

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN TITULADO:  
GEOMETRÍA HIPERBÓLICA Y CONJUNTOS LÍMITES DE  
GRUPOS KLEINIANOS: GRUPOS QUASIFUCHSIANOS Y  
ALGUNAS DEGENERACIONES



**Universidad de El Salvador**  
*Hacia la libertad por la cultura*

ASESOR INTERNO:

Dr. Simón Peña.

ASESOR EXTERNO:

Dr: Raquel Díaz.

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA FUNDAMENTAL

ESTUDIANTE:

Lic. Yoceman Adony Sifontes Rivas

CARNÉ:

SR06002

Ciudad Universitaria, Diciembre de 2015

## Agradecimientos

*De una manera muy especial agradezco a mi asesora, Raquel Díaz por su paciencia, colaboración, orientación y esfuerzo para la realización de este trabajo, así como también a las autoridades de mi universidad por hacer realidad la maestría en matemática fundamental, a Eduardo Navas (docente del área de Computación de la escuela de matemática) por su colaboración y asesoría en la parte de los algoritmos responsables de la mayoría de las imágenes de este trabajo, a mi madre, a mis amigos y todos aquellos que de alguna u otra forma aportaron para la realización de este documento.*

# Índice general

<b>1. Transformaciones de Möbius.</b>	<b>7</b>
1.1. La esfera de Riemann . . . . .	7
1.1.1. Inversiones y la esfera de Riemann . . . . .	7
1.1.2. Proyección estereográfica, métrica cordal. . . . .	9
1.2. Transformaciones de Möbius. . . . .	14
1.3. Clasificación por conjugación. . . . .	20
1.4. Geometría. . . . .	22
1.5. Clasificación por la traza . . . . .	27
<b>2. Geometría Hiperbólica</b>	<b>33</b>
2.1. EL plano hiperbólico . . . . .	33
2.2. Algunas isometrías del plano hiperbólico. . . . .	35
2.2.1. Homotecias y traslaciones horizontales. . . . .	36
2.2.2. La propiedad homogénea del plano hiperbólico. . . . .	36
2.3. Curvas minimales en el plano hiperbólico. . . . .	37
2.4. Todas las isometrías del plano hiperbólico. . . . .	41
2.5. Aplicaciones Lineales y antilineales . . . . .	43
2.5.1. Algunas aplicaciones racionales antilineales. . . . .	44
2.6. La norma hiperbólica. . . . .	45
2.7. El modelo del disco para el plano hiperbólico . . . . .	46
2.8. El espacio hiperbólico tridimensional. . . . .	48
2.8.1. El espacio hiperbólico tridimensional. . . . .	48
2.8.2. Isometrías del Espacio hiperbólico tridimensional . . . . .	50
<b>3. Grupos Kleinianos</b>	<b>53</b>
3.1. Construcción de grupos Kleinianos. . . . .	53
3.1.1. Círculos emparejados. . . . .	53

3.1.2.	Codificación de elementos por medio de árboles. . . . .	56
3.1.3.	Trazando la formación de Schottky. . . . .	56
3.1.4.	Los grupos $\theta$ - Schottky. . . . .	57
3.2.	Grupos Quasifuchsianos. . . . .	62
3.2.1.	Requisitos para emparejar discos tangentes. . . . .	62
3.2.2.	Fórmulas para emparejar grupos de Schottky, con círculos tangentes. . . . .	65
3.2.3.	Grupos conjugados. . . . .	70
3.3.	Fórmulas para trazas. . . . .	73
3.4.	Cuando la traza del conmutador es 2. . . . .	75
3.5.	Una familia especial de círculos tangentes. . . . .	77
3.6.	Degeneraciones. . . . .	82
3.7.	El Gasket. . . . .	104
3.7.1.	Generando el Gasket. . . . .	105
3.8.	Más ejemplos de grupos Quasifuchsianos. . . . .	115
3.9.	Definición formal de grupos Kleinianos. . . . .	118
3.9.1.	Discontinuidad. . . . .	118
3.9.2.	Grupos discretos. . . . .	120
3.9.3.	Conjuntos límites de grupos Kleinianos. . . . .	120
3.10.	Dominios fundamentales y topología de grupos Kleinianos. . . . .	121
3.10.1.	Dominios fundamentales. . . . .	121
3.10.2.	Relación entre grupos Kleinianos y Superficies de Riemann. . . . .	123

# Introducción

El objetivo de este trabajo es dar una introducción a la geometría hiperbólica, tanto del plano como del espacio, estudiando los modelos de Poincaré del plano y el espacio. Aprovecharemos la oportunidad para definir la teoría de grupos Kleinianos y estudiar principalmente los Grupos Quasifuchsianos los cuales son grupos Kleinianos cuyo conjunto límite está contenido en una curva de Jordan invariante. Si el límite del conjunto es igual a la curva de Jordan el grupo Quasifuchsiano se dice que es de tipo uno, y de lo contrario, se dice que es de tipo dos. Algunos autores utilizan "grupo Quasifuchsiano" como "grupo Quasifuchsiano del tipo I", en otras palabras, el límite establecido es toda la curva de Jordan. Esta terminología es incompatible con el uso de los términos "tipo I" y "tipo II" para grupos Kleinianos: todos los grupos Quasifuchsianos son grupos Kleinianos del tipo II (incluso si son grupos Quasifuchsianos de tipo I), ya que sus conjuntos límite son subconjuntos propios de la esfera de Riemann. El caso especial cuando la curva de Jordan es un círculo o línea se llama un grupo Fuchsiano, en honor a Lázaro Fuchs.

Un grupo Kleiniano es un grupo discreto de transformaciones de Möbius. Actúa tanto como grupo de isometrías del espacio hiperbólico tridimensional como por automorfismos conformes en la esfera de Riemann, que se puede identificar en el borde del espacio hiperbólico. La propiedad de ser discreto implica que el grupo tiene un buen comportamiento en el espacio hiperbólico, en el sentido que las órbitas de los puntos no tienen puntos de acumulación en el espacio hiperbólico, aunque sí pueden tenerlo en el infinito, es decir, en la esfera de Riemann. El conjunto de puntos de acumulación de cualquier órbita es lo que se llama el conjunto límite del grupo Kleiniano. Este conjunto es vacío sólo si el grupo Kleiniano es finito. En otro caso es un cerrado de la esfera invariante por el grupo. Este cerrado puede ser incluso toda la esfera. Su complementario se llama dominio regular o de discontinuidad. El cociente del espacio hiperbólico por el grupo Kleiniano es una variedad de dimensión 3 con una estructura hiperbólica; además puede tener cierta singularidad (es lo que se llama un orbifold). El cociente del dominio de discontinuidad por el grupo Kleiniano es un orbifold de dimensión 2 con una estructura conforme. Una propiedad muy llamativa de los conjuntos límite es su naturaleza fractal. Esto se advierte en seguida en cuanto uno ve algunos dibujos de conjuntos límite. Por otra parte, estos dibujos ilustran propiedades de los grupos Kleinianos y de sus espacios cocientes. Como objetivo del trabajo presente: dibujar conjuntos límites de ciertos grupos Kleinianos. A partir de estos dibujos, extraer algunas propiedades de dichos grupos Kleinianos y de sus espacios cocientes.

En el capítulo I, estudiamos el ingrediente para la construcción fractal, esto es, las transformaciones de Möbius, donde damos a conocer sus propiedades, clasificación, así como también su geometría. En el capítulo II, introducimos la geometría hiperbólica, estudiando los modelos del semiplano superior y el modelo del disco de Poincaré, para el caso del plano hiperbólico, definiendo además la métrica para ambos modelos y obteniendo así diversas propiedades y consecuencias referentes a las isometrías del plano hiperbólico, así como también de las curvas que minimizan la distancia, esto es las geodésicas. Luego introducimos brevemente la extensión del plano hiperbólico al espacio tridimensional.

Finalmente en el capítulo III, estudiaremos primeramente procesos de construcción de grupos Kleinianos mediante el proceso de círculos emparejados por transformaciones de Möbius, en donde obtenemos ejemplos de grupos kleinianos, estos son: Grupos de Schottky, Grupos Fuchsianos y Grupos Quasifuchsianos, donde haremos más énfasis en la familia, de los Quasifuchsianos, luego procedemos con la definición formal, introduciendo además los conceptos de conjunto límite, conjunto ordinario y región fundamental para un grupo Kleiniano, luego estudiamos un poco sobre la

topología de los cocientes del conjunto ordinario con el grupo, donde obtenemos una interesante relación con las superficies de Riemann.

# Capítulo 1

## Transformaciones de Möbius.

En esta parte definiremos la base principal, un ingrediente clave para la construcción fractal. Una de las ideas fundamentales de Klein era que cualquier grupo de transformaciones puede ser usado para crear simetría. Clásicamente, pensamos en la simetría en términos de los movimientos euclidianos de traslación, rotación y reflexión, pero la simetría también se puede crear de las transformaciones que distorsionan, estiran y giran. En esta parte, se deberá aprender sobre una hermosa clase de transformaciones, llamadas Transformaciones de Möbius, que se extienden y giran de una manera correcta y controlada. Estas son las transformaciones que generaran todas nuestras imágenes fractales, y en las que, como en la visión de Klein, todos nuestros cuadros son simétricos, pero antes definiremos el espacio ambiente, donde nuestras transformaciones van actuar.

### 1.1. La esfera de Riemann

**Definición 1.1.1.** *Los puntos del plano complejo junto con  $\infty$  forman el plano complejo extendido, denotado por  $\hat{\mathbb{C}}$ .*

#### 1.1.1. Inversiones y la esfera de Riemann

En esta parte vamos a comprender la transformación  $T$  que toma un número complejo  $z$  y lo lleva a su inverso  $\frac{1}{z}$ . Si  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , entonces el inverso en coordenadas polares es:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)).$$

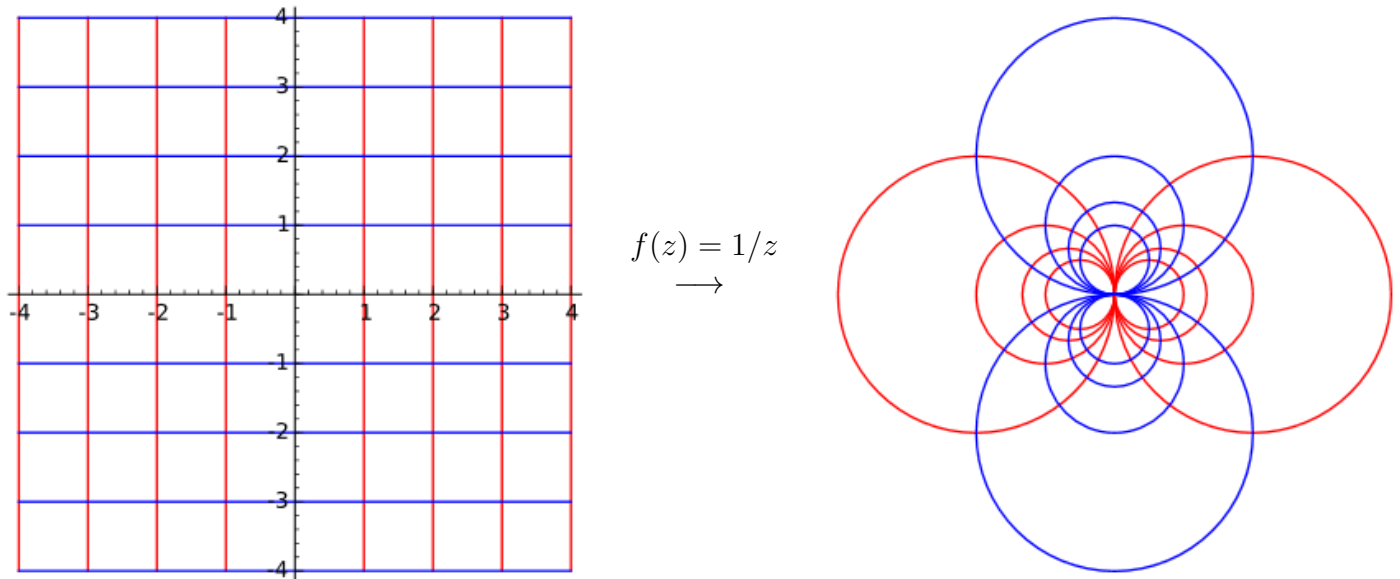
Que viene de sustituir  $z$  por  $\frac{1}{z}$  haciendo dos operaciones: cambiamos  $r$  por  $\frac{1}{r}$  y  $\theta$  por  $-\theta$ . Vemos que la segunda operación, sustituir  $\theta$  por  $-\theta$  es una conjugación o reflexión compleja en el eje real. El efecto geométrico de la transformación  $\frac{1}{z}$  en las rectas de la forma  $x = c$ ,  $c \neq 0$  nos da la circunferencia

$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2.$$

Mientras que las rectas de la forma  $y = c$ ,  $c \neq 0$  nos da la circunferencia

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

la siguiente figura muestra el efecto de la transformación  $\frac{1}{z}$ .



**Figura 1.1:** Efecto de la inversión  $\frac{1}{z}$ .



**Definición 1.1.2.** *Aritmética del infinito:*

Sea  $a$  un número finito, entonces definimos:

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty \\ a - \infty &= \infty \\ a \cdot \infty &= \infty; \quad \text{siempre que } a \neq 0 \\ \frac{\infty}{a} &= \infty \\ \frac{a}{\infty} &= 0 \\ \frac{a}{0} &= \infty; \quad \text{si } a \neq 0 \end{aligned}$$

los resultados de los cálculos  $\infty \pm \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\frac{0}{\infty}$  y  $\frac{\infty}{\infty}$  son indefinidas.

Necesitamos de una transformación o mapeo que actúe entre la esfera y el plano. Este es exactamente el problema de la construcción de un atlas. Un método preferido por los matemáticos es usando números complejos y es llamada la **proyección estereográfica**, usada por Ptolemy. Mediante la proyección estereográfica, las distancias relativas y áreas se ven distorsionadas, pero los círculos se transforman en círculos y los ángulos se mantienen.

**1.1.2. Proyección estereográfica, métrica cordal.**

Para asociar cada punto en el plano con uno de  $\mathbb{S}^2$ , usamos la siguiente idea geométrica: se toma el plano  $x_3 = 0$  como el plano complejo  $\mathbb{C}$  y la línea que proyecta el polo norte  $e_3 = (0, 0, 1)$  de la esfera de Riemann a cualquier otro punto  $x = (x_1, x_2, x_3)$  en dicha esfera.

Esta línea cruza el plano complejo en un único punto, para encontrarlo se parametriza

$$e_3 + t(x - e_3), \quad t \in \mathbb{R}$$

y se debe cumplir

$$[e_3 + t(x - e_3)] \cdot e_3 = 0,$$

$$1 + t(x - e_3) \cdot e_3 = 0,$$

$$t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

De donde, el punto asociado a  $x$  es

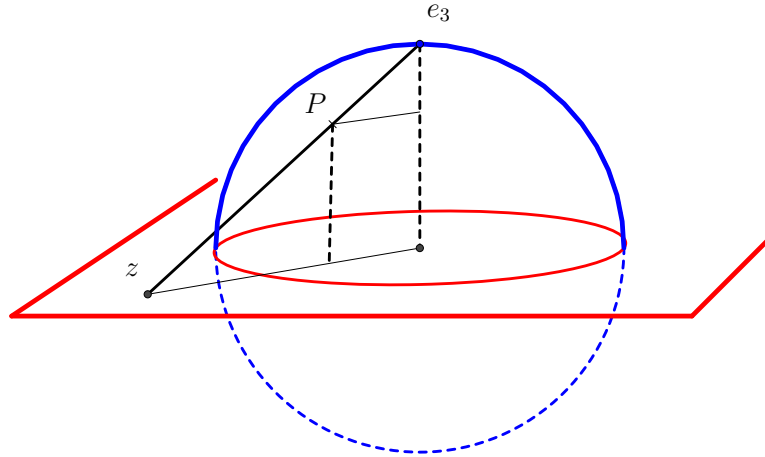
$$\begin{aligned} e_3 + \frac{1}{1 - x_3}(x - e_3) &= e_3 + \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, \frac{x_3 - 1}{1 - x_3} \right) \\ &= \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right). \end{aligned}$$

Una demostración geométrica de este hecho se obtiene observando que la proyección de  $x$  debe tener la dirección de  $(x_1, x_2)$ , y por semejanza se obtiene que

$$\frac{|z|}{1} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{1 - x_3}$$

Tal como se indica en la figura 1.2, con base a este análisis, se define la función

$$\Psi : \mathbb{S}^2 - \{e_3\} \mapsto \mathbb{C}.$$



**Figura 1.2:** Proyección estereográfica.

La cuál es una biyección de  $\mathbb{S} - \{e_3\}$  al plano complejo  $\mathbb{C}$ .

- a)  $\Psi$  es inyectiva. Para demostrarlo, construimos la inversa. Obsérvese que si  $z = \Psi(x_1, x_2, x_3)$ , como  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ , se tiene que

$$|z|^2 = \left| \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

y despejando

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \quad (1.1)$$

También

$$z + \bar{z} = \frac{2x_1}{1 - x_3},$$

y

$$x_1 = \frac{(z + \bar{z})(1 - x_3)}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} \left( 1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{z + \bar{z}}{2} \left( \frac{2}{|z|^2 + 1} \right),$$

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}. \quad (1.2)$$

finalmente, como

$$z - \bar{z} = \frac{2ix_2}{1 - x_3},$$

se sigue que

$$x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}. \quad (1.3)$$

Por consiguiente,  $\Psi$  es inyectiva, ya que  $z$  determina  $(x_1, x_2, x_3)$ . Obsérvese también que la función

$$\pi(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

es inversa por la izquierda de  $\Psi$ .

b)  $\Psi$  es sobreyectiva. Para esto, debemos encontrar algún  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S} - \{e_3\}$  tal que para todo  $z = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}$  se debe cumplir  $\Psi(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$ , esto significa que

$$\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} = y_1 + iy_2,$$

esto significa

$$\frac{x_1}{1 - x_3} = y_1 \quad \text{y} \quad \frac{x_2}{1 - x_3} = y_2$$

Si  $y_1 = y_2 = 0$  entonces basta tomar  $x = (0, 0, -1)$ .

Si  $y_1 = 0$  entonces  $x_1 = 0$ , basta tomar  $x = \left( 0, \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \right)$ .

Si  $y_2 = 0$  entonces  $x_2 = 0$ , basta tomar  $x = \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}, 0, \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \right)$ .

Si  $y_1$  y  $y_2$  son distintos de cero, entonces basta tomar  $x = \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, 0 \right)$ .

Haciendo corresponder  $\infty$  con el polo norte  $e_3$  se obtiene una biyección de  $\mathbb{S}^2$  en  $\hat{\mathbb{C}}$  y el modelo buscado. A esta biyección se le llama *La proyección estereográfica*. Geométricamente es evidente que el hemisferio sur ( $x_3 < 0$ ) corresponde al disco unitario

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$$

y el hemisferio norte ( $x_3 > 0$ ) al exterior de este disco. En esta presentación esférica del plano complejo no hay una interpretación fácil de la suma y el producto, su ventaja radica en que  $\infty$  no es un punto distinguido. Convendremos que toda recta pasa por  $\infty$ . Una propiedad fundamental de la proyección estereográfica la exhibe el siguiente resultado.

**Proposición 1.1.1.** *Bajo la proyección estereográfica, rectas en  $\hat{\mathbb{C}}$  y círculos en  $\mathbb{C}$  se transforman en círculos en  $\mathbb{S}^2$  y viceversa.*

*Demostración.* a) Un círculo en  $\mathbb{S}^2$  es la intersección de un plano con la esfera, por lo que sus puntos satisfacen una ecuación de la forma

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d.$$

Por lo tanto, este círculo es la imagen bajo la proyección estereográfica de un conjunto cuyos puntos satisfacen la siguiente ecuación en el plano.

$$a \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \right) + b \left( \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)} \right) + c \left( \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = d.$$

Escribiendo  $z = x + iy$ , se obtiene

$$2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) = d(x^2 + y^2 + 1),$$

que es la ecuación de una recta o un círculo en el plano, dependiendo si  $d = c$  o si  $d \neq c$  (al completar cuadrados no se puede obtener un radio negativo, puesto que se trata de la imagen de un conjunto no vacío).

b) Por otro lado, una recta en el plano está definida por la ecuación

$$ax + by = c.$$

Estos puntos bajo la proyección estereográfica son llevados al conjunto de puntos en la esfera definidos por la ecuación

$$a \left( \frac{x_1}{1 - x_3} \right) + b \left( \frac{x_2}{1 - x_3} \right) = c$$

$$ax_1 + bx_2 = c(1 - x_3),$$

Los cuales están contenidos en la intersección de un plano y la esfera, es decir, se trata de un círculo. Como  $\pi(\infty) = (0, 0, 1)$  satisface dicha ecuación, este círculo pasa por el polo norte, lo cual también es evidente a partir de la construcción geométrica. Finalmente, un círculo en el plano está definido por las siguientes ecuaciones

$$|z - a|^2 = r^2,$$

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$$

$$|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2 = r^2,$$

luego usando, 1.1

$$\frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2\Re(a\bar{z}) = r^2 - |a|^2.$$

Si  $a = a_1 + ia_2$ ,  $z = x + iy$ , entonces  $\Re(a\bar{z}) = a_1x + a_2y$  y la imagen del círculo en la esfera está definida por las siguientes ecuaciones

$$\frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2(a_1x + a_2y) = r^2 - |a|^2,$$

$$\frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2a_1 \frac{x_1}{1 - x_3} - 2a_2 \frac{x_2}{1 - x_3} = r^2 - |a|^2,$$

$$1 + x_3 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 = (r^2 - |a|^2)(1 - x_3).$$

Se sigue entonces que estos puntos están en un plano y por lo tanto constituyen un círculo en la esfera. ■

Es útil obtener, en términos de  $z$  y  $z'$ , puntos del plano complejo, una fórmula de la distancia entre sus proyecciones en la esfera. Si denotamos éstas por  $(x_1, x_2, x_3)$  y  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  se tiene

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 = 2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3).$$

Así usando 1.1, 1.2, 1.3

$$\begin{aligned} & x_1x'_2 + x_2x'_2 + x_3x'_3 \\ &= \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \right) \left( \frac{z' + \bar{z}'}{|z'|^2 + 1} \right) - \left( \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1} \right) \left( \frac{z' - \bar{z}'}{|z'|^2 + 1} \right) + \left( \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \left( \frac{|z'|^2 - 1}{|z'|^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2z\bar{z}' + 2\bar{z}z' + |zz'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} \\ &= \frac{-2(z - z')(\bar{z} - \bar{z}') + (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 &= 2 - 2 \left( 1 - \frac{2|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} \right) \\ &= \frac{4|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}. \end{aligned}$$

Esta nueva fórmula de distancia en  $\hat{\mathbb{C}}$  es particularmente novedosa y útil por incluir el punto al infinito. En este caso, si  $z' = \infty$ , se tiene

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1},$$

por lo que

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 = 2 - 2 \left( \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{4}{1 + |z|^2}.$$

Estos cálculos inducen la métrica buscada en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Definición 1.1.3.** *Se define la métrica cordal en el plano complejo extendido de la siguiente manera*

$$d_C(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}} & \text{si } z_1, z_2 \neq \infty. \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}, & \text{si } z_2 = \infty. \end{cases}$$

Como  $\mathbb{S}^2$  es un subespacio métrico de  $\mathbb{R}^3$ , esta distancia define en efecto una métrica en  $\hat{\mathbb{C}}$ . El término cordal proviene de que se miden cuerdas en la esfera

$$d_C(z_1, z_2) = |\pi(z_1) - \pi(z_2)|.$$

**Proposición 1.1.2.** *Las métricas cordal y euclidea inducen la misma topología en  $\mathbb{C}$ , es decir, definen los mismos abiertos en  $\mathbb{C}$ . Además*

$$d_c(z_n, \infty) \mapsto 0$$

si y sólo si  $|z_n| \mapsto \infty$ .

*Demostración.* Para la primera parte hay que probar que la función identidad

$$I_d : \mathbb{C}_E \mapsto \mathbb{C}_C$$

es bicontinua, donde  $\mathbb{C}_E$  es el plano complejo provisto con la métrica euclidea y  $\mathbb{C}_C$ , con la métrica cordal.

Si  $|z_n - z| \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $|\pi(z_n) - \pi(z)| \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , ya que la función  $\pi$  es continua, lo cual prueba que la función  $I_d$  es también continua. Ahora, por la continuidad de  $\varphi$ , si  $d_C(z_n, z) \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $|\pi(z_n) - \pi(z)| \rightarrow 0$  y  $|\psi\pi(z_n) - \psi\pi(z)| = |z_n - z| \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Para la segunda parte, sea  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una sucesión en  $\mathbb{C}$ , tal que  $|z_n| \rightarrow \infty$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , como

$$d_C(z_n, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z_n|^2}}$$

se sigue que  $d_C(z_n, \infty) \rightarrow 0$ .

Por otra parte, si  $d_C(z_n, \infty) \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N_\epsilon$  tal que si  $n > N_\epsilon$ , se tiene

$$\frac{2}{\sqrt{1 + |z_n|^2}} < \epsilon \quad \text{y por lo tanto} \quad |z_n| > \sqrt{\frac{4}{\epsilon^2} - 1}$$

(ya que se puede tomar  $\epsilon < 2$ ). Por lo que, dado  $M > 0$ , tomando  $\epsilon$  tal que

$$M = \sqrt{\frac{4}{\epsilon^2} - 1},$$

se obtiene  $|z_n| > M$ , si  $n > N_\epsilon$  y  $|z_n| \rightarrow \infty$ . ■

## 1.2. Transformaciones de Möbius.

Recordamos que a las transformaciones de variable compleja de la forma

$$\bar{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$ , se les llama transformaciones de Möbius. Estas funciones están bien definidas en los puntos del plano complejo extendido, donde no se aplica el álgebra:

a) Si  $c = 0$ , se define  $\bar{T}(\infty) = \infty$ .

b) Si  $c \neq 0$ , se define  $\bar{T}(\infty) = \frac{a}{c}$  y  $\bar{T}\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ . Para otros valores  $ad - bc = k \neq 0$ , la transformación

$$z \mapsto \frac{\frac{a}{\sqrt{k}}z + \frac{b}{\sqrt{k}}}{\frac{c}{\sqrt{k}}z + \frac{d}{\sqrt{k}}}$$

tiene la misma regla de correspondencia que la transformación original, sin embargo,

$$\frac{a}{\sqrt{k}} \frac{d}{\sqrt{k}} - \frac{b}{\sqrt{k}} \frac{c}{\sqrt{k}} = 1.$$

De este hecho se sigue que todas las transformaciones de Möbius pueden definirse por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1.$$

A este grupo de matrices se le denota por  $SL(2, \mathbb{C})$ . El centro de este grupo consiste de las matrices  $\pm I_d$ .

**Proposición 1.2.1.** *Las transformaciones de Möbius complejas son funciones continuas en  $\hat{\mathbb{C}}$  con la métrica cordal.*

*Demostración.* Se sigue de la proposición 1.1.2 que basta probar la continuidad en  $\infty$  y en  $-\frac{d}{c}$ , si  $c \neq 0$ , y en  $\infty$  si  $c = 0$ .

Ahora, si  $c \neq 0$  y  $z_n \rightarrow \frac{-d}{c}$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tiene que como

$$\frac{az_n + b}{c} \rightarrow \frac{(-d/c)a + b}{c} \quad \text{y} \quad \frac{1}{z_n - (-d/c)} \mapsto \infty$$

entonces

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} = \frac{az_n + b}{c(z_n - (-d/c))} \mapsto \infty$$

y por lo tanto

$$d_{\mathbb{C}}\left(\frac{az_n + b}{cz_n + d}, \infty\right) \mapsto 0 \quad \text{cuando} \quad n \mapsto \infty.$$

■

Por otra parte, el producto de matrices se corresponde con la composición de transformaciones de Möbius, es decir, si

$$\bar{T}(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

entonces la transformación  $\bar{S}\bar{T}$  es de Möbius y está definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}.$$

Esto se sigue ya que  $\forall z \in \mathbb{C}$ , salvo por un número finito (donde el álgebra no se aplica), se tiene

$$\overline{S}(\overline{T}(z)) = \frac{\alpha \left( \frac{az+b}{cz+d} \right) + \beta}{\gamma \left( \frac{az+b}{cz+d} \right) + \delta} = \frac{\alpha(az+b) + \beta(cz+d)}{\gamma(az+b) + \delta(cz+d)} = \frac{(\alpha a + \beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)z + \gamma b + \delta d}.$$

Por lo cual, las transformaciones  $\overline{S}\overline{T}$  y la definida por la matriz  $ST$  coinciden en  $\hat{\mathbb{C}}$ , excepto, quizá por un número finito de puntos, sin embargo, al ser ambas funciones continuas, son iguales. En particular, las transformaciones de Möbius son biyecciones, ya que si  $\overline{T}$  está definida por la matriz

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}),$$

la transformación inversa  $\overline{T}^{-1}$  está definida por

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

por consiguiente, estas transformaciones forman un grupo, la identidad es la función

$$z \rightarrow \frac{1z + 0}{0z + 1}.$$

Con frecuencia es importante distinguir las transformaciones de las matrices que las definen, por lo que denotaremos las primeras con una barra arriba y las segundas sin barra.

**Proposición 1.2.2.** *Dos transformaciones de Möbius*

$$\overline{T}(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \overline{S}(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

son iguales si y sólo si existe  $k \in \mathbb{C}$ , tal que

$$a = ka', b = kb', c = kc', d = kd'.$$

*Demostración.* La condición de suficiencia es inmediata. Para demostrar la necesidad obsérvese primero que como  $\overline{T}$  y  $\overline{S}$  coinciden en 0 y en  $\infty$ , se tiene que  $a = 0$ , entonces  $a' = 0$ , y si  $b = 0$ , entonces  $b' = 0$ . Probamos primero el caso  $a, b, c, d \neq 0$ , se tiene que

$$\overline{T}^{-1}(\infty) = -d/c = -d'c', \quad \text{y} \quad \overline{T}^{-1}(0) = -b/a = -b'/a'.$$

Escribiendo

$$d/d' = c/c' = \lambda, \quad b/b' = a/a' = \mu,$$

se sigue que

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\mu a'z + \mu b'}{\lambda c'z + \lambda d'} = \frac{\mu(a'z+b')}{\lambda(c'z+d')}.$$

En particular, al evaluar  $\overline{S}$  y  $\overline{T}$  en la preimagen de 1, se tiene  $\frac{\mu}{\lambda} = 1$ , por lo cual  $\mu = \lambda$ . Los casos en los que algún coeficiente es cero, son más sencillos, mostramos dos de ellos.



- a) Si  $b, c = 0$ , evaluando en 1 se tiene  $a/d = a'/d'$  y  $a/a' = d/d'$ .
- b) Si  $c = 0$  y  $b \neq 0$ , como el primer caso,  $b/b' = a/a' = \mu$  y para alguna  $\lambda$ ,  $d = \lambda d'$ , etcétera.

■

De la proposición anterior se sigue que hay exactamente dos matrices unimodulares que determinan una transformación de Möbius dada. Esto es, ya que si  $\bar{T}$  es de Möbius y está definida por las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}),$$

entonces

$$1 = a'd' - b'c' = k^2(ad - bc) = k^2$$

y

$$k = \pm 1, \quad i.e. \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Al cociente de  $SL(2, \mathbb{C})$  sobre su centro  $\pm I_d$  se le llama su proyectivización, este grupo cociente, denotado por  $PSL(2, \mathbb{C})$ , es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius complejas.

### Ejemplo 1. Transformaciones de Möbius:

- a) La traslaciones

$$\bar{T}(z) = z + b, \quad b \in \mathbb{C}.$$

- b) Las rotaciones

$$\bar{T} = az, \quad a = e^{i\theta}.$$

- c) Las homotecias

$$\bar{T}(z) = kz, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

- d) La transformación

$$\bar{T}(z) = \frac{1}{z},$$

Se describen ahora las propiedades de conformalidad de estas transformaciones así como sus singularidades (polos). Obsérvese que una transformación de Möbius

$$\bar{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

tiene un polo simple en  $-d/c$ , si  $c \neq 0$ , y es entera si  $c = 0$ .

En general, dada una función holomorfa  $f$  definida en una vecindad de  $\infty$ , se dice que  $f$  es holomorfa en  $\infty$  (o que  $f$  tiene un polo de orden  $k$  en  $\infty$ ), si la función  $g$  definida en una vecindad de cero por

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

es holomorfa en cero (o tiene un polo de orden  $k$  en cero). Obsérvese que si  $\infty$  no es una singularidad esencial, entonces necesariamente se tiene una de las dos posibilidades antes mencionadas. La

elección  $\frac{1}{z}$  en esta definición no es arbitraria. Por una parte, es una elección natural de cartas coordenadas para proveer de estructura de superficie de Riemann a la esfera  $\mathbb{S}^2$ , por otra parte, la acción  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  en  $\mathbb{S}^2$  está dada por la rotación

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, -x_2, -x_3).$$

Con esta convención se tiene que si

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

es de Möbius y  $c \neq 0$ , entonces  $f$  es holomorfa en  $\infty$  y tiene un polo simple en  $-d/c$ . Para el caso  $c = 0$ ,  $f$  tiene un polo simple en  $\infty$ . Mostramos la primera afirmación. Cerca de  $\infty$

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + b/z}{c + d/z} \rightarrow \frac{a}{c}$$

cuando  $z \rightarrow \infty$ , y cerca de 0.

$$g(z) = \frac{a/z + b}{c/z + d} = \frac{a + bz}{c + dz} \rightarrow \frac{a}{c},$$

cuando  $z \rightarrow 0$ , por lo que 0 es una singularidad removible de  $g$ . Volviendo al contexto general de una función  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  meromorfa, se sigue del teorema de Liouville que si  $f$  es entera en  $\hat{\mathbb{C}}$ , entonces  $f$  es constante. Por otra parte, si  $f$  es entera en  $\mathbb{C}$  y  $f$  tiene un polo en  $\infty$ , entonces  $f$  es necesariamente un polinomio. Esto es consecuencia del teorema de las desigualdades de Cauchy y el principio de continuación analítica. Este hecho tiene una interesante y fundamental consecuencia: toda función meromorfa en la esfera es necesariamente racional. Esto se sigue, ya que si  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es meromorfa, entonces por compacidad  $f$  tiene solamente un número finito de polos, y es claro que al multiplicar a  $f$  por un polinomio adecuado, se obtiene una función constante u otro polinomio. En particular, *las únicas biyecciones meromorfas de la esfera son las de Möbius*.

**Lema 1.2.1.** *Cualquier transformación en  $PSL(2, \mathbb{C})$  se puede expresar como la composición de traslaciones, rotaciones, homotecias y la transformación  $z \rightarrow \frac{1}{z}$*

*Demostración.* Una transformación en  $PSL(2, \mathbb{C})$  que fija  $\infty$  es de la forma

$$z \rightarrow \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

es decir, es una composición de homotecias, rotaciones y traslaciones. Si la función de Möbius no fija  $\infty$ , entonces se puede expresar como

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d},$$

y es por lo tanto, la composición de algunas de las transformaciones descritas anteriormente. ■

**Teorema 1.2.1.** *Las funciones de Möbius en  $PSL(2, \mathbb{C})$  transforman círculos en círculos.*

*Demostración.* Basta probar que la transformación  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  tiene la propiedad mencionada, ya que evidentemente las traslaciones, las rotaciones y las homotecias transforman círculos en círculos y rectas en rectas. Para estas últimas, una prueba analítica de este hecho es muy simple, por ejemplo, si  $k \in \mathbb{C}$ , la función  $z \rightarrow kz$  transforma la recta

$$z = a + bt, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}$$

en la recta

$$w = kz = ka + kbt, \quad t \in \mathbb{R},$$

y el círculo  $|z - a| = r$ , en el círculo

$$|kz - ka| = kr.$$

El caso de la traslación es también trivial. Para demostrar que la transformación  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  tiene la propiedad, usamos la ecuación general del círculo.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy = D. \quad (1.4)$$

Escribiendo  $z = x + iy$  y  $\frac{1}{z} = u + iv$ , como

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

sustituyendo en la ecuación general del círculo obtenemos:

$$A \left( \frac{1}{u^2 + v^2} \right) + B \left( \frac{u}{u^2 + v^2} \right) + C \left( \frac{-v}{u^2 + v^2} \right) = D$$

y

$$-D(u^2 + v^2) + Bu - Cv = -A,$$

que es de nuevo la ecuación de un "círculo". Esto se sigue, ya que si  $D \neq 0$ , se puede completar cuadrados y obtener la ecuación de círculo (no hay radios negativos, y a que se trata de la imagen de un "círculo"). Este argumento algebraico no se aplica en 0 y en  $\infty$ , si el "círculo" pasa por ellos. Sin embargo, probar el resultado para estos puntos es muy sencillo, por ejemplo, si se trata de un círculo por el origen, entonces  $D = 0$  y los puntos de la imagen satisfacen la ecuación de la recta  $Bu - Cv = -A$ . Como  $\infty$  es la imagen del 0 y está en dicha recta, se sigue el argumento. ■

**Teorema 1.2.2.** *Dados  $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  distintos y  $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  también distintos, existe una única transformación en  $PSL(2, \mathbb{C})$  que envía  $z_j$  en  $w_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Primero probamos que si  $\bar{T}$  es de Möbius y  $\bar{T}$  fija 0, 1 e  $\infty$ , entonces  $\bar{T}$  es la identidad. Sea

$$\bar{T} = \frac{az + b}{cz + d}$$

con dicha propiedad, como  $\bar{T}(0) = b/d$  y  $\bar{T}(\infty) = a/c$ , se tiene  $b, c = 0$ , por lo que  $\bar{T}(1) = a/d = 1$  y  $a = d$ . En consecuencia,  $\bar{T}(z) = z \quad \forall z$ . Ahora, si  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , la transformación

$$\bar{S}_1(z) = \left( \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right) \left( \frac{z - z_2}{z - z_3} \right).$$

Es de Möbius y envía  $z_1, z_2, z_3$  en  $1, 0, e \infty$ , respectivamente. Para adaptar esta fórmula al caso en que alguno de los puntos sea  $\infty$ , simplemente se omiten los dos factores donde aparece este punto, por ejemplo, si  $z_2 = \infty$ , la transformación

$$\bar{S}_2(z) = \frac{z_1 - z_3}{z - z_3}$$

tiene la propiedad deseada. El mismo argumento muestra la existencia de una transformación de Möbius  $\bar{S}_2$  que manda  $w_1, w_2, w_3$  en  $1, 0, e \infty$  y por lo tanto la transformación

$$\bar{S}_2^{-1}\bar{S}_1 \in PSL(2, \mathbb{C})$$

manda  $z_j$  en  $w_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

La unicidad se sigue ya que si  $\bar{T}_1$  y  $\bar{T}_2$  envían  $z_j$  en  $w_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , se tiene

$$\bar{S}_2\bar{T}_1\bar{S}_1^{-1} = \bar{S}_2\bar{T}_2\bar{S}_1^{-1}$$

(Puesto que ambas funciones son la identidad), por lo que  $\bar{T}_1 = \bar{T}_2$ . ■

Este teorema y los resultados anteriores implican que las transformaciones de Möbius actúan transitivamente en la familia de todos los círculos de la esfera de Riemann. Esta útil y fundamental propiedad se generaliza también a cualquier dimensión.

**Corolario 1.2.1.** *Dados dos "círculos"  $A$  y  $B$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ , existe  $\bar{T} \in PSL(2, \mathbb{C})$ , tal que  $\bar{T}(A) = B$ , es decir, este grupo actúa transitivamente en los círculos de  $\hat{\mathbb{C}}$*

### 1.3. Clasificación por conjugación.

Una primera clasificación de las transformaciones de Möbius se obtiene al considerar los puntos fijos en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Obsérvese primero que si  $\bar{T}$  es de Möbius y no es la identidad, entonces  $\bar{T}$  fija a lo más dos puntos. Esto se sigue ya que si  $\bar{T} \neq \infty$ , entonces

$$\bar{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z \quad \Leftrightarrow \quad az + b = cz^2 + dz$$

de donde

$$\begin{aligned} cz^2 + (d - a)z - b &= 0 \\ z &= \frac{(a - d) \pm \sqrt{(d - a)^2 - 4bc}}{2c} \end{aligned}$$

Consideramos el discriminante el cual lo reducimos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (d - a)^2 - 4bc &= d^2 - 2da + a^2 - 4b(c) \\ &= a^2 - 2ad + d^2 + 4ad - 4; \quad \text{ya que} \quad ad - bc = 1 \\ &= (a + d)^2 - 4 \\ &= \text{Tr}(T(z)) - 4. \end{aligned}$$

Así tenemos que  $\bar{T}$  tendrá un único punto fijo si la traza de la matriz asociada es  $\pm 2$ , y tendrá dos puntos fijos, si el discriminante es distinto de cero, más adelante distinguiremos cada uno de los casos.

Por otro lado, si  $\infty$  es un punto fijo, la ecuación

$$\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$$

tiene a lo más una solución.

**Definición 1.3.1.** Sea  $\bar{T}$  de Möbius, tal que fija exactamente un punto en  $\hat{\mathbb{C}}$ , entonces a  $\bar{T}$  se llama parabólica.

**Lema 1.3.1.** Sean  $\bar{T}$  y  $\bar{\varphi}$  transformaciones de Möbius, entonces  $\bar{T}$  fija a un punto  $w$  en  $\hat{\mathbb{C}}$  (o preserva un subconjunto  $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ ). si y sólo si  $\bar{S} = \bar{\varphi}\bar{T}\bar{\varphi}^{-1}$  fija  $\bar{\varphi}(w)$  (o preserva  $\bar{\varphi}$ ).

*Demostración.*

$$\bar{T}(w) = w \iff \bar{\varphi}\bar{T}(w) = \bar{\varphi}(w) \iff \bar{\varphi}\bar{T}\bar{\varphi}^{-1}(\bar{\varphi}(w)) = \bar{\varphi}(w)$$

■

**Proposición 1.3.1.** Sea  $\bar{T}$  una transformación de Möbius. Entonces:

- Si  $\bar{T}$  es parabólica,  $\bar{T}$  es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a una traslación.
- Si  $\bar{T}$  no es parabólica,  $\bar{T}$  es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a una transformación de la forma  $z \rightarrow \alpha z$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

*Demostración.* Sea  $\bar{T}$  parabólica con punto fijo  $z_0$  y  $\bar{\varphi} \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $\bar{\varphi}(z_0) = \infty$ , por ejemplo,

$$\bar{\varphi}(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

entonces  $\bar{S} = \bar{\varphi}\bar{T}\bar{\varphi}^{-1}$  fija  $\infty$ , y por lo tanto es de la forma

$$\bar{S} = \alpha z + \beta$$

se sigue del lema anterior que  $\bar{S}$  no tiene otro punto fijo, por lo cual  $\alpha = 1$  (si  $\alpha \neq 1$ , la ecuación  $\alpha z + \beta = z$  tendría una solución finita). Para probar la segunda parte, supongamos que  $\bar{T}$  fija 2 puntos distintos  $w_1, w_2$  y que

$$\bar{\varphi} = \frac{z - w_1}{z - w_2}$$

(si  $w_2 = \infty$ , se toma  $\bar{\varphi}(z) = z - w_1$ ). Bajo estas hipótesis la función

$$\bar{S} = \bar{\varphi}\bar{T}\bar{\varphi}^{-1}$$

fija 0 e  $\infty$ , por lo cual si

$$\bar{S}(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

se tiene  $b, c = 0$ . El resultado anterior muestra que cualquier transformación de Möbius es conjugada a una transformación canónica. El siguiente resultado examina la conjugación entre estas transformaciones *canónicas*. ■

**Proposición 1.3.2.** Sean  $k_1, k_2$  complejos no nulos, supóngase también que  $k_1 \neq k_2, k_2^{-1}$ , entonces las transformaciones  $\bar{T} = k_1 z$  y  $\bar{S} = k_2 z$  no son conjugadas en  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

*Demostración.* Si la transformación  $\bar{\varphi} \in PSL(2, \mathbb{C})$  conjugaba  $\bar{T}$  y  $\bar{S}$ , digamos  $\bar{S} = \bar{\varphi} \bar{T} \bar{\varphi}^{-1}$ , entonces se sigue del lema 1.3.1 que  $\bar{\varphi}$  preserva  $\{0, \infty\}$ .

Si  $\bar{\varphi}$  fija 0 e  $\infty$ , entonces  $\bar{\varphi}$  es de la forma  $z \rightarrow \alpha z \in, \alpha \in \mathbb{C}$ , por lo que  $\bar{\varphi}$  conmuta con  $\bar{T}$ , pero entonces  $\bar{T} = \bar{S}$ , lo cual contradice las hipótesis. Por otra parte, si  $\bar{\varphi}(0) = \infty$  y  $\bar{\varphi}(\infty) = 0$ , escribiendo

$$\bar{\varphi}(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

como  $\bar{\varphi}(0) = \frac{b}{d}$  y  $\bar{\varphi}(\infty) = \frac{a}{c}$ , se tiene que  $a, d = 0$  y que

$$\bar{\varphi}(z) = \frac{b}{cz}.$$

En este caso  $\bar{\varphi}$  es una involución, es decir  $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^{-1}$  y

$$\bar{\varphi} \bar{T} \bar{\varphi}^{-1}(z) = \bar{\varphi} \bar{T} \left( \frac{b}{cz} \right) = \bar{\varphi} \left( \frac{k_1 b}{cz} \right) = \frac{b}{c \left( \frac{k_1 b}{cz} \right)} = \frac{z}{k_1}$$

lo cual contradice que  $k_1 \neq \frac{1}{k_2}$ . ■

Ahora podemos obtener una clasificación de los elementos de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , en relación a las transformaciones *canónicas* actuando en la esfera de Riemann.

**Definición 1.3.2.** Sea  $\bar{T} \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $\bar{T}$  fija exactamente 2 puntos en  $\hat{\mathbb{C}}$ , supóngase también que  $\bar{T}$  es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a la transformación  $\bar{S}(z) = \alpha z$ . Entonces:

- a) Si  $|\alpha| = 1$ , a  $\bar{T}$  se llama *elíptica*.
- b) Si  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , a  $\bar{T}$  se llama *hiperbólica*.
- c) Si  $|\alpha| \neq 1$  y  $\alpha \notin \mathbb{R}^+$ , a  $\bar{T}$  se llama *loxodrómica*.

## 1.4. Geometría.

En esta parte vamos a estudiar el efecto geométrico que las transformaciones de Möbius tienen cuando hacemos composiciones sucesivas a puntos y círculos, los casos trabajados son los siguientes:

1. Consideremos una transformación de Möbius  $\varphi$ . Sea  $x$  un punto de la esfera de Riemann que no es un punto fijo de  $\varphi$ . Encontraremos los puntos de acumulación de la órbita de  $x$ .

**Solución.** Sea  $x \in \hat{\mathbb{C}}$  y se  $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  una transformación de Möbius, queremos encontrar los puntos de acumulación de la órbita de  $x$ , la órbita de  $x$  está dada por

$$\tau_x = \{\varphi(x) : \varphi \in \tau\}$$

vamos a separar los casos en los que  $\varphi(z)$  sea parabólica, elíptica y loxodrómica.

### Caso I.

Supongamos que  $\varphi(z)$  es una transformación parabólica, por tanto  $\varphi(z)$  es conjugada a una transformación de la forma  $\psi(z) = z + 1$ , y como hemos supuesto que  $x$  no es punto fijo de  $\varphi(z)$ , por tanto  $x \neq \infty$ . Vamos a tomar  $\tau = \langle z + 1 \rangle$ , por tanto cualquier elemento de  $\tau_x$  lo podemos pensar como  $z + n$ , así, si  $n \rightarrow \infty$  tendremos que el punto de acumulación de la órbita sería  $\infty$ . Por tanto, para una transformación parabólica cualquiera tendremos que el punto de acumulación de la órbita sería su punto fijo.

### Caso II.

Supongamos ahora que  $\varphi(z)$  es elíptica, como  $\varphi$  es elíptica, entonces es conjugada a una transformación de la forma  $\psi = \alpha z$ ; donde  $|\alpha| = 1$ ; para este caso  $\tau = \langle \alpha z \rangle$  y cada elemento de  $\tau_x$  lo podemos pensar como  $\alpha^n z$ , donde, si  $n \rightarrow \infty$ ,  $|\alpha^n| = |\alpha|^n \rightarrow 1$ . Para este caso tenemos que una transformación elíptica no es más que una rotación de un ángulo  $\theta$ , donde  $\alpha = e^{i\theta}$ , así vamos a considerar tres casos:

- a) El ángulo  $\theta = \frac{\pi}{m}$ , con  $m$  un número entero distinto de cero.
- b) El ángulo  $\theta = \frac{p}{q}\pi$ ;  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  con  $(p, q) = 1$ .
- c) El ángulo  $\theta = x\pi$ ; donde  $x$  es un número irracional.

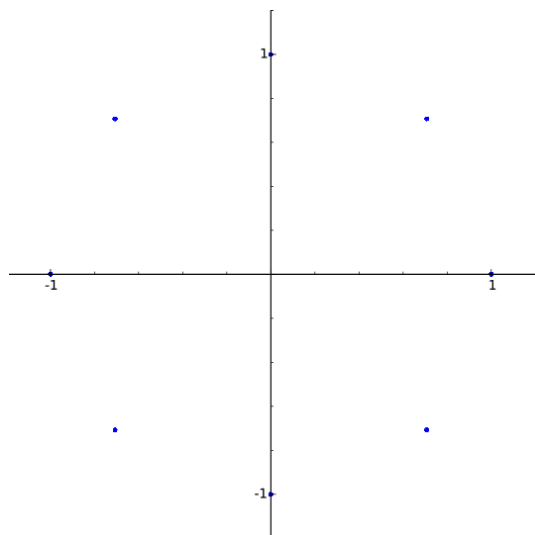
Para ver como son las órbitas en cada uno de los casos anteriores tomaremos un ejemplo en cada caso, por ejemplo, vemos que es lo que sucede para  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , donde tenemos que la transformación asociada a la  $n$ -ésima composición estaría dada por

$$\varphi^n(z) = e^{in\pi/4} z$$

donde la imagen de un punto  $x_0 + iy_0$  estaría dada por

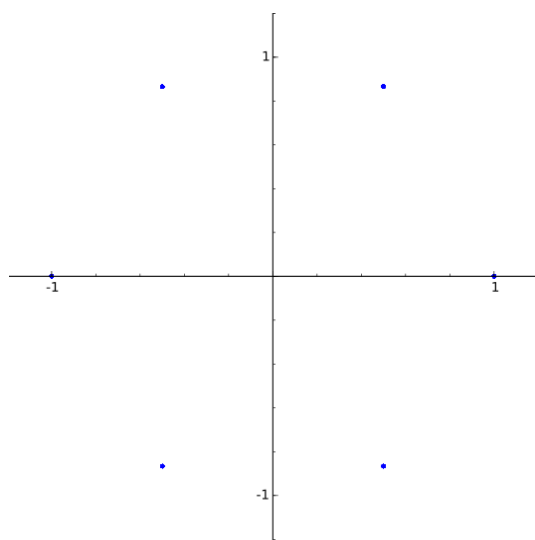
$$z_n = (x_0 \cos(n\pi/4) - y_0 \sin(n\pi/4), y_0 \cos(n\pi/4) + x_0 \sin(n\pi/4))$$

la siguiente figura muestra el conjunto de órbitas para  $\theta = \pi/4$  y tomemos  $z_0 = 1$



**Figura 1.3:** Dinámica de la transformación  $\varphi(z) = e^{i\pi/4}z$ .

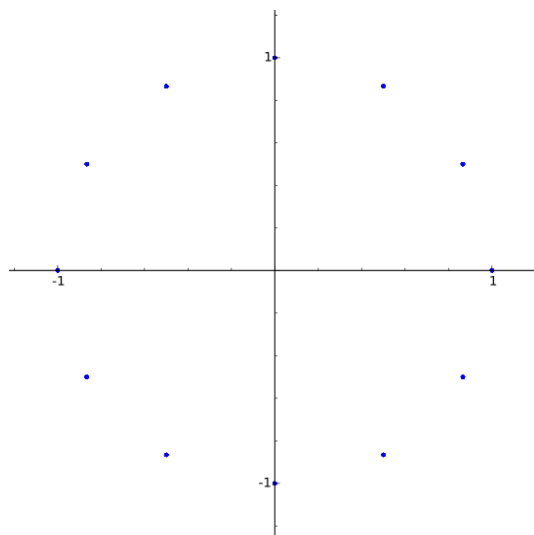
Por otro lado podemos variar el ángulo y para  $\theta = \pi/3$  obtenemos



**Figura 1.4:** Dinámica de la transformación  $\varphi(z) = e^{i\pi/3}z$ .

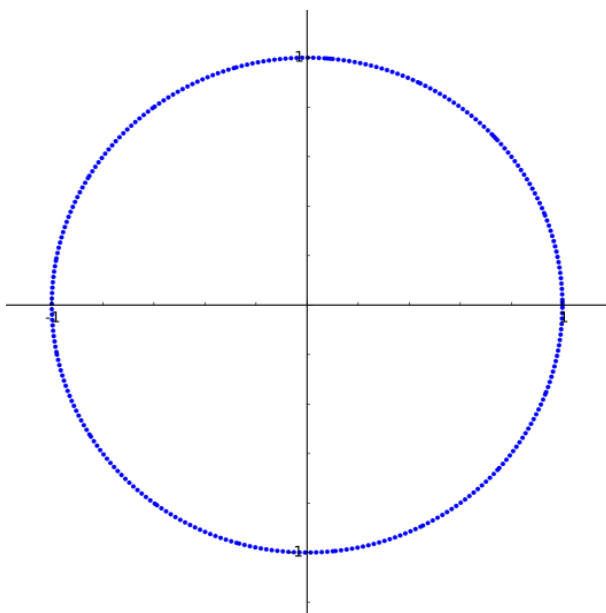
y mientras que para  $\theta = \pi/6$  obtenemos





**Figura 1.5:** Dinámica de la transformación  $\varphi(z) = e^{i\pi/6}z$ .

finalmente para el ángulo  $\theta = x\pi$ , con  $x$  un número irracional, en este caso tomaremos  $\beta = \sqrt{2}$



**Figura 1.6:** Dinámica de la transformación  $\varphi(z) = e^{i\sqrt{2}\pi}z$ .

Así tenemos que para los casos donde  $\theta = \pi/m$  ó  $\theta = \frac{p}{q}\pi$  las órbitas se estarán acumulando en los vértices de un  $2m$  - agono ó un  $2q$  - agono regular, mientras que para un  $\theta = x\pi$ , con  $x$  irracional, la órbitas se estarán acumulando en un círculo.

### Caso III.

Finalmente, si  $\varphi(z)$  es una transformación loxodrómica, entonces  $\varphi(z)$  es una transformación conjugada a unatra transformación del la forma  $\psi(z) = \alpha z$ ; donde  $|\alpha| \neq 1$ , en este caso

vamos a considerar el grupo  $\tau = \langle \alpha z \rangle$ , si  $x$  es distinto de los puntos fijos, los puntos de acumulación de la órbita serían  $\alpha^n x$ , ahora, donde el módulo de éste complejo será 0 si  $0 < |\alpha| < 1$ , por tanto el punto de acumulación sería 0, en otro caso sería  $\infty$ . Finalmente, para una transformación loxodrómica cualquiera, las órbitas se estarán acumulando en los puntos fijos de dicha transformación.

Otro dato importante que nos interesa es, saber como es la imagen de un círculo mediante alguna transformación de Möbius, lo discutimos a continuación:

2. ¿Cómo actúan las transformaciones de Möbius sobre los círculos?

**Solución.** Sabemos que la transformaciones Möbius, nos llevan de rectas y círculos a círculos, y viceversa, en esta parte veremos la forma que tienen las circunferencias, cuando se aplican sucesivamente transformaciones de Möbius. Consideremos un caso muy sencillo, que es la circunferencia centrada en el origen

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad r > 0$$

Consideremos primeramente, que la transformación  $\varphi(z)$  es una transformación parabólica, en este caso, podemos trabajar con la dinámica que le generará la transformación conjugada  $\psi(z) = z + 1$ , así composiciones sucesivas de  $\psi(z)$  nos dará como resultado  $\psi^n(z) = z + n$ , la cual, desplazará a nuestro círculo centrado en el origen hacia la derecha, así nuestro nuevo círculo tendrá por ecuación

$$(x - n)^2 + y^2 = r^2$$

por otro lado, las rectas de la forma  $x = K$ ; ( $K$  constante) las transformará en rectas de la forma  $x = k + n$ , mientras que las rectas de la forma  $y = k$  quedarán fijas.

Por otro lado, supongamos ahora que la transformación es elíptica, así podemos considerar el efecto que le hace su transformación conjugada, que es una transformación de la forma  $\psi(z) = \alpha z = e^{i\theta} z$ , donde su matriz asociada es,

$$M = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Luego, composiciones sucesivas de  $\psi(z)$ , tendrán la forma  $\psi(z) = e^{in\theta} z$ . Así, para el complejo  $w = u + iv = (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))(x + iy) = (\cos(n\theta)x - \operatorname{sen}(n\theta)y) + i(y \cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\theta)x)$  tenemos

$$\begin{aligned} x &= u \cos(n\theta) + v \operatorname{sen}(n\theta) \\ y &= v \cos(n\theta) - u \operatorname{sen}(n\theta). \end{aligned}$$

Por tanto el círculo  $C_r = \{x + iy/x^2 + y^2 = r^2\}$  queda fijo, mientras que para las rectas  $x = k$ , obtenemos la recta

$$\cos(n\theta)x + \operatorname{sen}(n\theta)y = k$$

y para las rectas de la forma  $y = k$  obtenemos

$$\cos(n\theta)y - \operatorname{sen}(n\theta)x = k.$$

Finalmente, supongamos que la transformación  $\varphi$  es loxodrómica, esto es,  $\phi(z)$  es una transformación conjugada a una de la forma  $\psi(z) = \alpha z$ , con  $|\alpha| \neq 1$  sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\alpha = e^{r+i\theta}$ , por tanto composiciones sucesivas serán de la forma  $\psi^n(z) = e^{rn+in\theta}z$ , por tanto, si lo aplicamos al círculo  $C_r = \{(x, y)/x^2 + y^2 = r^2\}$  obtenemos

$$w = u + iv = e^{rn}(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))(x + iy)$$

donde obtenemos que

$$u = e^{rn} \cos(n\theta)x - e^{rn} \operatorname{sen}(n\theta)y,$$

$$v = e^{rn} \operatorname{sen}(n\theta)x + e^{rn} \cos(n\theta)y,$$

por tanto

$$x = \frac{u \cos(n\theta) + v \operatorname{sen}(n\theta)}{2e^{rn}}$$

$$y = \frac{\cos(n\theta)v - \operatorname{sen}(n\theta)u}{2e^{rn}}$$

así

$$x^2 + y^2 = r^2 = \frac{u^2 + v^2}{4e^{2rn}}.$$

Luego, el círculo transformado sería de la forma

$$u^2 + v^2 = 4r^2 e^{2rn} = (2re^{rn})^2$$

o de forma equivalente en el círculo

$$x^2 + y^2 = (2re^{rn})^2.$$

## 1.5. Clasificación por la traza

Ahora exhibimos una caracterización de los elementos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  en términos de la traza, esta clasificación es de gran utilidad, por ejemplo, permite detectar de manera inmediata de qué tipo es una transformación de Möbius dada.

**Definición 1.5.1.** Sea  $\bar{T}$  una transformación de Möbius distinta de la identidad.

a) Si  $\bar{T}$  es parabólica se define su multiplicador como 1.

b) Si  $\bar{T}$  es conjugada a una transformación de la forma  $z \rightarrow kz$ ,  $k \neq 0, 1$  a los números  $k$  y  $\frac{1}{k}$  se les llama los multiplicadores de  $\bar{T}$ .

Se sigue de la clasificación definida por la conjugación a formas canónicas que los multiplicadores están bien definidos. El grupo de matrices  $2 \times 2$  con entradas complejas y determinante distinto de 0, se denota por  $GL(2, \mathbb{C})$ , se define la traza de  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  como la suma de los elementos diagonales, ésta se denota por  $\operatorname{Tr}(A)$ . Usaremos el siguiente resultado básico del Álgebra lineal.

**Lema 1.5.1.** La traza es invariante bajo conjugación en  $GL(2, \mathbb{C})$ .

*Demostración.* Basta probar que  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ ,  $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$ , ya que entonces  $\text{Tr}(ABA^{-1}) = \text{Tr}(A^{-1}AB) = \text{Tr}(B)$ . Escribiendo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

se tiene

$$AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta & * \\ * & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & * \\ * & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

La traza de una transformación de Möbius está bien definida salvo un signo, puesto que existen dos matrices unimodulares que la definen. ■

**Definición 1.5.2.** Dada  $\bar{T} \in PSL(2, \mathbb{C})$ ,

$$\bar{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

se define la traza de  $\bar{T}$  como  $\pm \frac{a+d}{\sqrt{ad-bc}}$ .

Denotaremos la traza de  $\bar{T}$  por  $\mathcal{X}(\bar{T})$ . Para muchas aplicaciones es útil tener fórmulas explícitas de las coordenadas de los puntos fijos. Obtenemos ahora una expresión en términos de la traza, para esto consideramos

$$\bar{T}(z) = \frac{az + b}{zc + d}, \quad ad - bc = 1, \bar{T} \neq I_d$$

y se tiene los dos casos:

**Caso 1:**  $c \neq 0$ . En este caso, como

$$\bar{T}(z) = z \Leftrightarrow az + b = (cz + d)z \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

los puntos fijos de  $\bar{T}$  están dados por

$$\frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c},$$

y usando la condición unimodular, ésta fórmula se simplifica a

$$\frac{a - d \pm \sqrt{\mathcal{X}^2 - 4}}{2c} \tag{1.5}$$

**caso 2:**  $c = 0$ . En este caso

$$\bar{T}(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Si  $\bar{T}$  es parabólica,  $\infty$  es el único punto fijo. De otra manera, como

$$\bar{T}(z) = z \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d} - 1\right)z = -\frac{b}{d},$$

el punto fijo está dado por

$$\frac{b}{d - a}.$$

**Teorema 1.5.1.** Sea  $\bar{T} \in PSL(2, \mathbb{C})$ ,  $\bar{T} \neq I_d$ , entonces

$$k + \frac{1}{k} + 2 = \mathcal{X}^2$$

donde  $k, \frac{1}{k}$  son los multiplicadores de  $\bar{T}$  y  $\mathcal{X}$  es su traza.

*Demostración.* **Caso 1:**  $\bar{T}$  es parabólica. Como el cuadrado de la traza es invariante bajo conjugación, se tiene

$$\mathcal{X}^2(T) = \text{tr}^2 \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

y se sigue el resultado.

**Caso 2:**  $\bar{T}$  no es parabólica. En este caso  $\bar{T}$  es conjugada a una transformación de la forma  $\bar{S}(z) = kz$ , la cual está definida por la matriz

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k}} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Por lo cual

$$\mathcal{X}^2(\bar{T}) = \mathcal{X}^2(\bar{S}) = \left( \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 = k + \frac{1}{k} + 2.$$

■

Para transformaciones con dos puntos fijos finitos  $\alpha_1, \alpha_2$ , se tiene una expresión de los multiplicadores en términos de estos puntos. Sea

$$\bar{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con esta propiedad  $\bar{S}(z) = kz$ , donde  $k$  es uno de los multiplicadores de  $\bar{T}$  y

$$\bar{\varphi}(z) = \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}.$$

Entonces,

$$\bar{S} = \bar{\varphi} \bar{T} \bar{\varphi}^{-1} \quad \text{y} \quad \bar{S} \bar{\varphi} = \bar{\varphi} \bar{T}.$$

Por lo cual

$$\frac{\bar{T}(z) - \alpha_1}{\bar{T} - \alpha_2} = k \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2},$$

y evaluando en  $\infty$ , se tiene

$$k = \frac{a/c - \alpha_1}{a/c - \alpha_2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{k} = \frac{a/c - \alpha_2}{a/c - \alpha_1}$$

Para el caso de una transformación en  $PSL(2, \mathbb{C})$  que fija dos puntos, uno de los cuales es  $\infty$ , es decir, de la forma  $\bar{T} = \alpha z + \beta$ , los multiplicadores se encuentran con facilidad, éstos precisamente  $\alpha$  y  $\frac{1}{\alpha}$ . Lo cual se sigue, ya que con esta notación el segundo punto fijo está dado por

$$\frac{\beta}{1 - \alpha},$$

y conjugando con

$$\bar{\varphi}(z) = z - \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

se obtiene

$$\bar{S}(z) = \bar{\varphi} \bar{T} \bar{\varphi}^{-1}(z) = \bar{\varphi} \bar{T} \left( z + \frac{\beta}{1 - \alpha} \right) = \alpha z$$

(como el término constante es cero, no es necesario efectuar más cuentas). Esta facilidad para detectar los multiplicadores de una transformación que fija  $\infty$ , permite también clasificarla de manera inmediata, por ejemplo,

$$a \rightarrow iz + 5$$

es elíptica, sin embargo

$$a \rightarrow 7z + 8 + i$$

es hiperbólica. El siguiente resultado es muy importante, exhibe un criterio, también sencillo, para clasificar cualquier transformación en  $PSL(2\mathbb{C})$ .

**Teorema 1.5.2.** *Sea  $\bar{T} \in PSL(2, \mathbb{C})$ ,  $\bar{T} \neq 0$  y  $\mathcal{X}$  la traza de  $\bar{T}$ . Entonces*

- a)  $\bar{T}$  es parabólica si y sólo si  $\mathcal{X} = \pm 2$ ;
- b)  $\bar{T}$  es elíptica si y sólo si  $\mathcal{X} \in (-2, 2)$ ;
- c)  $\bar{T}$  es hiperbólica si y sólo si  $\mathcal{X} \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ ;
- d)  $\bar{T}$  es loxodrómica si y sólo si  $\mathcal{X} \notin \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Probamos primero las condiciones de necesidad. EL caso parabólico ya se probó. Si  $\bar{T}$  es elíptica, entonces  $\bar{T}$  es conjugada a una transformación de la forma  $\bar{S}(z) = e^{i\theta}z$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$ , la cual está determinada por la matriz

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Por lo tanto,  $\pm \mathcal{X}(\bar{T}) = \pm \mathcal{X}(\bar{S}) = \pm 2 \cos(\theta/2) \in (-2, 2)$ . Si  $\bar{T}$  es hiperbólica, entonces  $\bar{T}$  es conjugada a una transformación definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k}} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}), \quad k \in \mathbb{R}^+$$

por lo cual

$$\mathcal{X}^2(\bar{T}) = \mathcal{X}^2(\bar{S}) = \left( \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 = k + 2 + \frac{1}{k} > 4,$$

puesto que

$$\left( \sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 > 0.$$

Ahora, si  $\bar{T}$  es loxodrómica y  $\rho^{i\theta}$ ,  $\rho \neq 0, 1, \theta \in (0, 2\pi)$ , es uno de sus multiplicadores, se sigue del teorema 1.5.1, muestra

$$\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{\rho}(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) + 2 = \mathcal{X}^2(\bar{T}).$$

Si  $\mathcal{X}(T) \in \mathbb{R}$ , se tendría  $\mathcal{X}^2(T) \in \mathbb{R}^+$  y  $(\rho - 1/\rho)\operatorname{sen} \theta = 0$ , por lo cual  $\operatorname{sen} \theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . Al tomar la parte real se tiene  $-(\rho + 1/\rho) + 2 \in \mathbb{R}^+$ , lo que es una contradicción, ya que  $\rho + 1/\rho > 2$ . Para demostrar la suficiencia, obsérvese que si  $\mathcal{X}^2(\bar{T}) = 4$ , se sigue de la primera parte que  $\bar{T}$  no es elíptica, ni tampoco hiperbólica o loxodrómica, por lo que deber ser parabólica. Los casos restantes se demuestran de manera similar. ■

**Corolario 1.5.1.** *Dos transformaciones de Möbius complejas  $\bar{T}, \bar{S}$  son conjuagadas en  $PSL(2, \mathbb{C})$  si y sólo si*

$$\mathcal{X}(\bar{T}) = \mathcal{X}(\bar{S})$$





# Capítulo 2

## Geometría Hiperbólica

El plano hiperbólico es un espacio métrico que es muy familiar al plano euclideo, introduciremos sus propiedades básicas mediante un proceso análogo a la propiedades del plano euclideo.

### 2.1. EL plano hiperbólico

**Definición 2.1.1.** *El plano hiperbólico es un espacio métrico que consiste del semiplano superior*

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\} = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$$

*el cual equiparemos con una nueva métrica  $d_{hip}$ .*

Para definir la métrica  $d_{hip}$ , primeramente definiremos la longitud hiperbólica de una curva  $\gamma$  parametrizada por la función diferenciable

$$t \rightarrow (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

como

$$l_{hip}(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt. \quad (2.1)$$

Utilizando la regla de la cadena, podemos mostrar que la longitud hiperbólica es independiente de la parametrización de  $\gamma$ . La definición de la longitud hiperbólica también se puede extender a curvas diferenciables a trozos, tomando la suma de longitudes hiperbólicas de curvas diferenciables a trozos.

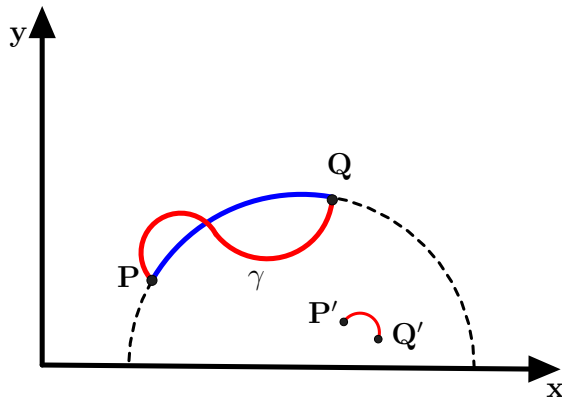


Figura 2.1: Plano hiperbólico.

La **distancia hiperbólica** entre dos puntos  $P$  y  $Q$  es el ínfimo de las longitudes hiperbólicas de todas las curvas diferenciables que conectan  $P$  y  $Q$ , esto es:

$$d_{hip}(P, Q) = \inf \{l_{hip}(\gamma) / \gamma \text{ conecta } P \text{ y } Q\} \quad (2.2)$$

Más adelante veremos que la distancia hiperbólica entre los puntos  $P'$  y  $Q'$  indicada en la figura 2.1 es la misma distancia hiperbólica de  $P$  a  $Q$ . También veremos que las curvas que conectan  $P$  y  $Q$  que minimizan las distancias hiperbólicas son los arcos de semicircunferencias. Con la práctica, veremos más comfortable la geometría del plano hiperbólico y veremos que tiene muchas e importantes similitudes con el plano euclideo, pero antes vamos a demostrar que la longitud hiperbólica  $d_{hip}$  es en realidad una función distancia.

**Lema 2.1.1.** *La función*

$$d_{hip} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$$

*definida por la ecuación 2.2 es una función distancia.*

*Demostración.* Vamos a verificar las cuatro condiciones de la definición de función distancia.

a) La condición  $d_{hip} \geq 0$  es inmediata debido a la definición.

b) La condición

$$d_{hip}(Q, P) = d_{hip}(P, Q)$$

también se sigue directamente de la definición.

c) Para demostrar la desigualdad triangular, consideramos tres puntos  $P, Q, R \in \mathbb{H}^2$ , ahora sea  $\epsilon > 0$ , por definición de la distancia hiperbólica como el ínfimo de las longitudes hiperbólicas, existe una curva diferenciable a trozos  $\gamma$  que va de  $P$  a  $Q$  tal que  $l_{hip}(\gamma) < d_{hip}(P, Q) + \frac{1}{2}\epsilon$ , y una curva diferenciable a trozos  $\gamma'$  que va de  $Q$  a  $R$  tal que  $l_{hip}(\gamma') < d_{hip}(Q, R) + \frac{1}{2}\epsilon$ , ahora combinando éstas dos curvas  $\gamma$  y  $\gamma'$  obtenemos una curva diferenciable a trozos  $\gamma''$  que va de  $P$  a  $R$ , donde la longitud es

$$l_{hip}(\gamma'') = l_{hip}(\gamma) + l_{hip}(\gamma') < d_{hip}(P, Q) + d_{hip}(Q, R) + \epsilon.$$

como consecuencia

$$d_{hip}(P, R) < d_{hip}(P, Q) + d_{hip}(Q, R) + \epsilon.$$

Puesto que esta propiedad es cierta para todo  $\epsilon > 0$ , concluimos que  $d_{hip}(P, R) \leq d_{hip}(P, Q) + d_{hip}(Q, R)$ , como queríamos.

- d) Finalmente la única condición que tiene una dificultad mayor es que  $d_{hip}(P, Q) > 0$  si  $P \neq Q$ . Consideremos una curva diferenciable a trozos  $\gamma$  que va de  $P$  a  $Q$ , parametrizada por la función diferenciable a trozos

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) \quad a \leq t \leq b,$$

con  $P = (x(a), y(a))$  y  $Q = (x(b), y(b))$ , ahora tenemos si  $\gamma$  no va hasta el otro extremo, así que  $y(t) \leq 2y(a)$  para todo  $t \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} l_{hip}(\gamma) &= \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{2y(a)} dt = \frac{1}{2y(a)} l_{euc}(\gamma) \\ &\geq \frac{1}{2y(a)} d_{euc}(P, Q). \end{aligned}$$

Po otro lado,  $\gamma$  cruza la recta horizontal  $L$  de la ecuación  $y = 2y(a)$ . Sea  $t_0$  el primer valor de  $t$  para el cual esto es cierto; hacemos  $y(t_0) = 2y(a)$  y  $y(t) < 2y(a)$  para todo  $t < t_0$ . Así  $\gamma'$  denota la parte de  $\gamma$  correspondiente a los valores de  $t$  con  $a \leq t \leq t_0$ . Esta curva  $\gamma'$  conecta  $P$  con el punto  $(x(t_0), y(t_0)) \in L$ , así, ésta longitud euclídea  $l_{euc}(\gamma')$  es mayor o igual que la distancia euclídea de  $P$  a la recta  $L$ , que también es igual a  $y(a)$ . Además

$$\begin{aligned} l_{hip}(\gamma) &\geq l_{hip}(\gamma') = \int_a^{t_0} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_a^{t_0} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{2y(a)} dt = \frac{1}{2y(a)} l_{euc}(\gamma') \\ &\geq \frac{1}{2y(a)} y(a) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En ambos casos, hemos encontrado que  $l_{hip}(\gamma) \leq C$  para una constante positiva

$$C = \min \left\{ \frac{1}{2y(a)} d_{euc}(P, Q), \frac{1}{2} \right\} > 0,$$

que depende únicamente de  $P$  y  $Q$  (una vez más  $y(a)$  es la  $y$ -coordenada de  $P$ ), luego tenemos que  $d_{hip}(P, Q) \geq C > 0$ , por tanto no puede ser 0 si  $P \neq Q$ . ■

## 2.2. Algunas isometrías del plano hiperbólico.

El Plano hiperbólico  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  tiene muchas simetrías. Veremos que sus simetrías son como las del plano euclídeo.

### 2.2.1. Homotecias y traslaciones horizontales.

Incluiremos las homotecias definidas por  $\varphi(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ , para algún  $\lambda > 0$ , por otro lado, si la curva diferenciable a trozos  $\gamma$  está parametrizada por

$$t \rightarrow (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

su imagen  $\varphi(\gamma)$  bajo  $\varphi$  está parametrizada por

$$t \rightarrow (\lambda x(t), \lambda y(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Además

$$\begin{aligned} l_{hyp}(\varphi(\gamma)) &= \int_a^b \frac{\sqrt{\lambda^2 x'(t)^2 + \lambda^2 y'(t)^2}}{\lambda y(t)} dt \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\ &= l_{hip}(\gamma). \end{aligned}$$

Se tiene  $\varphi$  establece una correspondencia uno a uno entre las curvas que conectan  $P$  y  $Q$  y las curvas que conectan  $\varphi(P)$  y  $\varphi(Q)$ , esto se sigue de la definición de la métrica hiperbólica que establece

$$d_{hip}(\varphi(P), \varphi(Q)) = d_{hip}(P, Q)$$

para todo  $P, Q \in \mathbb{H}^2$ . Esto demuestra que la homotecia  $\varphi$  induce una isometría de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$ . La traslación horizontal definida por  $\varphi(x, y) = (x + x_0, y)$  para algún  $x_0 \in \mathbb{R}$  son las isometrías más obvias de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$ , al igual que la reflexión  $\varphi(x, y) = (-x, y)$  a través del eje  $y$ .

### 2.2.2. La propiedad homogénea del plano hiperbólico.

Las isometrías obtenidas por la composición de homotecias y las traslaciones horizontales son la que demuestran que el plano hiperbólico es homogéneo. Recordemos que la composición de dos aplicaciones  $\varphi : X \rightarrow X'$  y  $\psi : X' \rightarrow X''$  es la aplicación  $\psi \circ \varphi : X \rightarrow X''$  definida por  $\psi \circ \varphi(p) = \psi(\varphi(p))$  para todo  $p \in X$ . Si además,  $X, X'$  y  $X''$  son espacios métricos,  $\varphi$  es una isometría de  $(X, d)$  a  $(X', d')$ ,  $\psi$  es una isometría de  $(X', d')$  a  $(X'', d'')$ , entonces  $\psi \circ \varphi$  es una isometría de  $(X, d)$  a  $(X'', d'')$  ya que

$$\begin{aligned} d''(\psi \circ \varphi(P), \psi \circ \varphi(Q)) &= d''(\psi(\varphi(P)), \psi(\varphi(Q))) \\ &= d'(\varphi(P), \varphi(Q)) \\ &= d(P, Q). \end{aligned}$$

**Proposición 2.2.1.** *El plano hiperbólico  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  es homogéneo, esto es, para todo  $P, Q \in \mathbb{H}^2$ , existe una isometría  $\varphi$  de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  tal que  $\varphi(P) = Q$ .*

*Demostración.* Si  $P = (a, b)$  y  $Q = (c, d) \in \mathbb{H}^2$ , con  $b, d > 0$ , la homotecia  $\varphi$  de radio  $\lambda = \frac{d}{b}$  que envía  $P$  al punto  $R = \left(\frac{ad}{b}, d\right)$  con la misma  $y$ -coordenada  $d$  a  $Q$ . Luego, la traslación horizontal  $\psi(x, y) = (x + c - \frac{ad}{b}, y)$  envía  $R$  a  $Q$ . La composición  $\psi \circ \varphi$  ahora prueba que una isometría que envía  $P$  a  $Q$ . ■

**Lema 2.2.1.** *La inversión del disco unitario es una isometría del plano hiperbólico  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$ .*

*Demostración.* Si  $\gamma$  es una curva diferenciable a trozos parametrizada por

$$t \rightarrow (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

su imagen  $\varphi(\gamma)$  bajo la inversión  $\varphi$  está parametrizada por

$$t \rightarrow (x_1(t), y_1(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

con

$$x_1(t) = \frac{x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \quad y \quad y_1(t) = \frac{y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}$$

entonces

$$x'_1(t) = \frac{(y(t)^2 - x(t)^2)x'(t) - 2x(t)y(t)y'(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^2}$$

y

$$y'_1(t) = \frac{(y(t)^2 - x(t)^2)y'(t) - 2x(t)y(t)x'(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^2}$$

luego

$$x'_1(t)^2 + y'_1(t)^2 = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{(x(t)^2 + y(t)^2)^2}.$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned} l_{hip}(\varphi(\gamma)) &= \int_a^b \frac{\sqrt{x'_1(t)^2 + y'_1(t)^2}}{y_1(t)} dt \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\ &= l_{hip}(\gamma). \end{aligned}$$

esto muestra que la inversión  $\varphi$  es una isometría del plano hiperbólico. ■

## 2.3. Curvas minimales en el plano hiperbólico.

En la geometría euclidea, las curvas minimales que conectan dos puntos, son los segmentos entre dichos puntos. Ahora queremos identificar las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos del plano hiperbólico, comenzaremos con un caso especial.

**Lema 2.3.1.** *Si  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $P_1 = (x_0, y_1) \in \mathbb{H}^2$  están ubicados sobre la misma recta vertical, entonces el segmento  $[P_0, P_1]$  tiene la menor logitud hiperbólica de todas las curvas diferenciables a trozos que van de  $P_0$  a  $P_1$ . La longitud hiperbólica de cualquier otra curva diferenciable que conecta  $P_0$  a  $P_1$  tiene estrictamente mayor longitud hiperbólica y*

$$d_{hip}(P_0, P_1) = l_{hip}([P_0, P_1]) = \ln \left| \frac{y_1}{y_0} \right|.$$

*Demostración.* Supongamos sin pérdida de generalidad que  $y_0 \leq y_1$ , parametrizando el segmento  $[P_0, P_1]$  por

$$t \rightarrow (x_0, t), \quad y_0 \leq t \leq y_1.$$

entonces

$$l_{hip}([P_0, P_1]) = \int_{y_0}^{y_1} \frac{\sqrt{0^2 + 1^2}}{t} dt = \ln \frac{y_1}{y_0}$$

ahora, consideramos una curva diferenciable a trozos  $\gamma$  que va de  $P_0$  a  $P_1$ , que está parametrizada por

$$t \rightarrow (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

su longitud hiperbólica es

$$\begin{aligned} l_{hip}(\gamma) &= \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_a^b \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln \frac{y(b)}{y(a)} = \ln \frac{y_1}{y_0} = l_{hip}([P_0, P_1]). \end{aligned}$$

La igualdad en la primera desigualdad requiere que la función  $x(t)$  sea constante, mientras que en la segunda implica que  $y(t)$  es creciente. Esto muestra que la curva  $\gamma$  es igual al segmento rectilíneo  $[P_0, P_1]$  si  $l_{hip} = l_{hip}([P_0, P_1])$ . ■

La siguiente estimación, es demostrada por el mismo argumento del lema anterior.

**Lema 2.3.2.** *Para cualesquiera dos puntos  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{H}^2$ ,*

$$d_{hip}(P_0, P_1) \geq \left| \ln \frac{y_1}{y_0} \right|.$$

**Lema 2.3.3.** *Para cualquier,  $P, Q \in \mathbb{H}^2$  que no esten sobre una misma recta vertical, existe una isometría del plano hiperbólico  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  tal que  $\varphi(P)$  y  $\varphi(Q)$  están en la misma recta vertical. En realidad, el segmento  $[\varphi(P), \varphi(Q)]$  es la imagen bajo  $\varphi$  del único arco circular que conecta  $P$  con  $Q$  y está centrado sobre el eje  $x$ .*

*Demostración.* Como  $P$  y  $Q$  no están sobre la misma recta vertical, la perpendicular que biseca la línea de  $P$  y  $Q$  intersecta el eje  $x$  en algún punto  $R$ . El punto  $R$  equidista de  $P$  a  $Q$  por la métrica euclídea, así, existe un círculo  $C$  centrado en  $R$  y que pasa a través  $P$  y  $Q$  que está centrado sobre el eje  $x$ . El círculo  $C$  intersecta el eje  $x$  en dos puntos. Sean  $\varphi_1$  la traslación horizontal que envía uno de esos puntos a  $(0, 0)$ . Entonces  $C' = \varphi_1(C)$  es un círculo que pasa a través del origen y está centrado en algún punto  $(a, 0)$ . En particular, la ecuación del círculo  $C'$  en coordenadas polares es  $r = 2a \cos(\theta)$ . Su imagen bajo la inversión  $\varphi_2$  es la curva de coordenadas polares de ecuación  $r = \frac{1}{2a \cos(\theta)}$ , llamaremos a la recta vertical  $L$ , donde la ecuación en coordenadas cartesianas es  $x = \frac{1}{2a}$ .

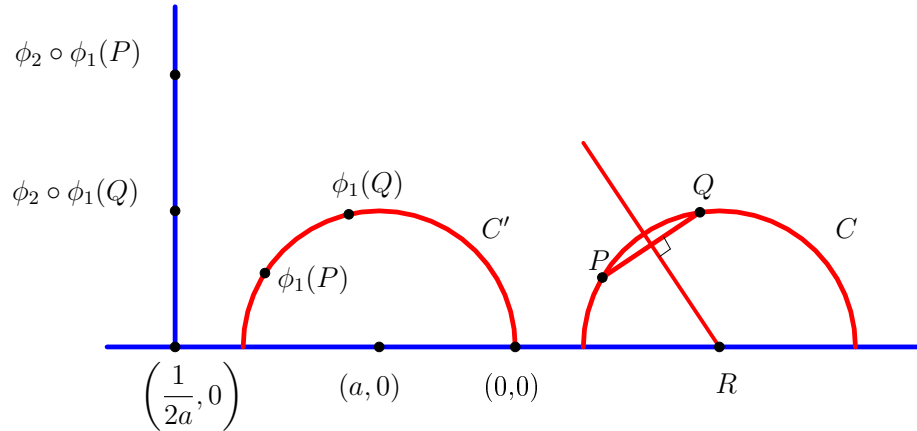


Figura 2.2: Arcos minimales centrados en el eje  $x$ .

La composición  $\varphi_2 \circ \varphi_1$  envía  $C$  a la recta vertical  $L$ . En particular, esta envía los puntos  $P$  y  $Q$  a dos puntos sobre la recta vertical  $L$ . Restringiendo  $\varphi_2 \circ \varphi_1$  a puntos en  $\mathbb{H}^2$ , entonces demostramos que la isometría  $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$  cumple con las condiciones del lema. ■

El lema 2.3.3 puede extenderse inmediatamente al caso donde  $P$  y  $Q$  están situados en la misma recta vertical  $L$  por la interpretación de  $L$  como un círculo de radio infinito, donde el centro está localizado en el infinito sobre el eje  $x$ . Equivalentemente, la recta vertical  $L$  de ecuación  $x = a$  puede ser vista como el límite cuando  $x$  tiene a  $+\infty$  o a  $-\infty$  del círculo de radio  $|x - a|$  centrado en el punto  $(x, 0)$ . Con esta convención, cualesquiera dos puntos  $P, Q \in \mathbb{H}^2$  pueden ser conectados por un único arco circular centrado sobre el eje  $x$ .

**Teorema 2.3.1.** *Entre todas las curvas que conectan  $P$  y  $Q$  en  $\mathbb{H}^2$ , los arcos circulares centrados sobre el eje  $x$  (posiblemente un segmento vertical) son las únicas curvas que minimizan la distancia hiperbólica.*

*Demostración.* Si  $P$  y  $Q$  están sobre la misma recta vertical, esto está demostrado por el lema 2.3.1. Por otro lado el lema 2.3.3 prueba que una isometría  $\varphi$  envía  $P$  y  $Q$  a dos puntos  $P'$  y  $Q'$  sobre la misma recta vertical  $L$ . Por el lema 2.3.1, las curvas minimales de  $P'$  a  $Q'$  es el segmento  $[P', Q']$ . Como una isometría envía curvas minimales a curvas minimales, la curva minimal de  $P$  a  $Q$  es la imagen del segmento rectilíneo  $[P', Q']$  bajo la isometría inversa  $\varphi^{-1}$ . Por el segundo hecho del lema 2.3.3, esta imagen es el arco circular que conecta  $P$  a  $Q$  y está centrado sobre el eje  $x$ . ■

En un espacio métrico donde la función distancia está definida tomando el ínfimo de las longitudes de arcos de ciertas curvas, como en el plano euclideo y el plano hiperbólico, existe un término técnico para las "curvas minimales". Más precisamente *geodésica* es una curva  $\gamma$  tal que para todo  $P \in \gamma$  y para todo  $Q \in \gamma$  suficientemente cercano a  $P$ , la sección de  $\gamma$  que conecta  $P$  a  $Q$  es la curva minimal que conecta  $P$  y  $Q$  (para la longitud de arco considerada). Por ejemplo, sabemos que las geodésicas en el plano euclideo  $(\mathbb{R}^2, d_{euc})$  son los segmentos rectilíneos, luego el teorema 2.3.1 muestra que las geodésicas en el plano hiperbólico  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  son los arcos circulares centrados sobre el eje  $x$ .

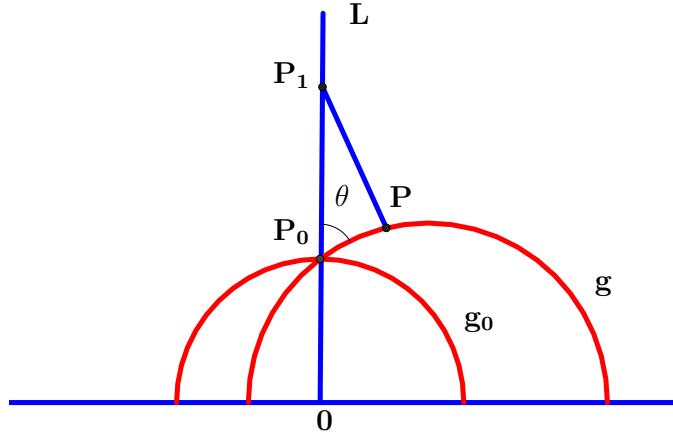
**Definición 2.3.1.** Una geodésica completa es una geodésica que no puede extenderse a lo largo de una geodésica.

**Lema 2.3.4.** Sea  $P_0 = (0, y_0)$  y  $P_1 = (0, y_1)$  dos puntos del semiplano superior derecho  $L = \{(0, y); y > 0\} \subset \mathbb{H}$  del eje  $y$ , con  $y_1 > y_0$  y sea  $g$  una geodésica hiperbólica completa que pasa a través de  $P_0$ . ver figura 2.3. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- $P_0$  es el punto de  $g$  que está más cerca a  $P_1$  para la distancia hiperbólica  $d_{hip}$ ;
- $g$  es la geodésica completa  $g_0$  que es ortogonal a  $L$  en el punto  $P_0$ , equivalentemente ésta es el semi círculo euclideo de radio  $y_0$  centrado en  $(0, 0)$  y conecta  $(y_0, 0)$  a  $(-y_0, 0)$ .

*Demostración.* Los lemas 2.3.1 y 2.3.2 muestran que para todo punto  $P = (u, v)$  sobre la geodésica  $g_0$ ,

$$d_{hip}(P_1, P) \geq \ln \frac{y_1}{v} \geq \ln \frac{y_1}{y_0} = d_{hip}(P_1, P_0).$$



**Figura 2.3:** geodésicas completas

Como una consecuencia, el punto  $P_0$  está más cerca a  $P_1$  entre todos los puntos de  $g_0$ . Recíprocamente, si  $g$  es otra geodésica hiperbólica completa que pasa a través de  $P_0$  y forma un ángulo  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  con  $L$  en  $P_0$ , queremos encontrar un punto  $P$  en  $g$  con

$$d_{hip}(P_1, P) < d_{hip}(P_1, P_0).$$

Para  $P = (u, v) \in g$ , la parametrización del segmento rectilíneo  $[P_1, P]$  dado, tiene longitud hiperbólica igual a

$$\begin{aligned} l_{hip}([P_1, P]) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{u^2 + (v - y_1)^2}}{y_1 + t(v - y_1)} dt \\ &= \frac{\sqrt{u^2 + (v - y_1)^2}}{y_1 - v} \ln \frac{y_1}{v}. \end{aligned}$$



Ahora hacemos que el punto  $P = (u, v)$  varíe sobre la geodésica  $g$  cerca de  $P_0$ . Cuando  $u = 0$ , tenemos que  $v = y_0$  y  $\frac{dv}{du} = \cot \theta$ . Derivando la fórmula anterior, nos que todavía en  $u = 0$ .

$$\frac{d}{du} l_{hip}([P_1, P]) = -\frac{1}{y_0} \cot \theta.$$

En particular, a menos que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , esta derivada es diferente 0 y existe cerca de  $P_0 = (0, y_0)$  un punto  $P = (u, v)$  de  $g$  tal que

$$d_{hip}(P_1, P) \leq l_{hip}([P_1, P]) < l_{hip}([P_1, P_0]) = d_{hip}([P_1, P_0]).$$

■

## 2.4. Todas las isometrías del plano hiperbólico.

Hasta el momento nos hemos encontrado con tres tipos de isometrías del plano hiperbólico  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$ : homotecias, traslaciones horizontales y las inversiones. En esta sección, describiremos todas las isometrías de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$ . Es conveniente usar números complejos, recordemos

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\},$$

Donde la parte imaginario  $\Im(z)$  es la coordenada  $y$  de  $z = x + iy$ .

En coordenadas complejas, una homotecia es de la forma  $z \mapsto \lambda z$  para un número  $\lambda > 0$ , una traslación es de la forma  $z \mapsto z + x_0$  con  $x_0 \in \mathbb{R}$ , y la inversión es de la forma  $z \mapsto \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$ , donde  $\bar{z} = x - iy$  es el conjugado complejo de  $z = x + iy$  y donde  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$  es su módulo. Podemos obtener más ejemplos de isometrías por composición de isometrías de esos tipos. Llamaremos a la composición  $\psi \circ \varphi$  de dos mapeos  $\varphi$  y  $\psi$  definiendolas por

$$\psi \circ \varphi(P) = \psi(\varphi(P)),$$

y puesto que la composición de dos isometrías es una isometría.

**Lema 2.4.1.** *Todas los mapeos de la forma*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{y } ad - bc = 1 \tag{2.3}$$

ó

$$z \mapsto \frac{c\bar{z} + d}{a\bar{z} + b} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{y } ad - bc = 1 \tag{2.4}$$

son isometrías del plano hiperbólico  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$ .

*Demostración.* Estas transformaciones son en realidad transformaciones de Möbius, que como mostramos en el capítulo 1, son composiciones de traslaciones, homotecias e inversiones. ■

**Lema 2.4.2.** Sea  $\varphi$  una isometría del plano hiperbólico  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  tal que  $\varphi(iy) = iy$  para todo  $y > 0$ . Entonces  $\varphi(z) = z$  para todo  $z \in \mathbb{H}^2$  o  $\varphi(z) = -\bar{z}$  para todo  $z$ .

*Demostración.* Sea  $L = \{iy; y > 0\}$  es el semiplano superior del eje  $y$ . Por hipótesis,  $\varphi$  fija todo punto de  $L$ . Para todo  $iy \in L$ , sea  $g_y$  la única geodésica hiperbólica completa que pasa atravez de  $iy$  y es ortogonal a  $L$ . Llamaremos,  $g_y$  es el semicírculo euclideo de radio  $y$  centrado en 0 contenido en  $\mathbb{H}^2$ . Ya que  $\varphi$  es una isometría y  $\varphi(iy) = iy$  es el punto de  $\varphi(g_y) = g$  que está más cerca a  $\varphi(iy_1) = iy_1$ . Usaremos el lema 2.3.4 para demotrar que  $g = g_y$ . Ciertamente, este hecho caracteriza la geodésica  $g_y$  por la propiedad que para cualquier  $y_1 > y$ , el punto  $iy$  es el punto de  $g_y$  que está más cerca a  $iy$ . Como una consecuencia, ya que  $\varphi$  es una isometría,  $\varphi(iy) = iy_1$ . El 2.3.4 muestra entonces que  $g = g_y$ , así que  $\varphi(g_y) = g_y$ .

Ahora, si  $P = u + iv$  es un punto de  $g_y$ , esta es su imagen  $\varphi(g_y)$  es uno de los dos puntos de  $g_y$  que están a una distancia  $d_{hip}(P, iy)$  de  $iy$ . Uno de esos dos puntos es  $P$ , el otro es  $-u + iv$  por simetría.

Concluimos que  $\varphi(u + iv) = u + iv$  o  $-u + iv$  para todo  $u + iv \in \mathbb{H}^2$  (ya que  $u + iv$  pertenece a alguna geodésica  $g_y$ ). Ya que  $\varphi$  es una isometría, esta es continua. Esto se del hecho de que  $\varphi(u + iv) = u + iv$  para todo  $u + iv \in \mathbb{H}^2$  o  $\varphi(u + iv) = -u + iv$  para todo  $u + iv \in \mathbb{H}^2$ . Este puede referirse como  $\varphi(z) = z$  para todo  $z \in \mathbb{H}^2$  o  $\varphi(z) = -\bar{z}$  para todo  $z \in \mathbb{H}^2$ . ■

**Teorema 2.4.1.** Las isometrías del plano hiperbólico  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  son exactamente las aplicaciones de la forma

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad ad - bc = 1.$$

ó

$$\varphi(z) = \frac{c\bar{z} + d}{a\bar{z} + b} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad ad - bc = 1.$$

*Demostración.* En el lema 2.4.1 demostramos que las transformaciones de Möbius son isometrías del plano hiperbólico. Recíprocamente, sea  $\varphi$  una isometría de  $\mathbb{H}^2$ , y consideremos la parte positiva  $L = \{iy : y > 0\}$  del eje  $y$ . Como  $L$  es una geodésica completa de  $\mathbb{H}^2$ , su imagen bajo la isometría  $\varphi$  también es una geodésica completa de  $\mathbb{H}^2$ , un semicírculo euclideo delimitado por dos puntos distintos  $u, v \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Donde  $u$  o  $v$  pueden ser  $\infty$  exactamente cuando  $\varphi(L)$  es una recta vertical. Además, si orientamos  $L$  desde 0 hasta  $\infty$ , requeriremos con menor generalidad la correspondiente orientación de  $\varphi(L)$  que va desde  $u$  a  $v$ .

Primero, consideramos el caso cuando  $u$  y  $v$  son diferente de  $\infty$ . La isometría hiperbólica

$$\psi(z) = \frac{az - au}{cz - cv}$$

con  $a$  y  $c \in \mathbb{R}$ ,  $ac(u - v) = 1$ ,  $u$  nos lleva a 0,  $v$  nos lleva a  $\infty$ . Se sigue de la composición  $\psi \circ \varphi$  fija los puntos 0 e  $\infty$ . Como consecuencia, la isometría  $\psi \circ \varphi$  envía la geodésica completa  $L$  en sí misma y respeta la orientación. En particular,  $\psi \circ \varphi(i) = it$  para algún  $t > 0$ . Reemplazando  $a$  por  $a/\sqrt{t}$  y  $c$  por  $c\sqrt{t}$  en la definición de  $\psi$ , podemos llegar a que  $\psi \circ \varphi(i) = i$ . Entonces  $\psi \circ \varphi$  envía cada  $iy \in L$  a un punto de  $L$  que está a la misma distancia hiperbólica desde  $i$  como  $iy$ ; enviando  $\psi \circ \varphi$  respeta la orientación de  $L$ , la única posibilidad es que  $\psi \circ \varphi(iy) = iy$  para todo  $y > 0$ . Ahora

aplicando el lemma 2.4.2 concluimos de que  $\psi \circ \varphi(z) = z$  para todo  $z$  o  $\psi \circ \varphi(z) = -\bar{z}$  para todo  $z$ . En el primer caso,

$$\varphi(z) = \psi^{-1}(z) = \frac{-cvz + au}{-cz + a}$$

donde la fórmula para la función inversa  $\psi^{-1}$  es obtenida por la solución de la ecuación  $\psi(z') = -z$  para todo  $z$ . En el segundo caso

$$\varphi(z) = \psi^{-1}(-\bar{z}) = \frac{cv\bar{z} + au}{c\bar{z} + a}.$$

En todo caso  $\varphi(z)$  es del tipo requerido. Solo falta considerar los casos cuando  $u$  o  $v$  es infinito. Los argumentos son idénticos, usando las isometrías

$$\psi(z) = \frac{-a}{cz - cv}$$

con  $ac = 1$  cuando  $u = \infty$  y

$$\psi(z) = \frac{az - au}{c}$$

con  $ac = 1$  cuando  $v = \infty$ .

■

Las isometrías de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  de la forma  $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$  son llamadas *aplicaciones racionales lineales* con coeficientes reales. Las de la forma  $\varphi(z) = \frac{c\bar{z} + d}{a\bar{z} + b}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$  son *aplicaciones racionales antilineales*.

## 2.5. Aplicaciones Lineales y antilineales

En esta parte estableceremos algunas propiedades de aplicaciones racionales lineales y antilineales. ya que posteriormente necesitaremos considerar aplicaciones de este tipo con coeficientes complejos, probaremos esas propiedades en un nivel mayor de generalidad. En el contexto complejo, una **transformación racional** es una aplicación no constante  $\varphi$  de la forma  $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con coeficientes complejos  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Un poco de álgebra elemental muestra que  $\varphi$  es no constante exactamente cuando  $ad - bc \neq 0$ . Dividiendo todos los coeficientes por uno de las dos raíces  $\pm\sqrt{ad - bc}$ , podemos consecuentemente arreglar para que  $ad - bc = 1$  con el cambio del mapeo  $\varphi$ . Sistemáticamente requeriremos que los coeficientes  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  satisfaciendo esta condición  $ad - bc = 1$ .

Hasta el momento el mapeo,  $\varphi$  no está definida en  $z = \frac{d}{c}$ . Sin embargo, esto puede facilmente ser fijado por la introducción a un punto  $\infty$  en el infinito de  $\mathbb{C}$ . La aplicación racional  $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc = 1$ , definimos un mapeo  $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  por  $\varphi(-d/c) = \infty$  y  $\varphi(\infty) = \frac{a}{c}$ . Esta aplicación es continua por la definición de continuidad en el infinito, y a queremos

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \varphi(z) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \frac{a}{c}$$

Similarmente, una **aplicación racional antilineal** es una aplicación  $\varphi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  de la forma  $\varphi(z) = \frac{c\bar{z} + d}{a\bar{z} + b}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc = 1$ , con la convención de que  $\varphi\left(-\frac{\bar{b}}{a}\right) = \infty$  y  $\varphi(\infty) = \frac{c}{a}$ .

### 2.5.1. Algunas aplicaciones racionales antilineales.

Ya nos hemos encontrado con las homotecias

$$z \rightarrow \lambda z = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}z + 0}{0z + \lambda^{-\frac{1}{2}}}$$

con  $\lambda$  un número real positivo. Si permitimos coeficientes complejos, podemos considerar las rotaciones

$$z \rightarrow e^{i\theta}z = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}z + 0}{0z + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

de ángulo  $\theta \in \mathbb{R}$  alrededor del origen, las traslaciones

$$z \rightarrow z + z_0 = \frac{z + z_0}{0z + 1}$$

para números complejos arbitrarios  $z_0 \in \mathbb{C}$ . También vamos a considerar la **inversión del círculo unitario**

$$z \rightarrow \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{0\bar{z} + 1}{\bar{z} + 0}$$

**Lema 2.5.1.** *Toda transformación lineal o antilineal  $\varphi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es una composición de homotecias, traslaciones, rotaciones e inversiones del círculo unitario.*

*Demostración.* La demostración es idéntica a los argumentos algebraicos utilizados para el caso lineal, ver 1.2.1. ■

Si  $C$  es el círculo de radio  $R$  centrado en el punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ , la inversión del círculo es la aplicación antilineal  $\varphi$  definido por

$$\varphi(z) - z_0 = R^2 \frac{z - z_0}{|z - z_0|^2}$$

o equivalentemente, que

$$\varphi(z) = \frac{\frac{z_0}{R}\bar{z} + \frac{R^2 - |z_0|^2}{R}}{\frac{1}{R}\bar{z} - \frac{z_0}{R}}$$

$\varphi$  envía  $z$  al punto que está en el mismo rayo que va desde  $z_0$  a  $z$ , y está a una distancia euclídea  $R^2/d_{\text{euc}(z, z_0)}$  de  $z_0$ . Esta inversión fija todo punto del círculo  $C$  e intercambia el interior con el exterior de  $C$ . Hay un interesante caso límite de inversiones donde dejamos el centro y el radio del círculo ir a infinito. Dados  $t, t_0$  y  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ , sea  $z_0 = te^{i\theta}$  y  $R = t - t_0$ . Si hacemos  $t$  tender a  $+\infty$ , el círculo  $C$  converge a la línea  $L$  que pasa atravez del punto  $t_0e^{i\theta}$  y forma un ángulo de  $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$  con el eje  $x$ . Por otro lado, la inversión  $\varphi$  a través de  $C$  converge al mapeo  $z \rightarrow e^{2i\theta}\bar{z} + 2t_0e^{i\theta_0}$ , que es justamente la reflexión a través de la línea  $L$ . De esta manera, interpretamos la recta  $L$  como un círculo de radio infinito centrado en el infinito, podemos considerar la reflexión euclídea a travez de  $L$  como una inversión a travez de este círculo. Note que toda recta  $L$  puede ser obtenida de esta manera.

## 2.6. La norma hiperbólica.

Si  $\vec{v} = (a, b)$  es un vector en  $\mathbb{R}^2$ , su *magnitud* o *norma euclidea* es igual a

$$\|\vec{v}\|_{euc} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Por ejemplo, si  $\vec{v}$  es la velocidad de una partícula que se mueve en el plano euclideo,  $\|\vec{v}\|$  describe la rapidez de dicha partícula. En el plano hiperbólico, las distancias son medidas de manera diferente, respecto al plano y en consecuencia también la rapidez. Si  $\vec{v}$  es un vector con base en el punto  $z \in \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$ , su norma hiperbólica es

$$\|\vec{v}\|_{hip} = \frac{1}{\Im(z)} \|\vec{v}\|_{euc}.$$

Para justificar esta definición, sea  $\gamma$  una curva en  $\mathbb{H}^2$ , parametrizada por  $t \rightarrow z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . En particular, el vector tangente de  $\gamma$  en el punto  $z(t)$  es la derivada  $z'(t)$ , y que lo hemos considerado como un vector basado en  $z(t)$ . Entonces las longitudes euclideas e hiperbólicas de  $\gamma$  están dadas por fórmulas muy similares

$$l_{euc}(\gamma) = \int_a^b \|z'(t)\|_{euc} dt$$

y

$$l_{hip}(\gamma) = \int_a^b \|z'(t)\|_{hip} dt.$$

Si  $\varphi$  es una aplicación diferencial y  $\vec{v}$  es un vector con base en el punto  $P$ , su imagen  $D_P\varphi(\vec{v})$  bajo la aplicación diferencial es un vector con base en  $\varphi(P)$ .

**Lema 2.6.1.** *Si  $\varphi$  es una isometría de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$ , entonces  $\|D_{z_0}\varphi(\vec{v})\|_{hip} = \|\vec{v}\|_{hip}$  para todo vector  $\vec{v}$  con base en  $z_0 \in \mathbb{H}^2$ .*

*Demostración.* Considere el caso donde  $\varphi$  es racional lineal  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ . Por la proposición ??, si  $\vec{v}$  es un vector con base en  $z_0 \in \mathbb{H}^2$ ,

$$\|D_{z_0}\varphi(\vec{v})\|_{euc} = \frac{1}{|cz_0 + d|^2} \|\vec{v}\|_{euc}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \Im(\varphi(z_0)) &= \frac{1}{2i} \left( \varphi(z_0) - \overline{\varphi(z_0)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} - \frac{a\bar{z}_0 + b}{c\bar{z}_0 + d} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{|cz_0 + d|^2} = \frac{1}{|cz_0 + d|^2} \Im(z_0). \end{aligned}$$

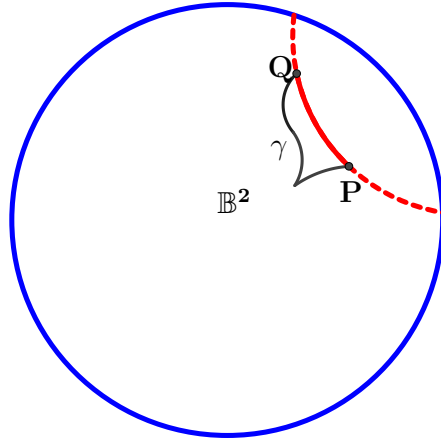
Además,

$$\begin{aligned} \|D_{z_0}\varphi(\vec{v})\|_{hip} &= \frac{1}{\Im(\varphi(z_0))} \|D_{z_0}\varphi(\vec{v})\|_{euc} \\ &= \frac{1}{\Im(z_0)} \|\vec{v}\|_{euc} = \|\vec{v}\|_{hip}. \end{aligned}$$

El argumento es similar para aplicaciones racionales antilineales  $\varphi(z) = \frac{c\bar{z} + d}{a\bar{z} + b}$ . ■

## 2.7. El modelo del disco para el plano hiperbólico

Ahora vamos a describir un nuevo modelo para el plano hiperbólico, que es otro espacio métrico  $(X, d)$  que es isométrico a  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$ . Este modelo es algunas veces más conveniente para procesos computacionales.



**Figura 2.4:** Modelo del disco para el plano hiperbólico.

Sea  $\mathbb{B}^2$  es el disco abierto de radio 1 centrado en  $(0,0)$  en el plano complejo, la bola  $B_{d_{euc}}((0,0), 1)$  en el plano euclideo  $(\mathbb{R}^2, d_{euc})$ . Para un vector  $\vec{v}$  con base en un punto  $z \in \mathbb{B}^2$ , definimos su  $\mathbb{B}^2$ -norma de la siguiente manera:

$$\|\vec{v}\|_{\mathbb{B}^2} = \frac{2}{1 - |z|^2} \|\vec{v}\|_{euc}$$

donde  $\|\vec{v}\|_{euc}$  es la norma euclidea de  $V$ . Entonces, como para el plano euclideo e hiperbólico, definimos la  $\mathbb{B}^2$ -longitud de una curva diferenciable a trozos  $\gamma$  en  $\mathbb{B}^2$  parametrizada por  $t \rightarrow z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , como

$$l_{\mathbb{B}^2}(\gamma) = \int_a^b \|z'(t)\|_{\mathbb{B}^2} dt.$$

Finalmente, dados dos puntos cualesquiera  $P, Q \in \mathbb{B}^2$ , definimos su  $\mathbb{B}^2$ -distancia  $d_{\mathbb{B}^2}(P, Q)$  como el ínfimo de las longitudes  $l_{\mathbb{B}^2}$  de las curvas diferenciables a trozos  $\gamma$  que conectan  $P$  y  $Q$ . Sea  $\varphi$  una aplicación racional lineal definida por  $\varphi(z) = \frac{-z+i}{z-i}$ . Note que los coeficientes de  $\varphi$  no satisfacen la relación usual  $ad - bc = 1$ . Esto puede arreglarse, dividiendo todos los coeficientes por una de las raíces cuadradas complejas  $\pm\sqrt{-2i}$ , pero el resultado de la expresión podría ser engorroso.

**Proposición 2.7.1.** *Las transformación racional  $\varphi(z) = \frac{-z+i}{z+i}$  induce una isometría de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  a  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$ .*

*Demostración.* Note que  $|\varphi(z)| = 1$  cuando  $z \in \mathbb{R}$ , así que  $\varphi$  envía  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  al círculo unitario. Como consecuencia,  $\varphi$  envía el semiplano superior  $\mathbb{H}^2$  al interior o el exterior del círculo unitario

en  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Puesto que  $\varphi(i) = 0$ , concluimos de que  $\varphi(\mathbb{H}^2)$  es igual al interior de  $\mathbb{B}^2$  del círculo unitario. Consideramos la diferencial  $D_z\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de  $\varphi$  en  $z \in \mathbb{H}^2$ . La proposición (??) tenemos:

$$\begin{aligned} \|D_z\varphi(v)\|_{\mathbb{B}^2} &= \frac{2}{1 - |\varphi(z)|^2} \|D_z\varphi(v)\|_{euc} \\ &= \frac{2}{1 - \left| \frac{-z+i}{z+i} \right|^2} \left| -\frac{2i}{(z+i)^2} v \right| \\ &= \frac{4}{|z+i|^2 - |-z+i|^2} |v| \\ &= \frac{4}{(z+i)(\bar{z}-i) - (-z+i)(-\bar{z}-i)} |v| \\ &= \frac{2}{i(\bar{z}-z)} |v| = \frac{1}{\Im(z)} |v| = \|v\|_{hip}. \end{aligned}$$

De estos cálculos, concluimos que  $\varphi$  envía a una curva  $\gamma$  en  $\mathbb{H}^2$  a una curva  $\varphi(\gamma)$  en  $\mathbb{B}^2$  tal que  $l_{\mathbb{B}^2}(\varphi(\gamma)) = l_{hip}(\gamma)$ . Tomando el ínfimo de las longitudes de tales curvas, se sigue que  $d_{\mathbb{B}^2}(\varphi(P), \varphi(Q)) = d_{hip}(P, Q)$  para todo  $P, Q \in \mathbb{H}^2$ . En otras palabras,  $\varphi$  define una isometría de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  a  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$ . ■

En particular, esto demuestra que  $d_{\mathbb{B}^2}$  es una métrica y no una semi-métrica (equivalentemente que  $d_{\mathbb{B}^2}(P, Q) = 0$  únicamente cuando  $P = Q$ ), que es una propiedad que implícitamente asumimos anteriormente.

**Proposición 2.7.2.** *Las geodésicas de  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$  son los arcos contenidos de los círculos euclídeos que son ortogonales a  $\mathbb{S}^1$ , es decir, la frontera  $\mathbb{B}^2$ , incluyendo las líneas rectas que pasan a través del origen.*

*Demostración.* Ya que  $\varphi$  es una isometría de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  a  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$ , las geodésicas de  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$  son justamente las imágenes bajo  $\varphi$  de las geodésicas de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$ . Como las aplicaciones racionales lineales envían círculos a círculos y además son conformes, el resultado se sigue inmediatamente del hecho que las geodésicas de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  son exactamente arcos euclídeos centrados sobre el eje  $x$  o equivalentemente ortogonalmente al eje  $x$ . ■

**Proposición 2.7.3.** *Las isometrías de  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$  son exactamente las restricciones a  $\mathbb{B}^2$  de todas las aplicaciones racionales lineales y antilineales de la forma*

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}} \quad \text{o} \quad \varphi(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\beta \bar{z} + \bar{\alpha}}$$

con  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ .

*Demostración.* Como  $\varphi$  es una isometría de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  a  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$ , las isometrías de  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$  son exactamente las aplicaciones de la forma  $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$  donde  $\psi$  es una isometría de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$ .

Si  $\psi$  es una aplicación racional lineal de la forma  $\psi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ , entonces

$$\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} = \frac{(ai - b + c + di)z + (-ai - b - c + di)}{(-ai + b + c + di)z + (ai + b - c + di)}$$

es de la forma indicada para

$$\alpha = \frac{1}{2}(a + bi - ci + d)$$

$$y \quad \beta = \frac{1}{2}(-a + bi + ci + d)$$

Recíprocamente, escribiendo  $\alpha + \beta = bi + d$  y  $\alpha - \beta = a - ci$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , cualquier aplicación  $z \rightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\beta \bar{z} + \bar{\alpha} z}$  con  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$  es de la forma  $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$  para algunos  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  con  $ad - bc = 1$ . ■

## 2.8. El espacio hiperbólico tridimensional.

Ahora vamos a aumentar una dimensión en uno, el espacio hiperbólico tridimensional  $\mathbb{H}^3$ . Este espacio está definido en completa analogía con el plano hiperbólico. Muchas de las pruebas son idénticas a las realizadas en dimensión 2.

### 2.8.1. El espacio hiperbólico tridimensional.

El espacio hiperbólico tridimensional es el espacio métrico que consiste del espacio superior, esto es:

$$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3; u > 0\}.$$

Si  $\gamma$  es una curva diferenciable a trozos en  $\mathbb{H}^3$  parametrizado por la función vectorial

$$t \rightarrow (x(t), y(t), u(t)), \quad a \leq t \leq b$$

su longitud hiperbólica es:

$$l_{hip}(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + u'(t)^2}}{u(t)} dt.$$

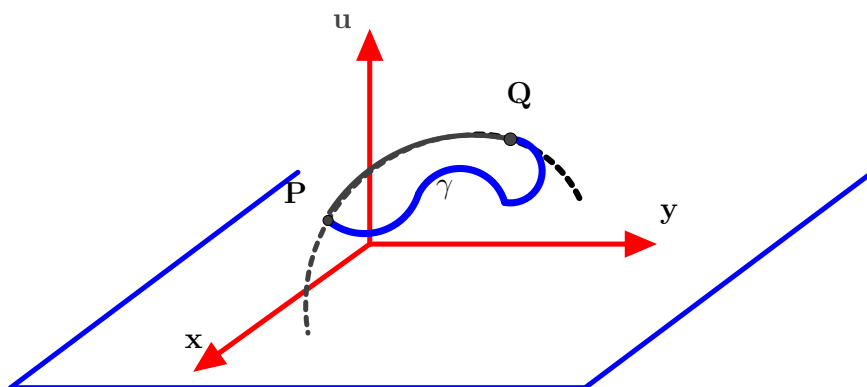


Figura 2.5: EL espacio hiperbólico



**Definición 2.8.1.** La distancia hiperbólica de  $P$  a  $Q \in \mathbb{H}^3$  está definida por

$$d_{hip}(P, Q) = \inf \{l_{hip}(\gamma); \gamma \text{ conecta } P \text{ y } Q\}$$

El hecho de que  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$  es un espacio métrico es idéntico a la prueba, para el plano hiperbólico en el lema 2.1.1. Como en dimensión 2, la norma hiperbólica de un vector  $\vec{v}$  con base el punto  $P = (x, y, u) \in \mathbb{H}^3$  está definida como

$$\|\vec{v}\|_{hip} = \frac{1}{u} \|\vec{v}\|_{euc}$$

donde  $\|\vec{v}\|_{euc} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  es la norma euclidea usual de  $\vec{v} = (a, b, c)$ . El espacio hiperbólico tridimensional admite algunas isometrías un tanto obvias  $\varphi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  que son inmediatas extensiones de su contraparte, el plano hiperbólico. Entre las cuales tenemos: *Las traslaciones horizontales*: definidas por

$$\varphi(x, y, u) = (x + x_0, y_0, u)$$

para  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  y las *homotecias*  $\varphi(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda u)$  para  $\lambda > 0$ . Una nueva, pero no muy diferente tipo de simetría consiste de *rotaciones* alrededor del eje  $u$ , definida por

$$\varphi(x, y, u) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, u)$$

para  $\theta \in \mathbb{R}$ . Finalmente, en analogía a la inversión del disco unitario, tenemos la *inversión a través de la esfera unitaria*. Este es la aplicación  $\varphi : \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  dada por

$$\varphi(x, y, u) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2 + u^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + u^2}, \frac{u}{x^2 + y^2 + u^2} \right)$$

Tenemos que la inversión así definida envía el semiespacio superior en sí mismo.

**Lema 2.8.1.** Si  $\varphi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  es la inversión a través de la esfera unitaria y si  $\vec{v}$  es un vector con base en  $P \in \mathbb{H}^3$ , entonces su imagen  $D_P\varphi(\vec{v})$  bajo la diferencial de  $\varphi$ , que es un vector con base en  $\varphi(P)$ , es tal que

$$\|D_P\varphi(\vec{v})\|_{hip} = \|\vec{v}\|_{hip}$$

como consecuencia,  $\varphi$  es una isometría de  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$

*Demostración.* Esto es un inmediato arreglo, idéntico al usado en la prueba del lema 2.2.1 para demostrar que la inversión a través del círculo unitario es una isometría del plano hiperbólico. ■

Considere el plano vertical:

$$H = \{(x, 0, u) \in \mathbb{R}^3; u > 0\} \subset \mathbb{H}^3.$$

Sustituyendo la letra  $u$  por  $y$ , este plano superior tiene una identificación natural con el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ . Para esta identificación la longitud hiperbólica tridimensional de un curva en  $\mathbb{H}^2$ . Lo mismo es cierto para la norma hiperbólica  $\|\vec{v}\|_{hip}$  de un vector  $\vec{v}$  tangente a  $H$  en  $P \in H \subset \mathbb{H}^3$ . También podemos identificar el plano hiperbólico  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  con el plano superior  $H \subset \mathbb{H}^3$ , dotamos con la métrica  $d_H$  para el cual  $d_h(P, Q)$  es el ínfimo de las longitudes hiperbólicas de todas las curvas que conectan  $P$  y  $Q$  en  $H$ .

**Teorema 2.8.1.** *El espacio hiperbólico  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$  es homogéneo e isotrópico. Equivalentemente, para todo vector  $\vec{v}$  en el punto  $P$  y todo  $\vec{w}$  en  $Q$  con  $\|\vec{v}\|_{hip} = \|\vec{w}\|_{hip}$ , entonces existe una isometría  $\varphi$  de  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$  tal que  $\varphi(P) = Q$  y  $D_P\varphi(\vec{v}) = \vec{w}$*

*Demostración.* Modificando  $\vec{v}$ ,  $P$ ,  $\vec{w}$  y  $Q$  por traslaciones horizontales y rotaciones a través del eje  $u$  ( que son isometrías de  $\mathbb{H}^3$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $P$  y  $Q$  están en el semiplano superior  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$  y que  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son tangentes al semiplano superior. Entonces, como el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  es isotrópico por la proposición 2.2.1, existe una isometría  $\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  que envía  $P$  a  $Q$  y donde la aplicación diferencial envía  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$ . Esta isometría es una composición de traslaciones a lo largo del eje  $x$ , homotecias e inversión a través del círculo unitario en el plano. Extendiendo las inversiones por las inversiones a través de la esfera unitaria, todos esos factores se extienden a isometrías de  $\mathbb{H}^3$ , así  $\varphi$  se extiende a una isometría  $\varphi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  que tiene las propiedades deseadas. ■

## 2.8.2. Isometrías del Espacio hiperbólico tridimensional

Listaremos todas las isometrías del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ , es conveniente identificar el plano  $xy$  con el plano complejo  $\mathbb{C}$ , de la manera usual.

**Lema 2.8.2.** *Toda aplicación racional lineal o antilineal de  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  se extiende continuamente a una aplicación  $\hat{\varphi} : \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$  donde la restricción a  $\mathbb{H}^3$  es una isometría de  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$ .*

*Demostración.* Sabemos que las aplicaciones lineales o antilineales  $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es una composición de traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones a través del círculo unitario. Observamos que todos esos factores extienden transformaciones continuas de  $\mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$  induciendo isometrías de  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$ . ■

A priori, la extensión  $\hat{\varphi}$  de  $\varphi$  probada en el lema anterior, depende del cambio de la composición de  $\varphi$  como una composición de traslaciones, rotaciones, homotecia e inversiones a través del círculo unitario. Para mostrar que este no es el caso, usaremos una simple observación geométrica.

**Lema 2.8.3.** *La inversión a través de la esfera unitaria envía cualquier esfera  $S$  centrada sobre el plano  $xy$ , posiblemente un plano vertical.*

*Demostración.* La inversión y la esfera  $S$  son cuerpos simétricos con respecto a rotaciones alrededor de la línea que conecta el origen  $O$  con el centro de la esfera  $S$ . La propiedad consecuentemente se sigue del hecho 2-dimensional que la inversión a través del círculo unitario es una isometría de  $\mathbb{H}^2$  y además envía un círculo centrado sobre el eje  $x$  a cualquier otro círculo centrado sobre el eje  $x$  (posiblemente una recta vertical). ■

**Lema 2.8.4.** *Las extensiones  $\hat{\varphi} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  de una aplicación racional lineal o antilineal  $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  probado para el lema 2.8.2 es independiente de la selección.*

*Demostración.* Si  $P \in \mathbb{H}^3$ , arbitrariamente recoge 3 esferas  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  centrados sobre el plano  $xy$ , pasando a través de  $P$ , y suficientemente genéricos ya que  $P$  es el único punto de intersección de  $\mathbb{H}^3 \cap S_1 \cap S_2 \cap S_3$ .

Las esferas  $S_1, S_2, S_3$  intersectan el plano  $xy$   $\mathbb{C}$  en tres círculos  $C_1, C_2, C_3$ . Luego  $\varphi$  envía círculos  $C_1, C_2, C_3$  a círculos  $C'_1, C'_2, C'_3$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Así existen esferas únicas  $S'_1, S'_2, S'_3$  centradas sobre el plano  $xy$  que intersectan el plano  $xy$  a lo largo de  $C'_1, C'_2, C'_3$ . Por el lema 2.8.3 y de manera similar para las traslaciones horizontales, rotaciones a través del eje  $z$  y homotecias, la extensión de  $\hat{\varphi}$  envía  $S_1$  a  $S'_1$ ,  $S_2$  a  $S'_2$  y  $S_3$  a  $S'_3$ . Como consecuencia  $\varphi(P)$  es el único punto de intersección de  $\mathbb{H}^3 \cap S'_1 \cap S'_2 \cap S'_3$ . ■

En particular  $\hat{\varphi}(P)$  es independiente de la descomposición de  $\varphi$  como una composición de traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones que son usadas en la demostración del lema 2.8.2.

**Teorema 2.8.2.** *Toda aplicación racional lineal o antilineal  $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  tiene una única extensión continua  $\hat{\varphi} : \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$  donde su restricción a  $\mathbb{H}^3$  es una isometría de  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$ . Recíprocamente, toda isometría de  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$  es obtenida de esta manera.*

*Demostración.* La existencia de la extensión se demostró justamente en el lema 2.8.2. Recíprocamente, sea  $\psi$  una isometría de  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$ . Queremos encontrar una aplicación lineal o antilineal  $\varphi$  donde la extensión isométrica a  $\mathbb{H}^3$  coincida con  $\psi$ . Ya que  $\psi$  es una isometría, ésta envía la geodésica orientada en  $0, \infty$  a otra geodésica completa de  $\mathbb{H}^3$ , que va de  $z_1$  a  $z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ . Por álgebra elemental, existe una aplicación racional lineal  $\varphi$  enviando  $0$  a  $z_1$  y  $\infty$  a  $z_2$ . Si  $\hat{\varphi}$  es su extensión isométrica a  $\mathbb{H}^3$ , la isometría  $\psi \circ \hat{\varphi}^{-1}$  ahora envía la geodésica orientada de  $0$  a  $\infty$  en sí misma. Sustituyendo  $\psi$  por  $\psi \circ \hat{\varphi}^{-1}$  de ser necesario, podemos además asumir que  $\psi$  envía la geodésica de  $0$  a  $\infty$  en sí misma, sin pérdida de generalidad.

Componiendo  $\psi$  con una homotecia de ser necesario, podemos asumir que esta fija algunos puntos de su geodésica. Como  $\psi$  es una isometría, esta fija todo punto de la geodésica de  $0$  a  $\infty$ . Sea  $g$  una geodésica completa contenida en el semiplano superior  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$  y que cruza  $0$  a  $\infty$  en algún punto  $P_0$ . Entonces  $\psi(g)$  es una geodésica completa que pasa a través de  $P_0$ . Note que  $\mathbb{H}^2$  es la unión de todas las geodésicas completas que van de  $0$  a  $\infty$  y  $g - \{P_0\}$ . Además,  $\psi(\mathbb{H}^2)$  es la unión de todas las geodésicas que van de  $0$  a  $\infty$  y  $\psi(g) - \{\psi(P_0)\}$ , y consecuentemente es el plano superior vertical euclideo que contiene  $0, \infty$  y  $\psi(g)$ . Componiendo  $\psi$  con una rotación alrededor de  $0, \infty$  si es necesario, podemos además asumir que  $\psi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ .

En particular,  $\psi$  ahora restringida a una isometría de  $\mathbb{H}^2$ . Por la clasificación de isometrías de  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  en el teorema 2.4.1, existe consecuentemente una aplicación lineal o antilineal  $\varphi$ , con coeficientes reales donde la extensión isométrica  $\hat{\varphi}$  coincide con  $\psi$  sobre  $\mathbb{H}^2$ . Entonces  $\varphi \circ \hat{\varphi}^{-1}$  es una isometría hiperbólica de  $\mathbb{H}^3$  que fija todo punto de  $\mathbb{H}^2$ . El mismo argumento como en la demostración del lema 2.4.1 muestra que  $\psi \circ \hat{\varphi}^{-1}$  es la aplicación identidad o la reflexión euclidea a través de  $\mathbb{H}^2$ . El lema 2.8.4 muestra que la extensión es única. ■

En general, usaremos las mismas letras para denotar aplicaciones racionales lineales y antilineales  $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , la isometría hiperbólica  $\varphi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ , y la aplicación continua  $\varphi : \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$  hecho de esas dos aplicaciones. Diremos que  $\varphi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  es la *extensión isométrica* de  $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  a una isometría de  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$  que aunque en un sentido estricto, matemáticamente incorrecto (si la extensión actual es  $(\varphi : \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}})$ , es conveniente una terminología adecuada, para futuras referencias, indicaremos la siguiente propiedad:

**Lema 2.8.5.** *Sean  $B_{d_{hip}}(P_0, r)$  y  $B_{d_{hip}}(P'_0, r)$  son dos bolas con el mismo radio  $r > 0$  en  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$ . Dotando cada bola con la restricción de la métrica hiperbólica  $d_{hip}$ . Entonces toda isometría  $\varphi : B_{d_{hip}}(P_0, r) \rightarrow B_{d_{hip}}(P'_0, r)$  tiene una única extensión a una isometría  $\varphi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ .*

*Demostración.* La demostración se sigue de las líneas del teorema 2.8.2 transportando cada una por una isometría de  $\mathbb{H}^3$ , de ser necesario, podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $P_0$  está sobre la geodésica de 0 a  $\infty$ . Entonces, por los argumentos usados en la prueba del teorema 2.8.2 podemos progresivamente componer  $\varphi$  con varias isometrías de  $(\mathbb{H}^3, d_{hip})$  se reduce el problema al caso donde  $\varphi$  envía  $P_0$  a  $P_0$ , y entonces envía la intersección de  $B_{d_{hip}}(P_0, r)$  con la geodésica de 0 a  $\infty$  en sí mismo y entonces envía  $B_{d_{hip}}(P_0, r) \cap \mathbb{H}^2$ , y entonces fija todo punto de  $B_{d_{hip}}(P_0, r)$ . En éstos puntos, la existencia de la extensión a una isometría global (equivalentemente, la aplicación identidad) de  $\mathbb{H}^3$  es inmediata. La unicidad de la extensión es inmediata, una vez que nos damos cuenta que podemos enviar cada geodésica que va desde  $P_0$  en sí misma. ■

# Capítulo 3

## Grupos Kleinianos

En este capítulo desarrollaremos la teoría básica de grupos Kleinianos, que son ciertos grupos de isometrías del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ , antes de presentar la definición formal de un grupo Kleiniano construiremos a detalle algunos ejemplos mediante un proceso de iteración de nuestra herramienta fractal "transformaciones de Möbius", donde utilizaremos sus propiedades definidas en el capítulo 1.

### 3.1. Construcción de grupos Kleinianos.

#### 3.1.1. Círculos emparejados.

Para nuestra primera construcción de un grupo Kleiniano vamos a considerar 4 círculos en el plano, los cuales vamos a enlazarlos mediante dos transformaciones de Möbius, lo cual es posible debido a que tres puntos determinan un único círculo y debido al teorema 1.2.2 siempre podemos encontrar una transformación que nos lleve de los puntos  $z_1, z_2, z_3$  a tres puntos  $w_1, w_2, w_3$ , así podemos tomar 3 puntos de un círculo y 3 del otro, así de esta forma garantizamos que siempre es posible encontrar dos transformaciones que convierta un círculo en otro, la siguiente definición establece las condiciones para dicho emparejamiento.

**Definición 3.1.1.** Sean  $D_A$  y  $D_a$  dos discos disjuntos acotados por las circunferencias  $C_A$  y  $C_a$  respectivamente. Una transformación loxodrómica "a" se dice que empareja los discos  $D_A$  y  $D_a$  si transforma  $C_A$  en  $C_a$  y el exterior de  $D_A$  en  $D_a$ .

Por otro lado se tiene:

- a ) El punto fijo atractor  $Fix^+(a)$  de "a" es interior a  $D_a$  y el punto fijo repulsor  $Fix^-(a)$  de "a" es interior a  $D_A$ .
- b ) Potencias sucesivas de "a" encajan el disco  $D_a$  a un disco más pequeño conteniendo  $Fix^+(a)$ , mientras que potencias sucesivas de  $a^{-1}$  encogen  $D_A$  a un disco más pequeño conteniendo  $Fix^-(a)$ .

En adelante vamos a considerar la transformación de Möbius por  $a$  y su inversa por  $A$ , esto es:

$$a^{-1} = A \quad \text{y} \quad A^{-1} = a.$$

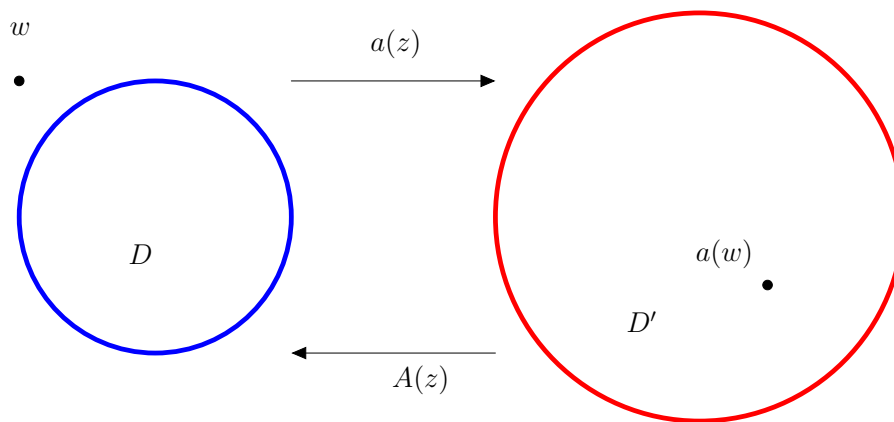
Ahora, consideremos dos parejas de discos disjuntos y supongamos que están emperajados por las transformaciones  $a, b$  y sus respectivas inversas son  $A, B$ ; la colección de todas las posibles composiciones de las transformaciones  $a, b, A, B$  forma un grupo, ya que la composición de dos transformaciones de Möbius vuelve a ser una transformación de Möbius y también están sus respectivos inversas.

**Definición 3.1.2.** Sean  $D_A, D_a, D_B$  y  $D_b$  cuatro discos disjuntos. Sean  $a, b$  las respectivas transformaciones que emparejan los círculos  $C_a$  con  $C_A$  y  $C_B$  con  $C_b$  respectivamente. Se llama grupo de Schottky determinado por estos discos al grupo generado por todas las composiciones posibles de  $a$  y  $b$ .

**Definición 3.1.3.** Un grupo  $G$  se dice libre de rango  $k$  si todo elemento de  $G$  puede escribirse en una forma única como producto finito de  $k$  elementos de  $G$  incluyendo sus inversos.

**Lema 3.1.1.** Sean  $D$  y  $D'$  dos discos disjuntos y  $a$  una transformación de Möbius que transforma el exterior de  $D$  en  $D'$ . Entonces  $a$  es el loxodrómica.

*Demostración.* Supongamos entonces que la transformación  $a(z)$  lleva el exterior del disco  $D$  al interior del disco  $D'$  y supongamos que la transformación no es loxodrómica, así la transformación puede ser parabólica o elíptica.



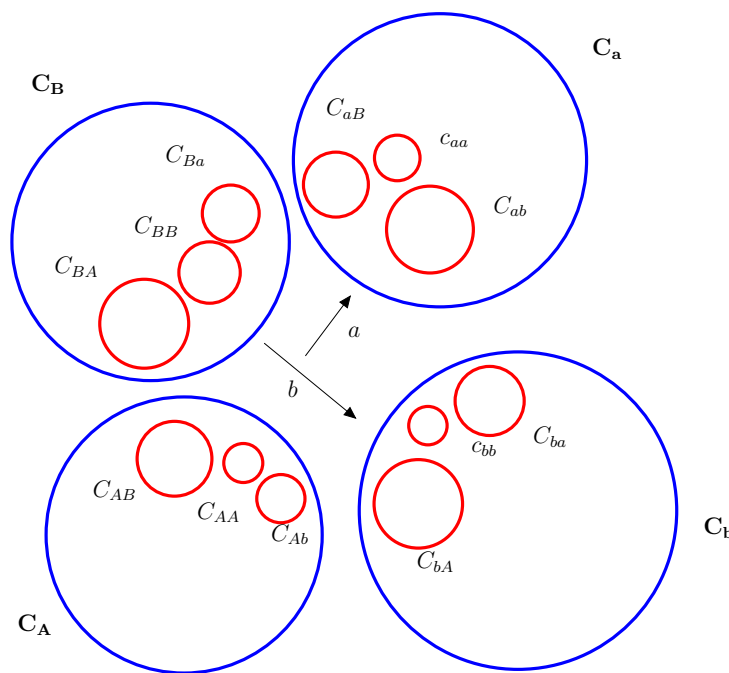
**Figura 3.1:** Efecto de la transformación  $a(z)$ .

Si la transformación es parabólica tenemos que su órbita es su punto fijo y puesto que la imagen de un punto exterior a  $D$  que llamaremos  $w$  va al interior del otro disco  $D'$  y así potencias sucesivas de  $a(z)$  se irán acumulando en el disco  $D'$ , ya que es compacto, por otro lado tenemos que el interior de  $D'$  va al exterior de  $D$  y la aplicación inversa  $A$  lleva el exterior de  $D'$  al interior de  $D$ , así imágenes sucesivas de un punto del exterior de  $D'$  se irán acumulando en el interior de  $D$ , así tenemos que la órbita de dicha transformación siempre serán dos puntos, uno en el interior de  $D$  y  $D'$  respectivamente, sin embargo esto no es posible ya que sabemos que los puntos de acumulación de una transformación parabólica es su punto fijo y mientras que en el caso elíptico son los vértices de un  $2n$ -ágono regular o un círculo. Por tanto la única posibilidad es que la transformación sea loxodrómica. ■

**Teorema 3.1.1.** *Un grupo de Schottky (determinado por  $D_a, D_A, D_b, D_B$ ) tiene todos sus elementos loxodrómicos y es libre de rango 2<sup>1</sup>*

*Demostración.* Para demostrar que todos los elementos son loxodrómicos, aplicamos el lema 3.1.1 a las transformaciones  $a$  y  $b$  que emparejan los discos  $D_A, D_a$  y  $D_B, D_b$  respectivamente y puesto que por el proceso de construcción, cada elemento del grupo es composición de los generadores  $a$  y  $b$  sin elementos de las forma  $ab^{-1}ba^{-1}$ . ■

Los cuatro discos iniciales  $D_a, D_b, D_A$  y  $D_B$  son llamados discos iniciales de Schottky y puesto que las transformaciones de Möbius siempre mapean círculos a círculos, cuando cualquiera de las cuatro transformaciones  $a, b, A$  y  $B$  es aplicada a cualquiera de los cuatro discos, todas sus imágenes también serán discos propios que se irán anidando en los respectivos interiores de los discos iniciales hasta que su radio tienda a cero<sup>2</sup>. Los puntos que estén en el límite de círculos anidados son los que llamaremos el conjunto límite del grupo. La siguiente figura muestra la primera aplicación de todas las transformaciones a todos los discos iniciales, donde entenderemos que  $C_{ab} = a(C_b)$ .



**Figura 3.2:** Aplicación de cada transformación a cada círculo.

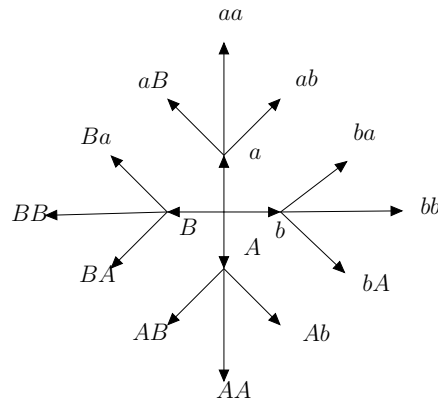
Llamaremos a los cuatro discos iniciales primer nivel, luego aplicamos cada transformación a los otros restantes, obteniendo 12 composiciones diferentes :  $aB, aa, ab, bA, bb, ba, AB, Ab, AA, BA, BB, Ba$ , el cual llamaremos segundo nivel, y así sucesivamente. A la composición de estos elementos, les llamaremos palabras.

<sup>1</sup>Un grupo de Schottky no es conmutativo, para ver esto tomamos un punto  $x$  fuera de los cuatro discos, ahora bien, la transformación  $ab$ , lo llevará al disco  $D_a$  y la transformación  $ba$  lo llevará a  $D_b$  y puesto que los discos son disjuntos se tiene que los respectivos puntos también son distintos así, tenemos que los grupos de Schottky no son conmutativos.

<sup>2</sup>El hecho de que los radios de los círculos es aparentemente trivial a partir de las figuras de los conjuntos límites que veremos más adelante, sin embargo, no es automático, aunque no los demostraremos en este trabajo, puede revisarse algunas ideas de la demostración en [2].

### 3.1.2. Codificación de elementos por medio de árboles.

La idea de la codificación de nuestras palabras es por medio de una colección de vértices o nodos conectados por flechas a las que llamaremos aristas, cada nodo tiene un nivel, el nivel que no tenga elementos será el de la palabra vacía, el nivel 1 será el de los cuatro círculos iniciales y así sucesivamente. Del nodo inicial salen 4 flechas apuntando a cuatro nodos  $a, b, A, B$ , para cada uno de estos salen 3 flechas apuntando a los nodos del nivel 2, por ejemplo del nodo del nivel 1, en  $a$  salen flechas que van hacia  $aB, aa, ab$ , que son las tres posibles palabras con la letra inicial  $a$  y vamos quitando de una vez las cancelaciones  $aA$  ó  $Bb$ , en este caso diremos que las palabras estarán reducidas. Cada nodo de nivel  $N$  es alcanzado por una flecha que llega de un nodo de nivel  $N - 1$ , la siguiente figura muestra el patrón a seguir.



**Figura 3.3:** Árbol de palabras.

Las imágenes de los discos de Schottky son rotulados en exactamente el mismo sentido que los nodos sobre la palabra del árbol, mediante la siguiente regla

$$D_{ab} = a(D_b) = D_{ab}.$$

Por otro lado, para cualquier palabra de la forma  $D_{x_1x_2\dots x_n}$  se cumplirá la siguiente cadena

$$D_{x_1} \supset D_{x_1x_2} \supset \dots \supset D_{x_1x_2\dots x_n}.$$

### 3.1.3. Trazando la formación de Schottky.

Asumiremos que tendremos de entrada dos generadores, estos son  $a$  y  $b$  con sus respectivos inversos  $A$  y  $B$ , estas cuatro matrices serán declaradas como una lista de matrices  $2 \times 2$ , con entradas complejas. El orden exacto de esta lista no es importante, pero una cosa que siempre necesitaremos conocer, es cual generador es el inverso, con el fin de poder asegurarse de considerar únicamente palabras reducidas, los pasos y elementos a considerar son los siguientes:

- a) Codificamos los generadores de la siguiente manera:  $gens[0] = a$ ,  $gens[1] = b$ ,  $gens[2] = A$  y  $gens[3] = B$  y mediante esta codificación también podemos codificar los respectivos inversos:  $inv[0] = 2$ ,  $inv[1] = 3$ ,  $inv[2] = 0$  e  $inv[3] = 1$ .



- b) Tiling plots: Esta función trazará "algo" cada vez que vayamos a un nuevo nodo en el grupo.
- c) Lev:  
El nivel actual donde estamos.
- d) Lev max:  
El máximo nivel que deseamos buscar.
- e) Group:  
Una creciente lista de palabras en el grupo que hemos generado. Esta inicia fuera como un gran vacío; espacio suficiente para nuestra caja de códigos.
- f) Tag:  
Esta es una lista de enteros de exactamente la misma longitud del grupo. Como generamos palabras en el grupo, guardamos su índice (un entero entre 0 y 3) ya que implementaremos el **Sage Math**. Las listas de elementos se comienzan a enumerar desde 0.
- g) Num:  
Necesitaremos mantener el camino de los números de las palabras enumeradas en cada nivel. En el presente caso, esto es actualmente  $4 \cdot 3^{lev-1}$ , pero en casos más complicados esto puede ser difícil de determinar.

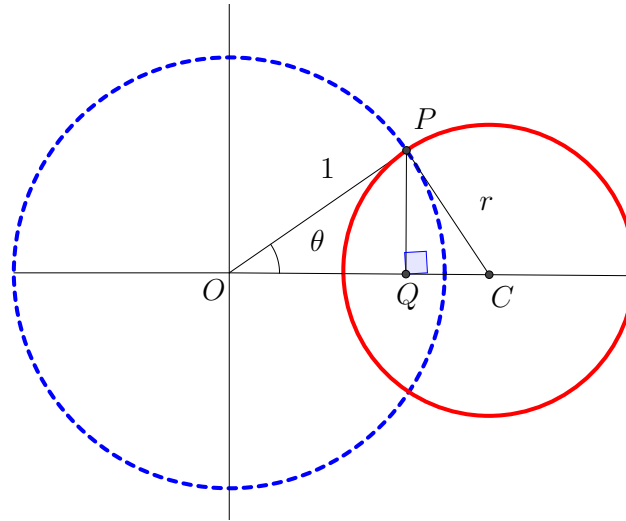
El algoritmo a implementar recibe el nombre de "BFS" que viene de " Bread - First - Search", este algoritmo buscará en el árbol nivel por nivel, no dejando un nivel hasta que tengamos explorados toda palabra en el nivel. En este trabajo hemos implementado "Sage Math", el algoritmo se presenta en la sección de anexos.

### 3.1.4. Los grupos $\theta$ - Schottky.

Hay fórmulas concretas para otras familias de grupos de *Schottky* basados en posiciones simétricas de los círculos; las fórmulas dependerán de un ángulo  $\theta$ <sup>3</sup> que medirá la posición de los círculos; los llamaremos grupos  $\theta$  - *Schottky*, en este caso, los círculos han sido ubicados ortogonalmente al círculo unitario. El caso particular cuando los cuatro círculos tengan el mismo radio y estén ubicados de manera simétrica el conjunto límite estará contenido en una circunferencia, a estos grupos les llamaremos grupos Fuchsianos de Schottky. Tomemos de referencia la siguiente figura:

---

<sup>3</sup>Para ésta configuración el ángulo puede variar entre 0 y  $\pi/2$  excepto  $\theta = \pi/3$ , ya que en este ángulo los círculos se van a cortar.



**Figura 3.4:** Construcción de círculos ortogonales.

La circunferencia azul en la figura 3.4 es la circunferencia unitaria, para que la circunferencia de rojo sea ortogonal a la circunferencia unitaria necesitamos que el radio  $OP$  sea perpendicular al radio  $CP$ , así tenemos que los triángulos que se determinan  $OPQ$  y  $PQC$  son triángulos rectángulos semejantes, por tanto las razones de semejanza son

$$\frac{\cos \theta}{\sen \theta} = \frac{1}{r} = \frac{\sen \theta}{\overline{QC}}$$

de donde

$$\overline{QC} = \frac{\sen^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta = \sec \theta - \cos \theta.$$

Por otro lado

$$r = \tan \theta$$

así la ecuación de la circunferencia de rojo estaría dada por la siguiente ecuación

$$C_b : (x - \sec \theta)^2 + y^2 = \tan^2 \theta$$

por tanto el resto de circunferencias estarían dadas por las siguientes ecuaciones

$$C_B : (x + \sec \theta)^2 + y^2 = \tan^2 \theta$$

$$C_a : x^2 + (y - \sec \theta)^2 = \tan^2 \theta$$

$$C_A : x^2 + (y + \sec \theta)^2 = \tan^2 \theta$$

para obtener nuestro grupo tomaremos una transformación  $a$  que empareje  $C_A$  y  $C_a$ , una transformación  $b$  que empareje  $C_B$  y  $C_b$ . Para encontrar la transformación  $b$ , tomamos 3 puntos de la circunferencia  $C_B$ , los cuales serán  $z_1 = -\sec \theta + \tan \theta i$ ,  $z_2 = -\sec \theta - \tan \theta$  y  $z_3 = \tan \theta - \sec \theta$ , de tal forma que la transformación  $b$  nos lleve a los puntos  $w_1 = \sec \theta + \tan \theta i$ ,  $w_2 = \sec \theta + \tan \theta$  y  $w_3 = \sec \theta - \tan \theta$  respectivamente, donde los puntos  $w_1, w_2$  y  $w_3$  son puntos de la circunferencia  $C_b$ . Ahora, utilizando el teorema 1.2.2 podemos encontrar transformaciones que nos lleven de  $z_1, z_2$  y  $z_3$  a  $1, 0, \infty$  respectivamente, digamos que dicha transformación sea  $\overline{S}_1$ , de la misma forma, podemos encontrar una transformación  $\overline{S}_2$  que nos lleve de los puntos  $w_1, w_2$  y  $w_3$  a  $1, 0, \infty$

respectivamente, digamos que dicha transformación sea  $\overline{S_2}$ , así la transformación que nos lleve de los puntos  $z_1, z_2, z_3$  a  $w_1, w_2, w_3$  respectivamente será  $\overline{S_2}^{-1}\overline{S_1}$ . Así tenemos que la aplicación

$$\begin{aligned}\overline{S_1}(z) &= \begin{pmatrix} z_1 - z_3 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z - z_2 \\ z - z_3 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} z + \sec \theta + \tan \theta \\ z - \tan \theta + \sec \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} iz + i \sec \theta + i \tan \theta \\ z - \tan \theta + \sec \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

envía los puntos  $z_1, z_2, z_3$  a  $1, 0, \infty$  respectivamente.

Por otra lado

$$\begin{aligned}\overline{S_2}(z) &= \begin{pmatrix} w_1 - w_3 \\ w_1 - w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z - w_2 \\ z - w_3 \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} z - \sec \theta - \tan \theta \\ z - \tan \theta + \sec \theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Por otro lado, la inversa de la aplicación  $\overline{S_2}(z)$  es

$$\overline{S_2}(z)^{-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}i - \frac{i}{2} \csc \theta\right) z + \frac{1}{2} \csc \theta + \frac{1}{2}}{-\left(\frac{1}{2} \cot \theta\right) iz + \frac{1}{2} \cot \theta}$$

finalmente encontramos la composición  $\overline{S_2}^{-1} \circ \overline{S_1}$ .

$$\begin{aligned}\overline{S_2}^{-1} \circ \overline{S_1} &= \frac{\left(\frac{1}{2}i - \frac{i}{2} \csc \theta\right) \begin{pmatrix} iz + i \sec \theta + i \tan \theta \\ z - \tan \theta + \sec \theta \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \csc \theta + \frac{1}{2}}{-\left(\frac{1}{2} \cot \theta\right) i \begin{pmatrix} iz + i \sec \theta + i \tan \theta \\ z - \tan \theta + \sec \theta \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cot \theta} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}i - \frac{i}{2} \csc \theta\right) (iz + i \sec \theta + i \tan \theta) + \left(\frac{1}{2} \csc \theta + \frac{1}{2}\right) (z - \tan \theta + \sec \theta)}{\frac{1}{2} \cot \theta (z + \sec \theta + \tan \theta) + \frac{1}{2} \cot \theta (z - \tan \theta + \sec \theta)} \\ &= \frac{\csc \theta z + \sec \theta \csc \theta - \tan \theta}{\cot \theta z + \csc \theta} \\ &= \frac{\csc \theta z + \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\cot \theta z + \csc \theta} = \frac{\csc \theta z + \cot \theta}{\cot \theta z + \csc \theta}.\end{aligned}$$

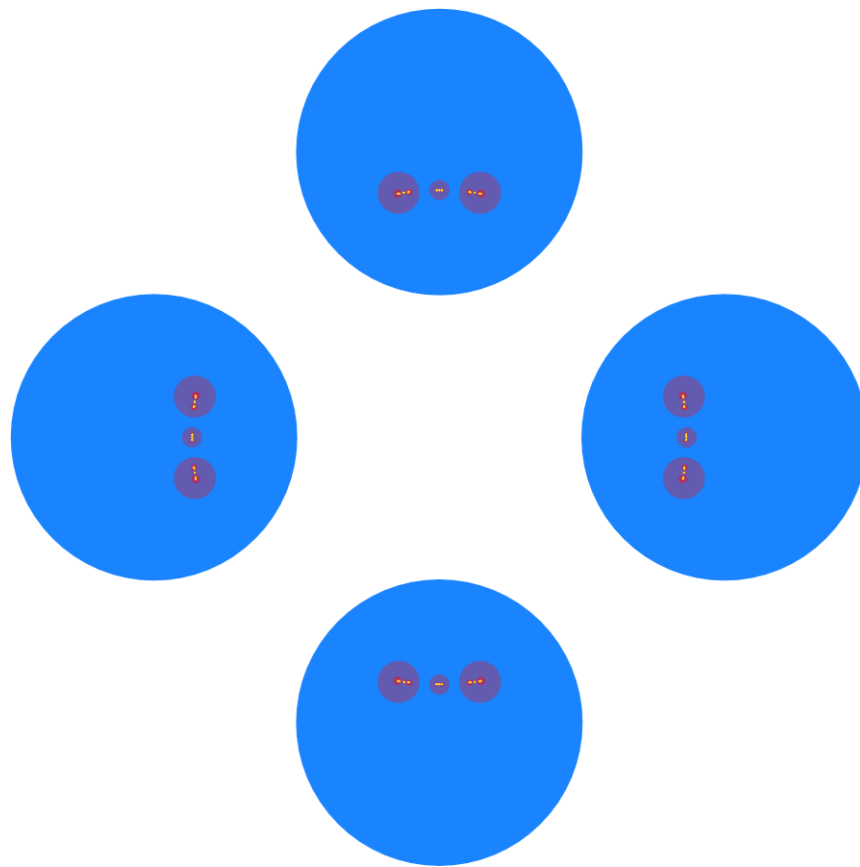
Por lo tanto la transformación la podemos escribir como

$$b = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

De manera similar obtenemos que la transformación  $a$  estaría dada por

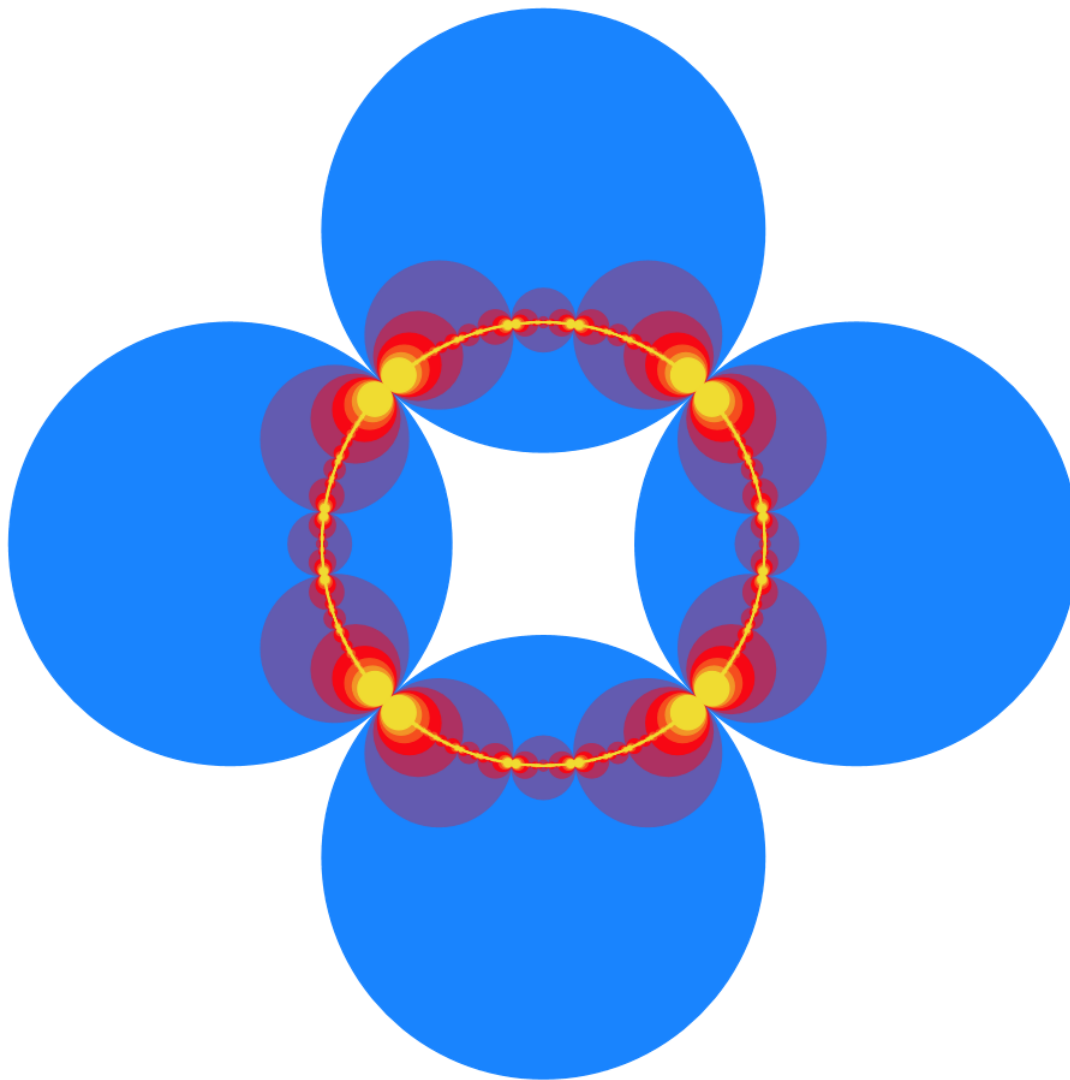
$$a = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} 1 & i \cos \theta \\ -i \cos \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

La siguiente figura se obtiene de la corrida del algoritmo **BFS**, con  $\theta = \frac{\pi}{6}$  y se presentan 7 niveles del árbol de palabras, es decir  $4 \cdot 3^6 - 1 = 2915$  círculos.



**Figura 3.5:** Grupo  $\frac{\pi}{6}$  - Schottky.

Por otro lado, si el ángulo ahora es  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , obtenemos la siguiente figura, siempre con 7 niveles e implementado el algoritmo **BFS**.



**Figura 3.6:** Grupo  $\frac{\pi}{4}$  - Schottky.

Los casos anteriores son ejemplos de grupos Kleinianos, donde para el caso en que los cuatro círculos tengan el mismo radio y estén ubicados en posiciones simétricas, su conjunto límite estará contenido en una circunferencia, para el caso que los 4 círculos sean tangentes, el conjunto límite será una circunferencia, es decir la curva cerrada simple, más elemental, en este caso el grupo Kleiniano es llamado grupo Fuchsiano, en honor a Lázaros Fuchs<sup>4</sup>, ahora bien, podemos considerar más generadores o considerar diferentes formas para los círculos, por ejemplo ¿Qué sucede cuando los círculos son tangentes? pero una pareja de ellos tiene radio diferente, o ¿Qué sucede cuando 3 de ellos tienen el mismo radio y siguen siendo tangentes?, bueno en principio lo que podríamos esperar en el caso de que sean tangente, es que el conjunto límite sea una curva cerrada simple, esto

<sup>4</sup>Lazarus Fuchs, (1833-1902). Nació cerca de un lugar que hoy en día se conoce como Poznan en Poland, Fuchs fue un miembro aprendiz del círculo matemático de Berlín. Estudió sistemáticamente los sistemas de ecuaciones diferenciales en el plano complejo, investigando como una solución podría cambiar cuando hace un circuito alrededor de una singularidad, cuando un término en la ecuación toma el  $\infty$  (como por ejemplo  $\frac{1}{z}$  en  $z = 0$ ).

es, una curva de Jordan; si no son tangentes lo que habría que esperar es que el conjunto límite esté contenido en una curva de Jordan. En la siguiente sección abordaremos los casos planteados. Otro punto importante que debemos de considerar es que estos son nada más algunos casos particulares de grupos Kleinianos y que no vamos a considerar los casos más exóticos de grupos Kleinianos, pero si lo suficientemente interesantes, para describir algunas propiedades.

## 3.2. Grupos Quasifuchsianos.

En la sección anterior, describimos un ejemplo de grupo al que llamamos Fuchsiano, el cual consistía en un grupo cuyo conjunto límite estaba contenido en un círculo, ahora lo que nos va a interesar es que el conjunto límite esté contenido en "algo" que no sea una circunferencia, pero lo suficientemente cercano a una; al igual que los casos anteriores, vamos a construir algunos ejemplos y luego entrar con la definición formal.

**Definición 3.2.1.** *Mediante el proceso de construcción de círculos emparejados, un grupo cuyo conjunto límite sea una curva de Jordan será llamado grupo Quasifuchsiano.*

**Definición 3.2.2.** *Al complemento del conjunto límite le llamaremos conjunto ordinario (ó conjunto regular del grupo).*

Por otro lado tendremos que el conjunto límite de un grupo Quasifuchsiano, siempre separa el conjunto ordinario en dos partes; el "adentro" y el "afuera".

**Definición 3.2.3.** *Sean,  $a$  y  $b$  dos transformaciones de Möbius, el conmutador de  $a$  y  $b$  se define como  $abAB$ .*

La palabra  $abAB$  es muy especial, ya que si tenemos que  $ab = ba$ , entonces

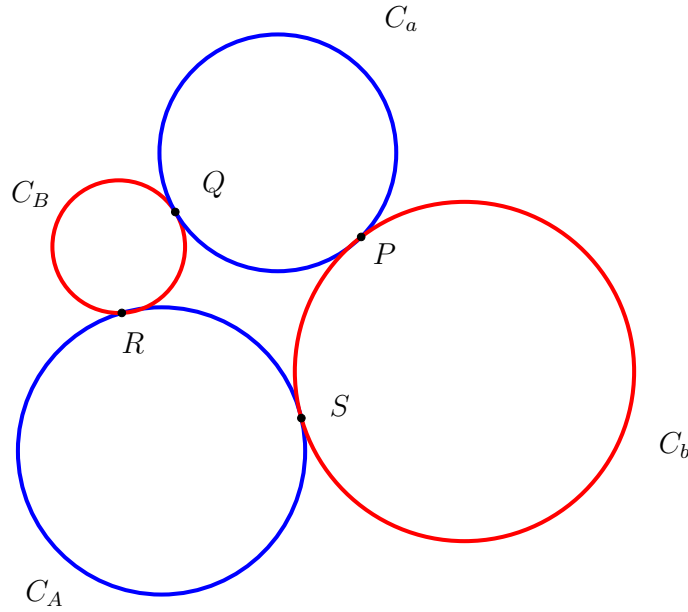
$$\begin{aligned} abAB &= baAB \\ &= bB \\ &= I \end{aligned}$$

por lo que hasta en cierto sentido, el conmutador mide hasta en qué punto  $a$  y  $b$  conmutan, por esta razón es llamado conmutador de  $a$  y  $b$ .

### 3.2.1. Requisitos para emparejar discos tangentes.

Ahora la tarea será que tenemos que emparejar discos, de forma que estos sean tangentes, por tanto deberemos de ser cuidadosos con los puntos de tangencia si queremos obtener los enlaces correctos, para esto, vamos a considerar lo siguientes requisitos

1. Un requisito necesario para que el conjunto límite sea una curva; es que los puntos tangentes sean mapeados de acuerdo a las reglas, con respecto a la figura 3.7



**Figura 3.7:** Círculos tangentes iniciales.

$$\begin{aligned} a(R) &= Q & b(R) &= S \\ a(S) &= P & b(Q) &= P \end{aligned}$$

por otro lado, haciendo uso de las transformaciones inversas tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} A(Q) &= R & B(S) &= R \\ A(P) &= S & B(P) &= Q \end{aligned}$$

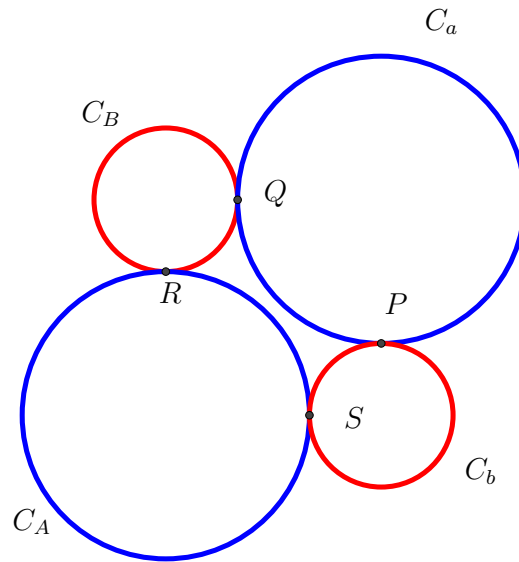
2. El conmutador de  $a$  y  $b$  debe ser parabólico. Supongamos que el conmutador no fuera parabólico, entonces la palabra  $abAB$  podría ser elíptica o loxodrómica; supongamos que fuera loxodrómica, entonces la palabra tendría dos puntos fijos, en los cuales tenemos que el punto  $P$  ya lo es, ya que

$$\begin{aligned} a(b(A(B(P)))) &= a(b(A(Q))) \\ &= a(b(R)) \\ &= a(S) \\ &= P \end{aligned}$$

Esto podría evitar que las imágenes de los círculos de Schottky se encojan en  $P$ . Por tanto la transformación debe ser parabólica. Ahora veamos con un ejemplo que la condición 2, no se obtiene inmediatamente de la condición 1, para esto consideramos la siguiente configuración de círculos tangentes

$$\begin{aligned} C_A : & (x+1)^2 + (y+2)^2 = 4 \\ C_a : & (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4 \\ C_B : & (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ C_b : & (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1 \end{aligned}$$

la configuración se muestra en la siguiente figura



**Figura 3.8:** Configuración de círculos tangentes.

Ahora para encontrar la transformación  $a$  que empareja  $C_A$  y  $C_a$  y tomamos 3 puntos de cada una de ellas y encontramos la transformación  $\bar{S}_1$ , que emparejará los puntos  $z_1, z_2, z_3$  de  $C_A$  con los puntos  $1, 0, \infty$ , los cuales son

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 \\ z_2 &= 1 - 2i \\ z_3 &= -1 - 4i \end{aligned}$$

mientras que los puntos de  $C_a$   $w_1, w_2, w_3$  son

$$\begin{aligned} w_1 &= i \\ w_2 &= 2 - i \\ w_3 &= 4 + i \end{aligned}$$

y debemos encontrar una transformación  $\bar{S}_2$  que nos lleve de  $w_1, w_2, w_3$  a  $1, 0, \infty$  respectivamente, así la transformación buscada  $a$  estaría dada por  $\bar{S}_2^{-1} \circ \bar{S}_1$ . Para el caso de la transformación  $b$ , los puntos de la circunferencia  $C_B$  estarían dados por

$$\begin{aligned} z_1 &= i \\ z_2 &= -1 \\ z_3 &= 2i \end{aligned}$$



mientras que para la circunferencia  $C_b$  tomaremos

$$\begin{aligned} w_1 &= -i \\ w_2 &= 1 - 2i \\ w_3 &= 2 - 3i \end{aligned}$$

y de manera similar al caso anterior encontramos la transformación  $b$ , las cuales estarían dadas por

$$a = \frac{(\frac{5}{6}i - \frac{5}{4})z + \frac{19}{6}i + 1}{(\frac{1}{3} + \frac{1}{6})z + i - \frac{1}{6}} \quad \text{y} \quad b = \frac{(\frac{-3}{10}i - \frac{3}{5})z + \frac{27}{10}i + \frac{2}{5}}{(\frac{-4}{5}i - \frac{1}{10})z + \frac{1}{5}i - \frac{11}{10}}$$

luego la transformación, asociada al conmutador  $abAB$  estaría dada por

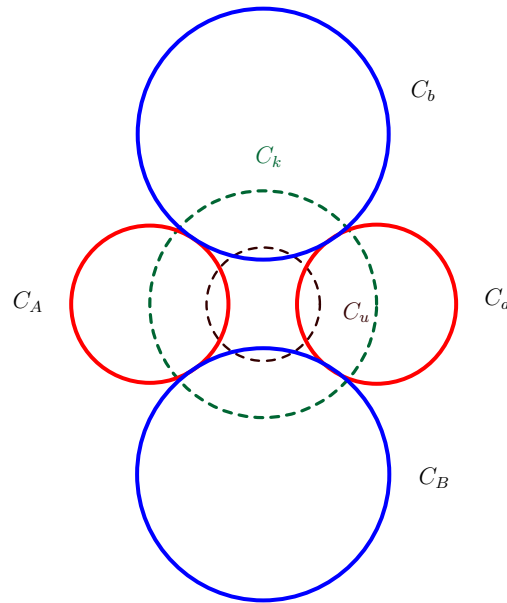
$$abAB = \begin{pmatrix} -\frac{2443}{260}i - \frac{10981}{1560} & -\frac{4649}{520}i + \frac{6583}{780} \\ -\frac{4723}{1560}i - \frac{311}{260} & -\frac{1331}{780}i + \frac{1487}{520} \end{pmatrix}$$

donde su traza estaría dada por  $-\frac{433}{39}i - \frac{163}{39}$ , lo que significa que la transformación es loxodrómica, así vemos que el obtener un conmutador parabólico es independiente del primer requisito.

3. Como el conmutador es parabólico, su traza es 2 ó -2 (suponiendo siempre que su determinante es 1), para obtener un grupo Quasifuchsiano con conmutador parabólico,  $\text{Tr}(abAB)$  siempre debe de ser  $-2$ . Más adelante justificaremos el motivo de que la traza del conmutador tiene que ser  $-2$ .

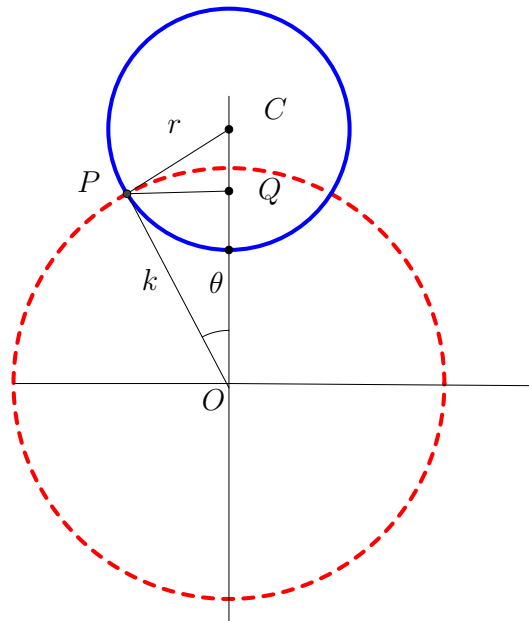
### 3.2.2. Fórmulas para emparejar grupos de Schottky, con círculos tangentes.

En esta parte describiremos el proceso para conseguir nuestros círculos iniciales y transformaciones de Möbius  $a$  y  $b$ , trabajaremos siempre con dos generadores. Vamos a considerar primeramente el caso donde cada par de círculos emparejados tienen el mismo radio. Anteriormente los círculos  $C_B$  y  $C_b$  fueron elegidos de manera que sean ortogonales al círculo unitario, al igual que los círculos  $C_A$  y  $C_a$ , ahora lo que haremos es considerar los círculos  $C_A$  y  $C_a$  tangentes a un círculo centrado en el origen de radio  $k$ , tal como indica la siguiente figura:



**Figura 3.9:** Círculos iniciales tangentes con radios distintos.

Para la configuración de círculos de la figura anterior, ya encontramos la forma de tanto los círculos,  $C_B$  y  $C_b$  como la forma de la transformación  $b$ . Ahora haremos algo similar, pero con los discos azules  $C_A$  y  $C_a$ , para esto consideremos la siguiente figura:



**Figura 3.10:** Círculo ortogonal a uno círculo de radio  $k$ .

En base a la construcción de la figura 3.10, los triángulos  $OPQ$  y  $PQC$  son semejantes y por tanto obtenemos las siguientes relaciones de semejanza:

$$\frac{k}{r} = \frac{OQ}{PQ} = \frac{PQ}{QC}$$

donde

$$\frac{k}{r} = \frac{k \cos \theta}{k \sin \theta} = \frac{k \sec \theta}{QC}$$

de donde obtenemos

$$\frac{k}{r} = \cot \theta$$

entonces  $k = r \cot \theta$  ó  $r = k \tan \theta$ . Luego

$$QC = r \sin \theta = k \tan \theta \sin \theta = \frac{k(1 - \cos^2 \theta)}{\cos \theta} = k(\sec \theta - \cos \theta).$$

Luego las coordenadas del centro de la circunferencia  $C_a$  serían  $(0, k \sec \theta)$ , así

$$\begin{aligned} C_a : \quad x^2 + (y - k \sec \theta)^2 &= k^2 \tan^2 \theta \\ C_A : \quad x^2 + (y + k \sec \theta)^2 &= k^2 \tan^2 \theta \\ C_b : \quad (x - \sec \theta)^2 + y^2 &= \tan^2 \theta \\ C_B : \quad (x + \sec \theta)^2 + y^2 &= \tan^2 \theta \end{aligned}$$

Ahora veamos la condición de tangencia para  $C_a$  y  $C_b$ , esto es, la distancia de los centros de éstas circunferencias debe ser igual a la suma de los respectivos radios.

$$\begin{aligned} \sqrt{\sec^2 \theta + k^2 \sec^2 \theta} &= k \tan \theta + \tan \theta \\ \sec^2 \theta + k^2 \sec^2 \theta &= (k \tan \theta + \tan \theta)^2 \\ &= k^2 \tan^2 \theta + 2k \tan^2 \theta + \tan^2 \theta \end{aligned}$$

Así

$$k^2 - 2k \tan^2 \theta + 1 = 0$$

donde  $k = \tan^2 \theta \pm \sec \theta \sqrt{\tan^2 \theta - 1}$ . Para el emparejamiento entre  $C_a$  y  $C_A$  tomaremos los puntos

$$\begin{aligned} z_1 &= k \sec \theta + k \tan \theta i \\ z_2 &= k \sec \theta - k \tan \theta i \\ z_3 &= k \tan \theta + k \sec \theta i \end{aligned}$$

que están sobre  $C_a$  mientras que para  $C_A$  tomaremos

$$\begin{aligned} w_1 &= -k \sec \theta + k \tan \theta i \\ w_2 &= -k \sec \theta - k \tan \theta i \\ w_3 &= k \tan \theta - k \sec \theta i \end{aligned}$$

Luego obtenemos la transformación  $\bar{S}_1$  que transforma  $w_1, w_2, w_3$  en  $1, 0, \infty$  respectivamente y  $\bar{S}_2$  que transforma  $z_1, z_2, z_3$  en  $1, 0, \infty$  respectivamente las cuales están dadas por

$$\bar{S}_1(z) = \left( \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \right) \left( \frac{z - w_2}{z - w_3} \right) \quad \text{y} \quad \bar{S}_2(z) = \left( \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right) \left( \frac{z - z_2}{z - z_3} \right)$$

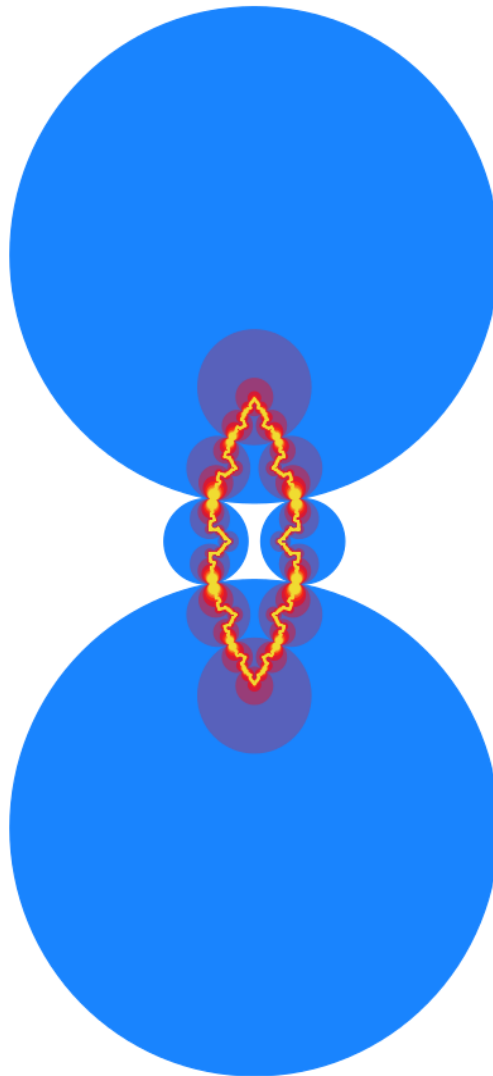
luego la transformación buscada sería

$$\bar{S}(z) = \bar{S}_2^{-1} \circ \bar{S}_1$$

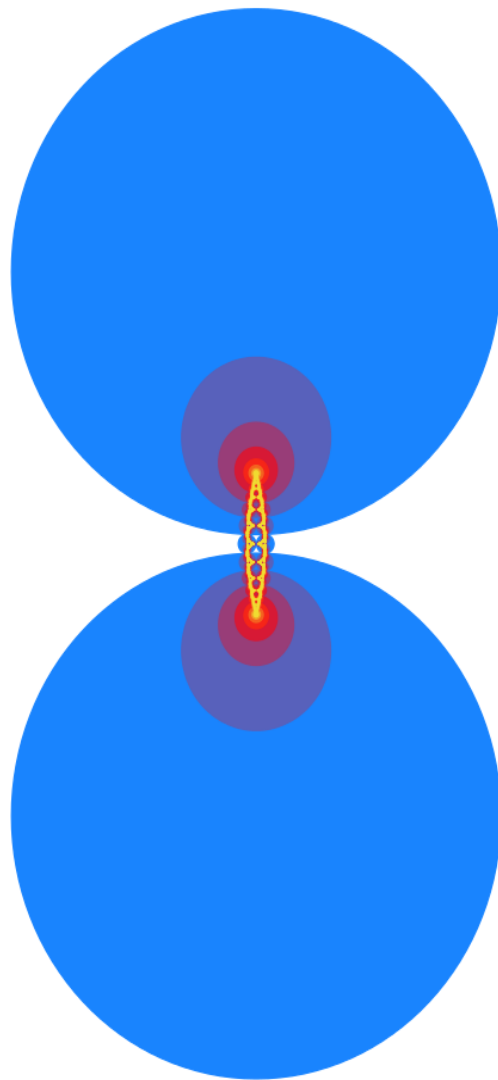
Luego la transformación buscada sería

$$a(z) = \frac{\csc \theta z + ik \cot \theta}{-\frac{i \csc \theta}{k} + \cot \theta}$$

Las siguientes figuras corresponden a 7 niveles del algoritmo BFS



**Figura 3.11:** Grupo Quasifuchsiano,  $\theta = \pi/3$ .



**Figura 3.12:** Grupo Quasifuchsiano,  $\theta = 5\pi/12$ .

### 3.2.3. Grupos conjugados.

Una nueva forma más sencilla de construir imágenes por medio de imágenes ya creadas, es conjugar las que ya tenemos. Recordemos que los medios de conjugación ven la misma imagen, pero desde un punto de vista diferente, la imagen que obtenemos después de una transformación, esto es una coordenada que cambia en la esfera de Riemann. Al reemplazar una transformación por una conjugada, modificamos la matriz, pero el comportamiento dinámico sigue siendo el mismo. Hay dos etapas en la conjugación por una transformación  $M$ , reemplazando todo punto  $z$  por el punto transformado,  $\hat{z} = M(z)$  y reemplazar una transformación  $T$  por su conjugado  $\hat{T} = MTM^{-1}$ . Supongamos que queremos conjugar un grupo formado por el emparejamiento de cuatro círculos tangentes, la imagen de cada uno de los 4 círculos de la configuración inicial bajo una transformación de Möbius  $M$  es un círculo; además ya que los 4 círculos  $C_a, C_b, C_A$  y  $C_B$  forman una cadena tangente, la cadena tangente se mantiene para los círculos  $M(C_a), M(C_b), M(C_A)$  y  $M(C_B)$ . Las coordenadas cambian, ¿Cómo conjugamos el grupo? la respuesta es que debemos reemplazar toda transformación  $g$  en  $G$  por la respectiva transformación conjugada  $\hat{g} = MgM^{-1}$ , así los nuevos generadores estarían dados por

$$\hat{a} = MaM^{-1} \quad \text{y} \quad \hat{b} = MbM^{-1}$$

donde el generador  $\hat{a}$  empareja  $M(C_A)$  con  $M(C_a)$ , ya que

$$\hat{a}(M(C_A)) = MaM^{-1}(M(C_A)) = Ma(C_A) = M(C_a).$$

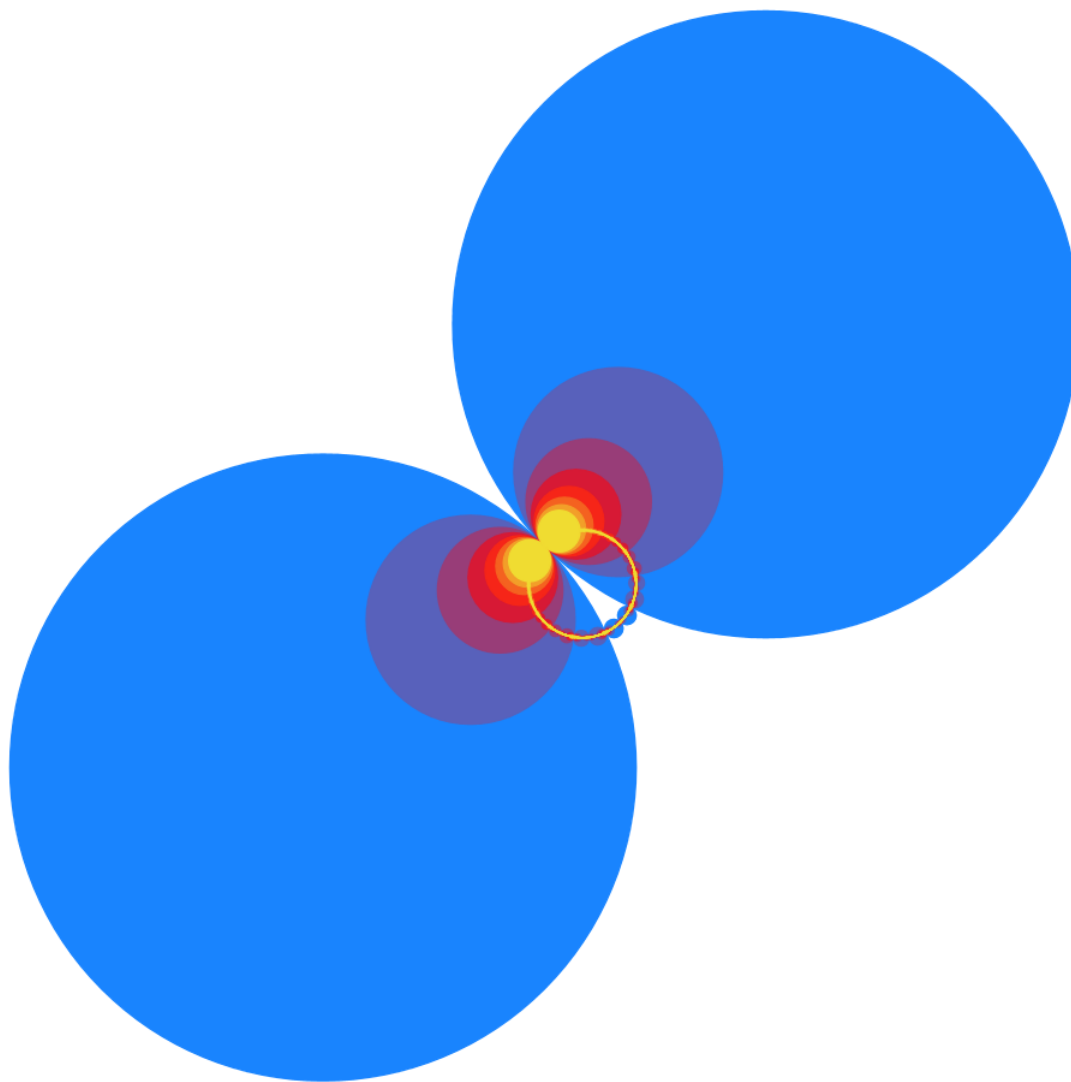
Para estos casos vamos a representar  $M(C_a) = C_{\hat{a}}$  para indicar que  $M(C_A)$  es el círculo de la nueva cadena, emparejada por los nuevos generadores. Mediante la nueva notación

$$\hat{a}(C_{\hat{A}}) = C_{\hat{a}}.$$

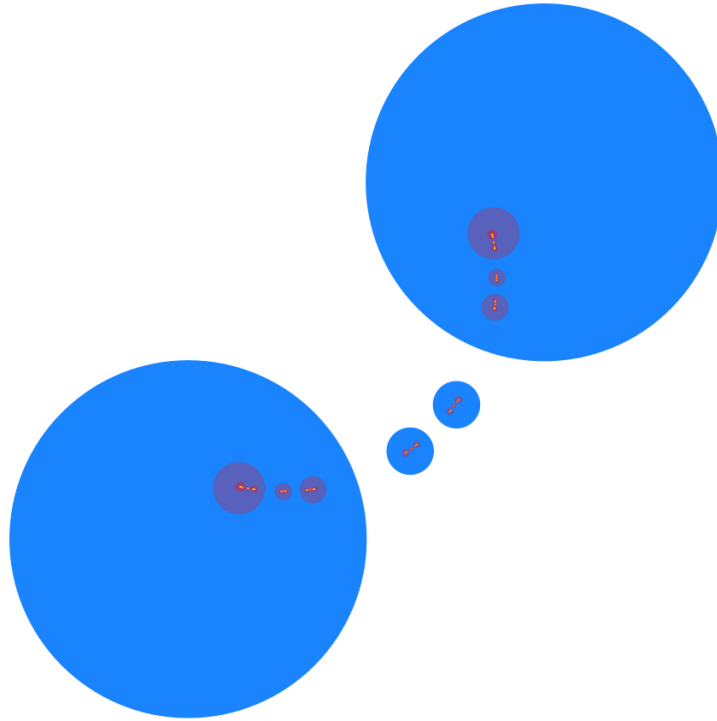
**Definición 3.2.4.** *Dado un grupo  $G$  de transformaciones de Möbius, a todas los elementos de la forma  $MgM^{-1}$  le llamaremos conjugado del grupo  $G$ , para alguna transformación  $M \in G$  y  $\forall g \in G$  lo denotaremos por  $MgM^{-1}$ .*

Las siguientes figuras corresponden al conjugado de la cadena de tangente de círculos, de la subsección 3.1.4

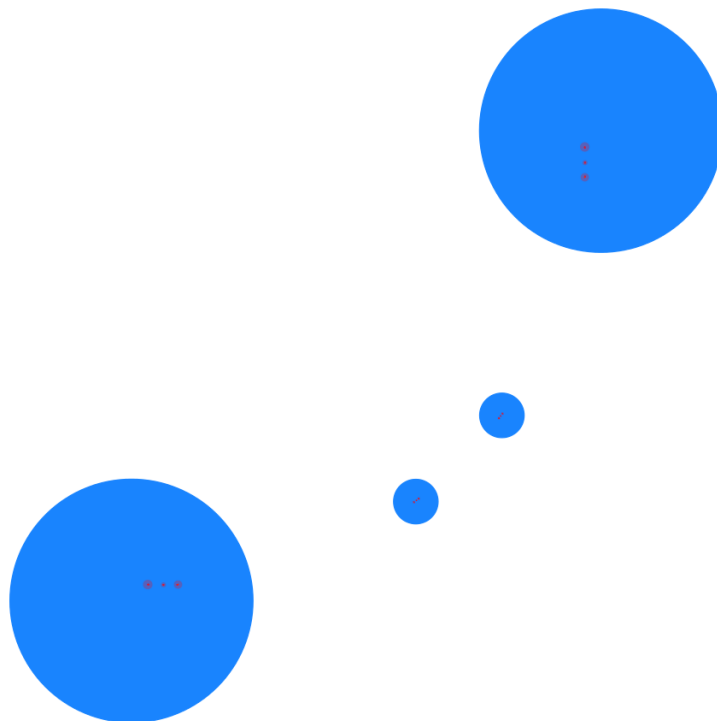
Vamos a conjugar con la transformación  $M = \frac{(1-i)z+1}{z+1+i}$ ,



**Figura 3.13:** Grupo conjugado,  $\theta = \pi/4$ ,  $M = \frac{(1-i)z+1}{z+1+i}$ .



**Figura 3.14:** Grupo conjugado,  $\theta = \pi/6$ ,  $M = \frac{(1-i)z+1}{z+1+i}$ .



**Figura 3.15:** Grupo conjugado,  $\theta = \pi/12$ ,  $M = \frac{(1-i)z+1}{z+1+i}$ .



Para el caso de grupos Fuchsianos, estos pueden ser conjugados a un subgrupo del semiplano superior. La traza de una matriz es invariante mediante conjugación y la traza de cualquier matriz del semiplano superior es real. En realidad como veremos en la siguiente sección, es posible expresar la traza de cualquier elemento en un grupo con dos generadores como un polinomio en  $\text{Tr } a$ ,  $\text{Tr } b$  y  $\text{Tr } ab$ .

### 3.3. Fórmulas para trazas.

Nuestro buen amigo Félix Klein, descubrió una bella, pero complicada fórmula para encontrar la traza del conmutador, en general, tenemos

$$\text{Tr}(abAB) = (\text{Tr } a)^2 + (\text{Tr } b)^2 + (\text{Tr } ab)^2 - \text{Tr } a \cdot \text{Tr } b \cdot \text{Tr } ab - 2.$$

Por otro lado, si la traza del conmutador es igual  $-2$ , obtenemos otra interesante relación, conocida como la **identidad de Markov**:

$$(\text{Tr } a)^2 + (\text{Tr } b)^2 + (\text{Tr } ab)^2 = \text{Tr } a \cdot \text{Tr } b \cdot \text{Tr } ab.$$

La identidad de Markov<sup>5</sup>, puede verse como una ecuación cuadrática en términos de las trazas de  $a$  y  $b$ . En otras palabras,  $\text{Tr } ab$  sería una de las raíces de la ecuación

$$x^2 - \text{Tr } a \text{Tr } b x + (\text{Tr } a)^2 + (\text{Tr } b)^2 = 0$$

**Lema 3.3.1.** Sean  $A, B$  dos matrices cualesquiera (de cualquier orden). Entonces  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

*Demostración.* Sean  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$  matrices de  $n \times n$ , con entradas complejas, entonces la traza de la matriz  $AB$  está dada por

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} \\ &= \text{Tr}(BA) \end{aligned}$$

■

El lema anterior nos da como consecuencias:

- $\text{Tr}(ABA^{-1}) = \text{Tr } B$ .
- Sea  $M$  una matriz de  $2 \times 2$  con determinante 1. Entonces

$$\text{Tr } M = \text{Tr } M^{-1}. \tag{3.1}$$

<sup>5</sup>Andréi Andréyevich Markov fue un matemático ruso conocido por sus trabajos en la teoría de los números y la teoría de probabilidades. Markov nació en Riazán, Rusia.

c) Sea  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  con  $ad - bc = 1$  y  $N$  una matriz de  $2 \times 2$ , entonces

$$\operatorname{Tr}MN + \operatorname{Tr}M^{-1}N = \operatorname{Tr}M \cdot \operatorname{Tr}N.$$

*Demostración.* Puesto que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces la inversa de  $M$ , está dada por

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

luego

$$M + M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (a + d)I = \operatorname{Tr}(M)I$$

ahora multiplicando por la derecha por la matriz  $N$  obtenemos

$$MN + M^{-1}N = (\operatorname{Tr}M) \cdot N$$

finalmente obteniendo las trazas a ambos lados tenemos

$$\operatorname{Tr}MN + \operatorname{Tr}M^{-1}N = \operatorname{Tr}M \cdot \operatorname{Tr}N.$$

■

d) Identidad de Markov.

Sean  $a$  y  $b$  dos transformaciones de Möbius, entonces

$$\operatorname{Tr}(abAB) = (\operatorname{Tr}a)^2 + (\operatorname{Tr}b)^2 + (\operatorname{Tr}ab)^2 - \operatorname{Tr}a \cdot \operatorname{Tr}b \cdot \operatorname{Tr}ab - 2.$$

*Demostración.* Aplicando el lema c) a los pares  $(a, b)$ ,  $(a, bAB)$ ,  $(Ab, AB)$  y  $(B, B)$  obtenemos las siguientes condiciones

$$(a, b): \quad \operatorname{Tr}(ab) + \operatorname{Tr}(Ab) = \operatorname{Tr}(a) \cdot \operatorname{Tr}(b). \quad (3.2)$$

$$(a, bAB): \quad \operatorname{Tr}(abAB) + \operatorname{Tr}(AbAB) = \operatorname{Tr}(a) \cdot \operatorname{Tr}(baB). \quad (3.3)$$

$$(Ab, AB): \quad \operatorname{Tr}(AbAB) + \operatorname{Tr}(B^2) = \operatorname{Tr}(Ab) \cdot \operatorname{Tr}(AB). \quad (3.4)$$

$$(B, B): \quad \operatorname{Tr}(B^2) + \operatorname{Tr}(I) = (\operatorname{Tr}B)^2 \quad (3.5)$$

Partimos de la ecuación 3.3 y despejamos la traza del conmutador

$$\operatorname{Tr}(abAB) = \operatorname{Tr}(a) \cdot \operatorname{Tr}(baB) - \operatorname{Tr}(AbAB)$$

luego despejamos  $\operatorname{Tr}(AbAB)$  de la ecuación 3.4 obteniendo

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(abAB) &= \operatorname{Tr}(a) \cdot \operatorname{Tr}(baB) - (\operatorname{Tr}(Ab) \cdot \operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(B^2)) \\ &= (\operatorname{Tr}a)^2 - \operatorname{Tr}(Ab) \cdot \operatorname{Tr}(AB) + \operatorname{Tr}(B^2); \quad \operatorname{Tr}(baB) = a \quad \text{y sustituyendo 3.2, 3.4 y 3.5} \\ &= (\operatorname{Tr}a)^2 - (\operatorname{Tr}(a) \cdot \operatorname{Tr}(b) - \operatorname{Tr}(ab)) \cdot \operatorname{Tr}(AB) + (\operatorname{Tr}(B))^2 - 2 \\ &= (\operatorname{Tr}a)^2 + (\operatorname{Tr}(B))^2 + \operatorname{Tr}(ab) \cdot \operatorname{Tr}(AB) - (\operatorname{Tr}(a) \cdot \operatorname{Tr}(b) \operatorname{Tr}(AB) - 2) \\ &= (\operatorname{Tr}a)^2 + (\operatorname{Tr}(b))^2 + (\operatorname{Tr}(ab))^2 - (\operatorname{Tr}(a) \cdot \operatorname{Tr}(b) \cdot \operatorname{Tr}(ab) - 2). \end{aligned}$$

■

### 3.4. Cuando la traza del conmutador es 2.

En las condiciones de la sección 3.2 con los requisitos

1. Emparejamiento adecuado de los puntos de tangencia

$$a(R) = Q \quad b(R) = S,$$

$$a(S) = P \quad b(Q) = P$$

donde la transformación  $a$  empareja los Discos  $D_A$  y  $D_a$  y la transformación  $b$  empareja los discos  $D_B$  y  $C_b$ .

2. La traza del conmutador debe ser parabólica.

3. La traza del conmutador debes ser  $-2$ .

En esta sección demostraremos que la traza del conmutador no puede ser 2, para eso consideremos el siguiente lema.

**Lema 3.4.1.** *Si  $\text{Tr}(abAB) = 2$ , entonces  $a$  y  $b$  tienen un punto fijo común.*

*Demostración.* Supongamos que  $a$  y  $b$  son dos transformaciones de Möbius. Si modificamos el signo de  $a$ , multiplicando por  $-1$  todas sus entradas, también modificamos el signo de las entradas de su respectiva inversa  $A$ , lo cual significa que el conmutador  $abAB$  no cambia ya que  $(-a)^{-1} = -A^{-1}$  por tanto

$$(-a)b((-a)^{-1})B = (-1)ab(-1)A^{-1}B = (-1)(-1)abAB = abAB.$$

Supongamos que  $\text{Tr}(abAB) = 2$ , entonces  $abAB$  tiene un único punto fijo, que debido a la configuración inicial, el único punto fijo para el conmutador sería el punto  $P$ , entonces tendríamos que las transformaciones  $a$  y  $b$  también dejarían fijo el punto  $P$ , ¿Cómo podemos chequear esto? Supongamos primeramente que  $a$  tienen dos puntos fijos; por conjugación  $a = kz$  y  $b(z) = \frac{a_1z + a_2}{a_3z + a_4}$ , ahora obtenemos la traza de  $abAB$ . Vamos a utilizar la fórmula de Markov.

$$\text{Tr}(abAB) = (\text{Tr } a)^2 + (\text{Tr } b)^2 + (\text{Tr } ab)^2 - \text{Tr } a \cdot \text{Tr } b \cdot \text{Tr } ab - 2$$

para esto tenemos que las trazas de las matrices  $a$ ,  $b$  y  $ab$  son

$$\begin{aligned} \text{Tr}(a) &= \frac{k+1}{\sqrt{k}} \\ \text{Tr}(b) &= \frac{a_1 + a_4}{\sqrt{a_1a_4 - a_2a_3}} \\ \text{Tr}(ab) &= \frac{ka_1 + a_4}{\sqrt{k}\sqrt{(a_1a_4 - a_2a_3)}} \end{aligned}$$

sustituyendo en la fórmula tenemos

$$\begin{aligned}
Tr(abAB) &= \frac{(k+1)^2}{k} + \frac{(a_1+a_4)^2}{a_1a_4 - a_2a_3} + \frac{(ka_1+a_4)^2}{k(a_1a_4 - a_2a_3)} - \frac{(k+1)(a_1+a_4)(ka_1+a_4)}{k(a_1a_4 - a_3a_2)} - 2 \\
&= \frac{((k+1)^2 - 2k)(a_1a_4 - a_3a_2) + k(a_1+a_4)^2 + (ka_1+a_4)^2 - (k+1)(a_1+a_4)(ka_1+a_4)}{k(a_1a_4 - a_3a_2)} \\
&= \frac{(k^2+1)(a_1a_4 - a_2a_3) + 2ka_1a_4 - k^2a_1a_4 - a_1a_4}{k(a_1a_4 - a_2a_3)} \\
&= \frac{-k^2a_2a_3 + 2ka_1a_4 - a_2a_3}{k(a_1a_4 - a_2a_3)}
\end{aligned}$$

ahora encontramos

$$Tr(abAB) - 2$$

$$Tr(abAB) - 2 = \frac{-k^2a_2a_3 + 2ka_1a_4 - a_2a_3 - 2k(a_1a_4 - a_2a_3)}{k(a_1a_4 - a_2a_3)} = \frac{-a_2a_3(k-1)^2}{k(a_1a_2 - a_2a_3)}.$$

Entonces  $Tr(abAB) = 2$  implica que  $a_2 = 0$  ó  $a_3 = 0$  ó  $k = 1$ . Analicemos cada caso.

a) Caso  $a_2 = 0$ .

Como  $a_2 = 0$  tenemos que

$$b(z) = \frac{a_1z}{a_3z + a_4}$$

tenemos que sus puntos fijos serían  $z = 0$  y  $z = \frac{a_1 - a_4}{a_3} a_3 \neq 0$  en este caso notamos que tanto  $a$  y  $b$  tienen  $z = 0$  como punto fijo.

b) Caso  $a_3 = 0$ .

Como  $a_3 = 0$  tenemos que  $b(z) = \frac{a_1z + a_2}{a_4}$ .

Suponiendo que  $a_4 \neq 0$  tendríamos que  $\infty$  sería un punto fijo tanto de  $a$  y  $b$ , por otro lado, el otro punto fijo sería  $z = \frac{-a_2}{a_1 - a_4}$ .

c) Finalmente si  $k = 1$  tenemos que  $a(z) = z$ ,  $a$  sería la aplicación identidad, por tanto los puntos fijos de  $b$  también son puntos fijos de  $a$ .

Por otro lado si  $a$  tiene un único punto fijo; por conjugación se puede representar con  $a(z) = z + 1$ , supongamos como en el caso anterior que  $b(z) = \frac{b_1z + b_2}{b_3z + b_4}$ . Así las matrices asociadas son

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Normalizando la transformación  $b$ :

$$b = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{\sqrt{b_1b_4 - b_2b_3}} & \frac{b_2}{\sqrt{b_1b_4 - b_2b_3}} \\ \frac{b_3}{\sqrt{b_1b_4 - b_2b_3}} & \frac{b_4}{\sqrt{b_1b_4 - b_2b_3}} \end{pmatrix}$$

por tanto la traza del conmutador  $abAB$  estaría dado por

$$\frac{2b_1b_4 - b_2^2}{b_1b_4 - b_2b_3}$$

ahora vemos que sucede con  $\text{Tra}(abAB) - 2$ .

$$\begin{aligned} \text{Tra}(abAB) - 2 &= \frac{2b_1b_4 - b_2^2}{b_1b_4 - b_2b_3} - 2 \\ &= \frac{2b_2b_3 - b_2^2}{b_1b_4 - b_2b_3} = 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$b_2(2b_3 - b_2) = 0$$

así, tenemos que  $b_2 = 0$  y  $b_3 = 0$ , por tanto la transformación buscada  $b(z)$  estaría dada por

$$b(z) = \frac{b_1z}{b_4} \quad b_1, b_4 \neq 0$$

la cual pues tiene también a  $\infty$  como punto fijo. ■

Ahora bien, tenemos que si la traza del conmutador es 2, las transformaciones  $a$  y  $b$  tienen un punto fijo en común, pero esto no puede ser dados los requisitos de emparejamiento, ya que las transformaciones nunca tendrían puntos fijos comunes, ya que los puntos fijos atractores estarían dentro de  $D_a$  y  $D_b$  respectivamente.

### 3.5. Una familia especial de círculos tangentes.

La identidad de Markov, se vuelve de gran utilidad ya que podemos verificar directamente que para la configuración de cuatro círculos tangentes, donde los círculos emparejados tienen el mismo radio cumple que la traza del conmutador de las transformaciones de Möbius tiene traza igual  $-2$ . La configuración de dichos círculos emparejados se puede generalizar un poco: Vamos a considerar las siguientes circunferencias, en alusión a la construcción del ejemplo en la sección 3.1.4

$$\begin{aligned} C_a : \quad x^2 + (y - kx_1/y_1)^2 &= \frac{k^2}{y_1^2} \\ C_A : \quad x^2 + (y + kx_1/y_1)^2 &= \frac{k^2}{y_1^2} \\ C_b : \quad (x - x_0/y_0)^2 + y^2 &= \frac{1}{y_0^2} \\ C_B : \quad (x + x_0/y_0)^2 + y^2 &= \frac{1}{y_0^2} \end{aligned}$$

donde la transformaciones que emparejan los círculos  $C_A$  con  $C_a$  y  $C_B$  con  $C_b$  son

$$\begin{aligned} a(z) &= \frac{x_1z + ik y_1}{-\frac{iy_1}{k}z + x_1} \\ b(z) &= \frac{x_0z + y_0}{y_0z + x_0} \end{aligned}$$

sujetas a las condiciones

$$x_0^2 - y_0^2 = 1 \quad \text{y} \quad x_1^2 - y_1^2 = 1.$$

Las ecuaciones de las circunferencias de la sección 3.1.4 tienen la misma forma que las circunferencias anteriores, por ejemplo, la circunferencia

$$C_a : \quad x^2 + (y - \sec \theta)^2 = \tan^2 \theta.$$

es equivalente a

$$x^2 + \left( y - \frac{\sec \theta}{\cot \theta} \right)^2 = \frac{1}{\cot^2 \theta}$$

en este caso  $x_1 = \sec \theta$ ,  $y_1 = \cot \theta$  y  $k = 1$ .

Por otro lado también necesitamos que los círculos sean tangentes, para esto la suma de los radios debe ser igual a la distancia de los centros, tomaremos las circunferencias  $C_a$  y  $C_b$  y puesto que nuestra configuración es simétrica, bastará con encontrar dicho punto de intersección. Así tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{k}{y_1} + \frac{1}{y_0} &= d \left( \left( 0, \frac{kx_1}{y_1} \right), \left( \frac{x_0}{y_0}, 0 \right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{x_0^2}{y_0^2} + k^2 \frac{x_1^2}{y_1^2}} \\ \left( \frac{k}{y_1} + \frac{1}{y_0} \right)^2 &= \frac{x_0^2}{y_0^2} + k^2 \frac{x_1^2}{y_1^2} \\ \frac{k^2}{y_1^2} + 2 \frac{k}{y_0 y_1} + \frac{1}{y_0^2} &= \frac{x_0^2}{y_0^2} + k^2 \frac{x_1^2}{y_1^2} \\ \frac{k^2}{y_1^2} (x_1^2 - 1) + \frac{1}{y_0^2} (x_0^2 - 1) &= \frac{2k}{y_0 y_1} \\ k^2 + 1 &= \frac{2k}{y_0 y_1}; \quad \text{ya que} \quad x_0^2 - 1 = y_0^2 \quad \text{y} \quad x_1^2 - 1 = y_1^2 \end{aligned}$$

finalmente

$$\frac{1}{2} \left( k + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{y_0 y_1}. \quad (3.6)$$

Por otro lado la ecuación 3.6, permite verificar que la relación de Markov se satisface. Primero consideramos las trazas de las transformaciones  $a$ ,  $b$  y  $ab$

$$\begin{aligned} \text{Tr } a &= 2x_0 \\ \text{Tr } b &= 2x_1 \\ \text{Tr } ab &= 2x_0 x_1 + y_0 y_1 i \left( k - \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación de Markov obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Tr}^2 a + \text{Tr}^2 b + \text{Tr}^2 ab &= \text{Tr} a \cdot \text{Tr} b \cdot \text{Tr} ab \\ 4x_1^2 + 4x_0^2 + (2x_1x_0 + y_0y_1i(k - 1/k))^2 &= 4x_0x_1(2x_0x_1 + y_1y_0i(k - 1/k)) \\ 4x_1^2(1 - x_0^2) + 4x_0^2 &= y_1^2y_0^2 \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 \\ \frac{1}{y_0^2y_1^2} - 1 &= \frac{1}{4} \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(k^2 - 2 + \frac{1}{k^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4k^2} \\ &= \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4k^2} - 1 \\ &= \frac{1}{4} \left(k^2 + 2 + \frac{1}{k^2}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{4} \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - 1 = \frac{1}{y_0^2y_1^2} - 1 \quad \text{por 3.6} \end{aligned}$$

Por tanto la condición del conmutador, también es cierta, esto es, la traza de  $abAB$  es  $-2$ . Las siguientes imágenes corresponden a la familia de circunferencias

$$\begin{aligned} C_a : \quad x^2 + (y - kx_1/y_1)^2 &= \frac{k^2}{y_1^2} \\ C_A : \quad x^2 + (y + kx_1/y_1)^2 &= \frac{k^2}{y_1^2} \\ C_b : \quad (x - \sec \theta)^2 + y^2 &= \tan^2 \theta \\ C_B : \quad (x + \sec \theta)^2 + y^2 &= \tan^2 \theta. \end{aligned}$$

Donde los círculos  $C_B$  y  $C_b$  están emparejados por

$$b = \frac{\csc \theta z + \cot \theta}{\cot \theta z + \csc \theta}$$

ahora deberemos de encontrar la transformación

$$a(z) = \frac{x_1z + ik y_1}{-\frac{iy_1}{k}z + x_1}$$

y además considerar algún valor de  $k$ . Si  $k = 2$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{y_0y_1} \\ \frac{5}{4} &= \frac{1}{\cot \theta y_1} \end{aligned}$$

de donde obtenemos

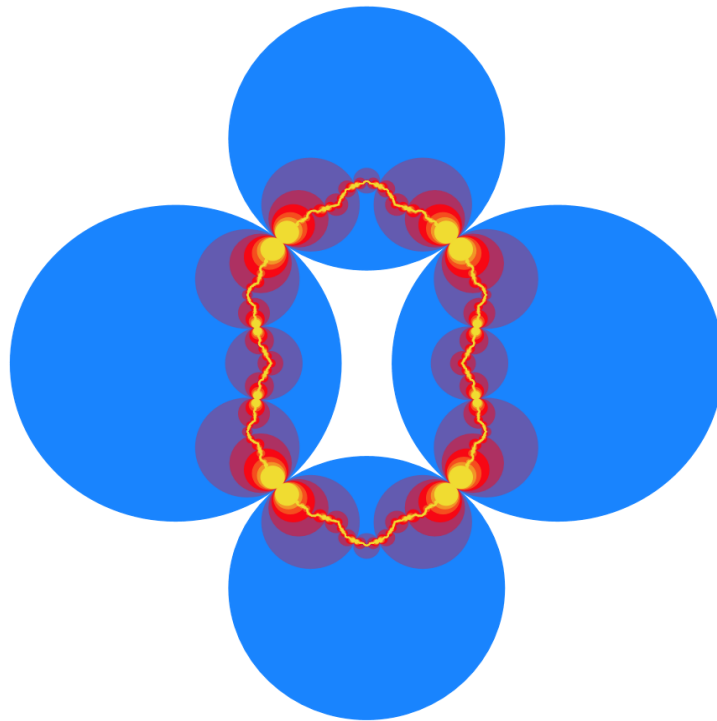
$$y_1 = \frac{4}{5} \tan \theta.$$

Así  $x_1 = \sqrt{1 + y_1^2} = \frac{\sqrt{25 + 16 \tan^2 \theta}}{5}$ , así los círculos  $C_a$  y  $C_A$  tendrán las siguientes ecuaciones

$$C_a: \quad x^2 + \left( y - \frac{\sqrt{25 + 16 \tan^2 \theta}}{2 \tan \theta} \right)^2 = \frac{25}{4} \cot^2 \theta.$$

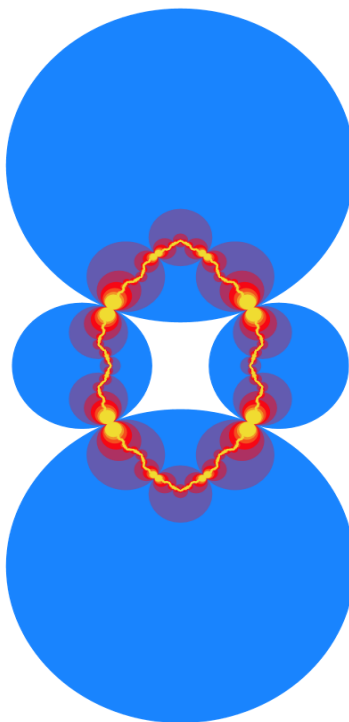
$$C_A: \quad x^2 + \left( y + \frac{\sqrt{25 + 16 \tan^2 \theta}}{2 \tan \theta} \right)^2 = \frac{25}{4} \cot^2 \theta.$$

Las siguientes figuras representan a nuestra familia especial, para diferentes valores de  $\theta$ , y 7 niveles del **BFS**.

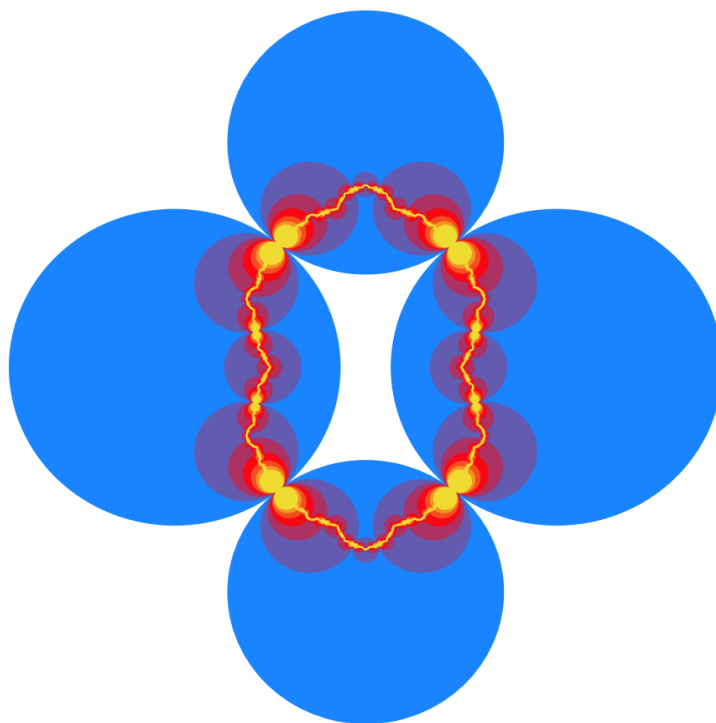


**Figura 3.16:** Grupo Quasifuchsiano,  $\theta = \pi/6$ ,  $k = 2$ .

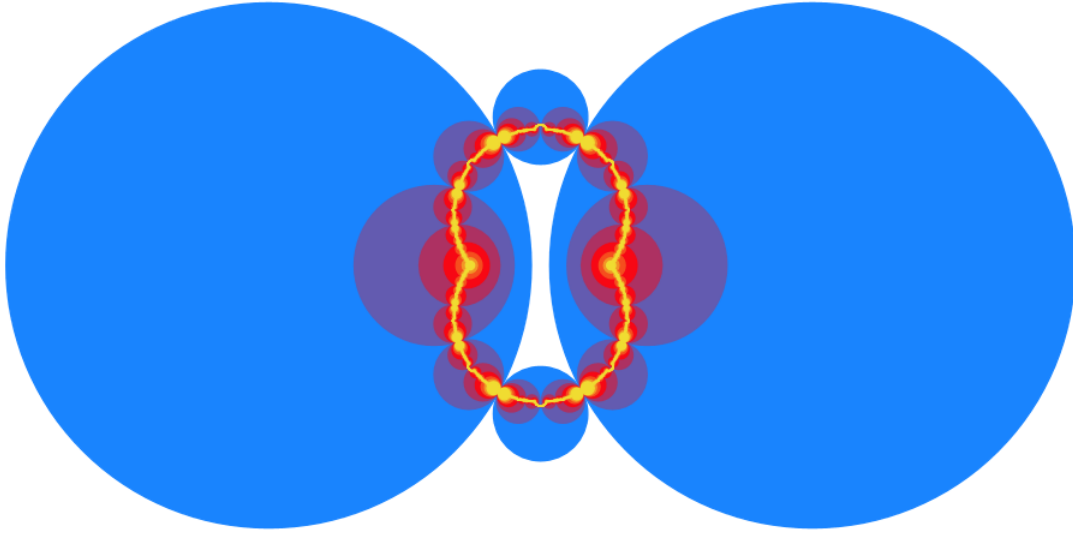




**Figura 3.17:** Grupo Quasifuchsiano,  $\theta = \pi/4$ ,  $k = 2$ .



**Figura 3.18:** Grupo Quasifuchsiano,  $\theta = \pi/3$ ,  $k = 2$ .



**Figura 3.19:** Grupo Quasifuchsiano,  $\theta = 12\pi/5$ ,  $k = 2$ .

### 3.6. Degeneraciones.

Consideremos la siguiente configuración

$$\begin{aligned}
 C_A &: x^2 + (y + y_0)^2 = R^2 \\
 C_a &: x^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\
 C_B &: (x + x_0)^2 + y^2 = r^2 \\
 C_b &: (x - x_0)^2 + y^2 = r^2
 \end{aligned}$$

Necesitamos encontrar una transformación  $a(z)$  que convierta el círculo  $C_A$  en el círculo  $C_a$  y una transformación  $b(z)$ , que convierta el círculo  $C_B$  en el círculo  $C_b$ , para esto vamos a considerar lo siguiente

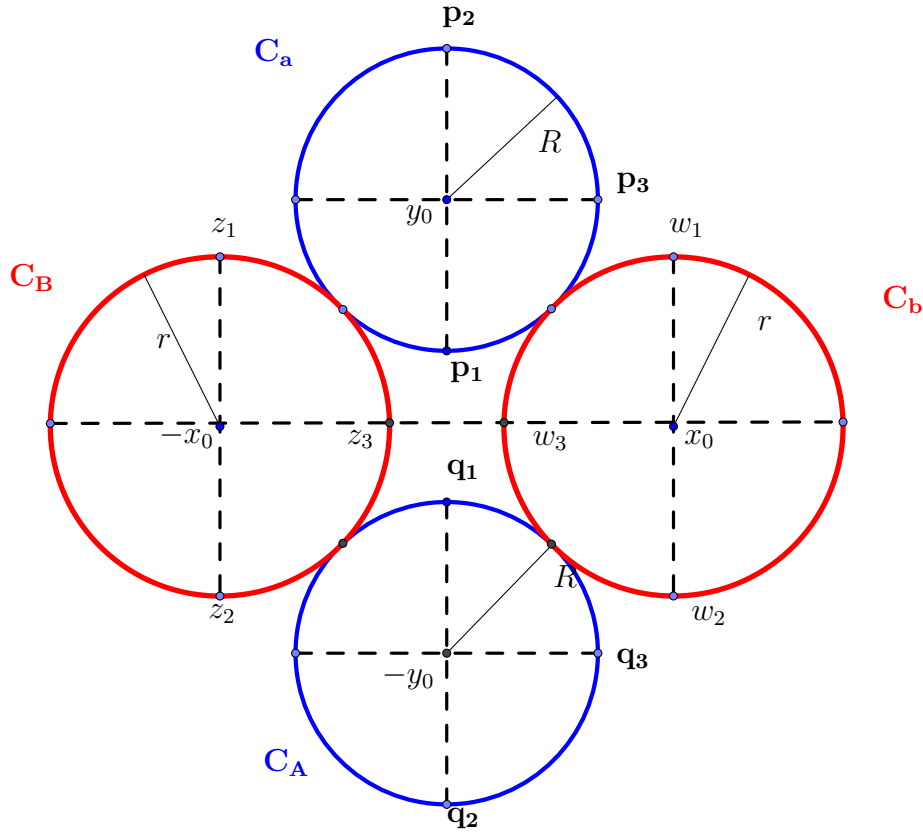


Figura 3.20: Configuración especial.

los puntos  $z_1, z_2, z_3$  de  $C_B$

$$z_1 = -x_0 + ir$$

$$z_2 = -x_0 - ir$$

$$z_3 = -x_0 + r$$

y los puntos  $w_1, w_2, w_3$  que están sobre  $C_b$

$$w_1 = x_0 + ir$$

$$w_2 = x_0 - ir$$

$$w_3 = x_0 - r.$$

Ahora, sabemos que la transformación que lleva  $z_1, z_2, z_3$  a  $1, 0, \infty$  es

$$S_1(z) = \left( \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right) \left( \frac{z - z_2}{z - z_3} \right)$$

simplificando obtenemos

$$S_1(z) = \frac{i-1}{2i} \left( \frac{z + x_0 + ir}{z + x_0 - r} \right)$$

y su matriz asociada es

$$S_1 = \begin{pmatrix} (i-1) & (i-1)(x_0 + ir) \\ 2i & 2i(x_0 - r) \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, la transformación que lleva  $w_1, w_2, w_3$  a  $1, 0, \infty$  es

$$S_2(z) = \begin{pmatrix} w_1 - w_3 \\ w_1 - w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z - w_2 \\ z - w_3 \end{pmatrix}$$

simplificando obtenemos

$$S_2(z) = \frac{i+1}{2i} \begin{pmatrix} z - x_0 + ir \\ z - x_0 + r \end{pmatrix}$$

y su matriz asociada es

$$S_2 = \begin{pmatrix} (i+1) & -(i+1)(x_0 - ir) \\ 2i & -2i(x_0 - r) \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la transformación  $b(z)$  está dada por

$$b(z) = S_2^{-1} \circ S_1.$$

Veamos explícitamente la transformación, para esto vamos a considerar las matrices asociadas, esto es:

$$\begin{aligned} b &= \begin{pmatrix} (i+1) & -(i+1)(x_0 - ir) \\ 2i & -2i(x_0 - r) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} (i-1) & (i-1)(x_0 + ir) \\ 2i & 2i(x_0 - r) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(S_2)} \begin{pmatrix} -2i(x_0 - r) & (i+1)(x_0 - ir) \\ -2i & (i+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (i-1) & (i-1)(x_0 + ir) \\ 2i & 2i(x_0 - r) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4ir} \begin{pmatrix} 4ix_0 & 4i(x_0^2 - r^2) \\ 4i & 4ix_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_0}{r} & \frac{x_0^2 - r^2}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{x_0}{r} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así, la transformación  $b(z)$  que lleva  $z_1, z_2, z_3$  a  $w_1, w_2, w_3$  respectivamente es

$$b(z) = \frac{\frac{x_0}{r}z + \frac{x_0^2 - r^2}{r}}{\frac{z}{r} + \frac{x_0}{r}}$$

Por otro lado, para encontrar la transformación  $a(z)$ , que convierta el círculo  $x^2 + (y + y_0)^2 = R^2$  en el círculo  $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ , para esto vamos a considerar los puntos  $q_1, q_2, q_3$  de  $C_A$

$$\begin{aligned} q_1 &= (-y_0 + R)i \\ q_2 &= (-y_0 - R)i \\ q_3 &= R - y_0i \end{aligned}$$

y los puntos  $p_1, p_2, p_3$  que están sobre  $C_a$

$$\begin{aligned} p_1 &= (y_0 - R)i \\ p_2 &= (y_0 + R)i \\ p_3 &= R + y_0i. \end{aligned}$$

Ahora, tenemos que la transformación

$$S'_1(z) = \left( \frac{p_1 - p_3}{p_1 - p_2} \right) \left( \frac{z - p_2}{z - p_3} \right)$$

convierte  $p_1, p_2, p_3$  en  $1, 0, \infty$ , simplificando nos queda

$$S'_1(z) = \frac{i+1}{2i} \left( \frac{z - (y_0 + R)i}{z - (R + y_0i)} \right)$$

luego la matriz asociada es

$$S'_1 = \begin{pmatrix} (i+1) & (y_0 + R)(1-i) \\ 2i & -2i(R + y_0i) \end{pmatrix}.$$

Ahora encontramos la transformación  $S'_2(z)$ , que lleva  $q_1, q_2, q_3$  a  $1, 0, \infty$

$$S'_2(z) = \left( \frac{q_1 - q_3}{q_1 - q_2} \right) \left( \frac{z - q_2}{z - q_3} \right)$$

simplificando nos queda

$$S'_2(z) = \frac{i-1}{2i} \left( \frac{z + (y_0 + R)i}{z + (y_0i - R)} \right)$$

luego la matriz asociada es

$$S'_2 = \begin{pmatrix} (i-1) & (y_0 + R)i(i-1) \\ 2i & 2i(y_0i - R) \end{pmatrix}.$$

Finalmente la transformación  $a(z) = (S'_2)^{-1} \circ S'_1$ , la cual transformará  $q_1, q_2, q_3$  en  $p_1, p_2, p_3$  respectivamente. Vamos a encontrar la forma explícita para  $a(z)$ , haciendo uso de las matrices asociadas a  $S'_1(z)$  y  $S'_2(z)$ , esto es:

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix} (i-1) & (y_0 + R)i(i-1) \\ 2i & 2i(y_0i - R) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} (i+1) & (y_0 + R)(1-i) \\ 2i & -2i(R + y_0i) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(S'_2)} \begin{pmatrix} 2i(y_0i - R) & (y_0 + R)(1+i) \\ -2i & (i-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (i+1) & (y_0 + R)(1-i) \\ 2i & -2i(R + y_0i) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4iR} \begin{pmatrix} -4y_0 & 4i(y_0^2 - R^2) \\ -4i & -4y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-y_0}{Ri} & \frac{(y_0^2 - R^2)}{R} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{y_0}{Ri} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_0}{R} & -\frac{(y_0^2 - R^2)}{R}i \\ \frac{1}{R}i & \frac{y_0}{R} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así, la transformación  $a(z)$  está dada por

$$a(z) = \frac{\frac{y_0}{R}z - \frac{y_0^2 - R^2}{R}i}{\frac{zi}{R} + \frac{y_0}{R}}.$$

Por tanto, para la configuración

$$\begin{aligned} C_A : \quad & x^2 + (y + y_0)^2 = R^2 \\ C_a : \quad & x^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\ C_B : \quad & (x + x_0)^2 + y^2 = r^2 \\ C_b : \quad & (x - x_0)^2 + y^2 = r^2 \end{aligned}$$

tenemos que las transformaciones que emparejan los círculos  $C_B$  con  $C_b$  y  $C_A$  con  $C_a$  son

$$b(z) = \frac{\frac{x_0}{r}z + \frac{x_0^2 - r^2}{r}}{\frac{z}{r} + \frac{x_0}{r}} \quad \text{y} \quad a(z) = \frac{\frac{y_0}{R}z - \frac{y_0^2 - R^2}{R}i}{\frac{zi}{R} + \frac{y_0}{R}}.$$

Por otro lado si queremos obtener grupos Quasifuchsianos, tenemos que encontrar la condición de tangencia, para esto consideramos las circunferencias  $C_a$  y  $C_b$ , así la condición de tangencia es

$$\begin{aligned} d((x_0, 0), (0, y_0)) &= r + R \\ x_0^2 + y_0^2 &= (r + R)^2 \\ r &= -R \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \end{aligned}$$

puesto que  $r > 0$ , tomaremos  $r = -R + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ . Ahora verificaremos que se cumple la condición de Markov, para esto consideramos las trazas de las matrices asociadas a las transformaciones  $a(z)$ ,  $b(z)$  y  $ab(z)$ , esto es

$$\begin{aligned} \text{Tra}(a) &= \frac{2y_0}{R} \\ \text{Tra}(b) &= \frac{2x_0}{r} \\ \text{Tra}(ab) &= \frac{2x_0y_0}{rR} + \frac{(R^2 - r^2 + x_0^2 - y_0^2)i}{rR}. \end{aligned}$$

Luego:

$$\text{Tra}^2(a) + \text{Tra}^2(b) + \text{Tra}^2(ab) = \frac{4y_0^2}{R^2} + \frac{4x_0^2}{r^2} + \frac{(2x_0y_0 + (R^2 - r^2 + x_0^2 - y_0^2)i)^2}{r^2R^2} \quad \text{y} \quad (3.7)$$

$$\text{Tra}^2(a) \cdot \text{Tra}^2(b) \cdot \text{Tra}^2(ab) = \frac{4x_0y_0}{rR} \left( \frac{2x_0y_0 + (R^2 - r^2 + x_0^2 - y_0^2)i}{rR} \right) \quad (3.8)$$

ahora restando 3.7 y 3.8, tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{4y_0^2r^2 + 4x_0^2R^2 - 4x_0^2y_0^2}{r^2R^2} - \frac{(R - r^2 + x_0^2 - y_0^2)^2}{r^2R^2} \\ &= 2(r^2 + R^2)(x_0^2 + y_0^2) - (x_0^2 + y_0^2)^2 - (R^2 - r^2)^2 \end{aligned}$$

ahora sustituimos la condición de tangencia, esto es  $(r + R)^2 = x_0^2 + y_0^2$ , así:

$$\begin{aligned}
 & - [(r + R)^4 - 2(r^2 + R^2)(r + R)^2 + (R^2 - r^2)^2] \\
 & = - [(r + R)^4 - 2(r^2 + R^2)(r + R)^2 + (r^2 + R^2)^2 - (r^2 + R^2)^2 + (R^2 - r^2)^2] \\
 & = - \left[ ((r + R)^2 - (r^2 + R^2))^2 - r^4 - 2r^2R^2 - R^4 + R^4 - 2r^2R^2 + R^4 \right] \\
 & = - [4r^2R^2 - 4r^2R^2] = 0.
 \end{aligned}$$

Por tanto, se cumple que la diferencia de las expresiones 3.7 y 3.8 es cero, se tiene que se cumple la condición de Markov, así los grupos que obtendremos para esta familia serán Quasifuchsianos.

### Ejemplos.

Vamos a considerar nuestra configuración que dependerá de los parámetros  $x_0, y_0, r$  y  $R$  donde para el caso en que la configuración sea tangente, tendremos únicamente de parámetros independientes  $x_0, y_0$  y  $R$ , ya que  $r = -R + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ .

$$\begin{aligned}
 C_A : & \quad x^2 + (y + y_0)^2 = R^2 \\
 C_a : & \quad x^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\
 C_B : & \quad (x + x_0)^2 + y^2 = r^2 \\
 C_b : & \quad (x - x_0)^2 + y^2 = r^2.
 \end{aligned}$$

#### Caso I: Configuración sin tangencia.

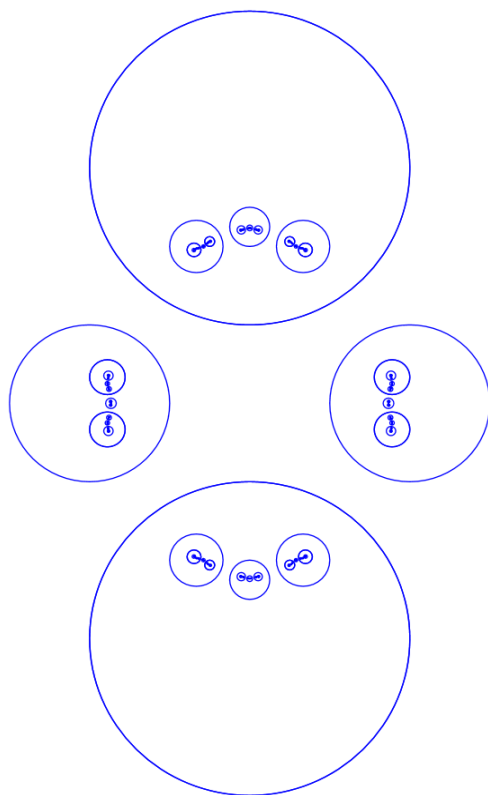
En este caso obtendremos un grupo de Schottky, tomaremos  $x_0 = 2, r = 1, y_0 = 3, R = 2$ , Así los círculos serían:

$$\begin{aligned}
 C_A : & \quad x^2 + (y + 3)^2 = 4 \\
 C_a : & \quad x^2 + (y - 3)^2 = 4 \\
 C_B : & \quad (x + 2)^2 + y^2 = 1 \\
 C_b : & \quad (x - 2)^2 + y^2 = 1
 \end{aligned}$$

donde las transformaciones que emparejan  $C_A$  con  $C_a$  y  $C_B$  con  $C_b$  son

$$a(z) = \frac{\frac{3}{2}z - \frac{5}{2}i}{\frac{zi}{2} + \frac{3}{2}} \quad \text{y} \quad b(z) = \frac{2z + 3}{z + 2}$$

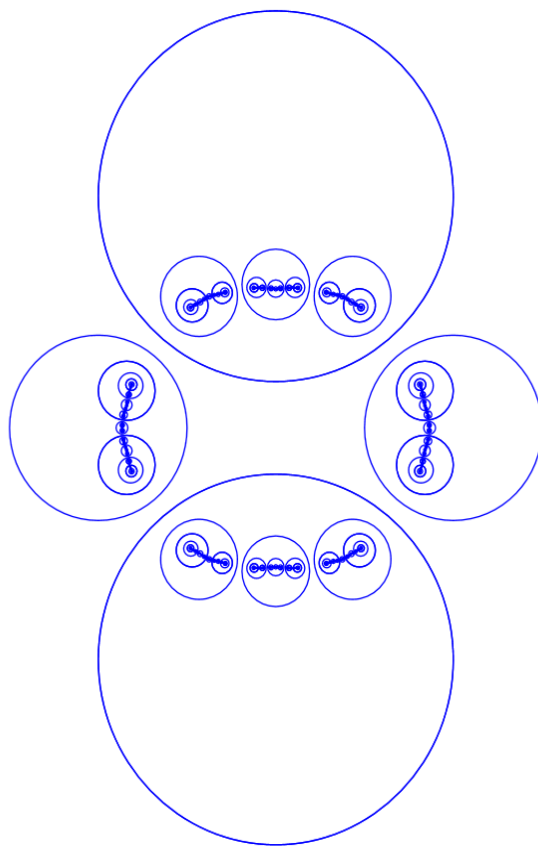
La figura obtenida con el algoritmo BFS, 7 niveles es la siguiente



**Figura 3.21:** Grupo de Schottky,  $x_0 = 2, r = 1; y_0 = 3, R = 2$ .

Por otro lado si ahora consideremos  $y_0 = 2.5$ , obtenemos





**Figura 3.22:** Grupo de Schottky,  $x_0 = 2, r = 1; y_0 = 2.5, R = 2$ .

### Caso II. Configuración tangente.

Ahora vamos a considerar nuestra configuración de manera que los círculos sean tangente, veamos un ejemplo en concreto, tomando  $x_0 = 2, R = 2, y_0 = \sqrt{5}$ , así  $r = 1$ . La configuración de los círculos tangentes sería

$$\begin{aligned} C_B &: (x + 2)^2 + y^2 = 1 \\ C_b &: (x - 2)^2 + y^2 = 1 \\ C_A &: x^2 + (y + \sqrt{5})^2 = 4 \\ C_a &: x^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 4 \end{aligned}$$

la transformación que empareja  $C_B$  y  $C_b$  es

$$b(z) = \frac{2z + 3}{z + 2}.$$

Por otro lado, la transformación que empareja  $C_A$  y  $C_a$  es

$$a(z) = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}z - \frac{1}{2}i}{i\frac{z}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

luego, las matrices asociadas son

$$a = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{i}{2} \\ i & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

en este caso vamos a obtener un grupo Quasifuchsiano, y para verificarlo, veremos que se cumple la identidad de Markov, esto es

$$(\operatorname{Tr} a)^2 + (\operatorname{Tr} b)^2 + (\operatorname{Tr} ab)^2 = \operatorname{Tr} a \cdot \operatorname{Tr} b \cdot \operatorname{Tr} ab.$$

Para nuestro caso particular, tenemos que

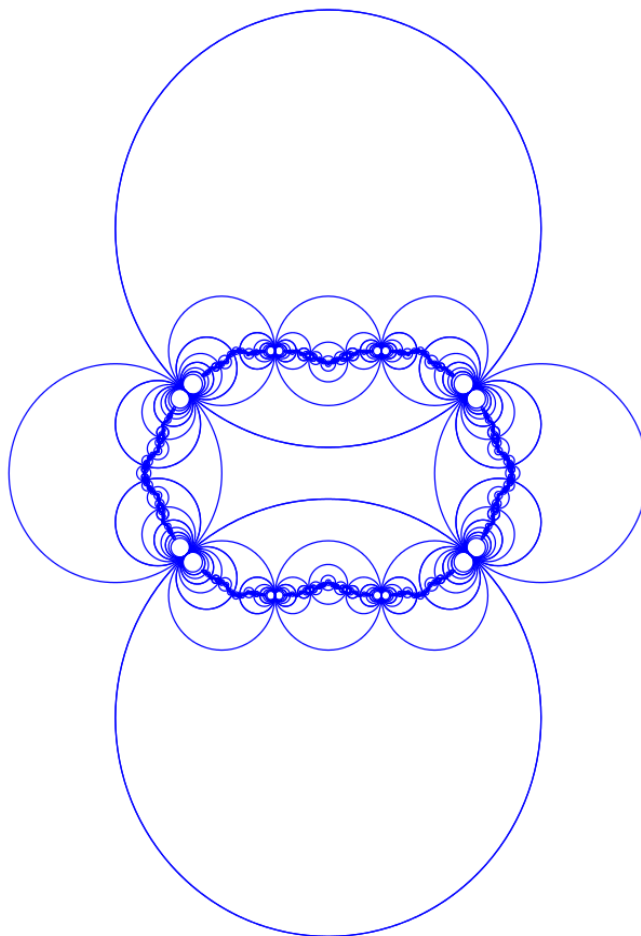
$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} a &= \sqrt{5} \\ \operatorname{Tr} b &= 4 \\ \operatorname{Tr} ab &= 2\sqrt{5} + i. \end{aligned}$$

Así

$$(\operatorname{Tr} a)^2 + (\operatorname{Tr} b)^2 + (\operatorname{Tr} ab)^2 = 5 + 16 + (2\sqrt{5} + i)^2 = 40 + 4\sqrt{5}i$$

$$(\operatorname{Tr} a) \cdot (\operatorname{Tr} b) \cdot (\operatorname{Tr} ab) = 4\sqrt{5}(2\sqrt{5} + i) = 40 + 4\sqrt{5}i.$$

La siguiente figura corresponde al caso  $x_0 = 2$  con  $y_0 = \sqrt{5}$  y  $R = 2$  y al utilizar la relación para  $r$ , obtenemos que  $r = 1$ .



**Figura 3.23:** Grupo Quasifuchsiano,  $x_0 = 2, r = 1; y_0 = \sqrt{5}, R = 2$ .

### Caso III: Casos extremos.

Un caso muy especial de nuestra configuración es cuando  $y_0 = R$ , en este caso la configuración toma la forma

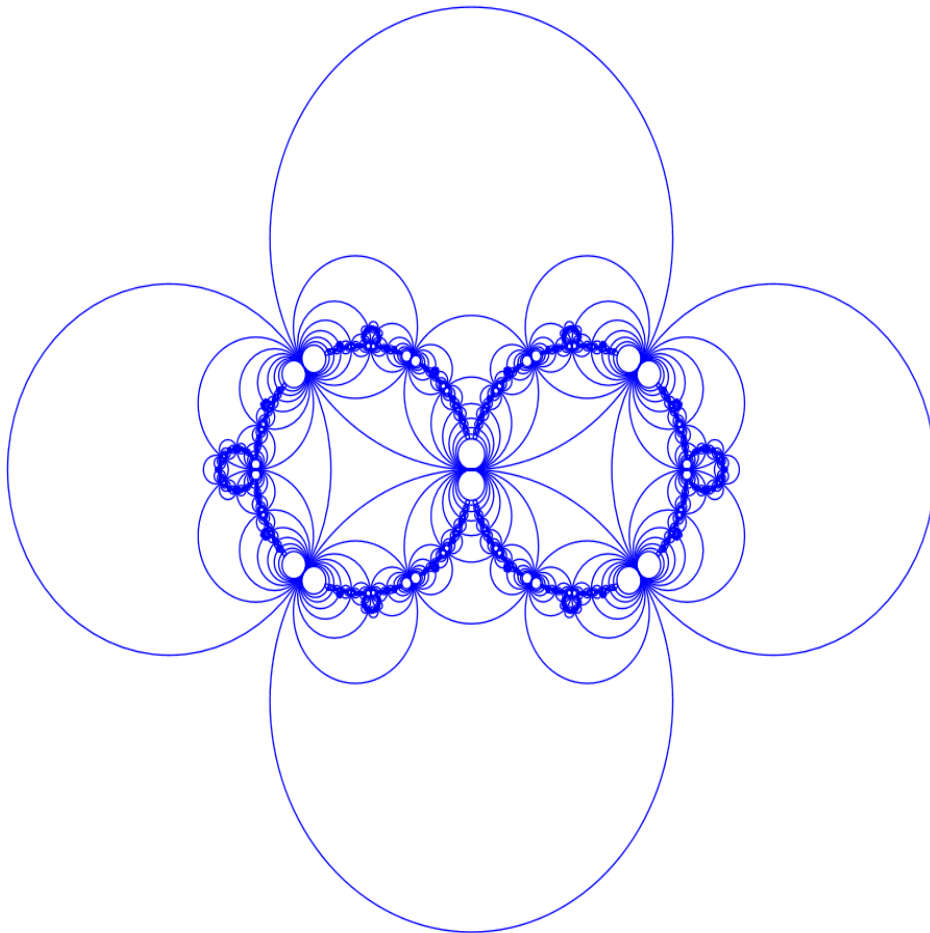
$$\begin{aligned} C_A &: x^2 + (y + R)^2 = R^2 \\ C_a &: x^2 + (y - R)^2 = R^2 \\ C_B &: (x + x_0)^2 + y^2 = r^2 \\ C_b &: (x - x_0)^2 + y^2 = r^2 \end{aligned}$$

La transformación  $b(z)$  continúa siendo la misma, sin embargo, la transformación  $a(z)$  se reduce a

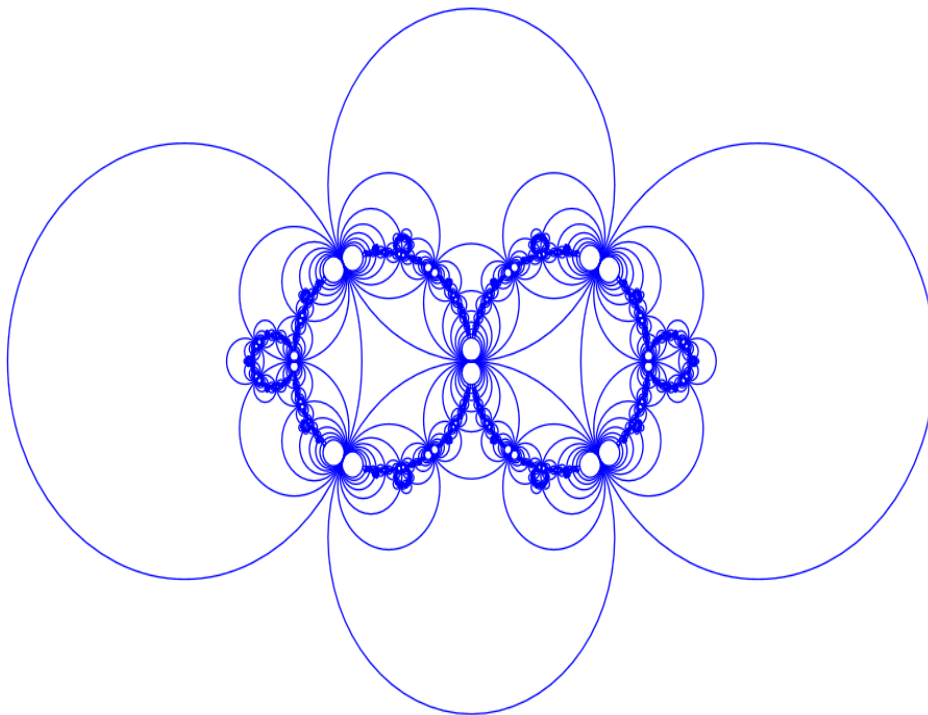
$$a(z) = \frac{z}{\frac{zi}{R} + 1}$$

de dicha configuración, junto con la condición de tangencia y haciendo variar  $x_0$  al infinito se obtiene el famoso Gasket de Apolonio, el cual daremos sus generadores en la siguiente sección;

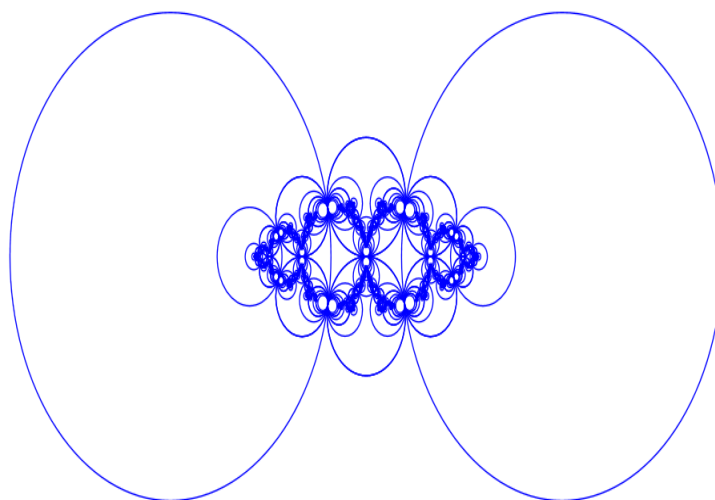
ahora vamos a ver que es lo que sucede con nuestra configuración cuando hacemos variar a  $x_0$ , para valores muy grandes. Para  $x_0 = 3, y_0 = R = 2$  obtenemos:



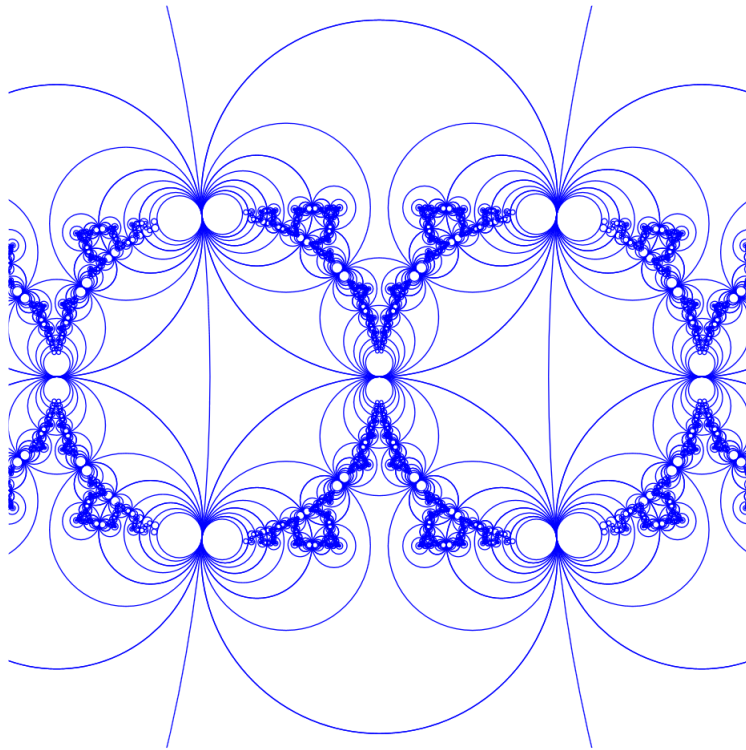
**Figura 3.24:** Grupo Quasifuchsiano con un parabólico extra,  $x_0 = 3; y_0 = R = 2$ .



**Figura 3.25:** Grupo Quasifuchsiano con un parabólico extra,  $x_0 = 4$ ;  $y_0 = R = 2$ .

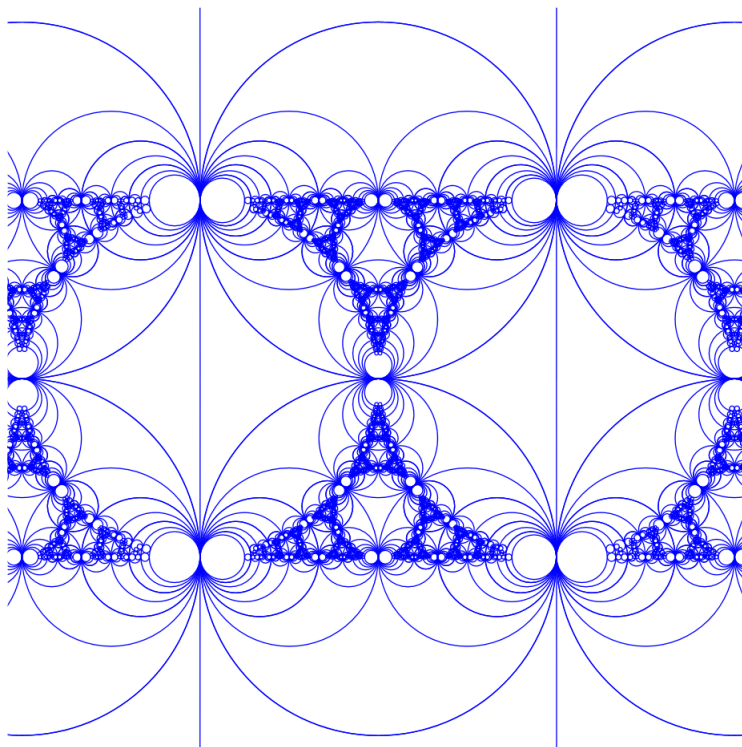


**Figura 3.26:** Grupo Quasifuchsiano con un parabólico extra,  $x_0 = 10$ ;  $y_0 = R = 2$ .



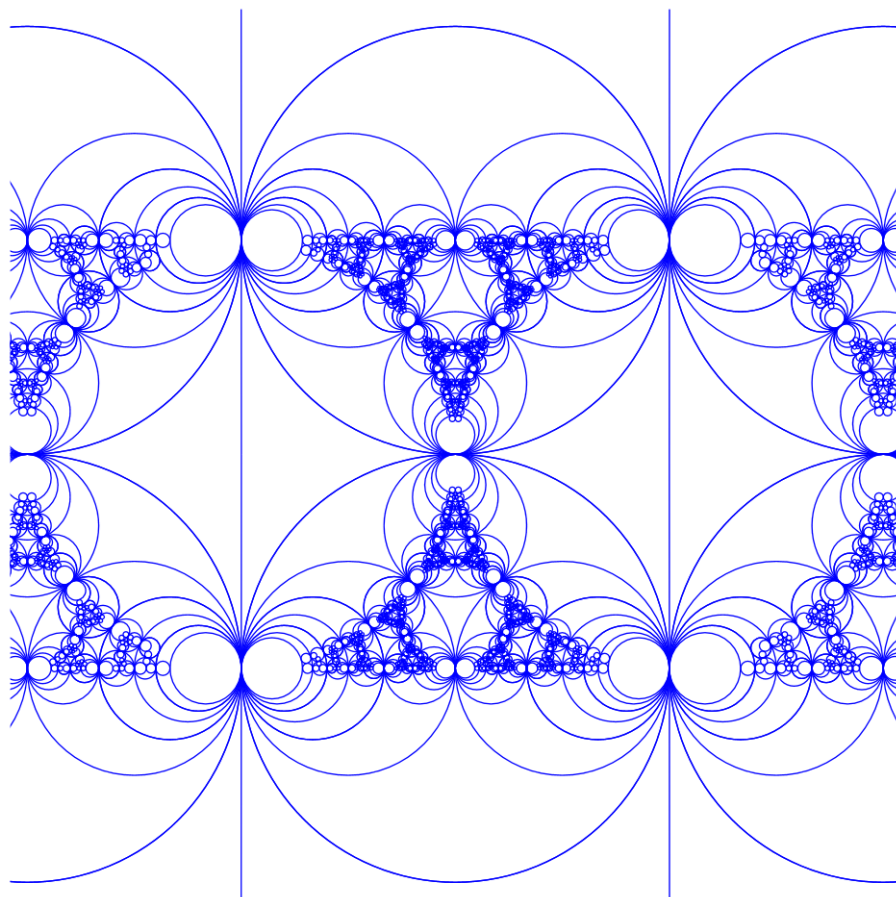
**Figura 3.27:** Grupo Quasifuchsiano con un parabólico extra,  $x_0 = 20$ ;  
 $y_0 = R = 2$ .

En la figura 3.27 la imagen representada está entre  $x \in [-4, 4]$  e  $y \in [-5, 5]$ .



**Figura 3.28:** Grupo Quasifuchsiano con un parabólico extra,  $x_0 = 10000$ ;  $y_0 = R = 2$ .

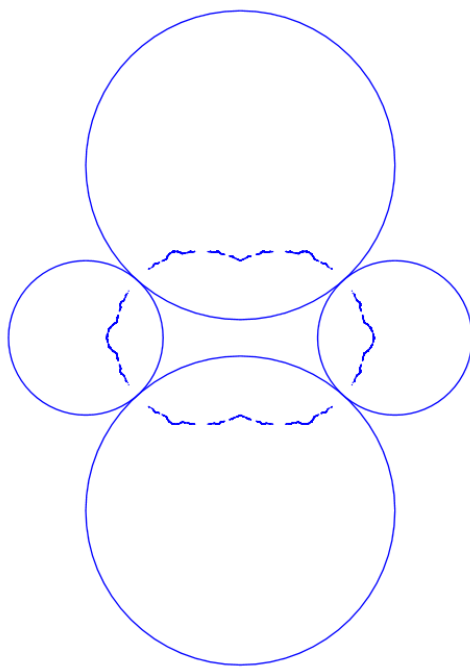
para el caso de la figura 3.28, notamos que las circunferencias  $C_B$  y  $C_b$  parecen rectas y estamos aproximándonos a la figura del Gasket. Ahora, vamos a exagerar aún más el valr de  $x_0$ , considerando  $x_0 = 10000000000$ , obteniendo:



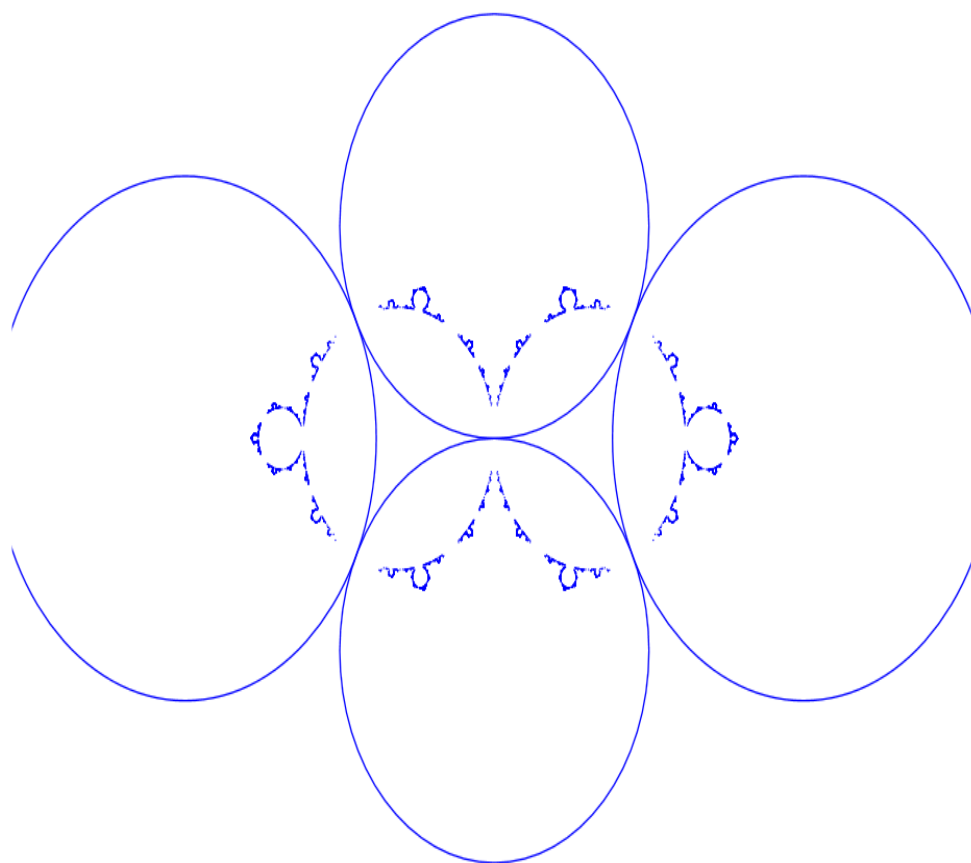
**Figura 3.29:** Grupo Quasifuchsiano con un parabólico extra,  $x_0 = 10000$ ;  
 $y_0 = R = 2$ .

Ahora aplicaremos un nuevo algoritmo, el cual dibujará los centros de los círculos de tal manera que el centro sea una proporción del menor de los radios de los 4 círculos iniciales.

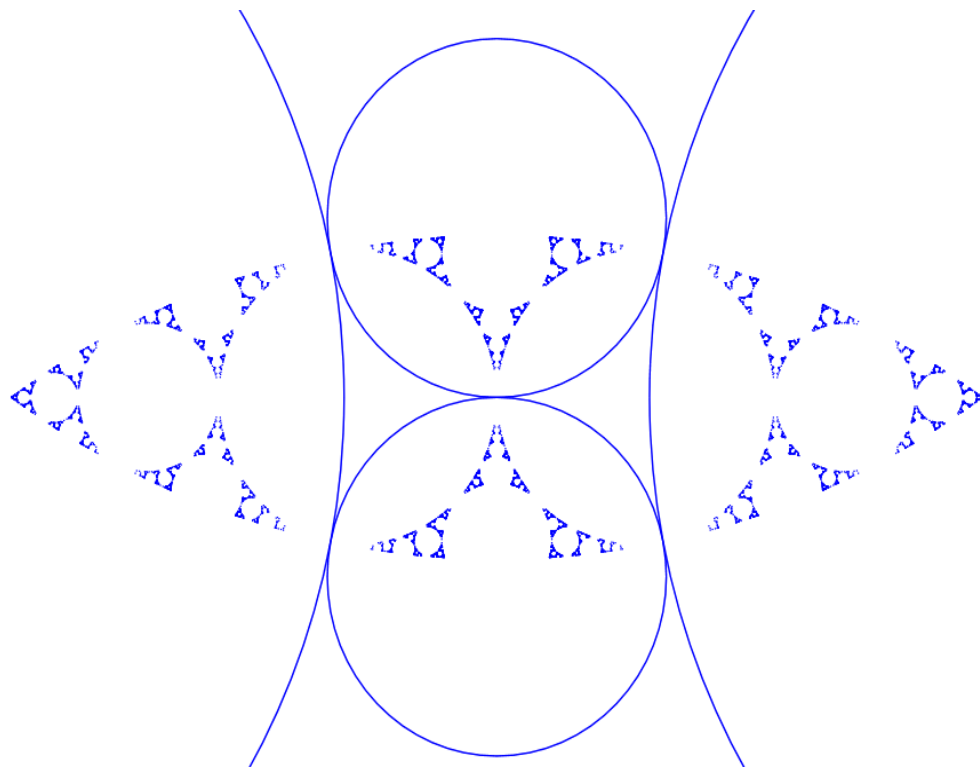




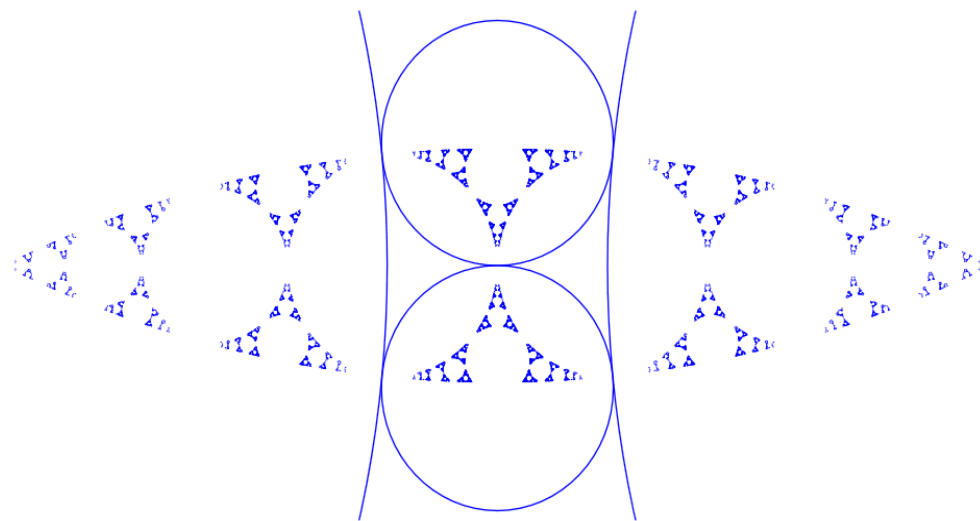
**Figura 3.30:** Puntos límites para el caso  $x_0 = 2$ ,  $r = 1$ ;  $y_0 = \sqrt{5}$ ,  $R = 2$ .



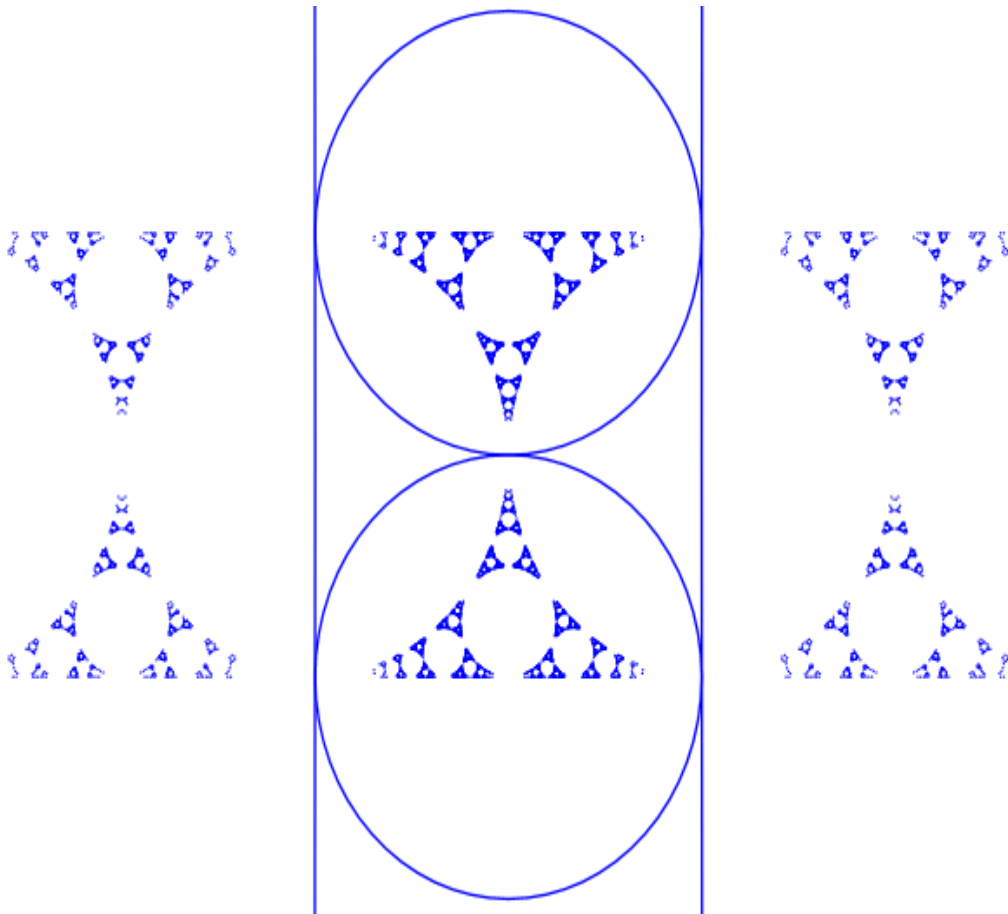
**Figura 3.31:** Puntos límites para el caso  $x_0 = 4$ ;  $y_0 = R = 2$ .



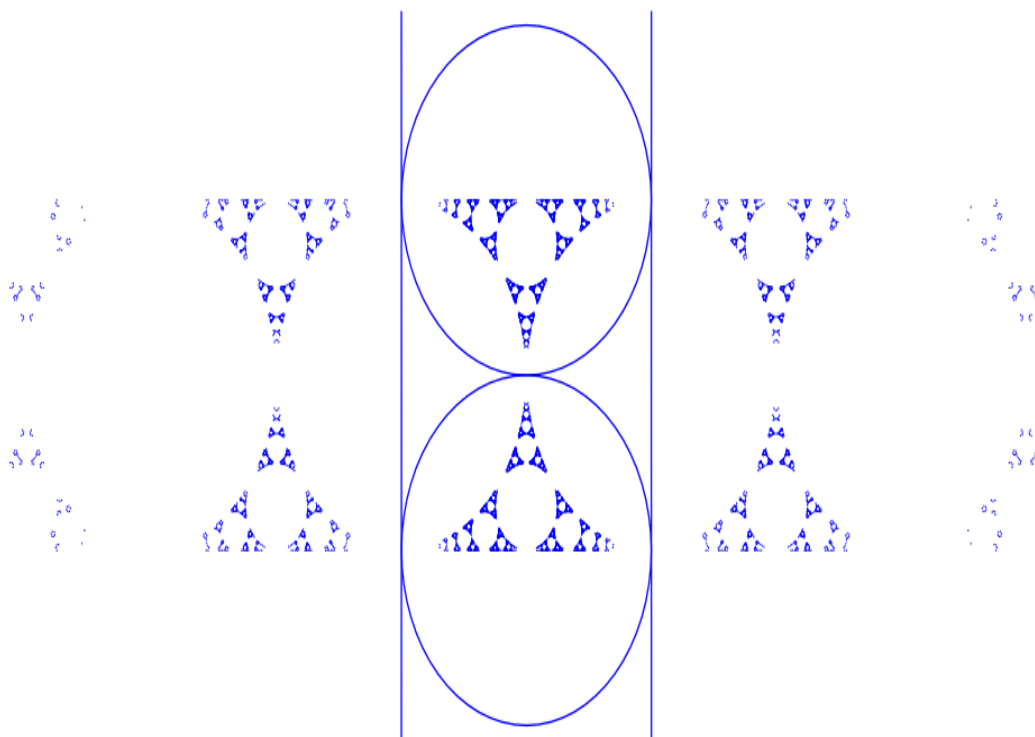
**Figura 3.32:** Puntos límites para el caso  $x_0 = 10$ ;  $y_0 = R = 2$ .



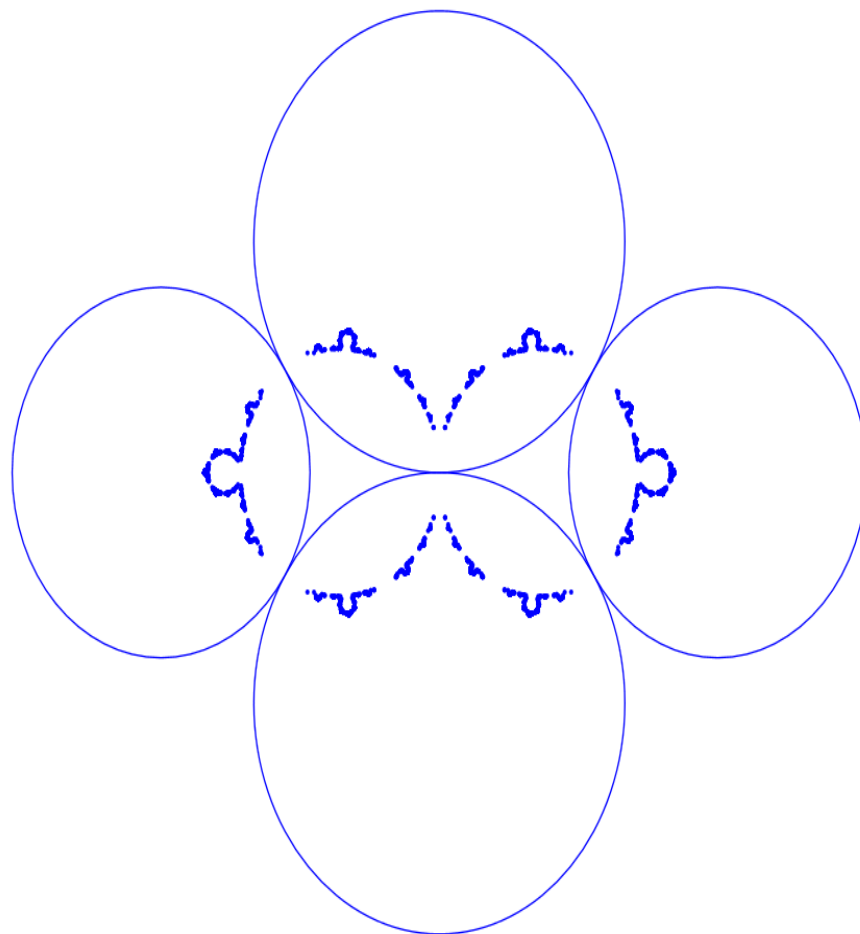
**Figura 3.33:** Puntos límites para el caso  $x_0 = 20$ ;  $y_0 = R = 2$ .



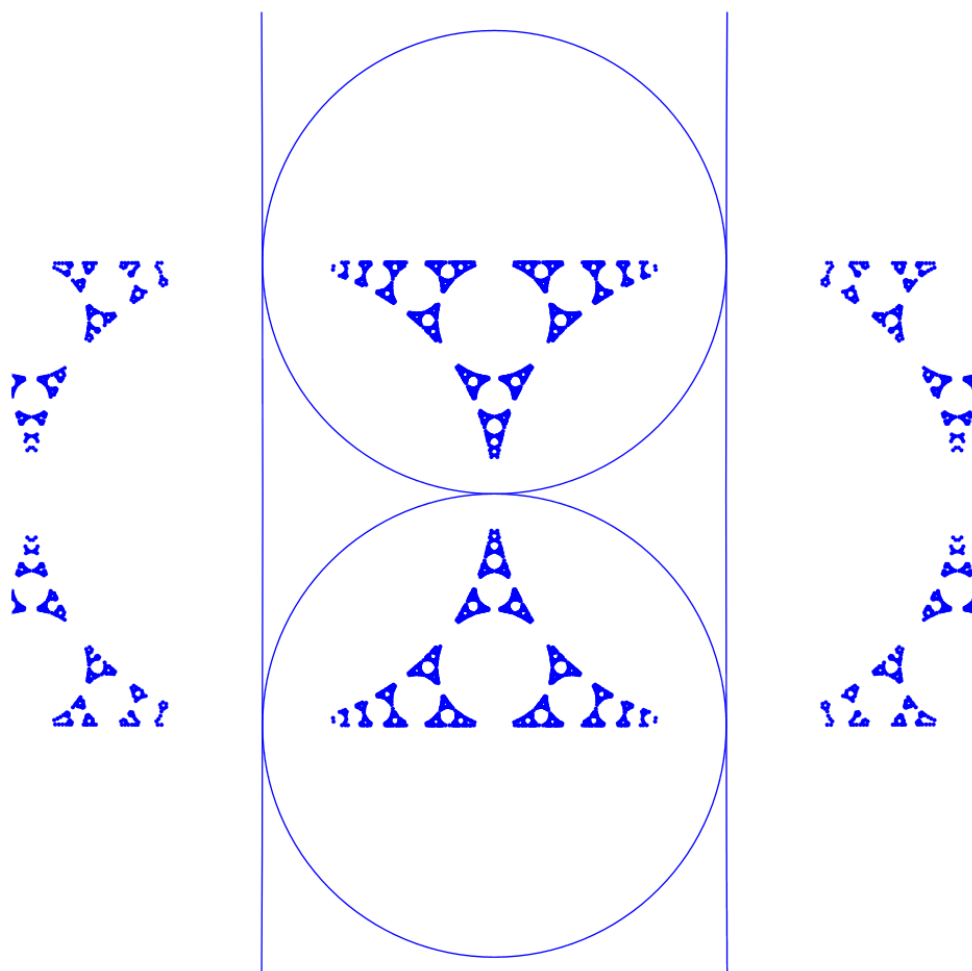
**Figura 3.34:** Puntos límites para el caso  $x_0 = 10000$ ;  $y_0 = R = 2$ .



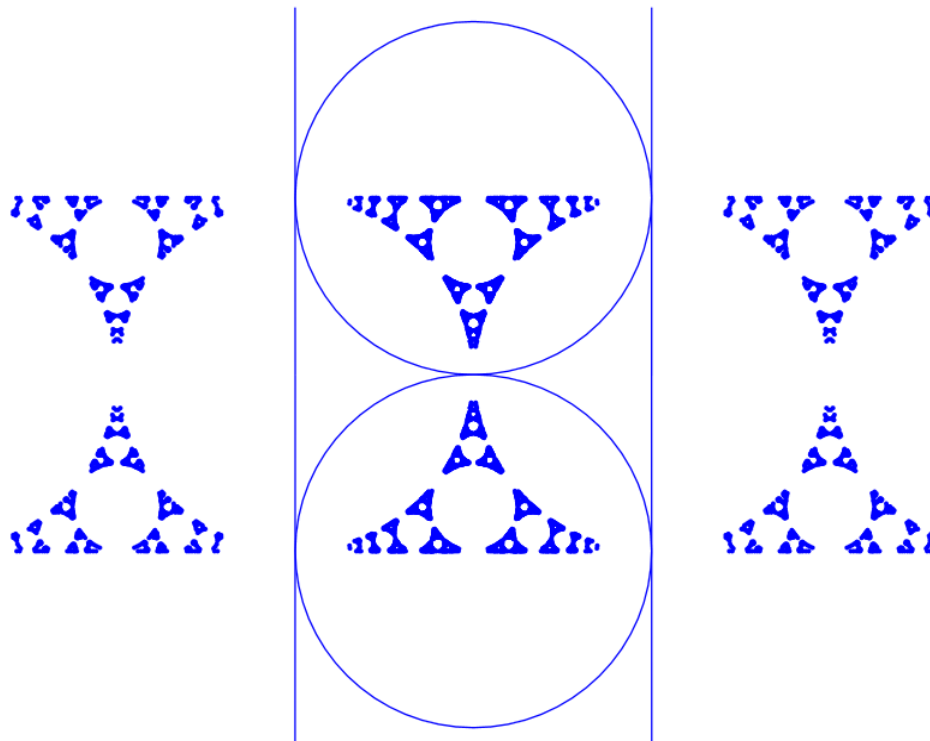
**Figura 3.35:** Puntos límites para el caso  $x_0 = 100000$ ;  $y_0 = R = 2$ .



**Figura 3.36:** Puntos límites para el caso  $x_0 = 3$ ;  $y_0 = R = 2$ .



**Figura 3.37:** Puntos límites para el caso  $x_0 = 1000$ ;  $y_0 = R = 2$ .



**Figura 3.38:** Puntos límites para el caso  $x_0 = 1e10$ ;  $y_0 = R = 2$ .

La idea de hacer tender el  $x_0$  al infinito nos dará una configuración más extrema, la cual nos dará un grupo con dos parabólicos extras y en particular esta figura es una aproximación al Gasket (empaquetamiento de los círculos de Apolinio).

### 3.7. El Gasket.

En esta parte se presentará un proceso de construcción de círculos tangentes y obtendremos el famoso Gasket de Apolinio<sup>6</sup>, el cual veremos que está estrechamente relacionado con los conjuntos límites de grupos de Schottky.

**Definición 3.7.1.** *Una región entre tres discos tangentes es un "triángulo", donde sus arcos son sus respectivos lados, este tipo de triángulo es llamado es un triángulo ideal.*

Los vértices de nuestro triángulo ideal, son los puntos de tangencia. El Gasket se forma por el hecho de que en cada triángulo ideal ideal siempre hay un único disco inscrito o **incírculo** que es tangente a los otros tres círculos. Podemos pensar que el Gasket como una construcción sobre la esfera.

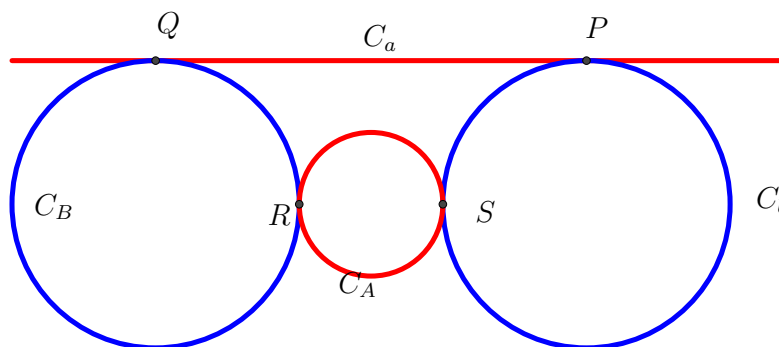
<sup>6</sup>Apolonio, conocido por sus contemporáneos como el gran geómetra . Vivió en Perga ahora en día Turquía. Uno de los gigantes de las matemáticas griegas. Fue famoso por sus 8 volúmenes y tratados sobre cónicas estudiaron elipses, hipérbolas y parábolas como sección de un cono por un plano en varios ángulos. Sus escritos se convirtieron en textos estándar en el mundo antiguo. Muchos ahora en día están perdidos y los conocemos sólo a través de mención en otros comentarios, entre ellos trabajos sobre sólidos regulares, números irracionales y aproximaciones de  $\pi$ .



### 3.7.1. Generando el Gasket.

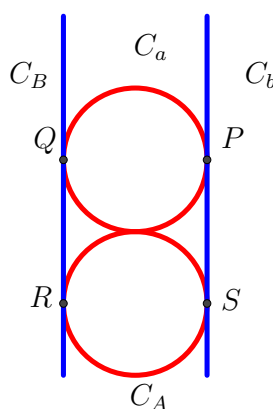
Geoméricamente el Gasket tiene un bello efecto, pero la verdadera razón de incluirlo en este parte del trabajo es que es el conjunto límite de un grupo de Schottky que resulta del emparejamiento de círculos tangentes, con la diferencia que ahora hay tangencias extras entre los cuatro círculos iniciales.

1. En el prime caso tenemos una cadena de círculos tangentes, donde dos de ellos son tangentes al eje  $x$ .



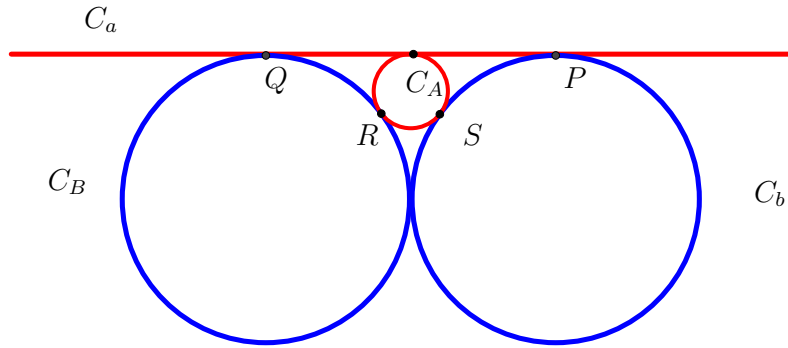
**Figura 3.39:** Cadena de círculos tangentes, con dos tangentes al eje  $x$ .

2. En el segundo caso tenemos 2 círculos tangentes a dos rectas tangentes en el infinito.



**Figura 3.40:** Círculos tangentes a 2 rectas tangentes en el infinito.

Para el primer caso, donde hay una recta, vamos a considerar el más particular, donde la circunferencia  $C_A$  es tangente a la recta  $C_a$  tal como se muestra en la siguiente figura



**Figura 3.41:** Configuración particular del Gasket.

Los círculos a considerar en el primer caso son:

$$C_a : x = 0$$

$$C_A : x^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$C_b : (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

$$C_B : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

Donde los círculos  $C_B$  y  $C_b$  son tangentes en  $-i$ , así para encontrar la aplicación  $a(z) = \frac{a_1 z + a_2}{a_3 z + a_4}$  consideramos los puntos  $z_1, z_2, z_3$  en la circunferencia  $C_A$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$z_3 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

y los puntos  $w_1, w_2, w_3$  en  $C_a$

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = -1$$

$$w_3 = 1$$

necesitamos una transformación  $a(z)$  que haga lo siguiente:

$$a(z_1) = w_1$$

$$a(z_2) = w_2$$

$$a(z_3) = w_3$$

Así tendremos

$$a(0) = \frac{a_2}{a_4} = 0$$

lo que implica que  $a_2 = 0$ , por otro lado necesitamos que  $a(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i) = -1$  de donde obtenemos la siguiente relación

$$-a_1 - 2a_1i = a_3 + 2a_3i - 5a_4 \quad (3.9)$$

por otro lado necesitamos que  $a(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i) = 1$ , de donde obtenemos la siguiente condición

$$a_1 - 2a_1i = a_3 - 2a_3i + 5a_4 \quad (3.10)$$

ahora sumando 3.9 y 3.10 obtenemos

$$-2a_1i = a_3$$

finalmente necesitamos que  $a_1a_4 - a_2a_3 = 1$ , lo que significa que  $a_1a_4 = 1$ , (ya que  $a_2 = 0$ ) por tanto la transformación  $a$  tiene la siguiente forma

$$a(z) = \frac{a_1z + a_2}{a_3z + a_4} = \frac{a_1z + 0}{-2a_1iz + \frac{1}{a_1}}$$

tenemos que dicha transformación depende del parámetro  $a_1$ , para este caso tomaremos  $a_1 = 1$ , obteniendo así la transformación

$$a(z) = \frac{z}{-2iz + 1}.$$

Para encontrar la transformación  $b(z)$  que empareje los círculos  $C_B$  y  $C_b$  vamos a considerar los puntos

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 \\ z_2 &= -i \\ z_3 &= -1 - 2i \end{aligned}$$

en  $C_B$ , y

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 \\ w_2 &= -i \\ w_3 &= 1 - 2i \end{aligned}$$

en  $C_b$  y utilizaremos el teorema 1.2.2, donde la aplicación  $\overline{S}_1(z) = \left( \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right) \left( \frac{z - z_2}{z - z_3} \right)$  envía los puntos  $z_1, z_2$  y  $z_3$  a 1, 0 y  $\infty$  respectivamente, dicha transformación tiene la forma

$$\overline{S}_1(z) = \frac{(1-i)z + 1+i}{z + 1 + 2i}$$

y de manera similar podemos encontrar una transformación  $\overline{S}_2$  que nos lleve de  $w_1, w_2$  y  $w_3$  a 1, 0 e  $\infty$  respectivamente, la transformación tiene la siguiente forma

$$\overline{S}_2 = \frac{(1+i)z + i - 1}{z - 1 + i}$$

por tanto la transformación  $b = \overline{S}_2^{-1} \circ \overline{S}_1$  me llevará de los puntos  $z_1, z_2$  y  $z_3$  a los puntos  $w_1, w_2, w_3$  respectivamente, la inversa de la transformación  $S_2$  es

$$\overline{S}_2^{-1} = \frac{\frac{(1-2i)}{2}z + \frac{i-1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{(i+1)}{2}}$$

finalmente la transformación  $b$  tiene la siguiente forma

$$b = \overline{S}_2^{-1} \circ \overline{S}_1 = \frac{-(1+i)z - i}{-iz + (1-i)}$$

Así, para la configuración del primer caso

$$C_a : x = 0$$

$$C_A : x^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$C_b : (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$C_B : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

$a(z) = \frac{z}{-2iz+1}$  empareja  $C_A$  y  $C_a$ . Por otro lado  $b(z) = \frac{-(1+i)z-i}{-iz+(1-i)}$  tiene determinante  $-1$ , así dividiendo por  $-i$  tendríamos que

$$b(z) = \frac{(1-i)z+1}{z+1+i}$$

empareja los círculos  $C_B$  y  $C_b$ .

Para el segundo caso, la configuración de círculos es la siguiente:

$$C_a : x^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$C_A : x^2 + y^2 = 1$$

$$C_B : x = -1$$

$$C_b : x = 1$$

La transformación  $b$  que nos lleva de  $C_B$  a  $C_b$  es una traslación de la forma  $b(z) = z + 2$ , por tanto su matriz asociada sería

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por otro lado, para la transformación  $a(z)$  que empareje las circunferencias

$$C_A : x^2 + y^2 = 1$$

$$C_a : x^2 + (y-2)^2 = 1$$

Tomaremos los puntos

$$z_1 = -1$$

$$z_2 = 1$$

$$z_3 = i$$

en la circunferencia  $C_A$ , por otro lado, consideremos los puntos

$$\begin{aligned}w_1 &= -2 + i \\w_2 &= 2 + 2i \\w_3 &= i\end{aligned}$$

de la circunferencia  $C_a$ , necesitamos que la transformación  $a(z)$  haga lo siguiente

$$\begin{aligned}a(z_1) &= w_1 \\a(z_2) &= w_2 \\a(z_3) &= w_3\end{aligned}$$

Así, obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}a(-1) &= \frac{-a_1 + a_2}{-a_3 + a_4} = -2 + i \\a(1) &= \frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4} = 2 + 2i \\a(i) &= \frac{a_1 i + a_2}{a_3 i + a_4} = i\end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned}a_1 &= 2ia_3 - a_4 \\a_2 &= 2ia_4 + a_3\end{aligned}$$

así la transformación sería

$$a(z) = \frac{(2ia_3 - a_4)z + 2ia_4 + a_3}{a_3z + a_4}$$

donde también necesitamos que el discriminante de la matriz asociada sea 1, por tanto

$$(2ia_3 - a_4)a_4 - a_3(2ia_4 + a_3) = 1$$

de donde obtenemos

$$a_3^2 + a_4^2 = -1$$

tomando  $a_4 = 0$ , entonces  $a_3 = \pm i$ , tomaremos  $a_3 = -i$ , así la matriz asociada sería

$$a = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Así para la segunda configuración

$$\begin{aligned}C_a &: x^2 + (y - 2)^2 = 1 \\C_A &: x^2 + y^2 = 1 \\C_b &: x = 1 \\C_B &: x = -1\end{aligned}$$

Donde la transformación  $a(z) = \frac{2z - i}{-iz}$  empareja los círculos  $C_A$  y  $C_a$  y la transformación

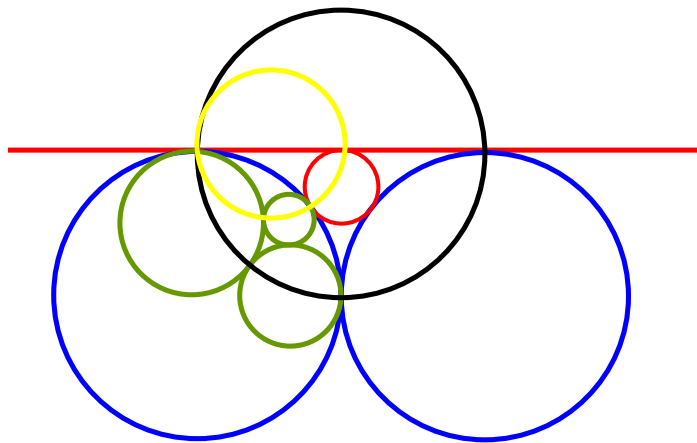
$$b(z) = z + 2$$

empareja los círculos  $C_B$  y  $C_b$ .

El grupo del Gasket es llamado *doble cúspide*, algunas veces es llamado *cúspide maximal*. Puesto que en el disco el grupo irá llenándolo con triángulos ideales, el cual es un grupo de simétrías al cual llamaremos *grupo modular*, el cual ha tenido una enorme contribución en el mundo de las matemáticas. Nos vamos a centrar en el disco

$$(x + 1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

y necesitamos encontrar el subgrupo de todas las transformaciones en el grupo del Gasket que mapean el interior en sí mismo; éste subgrupo o cualquiera de sus conjugadas es el que llamaremos grupo modular, las siguientes figuras muestran la configuración en el disco



**Figura 3.42:** Generadores del grupo modular.

El grupo modular es un nuevo tipo de "grupos de collar"; hecho por el caso omiso de todo el resto del Gasket y viendo justamente en el disco la acción producida por  $a$  y  $Bab$ , donde la transformación  $a$  empareja  $C_A$  con  $C_a$  y la transformación  $BAb$  empareja  $C_{Ba}$  con  $C_{BA}$  ya que

$$BAb(C_{Ba}) = BAb(B(C_a)) = BA(C_a) = B(C_A) = C_{BA}.$$

Tal como indica la siguiente figura

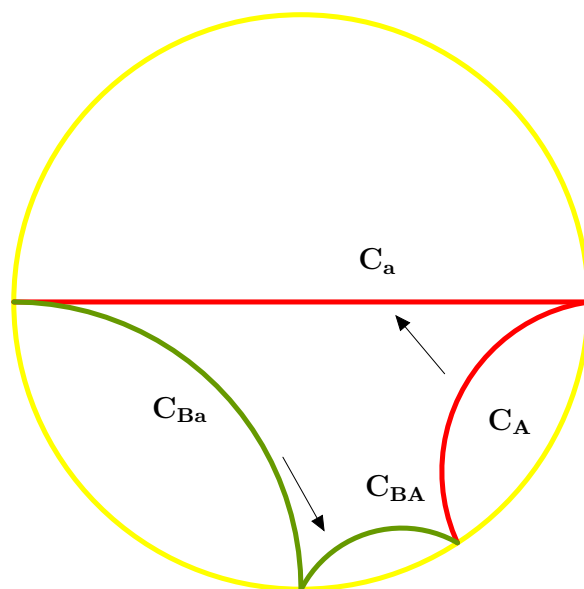


Figura 3.43: Generadores del grupo modular.

**Definición 3.7.2.** *El grupo modular aritmético. El grupo modular aritmético es construido con el emparejamiento de cuatro círculos de Schottky con puntos de tangencia en  $-1, 0, 1$  e  $\infty$ .*

Este grupo es conjugado a al grupo modular. La configuración inicial se muestra en la siguiente figura

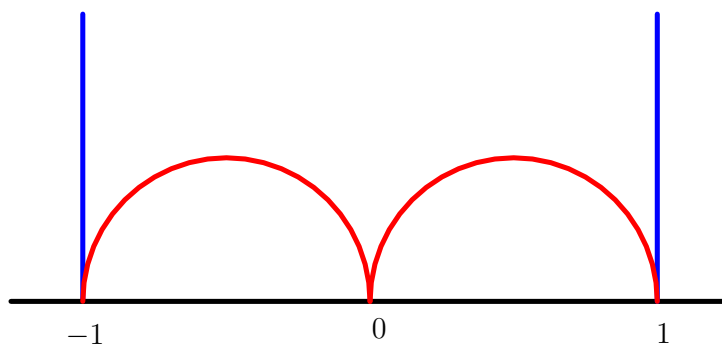


Figura 3.44: Generadores del grupo aritmético modular.

La configuración estaría dada por

$$\begin{aligned}
 C_A : & \quad (x + 1/2)^2 + y^2 = 1/4 \\
 C_a : & \quad (x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4 \\
 C_B : & \quad x = -1 \\
 C_b : & \quad x = 1
 \end{aligned}$$

Las circunferencias  $C_B$  y  $C_b$  están emparejadas por la traslación  $b(z) = z + 2$ , por tanto su matriz asociada sería

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar  $a(z) = \frac{a_1z + a_2}{a_3z + a_4}$ , consideraremos los puntos

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_2 &= -1 \\ z_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

en la circunferencia  $C_A$ , mientras que en la circunferencia  $C_a$  tomamos

$$\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ w_2 &= 1 \\ w_3 &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

ahora necesitaremos que la transformación  $a(z)$ , haga lo siguiente

$$\begin{aligned} a(z_1) &= w_1 \\ a(z_2) &= w_2 \\ a(z_3) &= w_3 \end{aligned}$$

por tanto :

$a(0) = 0$  lo que implica  $a_2 = 0$ . Por otro lado

$$\begin{aligned} a(-1) &= 1 \\ a(-1/2 + i/2) &= 1/2 + i/2 \end{aligned}$$

de la condición  $a(-1) = 1$  obtenemos  $a_1 = a_3 - a_4$ , mientras de la condición  $a(-1/2 + i/2) = 1/2 + i/2$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{a_1(-1/2 + i/2)}{a_3(-1/2 + i/2) + a_4} &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2}i &= -a_3 \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) + a_4 \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \\ &= -\frac{a_3}{2} + \frac{a_4}{2} + i\frac{a_4}{2} = \frac{a_4 - a_3}{2} + \frac{a_4}{2}i = -\frac{a_1}{2} + \frac{a_4}{2}i \end{aligned}$$

de donde obtenemos que  $a_1 = a_4$  y así  $a_3 = a_1 + a_4$ , pero como  $a_1a_4 = 1$ , entonces tanto  $a_1 = a_4 = 1$ , así  $a_3 = 2$ , por tanto la transformación  $a(z)$  sería  $\frac{z}{2z + 1}$  y su matriz asociada sería

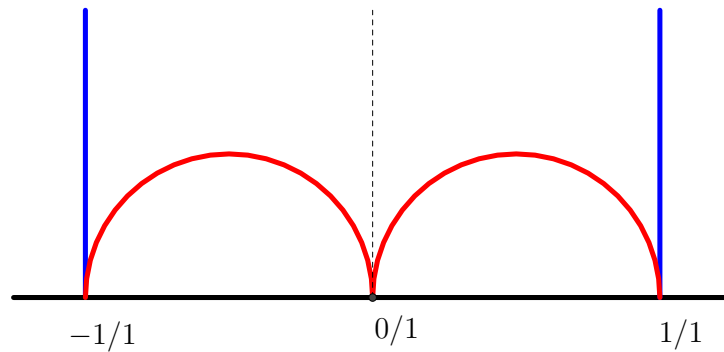
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al cubrimiento de triángulos ideales por medio de los generadores del grupo modular, le llamaremos *Teselación Modular*, la cual tiene una bella e interesante relación entre los números racionales, esto se debe a que justamente los puntos donde se van acumulando las semicircunferencias sobre el eje  $x$  son números racionales.



**Definición 3.7.3.** *Un cuadrilátero ideal es una región básica de 4 lados, acotada por cuatro arcos sólidos.*

La Teselación de Farey surge de la configuración del grupo modular



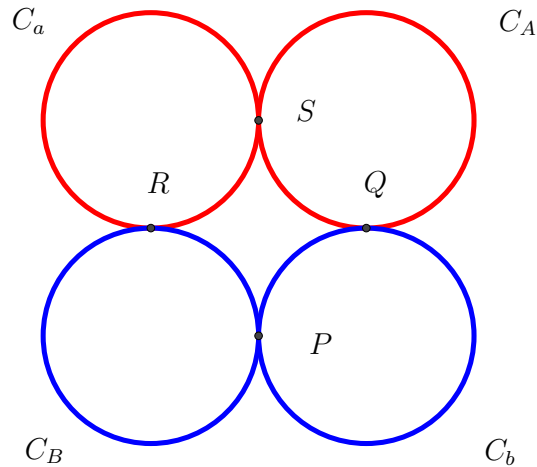
**Figura 3.45:** Inicio de la Teselación de Farey.

Para la teselación de Farey, podemos concluir por simple inspección que

1. Los vértices de los triángulos ideales acumulados son números racionales  $\frac{p}{q}$ .
2. Si  $\frac{r}{s}$  y  $\frac{p}{q}$  son dos vértices del mismo arco circular, éstos van a cumplir que  $ps - rq = \pm 1$ .
3. Si  $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$  y son vértices de un arco circular, entonces el tercer vértice de ellos es

$$\frac{r}{s} \oplus \frac{p}{q} = \frac{r+p}{s+q}.$$

Esta forma de sumar fracciones es conocida como la *suma Farey*. Como hemos dicho anteriormente, el grupo modular es un nuevo tipo de "grupo de collar", éste está hecho por el emparejamiento de cuatro círculos tangentes y la única diferencia de los grupos de *Schottky* que aparecieron en su momento es que ahora no estamos emparejando círculos opuestos sino, adyacentes. Las condiciones trabajadas anteriormente siguen siendo ciertas todavía, pero porque estamos emparejando los círculos en un patrón diferente, podríamos esperar que elementos distintos deben ser parabólicos para lograr que las imágenes de los círculos se encojan, ahora bien, nuestra configuración va a ser la siguiente



**Figura 3.46:** Configuración inicial para el grupo aritmético.

Donde además deberá cumplirse  $a(P) = R$  y  $b(R) = P$  los cuatro puntos de tangencia de los círculos son

$$\begin{aligned} S &= \text{Fix}(a) \\ Q &= \text{Fix}(b) \\ P &= \text{Fix}(ba) \\ R &= \text{Fix}(ab) \end{aligned}$$

De manera similar a las construcciones anteriores el orden, para los círculos imágenes cerca de  $S$  y  $Q$  se van haciendo cada vez más pequeños, los generadores  $a$  y  $b$  deben ser parabólicos. Por otra parte  $ba$  también debe de ser parabólico para hacer que los círculos se encojan en  $P$ . Notemos que  $ab$  y  $ba$  son conjugadas ya que  $b(ab)B = ba$ , así, hablar de que  $ab$  o  $ba$  es parabólico es la misma cosa. El dato verdaderamente sorprendente es que todos los grupos con esos 3 elementos parabólicos automáticamente son conjugados. El árbol para este caso se muestra a continuación

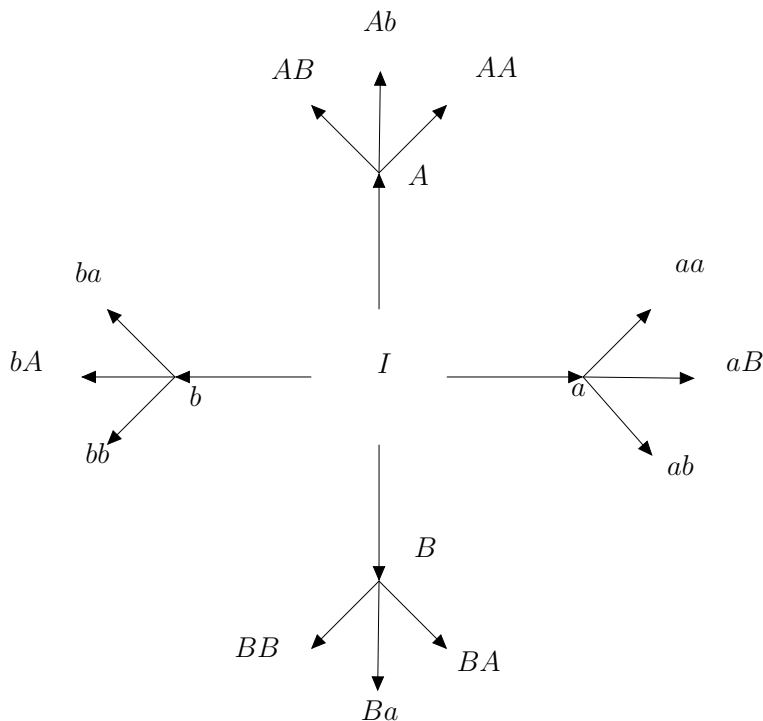


Figura 3.47: Primeros niveles del árbol modular.

En resumen un collar modular es una cadena tangente de 4 círculos emparejados adyacentemente por transformaciones  $a$  y  $b$ , donde las transformaciones  $a$ ,  $b$  y  $ab$  son todas parabólicas y  $S = \text{Fix}(a)$ ,  $Q = \text{Fix}(b)$ ,  $a(P) = R$ ,  $b(R) = P$  así que  $P = \text{Fix}(ba)$  y  $R = \text{Fix}(ab)$ . El grupo generado siempre es conjugado al grupo modular estandar generado por

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.8. Más ejemplos de grupos Quasifuchsianos.

En los ejemplos construidos hasta este momento, hemos tenido especial cuidado con los puntos tangencia y además, para obtener grupos Quasifuchsianos debíamos imponer la condición de que la traza del conmutador fuera  $-2$ , sin embargo gracias a la identidad de Markov

$$(\text{Tra})^2 + (\text{Trb})^2 + (\text{Trab}) = \text{Tra} \cdot \text{Trb} \cdot \text{Trab}.$$

Si escogemos éstas matrices  $a$ ,  $b$  y  $ab$  tal que cumplan la ecuación de Markov, tendríamos directamente la condición de que el conmutador sea  $-2$ , así como también, imponiendo las restricciones que ambas transformaciones tengan matrices asociadas con determinante 1. Así podríamos aplicar estas transformaciones  $a$  y  $b$  a los círculos de *Schottky* trabajados anteriormente. Hasta este momento hemos trabajado con grupos donde los generadores tenían traza real, pero no hemos dicho que puede suceder, si la traza es un número complejo, en este caso estamos en condiciones recíprocas, ahora vamos a dar las trazas de las transformaciones  $a$  y  $b$  y vamos a encontrar los

generadores y vamos a utilizar un nuevo algoritmo, el cual a diferencia del *BFS* utilizado para los dibujos de las secciones anteriores, no graficará los discos encadenados, si no los puntos límites, éste algoritmo recibe el nombre de *DFS* (Depth - First - Search), que utiliza una función recursiva para recorrer los árboles de palabras, recibirá un número  $\epsilon$  que permitirá conocer si algún círculo encadenado tiene radio menor que  $\epsilon$ , el algoritmo se presenta en la sección de Anexos. El proceso de encontrar las matrices asociadas a las transformaciones  $a$  y  $b$  recibe el nombre de *Recíproco de Grandma's*, los pasos son

1. Elegimos dos números complejos cualesquiera, a los que llamaremos  $T_a$  y  $T_b$ .
2. Consideramos una de las soluciones  $x$  de la ecuación

$$x^2 - T_a T_b x + T_a^2 + T_b^2 = 0$$

3. Luego de aplicar las condiciones de los determinantes de las matrices asociadas, considerar directamente la traza de la transformación  $ab$  las entradas para  $a$  y  $b$ , las cuales están dadas por

$$a = \begin{pmatrix} \frac{T_a}{2} & \frac{T_a T_{ab} - 2T_b + 4i}{(2T_{ab} + 4)\alpha} \\ \frac{(T_a T_{ab} - 2T_b - 4i)\alpha}{2T_{ab} - 4} & \frac{T_a}{2} \end{pmatrix}.$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{T_b - 2i}{2} & \frac{T_b}{2} \\ \frac{T_b}{2} & \frac{T_b + 2i}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Por otro lado, la transformación  $ab$  está dada por

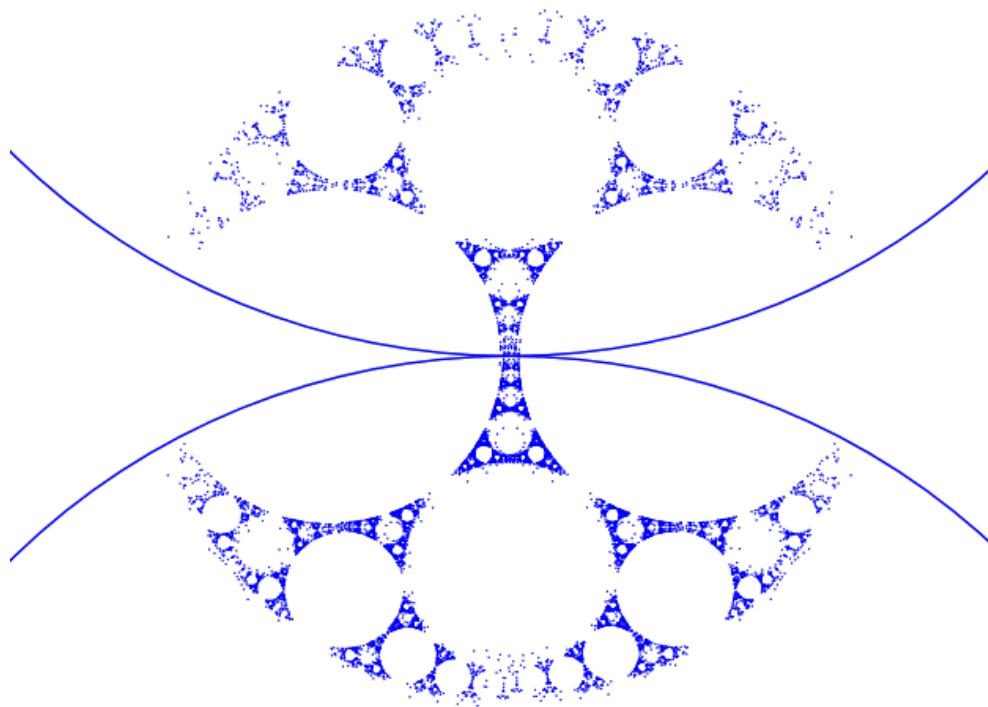
$$ab = \begin{pmatrix} \frac{T_{ab}}{2} & \frac{T_{ab} - 2}{2\alpha} \\ \frac{(T_{ab} + 2)\alpha}{2} & \frac{T_{ab}}{2} \end{pmatrix}.$$

donde

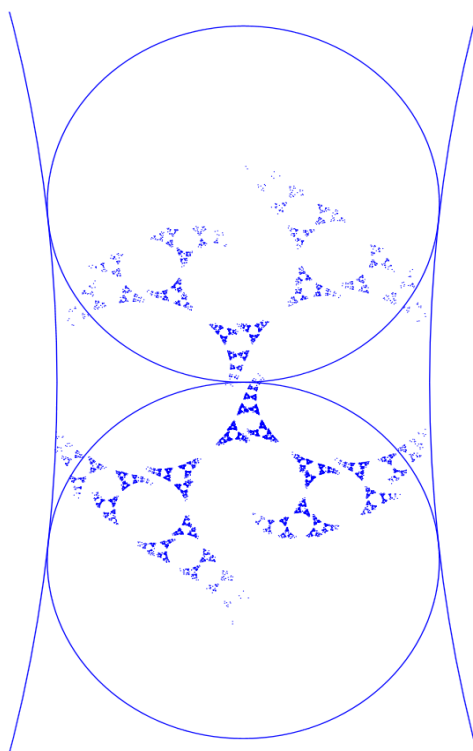
$$\alpha = \frac{(T_{ab} - 2)T_b}{T_b T_{ab} - 2T_a + 2iT_{ab}}.$$

Podemos computar  $b$  y  $ab$ , ya que  $a = (ab)B$ .

Las siguientes figuras corresponden a la configuración de la sección 3.6, con la diferencia que ahora vamos a considerar la forma del recíproco de Grandma's:



**Figura 3.48:**  $x_0 = 3$ ;  $y_0 = R = 2$ ,  $T_a = 1.64213876 - 0.76658841i$ ,  $T_b = 2$



**Figura 3.49:**  $x_0 = 100$ ;  $y_0 = R = 2$ ,  $T_a = T_b = 1.91 + 0.05i$

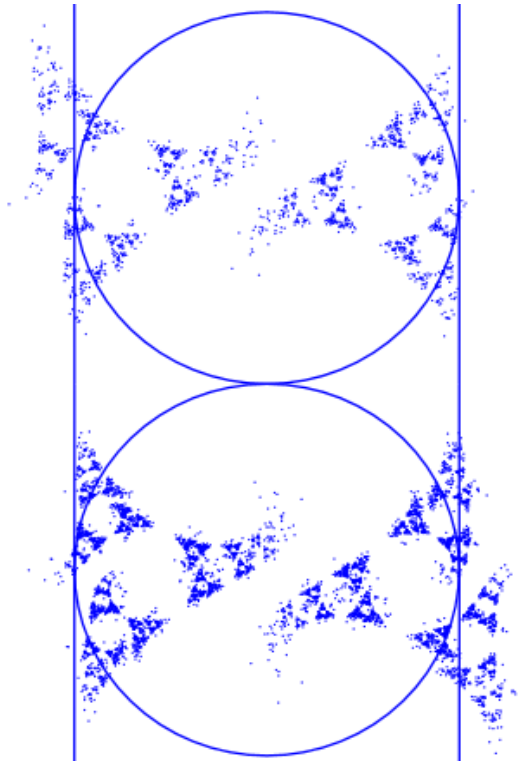


Figura 3.50:  $x_0 = 1e^{10}$ ;  $y_0 = R = 2$ ,  $T_a = 1.87 + 0.1i$ ,  $T_b = 1.87 - 0.1i$

## 3.9. Definición formal de grupos Kleinianos.

### 3.9.1. Discontinuidad.

En este momento haremos un recorrido por los fundamentos necesarios para la construcción de grupos Kleinianos y daremos algunas propiedades de los mismos, puesto que ya en las secciones anteriores hemos construido algunos ejemplos básicos, la idea será poder verificar las propiedades por medio de los dibujos de sus conjuntos límites, así como también hacer algunos enlaces interesantes entre otras ramas de la matemática, como lo son las superficies de Riemann. Consideremos un grupo de transformaciones de Möbius  $G$  y un conjunto  $X \neq \emptyset$ , éste da lugar a una aplicación

$$G \times X \rightarrow X$$

donde a cada par  $(g, x)$  se le asocia  $g(x)$ , es decir, esta aplicación es tradicionalmente definida como la acción del grupo  $G$  sobre el conjunto  $X$ , donde además nos interesa el caso en el que  $X$  es un espacio métrico y donde todos los elementos de  $G$  sean isometrías de  $(X, d)$ ; en este caso diremos que  $g$  actúa por isometrías sobre  $(X, d)$  o que tiene una acción isométrica de  $g$  sobre  $(X, d)$ . En el capítulo 2 se demostró que el espacio  $(\mathbb{H}^2, d_{hip})$  es un espacio métrico y además sabemos que las transformaciones  $z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$  con  $a, b, c$  y  $d \in \mathbb{R}$  y con  $ad - bc = 1$  forman un grupo de isometrías, esto es una consecuencia directa del teorema 2.4.1.

**Definición 3.9.1.** Sea  $X$  un espacio métrico<sup>7</sup> y sea  $G$  un grupo de homeomorfismos de  $X$  en sí

<sup>7</sup>En esta definición también  $X$  puede ser un espacio topológico.

mismo. Un grupo  $G$  actúa en un conjunto  $X$ , si existe una función

$$\mu : G \times X \rightarrow X$$

tal que  $\mu(g_2g_1, x) = \mu(g_2, \mu(g_1, x))$  y  $\mu(I_d, x) = x$ .

Diremos que la acción de  $G$  en un punto  $x \in X$  es libremente discontinua, si existe un vecindario  $U$  de  $x$  tal que  $g(U) \cap U = \emptyset$ ,  $\forall g \in G \neq I_d$ . El vecindario  $U$  es llamado un buen vecindario de  $x$ .

**Definición 3.9.2.** El conjunto de puntos en los cuales la acción de  $G$  es libremente discontinua es llamado conjunto libre regular, y es denotado  ${}^\circ\Omega = {}^\circ\Omega(G)$ .<sup>8</sup>

**Definición 3.9.3.** Un subconjunto  $Y \subset X$  es  $G$ -invariante o invariante bajo  $G$ , si  $g(Y) = Y$  para todo  $g \in G$ .

**Definición 3.9.4.** La clase de equivalencia de la acción del grupo  $G$  sobre cualquier conjunto  $Y$  se define de la siguiente manera:

$$x \equiv y \quad \text{si y sólo si} \quad \exists g \in G \quad g(x) = y$$

diremos que  $x$  y  $y$  son  $G$ -equivalentes o equivalentes bajo  $G$ .

La topología usual sobre el espacio

$$Y/G$$

es la definida por la proyección natural

$$p : Y \rightarrow Y/G$$

ya que es continua y abierta.

**Definición 3.9.5.** Un subgrupo  $G$  de transformaciones de Möbius que es libremente discontinuo en algún punto  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  es llamado un grupo Kleiniano.

En general el conjunto  $\hat{\mathbb{C}}/G$  es un espacio complicado, más no así el conjunto  ${}^\circ\Omega/G$ . La siguiente proposición establece una propiedad muy interesante del cociente  ${}^\circ\Omega/G$ .

**Proposición 3.9.1.** El cociente  ${}^\circ\Omega/G$  es un espacio Hausdorff.

*Demostración.* Necesitamos demostrar que para dos puntos distintos  $x$  e  $y$  de  ${}^\circ\Omega$ , podemos encontrar buenos vecindarios de  $U$  y  $V$  de  $x$  e  $y$  respectivamente, de tal forma que  $U \cap V = \emptyset$ . Supongamos que  $U \cap V \neq \emptyset$  y puesto que  $U$  y  $V$  son abiertos entonces para algún punto  $x \in U$  y  $x \in V$  podemos encontrar un vecindario lo suficientemente pequeño que lo contenga y si consideramos una sucesión  $x_n \rightarrow x$ , ese vecindario  $W$  contendría infinitos puntos de la sucesión que a la vez estarían en  $U$  y en  $V$ , por otro lado, como los elementos de  $G$  son transformaciones continuas tenemos que  $g(x_n) \rightarrow g(x)$  tanto en  $g(U)$  como en  $g(V)$  lo cual contradice el hecho de que  $U$  y  $V$  sean buenos vecindarios. ■

**Proposición 3.9.2.** Todo grupo Kleiniano es numerable.

*Demostración.* Revisar [1], para una demostración. Por otro lado en las secciones anteriores, en las construcciones de nuestros ejemplos, los elementos de los grupos obtenidos iban obteniéndose a partir de un árbol, por tanto los conjuntos obtenidos también son numerables. ■

<sup>8</sup>Este conjunto tiene relación con el complemento del conjunto límite de un grupo Kleiniano, dada en la definición 3.2.2.

### 3.9.2. Grupos discretos.

**Definición 3.9.6.** Sea  $G < SL(2, \mathbb{C})$ , se dice que  $G$  es discreto si no existe una sucesión de matrices distintas,  $T_n \in G$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $T_n \rightarrow T$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde  $T$  es una matriz de  $2 \times 2$  con entradas complejas.

**Proposición 3.9.3.** Sea  $G$  un subgrupo no discreto de transformaciones de Möbius. Entonces existe una sucesión de elementos distintos de  $G$  que convergen a la identidad.

*Demostración.* Como  $G$  no es discreto, existe una secuencia de elementos  $\{g_m\}$  de  $G$  convergen a algún elemento  $g \in \mathbb{M}$ . Normalizando  $G$  tenemos que  $g$  es de la forma  $z \rightarrow z + 1$  o de la forma  $z \rightarrow k^2 z$ . En cada caso, podemos verificar que  $g_{m+1} \circ g_m^{-1}$  convergen a la identidad. ■

**Proposición 3.9.4.** Sea  $G$  es un grupo Kleiniano. Entonces  $G$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{M}$ .

*Demostración.* Ver [1], para una demostración. ■

**Corolario 3.9.1.** Sea  $G < SL(2, \mathbb{R})$  discreto, entonces  $(^\circ\Omega)^c \subset \hat{\mathbb{R}}$ .

### 3.9.3. Conjuntos límites de grupos Kleinianos.

**Definición 3.9.7.** Un punto  $x$  es un punto límite para el grupo Kleiniano  $G$  si existe un punto  $z \in ^\circ\Omega$ , y una sucesión  $\{g_m\}$  de elementos distintos de  $G$  con  $g_m(z) \rightarrow x$ . El conjunto de todos los puntos límites es llamado conjunto límite y lo denotaremos  $\Lambda = \Lambda(G)$ .

Por otro lado, como todo vecindario de un punto de  $\Lambda$  contiene infinitas traslaciones de algún punto,  $\Lambda \cap ^\circ\Omega = \emptyset$ .

**Teorema 3.9.1.** El conjunto límite de un grupo Kleiniano es Cerrado,  $G$  - invariante y nada denso sobre  $\hat{\mathbb{C}}$ .

En los ejemplos construidos en las secciones anteriores podemos verificar claramente la primera afirmación, ya que los conjuntos límites son circunferencias (para el caso de grupos Fuchsianos) o porciones de circunferencias (para el caso de grupos de Schottky) o curvas de Jordan más generales (para el caso de grupos Quasifuchsianos). En [5] puede encontrarse una demostración formal.

**Teorema 3.9.2.** Si  $\Lambda$  contiene más de dos puntos, entonces éste es perfecto.

*Demostración.* Para una demostración, ver [5]. ■

Un grupo Kleiniano  $G$  cuyo conjunto límite consiste de a lo más dos puntos es llamado *grupo elemental*; los otros casos son llamados *no elementales*; así los conjuntos límites que dibujamos anteriormente corresponden a grupos no elementales. La siguiente definición referente a la acción discontinua es un tanto más particular a la dada anteriormente, esta vez nos restringimos a un subconjunto finito del grupo.

**Definición 3.9.8.** Diremos que  $G$  actúa discontinuamente en  $x \in X$  si existe un vecindario  $U$  de  $x$ , tal que  $g(U) \cap U = \emptyset$  para todo subconjunto finito de elementos  $g$  de  $G$ . El conjunto de puntos en los cuales  $G$  actúa discontinuamente es llamado el conjunto de discontinuidad o conjunto regular y se denotará de ahora en adelante como  $\Omega = \Omega(G)$ .

**Teorema 3.9.3.** Para cualquier grupo Kleiniano  $G$ ,  $\hat{\mathbb{C}}$  es la unión de  $\Lambda$  y  $\Omega$ .



### 3.10. Dominios fundamentales y topología de grupos Kleinianos.

Ya mencionamos anteriormente que el cociente  $\Omega/G$  donde  $G$  es un grupo Kleiniano es una superficie de Riemann, ahora bien, pensar en como dibujar una imagen de superficie asociada a un grupo Kleiniano podría no ser fácil, así que necesitamos de un dominio donde esto sea posible. Los conjuntos y dominios fundamentales nos llevan al estudio de las teselaciones del plano hiperbólico y el espacio hiperbólico tridimensional. En el caso bidimensional es de gran utilidad en la teoría de los números, ya hablamos de esto anteriormente del grupo modular aritmético; en el espacio hiperbólico tridimensional lo es para la topología de variedades de dimensión 3.

#### 3.10.1. Dominios fundamentales.

Dado un grupo discreto  $G$  de isometrías del plano o el espacio hiperbólico, para referirnos al plano o espacio hiperbólico escribiremos  $\mathbb{H}^{2,3}$ .

**Definición 3.10.1.** *Un domino fundamental para la acción  $G$  sobre el plano o el espacio hiperbólico, es un conjunto abierto  $F \subset \mathbb{H}^{2,3}$  que satisface las siguientes condiciones*

- Si  $\bar{F}$  denota la clausura topológica de  $F$  en  $\mathbb{H}^{2,3}$ , entonces para elementos arbitrarios  $g_1, g_2 \in G$  tenemos que  $g_1(F) \cap g_2(\bar{F}) = \emptyset$ .*
- La unión  $\cup_{g \in G} g(\bar{F})$ ,  $\forall g \in G$  es siempre  $\mathbb{H}^{2,3}$ .*

En particular, si  $F$  es un dominio fundamental, entonces toda traslación  $g(F)$  de éste por un elemento de  $G$  también es un dominio fundamental. El método de construcción de un dominio fundamental para  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{H}^{2,3})$  se da siempre que tengamos un grupo actuando sobre un espacio métrico localmente compacto, donde la métrica satisface que dados dos puntos cualesquiera  $x_1$  y  $x_2$  existe un tercer punto  $x_3$  a la misma distancia de ambos puntos  $x_1, x_2$ . Se dice que  $F$  es un poliedro y es llamado Dominio fundamental de Dirichlet o región Dirichlet para  $G$ .

Para la construcción tenemos:

Seleccionamos un punto  $x_0 \in \mathbb{H}^{2,3}$  que nos sea punto fijo por ningún elemento de  $G$  y consideramos el conjunto  $F$  de esos puntos en  $\mathbb{H}^{2,3}$  donde la distancia hiperbólica es estrictamente menor que la distancia a cualquier punto de las  $G$ -órbitas de  $x_0$ . Esto es:

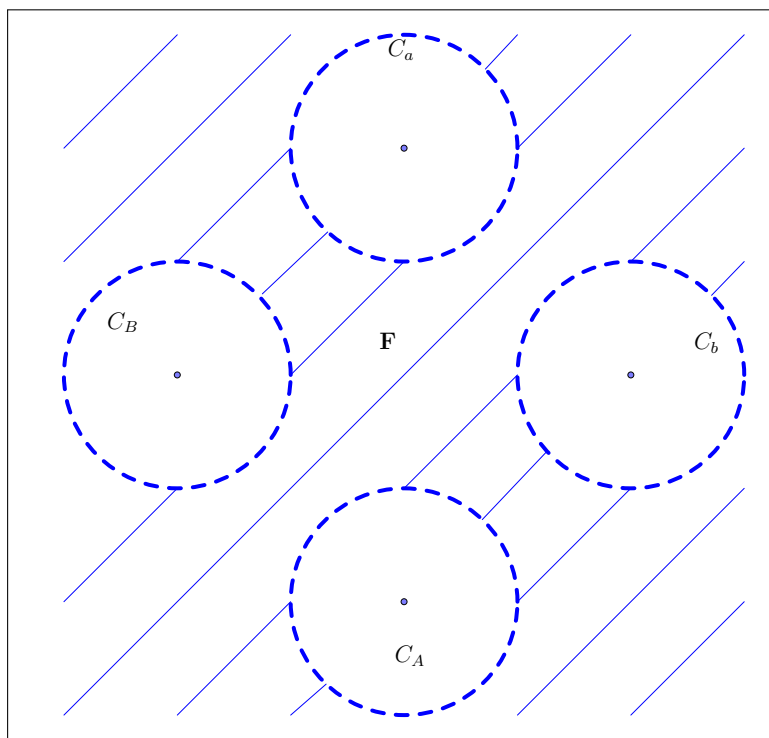
$$F = \{x \in \mathbb{H}^{2,3} / d_h(x, x_0) < d_h(x, g(x_0)), \forall g \in G\}.$$

La región  $F$  es convexa en el sentido hiperbólico y su frontera es una colección numerable de caras  $(n - 1)$  dimensionales que están relacionada a pares y quiénes emparejan esas cara son los generadores del grupo. En general para grupos construidos en este trabajo, el conjunto fundamental será siempre el exterior de los círculos que se han emparejado mediante transformaciones de Möbius. A continuación presentamos las regiones fundamentales para los grupos construidos en las secciones anteriores.

#### Grupos de Schottky:

Recordemos que los grupos de Schottky se obtuvieron por el emparejamiento de cuatro círculos iniciales disjuntos, ninguno dentro del otro, círculos a los que llamamos  $C_a, C_A, C_b$  y  $C_b$ , que estaban

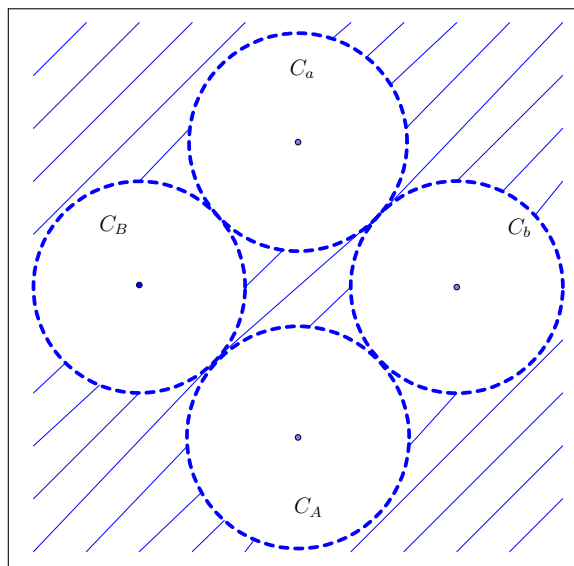
emparejadas por las transformaciones  $a$  y  $b$ , donde  $a$  emparejaba  $C_A$  con  $C_a$  y  $b$  emparejaba  $C_B$  con  $C_b$ .



**Figura 3.51:** Región fundamental para grupos de Schottky.

### Grupos Fuchsianos.

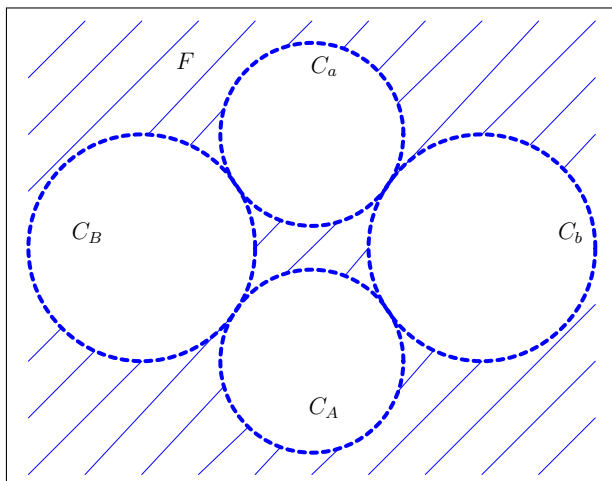
En este caso la región fundamental estará dada por la unión de 2 polígonos hiperbólicos que resultan del exterior de los cuatro círculos tangentes  $C_a, C_A, C_B, C_b$ .



**Figura 3.52:** Región fundamental para grupos Fuchsianos.

**Grupos Quasifuchsianos:**

Para el caso de grupos Quasifuchsianos tenemos :



**Figura 3.53:** Región fundamental para grupos Quasifuchsianos.

**3.10.2. Relación entre grupos Kleinianos y Superficies de Riemann.**

Clásicamete, los grupos Kleinianos fueron estudiados por su conexión con las superficies de Riemann. Actualmente se estudian por su conexión entre variedades hiperbólicas tridimensionales, las cuales han sido estudiadas en gran medida por Thurston entre otros.

**Definición 3.10.2.** *Una superficie de Riemann  $S$  es una variedad compleja 1 - dimensional; esto es  $S$  es un espacio Hausdorff, conexo, donde todo  $s \in S$  tiene un vecindario  $U$  y un homeomorfismo asociado  $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ , donde, definimos la composición de uno de esos homeomorfismos con el inverso de otro, esto es un holomorfismos. El homeomorfismo  $\psi$  es llamado coordenada local en  $s$ . Con el fin de hacer análisis complejo localmente, no distinguiremos entre  $U$  y  $\psi(U)$ ; esto es, vamos a considerar a  $\psi(U)$  como un vecindario de  $s$ .*

El siguiente teorema es muy importante para este trabajo ya que de alguna manera establece una relación directa de un grupo Kleiniano  $G$  con superficies de Riemann.

**Teorema 3.10.1.** *Sea  $G$  un grupo Kleiniano entonces  $S = \Omega/G$  es una superficie de Riemann.*

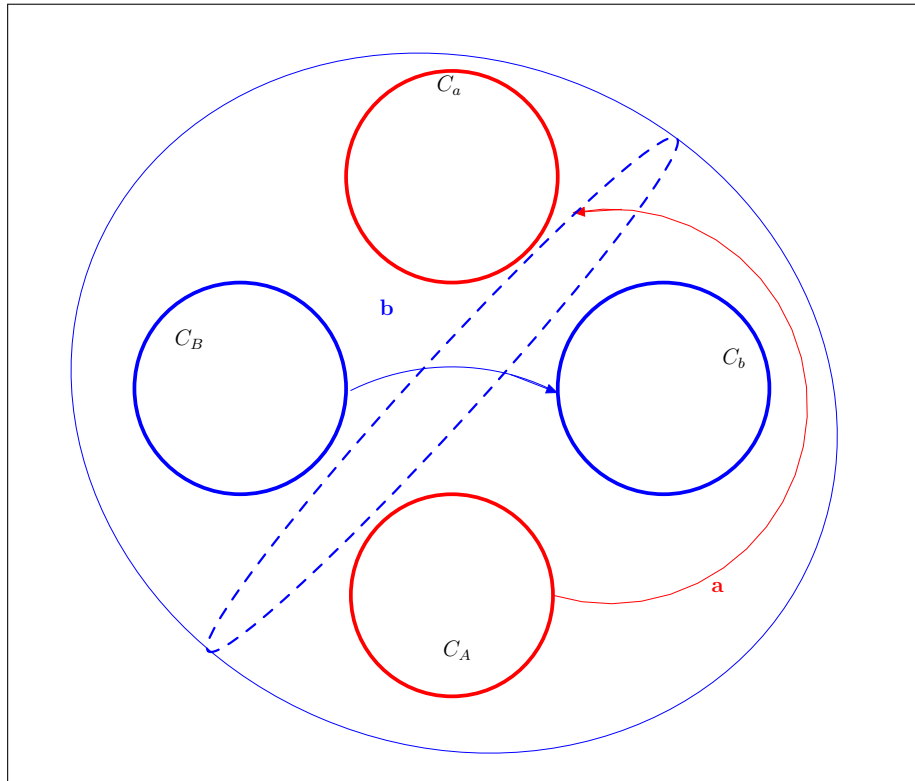
Los siguientes teoremas permitirán establecer la superficie de Riemann asociada a los ejemplos construidos en este trabajo:

**Teorema 3.10.2.** *(Retrosección de Koebe)<sup>9</sup>, Se  $S$  una superficie de Riemann de género  $g \geq 1$ . Entonces existe un grupo de Schottky de género  $g$  tal que  $\Omega(G)/G$  es holomorficamente equivalente a  $S$ .*

Para comprender la topología del espacio  $\Omega/G$  donde  $G$  es un grupo de Schottky, vamos a considerar la configuración de círculos emparejados, junto con sus respectivos generadores, los

<sup>9</sup>Una demostración de éste teorema puede encontrarse en L. Bears, *Automorphic forms for Schottky groups*, Adv. in Math. 16(1975), 332-361.

cuales los pesaremos en el plano complejo extendido, esto es decir en la esfera de Riemann y pegar las fronteras de los respectivos discos emparejados, geoméricamente:



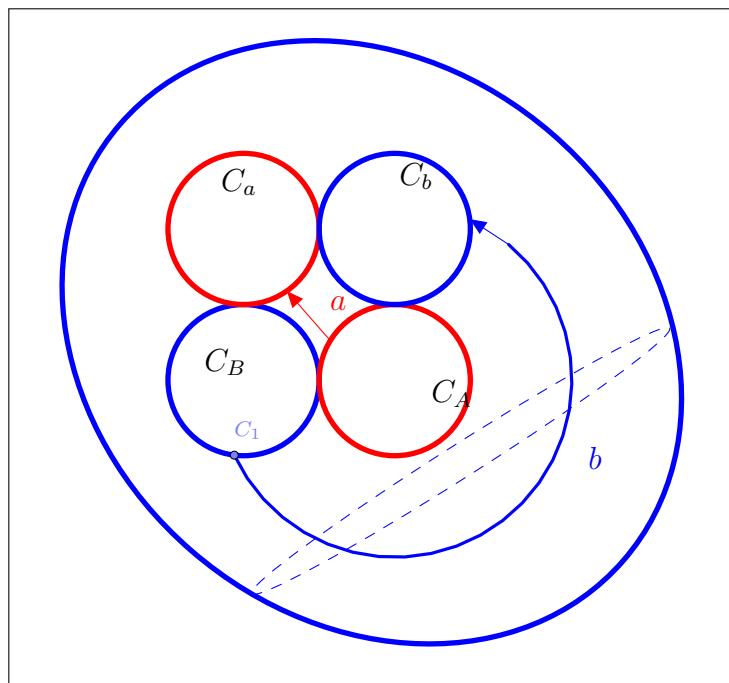
**Figura 3.54:** Topología de un grupo de Schottky.

Después de pegar los círculos tal como indican los respectivos generadores  $a$  y  $b$ , obtendremos un 2 toro, en general si tenemos  $2n$  círculos emparejados obtendremos un  $n$  toro o una superficie de género  $n$ .

**Teorema 3.10.3.** *Si  $G$  es un grupo discreto isomorfo al grupo fundamental de una superficie de Riemann de género  $g$  tal que  $\Omega(G) \neq \emptyset$  (es decir, un grupo Kleiniano) tal que todo elemento de  $G$ , diferente de la identidad, es loxodrómico, entonces  $\Delta(G)$  es una curva de Jordan y cada disco acotado por esta curva es invariante por  $G$  (es decir,  $G$  es Quasifuchsiano)<sup>10</sup>*

De la misma forma en que hicimos para el caso de grupos de Schottky, consideramos nuestra configuración tangente en la esfera de Riemann e identificamos los círculos respectivamente como indican los generadores, geoméricamente:

<sup>10</sup>La demostración de éste teorema puede encontrarse en B. Maskit, *On a class of kleinian groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 442 (1969),1-8.



**Figura 3.55:** Topología de un grupo Quasifuchsiano.

Luego de hacer las respectivas identificaciones mediante los generadores, obtendremos lo que se conoce como un **once-punctured torus group**, o simplemente un toro con un "pinchazo".

---

# Anexos

---

Para la realización de las imágenes de la iteración de las transformaciones de Möbius, mediante los círculos emparejados, hemos utilizados 3 algoritmos que han sido ejecutados con el software matemático libre, Sage Math.

## I. Algoritmo BFS.

El código implementado para la generación de las figuras de la sección [3.1.4](#)

```
def grafCircunferencia(c,color=None,z=0,rellena=True):
    """c es una tupla formada por dos elementos:
    c[0]: Un número complejo
    c[1]: Un número real positivo
    """
    if color:
        return circle((real(c[0]),imag(c[0])),c[1],
                      rgbcolor=color,fill=rellena,zorder=z)
    else:
        return circle((real(c[0]),imag(c[0])),c[1])

def mobius_on_point(matriz,punto):
    """matriz: Matriz compleja de 2x2
    punto: Número complejo
    """
    num = matriz[0,0]*punto+matriz[0,1]
    den = matriz[1,0]*punto+matriz[1,1]
    if den == 0:
        return num/(1e-5000)
    else:
        return num/den

def mobius_on_circle(matriz,circunferencia):
    """matriz: Matriz compleja de 2x2
    circunferencia[0]: Número complejo
    circunferencia[1]: Número real positivo
    """
    conjugada = conjugate(matriz[1,1]/matriz[1,0]+circunferencia[0])
    if conjugada == 0:
        z = circunferencia[0] - circunferencia[1]*circunferencia[1]/1e-5000
    else:
        z = circunferencia[0] - circunferencia[1]*circunferencia[1]/conjugada
    nuevoCentro = mobius_on_point(matriz, z)
    nuevoRadio = abs(nuevoCentro - mobius_on_point(matriz,
        circunferencia[0]+circunferencia[1]))
    return (nuevoCentro, nuevoRadio)

def schottky(generadores, circunferencias, inversos, nivelMax=1):
    """generadores: una lista de 4 matrices complejas de 2x2
```

```

circunferencias: una lista de 4 circunferencias (centro,radio)
inversos: una lista de 4 números enteros
nivelesMax: el número de niveles que se desea dibujar
(debe ser mayor o igual que 1) """
def definirColor(n):
    "n: nivel actual"
    return fuegoDoble(n)
def fuegoDoble(n):
    azul = 25.0/256, 133.0/256, 255.0/256
    rojo = 248.0/256, 7.0/256, 20.0/256
    amarillo = 241.0/256, 221.0/256, 49.0/256
    niv_2 = nivelMax/2.0
    niv = float(nivelMax)
    if n/niv < 0.5:
        return map(lambda i: azul[i]+n*(rojo[i]-azul[i])/niv_2, range(3))
    else:
        return map(lambda i: rojo[i]+(n-niv_2)*(amarillo[i]-rojo[i])/(niv-niv_2),
                    range(3))
def escalaGriz(n):
    co = 0.9-0.9*n/nivelMax
    return (co,co,co)
def fuego1(n):
    amarillo = 0.945098039, 0.866666667, 0.074509804
    rojo = 0.97254902, 0.02745098, 0.02745098
    return map(lambda i: amarillo[i]+n*(rojo[i]-amarillo[i])/nivelMax, range(3))
def fuego2(n):
    amarillo = 1.0, 1.0, 0.9804
    rojo = 0.97254902, 0.02745098, 0.02745098
    return map(lambda i: amarillo[i]+n*(rojo[i]-amarillo[i])/nivelMax, range(3))
def fuego3(n):
    azul = 25.0/256, 133.0/256, 255.0/256
    rojo = 0.97254902, 0.02745098, 0.02745098
    return map(lambda i: azul[i]+n*(rojo[i]-azul[i])/nivelMax, range(3))
def schottky_aux(g,ixgen,n):
    """g: Generador actual
    ixgen: Índice del generador actual (no puede aplicársele su inversa)
    n: Nivel actual
    """
    graficos = []
    for i in range(4):
        if i!=inversos[ixgen]:
            graficos.append(grafCircunferencia(mobius_on_circle(g,
                circunferencias[i]), color=definirColor(n),z=n))
    if n>=nivelMax:
        #print len(graficos)
        return sum(graficos)
    for i in range(4):

```



```

        if i!=inversos[ixgen]:
            graficos.append(schottky_aux(g*generadores[i],i,n+1))
#print len(graficos)
return sum(graficos)

#return sum(map(lambda x: grafCircunferencia(circunferencias[x],
        color=definirColor(0),z=0) , range(4)))
return sum(map(lambda x: grafCircunferencia(circunferencias[x],
        color=definirColor(0),z=0) + \
        schottky_aux(generadores[x],x,1), range(4)))

def theta_schottky(theta,niveles):
    P = sec(theta)
    r = tan(theta)
    Ca = (I*P,r)
    Cb = (P,r)
    CA = (-I*P,r)
    CB = (-P,r)
    CD = mobius_on_circle(m,CB)
    a = matrix([[csc(theta),I*cot(theta)],[-I*cot(theta),csc(theta)]])
    b= matrix([[csc(theta),cot(theta)], [cot(theta),csc(theta)]])
    A= a**-1
    B = b**-1
    return schottky([a,b,A,B],[Ca,Cb,CA,CB],[0,1,2,3],niveles)

#theta_schottky(pi/6,1).show()
#theta_schottky(float(pi/6),7).show(figsize=[10,10],axes=False)
#theta_schottky(pi/4,7).show(figsize=[40,40],dpi=200,axes=False)

```

Por otro lado, modificando los generadores en la definición de la función *theta – Schottky*, obtenemos las figuras de la sección 3.5, para diversos valores de  $\theta$

```

def theta_schottky(theta,niveles):
    P = sec(theta) #sec(th)
    Q = sqrt(25+16*tan(theta)*tan(theta))/(2*tan(theta))
    r = tan(theta)
    s = 5/2*cot(theta)
    Cb = (P,r)
    Ca = (I*Q,s)
    CB = (-P,r)
    CA = (-I*Q,s)
    b = matrix([[csc(theta),cot(theta)], [cot(theta),csc(theta)]])
    a = matrix([[sqrt(25+16*tan(theta)*tan(theta))/5,
        I*(8*tan(theta))/5], [-I*(2*tan(theta))/5,
        sqrt(25+16*tan(theta)*tan(theta))/5]])

```

```

A = a**-1
B = b**-1
return schottky([a,b,A,B],[Ca,Cb,CA,CB],[2,3,0,1],niveles)

```

Para las imágenes de los grupos conjugados de la sección 3.2.3, para la transformación  $\frac{1}{z}$ ,  $\theta = \pi/6$ .

```

def theta_schottky(theta,niveles):
    P = sec(theta)
    r = tan(theta)
    m = matrix([[0,1],[1,0]])
    M = m**-1
    Ca = (I*P,r)
    Cc = mobius_on_circle(m,Ca)
    Cb = (P,r)
    Cd = mobius_on_circle(m,Cb)
    CA = (-I*P,r)
    CC = mobius_on_circle(m,CA)
    CB = (-P,r)
    CD = mobius_on_circle(m,CB)
    c = m*matrix([[csc(theta),I*cot(theta)],[-I*cot(theta),csc(theta)]])*M
    d = m*matrix([[csc(theta),cot(theta)],cot(theta),csc(theta)]])*M
    C = c**-1
    D = d**-1
    return schottky([d,c,C,D],[Cd,Cc,CC,CD],[3,2,1,0],niveles)

#theta_schottky(pi/6,1).show()
#theta_schottky(float(pi/6),7).show(figsize=[10,10],axes=False)
#theta_schottky(pi/4,7).show(figsize=[40,40],dpi=200,axes=False)

```

Así como también para la transformación  $\frac{(1-i)z+1}{z+1+i}$ , para  $\theta = \pi/6$  y  $\theta = \pi/4$ .

## II Grafica puntos límites:

El siguiente algoritmo, grafica los centros de los círculos que tienen un radio menor que una porción del menor de los radios de los cuatro círculos iniciales, esto es  $c \cdot \min\{rad(C_a), rad(C_b), rad(A), rad(C_B)\}$ , donde  $c = 0.1, 0.01, 0.001$  o incluso más pequeño.

```

def circInfinito(x0):
    """Esta función devuelve una circunferencia de radio 'infinito'
    y que pasa por x0+0*I
    """
    infinito = 1e10
    return (infinito+x0+0.0*I,infinito)
def grafCircunferencia(c,color=None,z=0,rellena=True):
    """c es una tupla formada por dos elementos:

```

```

c[0]: Un número complejo
c[1]: Un número real positivo
"""
if color:
    return circle((real(c[0]), imag(c[0])), c[1], rgbcolor=color,
                  fill=rellena, zorder=z)
else:
    return circle((real(c[0]), imag(c[0])), c[1])
def mobius_on_point(matriz, punto):
    """matriz: Matriz compleja de 2x2
    punto: Número complejo
    """
    num = matriz[0,0]*punto+matriz[0,1]
    den = matriz[1,0]*punto+matriz[1,1]
    if den == 0:
        return num/(1e-5000)
    else:
        return num/den
def mobius_on_circle(matriz, circunferencia):
    """matriz: Matriz compleja de 2x2
    circunferencia[0]: Número complejo
    circunferencia[1]: Número real positivo
    """
    conjugada = conjugate(matriz[1,1]/matriz[1,0]+circunferencia[0])
    if conjugada == 0:
        z = circunferencia[0] - circunferencia[1]*circunferencia[1]/1e-5000
    else:
        z = circunferencia[0] - circunferencia[1]*circunferencia[1]/conjugada
    nuevoCentro = mobius_on_point(matriz, z)
    nuevoRadio = abs(nuevoCentro - mobius_on_point(matriz,
    circunferencia[0]+circunferencia[1]))
    return (nuevoCentro, nuevoRadio)

def schottky_original(generadores, circunferencias, inversos, nivelMax=1):
    """generadores: una lista de 4 matrices complejas de 2x2
    circunferencias: una lista de 4 circunferencias (centro,radio)
    inversos: una lista de 4 números enteros
    nivelesMax: el número de niveles que se desea dibujar
    (debe ser mayor o igual que 1)
    """
    def schottky_aux(g, ixgen, n):
        """g: Generador actual
        ixgen: Índice del generador actual (no puede aplicársele su inversa)
        n: Nivel actual
        """
        graficos = []
        for i in range(4):

```

```

        if i!=inversos[ixgen]:
            graficos.append(grafCircunferencia(mobius_on_circle(g,
                circunferencias[i],z=n))
    if n>=nivelMax:
        #print len(graficos)
        return sum(graficos)
    for i in range(4):
        if i!=inversos[ixgen]:
            graficos.append(schottky_aux(g*generadores[i],i,n+1))
    return sum(graficos)

return sum(map(lambda x: grafCircunferencia(circunferencias[x],z=0) + \
        schottky_aux(generadores[x],x,1), range(4)))

def schottky(generadores, circunferencias, inversos, nivelMax, radioMax):
    """generadores: una lista de 4 matrices complejas de 2x2
    circunferencias: una lista de 4 circunferencias (centro,radio)
    inversos: una lista de 4 números enteros
    nivelesMax: el número de niveles que se desea dibujar
    (debe ser mayor o igual que 1)
    radioMax: Máximo radio de las circunferencias que se dibujarán
    (a parte de las generadoras)
    """
    def schottky_aux(g,ixgen,n):
        """g: Generador actual
        ixgen: Índice del generador actual (no puede aplicársele su inversa)
        n: Nivel actual
        """
        graficos = []
        for i in range(4):
            if i!=inversos[ixgen]:
                estaCircunferencia = mobius_on_circle(g,circunferencias[i])
                if estaCircunferencia[1]<radioMax:
                    graficos.append(point((real(estaCircunferencia[0]),
                        imag(estaCircunferencia[0]))))
                    #graficos.append(grafCircunferencia(estaCircunferencia,z=n))
        if n>=nivelMax:
            return sum(graficos)
        for i in range(4):
            if i!=inversos[ixgen]:
                graficos.append(schottky_aux(g*generadores[i],i,n+1))
        return sum(graficos)

return sum(map(lambda x: grafCircunferencia(circunferencias[x],z=0) + \
        schottky_aux(generadores[x],x,1), range(4)))

```

```
def theta_schottky(niveles, x0, y0, R):
    r = -R+sqrt(x0*x0+y0*y0)
    Cb = (x0, r)
    Ca = (y0*I, R)
    CB = (-x0, r)
    CA = (-y0*I, R)
    b = matrix([[x0/r, (x0*x0-r*r)/r], [1/r, x0/r]])
    B = b**-1
    a = matrix([[y0/R, (R*R-y0*y0)/R*I], [I/R, y0/R]])
    A = a**-1
    return schottky([a, b, A, B], [Ca, Cb, CA, CB], [2, 3, 0, 1], niveles,
    0.001*min(map(lambda C: C[1], [Ca, Cb, CA, CB])))
```

```
#theta_schottky(pi/4, 4).show()
```

En la siguiente instrucción, colocamos los parámetros (nivel, x0, y0, R)

```
theta_schottky(7, 1e10, 1.0, 1.0).show(axes=False, xmin=-6, xmax=6, ymin=-4, ymax=4)
```

### III. Versión Recursiva:

```
def mobius_on_point(matriz, punto):
    """matriz: Matriz compleja de 2x2
    punto: Número complejo
    """
    num = matriz[0,0]*punto+matriz[0,1]
    den = matriz[1,0]*punto+matriz[1,1]
    if den == 0:
        return num/(1e-5000)
    else:
        return num/den
def mobius_on_circle(matriz, circunferencia):
    """matriz: Matriz compleja de 2x2
    circunferencia[0]: Número complejo
    circunferencia[1]: Número real positivo
    """
    if matriz[1,0]==0:
        conjugada = conjugate(matriz[1,1]/1e-50000+circunferencia[0])
    else:
        conjugada = conjugate(matriz[1,1]/matriz[1,0]+circunferencia[0])
    if conjugada == 0:
        z = circunferencia[0] - circunferencia[1]*circunferencia[1]/1e-50000
    else:
        z = circunferencia[0] - circunferencia[1]*circunferencia[1]/conjugada
    nuevoCentro = mobius_on_point(matriz, z)
    nuevoRadio = abs(nuevoCentro - mobius_on_point(matriz, circunferencia[0]+circunferencia[1]))
    return(nuevoCentro, nuevoRadio)
def Explore_tree(matriz, entero, nivel):
```

```

#global epsilon
global grafico
E=[entero-1,entero,entero+1]
for i in E:
    Y= matriz*gens[i%4]
    circunf = mobius_on_circle(Y,circ[i%4])
    if circunf[1]<epsilon or nivel>200:
        newpoint = mobius_on_point(Y,fix[i%4])
        grafico = grafico+point([real(circunf[0]), imag(circunf[0])])
    else:
        Explore_tree(Y,i,nivel+1)

#Inicializando epsilon
epsilon=0.1
grafico=Graphics()
k=[0,1,2,3]
gens = [matrix([[sqrt(2.),I],[-I,1]]),\
        matrix([[sqrt(2.),1],[1,sqrt(2.)]]),\
        matrix([[sqrt(2.),I],[-I,1]])**(-1),\
        matrix([[sqrt(2.),1],[1,sqrt(2.)]])**(-1)]
circ = [(I*sqrt(2.),1.), (sqrt(2.),1.), (-I*sqrt(2.),1.), (-sqrt(2.),1.)]
for c in k:
    Explore_tree(gens[c],c,1)
grafico.show(aspect_ratio=1)

```

# Bibliografía

- [1] Lascuarin Orive, Antonio. “Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional”. Febrero de 2010.
- [2] Series Caroline, Wrigt David. *Indra’ S Pearls, The Vision of Felix Klein*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. 2002.
- [3] W. Anderson, James. “Hyperbolic Geometry”. Segunda Edición. Springer 2000.
- [4] Cannon James, J. Floyd William, Kenyon Richard, Parry R. Walter. “Hyperbolic Geometry”. Revista Flavor of Geometry, MSRI Publications, Volumen 31, 1997.
- [5] Bernard Maskit, *Kleinian Groups*. Springer 1987.
- [6] S.L. Krushkal, B. N. Apanasov, N. A. Gusevski. *Kleinian Groups anda Uniformization in examples and problem*. American Mathematical Society.
- [7] Pedro Alegría .“Las demostraciones geométrica ”.
- [8] Bonahon Francis. “Low- Dimensional Geometry Fromm Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knot”. Revista Student Mathematical Library, IAS/Park city Mathematical Subseries, Volumen 49,2009.
- [9] Matsuzaki Katsuhiko. Taniguchi Masahiko Taniguchi. *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*. Oxford Mathematical Mographs.(2002).
- [10] Fenchel Werner , “Elementary Geometry in Hiperbolic Space”. Editorial Consultant, Universität Bielefeld, 1989.
- [11] Beardon Alan, "The Geometry of Discrete Groups".Springer, 1995.
- [12] Iversen Birger, "Hyperbolic Geometry". CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2008
- [13] Benedetti Ricardo, Petronio Carlo. "Lectures on Hyperbolic Geometry". Springer, 1992.