo 2

## B.1. Programación y solución del problema del granjero estocástico en Gams

1. Se procede a definir los conjuntos, parámetros, tablas y variables que se van a usar en el problema.

```
Sets
      i Hectareas de cultivo a plantar /Ce, Ma, Re/
      j Toneladas de cereal a comprar /Ce, Ma/
      k Toneladas de cultivo a vender /Ce, Ma, Remenos, Remas/
      s Escenario donde se cultiva /Nor, Bu, Mal/;

Parameters
      prob(s) probabilidad del escenario s
              / Nor  0.333333333333
                Bu   0.333333333333
                Mal  0.333333333333/


      c(i) Costos de plantacion del cultivo i en el escenario s
              / Ce   150
                Ma   230
```

```
            Re    260/
    p(j) Precio de compra del cereal j en el escenario s
           / Ce   238
            Ma    210/
    b(k) Precio de venta del cultivo k en el escenario s
           / Ce         170
            Ma          150
            Remenos     36
            Remas       10/;
```

```
Variables
    x(i)      Numero de Hectareas a cultivar con el cultivo i
    y(j,s)    Numero de toneladas a comprar del cereal j en el escenario s
    w(k,s)    Numero de toneladas a vender del cultivo k en el escenario s
    z         Funcion objetivo;
```

2. Se establece la naturaleza de las variables, es decir, si son negativas, positivas, enteras, etc.

   ```
   positive variable x, y, w;
   ```

3. Se definen las ecuaciones a utilizar: Función Objetivo y restricciones.

```
Equations
    Fo        define la funcion
    ec        restriccion para no sembrar mas de las 500 Ha disponible en
              tiempo normal
    ec2n      restriccion para satisfacer las necesidades de cebada del
              ganado en tiempo normal
    ec2b      restriccion para satisfacer las necesidades de cebada del
              en ganado tiempo bueno
    ec2m      restriccion para satisfacer las necesidades de cebada del ganado
              en tiempo malo
    ec3n      restriccion para satisfacer las necesidades de maiz del ganado
              en tiempo normal
    ec3b      restriccion para satisfacer las necesidades de maiz del ganado
```

| | |
|---|---|
| | en tiempo bueno |
| ec3m | restriccion para satisfacer las necesidades de maiz del ganado en tiempo malo |
| ec4n | restriccion para no producir menos remolacha de la debida en en tiempo normal |
| ec4b | restriccion para no producir menos remolacha de la debida en tiempo bueno |
| ec4m | restriccion para no producir menos remolacha de la debida en tiempo malo |
| ec5n | restriccion para no vender mas remolacha de la permitida en tiempo normal |
| ec5b | restriccion para no vender mas remolacha de la permitida en tiempo bueno |
| ec5m | restriccion para no vender mas remolacha de la permitida en tiempo malo; |

4. Se asignan expresiones a las ecuaciones del modelo.

```
Fo .. z =e=   sum(i,x(i)*c(i)) + sum(s,prob(s)*(sum(j,y(j,s)*p(j))
              – sum(k,w(k,s)*b(k))));
ec1 ..        sum(i, x(i)) =l= 500;
ec2n ..       2.5*x('Ce') + y('Ce','Nor') - w('Ce','Nor') =g= 200;
ec2b ..       3*x('Ce') + y('Ce','Bu') - w('Ce','Bu') =g= 200;
ec2m ..       2*x('Ce') + y('Ce','Mal') - w('Ce','Mal') =g= 200;
ec3n ..       3*x('Ma') + y('Ma','Nor') - w('Ma','Nor') =g= 240;
ec3b ..       3.6*x('Ma') + y('Ma','Bu') - w('Ma','Bu') =g= 240;
ec3m ..       2.4*x('Ma') + y('Ma','Mal') - w('Ma','Mal') =g= 240;
ec4n ..       20*x('Re') =g= w('Remas','Nor') + w('Remenos','Nor');
ec4b ..       24*x('Re') =g= w('Remas','Bu') + w('Remenos','Bu');
ec4m ..       16*x('Re') =g= w('Remas','Mal') + w('Remenos','Mal');
ec5n ..       w('Remenos','Nor') =l= 6000
ec5b ..       w('Remenos','Bu') =l= 6000
ec5m ..       w('Remenos','Mal') =l= 6000;
```

5. Se nombra el modelo.

   model granjero_stoc /fo, ec1, ec2n, ec3n, ec4n, ec5n, ec2b, ec3b,
   ec4b, ec5b, ec2m, ec3m,ec4m, ec5m/;

6. Se resuelve el modelo y se interpretan los resultados (puede ejcutarse presionando F9).

   solve granjero_stoc using mip minimizing z;
   display x.l, y.l, w.l;

   Valor de la función objetivo bajo incertidumbre

```
                    S O L V E      S U M M A R Y

          MODEL   granjero_estoc       OBJECTIVE  z
          TYPE    MIP                  DIRECTION  MINIMIZE
          SOLVER  CPLEX                FROM LINE  70

     **** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
     **** MODEL STATUS      1 Optimal
     **** OBJECTIVE VALUE          -108390.0000
```

   Valores de las variables

```
----      71 VARIABLE x.L  Numero de Hectarias  a cultivar con el cultivo i

Ce 170.000,    Ma  80.000,    Re 250.000


----      71 VARIABLE y.L  Numero de toneladas a comprar del cereal j en el escen
                           ario s

           Mal

Ma      48.000


----      71 VARIABLE w.L  Numero de toneladas a vender del cultivo k en el escen
                           ario s

                  Nor          Bu         Mal

Ce            225.000     310.000     140.000
Ma                         48.000
Remenos      5000.000    6000.000    4000.000
```

## B.2. Programación y solución para el problema de la empresa del gas en Gams

1. Se procede a definir los conjuntos, parámetros, tablas y variables que se van a usar en el problema.

```
SETS
    s escenarios de años / nor, frio, muyf /
    o opciones de gestion / cyv, cya, ayv /

PARAMETERS
    CVS(s) coste del gas en el escenario s
          / nor    5
            frio   6
            muyf   7.5 /
    prob(s) probabilidad del escenario s
          / nor    0.333333333
            frio   0.333333333
            muyf   0.333333333 /
    DEMS(s) demanda en cada escenario s
          / nor    100
            frio   150
            muyf   180 /;
CV coste del gas
PRO probabilidad
DEM demanda en un escenario

SCALARS
costal costo de almacenamiento por año / 1 /

VARIABLES
    x(o)      cantidad a gestionar el primer año
    ys(s,o)   cantidad a gestionar el segundo año estocastico
    cost      costo total;
```

2. Se establece la naturaleza de las variables, es decir, si son negativas, positivas, enteras, etc.

   POSITIVE VARIABLES x, ys;

3. Se definen las ecuaciones a utilizar: Función Objetivo y restricciones.

   EQUATIONS

   | | |
   |---|---|
   | costoe | costo total estocastico |
   | balDem1 | balance de la demanda del primer año |
   | balDem2est | balance de la demanda del segundo año estocastico |
   | gestDep | gestion del deposito; |

4. Se asignan expresiones a las ecuaciones del modelo.

```
costoe .. cost =e= CVS('nor')*(x('cyv') + x('cya') + costal*x('cya')
                   + sum(s,(PROB(s)*CVS(s)*ys(s,'cyv')+ys(s,'cya')));
balDem1 ..         x('cyv') =e= DEMS('nor');
balDem2est(s) ..   x('ayv') + ys(s,'cyv') =e= DEMS(s);
gestDep ..         x('cya') =e= x('ayv');
```

5. Se nombra el modelo.

   MODEL PROBAB / costoe, balDem1, balDem2est, gestDep /;

6. Se resuelve el modelo y se interpretan los resultados (puede ejcutarse presionando F9).

   SOLVE PROBAB MINIMIZING COST USING LP;

   Valor de la función objetivo bajo incertidumbre

```
                    S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL    PROBAB                 OBJECTIVE  cost
     TYPE     LP                     DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER   CPLEX                  FROM LINE  45

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE             1400.0000
```

Valores de las variables

---- VAR x cantidad a gestionar el primer año

| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
|---|---|---|---|---|
| cyv | . | 100.000 | +INF | . |
| cya | . | 100.000 | +INF | . |
| ayv | . | 100.000 | +INF | . |

---- VAR ys cantidad a gestionar el segundo año estocástico

| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |
|---|---|---|---|---|
| nor .cyv | . | . | +INF | 0.167 |
| nor .cya | . | . | +INF | 1.000 |
| frio.cyv | . | 50.000 | +INF | . |
| frio.cya | . | . | +INF | 1.000 |
| muyf.cyv | . | 80.000 | +INF | . |
| muyf.cya | . | . | +INF | 1.000 |

# Apéndice C
# Capítulo 3

## C.1. Programación y solución para el problema de generación térmica en Gams

1. Se procede a definir los conjuntos, parámetros, tablas y variables que se van a usar en el problema.

```
SETS
        t grupo termico /gr1*gr6/
        h horas de servicio de energia /h0*h23/
        s define los escenarios /s1*s81/
*sets dinamico para activar los escenarios y horas correspondienes y no
*generar mas variables innecesarias
        sh(s,h) conjunto dinamico de escenarios /h0*h23/
        probs(s,h) probabilidad de s /s1*s81/
*creacion de un alias de escenarios para poder encontrar al nodo padre alias(s,ss)

*parametros del modelo
PARAMETERS

        Pt(t) potencia maxima del grupo termico t
                / gr1     400
                  gr2     500
```

```
          gr3     700
          gr4     400
          gr5     1000
          gr6     800 /

Pm(t) potencia minima del grupo termico t
        / gr1     100
          gr2     150
          gr3     150
          gr4     50
          gr5     450
          gr6     200 /

rs(t) rampa subida del grupo termico t
        / gr1     200
          gr2     300
          gr3     500
          gr4     300
          gr5     600
          gr6     400 /

rb(t) rampa bajada del grupo termico t
        / gr1     300
          gr2     300
          gr3     200
          gr4     100
          gr5     600
          gr6     400 /

at(t) costo lineal del grupo termico t
        / gr1     4
          gr2     4
          gr3     4
          gr4     4
```

| | |
|---|---|
| gr5 | 2 |
| gr6 | 7 / |

bt(t) costo fijo del grupo termico t

| | |
|---|---|
| / gr1 | 50 |
| gr2 | 30 |
| gr3 | 30 |
| gr4 | 25 |
| gr5 | 80 |
| gr6 | 70 / |

cat(t) costo de arranque del grupo termico t

| | |
|---|---|
| / gr1 | 10 |
| gr2 | 20 |
| gr3 | 10 |
| gr4 | 15 |
| gr5 | 20 |
| gr6 | 15 / |

cpt(t) costo de parada del grupo termico t

| | |
|---|---|
| / gr1 | 5 |
| gr2 | 10 |
| gr3 | 5 |
| gr4 | 10 |
| gr5 | 15 |
| gr6 | 10 / |

d(h) demanda en la hora h

| | |
|---|---|
| / h0 | 1500 |
| h1 | 1143 |
| h2 | 857 |
| ⋮ | ⋮ |
| h22 | 2000 |
| h23 | 1886 / |

```
    prob(s) probabilidad del escenario s
          / s1     0.0016
            s2     0.0048
            s3     0.0016
            ⋮      ⋮
            s80    0.0048
            s81    0.0016 /


probsh(s,h)
demh(h)

*Tablas para el modelo
TABLE
escena(s,h) tabla del arbol de escenarios
      h0   h1   h2   h3  ···  h18  h19  h20  h21  h22  h23
s1    1    1    1    1   ···  1    1    1    1    1    1
s2    1    1    1    1   ···  1    1    1    1    2    2
s3    1    1    1    1   ···  1    1    1    1    3    3
s4    1    1    1    1   ···  4    4    4    4    4    4
s5    1    1    1    1   ···  1    4    4    4    5    5
 ⋮                       ⋮                                ⋮
s75   1    1    1    1   ···  73   73   73   73   75   75
s76   1    1    1    1   ···  76   76   76   76   76   76
s77   1    1    1    1   ···  76   76   76   76   77   77
s78   1    1    1    1   ···  76   76   76   76   78   78
s79   1    1    1    1   ···  79   79   79   79   79   79
s80   1    1    1    1   ···  79   79   79   79   80   80
s81   1    1    1    1   ···  79   79   79   79   81   81;
```

```
TABLE
dem(s,h) tabla de la demanda del escenario s en la hora h
        h0        h1        h2   ···   h21       h22       h23
s1   1500.00   1142.86   857.14 ···  2628.57   2300.00   2168.57
s2   1500.00   1142.86   857.14 ···  2628.57   2000.00   1885.71
s3   1500.00   1142.86   857.14 ···  2628.57   1600.00   1508.57
s4   1500.00   1142.86   857.14 ···  2285.71   2300.00   2168.57
s4   1500.00   1142.86   857.14 ···  2285.71   2000.00   1885.71
 ⋮                               ⋮                          ⋮
s75  1500.00   1142.86   857.14 ···  2628.57   1600.00   1508.57
s76  1500.00   1142.86   857.14 ···  2285.71   2300.00   2168.57
s77  1500.00   1142.86   857.14 ···  2285.71   2000.00   1885.71
s78  1500.00   1142.86   857.14 ···  2285.71   1600.00   1508.57
s79  1500.00   1142.86   857.14 ···  1828.57   2300.00   2168.57
s80  1500.00   1142.86   857.14 ···  1828.57   2000.00   1885.71
s81  1500.00   1142.86   857.14 ···  1828.57   1600.00   1508.57;

*para activar solo las variables necesarias
sh(s,h) = no;
sh(s,h)$(escena(s,h) = ord(s)) = yes;
display sh;

probsh(sh(s,h)) = sum(ss$(escena(ss,h) = ord(s)),prob(ss));
display probsh;

SCALAR
reservarod reserva rodante de la demanda / 0.2 /

VARIABLES
Pthe(t,h)      Potencia acoplada del grupo termico t en la hora h
Athe(t,h)      Acoplamiento del grupo termico t en la hora h
ARthe(t,h)     Arranque del grupo t en la hora h
Prthe(t,h)     Parada del grupo t en la hora h

Pth(t,s,h)     Potencia acoplada del grupo termico t en la hora h del escenario s
```

| | |
|---|---|
| Ath(t,s,h) | Acoplamiento del grupo termico t en la hora h del escenario s |
| ARth(t,s,h) | Arranque del grupo t en la hora h del escenario s |
| Prth(t,s,h) | Parada del grupo t en la hora h del escenario s |
| costo | costo total de generacion |
| coste | costo para la demanda media |

2. Se establece la naturaleza de las variables, es decir, si son negativas, positivas, enteras, etc.
   positive variables ARth, Prth, Pth, ARthe, Prthe, Pthe
   binary variables Ath, Athe

3. Se definen las ecuaciones a utilizar: Función Objetivo y restricciones.

   EQUATIONS

| | |
|---|---|
| costoe | define el costo de la demanda media |
| demandae(h) | define la demanda media en la hora h |
| Nrese(h) | define el nivel de reserva |
| Mintece(t,h) | define el minimo tecnico del grupo termico i en la hora h |
| Maxtece(t,h) | define el maximo tecnico del grupo termico i en la hora h |
| AcopAPe(t,h) | define el acoplamiento del arranque y parada del grupo termico i en la hora h |
| Rsube(t,h) | define la rampa de subida del grupo termico i en la hora h |
| Rbaje(t,h) | define la rampa de bajada del grupo termico i en la hora h |
| | |
| cost | define el costo de generacion |
| demanda(s,h) | define la demanda en la hora h del escenario s |
| Nres(s,h) | define el nivel de reserva |
| Mintec(t,s,h) | define el minimo tecnico del grupo termico t en la hora h del escenario s |

| | |
|---|---|
| Maxtec(t,s,h) | define el maximo tecnico del grupo termico t en la hora h del escenario s |
| AcopAP(t,s,h,ss) | define el acoplamiento del arranque y parada del grupo termico t en la hora h del escenario s |
| Rsub(t,s,h,ss) | define la rampa de subida del grupo termico t en la hora h del escenario s |
| Rbaj(t,s,h,ss) | define la rampa de bajada del grupo termico t en la hora h del escenario s |

4. Se asignan expresiones a las ecuaciones del modelo.

```
costoe..coste =e=       sum((t,h), at(t)*Pthe(t,h) + bt(t)*Athe(t,h)
                        + cat(t)*Arthe(t,h) + cpt(t)*PRthe(t,h));
demandae(h)..           sum(t,Pthe(t,h)) =g= demh(h);
Nrese(h)..              sum(t, Pt(t)*Athe(t,h) – Pthe(t,h)) =g= reservarod
                                                          *demh(h);
Mintece(t,h)..          Pm(t)*Athe(t,h) =l= Pthe(t,h);
Maxtece(t,h)..          Pthe(t,h) =l= Pt(t)*Athe(t,h);
AcopAPe(t,h)..          Athe(t,h) – Athe(t,h-1) =e= ARthe(t,h) – PRthe(t,h);
Rsube(t,h)..            Pthe(t,h) – Pthe(t,h-1) =l= rs(t);
Rbaje(t,h)..            Pthe(t,h-1) – Pthe(t,h) =l= rb(t);


cost.. costo =e=        sum(t,sum((s,h)$sh(s,h), probsh(s,h)*(at(t)*Pth(t,s,h)
                        + bt(t)*Ath(t,s,h) + cat(t)*Arth(t,s,h) + cpt(t)
                                                          *PRth(t,s,h))));
demanda(sh(s,h))..      sum(t, Pth(t,s,h)) =e= dem(s,h);

Nres(sh(s,h))..         sum(t, Pt(t)*Ath(t,s,h) – Pth(t,s,h)) =g= reservarod
                                                          *demh(s,h);
Mintec(t,sh(s,h))..     Pm(t)*Ath(t,s,h) =l= Pth(t,s,h);
Maxtec(t,sh(s,h))..     Pth(t,s,h) =l= Pt(t)*Ath(t,s,h);
AcopAP(t,sh(s,h),ss)$(escena(s,h-1)=ord(ss)or ord(h)=1).. Ath(t,s,h)
                        – Ath(t,ss,h-1) =e= ARth(t,s,h) – PRth(t,s,h);
Rsub(t,sh(s,h),ss)$(escena(s,h-1)=ord(ss)or ord(h)=1).. Pth(t,s,h)
```

```
– Pth(t,ss,h-1) =l= rs(t);
Rbaj(t,sh(s,h),ss)$(escena(s,h-1)=ord(ss)or ord(h)=1).. Pth(t,ss,h-1)
– Pth(t,s,h) =l= rb(t);
```

5. Se nombra el modelo.

```
MODEL DETERM / COSTOE, DEMANDAE, NRESE, MINTECE,
               MAXTECE, ACOPAPE, RSUBE, RBAJE /;
MODEL ESTOC / COST, DEMANDA, NRES, MINTEC, MAXTEC,
              ACOPAP, RSUB, RBAJ /;
options optcr = 0, limcol = 8;
```

6. Se resuelve el modelo y se interpretan los resultados (puede ejcutarse presionando F9).

```
demh(h) = SUM(s, prob(s) * dem(s,h));
display demh

Option MIP = OSICplex ;
SOLVE DETERM MINIMIZING COSTE USING MIP ;

SOLVE ESTOC MINIMIZING COSTO USING MIP;
display Ath.l, Pth.l, ARth.l,PRth.l;
```

Valor de la función objetivo bajo incertidumbre

```
                        LOWER     LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR costo           -INF   1.2522E+5    +INF

  costo  costo total de generacion
```

# Bibliografía

## Bibliografía

[1] Arango Serna, Martín Darío. *Desarrollo de Modelos de Programación Matemática Fuzzy Para La Planificación de la Producción en Contexto de Incertidumbre. Un caso Aplicado a la Industria Automotriz (2009)*. Universidad Nacional de Colombia.

[2] Cardona Rodríguez, Antonio. *Programación Estocástica con Función Objetivo Fractil. Una Aplicación a la Planificación de Tesorería (2000)*, Dpto. de Economía Financiera I. Universidad del País Vasco.

[3] E. Cerdá, J. Moreno. *Programación Estocástica (2004)*, Dpto. de Análisis Económico, Universidad Complutense de Madrid, Dpto. de Estadística e Investigación Operativa II (Métodos de Decisión). Universidad Complutense de Madrid.

[4] Cerisola, Santiago; Ramos, Andrés. *Optimización Estocástica (2009)*, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Dpto. de Organización Industrial. Universidad Pontificia de Comillas.

[5] M. Pilar, Cristobal; F. Escudero,Laureano; F. Monge, Juan. *On stochastic dynamic programming for solving large-scale planning problems under uncertainty (2009)*, Dpto. de Matemática Aplicada, ETSI de Montes, Universidad Politécnica de Madrid, Dpto. de Estadística e Investigación-Operativa, Universidad Rey Juan Carlos, Centro de Investigación Operativa. Universidad Miguel Hernández.

[6] Meneses de Quevedo, Pilar. *Optimización Estocástica de la operación a medio plazo de una empresa generadora (2009)*. Universidad Pontificia de Comillas.

[7] Ramos, Andrés; Alonso Ayuso, Antonio; Pérez, Gloria. *Optimización bajo incertidumbre (2008)*, Red Temática de Optimización bajo incertidumbre. Universidad Pontificia de Comillas.

[8] Vitoriano Villanueva, Begoña; Centeno Hernánez, Efraim. *La planificación de sistemas de generación de energía eléctrica (2005)* Escuela Técnica Superior de Ingeniería (ICAI), Instituto de Investigación Tecnológica. Universidad Pontificia de Comillas.

[9] Vitoriano Villanueva, Begoña. *Programación Matemática: Modelos de Optimización (2010)*. Universidad Complutense de Madrid.